SBI-IFUSP

30M810T0601

MILTON PEREIRA ISIDRO FILHO

"ESTUDO DO MECANISMO DE PEIERLS-BRAYSHAW"

MESTRADO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESEN-
TADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO PAULO, MARÇO DE 1982

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Francisco Antonio Bezerra Coutinho pelo apoio, estímulo e orientação, necessários à realização deste trabalho.
- À FAPESP pelo apoio financeiro.

FWB
Karin Mota
Francisco Antonio Bezerra Coutinho

R E S U M O

O movimento de três partículas idênticas e sem spin em uma dimensão é o objeto de estudo neste trabalho. As equações de Faddeev que descrevem o espalhamento de uma partícula por um estado ligado de duas partículas é estudado estendendo-se analiticamente um dos momentos para todo o plano complexo (chamado de método de Brayshaw). Encontramos que quando um subsistema de duas partículas apresenta um estado ligado com energia v_0 , o sistema de três partículas correspondente apresentará um estado ligado com energia $4 v_0$. Também concluímos que se um subsistema de duas partículas apresenta uma ressonância para uma energia v_0 , o mesmo não ocorre no sistema de três partículas. Estes resultados resolvem uma longa controvérsia na literatura.

A B S T R A C T

The one dimension motion of three identical spinless particles is studied here. The Faddeev equations describing the scattering of one particle by a two particle bound-state is studied by extending analytically one of the momenta to the whole complex plane (Brayshaw's method). It is found that to a bound-state of energy v_0 in the two particle subsystem corresponds a bound-state of energy $4 v_0$ in the three particle system. It is also found that if the two particle subsystem has a resonance pole at v_0 it does not follow that there is a resonance in the three particle system. These results solve a long standing controversy in the literature.

Í N D I C E

CAPÍTULO

I - Introdução.....	1
II - Espalhamento de Três Partículas em uma dimensão...	4
III - Solução da Equação Integral.....	20
IV - Estudo das Singularidades.....	28
V - Aplicação do Método de Brayshaw para Ressonâncias.	34
Conclusão.....	37

APÊNDICE

A - Método de Brayshaw para uma equação integral simples	38
B - Cálculo da descontinuidade para a amplitude $\tau^{\pm}(x, x'; \omega)$	44
C - Representação Integral para $\tau^{\pm}(t, x'; \omega)$	48
D - Nova representação para $\tau^{\pm}(t, x'; \omega)$	55
E - Obtenção de Novas Equações Integrais.....	59
F - Estudo das Extensões Analíticas de $\tau^{\pm}(t, x'; \omega)$	64
Referências.....	71

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O

Esta dissertação se propõe a analisar o problema da existência de uma conexão entre estados ligados e/ou ressonâncias de um sistema de três partículas decorrentes de estados ligados e/ou ressonâncias de um subsistema de suas partículas. Esta questão há muito vinha sendo discutida na literatura, sem que nenhum resultado pudesse ser assumido como conclusivo.

A idéia do problema acima vem de um trabalho publicado por Ronald F. Peierls⁽¹⁾ que sugeria uma simples relação entre a posição aproximada de uma ressonância de três partículas e a posição de uma ressonância de duas partículas. Entretanto a idéia de Ronald F. Peierls foi criticada nos anos subsequentes por C. Goebel⁽²⁾ e C. Schmid⁽³⁾ os quais demonstraram que os argumentos utilizados por Peierls não eram satisfatórios.

Em um trabalho publicado por D.D. Brayshaw e pelo próprio Ronald F. Peierls⁽⁴⁾ os autores examinaram o problema exposto no princípio deste capítulo. Este trabalho foi feito considerando a equação de Faddeev uni-dimensional para o espalhamento de uma partícula por um estado ligado de duas outras partículas na aproximação de Lovelace⁽⁵⁾ e o resultado encontrado por Brayshaw e Peierls foi de que "se o espalhamen

to de duas partículas idênticas, sem spin, movendo-se em uma dimensão puder ser descrito por um único termo separável correspondente a uma ressonância com energia ν_0 , com um fator de forma com pequena variação, então a amplitude de espalhamento de três partículas correspondente apresentará um polo no denominador para uma energia $4\nu_0$ na segunda folha física. Para uma estreita ressonância de duas partículas isto sugere a ocorrência de uma ressonância de três partículas próximo a $4\nu_0$. A afirmação acima no caso de um estado ligado de duas partículas não é verdadeira". A ênfase nessa última afirmação é nossa.

A este resultado será atribuído o nome de mecanismo de Peierls-Brayshaw e o pólo para $4\nu_0$ denominar-se-á singularidade de Peierls.

Este resultado foi considerado por A.M. Badalyan e Yu A. Simonov^(6,7) e Yu A. Simonov⁽⁸⁾ os quais utilizaram uma técnica diferente. Eles consideraram a amplitude física de espalhamento entre a ressonância e a partícula, que na linguagem usual significa que eles consideram a amplitude "on energy shell" e suas propriedades analíticas, resolvendo exatamente as equações N/D resultantes as quais diferem daquelas obtidas através do mecanismo de Peierls-Brayshaw. Isto é eles não encontraram singularidades de Peierls.

A existência da singularidade de Peierls não foi abandonada. Trabalhos publicados por D.D. Brayshaw^(9,10) e D.D. Brayshaw e colaboradores⁽¹¹⁾, relatam descobertas experimentais utilizando o mecanismo de Peierls-Brayshaw ou uma

variante deste, denominado mecanismo de Brayshaw. Também alguns autores⁽¹²⁾ se referem ao trabalho de Simonov e colaboradores como uma investigação numérica aparentemente insuficiente para demonstrar a não validade do mecanismo de Peierls-Brayshaw.

Parte da dificuldade em se estabelecer a validade do trabalho de Brayshaw-Peierls⁽⁴⁾ está no fato de que eles utilizam um método pouco conhecido de resolver as equações de Lovelace-Faddeev que foi inventado por D.D. Brayshaw,⁽¹³⁾ além de que seu trabalho na parte principal é mal explicado e repleto de erros, tornando-se de difícil compreensão.

No segundo capítulo deste trabalho obtemos a equação de Faddeev unidimensional para três partículas idênticas e sem spin, na aproximação de Lovelace.

O terceiro capítulo apresenta a solução da equação de Lovelace-Faddeev obtida no segundo capítulo aplicando o método desenvolvido por D.D. Brayshaw.

No quarto capítulo examinamos as soluções da equação integral, verificando a existência de um estado ligado de três partículas decorrente do mecanismo inicialmente proposto, contrariando as conclusões de Brayshaw e Peierls.

Finalmente no quinto capítulo verificamos que as conclusões obtidas para estados ligados não podem ser estendidas para ressonâncias.

C A P Í T U L O I I

ESPALHAMENTO DE TRÊS PARTÍCULAS EM UMA DIMENSÃO

I - Introdução

Um método muito utilizado em Física é o de transformar a solução de uma equação diferencial, com certas condições de contorno, em uma equação integral com estas condições já incluídas.

Como é bem conhecido, a obtenção de equações integrais corretas e equivalentes a equação de Schrödinger para o espalhamento de três partículas foi resolvido por L.D.Faddeev no período de 1960-1963 (14-17)

Este capítulo, incluído nesta tese apenas por completude, tem por objetivo recapitular as equações de Faddeev para o espalhamento de três partículas em uma dimensão.

II - Equações de Faddeev em uma dimensão

L.D.Faddeev⁽¹⁴⁻¹⁷⁾ obteve as equações integrais corretas para a amplitude de espalhamento de um sistema de três par-

tículas não relativísticas. Entretanto para a amplitude de espalhamento de três corpos obtida por Faddeev, a aplicação direta a problemas práticos de interesse físico envolve dificuldades computacionais consideráveis. Por isto, uma grande quantidade de aplicações tem sido baseadas nas equações aproximadas sugeridas por Lovelace^(5, 18). Estas equações resultam das equações de Faddeev quando as amplitudes de dois corpos "off energy shell" são aproximadas por uma somatória de funções separáveis dos momentos iniciais e finais.

Como nosso objetivo é estudar a possível relação entre estados ligados e/ou ressonâncias no sistema de três partículas e estados ligados e/ou ressonâncias em um sistema de duas partículas, as equações de Lovelace são exatamente as que nos serão úteis.

As equações que aqui serão obtidas são precisamente aquelas derivadas por Lovelace⁽⁵⁾, só que são equações mais simples pois neste caso vamos tratar o problema de espalhamento em uma dimensão e assumiremos que as partículas não possuem spin. A cinemática do problema é não relativística.

Consideremos inicialmente o espalhamento de duas partículas de momento k_1 e k_2 no sistema de centro de massa (c.m) com massas m_1 e m_2 respectivamente.

O movimento de c.m pode ser removido se trabalhamos com o momento relativo $\vec{p}$:

$$p = \mu \left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right)$$

onde μ é a massa reduzida dada por:

$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} \quad (2)$$

O espalhamento de duas partículas é descrito pela matriz t "off-energy shell":

$$\langle p' | t(\nu) | p \rangle \quad (3)$$

onde ν é a energia do sistema de centro de massa e p e p' são respectivamente os estados iniciais e finais.

A amplitude física de espalhamento é obtida quando a condição de "energy-shell" é satisfeita ou seja:

$$\nu = \nu(p) = \nu(p') \quad (4)$$

onde

$$\nu(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Então é claro verificar que existem quatro amplitudes físicas de espalhamento para um dado ν fixo correspondendo a:

$$p = \pm (2\mu\nu)^{1/2} \quad (5)$$

e

$$p' = \pm (2\mu\nu)^{1/2}$$

ou seja, a reflexão ou a transmissão de uma onda incidente se movendo para a direita ou para a esquerda.

A dinâmica do problema é acrescentada quando introduzimos a equação que determina a matriz t . Como é bem conhecido $\langle p' | t(\nu) | p \rangle$ satisfaz a equação de Lippman-Schwinger com um potencial V :

$$\begin{aligned}
\langle p' | t(v) | p \rangle &= \langle p' | v(v) | p \rangle \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} dp'' \frac{\langle p' | v(v) | p'' \rangle \langle p'' | t(v) | p \rangle}{\frac{p''^2}{2\mu} - v - i\epsilon}
\end{aligned} \quad (6)$$

O potencial v pode ser bastante geral, por exemplo não local, dependente de energia, etc. Em muitos casos o potencial apresentará simetrias por reflexão sendo que o elemento de matriz de v depende somente da magnitude dos momentos relativos p e p' . A equação de Lippman-Schwinger preserva a simetria para a matriz t e com isto podemos definir:

$$\langle p' | t^{\pm}(v) | p \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle p' | t(v) | p \rangle \pm \langle p' | t(v) | -p \rangle \right] \quad (7)$$

e

$$\langle p' | v^{\pm}(v) | p \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle p' | v(v) | p \rangle \pm \langle p' | v(v) | -p \rangle \right]$$

A equação (6) pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\langle p' | t^{\pm}(v) | p \rangle &= \langle p' | v^{\pm}(v) | p \rangle \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} dp'' \frac{\langle p' | v(v) | p'' \rangle \langle p'' | t^{\pm}(v) | p \rangle}{\frac{p''^2}{2\mu} - v - i\epsilon}
\end{aligned} \quad (8)$$

As duas equações acima são o equivalente em uma dimensão ao conjunto de equações obtidas através da expansão em ondas parciais no problema tri-dimensional.

Definimos o operador $G_0(v)$ por

$$\langle p' | G_0(\nu) | p \rangle = \frac{\delta(p' - p)}{\nu - \frac{p^2}{2\mu} - i\varepsilon} \quad (9)$$

que é a função de Green para um sistema de dois corpos, e definimos o Kernel k como:

$$k(\nu) = \nu(\nu) G_0(\nu) \quad (10)$$

A equação (8) pode então ser reescrita formalmente como:

$$t(\nu) = \nu(\nu) + k(\nu) t(\nu) \quad (11)$$

Graficamente ela pode ser representada como na figura 1:

Figura 1

tendo uma solução da forma:

$$t(\nu) = [1 - k(\nu)]^{-1} \nu(\nu) \quad (12)$$

Devido a estrutura do G_0 sabemos que $t(\nu)$ apresenta um "square-root branch point" para $\nu = 0$, sendo que este se prolonga pela parte real e positiva do eixo ν . Também observamos que $t(\nu)$ apresenta pólos nos pontos onde $k(\nu)$ tem autovalores unitários, isto é, onde:

$$\det [1 - k(\nu)] = 0 \quad (13)$$

A amplitude física de espalhamento é definida como sendo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} t(\sqrt{} + i\varepsilon) \quad \text{e} \quad \text{Im } \sqrt{}^{1/2} > 0$$

Como podemos observar $t(\sqrt{})$ possui pólos na folha física e na folha não física. Os pólos que aparecem na folha física no eixo real negativo correspondem a estados ^{ligados} da interação de dois corpos. Na folha não física eles aparecem também no eixo real negativo ou em pares complexo conjugados e correspondem a ressonâncias de dois corpos quando se aproximam do eixo real positivo.

Então utilizando o teorema espectral podemos escrever que:

$$\langle p' | t(\sqrt{}) | p \rangle = \sum_n \frac{r_n(p', p)}{D_n(\sqrt{})} + \langle p' | \bar{t}(\sqrt{}) | p \rangle \quad (14)$$

onde $D_n(\sqrt{})$ se anula para $\sqrt{} = \sqrt{}_n$ e $\bar{t}(\sqrt{})$ é analítica exceto no "branch cut".

Em particular, nós notamos que o resíduo de $r_n(p, p')$, para pólos devido aos estados ligados, fatorizam nas variáveis "off-shell" p, p' , de onde podemos escrever que:

$$r_n(p, p') = g_n(p') g_n^*(p)$$

g sendo real quando $\sqrt{}_n$ é real (ver (8)).

Vamos agora considerar o espalhamento de três partículas A, B e C com os respectivos momentos k_A, k_B e k_C e as massas m_A, m_B, m_C . Segundo a notação introduzida por Lovelace⁽⁵⁾ podemos introduzir os seis momentos:

$$p_\alpha = \mu_\alpha \left(\frac{k_\beta}{m_\beta} - \frac{k_\gamma}{m_\gamma} \right)$$

$$q_\alpha = M_\alpha \left(\frac{k_\beta + k_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} - \frac{k_\alpha}{m_\alpha} \right) \quad (15)$$

onde

$$\mu_\alpha^{-1} = m_\beta^{-1} + m_\gamma^{-1}$$

$$M_\alpha^{-1} = m_\alpha^{-1} + (m_\beta + m_\gamma)^{-1}$$

sendo $\alpha\beta\gamma$ alguma permutação cíclica de ABC. Utilizando esta definição notamos que $-q_\alpha$, no sistema global de c.m., é exatamente o momento da partícula α e p_α é o momento da partícula β no sistema de centro de massa de β e γ .

A energias correspondentes a p_α e q_α são:

$$v_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha}, \quad w_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} \quad (16)$$

Podemos escolher qualquer par de seis vetores p_α, q_α , independentes, e a transformação entre eles será dada por

$$p_\alpha = - \left(\mu_\alpha / m_\gamma \right) q_\alpha - q_\beta$$

$$p_\beta = q_\alpha + \left(\mu_\beta / m_\gamma \right) q_\beta \quad (17)$$

O espalhamento de três partículas é descrito pela sua amplitude "off-shell" dada por:

$$\langle p'q' | T(W) | pq \rangle \quad (18)$$

onde W é a energia total do sistema de três partículas e $|pq\rangle$ é um estado de três partículas sem indicarmos qual par de

momentos está sendo usado para especificá-lo. A condição de "energy-shell" é:

$$W = w_\alpha + v_\alpha = w_{\alpha'} + v_{\alpha'} \quad (19)$$

O espalhamento de três partículas pode apresentar, diversas complicações, como veremos abaixo, devido ao fato de que um par de partículas poder formar um estado ligado. Então é possível termos uma transição de um estado inicial de três partículas livres para um estado final onde temos um estado ligado de duas partículas e a terceira partícula livre, ou ainda processos de rearranjo no qual temos um estado ligado e uma partícula livre no estado inicial o qual se quebra e um outro par é formado. Todas essas informações sobre esses processos estão contidas no comportamento do elemento de matriz $T(W)$ para os diferentes valores de suas variáveis.

Suponhamos agora que as partículas B e C possuam um estado ligado para uma energia $-v_{0A}$, então a amplitude de espalhamento de dois corpos toma a forma:

$$\langle p_A' | t_A(v_A) | p_A \rangle = \frac{g(p_A') g^*(p_A)}{D_0(v_A)} + \dots \quad (20)$$

Então, utilizando os resultados de Faddeev⁽¹⁷⁾, podemos escrever a amplitude de espalhamento de três partículas como

$$\begin{aligned}
\langle p_A' q_A' | T(W) | p_A q_A \rangle &= \frac{g(p_A')}{D_0\left(\frac{p_A'^2}{2\mu_A}\right)} F_A(q_A', p_A', q_A; W) \\
&+ \tilde{F}_A(p_A', q_A', q_A; W) \frac{g(p_A)}{D_0\left(\frac{p_A^2}{2\mu_A}\right)} \\
&+ \frac{g(p_A')}{D_0\left(\frac{p_A'^2}{2\mu_A}\right)} \zeta_{AA}(q_A', q_A; W) \frac{g(p_A)}{D_0\left(\frac{p_A^2}{2\mu_A}\right)} \\
&+ R_{AA}(p_A', q_A', p_A, q_A; W)
\end{aligned} \tag{21}$$

onde R , F e $\tilde{F}$ são todos regulares, próximos a $p_A^2/2\mu_A \equiv \nu_{0A}$, $p_A'^2/2\mu_A \equiv \nu_{0A}$. A figura 2 mostra as equações (20) e (21) graficamente onde $g(p)$ é o fator de forma do vértice para a formação de um estado ligado BC e D_0^{-1} é o propagador do estado BC. F_A pode ser identificado como a amplitude de formação de um estado ligado pela interação com a terceira partícula, $\tilde{F}_A$ como a amplitude de quebra de um estado ligado e ζ_{AA} como a amplitude de espalhamento "off energy shell" de duas partículas sendo elas o estado ligado BC e a partícula A, [a qual esta muito bem definida independente da discussão do espalhamento de três partículas.] Outras funções F e $\tilde{F}$ tem interpretações correspondentes, como as amplitudes de formação e quebra de um estado ligado pela interação com a terceira partícula. Outras quantidades podem ser introduzidas para descrever o reagrupamento nas colisões tais como ζ_{AB} , ζ_{BC} , ζ_{AC} ,

Figura 2

O propagador D_0^{-1} pode apresentar um pólo correspondente a uma ressonância ou a uma partícula instável, então uma discussão análoga a realizada acima poderia ser levada adiante, só que nesta não existiria uma definição independente de como uma amplitude de espalhamento, devido a ausência de estados assintóticos.

Nós pretendemos obter as equações satisfeitas por τ_{AA}, τ_{BC} , etc e para tanto vamos fazer suas simplificações; primeiramente vamos assumir que para cada par de partículas existe um simples estado ligado ou uma ressonância em vez de uma soma como em (14). Depois assumiremos que o potencial $\langle p'q' | V(w) | pq \rangle$ responsável pelo espalhamento de três partículas é composto somente por potenciais separáveis de duas partículas. Finalmente, considerando que estamos trabalhando em

uma dimensão, teremos⁽⁴⁾:

$$T^{(3)} = \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{(2)} - \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha}^{(2)} \chi_{\alpha\beta} T_{\beta}^{(2)} \quad (22)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \tilde{\delta}_{\alpha\beta} G_0 + \sum_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} T_{\alpha} \chi_{\gamma\beta} \quad (23)$$

onde $\tilde{\delta}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 1$

e

$$\langle p'_A q'_A | T_{\alpha}(W) | p_{\alpha} q_{\alpha} \rangle = \delta(q_{\alpha} - q'_{\alpha}) \langle p'_A | t_{\alpha}(W - w_{\alpha}) | p_{\alpha} \rangle \quad (24)$$

e

$$\langle p'_A q'_A | G_0(W) | p_{\alpha} q_{\alpha} \rangle = \frac{\delta(p'_A - p_{\alpha}) \delta(q'_A - q_{\alpha})}{W - w_{\alpha} - v_{\alpha} + i\varepsilon} \quad (25)$$

Vamos então definir o estado

$$|A\rangle = \int d p_A g(p_A) |p_A\rangle \quad (26)$$

e

$$|q_A, A\rangle = \int d p_A g(p_A) |p_A, q_A\rangle$$

então a equação (14) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$t_A(v) = \frac{|A\rangle \langle A|}{D_0(v_A)} + \tilde{t}_A \quad (27)$$

[onde $\tilde{t}$ é ortogonal a $|A\rangle$]

Da mesma forma podemos reescrever a matriz T como sendo:

$$T_A(W) = \int d q_A \frac{|q_A, A\rangle \langle q_A, A|}{D_0(W - W_A)} + \tilde{T}_A \quad (28)$$

Inserindo (28) em (22) e tomando seus elementos de matriz entre os estados $|p_A, q_A\rangle$ e $|p_A', q_A'\rangle$ e comparando com (21) chegamos a seguinte conclusão:

$$\tilde{\zeta}_{AA}(q_A', q_A; W) = -\langle q_A', A | \chi_{AA} | q_A, A \rangle \quad (29)$$

Este é o elemento de matriz de χ_{AA} entre os estados $|q_A, A\rangle$ e $|q_A', A\rangle$ que dão origem a amplitude de espalhamento "off-shell" da partícula composta BC pela partícula A com momento inicial e final no c.m. dados respectivamente por q_A e q_A' . Em geral a amplitude de espalhamento é:

$$\tilde{\zeta}_{\alpha\beta}(q_\alpha', q_\beta; W) = -\langle q_\alpha', \alpha | \chi_{\alpha\beta} | q_\beta, \beta \rangle \quad (30)$$

onde χ é dado por (23).

De (28) nós podemos obter as equações satisfeitas por estas amplitudes. Até este momento nós havíamos assumido que os sistemas de duas partículas possuem pólos de estado ligado ou ressonância devido as partículas BC, considerados no primeiro termo de (20).

Agora vamos supor que o espalhamento de duas partículas é dominado por estados ligados ou ressonâncias assim po-

deremos considerar que a matriz t "off-shell" fatorizará em função dos momentos iniciais e finais nas proximidades do pólo devido aos estados ligados ou às ressonância. Como o Kernel das equações de três partículas depende das matrizes t de duas partículas, podemos afirmar que somente os termos devido a estados ligados e ressonâncias são importantes no processo. (As interações de três partículas consistem puramente de diferentes combinações dos estados de dois corpos).

Então as equações (23) reduzem-se a um conjunto de equações integrais unidimensionais acopladas:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta}(q_\alpha, q'_\beta; W) &= Z_{\alpha\beta}(q_\alpha, q'_\beta; W) \\ &- \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} dq''_n \frac{Z_{\alpha\gamma}(q_\alpha, q''_\gamma; W) Z_{\alpha\beta}(q''_\gamma, q'_\beta; W)}{D_0(W - w''_n)} \end{aligned} \quad (31)$$

onde:

$$Z_{\alpha\beta} \text{ é o elemento de matriz de } -G_0 \tilde{\delta}_{\alpha\beta} \dots$$

Usando as relações cinemáticas dadas em (17) nós podemos escrever para $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned} \langle p_\alpha q_\alpha | p'_\beta q'_\beta \rangle &= \delta(q_\alpha - p'_\beta + \frac{\mu_\beta}{m_\beta} q'_\beta) \cdot \\ &\delta\left(p_\alpha + \frac{\mu_\alpha}{m_\alpha} p'_\beta + \left(1 - \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{m_\alpha^2}\right) q'_\beta\right) \end{aligned}$$

(32)

e desde que

$$w_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}^2}{2M_{\alpha}} \quad \text{e} \quad v_{\alpha} = \frac{p_{\alpha}^2}{2\mu_{\alpha}}$$

nós podemos utilizar (17) para escrever que

$$w_{\alpha} + v_{\alpha} = w_{\beta} + v_{\beta} = \frac{q_{\alpha}^2}{2\mu_{\beta}} + \frac{q_{\beta}^2}{2\mu_{\alpha}} + \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{m_{\gamma}} \quad (33)$$

e então podemos calcular $Z_{\alpha\beta}$ utilizando as definições dadas em (26) e (30) como sendo

$$Z_{\alpha\beta}(q_{\alpha}, q_{\beta}; W) = \frac{\tilde{J}_{\alpha\beta} g_{\alpha} \left(-\frac{\mu_{\alpha}}{m_{\gamma}} q_{\alpha} - q_{\beta} \right) g_{\beta}^* \left(q_{\alpha} + \frac{\mu_{\beta}}{m_{\gamma}} q_{\beta} \right)}{\left(\frac{q_{\alpha}^2}{2\mu_{\beta}} + \frac{q_{\beta}^2}{2\mu_{\alpha}} + \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{m_{\gamma}} - W - i\epsilon \right)} \quad (34)$$

onde $\alpha\beta\gamma$ é alguma permutação cíclica de ABC e g_A , g_B e g_C são os fatores de forma no espaço dos momentos correspondentes aos estados compostos formados pelo espalhamento das partículas B e C. C e A e A e B respectivamente.

As equações acima são precisamente as equações de Faddeev-Lovelace⁽⁸⁾ a menos das constantes de normalização.

No caso em que estamos interessados, consideraremos as três partículas idênticas e com massa igual a unidade, então o conjunto de equações (31) se reduz a uma única equação dada por:

$$\zeta(x, x'; W) = Z(x, x'; W) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{Z(x, x''; W) \zeta(x'', x'; W)}{D_0(W - \frac{3}{4}x''^2)} \quad (35)$$

$$e \quad Z(x, x'; W) = \frac{-2g(-\frac{1}{2}x - x')g^*(x + \frac{1}{2}x')}{x^2 + x'^2 + xx' - W - i\varepsilon}$$

Podemos reescrever estas equações em uma forma mais conveniente separando as partes simétricas e anti-simétrica como na equação (7):

$$\begin{aligned} \zeta^\pm(x, x'; W) &= \frac{1}{2} \left[\zeta(x, x'; W) \pm \zeta(-x, x'; W) \right] \\ Z^\pm(x, x'; W) &= \frac{1}{2} \left[Z(x, x'; W) \pm Z(-x, x'; W) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

então temos que:

$$\zeta^\pm(x, x'; W) = Z^\pm(x, x'; W) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{Z^\pm(x, x''; W) \zeta^\pm(x'', x'; W)}{D_0(W - \frac{3}{4}x''^2)} \quad (37)$$

A equação acima é a equação básica que procuraremos resolver. Ela se assemelha a equação de Lippmann-Schwinger, onde Z faz o papel do potencial e $D_0^{-1}(W - \frac{3}{4}x''^2)$ o papel do propagador no lugar de $(\frac{x''^2}{2m} - E)$.

Para certos valores de W a equação acima apresenta singularidades que são interpretadas como as múltiplas possibilidades de ocorrerem reespalhamentos "on energy shell". O pro-

cedimento usual para resolver estas equações é fazer uma expansão de Fredholm, mas devido a presença das singularidades acima o método de Fredholm converge lentamente.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

O nosso objetivo agora é obter uma solução da equação (37). Para isto usaremos o método proposto por D.D. Brayshaw^(4,13) que como veremos é apropriado para resolver o nosso problema.

O método de Brayshaw é, em nossa opinião, muito elegante. Entretanto não tem sido usado na literatura. Julgamos que a razão disto é que os trabalhos de Brayshaw são em geral marcados por uma grande quantidade de "mis-prints", alguns erros e total falta de explicação de detalhes essenciais. Por isto existe falta de confiança em qualquer resultado obtido com este método^(*).

De fato os resultados apresentados por Brayshaw e Peierls⁽⁴⁾ (equações 4-12 a 4-18) na referência principal estão errados ou com tantos "mis-prints" que é impossível saber se as conclusões apresentadas estão corretas. Daí, a polêmi-

(*) Comunicação privada de S.Adkihari a F.A.B.Coutinho

ca gerada na literatura como já explicado na introdução.

Neste capítulo o método de Brayshaw é aplicado à equação (37). Todos os detalhes são cuidadosamente explicados no texto ou no caso dos cálculos mais longos em Apêndices. Os resultados obtidos diferem em detalhes dos obtidos por Brayshaw e Peierls e não suportam as conclusões obtidas por estes autores. No apêndice nós reproduzimos o cálculo de Brayshaw e Peierls para um Kernel simples, e é um bonito exemplo de aplicação do Método de Brayshaw.

O primeiro passo do Método de Brayshaw consiste em estender analiticamente a equação (37) em um dos momentos externos, no caso escolhemos x .

A equação (37) define $\zeta^\pm(x, x'; w)$ para qualquer valor real de x . Entretanto não se pode fazer x complexo pois para certos valores de x complexo o "kernel" da equação integral torna-se singular.

Para o Kernel da equação integral (37) que é representado por $Z(x, x'; w)$, cujo denominador apresenta, como veremos a seguir duas linhas de descontinuidade devido a sua estrutura quadrática

$$x^2 + x'^2 + xx' - w = [x - \phi_+(x')] [x - \phi_-(x')] \quad (38)$$

onde

$$\phi_\pm(x) = \frac{-x'}{2} \pm (w - \frac{3}{4}x'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nós podemos ter pólos adicionais devido aos fatores de forma $g(p)$, mas por enquanto vamos considerá-los constantes, devendo retornar a este ponto no futuro. Além das linhas de descontinuidade temos pólos decorrentes do propagador $D_0(W - \frac{3}{4} x'^2)$, que no caso de ser um propagador de estados ligados apresentará um zero para:

$$W - \frac{3}{4} x'^2 = \nu_0 \quad \text{e} \quad \nu_0 < 0$$

ou

$$x'^2 = E = \frac{4}{3} (W - \nu_0)$$

As raízes são iguais e opostas. Os "mappings" de $\phi_{\pm}$ estão ilustrados na figura 3 para o caso quando W é real e negativo e menor que ν_0 , ou seja, quando $E < 0$. As linhas $\phi_{\pm}$ são dadas por $z = \phi_{\pm}(x)$ onde x é real.

Figura 3

As funções $\phi_{\pm}$ tem as seguintes propriedades:

$$\phi_{\pm}(\phi_{\pm}(z)) = \phi_{\mp}(z) \text{ ou } z \quad (39)$$

$$\phi_{\pm}(\phi_{\mp}(z)) = z \text{ ou } \phi_{\pm}(z)$$

onde as duas alternativas correspondem aos diferentes valores nas diferentes folhas ligadas pelos "branch cuts" começando para $\pm (4/3 w)^{1/2}$

Efetuada o cálculo da descontinuidade

$$D_{\pm}(z, x'; w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\zeta^{\pm}(z_0 + i\epsilon, x'; w) - \zeta^{\pm}(z_0 - i\epsilon, x'; w)]$$

onde

$$z_0 = \phi_{\pm}(x)$$

obtemos, efetuando os cálculos como explicados no apêndice B que:

$$D_{\pm}(z, x'; w) = \frac{(-2\pi i)(2g g^*) \zeta^{\pm}(\phi_{\mp}(z), x'; w)}{2(W - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(W - \frac{3}{4} \phi_{\mp}^2(z))} \quad (40)$$

Definindo então as funções:

$$\begin{aligned} \Theta_{+}(z) &= 0 \text{ para } z \text{ abaixo de } \bar{\Phi}_{+} \\ &= 1 \text{ para } z \text{ acima de } \bar{\Phi}_{+} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{-}(z) &= 0 \text{ para } z \text{ acima de } \bar{\Phi}_{-} \\ &= 1 \text{ para } z \text{ abaixo de } \bar{\Phi}_{-} \end{aligned}$$

Então a equação integral pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\pm}(z, x'; w) = & \mathcal{Z}^{\pm}(z, x'; w) \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{\mathcal{Z}(z, x''; w) \mathcal{G}^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0 \left(w - \frac{3}{4} x''^2 \right)} \\
& - \frac{(2\pi i) (2g g^*)}{2 \left(w - \frac{3}{4} z^2 \right)^{1/2}} \left[\frac{\theta_+(z) \mathcal{G}^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0 \left(w - \frac{3}{4} \phi_-^2(z) \right)} \right. \\
& \left. + \frac{\theta_-(z) \mathcal{G}^{\pm}(\phi_+(z), x'; w)}{D_0 \left(w - \frac{3}{4} \phi_+^2(z) \right)} \right] \quad (42)
\end{aligned}$$

O próximo passo segundo o procedimento de Brayshaw e Peierls é efetuar uma mudança de representação, fazendo uma transformação do tipo de Cauchy

$$\mathcal{G}^{\pm}(t, x'; w) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{\mathcal{G}^{\pm}(z, x'; w)}{t - z} \quad (43)$$

Então obtemos, efetuando os cálculos como no apêndice C, e fazendo a aproximação de que a matriz para o propagador de dois corpos varia linearmente nas proximidades de $\nu = \nu_0$ quando

$$D_0(\nu) = (\nu - \nu_0) D_0'(\nu_0)$$

que:

$$\begin{aligned}
\zeta^{\pm}(t, x'; w) = & \quad Z^{\pm}(t, x'; w) \\
& - \int_{\Gamma_1(w)} \frac{dz}{t-z} \frac{(2g g^*)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2}} \cdot \frac{\zeta^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4} \phi_-^2(z))} \\
& + \frac{(2\pi i)(2g g^*)}{t - \phi_+(E^{1/2})} \frac{1}{2(w - \frac{3}{4} \phi_+^2(E^{1/2}))^{1/2}} \frac{\zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{E^{1/2} D_0'(v_0)} \\
& - \int_{\Gamma_2(w)} \frac{dz}{t-z} \frac{(2g g^*)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_+(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4} \phi_+^2(z))} \quad (44) \\
& - \frac{(2\pi i)(2g g^*)}{t - \phi_-(-E^{1/2})} \frac{1}{2(w - \frac{3}{4} \phi_-^2(-E^{1/2}))^{1/2}} \frac{\zeta^{\pm}(-E^{1/2}, x'; w)}{E^{1/2} D_0'(v_0)}
\end{aligned}$$

onde as integrais $\Gamma_1(w)$ e $\Gamma_2(w)$ estão efetuadas sobre $+i\infty$ a $(4/3 w)^{1/2}$ e de $(4/3 w)^{1/2}$ a $+i\infty$ e a outra de $-i\infty$ a $(-4/3 w)^{1/2}$ e de $(-4/3 w)^{1/2}$ a $-i\infty$ respectivamente.

As equações integrais acima podem ser colocadas sobre a forma de uma única equação integral levando-se em conta as diferentes simetrias apresentadas pelo problema. Os detalhes estão feitos no Apêndice D, então ficamos com:

$$\bar{z}^{\pm}(t, x'; w) = z^{\pm}(t, x'; w)$$

$$- \frac{(2gq^*)(2\pi i)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E^{1/2}))} \frac{\bar{z}^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{E^{1/2} D_0'(v_0)} \left[\frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) - t} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) + t} \right] \\ + \int_{\Gamma(w)} dz \left(\frac{1}{t - z} \pm \frac{1}{t + z} \right) \frac{2gq^*}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{\bar{z}^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))}$$

(45)

onde $\Gamma(w)$ é a integral $(\frac{4}{3}w)^{1/2} a + i\infty$.

Se utilizarmos um processo iterativo para a resolução da equação integral acima chegaremos a conclusão que a solução da equação integral acima ficará expressa como solução de equações integrais mais simples como está feito no apêndice

E

Então a equação acima ficará escrita como

$$\bar{z}^{\pm}(t, x'; w) = z^{\pm}(t, x'; w)$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz \beta_{\pm}(t, z) \frac{(2gq^*)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{D_{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))}$$

$$- \frac{(2gq^*)(2\pi i)}{(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E^{1/2}))^{1/2}} \frac{\bar{z}^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{E^{1/2} D_0'(v_0)} E_{\pm}(t, \phi_+(E^{1/2}); w)$$

(46)

onde

$$D_{\pm}(\phi_{-}(z), x'; w) = z^{\pm}(\phi_{-}(z), x'; w)$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz' \frac{\beta_{\pm}(\phi_{-}(z), z') (2g g^{*}) D_{\pm}(\phi_{-}(z'), x'; w)}{(w - \frac{3}{4} z'^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{-}^2(z'))}$$

(47)

e

$$E_{\pm}(z, \phi_{+}(E^{1/2}); w) = \beta_{\pm}(z, \phi_{+}(E^{1/2}))$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz' \frac{\beta_{\pm}(t, z') \cdot 2g g^{*} E_{\pm}(\phi_{-}(z'), \phi_{+}(E^{1/2}); w)}{(w - \frac{3}{4} z'^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{-}^2(z'))}$$

e

$$\beta_{\pm}(x, y) = \left(\frac{1}{x-y} \pm \frac{1}{x+y} \right)$$

C A P Í T U L O I V

ESTUDO DAS SINGULARIDADES

Neste capítulo apresentaremos quais são as singularidades que ocorrem nas equações obtidos no capítulo III e faremos uma análise e interpretação das singularidades obtidas.

Temos do capítulo anterior que a amplitude de espalhamento é dada por

$$\zeta^{\pm}(t, x'; W) = Z^{\pm}(t, x'; W) + \frac{\int dz \beta_{\pm}(t, z) \cdot (2gg^*) D_{\pm}(\phi_{\pm}(z), x'; W)}{\Gamma(W) \cdot 2(W - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(W - \frac{3}{4}\phi_{\pm}^2(z))} \quad (48)$$

$$- \frac{(2gg^*)(2\pi i) E^{\pm}(t, \phi_{\pm}(E^{1/2}); W) \zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; W)}{(W - \frac{3}{4}\phi_{\pm}^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0(v_0)}$$

A amplitude fisicamente importante é a amplitude "on-energy shell" que é obtida quando colocamos as variáveis $t = x' = E^{1/2}$. Entretanto se a amplitude "half on-shell" apresentar singularidades independentes da variável x' , estas singularidades estarão presentes na amplitude "on energy shell".

Fazendo $t = E^{1/2}$ na equação (48) temos:

$$\zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w) = z^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)$$

$$+ \int \frac{dz}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(E^{1/2}, z) (2gg^*) D_{\pm}(\phi_{\pm}(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(z))} \quad (49)$$

$$- \frac{(2gg^*) (2\pi i) E_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}); w) \zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(v_0)}$$

Separando os termos em $\zeta^{\pm}(E^{1/2})$ ficamos com:

$$\zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w) \left[1 - \frac{(2gg^*) (2\pi i) E_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}); w)}{E^{1/2} 2(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(E^{1/2}))^{1/2} D_0'(v_0)} \right] = z^{\pm}(E^{1/2}, x'; w) \quad (50)$$

$$+ \int \frac{dz}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(E^{1/2}, z) (2gg^*) D_{\pm}(\phi_{\pm}(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(z))}$$

ou ainda

$$\zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w) = z^{\pm}(E^{1/2}, x'; w) + \int \frac{dz}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(E^{1/2}, z) 2gg^* D_{\pm}(\phi_{\pm}(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(z))} \quad (51)$$

$$1 - \frac{(2gg^*) (2\pi i) E_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}); w)}{2(w - \frac{3}{4} \phi_{\pm}^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(v_0)}$$

O denominador da equação (51) apresenta singularidades provenientes de diversos fatores. O primeiro deles é devido ao fato de existir um "branch-point" do tipo raiz quadrada com origem em $E=0$ do termo $E^{1/2}$. Este "threshold" é decorrente do sistema de "quasi-two particle" do estado ligado ou da ressonância de duas partículas interagindo com a terceira partícula. A equação integral $E_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}); W)$ contém um termo do tipo $\beta_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}))$. Este termo possui um "branch point" do tipo raiz quadrada para $W=0$ que corresponde ao "threshold" de três corpos.

Agora vamos fazer uma análise mais detalhada do denominador $\beta_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2}))$. Temos que:

$$\beta_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(E^{1/2})) = \left(\frac{1}{E^{1/2} - \phi_{\pm}(E^{1/2})} \pm \frac{1}{E^{1/2} + \phi_{\pm}(E^{1/2})} \right) \quad (52)$$

onde o produto dos dois denominadores é

$$(E^{1/2} - \phi_{\pm}(E^{1/2})) (E^{1/2} + \phi_{\pm}(E^{1/2})) = \frac{E}{4} - (W - \frac{3}{4}E) \quad (53)$$

e lembrando que

$$E = \frac{4}{3} (W - \nu_0) \quad (54)$$

Então vem quando substituímos (54) em (53):

$$W = 4 \nu_0 \quad (55)$$

ou se verificamos as singularidades dos denominadores em fun

ção da energia temos que:

$$E = 4 \nu_0$$

ou

$$E = \frac{4}{9} \nu_0$$

(56)

Devemos notar que as expressões até aqui obtidas, foram devidas a um W fixo e na região física de espalhamento ou seja

$$\operatorname{Re} W > 0$$

$$\operatorname{Im} W^{1/2} \gtrsim 0$$

(57)

Nós também assumimos que ν_0 era a energia de um estado ligado e portanto um número real e negativo.

Para verificarmos a validade dos resultados obtidos devemos variar W já que nas nossas equações ele foi mantido fixo, e posteriormente estender W para a região das ressonâncias para verificar a validade nesta região. Como verificaremos a equação $\zeta^\pm(t, x'; W)$ obtida não representa a continuação correta em todas as regiões.

Vamos permitir que W varie e manter ν_0 fixo e real negativo. Temos que na equação (46) a integral sobre $\Gamma(W)$ é feita com um propagador denotado por $D_0(W - \frac{3}{4} \phi^2(z))$ que é dado por:

$$D_0(W - \frac{3}{4} \phi^2(z)) = W - \frac{3}{4} \phi^2(z) - \nu_0 \quad (58)$$

Na equação acima quando $z = (\frac{4}{3} W)^{1/2}$ a integral em (45) apresentará uma descontinuidade que surge devido ao aparecimento de uma singularidade de "end-point" na integral sobre

o contorno $\Gamma(w)$. (ver ref.19)

Então, fazendo $z = \left(\frac{4}{3}w\right)^{1/2}$ em (58) e utilizando (54), obtemos que:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{3}{2} E^{1/2}\right) = 0$$

e

(59)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3}{2} E^{1/2} - j_0^{1/2}\right) = 0$$

A linha de descontinuidades devidas ao propagador vai ser uma parábola como podemos ver na figura 4:

Então como verificamos os resultados obtidos em (56) e (57) não são válidos pois as singularidades propostas estão fora do domínio de analiticidade da função.

Novamente podemos calcular a descontinuidade na parábola acima que é obtida seguindo os cálculos das refs. (19,20). Os cálculos são explicados no apêndice F. Nós obtemos que a descontinuidade apresenta o mesmo valor que o último termo da equação (46). Nas referências (19,20) existe uma discussão detalhada quanto ao sinal com o qual devemos tomar a descontinuidade, e devido aos argumentos que estão apresen-

tados no Apêndice F, ficamos com o sinal (-). O fato de tomarmos este sinal, contraria os resultados apresentados por Brayshaw e Peierls⁽⁴⁾, permitindo assim o aparecimento de um estado ligado de três corpos decorrente do estado ligado de dois corpos.

Então se o espalhamento de duas partículas sem spin movendo-se em uma dimensão puder ser descrito por um simples termo separável correspondente de um estado ligado com energia $\mathcal{V}_0$, com um fator de forma que varie lentamente, então a amplitude de espalhamento de três partículas apresentará um pólo no denominador para uma energia $4\mathcal{V}_0$ na folha física. Este pólo corresponde a um estado ligado de três partículas com uma energia $4\mathcal{V}_0$.

Este resultado é independente dos termos remanescentes da expansão espectral feita no capítulo II e também das possíveis contribuições de singularidades devidas aos fatores de forma. O estado ligado de três corpos só deixará de existir se o numerador da equação (51) se anular quando $W = 4\mathcal{V}_0$.

Um bom teste seria fazer os cálculos para um modelo específico. Afortunadamente pelo menos três cálculos^(21,22,23) já foram efetuados embora os potenciais de dois corpos fossem diferentes (exceto pelo fato de que eles possuem um estado ligado), os cálculos mostram explicitamente um pólo para $W=4\mathcal{V}_0$.

Portanto nosso resultado como expresso pelas equações (50) e (51) sugere que o pólo para $W=4\mathcal{V}_0$ é um resultado geral.

C A P Í T U L O V

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE BRAYSHAW PARA RESSONÂNCIAS

O objetivo deste capítulo é de discutir a existência de singularidades no caso quando ν_0 é a energia de uma ressonância no sistema de dois corpos, ou seja quando

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \nu_0 &> 0 \\ \operatorname{Im} \nu_0^{1/2} &< 0 \end{aligned}$$

Nós devemos considerar quais são as singularidades que surgem quando fazemos W fixo e deixamos ν_0 variar nas equações do capítulo anterior.

Entretanto, quando fizermos a continuação analítica acima proposta percorrendo o caminho mostrado na figura 5, teremos que o propagador de duas partículas utilizado para a região dos estados ligados deixa de ser válido, violando a unitariedade da matriz t de dois corpos, e consequentemente a unitariedade de três corpos. Este fato foi discutido no trabalho de C.Lovelace⁽⁵⁾ onde ele demonstra que a aproximação da matriz t que foi utilizada neste trabalho é boa para estados ligados, mas não é válida para ressonâncias.

Do trabalho de C.Lovelace⁽⁵⁾ temos que a aproximação correta para o propagador de dois corpos que não viola unitariedade na notação que estamos utilizando será dado por:

Fig. 5

$$t(x, x'; w) = \frac{g g^*}{v_0 - (w - \frac{3}{4} x^2) + 2\pi^2 i (w - \frac{3}{4} x^2)^{1/2} g^2(\kappa)} \quad (60)$$

onde $\kappa = (w - \frac{3}{4} x^2)^{1/2}$

Então resolvendo a equação (60) para determinar os pólos correspondentes a $E^{1/2}$ para o caso dos estados ligados encontramos que

$$x = \left[(E + 2\pi^4 g^4 \pm 2\pi^2 g^2 (\pi^4 g^4 - \frac{4}{3} v_0)^{1/2})^{1/2} \right] \quad (61)$$

O desenvolvimento do problema para este caso seria o mesmo que no caso anterior só que devemos substituir os termos em

$$(E)^{1/2} \rightarrow (E + 2\pi^4 g^4 \pm 2\pi^2 g^2 (\pi^4 g^4 - \frac{4}{3} v_0)^{1/2})^{1/2} \quad (62)$$

Isto nos leva a mostrar que a singularidade proposta por Brayshaw e Peierls⁽⁴⁾ não se encontra no local proposto pelos mesmos ou seja $W \neq 4\sqrt{0}$ e $E \neq 4\sqrt{0}$. Este resultado está em concordância com os trabalhos de A.M.Badalyan e Yu. A. Simonov^(6, 7, 8) que demonstram utilizando o método N/D que a singularidade não se encontra no local proposto pelos autores acima.

CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstramos a existência de um estado ligado de três partículas decorrente de um estado ligado de duas partículas. Este resultado não foi obtido por Peierls-Brayshaw devido aos enganos por eles cometidos ou seja a amplitude de espalhamento foi estendida de maneira incorreta para todo o plano W , ocasionando assim o desaparecimento do efeito acima. Também verificamos que este resultado é independente da existência de outras singularidades tais como as provenientes dos fatores de forma e que só não pode ser observado em casos especiais.

Outra idéia importante é a de que este resultado possa ser absolutamente geral e sua aplicação estendida a outros potenciais.

Solucionando uma antiga discussão na literatura, demonstramos a não existência de singularidades de Peierls no mecanismo de Peierls-Brayshaw ou seja não existem ressonâncias de três partículas em decorrência da existência de ressonância de duas partículas.

Finalmente gostaria de ressaltar que as conclusões aqui obtidas em uma dimensão não podem ser simplistamente estendidas para três dimensões e que os resultados já obtidos através das técnicas aplicadas neste trabalho devem ser (ref. 24) submetidos a revisão.

A P Ê N D I C E A

MÉTODO DE BRAYSHAW PARA UMA EQUACÃO INTEGRAL SIMPLES

Para ilustrar o método de resolução de equações integrais proposto por D.D.Braysnaw⁽¹³⁾, vamos descrever aqui o procedimento em detalhes para o caso de uma equação integral simples. Este apêndice se encontra aqui por completeza, e pode ser achado na ref. (4).

Consideremos a equação:

$$a_0(z,u) = b(z,u) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w-\lambda} k(z,w) a_0(w,u) \quad (1)$$

onde u e λ são parâmetros complexos, a integração w é feita ao longo do eixo real, e λ é assumido como estando fora do eixo real. As funções $k(z,w)$ e $b(z,w)$ são conhecidas explicitamente, e juntamente com $a_0(z,u)$ depende em geral do parâmetro λ assim como explicitamente dos seus argumentos. A equação integral determina $a_0(z,u)$ como solução de uma equação integral para z real. Para z complexo e nas vizinhanças do eixo real $a_0(z,u)$ é determinado pela expressão (1) em termos dos seus valores no eixo real, supondo que a integral exista.

Nós vamos considerar o caso quando k tem um pólo como função de z :

$$k(z, w) = \frac{R(z, w)}{z - \phi(w)} \quad (2)$$

O resíduo e a posição do pólo dependem explicitamente de w e para parametricamente de λ consideraremos aqui o caso onde ϕ é uma função linear, e assumiremos que

$$\phi(z) = \alpha z + i\beta \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3)$$

A função ϕ projeta o eixo real numa linha Φ que está a uma distância β do eixo real, da mesma forma que projeta a linha Φ em Φ_1 que ficará a uma distância $\alpha\beta$ do eixo real e assim por diante (ver figura A.1). Nos assumiremos que as singularidades de R e b são conhecidas e isoladas e para simplificar ignoraremos seu efeito.

Fazendo a extensão de z para o plano complexo, observamos que a equação (1) define a função $a_0(z, u)$ exceto na linha Φ . Podemos ver que $a_0(z, u)$ apresenta uma descontinuidade em Φ que será dada por:

$$D(z_0, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(z_0 + i\varepsilon, u) - a_0(z_0 - i\varepsilon, u) \quad (4)$$

onde z_0 é algum ponto em Φ dado $\phi(x_0) = z_0$ ou seja $x_0 = \frac{z_0 - i\beta}{\alpha}$

Desenvolvendo (4) explicitamente ficamos com:

$$D(z_0, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ b(z_0 + i\varepsilon) - b(z_0 - i\varepsilon, u) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w - \lambda} \left[\frac{R(z_0 + i\varepsilon, w)}{z_0 + i\varepsilon - \phi(w)} - \frac{R(z_0 - i\varepsilon, w)}{z_0 - i\varepsilon - \phi(w)} \right] a_0(w, u) \right\} \quad (5)$$

Lembrando que

$$\frac{1}{z_0 - \phi(w) \pm i\varepsilon} = v.p. \frac{1}{z_0 - \phi(w)} \mp i\pi \delta(z_0 - \phi(w))$$

e que a função $b(z, u)$ não apresenta descontinuidade temos que
(5):

$$D_0(z_0, u) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w - \lambda} R(z_0, w) \delta(z_0 - \phi(w)) a_0(w, u)$$

Onde, utilizando a propriedade das funções delta

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{f'(x)|_{x=x_0}}$$

ficamos com:

$$D(z_0, u) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w - \lambda} R(z_0, w) \frac{\delta(w - x_0)}{\phi'(x_0)} a_0(w, u)$$

Efetuada a integral temos:

$$D(z_0, u) = - \frac{2\pi i R(z_0, x_0) a(x_0, u)}{(x_0 - \lambda) \phi'(x_0)} \quad (6)$$

Então podemos definir para um z arbitrário as quantidades z_1 , $\Gamma(z, z_1)$ e $\Theta_1(z)$

$$\phi(z_1) = z$$

$$\Gamma(z, z_1) = - \frac{2\pi i R(z, z_1)}{\phi'(z_1)} \quad (7)$$

$$\Theta_1(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } z \text{ abaixo de } \phi \\ 1 & , \text{ de outra maneira} \end{cases}$$

Definimos agora a função

$$a_1(z, u) = b(z, u) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w-\lambda} K(z, w) a_1(w, u) + \frac{\Theta_1(z) \Gamma_1(z, z_1) a_1(z_1, u)}{(z_1 - \lambda)} \quad (8)$$

onde esta função é idêntica a função $a_0(z, u)$ abaixo da linha Φ , é contínua sobre a linha Φ e está definida exceto quando z_1 está sobre a linha Φ ou seja quando z está sobre Φ_1 . A descon^{tin}uidade sobre Φ_1 pode ser removido da mesma forma que a an^{te}rior, assim como todas as outras descon^{tin}uidades. Após ter repetido o procedimento acima n -vezes a equação ganhará um ter^{mo} extra da seguinte forma

$$D_n(z, u) = \frac{\Theta_n(z) \Gamma_n(z, z_n) a(z_n, u)}{z_n - \lambda} \quad (9)$$

onde

$$\Gamma_n(z, z_n) = - \frac{2\pi i \Gamma_{n-1}(z, z_{n-1}) R(z_{n-1}, z_n)}{(z_{n-1} - \lambda) \phi'(z_n)} \quad (10)$$

e

$$\Theta_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{para } z \text{ abaixo de } \Phi_n \\ 1, & \text{de outra maneira.} \end{cases}$$

Então podemos escrever que

$$a(z, u) = b(z, u) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w-\lambda} K(z, w) a_0(w, u) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(z, u) \quad (11)$$

A equação acima define uma função no plano inteiro, livre de quaisquer descontinuidades provenientes de k . Então podemos escrever uma representação integral para $a(t, u)$ dada por:

$$a(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{a(z, u)}{t - z} dz \quad (12)$$

onde o contorno de integração contém todas as singularidades de $a(z, u)$, e converge para grandes valores de $|z|$.

As singularidades de $a(z, u)$ são provenientes de polos em D_n ; que são da forma $(z_n - \lambda)^{-1}$, e aqueles que provem das funções b e R .

Devemos observar que os outros polos em D_n da forma $z_p - \lambda$ onde $p < n$, não contribuem no resultado devido a função $\Theta_n(z_n) = 0$ quando $p < n$.

As contribuições devido a polos em b e R e possíveis remanescentes da integral para grande valores de $|z|$ nos denominaremos como sendo alguma função $B(t, u)$. A contribuição devido aos polos de D_n , nos vamos analisar explicitamente. A contribuição do n -ésimo termo da somatória de (11) em (12) é da forma

$$\alpha_n(t, \lambda) a(\lambda, u)$$

onde

$$\alpha_n(t, \lambda) = (2\pi i)^n \frac{R(\phi(\lambda), \lambda)}{t - \phi^n(\lambda)} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{R(\phi^{r+1}(\lambda), \phi^r(\lambda))}{\phi^r(\lambda) - \lambda} \quad (13)$$

e

$$\phi^1(\lambda) = \phi(\lambda), \quad \phi^n(\lambda) = \phi(\phi^{n-1}(\lambda))$$

Então podemos escrever que:

$$\text{onde } a(t, u) = B(t, u) + C(t, \lambda) a(\lambda, u) \quad (14)$$

$$C(t, \lambda) = \sum_n \alpha_n(t, \lambda)$$

Colocando $t = \lambda$ e resolvendo para a temos que

$$a(\lambda, u) = \frac{B(\lambda, u)}{1 - C(\lambda, \lambda)} \quad (15)$$

então colocando (15) em (14)

$$a(t, u) = B(t, u) + \frac{C(t, \lambda) B(\lambda, u)}{1 - C(\lambda, \lambda)} \quad (16)$$

O resultado acima mostra como podemos resolver uma equação integral de uma maneira bem simples.

figura A.1.

A P Ê N D I C E B

CÁLCULO DA DESCONTINUIDADE PARA A AMPLITUDE $\tau^{\pm}(x, x'; \omega)$

Sabemos que a equação integral para a amplitude de espalhamento é dada por:

$$\tau^{\pm}(x, x'; \omega) = Z^{\pm}(x, x'; \omega) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' Z(x, x''; \omega) \tau^{\pm}(x'', x'; \omega) \quad (1)$$

onde

$$Z(x, x'; \omega) = \frac{(-2 g g^*)}{[x - \phi_+(x')] [x - \phi_-(x')]}.$$

Definimos então a descontinuidade como sendo:

$$D_{\pm}(z_0, x'; \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\tau^{\pm}(z_0 + i\epsilon, x'; \omega) - \tau^{\pm}(z_0 - i\epsilon, x'; \omega) \right] \quad (2)$$

sendo que

$$z_0 = \phi_{\pm}(x_0) \quad , \text{ e } x_0 \text{ um ponto do eixo real}$$

Utilizando (1) em (2) temos que:

$$D_{\pm}(z_0, x'; w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[Z^{\pm}(z_0 + i\varepsilon, x'; w) - Z^{\pm}(z_0 - i\varepsilon, x'; w) \right] \right. \\
\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' (-2gg^*) \left[\frac{1}{(z_0 + i\varepsilon - \phi_+(x'')) (z_0 + i\varepsilon - \phi_-(x''))} \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{(z_0 - i\varepsilon - \phi_+(x'')) (z_0 - i\varepsilon - \phi_-(x''))} \right] \frac{Z^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)} \right\} \quad (3)$$

Sabemos que a função $Z(x, x'; w)$ não apresenta descontinuidade para $x = z_0$ e tomando o valor principal da integral acima como no apêndice A ficamos com:

$$D_{\pm}(z_0, x'; w) = 2gg^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx''}{\phi_+(x'') - \phi_-(x'')} \left\{ \left[v.p. \frac{1}{z_0 - \phi_+(x'')} \right. \right. \\
\left. \left. - i\pi \delta(z_0 - \phi_+(x'')) - v.p. \frac{1}{z_0 - \phi_-(x'')} + i\pi \delta(z_0 - \phi_-(x'')) \right] \right. \\
\left. - \left[v.p. \frac{1}{z_0 - \phi_+(x'')} + i\pi \delta(z_0 - \phi_+(x'')) \right. \right. \\
\left. \left. - v.p. \frac{1}{z_0 - \phi_-(x'')} - i\pi \delta(z_0 - \phi_-(x'')) \right] \right\} \frac{Z^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)} \quad (4)$$

Fazendo as simplificações, reescrevemos (4) como:

$$D_{\pm}(z_0, x'; w) = 2gg^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx''}{\phi_+(x'') - \phi_-(x'')} \left[2\pi i \delta(z_0 - \phi_-(x'')) - 2\pi i \delta(z_0 - \phi_+(x'')) \right] \frac{\zeta^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)}$$

(5)

Relembrando a propriedade das funções delta que

$$\delta(f(x_0) - f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{f'(x) \big|_{x=x_0}} \quad (6)$$

e calculando a descontinuidade quando $z_0 = \phi_+(x)$ temos que:

$$D_+(z_0, x'; w) = (2gg^*) (2\pi i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx''}{\phi_+(x'') - \phi_-(x'')} \frac{\delta(x'' - x_0)}{\phi'_+(x_0)} \frac{\zeta^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)} \quad (7)$$

Efetuada a integral temos que:

$$D_+(z_0, x'; w) = (2gg^*) \frac{(-2\pi i)}{\phi'_+(x_0)} \frac{1}{\phi_+(x_0) - \phi_-(x_0)} \frac{\zeta^{\pm}(x_0, x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x_0^2)} \quad (8)$$

Calculando $\phi'_+(x)$ obtemos que:

$$\phi_+'(\bar{x}_0) = \frac{\phi_-(x_0) - x_0}{\phi_+(x_0) - \phi_-(x_0)} \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) e fazendo as simplificações necessárias obtemos:

$$D_+(z_0, x'; w) = \frac{2gg^*(2\pi i) \zeta^\pm(x_0, x'; w)}{(2x_0 + \phi_+(x_0)) D_0(w - \frac{3}{4}x_0^2)} \quad (10)$$

Lembrando que

$$\phi_+(x_0) = z_0 \implies x_0 = \phi_+^{-1}(z)$$

e fazendo a extensão para todos os pontos de x teremos para (10) que:

$$D_+(z, x'; w) = \frac{(2\pi i)(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_+^{-1}(z), x'; w)}{2\phi_+^{-1}(z) + z D_0(w - \frac{3}{4}(\phi_+^{-1}(z))^2)} \quad (11)$$

Mas sendo,

$$\phi_+^{-1}(z) = \phi_-(z)$$

Ficamos com:

$$D_+(z, x'; w) = \frac{(2\pi i)(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \quad (12)$$

Se analogamente fizermos os cálculos para $D_-(z, x'; w)$ em geral podemos escrever que

$$D_-(z, x'; w) = \frac{(-2\pi i)(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_+(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))} \quad (13)$$

Ostermos acima introduzem um "branch-cut" do tipo raiz quadrada.

A P Ê N D I C E C

REPRESENTAÇÃO INTEGRAL PARA $\tau^{\pm}(t, x'; w)$

Podemos escrever uma representação integral para a amplitude $\tau^{\pm}(t, x'; w)$ que é dada por:

$$\tau^{\pm}(t, x'; w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\tau^{\pm}(z, x'; w)}{t - z} dz \quad (1)$$

Sabemos que a amplitude $\tau^{\pm}(z, x'; w)$ é dada por:

$$\tau^{\pm}(z, x'; w) = Z^{\pm}(z, x'; w) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{Z(z, x''; w) \tau^{\pm}(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)}$$

$$+ (-2\pi i)(2g\phi^*) \left[\frac{\Theta_+(z)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{\tau^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \right]$$

$$+ \left[\frac{\phi_-(z) \tau^{\pm}(\phi_+(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} (w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))} \right]$$

Portanto a amplitude $Z^\pm(t, x'; w)$ será:

$$\begin{aligned}
 Z^\pm(t, x'; w) = & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{t-z} \left\{ Z^\pm(z, x'; w) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{Z(z, x''; w) Z^\pm(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)} \right. \\
 & + (-2\pi i) (2gg^*) \left[\frac{\Theta_+(z) Z^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\Theta_-(z) Z^\pm(\phi_+(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))} \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Se resolvermos cada integral individualmente teremos para o primeiro termo que

$$Z^\pm(t, x'; w) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{Z^\pm(z, x'; w)}{t-z} \quad (4)$$

o segundo termo dado por:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{t-z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \frac{Z(z, x''; w) Z^\pm(x'', x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}x''^2)} = 0 \quad (5)$$

devido ao fato da função ser meromórfica.

O terceiro e quarto termos serão analisados mais detalhadamente.

Para o terceiro termo temos

$$I_3(t, x'; w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(-2\pi i) (2gg^*) \Theta_+(z) \bar{\phi}_+^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{(t-z) 2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} dz \quad (6)$$

Na figura 1 abaixo podemos observar o contorno de integração da função

Fig. 1

Se efetuarmos a integração acima indicada resultará somente a contribuição devido ao pólo de $\phi_+(E^{1/2})$ e a integral ao redor do corte que tem sua origem $(\frac{4}{3}w)^{1/2}$.

A contribuição devido a integral é:

$$I_1(t, x'; w) = - \int_{\Gamma_1(w)} dz \frac{(2gg^*) \bar{\phi}_+^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{(t-z) 2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \quad (7)$$

onde $\Gamma_1(w)$ representa uma integração ao redor do corte como indicado na figura 1.

Os pólos são provenientes do propagador de dois corpos que como foi dito no capítulo II pode ser escrito como:

$$D_0(v) = v - v_0 \quad D'_0(v_0) \quad (8)$$

Para o caso acima temos:

$$D_0\left(w - \frac{3}{4} \phi_-^2(z)\right) = \left[\left(w - \frac{3}{4} \phi_-^2(z)\right) - v_0 \right] D'_0(v_0) \quad (9)$$

Analisando as singularidades da função acima temos que:

$$\phi_-^2(z) = \frac{4}{3} (w - v_0) \quad (10)$$

ou seja,

$$\phi_-(z) = \pm E^{1/2}$$

ou

$$z = \phi_{\pm} (\pm E^{1/2})$$

A equação (9) pode ser reescrita com o

$$(z - \phi_+(-E^{1/2})) (z - \phi_+(E^{1/2})) D'_0(v_0) \quad (11)$$

Aplicando o teorema de Cauchy vemos que somente o pólo $\phi_+(E^{1/2})$ contribui em (6) sendo sua contribuição pode ser escrita como sendo

$$\frac{(2\pi i) (2gg^* \quad \bar{\sigma}^{\pm}(\phi_-(\phi_+(E^{1/2})), x; w))}{(z - \phi_+(E^{1/2})) E^{1/2} D'_0(v_0) 2(w - \frac{3}{4} \phi_+^2(E^{1/2}))} \quad (12)$$

Somando então (7) e (12) temos

$$I_s(t, x'; w) = - \int_{\Gamma(w)} \frac{dz}{t-z} \frac{(2gg^*)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{\zeta^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} + \frac{(2\pi i)(2gg^*)}{(t - \phi_+(E^{1/2}))} \frac{\zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_+(E^{1/2}))E^{1/2}D_0'(v_0)}$$

(13)

Da mesma forma temos o quarto termo:

$$I_i(t, x'; w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{t-z} \frac{(2\pi i)(2gg^*)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{\Theta_-(z)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))} \zeta^\pm(\phi_+(z), x'; w)$$

(14)

onde o contorno de integração está mostrado na figura 2.

Figura 2

Efetuada a integral acima indicada resultará uma contribuição devido ao pólo $\phi_+(E^{1/2})$ e uma integral ao redor do

corte que tem sua origem $-\left(\frac{1}{3}W\right)^{1/2}$.

A contribuição devido a integral é

$$I_2(t, z'; W) = - \int \frac{dz (2g g^*) \zeta^\pm(\phi_+(z), x'; W)}{(\pm - z) 2(W - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(W - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))} \quad (15)$$

Os pólos são provenientes do propagador de dois corpos pode ser escrito como:

$$D_0(W - \frac{3}{4}\phi_+^2(z)) = \left[\left(W - \frac{3}{4}\phi_+^2(z) \right) - \nu_0 \right] D'_0(\nu_0) \quad (16)$$

temos que

$$W - \frac{3}{4}\phi_+^2(z) - \nu_0 = 0 \quad (17)$$

ou

$$z = \phi_-(\pm E^{1/2})$$

A equação (16) pode ser reescrita como sendo

$$(z - \phi_-(E^{1/2})) (z - \phi_-(-E^{1/2})) D'_0(\nu_0) \quad (18)$$

Aplicando o teorema de Cauchy temos que a contribuição devido aos pólos vai ser

$$\frac{(-2\pi i) (2g g^*) \zeta^\pm(-E^{1/2}, x'; W)}{(\pm - \phi_-(-E^{1/2})) 2(W - \frac{3}{4}\phi_-^2(-E^{1/2})) E^{1/2} D'_0(\nu_0)} \quad (19)$$

Somando (15) e (19) temos que:

$$I_i(t, x'; w) = - \int dz \frac{(2gg^*)}{\Gamma_2(w)} \frac{\zeta^\pm(\phi_+(z), x'; w)}{(t-z) 2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))}$$

$$- \frac{(2\pi i) (2gg^*) \zeta^\pm(-E^{1/2}, x'; w)}{(t - \phi_-(-E^{1/2})) 2(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(-E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(v_0)}$$

(20)

Então a equação (1) na nova representação é dada pela soma de (4), (13) e (20), sendo então a nova equação dada por:

$$\zeta^\pm(t, x'; w) = z^\pm(t, x'; w)$$

$$- \int \frac{dz}{\Gamma_1(w)} \frac{(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{(t-z) 2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))}$$

$$- \int \frac{dz}{\Gamma_2(w)} \frac{(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_+(z), x'; w)}{(t-z) 2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))}$$

$$+ \frac{(2\pi i) (2gg^*)}{E^{1/2} D_0'(v_0)} \left[\frac{\zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(E^{1/2}))^{1/2} (t - \phi_+(E^{1/2}))} \right.$$

$$\left. - \frac{\zeta^\pm(-E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(-E^{1/2}))^{1/2} (t - \phi_-(E^{1/2}))} \right]$$

(21)

A P Ê N D I C E D

EQUAÇÃO INTEGRAL EM NOVA REPRESENTAÇÃO

Temos do capítulo III que a equação (43) é dada por:

$$\zeta^{\pm}(t, x'; w) = z^{\pm}(t, x'; w)$$

$$- \int_{\Pi_1(w)} \frac{dz}{t-z} \frac{(2gg^*) \zeta^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))}$$

$$= \int_{\Pi_2(w)} \frac{dz}{t-z} \frac{(2gg^*) \zeta^{\pm}(\phi_+(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(z))}$$

$$- \frac{(2\pi i)(2gg^*)}{E^{1/2} D_0'(v_0)} \left[\frac{\zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{(t - \phi_+(E^{1/2})) 2(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E^{1/2}))^{1/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{\zeta^{\pm}(-E^{1/2}, x'; w)}{(t - \phi_-(-E^{1/2})) 2(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(-E^{1/2}))^{1/2}} \right]$$

(D.1)

onde a integral sobre $\Pi_1(w)$ é feita de $+i\infty$ a $(\frac{4}{3}w)^{1/2}$ e de $(\frac{4}{3}w)^{1/2}$ a $+i\infty$. A integral $\Pi_2(w)$ é feita de $-i\infty$ a $(-\frac{4}{3}w)^{1/2}$ e de $(-\frac{4}{3}w)^{1/2}$ a $-i\infty$.

Como nosso objetivo aqui é utilizando as simetrias do problema simplificar a equação (D.1), sabemos que funções $\phi_{\pm}(x)$ tem a seguinte propriedade:

$$\phi_{\pm}(-z) = -\phi_{\mp}(z) \quad (D.2)$$

As integrais ao longo $\Gamma_1(w)$ e $\Gamma_2(w)$ podem ser simplificadas, de maneira que só tenhamos a integral sobre um dos lados. Isto pode ser feito substituindo-se $z \rightarrow -z$. Para ilustrar tomemos a integral sobre $\Gamma_1(w)$

$$\begin{aligned} & \int_{(\frac{4}{3}w)^{\frac{1}{2}}}^{+i\infty} \frac{dz}{t-z} \frac{(2gg^*)}{2(w-\frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w-\frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \\ & + \int_{(\frac{4}{3}w)^{\frac{1}{2}}}^{+i\infty} dz \frac{(2gg^*)}{(t-z) 2(w-\frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w-\frac{3}{4}\phi_-^2(z))} = \\ & \int_{(+\frac{4}{3}w)^{\frac{1}{2}}}^{+i\infty} dz \frac{(2gg^*)}{(t-z) 2(w-\frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_-(z), x'; w)}{D_0(w-\frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \quad (D.3) \\ & + \int_{(\frac{4}{3}w)^{\frac{1}{2}}}^{+i\infty} dz \frac{(2gg^*)}{(t+z) 2(w-\frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_-(-z), x'; w)}{D_0(w-\frac{3}{4}\phi_-^2(-z))} \end{aligned}$$

É fácil de verificar que a amplitude $\zeta^\pm(x, x'; w)$ apresenta a seguinte propriedade

$$\zeta^\pm(-x, x'; w) = \pm \zeta^\pm(x, x'; w) \quad (D.4)$$

Utilizando a mesma mudança de variável para a integral em $\Gamma_2(w)$ e aplicando as propriedades enunciadas em (D.2) e (D.4), as integrais sobre $\Gamma_1(w)$ e $\Gamma_2(w)$ podem simplesmente ser escritas como:

$$\int_{\Gamma(w)} dz \left(\frac{1}{t-z} \pm \frac{1}{t+z} \right) \frac{(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_\pm(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_\pm^2(z))} \quad (D.5)$$

onde $\Gamma(w)$ é a integral de $4/3 w)^{1/2} a + i\infty$.

Como as propriedades (D.2) e (D.4) são válidas para quaisquer valores de x elas são válidas para $x = -E^{1/2}$, então os dois outros termos de (D.1) podem ser reagrupados produzindo um termo que é da seguinte forma:

$$\frac{(-2gg^*)(2\pi i) \zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_\pm^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(w_0)} \left(\frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) - t} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) + t} \right) \quad (D.6)$$

Portanto a equação (D.1) ficará escrita como:

$$\zeta^{\pm}(t, x'; w) = z^{\pm}(t, x'; w)$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz \left(\frac{1}{t+z} \pm \frac{1}{t-z} \right) (2g g^*) \quad (D.7)$$

$$\frac{\zeta^{\pm}(\phi_{-}(z), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4} \phi_{-}^2(z))}$$

$$- \frac{(2g g^*) (2\pi i)}{2(w - \frac{3}{4} \phi_{+}^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(w_0)} \left(\frac{1}{\phi_{+}(E^{1/2}) - t} \pm \frac{1}{\phi_{+}(E^{1/2}) + t} \right)$$

A P Ê N D I C E E

OBTENÇÃO DE NOVAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Dada a equação (44) do capítulo III nosso objetivo aqui é obter uma solução para a equação integral acima utilizando o método iterativo.

Sabemos que:

$$\zeta^{\pm}(t, x'; w) = z^{\pm}(t, x'; w)$$

$$\frac{(2gg^*) (2\pi i) \zeta^{\pm}(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} \phi^2(E^{1/2})) E^{1/2} D_0'(v_0)} \left(\frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) - t} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) + t} \right) \quad (E.1)$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz \left(\frac{1}{t - z} \pm \frac{1}{t + z} \right) \frac{(2gg^*) \zeta^{\pm}(\phi(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z))}$$

onde $\Gamma(w)$ é a integral de $(\frac{4}{3}w)^{1/2}$ a $+i\infty$

Pelo método iterativo temos que resolver a equação para $\zeta^{\pm}(\phi(z), x'; w)$ que é dada por:

$$\begin{aligned}
\zeta^\pm(\phi(z), x'; w) &= z^\pm(\phi(z), x'; w) \\
&- (2\pi i) (2gg^*) \zeta^\pm(E^{\frac{1}{2}}, x'; w) \left[\frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) - \phi(z)} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) + \phi(z)} \right] \\
&+ \int_{\Gamma(w)} dz' \left(\frac{1}{\phi(z) - z'} \pm \frac{1}{\phi(z) + z'} \right) \quad (E.2) \\
&\frac{(2gg^*) \zeta^\pm(\phi(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}} D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z))}
\end{aligned}$$

Substituindo (E.2) em (E.1) temos

$$\begin{aligned}
\zeta^\pm(t, x'; w) &= z^\pm(t, x'; w) \\
&- \frac{(2\pi i) (2gg^*) \zeta^\pm(E^{\frac{1}{2}}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi^2(E^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} D_0'(w)} \left(\frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) - t} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) + t} \right) \\
&+ \int_{\Gamma(w)} dz \left(\frac{1}{t - z} \pm \frac{1}{t + z} \right) \frac{(2gg^*)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (E.3) \\
&\frac{1}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z))} \left[z^\pm(\phi(z), x'; w) - \frac{(2gg^*) (2\pi i) \zeta^\pm(E^{\frac{1}{2}}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi^2(E^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} D_0'(w)} \right. \\
&\left. \left(\frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) - \phi(z)} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{\frac{1}{2}}) + \phi(z)} \right) + \int_{\Gamma(w)} dz' \left(\frac{1}{\phi(z) - z'} \pm \frac{1}{\phi(z) + z'} \right) \frac{2gg^*}{2(w - \frac{3}{4}z'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\zeta^\pm(\phi(z'), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z'))} \right]
\end{aligned}$$

A equação acima pode ser reescrita agrupando-se os termos dependentes das amplitudes "half on-shell" e "off-shell". Definindo então a função

$$\beta_{\pm}(x, y) = \left(\frac{1}{x-y} \pm \frac{1}{x+y} \right) \quad (\text{E.4})$$

e executando o procedimento acima ficamos com:

$$\begin{aligned} \zeta^{\pm}(t, x'; w) = & \zeta^{\pm}(t, x'; w) + \\ & \int_{\Gamma(w)} dz \frac{\beta_{\pm}(t, z)}{(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{(gg^*)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z))} \left[\zeta^{\pm}(\phi_{\pm}(z), x'; w) \right. \\ & + \int_{\Gamma(w)} dz' \frac{\beta_{\pm}(\phi_{\pm}(z), z')}{2(w - \frac{3}{4}z'^2)^{1/2}} \frac{\zeta^{\pm}(\phi_{\pm}(z'), x'; w)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z'))} \\ & - \frac{(2gg^*)(2\pi i)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_{\pm}^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(w_0)} \left[\beta_{\pm}(\phi_{\pm}(E^{1/2}, t) \pm \right. \\ & \left. \int_{\Gamma(w)} dz \frac{\beta_{\pm}(t, z)}{(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2}} \frac{(gg^*)}{D_0(w - \frac{3}{4}\phi^2(z))} \beta_{\pm}(\phi_{\pm}(E^{1/2}, \phi_{\pm}(z)) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Seguindo o procedimento faremos uma outra interação da equação acima já agrupando os termos ficaríamos com:

$$Z^{\pm}(t, x'; w) = Z^{\pm}(t, z'; w)$$

$$+ \int \frac{dz}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(t, z) (g g^*)}{(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z))} \left\{ Z^{\pm}(\phi(z), x'; w) \right.$$

$$+ \int \frac{dz'}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(\phi(z), z') (g g^*)}{(w - \frac{3}{4} z'^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z'))} \left[Z^{\pm}(\phi(z'), x'; w) \right.$$

$$+ \int \frac{dz''}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(\phi(z), z'') (g g^*)}{(w - \frac{3}{4} z''^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z''))} Z^{\pm}(\phi(z''), x'; w) \Bigg] \quad (E.6)$$

$$- \frac{(2g g^*)(2\pi i)}{2(w - \frac{3}{4} \phi^2(E^{\pm}))^{1/2} E^{\pm} D_0'(w_0)} \left\{ \beta_{\pm}(\phi_+(E^{\pm}), t) + \int \frac{dz}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(t, z) (g g^*)}{2(w - \frac{3}{4} z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z))} \right.$$

$$\left[\beta_{\pm}(\phi_+(E^{\pm}), \phi_-(z)) + \int \frac{dz'}{\Gamma(w)} \frac{\beta_{\pm}(\phi_-(z), z') \beta_{\pm}(\phi_+(E^{\pm}), \phi_-(z'))}{(w - \frac{3}{4} z'^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4} \phi^2(z'))} \right] \Bigg\}$$

Como observamos a cada nova interação existe uma estrutura que se repete nas equações (E.4, E.5 e E.6). Se utilizarmos notação operacional ficaríamos com:

$$A = z + \hat{O} z + \hat{O}^2 z + \hat{O}^3 z + \dots \quad (E.7)$$

$$A = z + \hat{O} (z + \hat{O} z + \hat{O}^2 z + \dots) \quad (E.8)$$

Mas o termo entre parênteses em (E.8) é por definição (E.7), portanto:

$$A = z + \hat{O} A \quad (E.9)$$

o que nada mais é do que uma nova equação integral, portanto

(E.5) podendo ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \zeta^\pm(t, x; w) &= z^\pm(t, x; w) \\
 &+ \int_{\Gamma(w)} dz \frac{\beta_\pm(t, z) (2gg^*) D_\pm(\phi_-(z), x; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \\
 &- \frac{(2gg^*)(2\pi i) \zeta^\pm(E'_2, x; w) \bar{E}_\pm(t, \phi_+(E'_2); w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E'_2)) E'_2 D_0'(v_0)}
 \end{aligned}
 \tag{E.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_\pm(\phi_-(z), x; w) &= z^\pm(\phi_-(z), x; w) + \\
 &\int_{\Gamma(w)} dz' \frac{\beta_\pm(\phi_-(z), z') (2gg^*) D_\pm(\phi_-(z'), x; w)}{2(w - \frac{3}{4}z'^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z'))}
 \end{aligned}
 \tag{E.11}$$

$$E_\pm(t, \phi_+(E'_2), w) = \beta_\pm(t, \phi_+(E'_2))$$

$$+ \int_{\Gamma(w)} dz \frac{\beta_\pm(t, z) (2gg^*) E_\pm(\phi_-(z), \phi_+(E'_2), w)}{(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))}$$

e a função $\beta_\pm(x, y)$ é dada por

$$\beta_\pm(x, y) = \left(\frac{1}{x-y} \pm \frac{1}{x+y} \right)
 \tag{E.12}$$

A P Ê N D I C E F

ESTUDO DAS EXTENSÕES ANALÍTICAS DE $\tau^{\pm}(t, x', W)$

O objetivo deste apêndice é de demonstrar qual é a continuação analítica correta para a equação (48) do capítulo IV.

Antes de tratarmos o nosso problema em particular, vamos fazer uma breve revisão a respeito de singularidades que podem surgir em uma integral, seguindo de perto a referência⁽¹⁹⁾.

Dada uma função $g(z, w)$ como sendo uma função analítica de duas variáveis e vamos considerar C como sendo um contorno finito no plano w . Definimos uma função $f(z)$ por

$$f(z) = \int_C g(z, w) dw \quad (F.1)$$

Supomos que as singularidades do integrando g são conhecidas e suas localizações no plano w são

$$w = w_r(z) \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (F.2)$$

e que para z nas vizinhanças de um ponto z_0 existe uma vizinhança do contorno C no plano w livre das singularidades de w_r . Portanto a definição (F.1) faz $f(z)$ analítica para z_0 .

(ver demonstração em E.Goursat pg.288, ref. 20). Nós queremos descobrir como uma singularidade de $f(z)$ pode surgir quando

f é continuada analiticamente para longe de z_0 .

Quando z se move para longe de z_0 a singularidade w_p também irá se mover no plano w , mas $f(z)$ permanecerá analítica pelo menos até uma das singularidades w_p encontrar o contorno C . Então a integral (F.1) torna-se indefinida. Entretanto mesmo quando isto acontece, $f(z)$ pode ser continuada analiticamente. Suponha que C tenha extremos A e B e que estes extremos são fixos. Então se C' é um outro contorno com os mesmos extremos A e B e a região entre C e C' está livre de qualquer singularidade w_p , o teorema de Cauchy nos diz que

$$f(z) = \int_C g(z, w) dz \quad (F.3)$$

Então, exatamente antes de uma singularidade w_p encontrar o contorno C nós normalmente podemos mudar o contorno para C' , e a expressão (F.3) nos dá uma continuação analítica da função que originalmente era definida por (F.1). Isto está ilustrado na figura F-1, onde as cruzes representam posições típicas de várias singularidades w_p para valores originais de z_0 e z , e as setas indicam como eles podem se mover durante a variação de z .

Figura F-1

Então, geralmente nós podemos continuar $f(z)$ analiticamente, se variando o contorno de integração C continuamente, nós podemos arrumar como o z é variável que nenhuma das singularidades $\omega_p(z)$ do integrando $g(z, \omega)$ encontre o contorno. Mas este procedimento não pode falhar por uma das segundas razões (Teorema de Hadamard⁽²⁵⁾)

i) Singularidades tipo "end-point". Se uma das singularidades ω_p encontra um dos extremos A, B do contorno C , nenhuma variação de C pode remove-la.

ii) Singularidades do tipo "pinch". Se duas (ou mais) singularidades se aproximarem de lado opostas e coincidirem, o contorno C ficara confinado entre elas e nenhuma deformação po de remove-las.

iii) Deformações Infinitas. Se o contorno C está sendo deformado por evitar uma singularidade ω_p , e aquela singularidade se move para infinito levando consigo o contorno C , a integral pode divergir pois C não é mais finito.

As singularidades produzidas pelos mecanismos acima são usualmente "branch-points". É conveniente adicionar um corte para um "branch-point" e no caso em que as singularidades ω_p do integrando $g(z, \omega)$ são pólos pode-se facilmente determinar a descontinuidade de $f(z)$ sobre um dado corte. Suponhamos que A seja fixo e que para $z = z_1$ tenhamos uma singularidade do tipo "end-point" produzida por

$$\omega_1(z_1) = A \quad (F.4)$$

Então, quando z é da forma $z_1 + \epsilon$ muito próxima a

z_1 , $\omega_1(z)$ estará muito próximo a A. Se $\omega_1(z)$ é analítica para z_1 , e tem derivada não nula para $z=z_1$, nós podemos escrever aproximadamente que:

$$\omega_1(z_1 + \varepsilon) = A + \varepsilon \left. \frac{d\omega_1}{dz} \right|_{z=z_1} \quad (\text{F.5})$$

Para calcular a descontinuidade fazemos z descrever um círculo ao redor de z_1 . Como $z_1 + |\varepsilon|e^{i\theta}$ se θ variar de 0 a 2π , ω_1 descreverá um círculo análogo de raio $|\varepsilon d\omega_1/dz|$ ao redor de A. O contorno C pode ser distorcido para evitar ω_1 , quando este descreve um círculo. Na figura F.2.a nós podemos ver a situação inicial, e na figura F.2.b nós podemos ver a situação após ω_1 , ter descrito um círculo. Mas pelo teorema de Cauchy a integral da figura F.2.b é equivalente à mostrada na figura F.2.c. Portanto a descontinuidade isto é, a diferença entre as integrais é exatamente a integral sobre o contorno ao redor do pólo $\omega_1(z)$. Portanto a descontinuidade de $f(z)$ associada com a singularidade $z=z_1$ é $\pm 2\pi i$ vezes o residuo $g(w, z)$ para o pólo $\omega=\omega_1$ (*)

Figura F-2

(*) O sinal (-) corresponde ao valor (direita do corte) - (esquerda do corte).

No caso temos que analisar a descontinuidade da função

$$\begin{aligned} \zeta^\pm(t, x'; w) &= \zeta^\pm(t, x'; w) + \\ &+ \int_{\Gamma_1(w)} dz \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t+z} \right) \frac{(2gg^*) \zeta^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}z^2)^{1/2} D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))} \\ &- \frac{(2gg^*) (2\pi i) \zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(V_0)} \left[\frac{1}{\phi_+(E^{1/2})-t} + \frac{1}{\phi_+(E^{1/2})+t} \right] \end{aligned} \quad (F.6)$$

Onde o resultado acima é válido para $\text{Re } w > 0$ e $V_0 < 0$ é real. Quando nós tentamos estender o resultado para qualquer valor de w , nós devemos atravessar a curva

$$\text{Im} \left(3/2 E^{1/2} - V_0^{1/2} \right) = 0 \quad (F.7)$$

então a singularidade de $D_0(w - \frac{3}{4}\phi_-^2(z))$ que é devida ao estado ligado de dois corpos desenvolve uma singularidade do tipo "end-point" na equação integral. Se calcularmos a descontinuidade seguindo o procedimento acima temos que

$$\begin{aligned} D(t, E^{1/2}, w) &= \pm \frac{(2gg^*) (2\pi i) \zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - \frac{3}{4}\phi_+^2(E^{1/2}))^{1/2} E^{1/2} D_0'(V_0)} \\ &\left(\frac{1}{\phi_+(E^{1/2})-t} + \frac{1}{\phi_+(E^{1/2})+t} \right) \end{aligned} \quad (F.8)$$

Portanto devemos adicionar

$$\text{Disc} = f(d) - f(e) \quad (\text{F.9})$$

isto é a expressão (F.8) com o sinal (-) conforme explicado.

(Ver outro método em Goursat pg.214 e 215, ref. 20).

Portanto o termo a ser adicionado tem o mesmo sinal e é igual ao termo já existente o que nos dá a seguinte expressão para a continuação correta de $\zeta^\pm$.

$$\zeta^\pm(t, x'; w) = \zeta^\pm(t, x'; w)$$

$$+ \int \frac{dz}{\pi(w)} \frac{P_\pm(t, z) (2gg^*) \zeta^\pm(\phi_-(z), x'; w)}{2(w - 3/4 z^2)^{1/2} D_0(w - 3/4 \phi_-^2(z))}$$

$$- (1 + \theta(w)) \frac{(2gg^*) (2\pi i) \zeta^\pm(E^{1/2}, x'; w)}{2(w - 3/4 \phi_+^2(E^{1/2}))}$$

$$\left[\frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) - t} \pm \frac{1}{\phi_+(E^{1/2}) + t} \right]$$

(F.10)

onde

$$\theta(w) = 0$$

quando w esta dentro da curva (3)

$$= 1$$

da outra forma