Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática

Extensão da Aproximação de Campo Médio para a Evolução de Sistemas Férmion-Bóson

Érica Regina Takano Natti

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora: Prof. Dr. Antônio F. R. de Toledo Piza (USP)
Prof^a Dra. Kyoko Furuya (UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (USP)
Prof^a Dra. Maria Teresa C. dos S. Thomaz (UFF)
Prof. Dr. Salomon S. Mizrahi (UFSCar)

Orientador : Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

Sylvio Canuto
Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo
1998

Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza

SBI-IFUSP

305M810T2753

530.144
N283
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Natti, Érica Regina Takano

Extensão da Aproximação de Campo Médio para a Evolução
de Sistemas Férmion-Bóson. São Paulo, 1997.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Antonio F. R. de Toledo Piza

Unitermos: 1. Teoria de Muitos Corpos; 2. Tratamento Cinético;
3. Sistemas Férmion-Bóson; 4. Campo Médio; 5. Técnica de
Projeção.

USP/IF/SBI - 80/97

*Dedico este trabalho ao Paulo,
aos meus pais, José e Teruka
e às minhas irmãs, Clá e Lu.*

Agradecimentos

Ao Prof. Piza, pela orientação, incentivo e paciência durante todos estes anos.

Ao Lin, pelas conversas e inúmeras discussões que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Ao Paulo e à minha família, pelo carinho e apoio em todos os momentos.

Aos meus amigos Ana, Lúcia, Johnny, Magu e Antônio, pelos bons momentos que passamos juntos.

Aos colegas do departamento de física-matemática, em especial ao Luiz, à Ligia e à Adriana pela colaboração e pela amizade.

À Kelma e à Amélia, pela ajuda e ótimo convívio.

A todos os colegas da USP e da UEL, que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

*Assim como falham as palavras quando querem
exprimir qualquer pensamento,
Assim falham os pensamentos quando querem
exprimir qualquer realidade.
Mas, como a realidade pensada não é a dita
mas a pensada,
Assim a mesma dita realidade existe, não o ser
pensada.
Assim tudo o que existe, simplesmente existe.*

Fernando Pessoa

Resumo

Neste trabalho estudamos a extensão da aproximação de campo médio, dada uma condição inicial, para a evolução temporal de um sistema composto de férmions e bósons que interagem. Para isto usamos uma técnica de projeção dependente do tempo através da qual obtemos equações de movimento do tipo cinético para o conjunto de variáveis dinâmicas de um corpo. Na primeira parte do trabalho aplicamos a técnica para um sistema descrito pelo modelo de Jaynes-Cummings, o qual descreve a interação da matéria, representada por um sistema de dois níveis, com a radiação, representada por um modo normal do campo quantizado. Obtemos a dinâmica de campo médio e a seguir usando a técnica de projeção, calculamos correções à esta descrição de campo médio. Além de ser um modelo exatamente solúvel, o que nos permite comparar nossos resultados com a solução exata, o modelo de Jaynes-Cummings corresponde ao plasma escalar relativístico em zero dimensões espaciais. Na segunda parte deste trabalho estudamos o modelo do plasma escalar relativístico. Esta teoria quântica de campos descreve a interação de campos bosônicos escalares e fermiônicos de spin-1/2 através de uma interação do tipo Yukawa. Para o sistema do plasma escalar relativístico obtemos as equações que descrevem a dinâmica de campo médio e a partir das soluções estacionárias, renormalizamos a teoria. Finalmente, estudamos o regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio, obtendo soluções analíticas para a evolução de nossas variáveis. Analisamos também as condições para existência de estados ligados neste regime.

Abstract

In this work we study the extension of the mean-field approximation, given an initial condition, to the time evolution of a fermion-boson system. We use a time-dependent projection where we obtain kinetic-type equations for the set of one-body variables. First, we study the Jaynes-Cummings model which describes the interaction of the matter represented by the two-level system with the radiation represented by the normal mode of the quantized radiation field. We obtain the mean-field dynamics of the system and using the projection technique, we evaluate corrections to this mean-field description. Relevance of the Jaynes-Cummings model stems from the fact that, besides being soluble which possibilities compare our results with the exact solution, it can be seen as corresponding to the relativistic scalar plasma in zero spatial dimensions. Next, we study the relativistic scalar plasma. This quantum field theory describes a system of spin-1/2 fermions interacting through the exchange of scalar particles via a Yukawa-type interaction. In the study of the relativistic scalar plasma, we obtain the mean-field dynamics and from the static solution, we renormalize the theory. Finally, we study the small oscillations regime obtaining analytical solution for one-body variables. We have also examined the condition for the existence of bound-state in this case.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Dinâmica Efetiva de Subsistemas Quânticos	7
3	Tratamento Cinético para um Sistema Férmion-Bóson: O Modelo de Jaynes-Cummings	14
3.1	Variáveis Gaussianas e sua Dinâmica Efetiva	14
3.2	Técnica de Projeção Dependente do Tempo	19
3.3	Aproximação para a Dinâmica de Colisões	22
3.4	Resultados e Discussão	31
4	Equações Cinéticas na Teoria Quântica de Campos	35
4.1	Caracterização das Variáveis de Interesse	35
4.2	Dinâmica das Variáveis de Interesse	43
4.3	Técnica de Projeção Dependente do Tempo	46
4.4	Aproximação de Campo Médio	48
5	Dinâmica Efetiva para o Plasma Escalar Relativístico na Aproximação de Campo Médio	50
5.1	Dinâmica de Campo Médio para o Plasma Escalar	50
5.2	Renormalização	57
6	Linearização da Dinâmica de Campo Médio	67
6.1	Linearização das Equações Cinéticas	67
6.2	Solução das Equações Cinéticas de Campo Médio Linearizadas	72
6.3	Estados Ligados de Quasi-Férmions	75
7	Conclusões e Perspectivas	79

A	Cálculo de traços	81
B	Aproximação para $\mathcal{F}'(t)$ na Representação de Heisenberg	85
C	Tabela de Integrais	89

Capítulo 1

Introdução

O estudo de fenômenos de transporte em sistemas de muitos corpos é importante para várias áreas do conhecimento. Estes fenômenos estão associados a processos essencialmente cinéticos, os quais ocorrem em situações descritas como “fora do equilíbrio”. Com o objetivo de descrever tais sistemas, em geral, empregam-se técnicas de projeção para se derivar as respectivas equações de movimento (equações cinéticas). Embora estas técnicas de projeção sejam extremamente gerais, até o início dos anos setenta elas eram somente utilizadas em problemas onde os sistemas estavam em contato com reservatórios [1] ou ainda em problemas onde somente os elementos diagonais da matriz densidade em alguma representação eram desejados [2]. Nestes problemas, os graus de liberdade do reservatório ou da parte não diagonal da matriz densidade eram considerados irrelevantes e formalmente eliminados através de um operador projeção.

Entretanto, há muitos sistemas dinâmicos acoplados onde nenhum dos subsistemas pode ser considerado como uma parte irrelevante do sistema. Foi neste contexto que Willis e Picard [3] derivaram, utilizando a técnica do operador projeção, equações cinéticas para sistemas dinamicamente acoplados, onde a informação irrelevante não era os graus de liberdade de um dos subsistemas acoplados, mas as correlações entre os subsistemas produzidas pela interação. Em particular, tal tratamento mostra-se altamente adequado para sistemas nos quais os subsistemas interagem fortemente. Para estes sistemas a abordagem de Willis e Picard, a qual corresponde em ordem mais baixa a uma aproximação do tipo Hartree-Fock Dependente do Tempo (TDHF), é claramente mais apropriada. Outras abordagens, equivalentes a de Willis e Picard, foram também desenvolvidas neste período. Assim, a partir de meados dos anos setenta, vários trabalhos para sistemas quânticos não relativísticos foram realizados numa aproximação do tipo TDHF [4] e posteriormente TDHFB [5].

Entretanto, em uma aproximação do tipo TDHF, as partículas do sistema interagem

somente via campo médio, enquanto as correlações entre as partículas são negligenciadas. Portanto, estes cálculos aplicavam-se por exemplo a sistemas em que as partículas, apesar de interagirem fortemente, formavam um sistema de baixa densidade [6]. Consequentemente, no estudo dos fenômenos de transporte de sistemas de muitos corpos em uma escala de tempo longa, o qual pode termalizar ou não, as flutuações devido aos efeitos de correlação não podem ser negligenciadas. Portanto, para melhor compreender processos gerais é necessário estender os cálculos além da aproximação TDHF de modo a incluir correlações de dois corpos. O formalismo necessário para este cálculo foi desenvolvido no final dos anos setenta e início dos anos oitenta e é comumente chamado de Aproximação do tipo Hartree-Fock Dependente do Tempo Estendida (ETDHF) [6, 7, 8]. Todos os cálculos ETDHF realizados neste período foram para sistemas quânticos não relativísticos.

Simultaneamente, o estudo de sistemas relativísticos de muitos corpos, portanto descritos por uma Teoria Quântica de Campos, também desenvolveu-se durante os anos setenta. Estes trabalhos pretendiam descrever a estrutura estacionária de sistemas hadrônicos relativísticos, os quais interagem fortemente, e portanto, o uso de técnicas não-perturbativas tais como aproximações do tipo Hartree-Fock [9], variacional Gaussiana [10], expansão $1/N$ [11], função de Wigner covariante [12]..., eram necessárias.

Os cálculos relativísticos realizados nos anos setenta tinham interesse somente em descrever as propriedades estacionárias dos sistemas nucleares. Contudo, a partir do início dos anos oitenta, a descrição de sistemas (fenômenos) quânticos relativísticos fora do equilíbrio dada uma condição inicial ganhou uma importância considerável. Com o advento do cenário do universo inflacionário [13], onde é necessário descrever a evolução temporal de um campo escalar, que se encontra fora do equilíbrio térmico com o resto do universo, de um vácuo metaestável para o vácuo estável [14]; e ainda com a entrada em funcionamento dos grandes aceleradores de íons pesados com energias superiores a 0.1 GeV/A, onde pode-se estudar a matéria nuclear em condições drasticamente fora do equilíbrio [15, 16, 17], tornou-se necessário desenvolver o formalismo da Teoria Quântica de Campos (QFT) fora do equilíbrio.

Assim, com o objetivo de descrever sistemas quânticos relativísticos fora do equilíbrio dada uma condição inicial, os quais estão associados a fenômenos não-perturbativos tais como quebras de simetrias, geração de massa, transição de fase..., foram desenvolvidas técnicas não-perturbativas para estudar tais situações no contexto de uma Teoria Quântica de Campos. Em geral estes cálculos foram e são ainda implementados através de um tratamento cinético auto-consistente baseado em uma aproximação de campo médio, ou seja, baseado numa aproximação do tipo TDHF [17, 18, 19] ou equivalentemente baseado no método variacional que utiliza como *ansatz* um funcional gaussiano para a matriz

densidade [14, 20, 21], ou ainda a função de Wigner covariante [15, 22, 23].

Analogamente ao que ocorreu no caso de sistemas não relativísticos, a partir do final dos anos oitenta, as técnicas desenvolvidas anteriormente, foram adaptadas para descrever a evolução de sistema quânticos relativísticos fora do equilíbrio, dada uma condição inicial, além da aproximação de campo médio [24, 25].

O objetivo final deste trabalho é descrever a extensão da aproximação de campo médio, dada uma condição inicial, para a evolução de um sistema composto de bósons e férmions que interagem. Para isto utilizaremos uma técnica desenvolvida anteriormente no contexto da mecânica quântica não relativística por Nemes e Toledo Piza [8]. Esta técnica permite formular a dinâmica de correlações de um sistema a partir de uma expansão de campo médio, onde recupera-se os resultados da aproximação gaussiana em mais baixa ordem, em outras palavras, esta técnica permite incluir e calcular correções, devido às correlações dinâmicas, à conhecida aproximação gaussiana. Além disto, a expansão conserva a energia, no caso de sistemas fechados, ordem a ordem [26]. Esta técnica foi recentemente aplicada, no contexto de uma Teoria Quântica de Campos, a teoria bosônica autointeragente $\lambda\phi^4$ em $(1+1)$ dimensões [25]. Lin e Toledo Piza [25] obtiveram que a aproximação gaussiana falha tanto qualitativamente como quantitativamente na descrição de certos observáveis. As correções colisionais, devido às interações residuais de dois corpos (termos de colisão), corrigem parcialmente os resultados gaussianos. No caso fermiônico, Natti e Toledo Piza [19], obtiveram a dinâmica efetiva de um sistema de férmions relativísticos descrito pelo Modelo Quiral de Gross-Neveu [11] na aproximação de campo médio.

Motivados pelo sucesso obtido na descrição da evolução temporal de um sistema bosônico uniforme autointeragente em $(1+1)$ dimensões descrito pela teoria $\lambda\phi^4$, inicialmente deslocado do equilíbrio, além da aproximação Gaussiana, torna-se interessante estudar, através desta técnica, a evolução temporal de um sistema fora do equilíbrio composto de bósons e férmions que interagem. Inicialmente estudaremos um sistema não relativístico descrito pelo Modelo de Jaynes-Cummings [27], para em seguida aplicá-la a um sistema relativístico descrito pelo Modelo do Plasma Escalar [28].

Este trabalho é dividido da seguinte forma: No capítulo 2 obtemos as equações dinâmicas que descrevem a evolução temporal de um sistema composto de dois subsistemas que interagem. Estas equações aplicam-se tanto a sistemas não relativísticos bem como para sistemas relativísticos. A partir desta equações de movimento implementamos uma técnica de projeção [8] e obtemos as equações do tipo cinético desejadas, as quais descrevem a evolução de nosso sistema além da aproximação de campo médio.

No capítulo 3 aplicamos o formalismo desenvolvido no capítulo 2 ao Modelo de Jaynes-Cummings [27]. Deste modo, descrevemos a evolução temporal, além da aproximação de campo médio, de um sistema não relativístico composto de dois subsistemas que intera-

gem, um sistema de dois níveis (subsistema fermiônico) e um modo do campo quantizado (subsistema bosônico). Entre outros resultados, mostramos que a modulação da amplitude das oscilações de Rabi resulta de efeitos de dois corpos (termos de colisão) [29].

No capítulo 4 adaptamos a técnica de projeção dependente do tempo descrita no capítulo 2 ao estudo de sistema relativísticos. Apresentamos assim, um tratamento não perturbativo do problema de condição inicial na Teoria Quântica de Campos para um sistema de férmions interagindo com bósons. A partir destas equações discutimos as aproximações conservativas não perturbativas que tornam as equações cinéticas obtidas trabalháveis.

No capítulo 5 aplicamos o formalismo desenvolvido no Capítulo 4 a um sistema relativístico descrito pelo Modelo do Plasma Escalar [28]. Obtemos neste caso a dinâmica efetiva de campo médio (aproximação do tipo TDHFB) de um sistema uniforme relativístico composto de dois subsistemas que interagem através de uma interação do tipo Yukawa: um subsistema composto de férmions de spin $1/2$ que interagem via troca de bósons escalares (subsistema bosônico). Neste capítulo fazemos uma renormalização estática da teoria, ou seja, a partir das equações de equilíbrio de nosso sistema, controlamos as divergências, o que nos permite estudar o estado fundamental do sistema [30].

No capítulo 6 fazemos algumas aplicações para a dinâmica efetiva do Plasma Escalar obtida no capítulo anterior na aproximação de campo médio. Primeiramente linearizamos em torno do estado fundamental as equações dinâmicas de campo médio. Em seguida renormalizamos as equações dinâmicas linearizadas e obtemos a solução analítica da evolução do sistema neste regime. Finalmente estudamos as condições para a existência de estados ligados no regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio.

No capítulo 7 fazemos um resumo das principais conclusões que o presente estudo permite e traçamos algumas perspectivas de desenvolvimento futuro. Finalmente, alguns detalhes mais técnicos são apresentados em apêndices.

Capítulo 2

Dinâmica Efetiva de Subsistemas Quânticos

Neste capítulo uma técnica de projeção dependente do tempo desenvolvida por Toledo Piza e Nemes [8] é aplicada ao estudo da dinâmica de correlações quânticas entre dois subsistemas. Através desta técnica obtemos equações do tipo cinético que descrevem a evolução temporal do sistema além da aproximação de campo médio.

O uso de técnicas que utilizam operadores de projeção com o objetivo de tratar equações cinéticas não é recente. Esta técnica extremamente geral foi muito usada até meados dos anos setenta em problemas onde os sistemas de interesse estavam em contato com reservatórios, ou ainda, em problemas onde somente os elementos diagonais do operador matriz densidade eram importantes. Nestes problemas, os graus de liberdade do reservatório ou da parte não diagonal do operador densidade eram considerados irrelevantes e formalmente eliminados através de um operador de projeção. Entretanto, para sistemas dinâmicos de muitos corpos acoplados é conveniente ter uma descrição onde cada parte do sistema (subsistema) é considerada relevante. Willis e Picard [3] derivaram equações cinéticas para um sistema dinamicamente acoplado, onde os graus de liberdade a serem eliminados, não eram um subsistema ou uma parte do próprio sistema (reservatório), mas sim as correlações entre os subsistemas produzidas pela interação. Neste formalismo, através de um operador de projeção, elimina-se, em ordem mais baixa, as correlações entre os subsistemas (conhecidas como termos de colisão), sendo portanto equivalente à uma aproximação do tipo Hartree-Fock Dependente do Tempo (TDHF).

Por outro lado, para melhor compreender os processos irreversíveis é necessário estender os cálculos além da aproximação TDHF de modo a incluir as interações residuais (colisões de dois corpos). O formalismo necessário para este cálculo foi desenvolvido no final dos anos setenta e início dos anos oitenta e é comumente chamado de Apro-

ximação do tipo Hartree-Fock Dependente do Tempo Estendida (ETDHF) [6, 7, 8]. O trabalho desenvolvido por Toledo Piza e Nemes enquadra-se neste cenário e corresponde a uma aproximação do tipo Hartree-Fock-Bogoliubov Dependente do Tempo Estendida (ETDHFB).

Passamos agora a descrever esta Técnica de Projeção considerando um sistema composto formado de dois subsistemas de diferente natureza: um subsistema fermiônico e um bosônico. Para estudar observáveis associadas a um dos subsistemas de um sistema composto é suficiente dispor da densidade reduzida associada ao subsistema de interesse. Tomamos como ponto de partida que o sistema é descrito por uma densidade completa $\mathcal{F}(t)$, cuja evolução temporal é dada pela equação de Liouville von Neumann

$$i\dot{\mathcal{F}}(t) = [H, \mathcal{F}(t)] \quad , \quad (2.1)$$

onde H é a hamiltoniana total do sistema. Os operadores densidade reduzidos dos subsistemas fermiônico e bosônico são respectivamente definidos por

$$\rho(t) = \text{Tr}_B \mathcal{F}(t) \quad (2.2)$$

$$R(t) = \text{Tr}_F \mathcal{F}(t) \quad , \quad (2.3)$$

onde Tr_B e Tr_F denotam traço sobre as densidades bosônicas e fermiônicas, respectivamente. Tomando os traços parciais da equação de Liouville von Neumann obtemos equações do tipo cinético para as densidades reduzidas,

$$i\dot{\rho}(t) = \text{Tr}_B [H, \mathcal{F}(t)] \quad (2.4)$$

$$i\dot{R}(t) = \text{Tr}_F [H, \mathcal{F}(t)] \quad . \quad (2.5)$$

Dadas as densidades reduzidas, a densidade

$$\mathcal{F}_0(t) = \rho(t)R(t) \quad (2.6)$$

referente ao sistema composto, é tal que $\text{Tr}_B \mathcal{F}_0 = \rho$ e $\text{Tr}_F \mathcal{F}_0 = R$. Como $\mathcal{F}_0$ é construída inteiramente a partir de ρ e R sem informação adicional, então as correlações entre os subsistemas estão contidas numa densidade $\mathcal{F}'(t)$, também referente ao sistema composto, tal que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t) \quad . \quad (2.7)$$

O problema com as equações cinéticas (2.4) e (2.5) é que elas não são fechadas no sentido de que a dinâmica é dada em termos do estado completo $\mathcal{F}(t)$. Para controlar essa dificuldade é preciso escrever essas equações em termos das próprias densidades reduzidas. Dessa forma temos equações fechadas descrevendo a dinâmica dos subsistemas, independentemente de uma referência ao estado $\mathcal{F}(t)$. O problema se reduz então a exprimir $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0(t)$. Para isso Willis e Picard notam que $\mathcal{F}_0(t)$ pode ser escrito como

$$\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{F}(t) \quad \text{com} \quad \mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t) \quad , \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{P}(t)$ é um operador de projeção agindo sobre as densidades do sistema composto

$$\mathcal{P}(t) \cdot = \rho(t)Tr_F \cdot + R(t)Tr_B \cdot - \rho(t)R(t)Tr_B Tr_F \cdot \quad . \quad (2.9)$$

A densidade $\mathcal{F}(t)$ adquire o status de vetor no espaço vetorial de densidades e $\mathcal{P}(t)$ é operador agindo neste espaço. Como as densidades são operadores no espaço de vetores de estado, os operadores $\mathcal{P}(t)$ são chamados superoperadores e o espaço vetorial de densidades é chamado espaço de Liouville. O produto escalar de dois vetores nesse espaço é definido como

$$(X, Y) = Tr(X^\dagger Y) \quad (2.10)$$

O projetor adjunto $\mathcal{P}^\dagger(t)$ e o projetor complementar $\mathcal{Q}(t)$ são respectivamente definidos por

$$(\mathcal{P}^\dagger(t)X, Y) = (X, \mathcal{P}(t)Y) \quad , \quad (2.11)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{I} - \mathcal{P}(t) \quad , \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{I}$ é o operador identidade do espaço de Liouville.

O operador adjunto $\mathcal{P}^\dagger(t)$ pode ser obtido usando as definições do produto escalar (2.10) e do operador adjunto (2.11),

$$\mathcal{P}^\dagger \cdot = \text{Tr}_F(\rho \cdot) + \text{Tr}_B(R \cdot) - \text{Tr}_B \text{Tr}_F(\rho R \cdot) , \quad (2.13)$$

Por construção $\mathcal{P}(t)$ é um operador de projeção dependente do tempo. Portanto, em geral

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{P}(t)\mathcal{F}(t)] = \frac{d\mathcal{P}}{dt}\mathcal{F}(t) + \mathcal{P}(t)\frac{d\mathcal{F}}{dt} . \quad (2.14)$$

Pode-se no entanto verificar explicitamente que

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt}\mathcal{F}(t) = 0 , \quad (2.15)$$

de modo que, quando age sobre a densidade $\mathcal{F}(t)$, o projetor $\mathcal{P}(t)$ é tal que

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{P}(t)\mathcal{F}(t)] = \frac{d\mathcal{F}_0}{dt} = \mathcal{P}(t)\frac{d\mathcal{F}}{dt} . \quad (2.16)$$

Desse modo, a projeção $\mathcal{P}(t)$ da equação de Liouville-von Neumann (2.1) resulta em

$$\begin{aligned} i\dot{\mathcal{F}}_0(t) &= \mathcal{P}(t)[H, \mathcal{F}(t)] \\ &\equiv \mathcal{P}(t)\mathcal{L}\mathcal{F}(t) \\ &= \mathcal{P}(t)\mathcal{L}[\mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t)] , \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde foi definido o superoperador que gera deslocamentos da densidade completa,

$$\mathcal{L} \cdot \equiv [H, \cdot] , \quad (2.18)$$

chamado Liouvilliano do sistema composto. Nas referências [8, 25, 26] verifica-se que as condições (2.8) e (2.15) tornam a construção de $\mathcal{P}(t)$ única. Por outro lado, devemos ter o cuidado de observar que a sua construção na representação de Schrödinger é diferente da sua construção na representação de Heisenberg, já que a equação (2.15) é diferente nas duas representações. Na representação de Heisenberg a densidade completa $\mathcal{F}$ não depende do tempo. Neste caso, os operadores de Heisenberg contêm todas as complicações da

dinâmica de muitos corpos. Portanto, o problema crucial é exprimir a dinâmica dos operadores de maneira que a sua evolução seja dada em termos das variáveis relevantes. Nos capítulos 3 e 4 trabalharemos na representação de Heisenberg de modo que reobteremos as expressões acima na representação de Heisenberg.

Dado $\mathcal{P}(t)$ podemos obter uma equação para $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0$. Como projeção da equação de Liouville-von Neumann (2.1), a eq. (2.17) contém apenas parte da dinâmica do sistema composto. Para completá-la, basta projetar novamente a eq. (2.1) com o projetor complementar a $\mathcal{P}$. Com isso, obtemos

$$i\dot{\mathcal{F}}'(t) = \mathcal{Q}(t)\mathcal{L}[\mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t)] . \quad (2.19)$$

Esta é a equação que permite exprimir $\mathcal{F}'$ em termos de $\mathcal{F}_0$. Podemos reescrevê-la como

$$\left[i \frac{d}{dt} - \mathcal{Q}(t)\mathcal{L} \right] \mathcal{F}'(t) = \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{F}_0(t) , \quad (2.20)$$

cujas solução formal é dada por

$$\mathcal{F}'(t) = \mathcal{G}(t, 0)\mathcal{F}'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L}\mathcal{F}_0(t') , \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{G}(t, t')$ é a função de Green ordenada no tempo

$$\mathcal{G}(t, t') = T \exp \left[-i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{Q}(\tau) \mathcal{L} \right] . \quad (2.22)$$

Desta forma, $\mathcal{F}'$, e consequentemente $\mathcal{F}$, podem ser expressas formalmente em termos de $\mathcal{F}_0(t)$ (para $t' < t$). Na realidade, a expressão (2.21) não é inteiramente fechada em $\mathcal{F}_0$ devido ao termo que contém as correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$. Observamos que o segundo termo da eq. (2.21) reconstrói o restante de $\mathcal{F}'(t)$ através de uma integral sobre o passado de $\mathcal{F}_0(t)$ e tal reconstrução é obviamente inviável para as correlações presentes no estado inicial em $t = 0$. Por outro lado, é claro também que $\mathcal{F}'(0) = 0$ significa um estado inicial fatorizado. Deste modo, as equações (2.4) e (2.5) que descrevem a dinâmica efetiva do sistema tornam-se fechadas.

Substituindo a eq. (2.21) nas eqs. (2.4) e (2.5), utilizando-se a eq. (2.19), obtemos as seguintes equações fechadas para as densidades reduzidas

$$i\dot{\rho}(t) = \text{Tr}_B \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t) + \text{Tr}_B \mathcal{L} \mathcal{G}(t, 0) \mathcal{F}'(0) - i \text{Tr}_B \int_0^t dt' \mathcal{L} \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t') , (2.23)$$

$$i\dot{R}(t) = \text{Tr}_F \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t) + \text{Tr}_F \mathcal{L} \mathcal{G}(t, 0) \mathcal{F}'(0) - i \text{Tr}_F \int_0^t dt' \mathcal{L} \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t') . (2.24)$$

Os primeiros termos do lado direito dessas duas equações podem ser imediatamente reconhecidos como contribuições de campo médio às dinâmicas efetivas uma vez que $\mathcal{F}_0(t)$ é a parte de $\mathcal{F}(t)$ que não contém correlações entre os subsistemas. De fato, verificamos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t) &= \text{Tr}_B \mathcal{L} R(t) \rho(t) = \text{Tr}_B (H R \rho - R \rho H) \\ &= [\text{Tr}_B H R(t)] \rho(t) - \rho(t) [\text{Tr}_B H R(t)] \\ &\equiv l_F(t) \rho(t) , \end{aligned}$$

onde foram usadas a propriedade cíclica do traço e as definições

$$l_F(t) \cdot = [h_F^{(0)}(t), \cdot] \quad \text{com} \quad h_F^{(0)}(t) = \text{Tr}_B H R(t) ,$$

onde $h_F^{(0)}(t)$ corresponde à hamiltoniana efetiva de campo médio do subsistema de férmions. Analogamente, para o subsistema de bósons

$$\text{Tr}_F \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t) = l_B(t) R(t) .$$

As equações (2.23) e (2.24), com $\mathcal{F}'(0) = 0$, são na realidade equações do tipo cinéticas acopladas para as densidades reduzidas $\rho(t)$ e $R(t)$. Elas diferem das equações cinéticas fenomenológicas usuais pela presença de efeitos de memória (integrals sobre $t' < t$) e é por isso conveniente chamá-las equações pré-cinéticas.

As equações pré-cinéticas são equações exatas que descrevem de forma fechada a dinâmica efetiva dos subsistemas. Notamos entretanto que a complicada dependência temporal da equação (2.21), devido aos efeitos de memória, impede cálculos exatos deste objeto. Um esquema de expansão sistemática para os efeitos de memória foi discutido nas referências [8, 25, 26]. Como vimos, substituir

$$\mathcal{F}(t) \longrightarrow \mathcal{F}_0(t) \quad (2.25)$$

corresponde à aproximação de campo médio. Nesses trabalhos uma expansão não perturbativa em torno do campo médio foi escrita para essas equações. As correções de correlações ao campo médio em mais baixa ordem correspondem a substituir a evolução temporal dos operadores que ocorrem nas integrais de memória por uma evolução de campo médio dada por

$$H_0 = \mathcal{P}^\dagger(t)H .$$

Consistentemente com esta aproximação, $\mathcal{L}$ é substituído em (2.21) e (2.22) por $\mathcal{L}_0 \cdot = [H_0, \cdot]$. Desta forma, os efeitos de correlação são tratados em até segunda ordem em H nas integrais de colisão resultantes, pois nas integrais de memória em (2.23) e (2.24) há dois Liouvillianos. Uma importante característica deste esquema (o qual vale para ordens superiores da expansão [25]) é que o valor esperado da energia é conservado em todas as ordens, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle H \rangle = 0$$

onde

$$\langle H \rangle = \text{Tr } H\mathcal{F}_0(t) + \text{Tr } H\mathcal{F}'(t) .$$

Nos capítulos seguintes aplicaremos as expressões gerais obtidas acima para tratar primeiramente um sistema férmion-bóson não relativístico descrito pela hamiltoniana de Jaynes-Cummings e posteriormente um sistema uniforme relativístico composto de férmions e bósons escalares interagindo através de uma interação do tipo Yukawa.

Capítulo 3

Tratamento Cinético para um Sistema Férmion-Bóson: O Modelo de Jaynes-Cummings

Neste capítulo a técnica de projeção dependente do tempo descrita anteriormente é aplicada ao estudo da dinâmica de correlações quânticas de um sistema de férmions interagindo com bósons, descrito pela Hamiltoniana de Jaynes-Cummings. Através desta técnica obtemos equações do tipo cinético que descrevem a evolução temporal do sistema. A partir destas equações discutimos as aproximações não-perturbativas necessárias para que as equações se tornem trabalháveis. A escolha do Modelo de Jaynes-Cummings baseia-se no fato de que, além de ser um modelo solúvel, corresponde ao modelo relativístico do plasma escalar em zero dimensões espaciais. O estudo de modelos solúveis fornece um claro entendimento dos fenômenos físicos envolvidos, além de ser útil no controle das várias aproximações necessárias para o tratamento de modelos mais realísticos. Este capítulo corresponde ao trabalho da referência [29].

3.1 Variáveis Gaussianas e sua Dinâmica Efetiva

O Modelo de Jaynes-Cummings (JCM) [27] descreve a interação de dois subsistemas de diferente natureza: um sistema de dois níveis (sistema fermiônico) e um modo do campo quantizado (sistema bosônico). A Hamiltoniana exatamente solúvel é dada por

$$H = \frac{\epsilon}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1}) + \omega b^\dagger b + \lambda(a_1^\dagger a_{-1} b + a_{-1}^\dagger a_1 b^\dagger) , \quad (3.1)$$

onde os operadores de aniquilação e criação b e $b^\dagger$ satisfazem a relação de comutação $[b, b^\dagger] = 1$ e os operadores fermiônicos a_λ e $a_\lambda^\dagger$ satisfazem as relações de anticomutação $\{a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\lambda', \lambda}$, enquanto os demais comutadores e anticomutadores se anulam. Este modelo descreve a interação da radiação com a matéria (não relativisticamente). A radiação é representada por um modo normal do campo quantizado e a matéria por um sistema de dois níveis. A interação entre os dois subsistemas é tal que a emissão ou absorção de um quantum de energia pelo campo provoca o abaixamento ou levantamento do nível de energia do sistema de dois níveis. O parâmetro ϵ é a frequência natural de transição do sistema de dois níveis, ω é a frequência do modo normal do campo quantizado e λ é a constante de acoplamento entre os dois subsistemas.

A solubilidade do modelo vem do fato de que o termo de interação da hamiltoniana é escrito na chamada *Rotating Wave Approximation* [34], que consiste em ignorar os termos "anti-ressonantes" envolvendo $a_1^\dagger a_{-1} b^\dagger$ e seu conjugado hermitiano.

A idéia geral do nosso tratamento é obter a evolução temporal das variáveis de um corpo, ou seja, valores esperados dos operadores e suas combinações bilineares ou quadráticas, as quais chamamos variáveis gaussianas. O estado do sistema é dado em termos de uma matriz densidade $\mathcal{F}$ na Representação de Heisenberg. $\mathcal{F}$ é hermitiana, independente do tempo e tem traço unitário. Uma das variáveis de interesse é o valor esperado do operador bosônico

$$\langle b \rangle = B(t) = \text{Tr}_{\mathcal{B}\mathcal{F}} b\mathcal{F}$$

e seu complexo conjugado. Como $\mathcal{F}$ contém densidades de bósons e férmions, $\text{Tr}_{\mathcal{B}\mathcal{F}}$ denota traço sobre ambas as densidades. Definimos o operador deslocado

$$d(t) = b(t) - B(t) \quad (3.2)$$

cujo valor esperado em $\mathcal{F}$ se anula.

Os valores esperados das formas bilineares dos operadores bosônicos são dados pela matriz densidade estendida de um bóson [31]

$$\mathcal{R}_B = \begin{bmatrix} R_B & \Pi_B \\ \Pi_B^* & 1 + R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle d^\dagger(t)d(t) \rangle & \langle d(t)d(t) \rangle \\ \langle d^\dagger(t)d^\dagger(t) \rangle & \langle d(t)d^\dagger(t) \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde a matriz densidade normal de um bóson R_B é hermitiana e a matriz densidade de emparelhamento de um bóson Π_B é simétrica.

Para o sistema fermiônico a matriz densidade estendida de um férmion [31] é

$$\mathcal{R}_F = \begin{bmatrix} R_F & \Pi_F \\ -\Pi_F^* & 1 - R_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_{\lambda'}^\dagger(t) a_\lambda(t) \rangle & \langle a_{\lambda'}(t) a_\lambda(t) \rangle \\ \langle a_{\lambda'}^\dagger(t) a_\lambda^\dagger(t) \rangle & \langle a_{\lambda'}(t) a_\lambda^\dagger(t) \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

onde a matriz hermitiana R_F e a matriz antissimétrica Π_F são respectivamente as matrizes densidade normal e de emparelhamento de um férmion.

Quando escritas na base de partículas, $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_F$ são não diagonais pois existem em geral densidades de emparelhamento. Mas $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_F$ podem ser diagonalizadas através de uma transformação de Bogoliubov, de modo que na base de quasi-partículas as densidades de emparelhamento são nulas. Portanto, para tratar as correlações de emparelhamento em nosso formalismo empregaremos a técnica de Hartree-Fock-Bogoliubov também conhecida como Time Dependent Hartree-Fock-Bogoliubov (TDHFB) [5]. Ela consiste em diagonalizar a matriz densidade estendida com o propósito de tratar as correlações de emparelhamento em termos dos orbitais naturais. Em seguida toma-se as derivadas temporais das variáveis gaussianas e utilizando-se a equação de Heisenberg obtém-se a dinâmica efetiva destas.

No caso dos bósons definimos os operadores de quasi-bósons como

$$\begin{aligned} \beta(t) &= x^*(t)[b(t) - B(t)] + y^*(t)[b^\dagger(t) - B^*(t)] \\ \beta^\dagger(t) &= x(t)[b^\dagger(t) - B^*(t)] + y(t)[b(t) - B(t)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

tal que $\langle \beta\beta \rangle = \langle \beta^\dagger\beta^\dagger \rangle = 0$. A preservação das relações de comutação requer ainda que os coeficientes da transformação x e y sejam tais que $|x|^2 - |y|^2 = 1$. Assim, as densidades $\langle d^\dagger d \rangle$, $\langle dd^\dagger \rangle$, $\langle d^\dagger d^\dagger \rangle$ e $\langle dd \rangle$ podem ser parametrizadas em termos de x , y e $\nu = \langle \beta^\dagger\beta \rangle$.

Os coeficientes x e y da transformação de Bogoliubov são determinados pela equação secular que diagonaliza $\mathcal{R}_B$, ou seja,

$$G\mathcal{R}_B\mathcal{X}_B = \mathcal{X}_B GQ_B \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{X}_B = \begin{bmatrix} x(t) & y^*(t) \\ y(t) & x^*(t) \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q_B = \begin{bmatrix} \nu(t) & 0 \\ 0 & 1 + \nu(t) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Sendo Q_B a matriz densidade estendida de um bóson na base de quasi-partículas, o autovalor ν pode ser interpretado como o número de ocupação dos bósons deslocados para o orbital natural emparelhado descrito por $\mathcal{X}_B$. Uma vez que a transformação de Bogoliubov é canônica, podemos verificar que $\mathcal{X}_B$ satisfaz as relações de ortogonalidade e completeza

$$\mathcal{X}_B^\dagger G \mathcal{X}_B = \mathcal{X}_B G \mathcal{X}_B^\dagger = G \quad (3.8)$$

Analogamente, para os operadores fermiônicos definimos a transformação de Bogoliubov

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_{-1}(t) \\ \alpha_1^\dagger(t) \\ \alpha_{-1}^\dagger(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_F^* & 0 \\ 0 & X_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_{-1}(t) \\ a_1^\dagger(t) \\ a_{-1}^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde

$$X_F = \begin{bmatrix} u(t) & -v(t) \\ v^*(t) & u^*(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Por construção temos que $\langle \alpha_{\lambda'}(t) \alpha_\lambda(t) \rangle = \langle \alpha_{\lambda'}^\dagger(t) \alpha_\lambda^\dagger(t) \rangle = 0$, enquanto as densidades fermiônicas $\langle a_{\lambda'}^\dagger(t) a_\lambda(t) \rangle$, $\langle a_{\lambda'}(t) a_\lambda^\dagger(t) \rangle$, $\langle a_{\lambda'}^\dagger(t) a_\lambda^\dagger(t) \rangle$ e $\langle a_{\lambda'}(t) a_\lambda(t) \rangle$ são parametrizadas em termos de u , v e $p_\lambda = \langle \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \rangle$ onde $\lambda = -1, 1$. Como no caso dos bósons, temos um problema de autovalor

$$\mathcal{X}_F^\dagger \mathcal{R}_F \mathcal{X}_F = Q_F \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{X}_F$ é a transformação definida em (3.9) e (3.10)

$$\mathcal{X}_F = \begin{bmatrix} X_F^* & 0 \\ 0 & X_F \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{X}_F^\dagger = \begin{bmatrix} X_F^T & 0 \\ 0 & X_F^\dagger \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

satisfazendo as equações de unitariedade

$$\mathcal{X}_F^\dagger \mathcal{X}_F = \mathcal{X}_F \mathcal{X}_F^\dagger = \mathbf{I}_4 \quad (3.13)$$

A matriz Q_F é a matriz densidade estendida de um férmion na base de quasi-partículas

$$Q_F = \begin{bmatrix} p_\lambda(t) & 0 \\ 0 & 1 - p_\lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \alpha_{\lambda'}^\dagger(t) \alpha_\lambda(t) \rangle & 0 \\ 0 & \langle \alpha_{\lambda'}(t) \alpha_\lambda^\dagger(t) \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde p_λ é a matriz densidade de um férmion na base de quasi-partículas. Nesta base p_λ é diagonal com autovalores p_1 e p_{-1} que correspondem aos números de ocupação dos orbitais naturais.

O próximo passo é obter a evolução temporal das variáveis gaussianas. Começamos com o subsistema bosônico. Para $B(t)$ encontra-se imediatamente

$$i\dot{B} = Tr_{BF}[b, H]\mathcal{F} = x Tr_{BF}[\beta, H]\mathcal{F} - y^* Tr_{BF}[\beta^\dagger, H]\mathcal{F}, \quad (3.15)$$

onde H é a hamiltoniana dada por (3.1).

Para tratar as demais densidades inicialmente reescrevemos a equação de autovalor (3.6), usando (3.8), como

$$\mathcal{X}_B^\dagger \mathcal{R}_B \mathcal{X}_B = Q_B. \quad (3.16)$$

Derivando em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_B^\dagger \dot{\mathcal{R}}_B \mathcal{X}_B &= \dot{Q}_B - \dot{\mathcal{X}}_B^\dagger \mathcal{R}_B \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_B^\dagger \mathcal{R}_B \dot{\mathcal{X}}_B \\ &= \dot{Q}_B - \dot{\mathcal{X}}_B^\dagger G \mathcal{X}_B G Q_B - Q_B G \mathcal{X}_B^\dagger G \dot{\mathcal{X}}_B. \end{aligned} \quad (3.17)$$

O lado esquerdo desta equação pode ser calculado usando a equação de Heisenberg

$$i\mathcal{X}_B^\dagger \dot{\mathcal{R}}_B \mathcal{X}_B = \begin{pmatrix} Tr_{BF}[\beta^\dagger \beta, H]\mathcal{F} & Tr_{BF}[\beta \beta, H]\mathcal{F} \\ Tr_{BF}[\beta^\dagger \beta^\dagger, H]\mathcal{F} & Tr_{BF}[\beta \beta^\dagger, H]\mathcal{F} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

O lado direito da equação (3.17) pode, por outro lado, ser reescrito usando (3.7). Igualando o resultado à eq. (3.18), temos equações que descrevem a evolução temporal dos coeficientes x e y da transformação de Bogoliubov e da ocupação de quasi-bósons ν ,

$$\dot{\nu} = \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta^\dagger \beta, H] \mathcal{F} \quad (3.19)$$

$$i(1 + 2\nu)(\dot{x}^* \dot{y}^* - \dot{x} \dot{y}) = \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta \beta, H] \mathcal{F} . \quad (3.20)$$

Ou seja, a partir desse sistema de equações diferenciais acopladas temos a evolução temporal das variáveis gaussianas bosônicas.

Temos agora que obter equações análogas para as variáveis gaussianas fermiônicas. Derivando em relação ao tempo a equação de autovalor (3.11) e usando a equação de unitariedade (3.13) obtemos

$$\mathcal{X}_F \dot{\mathcal{R}}_F \mathcal{X}_F = \dot{Q}_F - \dot{\mathcal{X}}_F^\dagger \mathcal{X}_F Q_F - Q_F \mathcal{X}_F^\dagger \dot{\mathcal{X}}_F . \quad (3.21)$$

Substituindo (3.12) e (3.14) e usando a equação de unitariedade (3.13) podemos calcular o lado direito da eq. (3.21). Para calcular o lado esquerdo usamos a equação de movimento de Heisenberg. Obtemos

$$\dot{p}_\lambda = \text{Tr}_{\text{BF}} [\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda, H] \mathcal{F} , \quad \lambda = -1, 1 \quad (3.22)$$

$$i(p_1 - p_{-1})(\dot{u}^* \dot{v}^* - \dot{v} \dot{u}) = \text{Tr}_{\text{BF}} [\alpha_{-1}^\dagger \alpha_1, H] \mathcal{F} \quad (3.23)$$

que descrevem a dinâmica das variáveis fermiônicas.

3.2 Técnica de Projeção Dependente do Tempo

As eqs. (3.15), (3.19), (3.20), (3.22) e (3.22) formam um sistema de equações diferenciais acopladas que descrevem a evolução temporal de nossas variáveis bosônicas e fermiônicas. Estas equações não são contudo fechadas em nossas variáveis de um corpo pois, dada a matriz densidade completa $\mathcal{F}$, elas dependem da hamiltoniana do sistema que por sua vez contém interações de dois corpos [termo de interação entre os subsistemas - veja eq. (3.1)]; neste caso, as equações que descrevem a dinâmica de $\mathcal{R}$ envolverão também densidades de dois corpos.

Uma maneira de controlar estas dificuldades é através da técnica de projeção dependente do tempo desenvolvida por Toledo Piza e Nemes [8]. Como já foi dito no capítulo anterior, esta técnica consiste em decompor a matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$ em duas partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t) \\ &\equiv \mathcal{F}_0^B \mathcal{F}_0^F + \mathcal{F}'(t) ,\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde a forma fatorizada de $\mathcal{F}_0(t)$ corresponde ao que chamamos de dupla aproximação de campo médio descrevendo os aspectos de um corpo da densidade completa $\mathcal{F}$. As densidades $\mathcal{F}_0^B$ e $\mathcal{F}_0^F$ são densidades gaussianas escritas na forma de uma exponencial de uma expressão hermitiana bilinear nos operadores de criação/aniquilação bosônicos e fermiônicos, respectivamente. Quando explicitamente normalizadas a traço unitário, elas são dadas em termos dos operadores transformados introduzidos em (3.5) e (3.9) como [8, 32]

$$\mathcal{F}_0^F = \prod_{\lambda} [p_{\lambda} \alpha_{\lambda}^{\dagger} \alpha_{\lambda} + (1 - p_{\lambda}) \alpha_{\lambda} \alpha_{\lambda}^{\dagger}] \tag{3.25}$$

$$\mathcal{F}_0^B = \frac{1}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right)^{\beta^{\dagger} \beta} . \tag{3.26}$$

No Apêndice A encontram-se os cálculos dos traços utilizados na aproximação de campo médio, nos quais verificamos que dada a densidade $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^B \mathcal{F}_0^F$, temos

$$\begin{aligned}Tr_{BF}(\alpha_a \mathcal{F}_0) &= Tr_{BF}(\alpha_a^{\dagger} \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{BF}(\alpha_a \alpha_b \mathcal{F}_0) &= Tr_{BF}(\alpha_a^{\dagger} \alpha_b^{\dagger} \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{BF}(\alpha_a^{\dagger} \alpha_b \mathcal{F}_0) &= p_a \delta_{ab} \\ Tr_{BF}(\alpha_a \alpha_b^{\dagger} \mathcal{F}_0) &= (1 - p_a) \delta_{ab} \\ Tr_{BF}(\beta \mathcal{F}_0) &= Tr_{BF}(\beta^{\dagger} \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{BF}(\beta \beta \mathcal{F}_0) &= Tr_{BF}(\beta^{\dagger} \beta^{\dagger} \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{BF}(\beta^{\dagger} \beta \mathcal{F}_0) &= \nu \\ Tr_{BF}(\beta \beta^{\dagger} \mathcal{F}_0) &= (1 + \nu)\end{aligned}$$

A densidade $\mathcal{F}_0$ descreve completamente os aspectos de um corpo da matriz densidade completa $\mathcal{F}$. A densidade $\mathcal{F}'(t)$ é consequentemente a parte que descreve as correlações da densidade completa $\mathcal{F}$. Devido à forma especial usada para $\mathcal{F}_0(t)$, a densidade $\mathcal{F}'$ contém, em geral, correlações de dois tipos: correlações *inter-subsistemas* (bóson-férmion) e correlações *intra-subsistemas* (bóson-bóson e férmion-férmion).

O próximo passo consiste em usar o fato de que a decomposição (3.24) pode ser implementada em termos de um operador de projeção dependente do tempo $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)$ (cf. Ref. [3]),

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}_0^F Tr_F \mathcal{P}_B + \mathcal{F}_0^B Tr_B \mathcal{P}_F - \mathcal{F}_0^F \mathcal{F}_0^B Tr_F Tr_B , \quad (3.27)$$

onde $\mathcal{P}_B$ é o operador de projeção dos bósons [33]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_B = & \left[\left(1 - \frac{\beta^\dagger \beta - \nu}{1 + \nu} \right) Tr_B + \frac{\beta^\dagger \beta - \nu}{\nu(1 + \nu)} Tr_B(\beta^\dagger \beta \cdot) + \frac{\beta}{\nu} Tr_B(\beta^\dagger \cdot) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^\dagger}{1 + \nu} Tr_B(\beta \cdot) + \frac{\beta \beta}{2\nu^2} Tr_B(\beta^\dagger \beta^\dagger \cdot) + \frac{\beta^\dagger \beta^\dagger}{2(1 + \nu)^2} Tr_B(\beta \beta \cdot) \right] \mathcal{F}_0^B , \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\mathcal{P}_F$ é o projetor dos férmions [26]

$$\mathcal{P}_F = \left[\left(1 - \sum_{\lambda=-1,1} \frac{\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda - p_\lambda}{1 - p_\lambda} \right) Tr_F + \sum_{\lambda,\lambda'=-1,1} \left(\frac{\alpha_\lambda^\dagger \alpha_{\lambda'} - p_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}}{p_{\lambda'}(1 - p_\lambda)} \right) Tr_F(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_{\lambda'}) \right] \mathcal{F}_0^F \quad (3.29)$$

e o ponto indica o objeto no qual o operador atua. Com a ajuda de $\mathcal{P}(t)$ a densidade gaussiana fatorizada pode ser obtida como

$$\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{F} , \quad (3.30)$$

enquanto a sua derivada temporal é dada pela expressão

$$i\dot{\mathcal{F}}_0(t) = [\mathcal{F}_0(t), H] + \mathcal{P}(t)[H, \mathcal{F}] , \quad (3.31)$$

que é a representação de Heisenberg da equação $\dot{\mathcal{P}}\mathcal{F} = 0$ que foi usada para definir $\mathcal{P}(t)$ na representação de Schrödinger [3, 26].

A partir das eqs. (3.24) e (3.31) podemos obter uma equação diferencial para $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0(t)$

$$\left[i \frac{d}{dt} + \mathcal{P}(t) \mathcal{L} \right] \mathcal{F}'(t) = \mathcal{Q} \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t) , \quad (3.32)$$

onde introduzimos o projetor complementar $\mathcal{Q}(t) \mathcal{F} \equiv [\mathcal{I} - \mathcal{P}(t)] \mathcal{F} = \mathcal{F}'(t)$ e a notação $\mathcal{L} \cdot$ para o Liouvillian $[H, \cdot]$. Esta equação tem a solução formal

$$\mathcal{F}'(t) = \mathcal{G}(t, 0) \mathcal{F}'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t') , \quad (3.33)$$

onde o primeiro termo corresponde às condições iniciais (correlações iniciais), e $\mathcal{G}(t, t')$ é a função de Green ordenada no tempo

$$\mathcal{G}(t, t') = T \exp \left[i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}(\tau) \mathcal{L} \right] . \quad (3.34)$$

Assim $\mathcal{F}'(t)$, e consequentemente $\mathcal{F}$, podem ser formalmente expressas em termos de $\mathcal{F}_0(t')$ para $t' < t$ e das correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$. Isto finalmente nos permite expressar as equações dinâmicas (3.15), (3.19), (3.20), (3.22) e (3.22) como traços sobre funcionais de $\mathcal{F}_0(t')$ e das correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$. Consequentemente, as equações dinâmicas que descrevem a evolução temporal de nosso sistema são formalmente fechadas em nossas variáveis de interesse.

3.3 Aproximação para a Dinâmica de Colisões

Como pode ser visto da equação (3.33), a contribuição de correlações às equações dinâmicas envolvem além das correlações iniciais, traços sobre funcionais de $\mathcal{F}_0(t')$ com efeitos de memória dados por expressões do tipo

$$\begin{aligned} T_{\text{BF}}[\mathcal{O}_B, H] \int_0^t \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t') dt' \\ T_{\text{BF}}[\mathcal{O}_F, H] \int_0^t \mathcal{G}(t, t') \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t') dt' , \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\mathcal{O}_B$ e $\mathcal{O}_F$ são densidades bosônicas e fermiônicas, respectivamente. A densidade $\mathcal{Q} \mathcal{L} \mathcal{F}_0 = \mathcal{Q}[H, \mathcal{F}_0]$ dada por

$$\begin{aligned}
Q[H, \mathcal{F}_0] = & \lambda \left\{ (u^* v x - u v^* y) \left(\alpha_1^\dagger \alpha_1 \frac{\beta}{\nu} - \alpha_{-1}^\dagger \alpha_{-1} \frac{\beta}{\nu} \right) \right. \\
& + (u^* v y^* - u v^* x^*) \left(\alpha_1^\dagger \alpha_1 \frac{\beta^\dagger}{1+\nu} - \alpha_{-1}^\dagger \alpha_{-1} \frac{\beta^\dagger}{1+\nu} \right) \\
& - (u^* v x - u v^* y)(p_1 - p_{-1}) \frac{\beta}{\nu} - (u^* v y^* - u v^* x^*)(p_1 - p_{-1}) \frac{\beta^\dagger}{1+\nu} \\
& - (u^{*2} x + v^{*2} y) \left(\frac{p_1(1-p_{-1}) - (p_{-1}-p_1)\nu}{p_{-1}(1-p_1)\nu} \right) \alpha_1^\dagger \alpha_{-1} \beta \\
& - (u^{*2} y^* + v^{*2} x^*) \left(\frac{p_1(1-p_{-1}) + (p_{-1}-p_1)(1+\nu)}{p_{-1}(1-p_1)(1+\nu)} \right) \alpha_1^\dagger \alpha_{-1} \beta^\dagger \\
& + (u^2 y + v^2 x) \left(\frac{p_{-1}(1-p_1) - (p_1-p_{-1})\nu}{p_1(1-p_{-1})\nu} \right) \alpha_{-1}^\dagger \alpha_1 \beta \\
& \left. + (u^2 x^* + v^2 y^*) \left(\frac{p_{-1}(1-p_1) + (p_1-p_{-1})(1+\nu)}{p_1(1-p_{-1})(1+\nu)} \right) \alpha_{-1}^\dagger \alpha_1 \beta^\dagger \right\} \mathcal{F}_0 \quad (3.36)
\end{aligned}$$

representa as correlações dinâmicas (filtradas pelo projetor $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{I} - \mathcal{P}$) e como podemos ver, não possui contribuições de um corpo. Essas correlações dinâmicas são então propagadas do instante t' , no qual são produzidas, até o tempo t por meio de $\mathcal{G}(t, t')$. Os traços das eqs. (3.36) não são imediatamente calculáveis devido à complexidade de $\mathcal{G}(t, t')$. Os autores da ref. [26] mostraram uma maneira de aproximar o propagador $\mathcal{G}(t, t')$ na representação de Schrödinger. Nesse trabalho eles expandem $\mathcal{G}(t, t')$ em séries de potências de um propagador mais simples definido por

$$\mathcal{G}_0(t, t') = T \exp \left\{ i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{L}_0^S(\tau) \right\} , \quad (3.37)$$

sendo a energia conservada em todas as ordens.

Seguindo Lin [33], implementamos na representação de Heisenberg uma versão modificada da aproximação de mais baixa ordem da ref. [26], que consiste em substituir a hamiltoniana H nas expressões acima por uma hamiltoniana efetiva de campo médio H_0 dada por

$$\begin{aligned}
H_0 = & \mathcal{P}^\dagger(t)H + \beta^\dagger Tr_{\text{BF}}[\beta, H]\mathcal{F}'(t) - \beta Tr_{\text{BF}}[\beta^\dagger, H]\mathcal{F}'(t) \\
& + \frac{\beta^\dagger\beta^\dagger}{2(1+2\nu)}Tr_{\text{BF}}[\beta\beta, H]\mathcal{F}'(t) - \frac{\beta\beta}{2(1+2\nu)}Tr_{\text{BF}}[\beta^\dagger\beta^\dagger, H]\mathcal{F}'(t) \\
& + \frac{\alpha_1^\dagger\alpha_{-1}}{(p_{-1}-p_1)}Tr_{\text{BF}}[\alpha_{-1}^\dagger\alpha_1, H]\mathcal{F}'(t) + \frac{\alpha_{-1}^\dagger\alpha_1}{(p_1-p_{-1})}Tr_{\text{BF}}[\alpha_1^\dagger\alpha_{-1}, H]\mathcal{F}'(t) . \quad (3.38)
\end{aligned}$$

O primeiro termo nesta expressão corresponde à aproximação em ordem mais baixa de acordo com a ref.[26]. Note que $\mathcal{P}(t)$ não é uma projeção ortogonal, i.e. $\mathcal{P}^\dagger(t) \neq \mathcal{P}(t)$. Os termos restantes incluídos aqui representam contribuições de correlações ao campo médio efetivo. Calculando $\mathcal{P}^\dagger H$ a partir dos projetores (3.27), (3.28) e (3.29), a hamiltoniana de campo médio H_0 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
H_0 = & \left(1 - \frac{\beta^\dagger\beta - \nu}{1+\nu}\right) Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}(H\mathcal{F}_0) + \frac{\beta^\dagger\beta - \nu}{\nu(1+\nu)} Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}(\beta^\dagger\beta H\mathcal{F}_0) \\
& - \beta Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}([\beta^\dagger, H]\mathcal{F}) + \beta^\dagger Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}([\beta, H]\mathcal{F}) + \\
& - \frac{\beta\beta}{2(1+\nu)} Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}([\beta^\dagger\beta^\dagger, H]\mathcal{F}) + \frac{\beta^\dagger\beta^\dagger}{2(1+2\nu)} Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}([\beta\beta, H]\mathcal{F}) \\
& - \sum_{j=-1,1} \left(\frac{\alpha_j^\dagger\alpha_j - p_j}{1-p_j}\right) Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}(H\mathcal{F}_0) + \sum_{j=-1,1} \frac{\alpha_j^\dagger\alpha_j - p_j}{p_j(1-p_j)} Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}(\alpha_j^\dagger\alpha_j H\mathcal{F}_0) \\
& + \sum_{j,l=-1,1(j \neq l)} \frac{\alpha_j^\dagger\alpha_l}{(p_l - p_j)} Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}([\alpha_l^\dagger\alpha_j, H]\mathcal{F}) - Tr_{\text{B}}Tr_{\text{F}}(H\mathcal{F}_0) . \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Consistentemente com esta aproximação, a função de Green (3.34) em ordem mais baixa na representação de Heisenberg é dada pelo operador identidade [Veja Apêndice B]

$$\mathcal{G}(t, t') = \mathcal{I} ,$$

de modo que a densidade de correlação nesta aproximação é dada por

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{G}^{(0)}(t, 0) \mathcal{F}(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t'). \quad (3.40)$$

Por simplicidade, nos restringiremos agora a estados inicialmente não correlacionados, i.e., $\mathcal{F}(0) = 0$. As equações dinâmicas das variáveis gaussianas com termos de correlação são então dadas por

$$i \frac{d}{dt} [Tr_{BF}(\mathcal{O}_F(t) \mathcal{F})] = \underbrace{Tr_{BF}[\mathcal{O}_F(t), H] \mathcal{F}_0(t)}_{\text{aprox. de campo médio}} - i \underbrace{Tr_{BF}[\mathcal{O}_F(t), H] \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t')}_{\text{termo de correlações}} \quad (3.41)$$

$$i \frac{d}{dt} [Tr_{BF}(\mathcal{O}_B(t) \mathcal{F})] = \underbrace{Tr_{BF}[\mathcal{O}_B(t), H] \mathcal{F}_0(t)}_{\text{aprox. de campo médio}} - i \underbrace{Tr_{BF}[\mathcal{O}_B(t), H] \int_0^t dt' \mathcal{Q}(t') \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t')}_{\text{termo de correlações}} ,$$

onde $\mathcal{O}_F$ e $\mathcal{O}_B$ correspondem às variáveis gaussianas fermiônicas e bosônicas, respectivamente.

Os termos envolvendo $\mathcal{F}_0(t)$ podem ser calculados a partir da hamiltoniana H na base de quasi-partículas e do operador de projeção dados por (3.27), (3.28) e (3.29). Contudo, os traços nos últimos termos das eqs. (3.41) não podem ser tomados diretamente, pois os operadores de quasi-partículas na integral e no primeiro comutador estão em tempos diferentes. Para resolver este problema consideremos a evolução temporal dos operadores $\beta(t)$, $\alpha_1(t)$ e $\alpha_{-1}(t)$, com o objetivo de verificar como estes operadores relacionam-se em tempos diferentes. A evolução temporal do operador $\beta(t)$ é dada pela equação de Heisenberg,

$$i\dot{\beta} = [\beta, H] + \frac{\partial \beta}{\partial t} , \quad (3.42)$$

onde o último termo leva em conta a dependência explícita de $\beta(t)$ com as amplitudes de deslocamento e os efeitos de emparelhamento,

$$\begin{aligned} i\dot{\beta} &= [\beta, H] + i \frac{\partial \beta}{\partial x^*} \dot{x}^* + i \frac{\partial \beta}{\partial y^*} \dot{y}^* + i \frac{\partial \beta}{\partial B} \dot{B} + i \frac{\partial \beta}{\partial B^*} \dot{B}^* \\ &= [\beta, H] + i(\dot{x}x - \dot{y}^*y)\beta - i(\dot{x}^*y^* - x^*\dot{y}^*)\beta^\dagger - Tr_{BF}[\beta, H] \mathcal{F} . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Analogamente, a evolução temporal dos operadores fermiônicos $\alpha_1(t)$ e $\alpha_{-1}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} i\dot{\alpha}_1 &= [\alpha_1, H] + i\frac{\partial\alpha_1}{\partial u^*}\dot{u}^* + i\frac{\partial\alpha_1}{\partial v^*}\dot{v}^* \\ &= [\alpha_1, H] + i(\dot{u}^*u + \dot{v}^*v)\alpha_1 + i(\dot{u}^*v^* - u^*\dot{v}^*)\alpha_{-1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned} i\dot{\alpha}_{-1} &= [\alpha_{-1}, H] + i\frac{\partial\alpha_{-1}}{\partial v}\dot{v} + i\frac{\partial\alpha_{-1}}{\partial u}\dot{u} \\ &= [\alpha_{-1}, H] + i(\dot{u}u^* + \dot{v}v^*)\alpha_{-1} - i(\dot{u}v - u\dot{v})\alpha_1 . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Como foi dito anteriormente, vamos substituir a hamiltoniana H nas expressões acima por uma hamiltoniana efetiva de campo médio H_0 dada pela eq.(3.39),

$$i\dot{\beta} = [\beta, H_0] + i(\dot{x}^*x - \dot{y}^*y)\beta - i(\dot{x}^*y^* - x^*\dot{y}^*)\beta^\dagger - Tr_{BF}[\beta, H]\mathcal{F} \quad (3.46)$$

$$i\dot{\alpha}_1 = [\alpha_1, H_0] + i(\dot{u}^*u + \dot{v}^*v)\alpha_1 + i(\dot{u}^*v^* - u^*\dot{v}^*)\alpha_{-1} \quad (3.47)$$

$$i\dot{\alpha}_{-1} = [\alpha_{-1}, H_0] + i(\dot{u}u^* + \dot{v}v^*)\alpha_{-1} - i(\dot{u}v - u\dot{v})\alpha_1 . \quad (3.48)$$

Calculando os comutadores e reagrupando os termos, obtemos

$$i\frac{d\beta}{dt} = i(\dot{x}^*x - \dot{y}^*y)\beta + \omega(|x|^2 + |y|^2)\beta \equiv F_\beta(t)\beta \quad (3.49)$$

$$i\frac{d\alpha_1}{dt} = \left[\frac{\epsilon}{2}(|u|^2 - |v|^2) - \lambda(u^*vB + uv^*B^*) \right] \alpha_1 + i(\dot{u}^*u + \dot{v}^*v)\alpha_1 \equiv F_{\alpha_1}(t)\alpha_1 \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
i \frac{d\alpha_{-1}}{dt} &= - \left[\frac{\epsilon}{2} (|u|^2 - |v|^2) - \lambda (u^* v B + u v^* B^*) \right] \alpha_{-1} + i (\dot{u} u^* + \dot{v} v^*) \alpha_{-1} \\
&= - \left[\frac{\epsilon}{2} (|u|^2 - |v|^2) - \lambda (u^* v B + u v^* B^*) \right] \alpha_{-1} - i (\dot{u}^* u + \dot{v}^* v) \alpha_{-1} \equiv F_{\alpha_{-1}}(t) \alpha_{-1}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

onde na última passagem usamos o fato de que u e v satisfazem a relação de unitariedade $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

A partir de (3.49), (3.50) e (3.51) podemos verificar que os operadores $\beta(t)$ e $\alpha_\lambda(t)$ em tempos diferentes estão relacionados por uma fase nessa aproximação

$$i \frac{d\beta}{dt} \equiv F_\beta(t) \beta \implies \beta(t) = e^{i\varphi_\beta(t,t')} \beta(t') , \tag{3.52}$$

onde a fase $\varphi_\beta(t, t')$ é dada por

$$\varphi_\beta(t, t') = - \int_{t'}^t d\tau F_\beta(\tau)$$

e

$$i \frac{d\alpha_1}{dt} \equiv F_{\alpha_1}(t) \alpha_1 \implies \alpha_1(t) = e^{i\xi_\alpha(t,t')} \alpha_1(t') \tag{3.53}$$

$$i \frac{d\alpha_{-1}}{dt} \equiv F_{\alpha_{-1}}(t) \alpha_{-1} \implies \alpha_{-1}(t) = e^{-i\xi_\alpha(t,t')} \alpha_{-1}(t') , \tag{3.54}$$

onde a fase $\xi_\alpha(t, t')$ é

$$\xi_\alpha(t, t') = - \int_{t'}^t d\tau F_\alpha(\tau).$$

Sabendo que os operadores de quasi-partículas $\beta(t)$ e $\alpha_\lambda(t)$ em tempos diferentes estão relacionados por uma fase, podemos substituir as densidades fermiônicas e bosônicas em (3.41) e usando (3.52 - 3.54) calcular o traço no instante t' . Para uma dada densidade, $\mathcal{O}_F = \alpha_1^\dagger(t) \alpha_1(t)$ por exemplo, temos para o termo de colisão

$$\begin{aligned}
& -iT\tau_{BF}[O_F, H] \int_0^t dt' Q(t') \mathcal{L}\mathcal{F}_0(t') \\
& = -iT\tau_{BF} \int_0^t dt' [\alpha_1^\dagger(t) \alpha_1(t), H] Q(t') \mathcal{L}\mathcal{F}_0(t') \\
& = -iT\tau_{BF} \left\{ [cu^*v^* + \lambda(u^{*2}B - v^{*2}B^*)] \int_0^t dt' \alpha_1^\dagger(t') \alpha_{-1}(t') e^{-2i\xi_\alpha(t, t')} \right. \\
& \quad - [cuv + \lambda(u^2B^* - v^2B)] \int_0^t dt' \alpha_{-1}^\dagger(t') \alpha_1(t') e^{2i\xi_\alpha(t, t')} \\
& \quad + \lambda [(u^{*2}x + v^{*2}y) \int_0^t dt' \alpha_1^\dagger(t') \alpha_{-1}(t') \beta(t') e^{-2i\xi_\alpha(t, t')} e^{i\varphi_\beta(t, t')} \\
& \quad - (u^{*2}y^* + v^{*2}x^*) \int_0^t dt' \alpha_1^\dagger(t') \alpha_{-1}(t') \beta^\dagger(t') e^{-2i\xi_\alpha(t, t')} e^{-i\varphi_\beta(t, t')} \\
& \quad + (u^2y + v^2x) \int_0^t dt' \alpha_{-1}^\dagger(t') \alpha_1(t') \beta(t') e^{2i\xi_\alpha(t, t')} e^{i\varphi_\beta(t, t')} \\
& \quad \left. - (u^2x^* + v^2y^*) \int_0^t dt' \alpha_{-1}^\dagger(t') \alpha_1(t') \beta^\dagger(t') e^{2i\xi_\alpha(t, t')} e^{-i\varphi_\beta(t, t')} \right\} Q(t') \mathcal{L}\mathcal{F}_0(t')
\end{aligned}$$

Substituindo a densidade $Q(t')\mathcal{L}\mathcal{F}_0(t')$ podemos calcular o traço obtendo para a integral de colisão deste exemplo a expressão

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \left\{ -(u^{*2}x + v^{*2}y) \int_0^t dt' (u^2x^* + v^2y^*) \nu [p_1(1 - p_{-1}) + (p_1 - p_{-1})\nu] e^{-2i\xi_\alpha(t, t')} e^{i\varphi_\beta(t, t')} \right. \\
& + \text{C.C.} \\
& \quad + (u^{*2}y^* + v^{*2}x^*) \int_0^t dt' (u^2y + v^2x) \nu [p_{-1}(1 - p_1) + (p_{-1} - p_1)\nu] e^{-2i\xi_\alpha(t, t')} e^{-i\varphi_\beta(t, t')} \\
& \quad \left. + \text{C.C.} \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as demais densidades em (3.41) e calculando os traços, obtemos as equações que descrevem a presente aproximação para a dinâmica de colisões

$$\dot{\nu} = \lambda^2 \left\{ (u^* v y^* - u v^* x^*) I_1 + (u^{*2} y^* + v^{*2} x^*) I_2 + (u^2 x^* + v^2 y^*) I_3 \right\} + \text{C.C.} \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt}(p_1 - p_{-1}) = 2\lambda^2 \left\{ -(u^{*2} x + v^{*2} y) I_3^* + (u^{*2} y^* + v^{*2} x^*) I_2 \right\} + \text{C.C.} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} i(p_1 - p_{-1})(\dot{u}v - u\dot{v}) &= (p_1 - p_{-1})[cuv + \lambda(u^2 B^* - v^2 B)] + \\ &- 2i\lambda^2(u^* vx - uv^* y) I_3^* - 2i\lambda^2(uv^* x^* - u^* v y^*) I_2 + \\ &+ i\lambda^2(u^2 y + v^2 x) I_1^* + i\lambda^2(u^2 x^* + v^2 y^*) I_1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} i(1 + 2\nu)(\dot{x}^* y^* - x^* \dot{y}^*) &= -(1 + 2\nu)2\omega x^* y^* - 2i\lambda^2(u^* v y^* - uv^* x^*) I_1^* + \\ &+ 2i\lambda^2(u^{*2} y^* + v^{*2} x^*) I_3^* + 2i\lambda^2(u^2 x^* + v^2 y^*) I_2^* \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$I_1 = \int_0^t dt' (uv^* y - u^* vx) [p_1(1 - p_1) + p_{-1}(1 - p_{-1})] e^{i\varphi_B(t, t')} \quad (3.59)$$

$$I_2 = \int_0^t dt' (u^2 y + v^2 x) [p_{-1}(1 - p_1) + (p_{-1} - p_1)\nu] e^{-i(2\xi_\alpha(t, t') + \varphi_B(t, t'))} \quad (3.60)$$

$$I_3 = \int_0^t dt' (u^{*2} x + v^{*2} y) [p_1(1 - p_{-1}) + (p_1 - p_{-1})\nu] e^{i(2\xi_\alpha(t, t') - \varphi_B(t, t'))} \quad (3.61)$$

Observe que não é possível resolver o sistema de equações diferenciais (3.55 - 3.58) sem antes resolvermos as integrais I_1 , I_2 e I_3 . Usando a equação de fase (3.52), podemos escrever a integral I_1 como

$$I_1 = e^{-I_\beta} I_e^{(1)}(t) \quad (3.62)$$

onde

$$I_\beta(t) = \int_0^t dt' F_\beta(t') \quad (3.63)$$

$$I_e^{(1)}(t) = \int_0^t dt' (uv^*y - u^*vx)[p_1(1-p_1) + p_{-1}(1-p_{-1})]_t e^{i\varphi_\beta(t',0)} \quad (3.64)$$

$$F_\beta = i(\dot{x}^*x - \dot{y}^*y) + \omega(|x|^2 + |y|^2) \quad (3.65)$$

Para resolver a equação (3.62), escrevemos equações diferenciais para as integrais I_β e $I_e^{(1)}$

$$\dot{I}_\beta = i(\dot{x}^*x - \dot{y}^*y) + \omega(|x|^2 + |y|^2) \quad (3.66)$$

$$\dot{I}_e^{(1)} = (uv^*y - u^*vx)[p_1(1-p_1) + p_{-1}(1-p_{-1})]_t e^{-I_\beta} \quad (3.67)$$

de modo que substituindo I_1 dada por (3.62) nas equações (3.55 - 3.58), temos equações diferenciais para I_β e $I_e^{(1)}$ dadas por (3.66) e (3.67) as quais podem ser integradas juntamente com as equações (3.55 - 3.58).

Usando a outra equação de fase, obtemos a partir de I_2 e I_3

$$\dot{I}_e^{(2)} = (u^2y + v^2x)[p_{-1}(1-p_1) + (p_{-1} - p_1)\nu]_t e^{-i(2I_\alpha + I_\beta)} \quad (3.68)$$

$$\dot{I}_e^{(3)} = (u^{*2}x + v^{*2}y)[p_1(1-p_{-1}) + (p_1 - p_{-1})\nu]_t e^{i(2I_\alpha - I_\beta)} \quad (3.69)$$

$$\dot{I}_\alpha = i(\dot{u}^*u + \dot{v}^*v) + \frac{\epsilon}{2}(|u_t|^2 - |v_t|^2) - \lambda(u_t^*v_t B_t + u_t v_t^* B_t^*) \quad (3.70)$$

Usamos para os coeficientes da transformação de Bogoliubov (3.10) a seguinte parametrização consistente com as condições de unitariedade (3.13)

$$u = \cos \theta$$

$$v = e^{-i\delta} \sin \theta .$$

Para os coeficientes da transformação de Bogoliubov dos bósons (3.5) a parametrização

$$x = \cosh \kappa + i \frac{\eta}{2}$$

$$y = \sinh \kappa - i \frac{\eta}{2}$$

consistente com as condições de ortogonalidade e completeza (3.8).

Assim podemos integrar as equações (3.66 - 3.70), juntamente com as equações (3.55 - 3.58). Estas equações descrevem a evolução temporal das variáveis gaussianas na aproximação com termos de colisão.

3.4 Resultados e Discussão

Mostraremos agora os resultados obtidos para duas observáveis relevantes associadas ao subsistema fermiônico (sistema de dois níveis) do Modelo de Jaynes-Cummings: a inversão atômica, $\langle \sigma_3(t) \rangle$, e a inversão atômica "intrínseca", denotada por $\langle \sigma_{\text{pol}}(t) \rangle$, onde σ_{pol} é a projeção do operador $\vec{\sigma}$ ao longo do eixo de polarização do spin, i.e.,

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \langle \vec{\sigma} \rangle}{|\langle \vec{\sigma} \rangle|}$$

e

$$\sigma_3, \sigma_{\pm} = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}$$

são matrizes de Pauli. A inversão atômica "intrínseca" nos dá o grau de polarização intrínseca do spin como função do tempo e depende da dinâmica de correlações entre os subsistemas. Em termos dos parâmetros de Bogoliubov, os valores médios destas observáveis são dadas por

$$\langle \sigma_3 \rangle = (p_1 - p_{-1}) \cos 2\theta$$

$$\langle \sigma_{\text{pol}} \rangle = (p_1 - p_{-1}) \cdot$$

Um exemplo dos resultados obtidos nas aproximações de campo médio e colisional para a evolução destes objetos é mostrada nas figuras abaixo. Elas foram obtidas integrando-se numericamente as equações (3.55 - 3.58) e comparando-se com as soluções exatas do modelo.

Figura 3.1: Evolução temporal da inversão atômica com $\lambda = 0.5$. Condições iniciais: $\nu = 0$, $\kappa(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, $|B(0)| = 5$ (estado coerente); $p_1 = 1$, $p_{-1} = 0$, $\theta(0) = 0$ e $\delta(0) = 0.05$. Linha cheia: solução exata; Linha tracejada-pontilhada: aproximação colisional; Linha tracejada: aproximação de campo médio

A Figura 3.1 mostra a evolução temporal da inversão atômica $\langle \sigma_3 \rangle$ quando o átomo é inicialmente preparado no estado excitado ($p_1(0) = 1$, $p_{-1}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ e $\delta(0) = 0.05$) e o campo está inicialmente no estado coerente construído como o vácuo dos operadores de aniquilação deslocados ($\kappa(0) = 0$, $\eta(0) = 0$ and $\nu(0) = 0$). O número médio de fótons $B^2(0)$ é 25 neste exemplo. Nós usamos unidades tais que $\epsilon = \omega = 1$ e $\lambda = 0.5$. A evolução da polarização intrínseca para as mesmas condições iniciais é mostrada na Figura 3.2.

Figura 3.2: Evolução temporal da polarização intrínseca. As condições iniciais são as mesmas solução exata; Linha tracejada-pontilhada: aproximação colisional; Linha tracejada: aproximação de campo médio

A aproximação de campo médio corresponde a ignorar as integrais I_1 , I_2 and I_3 , as quais são zero em todos os instantes nesta aproximação. Desta forma, as probabilidades de ocupação ν , p_1 e p_{-1} tornam-se independentes do tempo, de modo que não existem correlações entre os subsistemas. Como consequência, não há despolarização e a inversão atômica oscila com amplitude constante. Na aproximação colisional, uma modulação da amplitude das oscilações de Rabi é obtida a partir da despolarização resultante da inclusão dos termos de colisão, [eqs. (3.55)-(3.61)], que descrevem as correlações entre os subsistemas.

Concluimos que a inclusão das integrais de colisão nas equações dinâmicas são não somente fundamentais para gerar o comportamento qualitativo associado com as correlações entre os subsistemas que resultam no amortecimento das oscilações de Rabi, como também descreve quantitativamente bem este comportamento para tempos comparáveis ao tempo de despolarização.

Capítulo 4

Equações Cinéticas na Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo adaptamos a técnica de projeção dependente do tempo descrita anteriormente ao estudo de sistemas relativísticos. Apresentamos assim, um tratamento não perturbativo do problema de condição inicial na Teoria Quântica de Campos para um sistema de férmions interagindo com bósons. A partir destas equações discutimos as aproximações conservativas não perturbativas que tornam as equações cinéticas obtidas trabalháveis.

4.1 Caracterização das Variáveis de Interesse

A idéia básica do nosso tratamento consiste no estudo da dinâmica efetiva do conjunto de variáveis de um corpo (densidades normal e de emparelhamento de um corpo) de um sistema de férmions interagindo com bósons escalares via uma interação do tipo Yukawa. A lagrangiana que descreve tal sistema, conhecido como plasma escalar, é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + g\bar{\psi}\psi\phi + \frac{1}{8\pi} [(\partial\phi)^2 - \mu^2\phi^2] - \mathcal{L}_c \quad , \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L}_c$ compreende os contratermos necessários para renormalizar a teoria

$$4\pi\mathcal{L}_c = \frac{A}{1!}\phi + \frac{\delta\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{C}{3!}\phi^3 + \frac{D}{4!}\phi^4 - \frac{Z}{2}(\partial\phi)^2 \quad . \quad (4.2)$$

Na eq. (4.1), $\phi(x)$ é um campo escalar com condições periódicas de contorno numa caixa de volume V , i.e.,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{(2Vp_0)^{1/2}} \left[b_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] , \quad (4.3)$$

onde $b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)$ e $b_{\mathbf{p}}(t)$ são operadores de criação e aniquilação de bósons, que satisfazem relações de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{p}}(t), b_{\mathbf{p}'}^\dagger(t')]_{t=t'} &= \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} , \\ [b_{\mathbf{p}}^\dagger(t), b_{\mathbf{p}'}^\dagger(t')]_{t=t'} &= [b_{\mathbf{p}}(t), b_{\mathbf{p}'}(t')]_{t=t'} = 0 . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Na eq. (4.3) $\mathbf{x}$ denota a coordenada espacial e usamos a notação

$$(p_0)^2 = (\mathbf{p})^2 + \Omega^2 \quad \text{e} \quad p_0 t = p_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} ,$$

onde Ω é um parâmetro de expansão que será fixado mais tarde.

Por outro lado, na eq.(4.1) $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ são campos de Dirac de spin-1/2 com condições de contorno periódicas numa caixa de volume V , definidos em termos do parâmetro de expansão $\tilde{M}$ como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\tilde{M}}{k_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[u_1(\mathbf{k}, s) a_{\mathbf{k}, s}^{(1)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + u_2(\mathbf{k}, s) a_{\mathbf{k}, s}^{(2)\dagger}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] , \\ \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\tilde{M}}{k_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\bar{u}_1(\mathbf{k}, s) a_{\mathbf{k}, s}^{(1)\dagger}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \bar{u}_2(\mathbf{k}, s) a_{\mathbf{k}, s}^{(2)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] , \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $a_{\mathbf{k}, s}^{(1)\dagger}(t)$ e $a_{\mathbf{k}, s}^{(1)}(t)$ [$a_{\mathbf{k}, s}^{(2)\dagger}(t)$ e $a_{\mathbf{k}, s}^{(2)}(t)$] são operadores de criação e aniquilação de férmions associados com as soluções de energia positiva [negativa] $u_1(\mathbf{k}, s)$ [$u_2(\mathbf{k}, s)$] da equação de Dirac. Os operadores de criação e aniquilação de férmions satisfazem as relações de anticomutação a tempos iguais

$$\{a_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t), a_{k',s'}^{(\lambda')}(t')\}_{t=t'} = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'} \delta_{\lambda,\lambda'} \quad \text{para } \lambda, \lambda' = 1, 2, \quad (4.6)$$

$$\{a_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t), a_{k',s'}^{(\lambda')\dagger}(t')\}_{t=t'} = \{a_{k,s}^{(\lambda)}(t), a_{k',s'}^{(\lambda')}(t')\}_{t=t'} = 0.$$

Analogamente ao caso do campo escalar, usamos na eq. (4.5) a notação

$$(k_0)^2 = (\mathbf{k})^2 + \tilde{M}^2 \quad \text{e} \quad kx = k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}.$$

O próximo passo é caracterizar as observáveis cuja evolução temporal desejamos estudar. O estado do sistema é em geral dado em termos de um operador densidade de muitos corpos $\mathcal{F}$ na representação de Heisenberg. $\mathcal{F}$ é um operador independente do tempo, hermitiano e com traço unitário. Particularizamos nosso estudo ao caso de um sistema espacialmente uniforme. Tal sistema exhibe invariância translacional (homogêneo) e rotacional (isotrópico).

Uma maneira de introduzir não uniformidades em nosso sistema seria quebrar a invariância translacional do mesmo, transformando-o num sistema não homogêneo. Isto pode ser realizado via uma transformação do tipo Bogoliubov não homogênea para os operadores de campo [35]. Outra maneira de introduzir não uniformidades em nosso sistema de muitos corpos seria através dos spinores de Dirac $u_1(\mathbf{k}, s)$ e $u_2(\mathbf{k}, s)$. Dependendo da representação que escolhemos para as matrizes γ^μ , podemos quebrar a invariância por reflexão (isotropia) de nosso sistema; neste caso, as equações cinéticas que descrevem a evolução temporal de nosso sistema tornam-se não invariantes sob a transformação $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, o que obviamente não traduz um sistema uniforme (veja apêndice A da ref. [19]). A simplificação introduzida no tratamento de sistemas uniformes provém das invariâncias (simetrias) destes. Isto, de fato, faz com que a densidade de um corpo $\langle \mathbf{x} | \rho | \mathbf{x}' \rangle$ de sistemas uniformes seja função apenas da quantidade invariante por translação e rotação $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Neste caso os orbitais naturais são sempre ondas planas.

Voltemos agora a caracterizar as variáveis de um corpo de nosso sistema. Uma das variáveis de interesse é o valor esperado do campo bosônico

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{(2V p_0)^{1/2}} \left[B_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + B_{\mathbf{p}}^*(t) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (4.7)$$

com

$$B_{\mathbf{p}}(t) = \text{Tr}_{\mathbf{B}\mathcal{F}} b_{\mathbf{p}}(t) \mathcal{F}, \quad (4.8)$$

onde Tr_{bf} denota um traço sobre as variáveis bosônicas e fermiônicas. Traços parciais sobre as variáveis bosônicas ou fermiônicas serão escritos como Tr_b e Tr_f , respectivamente. No caso de sistemas uniformes a dependência espacial do valor esperado do operador de campo deve ser eliminada. A partir de (4.7) vemos que isto é realizado impondo que

$$B_p(t) \xrightarrow{\text{uniforme}} B_p(t)\delta_{p,0} .$$

Assim, no caso uniforme o valor esperado do campo bosônico é dado por

$$\langle \phi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}} (B(t) + B^*(t)) \quad (4.9)$$

com

$$B(t) = Tr_{bf} b_0(t) \mathcal{F} . \quad (4.10)$$

Analogamente, o valor esperado do operador momento canônico é escrito como

$$\langle \Pi(t) \rangle = \sqrt{\frac{\Omega}{2V}} (B^* - B) . \quad (4.11)$$

Consideremos agora a matriz densidade estendida de um corpo para um sistema uniforme de muitos bósons [31]

$$\mathcal{R}^B = \begin{bmatrix} \Lambda_p & \Xi_p \\ \Xi_{-p} & 1 + \Lambda_{-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle d_p^\dagger(t) d_p(t) \rangle & \langle d_p(t) d_{-p}(t) \rangle \\ \langle d_p^\dagger(t) d_{-p}^\dagger(t) \rangle & \langle d_p(t) d_p^\dagger(t) \rangle \end{bmatrix} , \quad (4.12)$$

onde a matriz densidade normal de um bóson Λ_p é hermitiana e a matriz densidade de emparelhamento de um bóson Ξ_p é simétrica e definimos os operadores deslocados

$$d_p(t) = b_p(t) - B_p \delta_{p,0}(t) , \quad (4.13)$$

os quais tem valor esperado nulo por construção. Observemos que no caso de sistemas não uniformes, as densidades normal e de emparelhamento de um bóson seriam

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} &= Tr_{\mathcal{BF}}[d_{\mathbf{p}}^\dagger(t)d_{\mathbf{p}'}(t)\mathcal{F}] \\ \Xi_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} &= Tr_{\mathcal{BF}}[d_{\mathbf{p}}(t)d_{\mathbf{p}'}(t)\mathcal{F}] ,\end{aligned}$$

enquanto no caso de sistemas uniformes as densidades $\Lambda_{\mathbf{p}}$ e $\Xi_{\mathbf{p}}$ dependem apenas do módulo do vetor momento, ou seja, $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|$.

Caracterizemos agora as densidades fermiônicas de um corpo de sistema uniformes. No caso dos férmions a matriz densidade estendida de um corpo é

$$\mathcal{R}^F = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{k},s}(t) & \Pi_{\mathbf{k},s}(t) \\ -\Pi_{\mathbf{k},s}^*(t) & I_2 - R_{\mathbf{k},s}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger}(t)a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)}(t) \rangle & \langle a_{-\mathbf{k},s}^{(\lambda')}(t)a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)}(t) \rangle \\ \langle a_{-\mathbf{k},s}^{(\lambda')\dagger}(t)a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger}(t) \rangle & \langle a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda')}(t)a_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger}(t) \rangle \end{bmatrix} , \quad (4.14)$$

onde a matriz hermitiana $R_{\mathbf{k},s}$ e a matriz antissimétrica $\Pi_{\mathbf{k},s}$ são as densidades normal e de emparelhamento de um férmion, respectivamente. Novamente, para sistemas uniformes, estas densidades dependem apenas do módulo do momento, $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|$.

Estes objetos dados em (4.9), (4.11), (4.12) e (4.14) para sistemas uniformes de muitos corpos contêm todas as informações sobre as observáveis gaussianas e são o ponto de partida para nosso tratamento cinético.

Como foi dito no capítulo anterior, as matrizes densidades de um corpo $\mathcal{R}^B$ e $\mathcal{R}^F$ quando escritas na base de partículas são não diagonais, pois contêm densidades de emparelhamento. Portanto, o primeiro passo consiste em diagonalizar $\mathcal{R}^B$ e $\mathcal{R}^F$ através de uma transformação de Bogoliubov. No caso dos bósons definimos operadores de quasi-bósons como

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{p}}(t) &= x_{\mathbf{p}}^*(t)[b_{\mathbf{p}}(t) - B_{\mathbf{p}}(t)\delta_{\mathbf{p},0}] + y_{\mathbf{p}}^*(t)[b_{-\mathbf{p}}^\dagger(t) - B_{-\mathbf{p}}^*(t)\delta_{-\mathbf{p},0}] \\ \beta_{\mathbf{p}}^\dagger(t) &= x_{\mathbf{p}}(t)[b_{\mathbf{p}}^\dagger(t) - B_{\mathbf{p}}^*(t)\delta_{\mathbf{p},0}] + y_{\mathbf{p}}(t)[b_{-\mathbf{p}}(t) - B_{-\mathbf{p}}(t)\delta_{-\mathbf{p},0}] ,\end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $\beta_{\mathbf{p}}(t)$ e $\beta_{\mathbf{p}}^\dagger(t)$ satisfazem as mesmas relações de comutação que $b_{\mathbf{p}}(t)$, $b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)$ em tempos iguais.

Escrevendo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} \beta_p(t) \\ \beta_{-p}^\dagger(t) \end{bmatrix} = \mathcal{X}_p^\dagger \begin{bmatrix} d_p(t) \\ d_{-p}^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde $\mathcal{X}_p$ é dado por

$$\mathcal{X}_p = \begin{bmatrix} x_p(t) & y_p^*(t) \\ y_p(t) & x_p^*(t) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

Os coeficientes x_p e y_p da transformação de Bogoliubov são determinados através do problema de autovalores que diagonaliza $\mathcal{R}^B$

$$G\mathcal{R}^B\mathcal{X}_p = \mathcal{X}_p G N_p \quad (4.18)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N_p = \begin{bmatrix} \nu_p & 0 \\ 0 & 1 + \nu_p \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

e a matriz $\mathcal{X}_p$ é dada na eq. (4.17). Os autovalores ν_p podem ser interpretados como o número de ocupação dos bósons deslocados para os orbitais naturais emparelhados descritos por $\mathcal{X}_p$, ou em outras palavras, são as ocupações de quasi-bósons deslocados. Enfim, uma vez que a transformação de Bogoliubov é canônica pode-se verificar que $\mathcal{X}_p$ satisfaz as relações de completeza e ortogonalidade

$$\mathcal{X}_p^\dagger G \mathcal{X}_p = \mathcal{X}_p G \mathcal{X}_p^\dagger = G \Rightarrow |x_p|^2 - |y_p|^2 = 1. \quad (4.20)$$

Analogamente, para os operadores fermiônicos definimos a transformação

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k,s}^{(1)}(t) \\ \alpha_{k,s}^{(2)}(t) \\ \alpha_{-k,s}^{(1)\dagger}(t) \\ \alpha_{-k,s}^{(2)\dagger}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{k,s}^* & V_{k,s}^* \\ V_{k,s} & U_{k,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k,s}^{(1)}(t) \\ a_{k,s}^{(2)}(t) \\ a_{-k,s}^{(1)\dagger}(t) \\ a_{-k,s}^{(2)\dagger}(t) \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

Como no caso dos bósons, temos um problema de autovalores que diagonaliza $\mathcal{R}^F$

$$\mathcal{X}_{k,s}^\dagger \mathcal{R}^F \mathcal{X}_{k,s} = N_{k,s} , \quad (4.22)$$

onde $\mathcal{X}_{k,s}$ é a transformação definida em (4.21), ou seja,

$$\mathcal{X}_{k,s} = \begin{bmatrix} U_{k,s}^* & V_{k,s}^* \\ V_{k,s} & U_{k,s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_{k,s}^\dagger = \begin{bmatrix} U_{k,s}^T & V_{k,s}^\dagger \\ V_{k,s}^T & U_{k,s}^\dagger \end{bmatrix} , \quad (4.23)$$

satisfazendo as equações de unitariedade

$$\mathcal{X}_{k,s}^\dagger \mathcal{X}_{k,s} = \mathcal{X}_{k,s} \mathcal{X}_{k,s}^\dagger = \mathbb{I}_4 , \quad (4.24)$$

e onde as matrizes $U_{k,s}$ e $V_{k,s}$ são dadas por

$$U_{k,s} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_{k,s} = \begin{bmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.25)$$

Finalmente, a matriz $N_{k,s}$ é a matriz densidade estendida diagonalizada de um férmion na base de quasi-férmions

$$N_{k,s} = \begin{bmatrix} \nu_{k,s} & 0 \\ 0 & I_2 - \nu_{k,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t) \alpha_{k,s}^{(\lambda)}(t) \rangle & \langle \alpha_{-k,s}^{(\lambda)}(t) \alpha_{k,s}^{(\lambda)}(t) \rangle \\ \langle \alpha_{-k,s}^{(\lambda)\dagger}(t) \alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t) \rangle & \langle \alpha_{k,s}^{(\lambda)}(t) \alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t) \rangle \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde $\nu_{k,s}$ é a matriz densidade normal de um férmion na base de quasi-partículas. Nesta base $\nu_{k,s}$ é diagonal com autovalores $\nu_{k,s}^{(1)}$ e $\nu_{k,s}^{(2)}$ que correspondem aos números de ocupação dos respectivos estados (orbitais naturais).

Devemos notar que devido ao fato de estarmos tratando sistemas uniformes, as ocupações e os coeficientes de Bogoliubov dependem somente do módulo do momento, ou seja,

$$\nu_p = \nu_p, \quad x_p = x_p, \quad y_p = y_p$$

$$\nu_{k,s}^{(\lambda)} = \nu_{k,s}^{(\lambda)}, \quad U_{ij}(k,s) = U_{ij}(k,s), \quad V_{ij}(k,s) = V_{ij}(k,s).$$

Antes de obter as equações dinâmicas de nosso sistema é conveniente analisarmos um pouco melhor as transformações de Bogoliubov para os operadores de campo bosônico e fermiônico, definidas em (4.16) e (4.21). Primeiramente, observemos que através de (4.16) e (4.21) poderíamos ter introduzido inomogeneidades em nosso sistema (como já foi dito anteriormente), caso partíssemos com os operadores de campo $d_p(t)$, $d_p^\dagger(t)$, $a_{k,s}^\lambda(t)$ e $a_{k,s}^{\lambda\dagger}$ e deixássemos que as matrizes de Bogoliubov $\mathcal{X}_p$ e $\mathcal{X}_{k,s}$ dependessem de todos os momentos k' e p' . Deste modo, um operador de campo na base de quasi-partículas seria uma somatória em k' (inclusive para $k = k'$) da combinação linear de todos os outros operadores da base de partículas. Neste caso as densidades de um corpo do tipo

$$\Lambda_{p',p} = \text{Tr}_{BF}[\beta_{p'}^\dagger \beta_p \mathcal{F}] \neq 0$$

$$R_{k',s,\lambda;k,s,\lambda} = \text{Tr}_{BF}[\alpha_{k',s}^{(\lambda)\dagger} \alpha_{k,s}^{(\lambda)} \mathcal{F}] \neq 0$$

seriam não nulas para $p' \neq p$ e $k' \neq k$, pois a transformação de Bogoliubov geral introduz correlações entre os vários momentos, enquanto os campos $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ e $\phi(x)$, escritos na

base de quasi-partículas de Bogoliubov, seriam não uniformes (não seriam invariantes por translação). Observe que no caso de uma transformação de Bogoliubov uniforme do tipo (4.16) e (4.21) temos para as densidades de um corpo

$$\Lambda_{p',p} = Tr_{BF}[\beta_{p'}^\dagger \beta_p \mathcal{F}] = \nu_p \delta_{p',p}$$

$$R_{k',s,\lambda;k,s,\lambda} = Tr_{BF}[\alpha_{k',s}^{(\lambda)\dagger} \alpha_{k,s}^{(\lambda)} \mathcal{F}] = \nu_{k,s}^{(\lambda)} \delta_{k',k} .$$

Desta observação fica claro que o estudo de sistemas não uniformes é extremamente mais complicado, do ponto de vista computacional, quando comparado ao estudo de sistemas uniformes. Logo, nossa abordagem restringir-se-á ao estudo de sistema uniformes.

Outra observação que devemos fazer com relação a transformação (4.21) refere-se ao fato de que estaremos considerando estados de helicidade definida. Em outras palavras, não estamos misturando o número quântico de spin. Na referência [9] (veja artigo de Celenza e Shakin) a quebra desta simetria neste modelo é discutida em detalhes.

Finalmente, observemos que a transformação definida em (4.21), (4.23) e (4.25) é um caso particular da transformação uniforme geral de Bogoliubov, pois conserva a simetria de carga de nosso modelo (4.1). Para verificar isto, escrevamos explicitamente a densidade sem carga $a_{k,s}^{(1)\dagger} a_{k,s}^{(1)}$ na base de quasi-férmions,

$$\begin{aligned} a_{k,s}^{(1)\dagger} a_{k,s}^{(1)} &= \underbrace{U_{11}^* U_{11} \alpha_{k,s}^{(1)\dagger} \alpha_{k,s}^{(1)} + V_{21}^* V_{21} \alpha_{-k,s}^{(2)\dagger} \alpha_{-k,s}^{(2)}}_{\text{densidades normais sem carga}} \\ &+ \underbrace{U_{11} V_{12} \alpha_{-k,s}^{(2)} \alpha_{k,s}^{(1)} + U_{11}^* V_{12}^* \alpha_{k,s}^{(1)\dagger} \alpha_{-k,s}^{(2)\dagger}}_{\text{densidades de emparelhamento de Nambu sem carga}} \end{aligned}$$

de onde observamos imediatamente que a simetria $U(1)_{\text{carga}}$ não é quebrada. Este tipo particular de transformação de Bogoliubov também é conhecida como transformação de Nambu (veja artigo de Nambu e Jona-Lasinio em [9]).

4.2 Dinâmica das Variáveis de Interesse

O estudo da dinâmica das variáveis de interesse se restringe ao estudo das observáveis $\langle \phi(t) \rangle$, $\langle \Pi(t) \rangle$ e dos coeficientes da transformação de Bogoliubov dados pelas matrizes $\mathcal{X}_p$, $U_{k,s}$ e $V_{k,s}$.

Começamos com o subsistema bosônico. A equação dinâmica para o valor esperado do campo escalar $\langle \phi(t) \rangle$ resulta diretamente da equação de Heisenberg

$$i\langle \dot{\phi}(t) \rangle = \text{Tr}_{\text{BF}}[\phi(t), H]\mathcal{F} , \quad (4.27)$$

onde H é a hamiltoniana do sistema e $\langle \phi(t) \rangle$ é dado pela eq.(4.9). Escrevendo a equação dinâmica em termos das amplitudes $B(t)$, pois a parte real de $B(t)$ é proporcional à $\langle \phi(t) \rangle$ e a parte imaginária de $B(t)$ é proporcional à $\langle \Pi(t) \rangle$, temos

$$i\dot{B}_p \delta_{p,0} = x_p \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p \delta_{p,0}, H]\mathcal{F} - y_p^* \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_{-p}^\dagger \delta_{-p,0}, H]\mathcal{F} . \quad (4.28)$$

Para estudar a dinâmica das demais variáveis bosônicas, é necessário obter a evolução temporal da matriz densidade estendida $\mathcal{R}^B$. Primeiramente reescrevemos a equação de autovalores (4.18), usando (4.20), como

$$\mathcal{X}_p^\dagger \mathcal{R}^B \mathcal{X}_p = N_p . \quad (4.29)$$

Derivando com relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}}_p^\dagger \mathcal{R}^B \mathcal{X}_p &= \dot{N}_p - \dot{\mathcal{X}}_p^\dagger \mathcal{R}^B \mathcal{X}_p - \mathcal{X}_p^\dagger \dot{\mathcal{R}}^B \mathcal{X}_p \\ &= \dot{N}_p - \dot{\mathcal{X}}_p^\dagger G \mathcal{X}_p G N_p - N_p G \mathcal{X}_p^\dagger G \dot{\mathcal{X}}_p . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como estamos trabalhando na representação de Heisenberg, a matriz densidade completa $\mathcal{F}$ é independente do tempo, enquanto o operador matriz densidade estendida de um corpo $\mathcal{R}^B$ depende do tempo através dos operadores $\beta_p^\dagger(t)$ e $\beta_p(t)$.

O lado esquerdo da eq.(4.30) pode ser calculado derivando-se com relação ao tempo as matrizes densidades normal e de emparelhamento e utilizando-se a equação de Heisenberg,

$$i\dot{\mathcal{X}}_p^\dagger \mathcal{R}^B \mathcal{X}_p = \begin{pmatrix} \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p^\dagger \beta_p, H]\mathcal{F} & \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p \beta_{-p}, H]\mathcal{F} \\ \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p^\dagger \beta_{-p}^\dagger, H]\mathcal{F} & \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p \beta_p^\dagger, H]\mathcal{F} \end{pmatrix} . \quad (4.31)$$

O lado direito pode ser obtido substituindo-se (4.17) e (4.19) e usando as relações de completude e ortogonalidade (4.20). Igualando o resultado à eq.(4.31), obtemos as equações que descrevem a evolução temporal das variáveis bosônicas

$$\dot{\nu}_p = \text{Tr}_{\text{BF}}[\beta_p^\dagger \beta_p, H] \mathcal{F} \quad (4.32)$$

$$i(1 + 2\nu_p)(\dot{x}_p y_p - x_p \dot{y}_p) = \text{Tr}[\beta_p^\dagger \beta_{-p}^\dagger, H] \mathcal{F} ,$$

onde x_p e y_p são os coeficientes da transformação de Bogoliubov e ν_p é a ocupação de quasi-bósons definida em (4.19),

$$\nu_p = \langle \beta_p^\dagger \beta_p \rangle .$$

Temos agora que obter equações análogas para as variáveis fermiônicas. Derivando com relação ao tempo a eq.(4.22) e usando as equações de unitariedade (4.24), obtemos

$$\mathcal{X}_{k,s}^\dagger \dot{\mathcal{R}}^F \mathcal{X}_{k,s} = \dot{N}_{k,s} - \dot{\mathcal{X}}_{k,s}^\dagger \mathcal{X}_{k,s} N_{k,s} - N_{k,s} \mathcal{X}_{k,s}^\dagger \dot{\mathcal{X}}_{k,s} , \quad (4.33)$$

Substituindo (4.23), (4.25) e (4.26) podemos calcular o lado direito da eq.(4.33), obtendo a seguinte equação matricial

$$i\mathcal{X}_{k,s}^\dagger \dot{\mathcal{R}}^F \mathcal{X}_{k,s} = \begin{bmatrix} i\dot{h}_{k,s} + [\nu_{k,s}, \mathbf{h}_{k,s}^-]_- & -\mathbf{g}_{k,s} + \{\nu_{k,s}, \mathbf{g}_{k,s}\}_+ \\ -\mathbf{g}_{k,s} + \{\nu_{k,s}, \mathbf{g}_{k,s}\}_+ & -i\dot{\nu}_{k,s} + [\nu_{k,s}, \mathbf{h}_{k,s}]_- \end{bmatrix} , \quad (4.34)$$

onde $\{, \}_+$ denota um anticomutador e $[,]_-$ um comutador e as matrizes $\mathbf{h}_{k,s}$ e $\mathbf{g}_{k,s}$ são dadas em termos das matrizes $U_{k,s}$ e $V_{k,s}$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{k,s} &= -i(\dot{V}_{k,s}^T V_{k,s}^* + \dot{U}_{k,s}^\dagger U_{k,s}) \\ \mathbf{g}_{k,s} &= -i(\dot{V}_{k,s}^T U_{k,s}^* + \dot{U}_{k,s}^\dagger V_{k,s}) . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como no caso dos bósons, a matriz densidade estendida de um férmion $\mathcal{R}^F$ depende do tempo através dos operadores $\alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger}(t)$ e $\alpha_{k,s}^{(\lambda)}(t)$. Para calcular o lado esquerdo da eq.(4.33), utilizamos a equação de Heisenberg, além da invariância cíclica do traço. Obtemos assim as equações que descrevem a dinâmica das variáveis fermiônicas

$$\begin{aligned}
i\dot{\nu}_{k,s} + \{\nu_{k,s}, h_{k,s}^*\}_- &= Tr \left([\alpha_{k,s}^{(\lambda')\dagger} \alpha_{k,s}^{(\lambda)}, H] \mathcal{F} \right) \\
-g_{k,s}^* + \{\nu_{k,s}, g_{k,s}^*\}_+ &= Tr \left([\alpha_{-k,s}^{(\lambda')} \alpha_{k,s}^{(\lambda)}, H] \mathcal{F} \right) ,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

onde as matrizes $h_{k,s}$ e $g_{k,s}$ são dadas em (4.35) e $\nu_{k,s}$ é a matriz de ocupação de quasi-férmions de Nambu definida em (4.26),

$$\nu_{k,s} = \langle \alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger} \alpha_{k,s}^{(\lambda)} \rangle = \begin{bmatrix} \nu_{k,s}^{(1)} & 0 \\ 0 & \nu_{k,s}^{(2)} \end{bmatrix} .$$

Finalmente devemos observar que as variáveis de interesse, quando escritas na base de quasi-partículas, contêm os coeficientes da transformação de Bogoliubov, os quais juntamente com as ocupações ν_p e $\nu_{k,s}^{(\lambda)}$ constituem as variáveis cuja evolução desejamos estudar.

Como no caso do Modelo de Jaynes-Cummings, as eqs. (4.28), (4.32) e (4.36) não são fechadas em nossas variáveis, pois dada a matriz densidade completa de muitos corpos $\mathcal{F}$, as equações dependem da hamiltoniana do sistema que contêm interações de dois corpos (termos de interação entre os subsistemas) de modo que as equações que descrevem a dinâmica de $\mathcal{R}^B$ e $\mathcal{R}^F$ também envolverão densidades de dois corpos.

4.3 Técnica de Projeção Dependente do Tempo

Com o objetivo de tratar as equações de movimento obtidas na seção anterior, começamos dividindo a densidade completa $\mathcal{F}$ como no capítulo anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(t) + \mathcal{F}'(t) \\
&\equiv \mathcal{F}_0^B \mathcal{F}_0^F + \mathcal{F}'(t) ,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde a forma fatorizada de $\mathcal{F}_0(t)$ corresponde à *dupla aproximação de campo médio*. As densidade dos subsistemas bosônico e fermiônico $\mathcal{F}_0^B$ e $\mathcal{F}_0^F$ são densidade gaussianas escritas na forma de uma exponencial de uma expressão hermitiana bilinear nas partes de criação/aniquilação dos campos bosônicos e fermiônicos, respectivamente. Em termos dos operadores transformados introduzidos em (4.15) e (4.21) são dadas por [32]

$$\mathcal{F}_0^{\mathcal{F}} = \prod_{\mathbf{k},s,\lambda} [\nu_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)} \alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger} \alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)} + (1 - \nu_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)}) \alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)} \alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger}] \quad (4.38)$$

$$\mathcal{F}_0^{\mathcal{B}} = \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{1 + \nu_{\mathbf{p}}} \left(\frac{\nu_{\mathbf{p}}}{1 + \nu_{\mathbf{p}}} \right)^{\beta_{\mathbf{p}}^\dagger \beta_{\mathbf{p}}} \quad (4.39)$$

onde $Tr_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0^{\mathcal{B}}(t) = Tr_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}(t) = 1$. Como no capítulo anterior, os traços dos operadores $\alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)\dagger}$, $\alpha_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)}$, $\beta_{\mathbf{p}}^\dagger$ e $\beta_{\mathbf{p}}$ com a densidade $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0^{\mathcal{F}}$ são dados por

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a \mathcal{F}_0) &= Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a \alpha_b \mathcal{F}_0) &= Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a^\dagger \alpha_b^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a^\dagger \alpha_b \mathcal{F}_0) &= \nu_a \delta_{ab} \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\alpha_a \alpha_b^\dagger \mathcal{F}_0) &= (1 - \nu_a) \delta_{ab} \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\beta \mathcal{F}_0) &= Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a \beta_b \mathcal{F}_0) &= Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \mathcal{F}_0) = 0 \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0) &= \nu_a \delta_{ab} \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a \beta_b^\dagger \mathcal{F}_0) &= (1 + \nu_a) \delta_{ab} \\ Tr_{\mathcal{BF}} (\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0) &= \nu_a \nu_b (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) . \end{aligned}$$

A densidade $\mathcal{F}'(t)$, que tem traço nulo, descreve a parte de correlações da densidade completa. Devido à forma (4.37) usada para a densidade $\mathcal{F}_0(t)$, $\mathcal{F}'$ em geral contém correlações de dois tipos: correlações *inter-subsistemas* (bóson-férmion) e *intra-subsistemas* (bóson-bóson e férmion-férmion).

O próximo passo consiste em usar o fato de que a decomposição (4.37) pode ser implementada em termos de um operador de projeção dependente do tempo $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{P}(t)$ [29]. Com a ajuda de $\mathcal{P}(t)$ a densidade gaussiana fatorizada pode ser obtida como

$$\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{P}(t)\mathcal{F}, \quad (4.40)$$

enquanto a sua derivada em relação ao tempo é dada por

$$i\dot{\mathcal{F}}_0(t) = [\mathcal{F}_0(t), H] + \mathcal{P}(t)[H, \mathcal{F}] , \quad (4.41)$$

que é a representação de Heisenberg da equação $\dot{\mathcal{P}}\mathcal{F} = 0$ usada para definir $\mathcal{P}(t)$ na representação de Schrödinger [3, 26].

A partir das eqs. (4.37) e (4.41) podemos obter uma equação diferencial para $\mathcal{F}'(t)$ em termos de $\mathcal{F}_0(t)$

$$\left[i \frac{d}{dt} + \mathcal{P}(t)\mathcal{L} \right] \mathcal{F}'(t) = \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{F}_0(t) , \quad (4.42)$$

onde introduzimos o projetor complementar $\mathcal{Q}(t)\mathcal{F} \equiv (\mathcal{I} - \mathcal{P}(t))\mathcal{F} = \mathcal{F}'(t)$ e a notação $\mathcal{L}^*$ para o Liouvilliano $[H, *]$. Esta equação tem a solução formal

$$\mathcal{F}'(t) = \mathcal{G}(t, 0)\mathcal{F}'(0) - i \int_0^t dt' \mathcal{G}(t, t')\mathcal{Q}(t')\mathcal{L}\mathcal{F}_0(t') , \quad (4.43)$$

onde o primeiro termo leva em conta as correlações iniciais e $\mathcal{G}(t, t')$ é a função de Green ordenada temporalmente

$$\mathcal{G}(t, t') = \text{T exp} \left[i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}(\tau)\mathcal{L} \right] . \quad (4.44)$$

Assim, a densidade $\mathcal{F}'(t)$, e consequentemente $\mathcal{F}$, podem ser formalmente expressas em termos de $\mathcal{F}_0(t')$ para $t' < t$ e das correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$. Finalmente, isto nos permite expressar as equações dinâmicas (4.28), (4.32) e (4.36) em termos de traços sobre funcionais de $\mathcal{F}_0(t')$ e das correlações iniciais $\mathcal{F}'(0)$.

4.4 Aproximação de Campo Médio

O nosso objetivo é obter a dinâmica efetiva das variáveis de interesse para o sistema uniforme do plasma escalar. A aproximação de campo médio consiste em tomar $\mathcal{F}'(t) = 0$, ou seja,

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0(t) . \quad (4.45)$$

Logo, nesta aproximação consideramos que não há correlações dinâmicas no sistema, exceto as correlações de emparelhamento introduzidas através da transformação de Bogoliubov.

A matriz densidade de muitos corpos $\mathcal{F}_0$ mais geral que descreve completamente os aspectos de um corpo é dada por

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^F \mathcal{F}_0^B \quad (4.46)$$

com $\mathcal{F}_0^F$ e $\mathcal{F}_0^B$ dadas por (4.38) e (4.39), onde ν_p e $\nu_{k,s}^{(\lambda)}$ são as probabilidades de ocupação dos respectivos orbitais naturais, ou seja, as densidades de um corpo na base de quasipartículas. Substituindo (4.45) nas eqs. (4.28), (4.32) e (4.36) obtemos as equações que descrevem a dinâmica efetiva das densidades de um corpo do plasma escalar na aproximação de campo médio

$$i\dot{B}_p \delta_{p,0} = x_p \text{Tr}_{BF}[\beta_p \delta_{p,0}, H] \mathcal{F}_0 - y_p^* \text{Tr}_{BF}[\beta_{-p}^\dagger \delta_{-p,0}, H] \mathcal{F}_0 \quad (4.47)$$

$$\dot{\nu}_p = \text{Tr}_{BF}[\beta_p^\dagger \beta_p, H] \mathcal{F}_0 \quad (4.48)$$

$$i(1 + 2\nu_p)(\dot{x}_p y_p - x_p \dot{y}_p) = \text{Tr}[\beta_p^\dagger \beta_{-p}^\dagger, H] \mathcal{F}_0 \quad (4.49)$$

$$i\dot{\nu}_{k,s} + [\nu_{k,s}, h_{k,s}^*]_- = \text{Tr} \left([\alpha_{k,s}^{(\lambda)\dagger} \alpha_{k,s}^{(\lambda)}, H] \mathcal{F}_0 \right) \quad (4.50)$$

$$-g_{k,s}^* + \{\nu_{k,s}, g_{k,s}^*\}_+ = \text{Tr} \left([\alpha_{-k,s}^{(\lambda')} \alpha_{k,s}^{(\lambda)}, H] \mathcal{F}_0 \right), \quad (4.51)$$

onde as matrizes $h_{k,s}$ e $g_{k,s}$ são dadas em (4.35) e $\mathcal{F}_0$ em (4.37 - 4.39).

No próximo capítulo obteremos as equações cinéticas que descrevem a evolução temporal do plasma escalar na aproximação de campo médio e a partir das equações estáticas renormalizaremos a teoria.

Capítulo 5

Dinâmica Efetiva para o Plasma Escalar Relativístico na Aproximação de Campo Médio

Como no Modelo de Jaynes-Cummings, o qual corresponde ao plasma escalar em (0+1) dimensões, obteremos neste capítulo equações do tipo cinético que descreverão a evolução temporal do plasma escalar relativístico. A partir do estudo das soluções estáticas re-normalizaremos a teoria. Embora não represente um sistema físico real, o plasma escalar é extremamente útil para a implementação de aproximações necessárias no estudo de modelos mais realísticos.

5.1 Dinâmica de Campo Médio para o Plasma Escalar

A densidade de hamiltoniana para o plasma escalar é dada por

$$\mathcal{H} = -\bar{\psi}(i\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} - m)\psi - g\bar{\psi}\phi\psi + \frac{1}{8\pi} \left((4\pi)^2 \Pi^2 + |\partial\phi|^2 + \mu^2\phi^2 \right) . \quad (5.1)$$

A partir da densidade de hamiltoniana podemos obter a hamiltoniana do sistema bastando integrar (5.1) em todo espaço

$$H = \int dx \mathcal{H} . \quad (5.2)$$

Para isto, consideramos o campo escalar e o campo de Dirac na representação de Heisenberg dados por (4.3) e (4.5). Como já foi dito anteriormente, as soluções de energia positiva e negativa $u_1(\mathbf{k}, s)$ e $u_2(\mathbf{k}, s)$ da equação de Dirac podem quebrar a invariância por reflexão de nosso sistema. No apêndice A da referência [19] foi feito um estudo que permite diferenciar as várias representações das matrizes γ^μ de Dirac em (1+1) dimensões invariantes por reflexão. Vamos considerar a representação de Pauli-Dirac para as matrizes γ^μ em (3+1) dimensões, ou seja,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Nesta representação as soluções da equação de Dirac são

$$u_1(\mathbf{k}, s) = \left(\frac{k_0 + \bar{M}}{2\bar{M}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k} \chi_s}{(k_0 + \bar{M})} \end{pmatrix}, \quad u_2(\mathbf{k}, s) = \left(\frac{k_0 - \bar{M}}{2\bar{M}} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k} \chi_s}{(k_0 - \bar{M})} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

as quais conservam a invariância por reflexão de nosso sistema e onde $\bar{M}$ é o parâmetro de expansão introduzido na equação (4.5). As soluções de Dirac (5.4) obedecem às relações

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\mathbf{k}, s') u_1(\mathbf{k}, s) &= -\bar{u}_2(\mathbf{k}, s') u_2(\mathbf{k}, s) = \delta_{s,s'} \\ \bar{u}_1(\mathbf{k}, s') u_2(\mathbf{k}, s) &= \bar{u}_2(\mathbf{k}, s') u_1(\mathbf{k}, s) = 0 \\ u_1^\dagger(\mathbf{k}, s') u_1(\mathbf{k}, s) &= u_2^\dagger(\mathbf{k}, s') u_2(\mathbf{k}, s) = \frac{k_0}{\bar{M}} \delta_{s,s'} \\ u_1^\dagger(\mathbf{k}, s') u_2(-\mathbf{k}, s) &= u_2^\dagger(\mathbf{k}, s') u_1(-\mathbf{k}, s) = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituindo (4.3), (4.5), (5.3) e (5.4) em (5.2) e utilizando-se as propriedades dos spinores (5.5), podemos fazer a integração espacial e obtemos assim a hamiltoniana do plasma escalar

$$H = H_D + H_{KG} + H_I \quad (5.6)$$

onde

$$H_D = \sum_{\mathbf{k},s} \frac{1}{k_0} \left[(k^2 + m\bar{M}) \left(a_{\mathbf{k},s}^{(1)\dagger} a_{\mathbf{k},s}^{(1)} - a_{\mathbf{k},s}^{(2)} a_{\mathbf{k},s}^{(2)\dagger} \right) + (m - \bar{M})|\mathbf{k}| \left(a_{\mathbf{k},s}^{(2)} a_{-\mathbf{k},s}^{(1)} + a_{\mathbf{k},s}^{(1)\dagger} a_{-\mathbf{k},s}^{(2)\dagger} \right) \right] \quad (5.7)$$

$$H_{KG} = \frac{1}{16\pi} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)^{1/2}} \left\{ [(4\pi)^2(\mathbf{p}^2 + \Omega^2) + (\mathbf{p}^2 + \mu^2)] (b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}) \right. \\ \left. + [(\mathbf{p}^2 + \mu^2) - (4\pi)^2(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)] (b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}}^\dagger) \right\} \quad (5.8)$$

$$H_I = -g \sum_{s,s'} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \frac{\bar{M}}{(k_0(\mathbf{k})k_0(\mathbf{p}-\mathbf{k}))^{1/2} (2Vp_0)^{1/2}} \\ \times \left\{ \bar{u}(\mathbf{k}-\mathbf{p},s') u(\mathbf{k},s) a_{\mathbf{k}-\mathbf{p},s'}^{(1)\dagger}(t) a_{\mathbf{k},s}^{(1)}(t) (b_{-\mathbf{p}}(t) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)) \right. \\ + \bar{v}(-\mathbf{k}+\mathbf{p},s') v(-\mathbf{k},s) a_{-\mathbf{k}+\mathbf{p},s'}^{(2)}(t) a_{-\mathbf{k},s}^{(2)\dagger}(t) (b_{-\mathbf{p}}(t) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)) \\ + \bar{u}(\mathbf{k}-\mathbf{p},s') v(-\mathbf{k},s) a_{\mathbf{k}-\mathbf{p},s'}^{(1)}(t) a_{-\mathbf{k},s}^{(2)\dagger}(t) (b_{-\mathbf{p}}(t) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)) \\ \left. + \bar{v}(-\mathbf{k}+\mathbf{p},s') u(\mathbf{k},s) a_{-\mathbf{k}+\mathbf{p},s'}^{(2)}(t) a_{\mathbf{k},s}^{(1)}(t) (b_{-\mathbf{p}}(t) + b_{\mathbf{p}}^\dagger(t)) \right\} . \quad (5.9)$$

A partir da hamiltoniana (5.6 - 5.9) e da matriz densidade $\mathcal{F}_0(t)$ dada por (4.37 - 4.39), podemos obter a dinâmica efetiva das variáveis de interesse, ou seja, do valor esperado do campo bosônico e das matrizes densidade estendidas de um corpo $\mathcal{R}_B$ e $\mathcal{R}_F$ na aproximação de campo médio para o plasma escalar.

Começamos reescrevendo as equações (4.47 - 4.49) que descrevem a dinâmica das variáveis bosônicas na aproximação de campo médio

$$i\dot{B}_{\mathbf{p}}\delta_{\mathbf{p},0} = x_{\mathbf{p}} Tr_{BF}[\beta_{\mathbf{p}}\delta_{\mathbf{p},0}, H]\mathcal{F}_0 - y_{\mathbf{p}}^* Tr_{BF}[\beta_{-\mathbf{p}}\delta_{-\mathbf{p},0}, H]\mathcal{F}_0 \quad (5.10)$$

$$i\dot{y}_{\mathbf{p}} = Tr_{BF}[\beta_{\mathbf{p}}^\dagger\beta_{\mathbf{p}}, H]\mathcal{F}_0 \quad (5.11)$$

$$i(1 + 2\mu_{\mathbf{p}})(\dot{x}_{\mathbf{p}}y_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{p}}\dot{y}_{\mathbf{p}}) = Tr_{BF}[\beta_{\mathbf{p}}^\dagger\beta_{-\mathbf{p}}^\dagger, H]\mathcal{F}_0 , \quad (5.12)$$

onde ν_p é a ocupação de quasi-bósons de Bogoliubov e x_p e y_p são coeficientes da transformação de Bogoliubov.

Para as variáveis fermiônicas, a dinâmica efetiva é dada pelas equações (4.50 - 4.51)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i\dot{\nu}_{k,s}^{(1)} & h_{12}^*(\nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) \\ h_{21}^*(\nu_{k,s}^{(2)} - \nu_{k,s}^{(1)}) & i\dot{\nu}_{k,s}^{(2)} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{k,s}^{(1)\dagger} \alpha_{k,s}^{(1)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) & Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{k,s}^{(1)\dagger} \alpha_{k,s}^{(2)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) \\ Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{k,s}^{(2)\dagger} \alpha_{k,s}^{(1)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) & Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{k,s}^{(2)\dagger} \alpha_{k,s}^{(2)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -g_{11}^*(1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(1)}) & -g_{12}^*(1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) \\ -g_{21}^*(1 - \nu_{k,s}^{(2)} - \nu_{k,s}^{(1)}) & -g_{22}^*(1 - \nu_{k,s}^{(2)} - \nu_{k,s}^{(2)}) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{-k,s}^{(1)} \alpha_{k,s}^{(1)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) & Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{-k,s}^{(1)} \alpha_{k,s}^{(2)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) \\ Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{-k,s}^{(2)} \alpha_{k,s}^{(1)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) & Tr_{BF} \left(\left[\alpha_{-k,s}^{(2)} \alpha_{k,s}^{(2)}, H \right] \mathcal{F}_0 \right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $\nu_{k,s}^{(1)}$ e $\nu_{k,s}^{(2)}$ são as ocupações de quasi-férmions de Nambu e h_{ij} e g_{ij} são os elementos das matrizes $h_{k,s}$ e $g_{k,s}$,

$$\begin{aligned} h_{k,s} &= -i \begin{pmatrix} \dot{U}_{11}^* U_{11} + \dot{V}_{21} V_{21}^* & 0 \\ 0 & \dot{V}_{12} V_{12}^* + \dot{U}_{22} U_{22}^* \end{pmatrix} \\ g_{k,s} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \dot{V}_{21} U_{22}^* + \dot{U}_{11}^* V_{12} \\ \dot{V}_{12} U_{11}^* + \dot{U}_{22}^* V_{21} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular os traços das equações (5.10 - 5.14) temos inicialmente que escrever a hamiltoniana na base de quasi-partículas utilizando as transformações dadas em (4.16 - 4.17) e (4.21).

Escolhemos a seguinte reparametrização para os coeficientes x_p e y_p da transformação de Bogoliubov dos operadores bosônicos

$$\begin{aligned} x_p &= \cosh \kappa_p + i \frac{\eta_p}{2} \\ y_p &= \sinh \kappa_p + i \frac{\eta_p}{2} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

consistente com as relações de normalização e completeza (4.20).

No caso dos férmions, verifica-se que independente da reparametrização utilizada, obtém-se dinâmica apenas para duas variáveis, enquanto as outras se comportam como fases globais que se simplificam. Ou seja, é necessário somente duas variáveis para descrever a dinâmica das densidades fermiônicas. Utilizaremos a seguinte reparametrização consistente com as equações de unitariedade (4.24)

$$\begin{aligned} U_{11} &= U_{22} = \cos \varphi_{k,s} \\ V_{12} &= -V_{21} = \sin \varphi_{k,s} e^{i\alpha_{k,s}} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

A partir de (5.6 - 5.9) escrita na base de quasi-partículas podemos calcular os traços das equações (5.10 - 5.12). Para a amplitude $B(t)$ encontramos

$$i\dot{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{(\mu^2 B_R + i\Omega^2 B_I)}{\Omega} + \frac{g}{(2V\Omega)^{1/2}} \sum_{k,s} \frac{\tilde{M}}{k_0} \left[\cos 2\varphi_{k,s} + \frac{|k|}{M} \sin 2\varphi_{k,s} \cos \gamma_{k,s} \right] (1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) . \quad (5.17)$$

Separando as partes real e imaginária e escrevendo em termos do condensado $\langle \phi \rangle$ e do momento conjugado $\langle \Pi \rangle$ temos

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= 4\pi \langle \Pi \rangle \\ \langle \Pi \rangle &= -\frac{\mu^2}{4\pi} \langle \phi \rangle - \frac{g}{V} \sum_{k,s} \frac{\tilde{M}}{k_0} \left[\cos 2\varphi_{k,s} + \frac{|k|}{M} \sin 2\varphi_{k,s} \cos \gamma_{k,s} \right] (1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Calculando os comutadores das equações (5.11 - 5.12), com a hamiltoniana (5.6 - 5.9) escrita na base de quasi-partículas, e tomando o traço em $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^s \mathcal{F}_0^f$, dadas em (4.38 - 4.39), obtemos as equações

$$\dot{\nu}_{\mathbf{p}} = 0 \quad (5.19)$$

$$-i\dot{\kappa}_{\mathbf{p}} + \frac{e^{-\kappa_{\mathbf{p}}}}{2}(\dot{\eta}_{\mathbf{p}} + \eta_{\mathbf{p}}\dot{\kappa}_{\mathbf{p}}) = 4\pi(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)^{1/2} \left[\left(\frac{e^{2\kappa_{\mathbf{p}}}}{2} - \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)} \frac{e^{-2\kappa_{\mathbf{p}}}}{2} \right) - \frac{\eta_{\mathbf{p}}^2}{2} + i\eta_{\mathbf{p}}e^{\kappa_{\mathbf{p}}} \right] . \quad (5.20)$$

Separando as partes real e imaginária da equação (5.20) temos

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_{\mathbf{p}} &= -4\pi(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)^{1/2}\eta_{\mathbf{p}}e^{\kappa_{\mathbf{p}}} \\ \dot{\eta}_{\mathbf{p}}e^{-\kappa_{\mathbf{p}}} &= (\mathbf{p}^2 + \Omega^2)^{1/2} \left[4\pi e^{2\kappa_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{p}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{p}^2 + \Omega^2)} e^{-2\kappa_{\mathbf{p}}} \right] . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Analogamente, a partir de (5.6 - 5.9) escrita na base de quasi-partículas, podemos calcular os comutadores das equações cinéticas (5.13 - 5.14) para em seguida tomar o traço em $\mathcal{F}_0$. Com isso obtemos

$$\dot{\nu}_{\mathbf{k},s}^{(\lambda)} = 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} (i\dot{\varphi}_{\mathbf{k},s} + \dot{\gamma}_{\mathbf{k},s} \sin \varphi_{\mathbf{k},s} \cos \varphi_{\mathbf{k},s})e^{-i\gamma_{\mathbf{k},s}} &= \frac{(\mathbf{k}^2 + m\tilde{M})}{k_0} \sin 2\varphi_{\mathbf{k},s} e^{-i\gamma_{\mathbf{k},s}} \\ &+ (\tilde{M} - m) \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} [(\cos^2 \varphi_{\mathbf{k},s} - \sin^2 \varphi_{\mathbf{k},s} e^{-2i\gamma_{\mathbf{k},s}})] \\ &- g \frac{\tilde{M}}{k_0} \langle \phi \rangle \left[\sin 2\varphi_{\mathbf{k},s} e^{-i\gamma_{\mathbf{k},s}} - \frac{|\mathbf{k}|}{\tilde{M}} (\cos^2 \varphi_{\mathbf{k},s} - \sin^2 \varphi_{\mathbf{k},s} e^{-2i\gamma_{\mathbf{k},s}}) \right] . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nas equações abaixo não colocaremos o índice de spin s nas variáveis $\varphi_{k,s}$ e $\gamma_{k,s}$ pois as equações dinâmicas (5.17) e (5.23) dependem apenas de k e não de s . Isto se deve ao fato de não termos misturado spin na transformação de Bogoliubov dos férmions. Separando as partes real e imaginária da eq. (5.23) temos

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_k &= \frac{|k|}{k_0} [\bar{M} - (m - g\langle\phi\rangle)] \sin \gamma_k \\ \dot{\gamma}_k &= 2 \frac{[k^2 + (m - g\langle\phi\rangle)\bar{M}]}{k_0} + 2 \frac{[\bar{M} - (m - g\langle\phi\rangle)]}{k_0} |k| \cot 2\varphi_k \cos \gamma_k .\end{aligned}\quad (5.24)$$

Observe que as equações (5.18), (5.19), (5.21), (5.22) e (5.24) são equações do tipo cinético que descrevem a evolução temporal das ocupações de quasi-bósons, quasi-férmions e dos coeficientes de Bogoliubov reparametrizados κ_p , η_p , φ_k e γ_k , ou seja, estas equações de movimento descrevem a evolução temporal de todas as variáveis de um corpo.

As equações de movimento na aproximação de campo médio conservam a energia média do sistema,

$$\begin{aligned}\frac{\langle H \rangle}{V} &= Tr H \mathcal{F}_0 \\ &= -\frac{1}{V} \sum_{k,s} \left[\frac{(k^2 + m\bar{M})}{k_0} \cos 2\varphi_k + \frac{(m - \bar{M})}{k_0} |k| \sin 2\varphi_k \cos \gamma_k \right] (1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu^2}{2} \langle \phi \rangle^2 + \frac{\langle \Pi \rangle^2}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{16\pi} \frac{1}{V} \sum_p \left[e^{-2\kappa_p} \frac{(p^2 + \mu^2)}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} + (4\pi)^2 (p^2 + \Omega^2)^{1/2} (e^{2\kappa_p} + \eta_p^2) \right] (1 + 2\nu_p) \\ &+ \frac{g\langle\phi\rangle}{V} \sum_{k,s} \frac{\bar{M}}{k_0} \left[\cos 2\varphi_k + \frac{|k|}{\bar{M}} \sin 2\varphi_k \cos \gamma_k \right] (1 - \nu_{k,s}^{(1)} - \nu_{k,s}^{(2)}) .\end{aligned}\quad (5.25)$$

Derivando temporalmente (5.25) e substituindo as equações cinéticas (5.18), (5.19), (5.21), (5.22) e (5.24), podemos verificar a conservação de energia do sistema,

$$\frac{d}{dt} \langle H \rangle = 0 . \quad (5.26)$$

Estudaremos agora o estado fundamental do plasma escalar uniforme na aproximação de campo médio. Para isto vamos considerar a solução estacionária das equações cinéticas (5.18), (5.21) e (5.24).

5.2 Renormalização

As equações obtidas na seção anterior contêm integrais divergentes de modo que um processo de renormalização torna-se necessário. Com o objetivo de renormalizar a teoria, consideremos as soluções estacionárias para o vácuo das eqs. (5.18), (5.21) e (5.24). Tomando $\dot{\gamma}_k = \dot{\varphi}_k = \dot{\kappa}_p = \dot{\eta}_p = \langle \dot{\phi} \rangle = \langle \dot{\Pi} \rangle = 0$ e $\nu_p = \nu_{k,s}^{(\Lambda)} = 0$ nas equações que descrevem a dinâmica do plasma escalar uniforme na aproximação de campo médio,

$$[\bar{M} - (m - g\langle\phi\rangle)] \sin \gamma_k|_{eq} = 0 \quad (5.27)$$

$$\cot 2\varphi_k|_{eq} = -\frac{[k^2 + (m - g\langle\phi\rangle|_{eq})\bar{M}]}{[\bar{M} - (m - g\langle\phi\rangle|_{eq})]|k| \cos \gamma_k|_{eq}} \quad (5.28)$$

$$\eta_p|_{eq} = 0 \quad (5.29)$$

$$4\pi(p^2 + \Omega^2)e^{2\kappa_p} - \frac{1}{4\pi}(p^2 + \mu^2)e^{-2\kappa_p} = 0 \quad (5.30)$$

$$\langle \Pi \rangle|_{eq} = 0 \quad (5.31)$$

$$\langle \phi \rangle|_{eq} = -\frac{4\pi g}{V\mu^2} \sum_{k,s} \frac{\bar{M}}{k_0} \left(\cos 2\varphi_k|_{eq} + \frac{|k|}{\bar{M}} \sin 2\varphi_k|_{eq} \cos \gamma_k|_{eq} \right) \quad (5.32)$$

Primeiramente vamos estudar a relação entre o parâmetro de expansão dos campos fermiônicos $\bar{M}$ e a massa m da lagrangiana. A equação (5.27) tem duas soluções

$$1^a \text{ solução : } \quad \bar{M} = m - g\langle\phi\rangle \implies \tan \varphi_k|_{eq} = 0$$

$$\text{com } \sin \gamma_k|_{eq} \neq 0 \quad (5.33)$$

$$2^{\text{a}} \text{ solução : } \sin \gamma_k|_{\text{eq}} = 0$$

$$\text{com } \tilde{M} \neq m - g\langle\phi\rangle . \quad (5.34)$$

Imediatamente podemos interpretar a equação (5.33) como a solução trivial do sistema. Substituindo (5.33) na transformação de Nambu (4.23 - 4.25), utilizando a parametrização (5.16), verificamos que a transformação de Nambu torna-se uma matriz identidade. Ou seja, para esta solução não há dinâmica efetiva nas variáveis fermiônicas de Nambu.

Estudemos a segunda solução. Substituindo (5.34) na eq.(5.28) obtemos

$$\cos 2\varphi_k|_{\text{eq}} = -\frac{(k^2 + M\tilde{M})}{[(k^2 + M\tilde{M})^2 + (M - \tilde{M})^2 k^2]^{1/2}} \quad (5.35)$$

$$\sin 2\varphi_k|_{\text{eq}} = \frac{(-1)^n (M - \tilde{M})|k|}{[(k^2 + M\tilde{M})^2 + (M - \tilde{M})^2 k^2]^{1/2}} ,$$

onde definimos

$$M \equiv m - g\langle\phi\rangle|_{\text{eq}} . \quad (5.36)$$

Substituindo as soluções $\cos 2\varphi_k|_{\text{eq}}$ e $\sin 2\varphi_k|_{\text{eq}}$, dadas em (5.35), na eq.(5.32), obtemos a equação

$$\langle\phi\rangle|_{\text{eq}} = \frac{4\pi g}{\mu^2} \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M}{(k^2 + M^2)^{1/2}} \quad (5.37)$$

que contém uma integral divergente. Observe que transformamos a soma discreta sobre os momentos em uma soma contínua fazendo

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k .$$

Caso tivéssemos escolhido o parâmetro de expansão $\tilde{M}$ igual a massa m da lagrangiana, obteríamos a mesma equação de *gap* (5.37). Portanto, mostramos que para o modelo do plasma escalar existe somente uma possível expansão para os campos fermiônicos dada

pela massa m da lagrangiana. Consequentemente, tomaremos $\bar{M} = m$ no restante do trabalho.

Agora, com o objetivo de renormalizar a teoria (eliminar suas divergências) introduzimos os seguintes contratermos

$$4\pi\mathcal{L}_c = \frac{A}{1!}\phi + \frac{\delta\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{C}{3!}\phi^3 + \frac{D}{4!}\phi^4 \quad (5.38)$$

na densidade de lagrangiana (4.1) do plasma escalar. Neste caso, refazendo os cálculos com os contratermos, a equação (5.37) transforma-se na equação de *gap*

$$\begin{aligned} & \left(A + \frac{C}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{-2\kappa_p|_{eq}}}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right) + \left(\mu^2 + \delta\mu^2 + \frac{D}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{-2\kappa_p|_{eq}}}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle|_{eq} + \\ & + \frac{C}{2} \langle \phi \rangle|_{eq}^2 + \frac{D}{6} \langle \phi \rangle|_{eq}^3 = -8\pi g \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M}{(k^2 + M^2)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde M é definida em (5.36). É conveniente fazer a mudança de variável

$$\frac{1}{(p^2 + \Omega_p^2|_{eq})^{1/2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-2\kappa_p|_{eq}}}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} . \quad (5.40)$$

Dessa forma, a nova variável dinâmica Ω_p^2 pode ser interpretada como variável dinâmica no sentido de massa efetiva para o modo de momento p . Neste caso, as equações (5.29) e (5.30) com os contratermos no equilíbrio são dadas por

$$\eta_p|_{eq} = 0 \quad (5.41)$$

$$\Omega_p^2|_{eq} = \mu^2 + C\langle \phi \rangle|_{eq} + \frac{D}{2} \langle \phi \rangle|_{eq}^2 + \left[\frac{4\pi D}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \Omega_p^2|_{eq})^{1/2}} + \delta\mu^2 \right] . \quad (5.42)$$

Neste ponto fixamos o parâmetro de expansão Ω do operador de campo bosônico, dado em (4.3), como sendo a massa efetiva $\Omega_p|_{eq}$ dada em (5.42), observando que no equilíbrio esta variável dinâmica independe de p , isto é,

$$\Omega^2 = \mu^2 + C\langle\phi\rangle|_{eq} + \frac{D}{2}\langle\phi\rangle|_{eq}^2 + \left[\frac{4\pi D}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} + \delta\mu^2 \right] . \quad (5.43)$$

Portanto, no caso estático o fato da massa efetiva bosônica Ω_p , definida em (5.40), independe do momento p , implica que temos parâmetros a mais em nossa teoria, o que justifica termos fixado o parâmetro de expansão $\Omega = \Omega_p|_{eq}$ na equação acima. Obviamente, no caso dinâmico este procedimento não é possível, já que a massa efetiva Ω_p depende do momento.

Resta-nos ajustar os coeficientes A , $\delta\mu^2$, C e D de modo a absorver as divergências através de uma redefinição dos parâmetros da densidade de lagrangiana (4.1). Fazendo isto, os contratermos que renormalizam a equação de gap (5.39) e a energia são dados por

$$D = 48\pi g^4 L(m) \quad (5.44)$$

$$\delta\mu^2 = -96\pi^2 g^4 L(m) G(\mu) - 16\pi g^2 G(0) + 24\pi m^2 g^2 L(m) \quad (5.45)$$

$$C = -48\pi m g^3 L(m) \quad (5.46)$$

$$A = 96\pi^2 m g^3 L(m) G(\mu) + 16\pi m g G(0) - 8\pi m^3 g L(m) \quad (5.47)$$

onde

$$\begin{aligned} L(m) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k^2(k^2 + m^2)^{1/2}} \\ G(m) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2(k^2 + m^2)^{1/2}} \\ G(\mu) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{2(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Substituindo A e C no primeiro termo da equação (5.39) temos

$$\left(A + \frac{4\pi C}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right) = 16\pi m g G(m) + 24\pi m g^3 L(m) [G(\mu) - G(\Omega)] , \quad (5.48)$$

onde verificamos que o primeiro termo cancela uma parte da divergência do lado direito da equação (5.39). O segundo termo deve se anular para que a equação (5.39) seja finita, de modo que escolhamos o parâmetro de expansão do campo bosônico $\Omega = \mu$. Ou seja, a equação de *gap* (5.39) e o esquema de renormalização exigem que no equilíbrio o parâmetro de expansão Ω seja igual a massa μ da lagrangiana,

$$\frac{1}{(p^2 + \Omega^2)} = \frac{1}{(p^2 + \Omega_p|_{\epsilon_q}^2)^{1/2}} = \frac{e^{-2\kappa_p|_{\epsilon_q}}}{(p^2 + \Omega^2)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} , \quad (5.49)$$

o que implica em $\kappa_p = 0$. Isto quer dizer que no equilíbrio as equações para as variáveis bosônicas são $\eta_p = 0$ e $\kappa_p = 0$. Em outras palavras, os termos

$$\frac{1}{4\pi} \frac{C}{3!} \phi^3 + \frac{1}{4\pi} \frac{D}{4!} \phi^4 \quad (5.50)$$

são necessários para a renormalização da teoria, mas não geram dinâmica para as variáveis de emparelhamento bosônicas. Portanto, daqui em diante, não consideraremos mais as equações das variáveis de emparelhamento bosônicas.

Voltemos agora a equação de *gap* para os férmions (5.39). Substituindo A , $\delta\mu^2$, C e D dados em (5.44 - 5.47) nos outros termos da eq.(5.39), temos

$$\begin{aligned} & \left(-8\pi m g \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \right) \\ & + \left(\mu^2 - 8\pi g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k} + 12\pi m^2 g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle|_{\epsilon_q} \\ & - 12\pi m g^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)^{1/2}} \langle \phi \rangle|_{\epsilon_q} + 4\pi g^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)^{1/2}} \langle \phi \rangle|_{\epsilon_q}^3 = \\ & = 8\pi g \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M}{(k^2 + M^2)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Calculando as integrais obtemos a equação de *gap* renormalizada

$$\frac{\pi}{2}\mu^2\langle\phi\rangle|_{eq} - gM^3\left[\ln\left(\frac{M}{m}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0 \quad . \quad (5.52)$$

Reagrupando os resultados, a situação de equilíbrio do vácuo do plasma escalar é dada pelas equações finitas

$$\sin\gamma_k|_{eq} = 0 \quad (5.53)$$

$$\cot 2\varphi_k|_{eq} = -\frac{(k^2 + Mm)}{|k|(m - M)} \quad (5.54)$$

$$\eta_p|_{eq} = 0 \quad (5.55)$$

$$\Omega_p|_{eq} = \Omega = \mu \quad (5.56)$$

$$\langle\Pi\rangle|_{eq} = 0 \quad (5.57)$$

$$\frac{\pi}{2}\mu^2\langle\phi\rangle|_{eq} - gM^3\left[\ln\left(\frac{M}{m}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0 \quad . \quad (5.58)$$

Finalmente, a energia do vácuo de nosso sistema, incluindo os contratermos que re-normalizam a teoria, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\langle H \rangle}{V} = & \left(\frac{A}{4\pi} + \frac{C}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle\phi\rangle|_{eq} \\ & + \left(\frac{\mu^2}{8\pi} + \frac{\delta\mu^2}{8\pi} + \frac{D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle\phi\rangle|_{eq}^2 + \frac{C}{24\pi} \langle\phi\rangle|_{eq}^3 + \frac{D}{96\pi} \langle\phi\rangle|_{eq}^4 \\ & + \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p (p^2 + \mu^2)^{1/2} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + M^2)^{1/2} \\ & + \left[\frac{\pi D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\delta\mu^2}{4} \right] \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \quad . \quad (5.59) \end{aligned}$$

Tomando $\langle \phi \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\langle H \rangle}{V} \Big|_{\langle \phi \rangle=0} &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p (p^2 + \mu^2)^{1/2} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + m^2)^{1/2} \\ &+ \left[\frac{\pi D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\delta\mu^2}{4} \right] \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

que pode ser interpretada como a energia de ponto zero do vácuo. Portanto, subtraindo e somando $\frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + m^2)^{1/2}$ na equação (5.59), temos

$$\begin{aligned} \frac{\langle H \rangle}{V} &= \left(\frac{A}{4\pi} + \frac{C}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle_{eq} \\ &+ \left(\frac{\mu^2}{8\pi} + \frac{\delta\mu^2}{8\pi} + \frac{D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle_{eq}^2 + \frac{C}{24\pi} \langle \phi \rangle_{eq}^3 + \frac{D}{96\pi} \langle \phi \rangle_{eq}^4 \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + M^2)^{1/2} - \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + m^2)^{1/2} \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p (p^2 + \mu^2)^{1/2} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + m^2)^{1/2} \\ &+ \left[\frac{\pi D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\delta\mu^2}{4} \right] \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} , \end{aligned} \quad (5.61)$$

onde os três últimos termos de (5.61) correspondem a energia de ponto zero do vácuo, de modo que redefinimos o zero da escala de energia subtraindo a densidade da energia do vácuo,

$$\begin{aligned} \frac{\langle H \rangle}{V} &= \left(\frac{A}{4\pi} + \frac{C}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle_{eq} \\ &+ \left(\frac{\mu^2}{8\pi} + \frac{\delta\mu^2}{8\pi} + \frac{D}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \right) \langle \phi \rangle_{eq}^2 + \frac{C}{24\pi} \langle \phi \rangle_{eq}^3 + \frac{D}{96\pi} \langle \phi \rangle_{eq}^4 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + M^2)^{1/2} - \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k (k^2 + m^2)^{1/2} . \quad (5.62)$$

Substituindo os contratermos (5.44 - 5.47) em (5.62) e calculando as integrais, obtemos finalmente a energia de campo médio renormalizada

$$\frac{\langle H \rangle}{V} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{\pi\mu^2}{g^2} (m - M)^2 + M^4 \ln \left(\frac{M}{m} \right) + \frac{(M^4 - m^4)}{4} \right] . \quad (5.63)$$

Portanto, os contratermos dados em (5.44 - 5.47) tornam finitas todas as quantidades de equilíbrio de nosso sistema. Definindo $x \equiv g\langle\phi\rangle|_{eq}/m$ e $E(x) \equiv (8\pi^2/m^4)\langle H \rangle/V$ na equação (5.63) obtemos

$$E(x) = \frac{\pi\mu^2}{g^2 m^2} x^2 + (1 - x)^4 \left[\ln(1 - x) + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4} , \quad (5.64)$$

A equação de *gap* (5.58) pode ser reescrita como

$$\frac{\pi\mu^2}{2g^2 m^2} x - (1 - x)^3 \left[\ln(1 - x) + \frac{1}{2} \right] = 0 . \quad (5.65)$$

O comportamento da energia do estado fundamental do sistema em função de $\langle\phi\rangle|_{eq}$ é mostrado na Figura 5.1 para alguns valores de g e m/μ .

Figura 5.1: Gráfico da energia em função de $g\langle\phi\rangle|_{c_q}$ para $m/\mu = 1, 1/2$ e $g^2 = \pi/4, 5\pi/2$.

Tendo obtido a situação de equilíbrio para o estado fundamental do vácuo do plasma escalar, dada pelas equações (5.53 - 5.58), e sua energia de equilíbrio dada em (5.63), estudaremos no capítulo seguinte a dinâmica deste sistema.

Capítulo 6

Linearização da Dinâmica de Campo Médio

Neste capítulo obteremos a dinâmica de pequenas oscilações em torno da solução estacionária. Devido a semelhança destas equações linearizadas com a equação de Lippmann-Schwinger, estudaremos a física de quasi-equilíbrio de nosso sistema através de uma analogia com a Teoria de Espalhamento, obtendo analiticamente as amplitudes e frequência de oscilação do sistema. Finalmente, a partir dos polos da matriz T analisaremos a existência de estados ligados de quasi-férmions neste regime.

6.1 Linearização das Equações Cinéticas

No caso dinâmico devemos introduzir os seguintes contratermos para renormalizar a teoria

$$4\pi\mathcal{L}_c = \frac{A}{1!}\phi + \frac{\delta\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{C}{3!}\phi^3 + \frac{D}{4!}\phi^4 - \frac{Z}{2}(\partial\phi)^2, \quad (6.1)$$

onde acrescentamos à lagrangiana de contratermos do caso estático (5.38), um termo de renormalização da função de onda. Em [23] J. Dias Alonso e R. Hakim mostram que os contratermos dados em (6.1) renormalizam as equações que descrevem o regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio para o sistema do plasma escalar. Refazendo os cálculos do capítulo 5 com os contratermos dados em (6.1), obtemos para a dinâmica efetiva do vácuo do plasma escalar na aproximação de campo médio as seguintes equações de movimento

$$\dot{\varphi}_k = g\langle\phi\rangle \frac{|k|}{k_0} \sin \gamma_k \quad (6.2)$$

$$\dot{\gamma}_k = 2k_0 - 2gm\langle\phi\rangle \frac{1}{k_0} \left(1 - \frac{|k|}{m} \cot 2\varphi_k \cos \gamma_k \right) \quad (6.3)$$

$$\langle\dot{\phi}\rangle = \frac{4\pi}{(1+Z)}\langle\Pi\rangle \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \langle\dot{\Pi}\rangle = & -\left(\frac{A}{4\pi} + \frac{C}{2}G(\mu)\right) - \left(\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\delta\mu^2}{4\pi} + \frac{D}{2}G(\mu)\right)\langle\phi\rangle \\ & - \frac{C}{8\pi}\langle\phi\rangle^2 - \frac{D}{24\pi}\langle\phi\rangle^3 - \frac{2g}{(2\pi)^3}[I_1(m) + I_2(m)] \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde as integrais divergentes $G(\mu)$, $I_1(m)$ e $I_2(m)$ são dadas por

$$G(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{2(p^2 + \mu^2)^{1/2}} \quad (6.6)$$

$$I_1(m) = \int d^3k \frac{m}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \cos 2\varphi_k \quad (6.7)$$

$$I_2(m) = \int d^3k \frac{|k|}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \sin 2\varphi_k \cos \gamma_k . \quad (6.8)$$

Primeiramente observamos que as equações dinâmicas acima se reduzem às equações (5.53 - 5.58) no regime estático, o que mostra que realmente o contratermo $-\frac{Z}{2}(\partial\phi)^2$ não é necessário neste caso. Verificamos também, consistentemente com a discussão realizada no capítulo anterior durante o processo de renormalização [veja equações (5.48 - 5.50)], que não há dinâmica para as variáveis de emparelhamento bosônicas η_p e Ω_p no caso de um sistema relativístico descrito pelo modelo do plasma escalar. Enfim, as equações cinéticas acima formam um sistema complicado não linear de equações diferenciais acopladas de modo que somente soluções numéricas são possíveis.

Calcularemos a dinâmica efetiva de $\mathcal{R}^F$ no regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio. As equações cinéticas obtidas neste regime são conhecidas como equações de campo médio linearizadas e são equivalentes às equações de RPA [36]. Veremos que será possível obter soluções analíticas para a dinâmica das variáveis fermiônicas de nosso sistema neste regime.

Com o objetivo de estudar o regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio, vamos inicialmente expandir as variáveis dinâmicas fermiônicas e do condensado até primeira ordem em torno das soluções estacionárias

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \varphi_k^{(0)} + \delta\varphi_k \\
 \gamma_k &= \gamma_k^{(0)} + \delta\gamma_k \\
 \langle\phi\rangle &= \langle\phi\rangle^{(0)} + \delta\langle\phi\rangle \\
 \langle\Pi\rangle &= \langle\Pi\rangle^{(0)} + \delta\langle\Pi\rangle,
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde $\varphi_k^{(0)} = \varphi_k|_{eq}$, $\gamma_k^{(0)} = \gamma_k|_{eq}$, $\langle\phi\rangle^{(0)} = \langle\phi\rangle|_{eq}$ e $\langle\Pi\rangle^{(0)} = \langle\Pi\rangle|_{eq}$ são as soluções estacionárias de equilíbrio, enquanto $\delta\varphi_k$, $\delta\gamma_k$, $\delta\langle\phi\rangle$ e $\delta\langle\Pi\rangle$ são pequenas oscilações em torno das soluções de equilíbrio.

Devemos notar que temos infinitas soluções estacionárias para as variáveis fermiônicas devido ao fator n [veja eq. (5.35)]. Isto se deve ao fato de utilizarmos variáveis do tipo ângulo-ação de modo que estes infinitos pontos de equilíbrio são equivalentes. Tomemos portanto $n = 0$. As soluções de equilíbrio são então dadas por

$$\begin{aligned}
 \cos 2\varphi_k^{(0)} &= -\frac{[(k^2 + m^2) - mg\langle\phi\rangle^{(0)}]}{(k^2 + m^2)^{1/2}(k^2 + M^2)^{1/2}} \\
 \sin 2\varphi_k^{(0)} &= \frac{g\langle\phi\rangle^{(0)}|k|}{(k^2 + m^2)^{1/2}(k^2 + M^2)^{1/2}} \\
 \gamma_k^{(0)} &= 0 \\
 \langle\Pi\rangle^{(0)} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\frac{\pi\mu^2}{2}\langle\phi\rangle^{(0)} = gM^2 \left[\ln\left(\frac{M}{m}\right) + \frac{1}{2} \right].$$

Para linearizar as equações (6.2 - 6.5) temos que expandir algumas funções de φ_k e γ_k em torno do equilíbrio até primeira ordem. Expandindo as funções de γ_k temos

$$\begin{aligned}\sin \gamma_k &= \sin \gamma_k^{(0)} + \cos \gamma_k^{(0)} \delta \gamma_k + \mathcal{O}(\delta \gamma_k)^2 = \delta \gamma_k \\ \cos \gamma_k &= \cos \gamma_k^{(0)} - \sin \gamma_k^{(0)} + \mathcal{O}(\delta \gamma_k)^2 = 1\end{aligned}\tag{6.11}$$

e para φ_k temos

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi_k &= \sin 2\varphi_k^{(0)} + 2 \cos 2\varphi_k^{(0)} \delta \varphi_k + \mathcal{O}(\delta \varphi_k)^2 \\ \cos 2\varphi_k &= \cos 2\varphi_k^{(0)} - 2 \sin 2\varphi_k^{(0)} \delta \varphi_k + \mathcal{O}(\delta \varphi_k)^2.\end{aligned}\tag{6.12}$$

As integrais divergentes $I_1(m)$ e $I_2(m)$ também devem ser expandidas uma vez que são funções de φ_k e γ_k ,

$$\begin{aligned}I_1 &= I_1^{(0)} + I_1^{(1)} + \mathcal{O}(\delta \varphi_k)^2 \\ &= \int d^3k' \frac{m}{(k'^2 + m^2)^{1/2}} \cos 2\varphi_{k'}^{(0)} - 2 \int d^3k' \frac{m}{(k'^2 + m^2)^{1/2}} \sin 2\varphi_{k'}^{(0)} \delta \varphi_{k'} \\ I_2 &= I_2^{(0)} + I_2^{(1)} + \mathcal{O}(\delta \varphi_k^2, \delta \gamma_k^2, \delta \varphi_k, \delta \gamma_k) \\ &= \int d^3k' \frac{|k'|}{(k'^2 + m^2)^{1/2}} \sin 2\varphi_{k'}^{(0)} \\ &\quad + 2 \int d^3k' \frac{|k'|}{(k'^2 + m^2)^{1/2}} \left(\cos 2\varphi_{k'}^{(0)} \delta \varphi_{k'} - \sin 2\varphi_{k'}^{(0)} \sin \gamma_k^{(0)} \delta \gamma_k \right).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Substituindo as formas linearizadas acima nas equações (6.2 - 6.5) obtemos a forma linearizada destas equações cinéticas

$$\delta\dot{\varphi}_k = g\langle\phi\rangle^{(0)}\frac{|k|}{k_0}\delta\gamma_k \quad (6.14)$$

$$g\langle\phi\rangle^{(0)}|k|\delta\dot{\gamma}_k = -4k_0(k^2 + M^2)\delta\varphi_k - 2g|k|k_0\delta\langle\phi\rangle \quad (6.15)$$

$$\delta\langle\dot{\phi}\rangle = \frac{4\pi}{(1+Z)}\delta\langle\Pi\rangle \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \delta\langle\ddot{\Pi}\rangle = & -\left(\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\delta\mu^2}{4\pi} + \frac{D}{2}G(\mu)\right)\delta\langle\phi\rangle \\ & - \frac{C}{4\pi}\langle\phi\rangle^{(0)}\delta\langle\phi\rangle - \frac{D}{8\pi}\langle\phi\rangle^{(0)2}\delta\langle\phi\rangle + \frac{4g}{(2\pi)^3}\int d^3k'\frac{|k'|}{(k'^2 + M^2)^{1/2}}\delta\varphi_k . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Observamos que as equações de campo médio linearizadas (6.14 - 6.17) são homogêneas com coeficientes que não dependem explicitamente do tempo. Logo, as suas soluções são do tipo

$$\begin{aligned} \delta\varphi_k &= \Psi_k e^{i\omega t} \\ \delta\gamma_k &= \Gamma_k e^{i\omega t} \\ \delta\langle\phi\rangle &= \Phi e^{i\omega t} \\ \delta\langle\Pi\rangle &= \Pi e^{i\omega t} , \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde ω é a oscilação do emparelhamento em torno do equilíbrio e Ψ_k , Γ_k , Φ e Π são as amplitudes de pequenas oscilações. Substituindo as soluções (6.18) em (6.14 - 6.17), obtemos equações para as amplitudes de oscilação Ψ_k , Γ_k , Φ e Π ,

$$i\omega\Psi_k = g\langle\phi\rangle^{(0)}\frac{|k|}{k_0}\Gamma_k \quad (6.19)$$

$$i\omega g\langle\phi\rangle^{(0)}|k|\Gamma_k = -4k_0(k^2 + M^2)\Psi_k - 2g|k|k_0\Phi \quad (6.20)$$

$$i\omega\Phi = \frac{4\pi}{(1+Z)}\Pi \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} i\omega\Pi = & -\left(\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\delta\mu^2}{4\pi} + \frac{D}{2}G(\mu)\right)\Phi \\ & - \frac{C}{4\pi}\langle\phi\rangle^{(0)}\Phi - \frac{D}{8\pi}\langle\phi\rangle^{(0)2}\Phi + 4g\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k'\frac{|k'|}{(k'^2 + M^2)^{1/2}}\Psi_{k'} . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Na seção seguinte resolveremos analiticamente este sistema de equações acopladas para as amplitudes de oscilação através de uma analogia com a Teoria de Espalhamento.

6.2 Solução das Equações Cinéticas de Campo Médio Linearizadas

Nesta seção vamos resolver analiticamente o sistema de equações acopladas (6.19 - 6.22), as quais descrevem a dinâmica efetiva de pequenas oscilações do vácuo do plasma escalar em torno da solução estacionária na aproximação de campo médio. Para isto faremos uma analogia com a Teoria de Espalhamento, já que as equações linearizadas obtidas são semelhantes à equação de Lippmann-Schwinger. A partir deste analogia, reinterpretemos o nosso problema de pequenas oscilações do emparelhamento, utilizando o teorema de Thouless [31], o qual diz que a uma perturbação linear corresponde um par emparelhado de quasi-partículas em adição ao vácuo gaussiano, como um problema de espalhamento de quasi-férmions gerados da flutuação do vácuo.

Substituindo a equação (6.20) em (6.19) temos

$$-\omega^2\Psi_k = -4(k^2 + M^2)\Psi_k - 2g|k|\Phi \quad (6.23)$$

e substituindo (6.22) em (6.21) obtemos

$$\begin{aligned} (1+Z)\omega^2\Phi = & \left(\mu^2 + \delta\mu^2 + \frac{D}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{1}{(p^2 + \mu^2)^{1/2}}\right)\Phi + C\langle\phi\rangle^{(0)}\Phi \\ & + \frac{D}{2}\langle\phi\rangle^{(0)2}\Phi - 16\pi g\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k'\frac{|k'|}{(k'^2 + M^2)^{1/2}}\Psi_{k'} . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Finalmente, substituindo Φ da equação (6.23) em (6.24) obtemos a equação para a amplitude de oscilação Ψ_k

$$[(1+Z)\omega^2 - N] \frac{[\omega^2 - 4(k^2 + M^2)]}{2g|k|} \Psi_k = -16\pi g \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \frac{|k|}{(k'^2 + M^2)^{1/2}} \Psi_{k'} , \quad (6.25)$$

onde

$$N \equiv \left(\mu^2 + \delta\mu^2 + \frac{D}{2} 4\pi G(\mu) \right) + C(\phi)^{(0)} + \frac{D}{2} (\phi)^{(0)2} . \quad (6.26)$$

A equação (6.25) pode ser reescrita como

$$[(1+Z)\omega^2 - N] \left[k_0'^2 - \frac{\omega^2}{4} \right] \frac{1}{k_0'^4} \Psi_k = 8\pi g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|k|}{k_0'^4} \int d^3k' \frac{|k'|}{k_0'^4} \Psi_{k'} , \quad (6.27)$$

onde

$$k_0'^4 = (k^2 + M^2)^{1/2} .$$

Devemos observar que o termo potencial da equação do tipo Schrödinger (6.27) é separável, podendo ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle k|V|k \rangle &= v(k)v^*(k') \\ &= 8\pi g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} h(k)h(k') \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde

$$h(k) = \frac{|k|}{k_0'^4} .$$

A solução da equação de Schrödinger com potencial separável é conhecida da Teoria de Espalhamento [37], onde a equação de Lippman-Schwinger pode ser resolvida de forma

fechada. Em analogia com a Teoria de Espalhamento, a solução geral para a equação (6.27) tem duas componentes. A primeira corresponde a solução trivial do problema quando $g = 0$. A segunda componente da solução da amplitude Ψ_k é a parte não trivial, que contém a influência do termo potencial. Esta componente corresponde ao termo de onda espalhada na Teoria de Espalhamento.

Portanto, a solução da equação (6.27) pode ser escrita como uma equação integral na forma de uma equação de Lippmann-Schwinger,

$$\begin{aligned} \frac{|k|}{k_0} \Psi(k, q; \omega) = & \alpha \delta(q - k) + \\ & + 8\pi g^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(1+Z)\omega^2 - N]} \frac{1}{[k_0^{st2} - \omega^2/4 + i\epsilon]} \frac{|k|^2}{k_0^{st}} \int d^3k' \frac{|k'|}{k_0^{st'}} \Psi(k', q; \omega) , \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde q é o momento relativo de dois quasi-férmions incidentes e α é um fator de fase inicial do sistema. Escolhemos para a solução da equação (6.27) a condição de contorno de ondas emergentes $(+i\epsilon)$. Observamos que agora devemos interpretar Ψ_k como uma função de onda de espalhamento dos dois quasi-férmions provenientes da flutuação do vácuo, enquanto ω é o espectro de excitação do vácuo gaussiano como veremos adiante.

Para resolvermos a equação integral (6.29), integramos em k e fazemos a mudança $k \leftrightarrow k'$ no termo potencial. Obtemos então,

$$\int d^3k \frac{|k|}{k_0^{st}} \Psi(k, q; \omega) = \frac{\alpha}{1 - \frac{8\pi g^2}{((1+Z)\omega^2 - N)} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{k_0^{st'}} \frac{|k'|^2}{[(k_0^{st'})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]}} . \quad (6.30)$$

Substituindo este resultado na equação (6.29), temos a solução para Ψ_k

$$\frac{|k|}{k_0^{st}} \Psi(k, q; \omega) = \alpha \delta(q - k) + \frac{\alpha k_0^{st}}{[(k_0^{st})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} \frac{|k|}{k_0^{st}} \frac{1}{\Delta^+(\omega)} \frac{|k|}{k_0^{st}} , \quad (6.31)$$

onde

$$\Delta^+(\omega) = (2\pi)^3 \frac{[(1+Z)\omega^2 - N]}{8\pi g^2} - \int d^3k' \frac{1}{[(k_0^{st'})^2 - \omega^2/4 + i\epsilon]} \frac{|k'|^2}{k_0^{st'}} . \quad (6.32)$$

Substituindo a solução geral (6.31), Ψ_k , na equação (6.25), obtemos a frequência ω de pequenas oscilações do emparelhamento em torno do equilíbrio para o plasma escalar

$$\omega = 2q_0^* = 2(\mathbf{q}^2 + M^2)^{1/2} , \quad (6.33)$$

onde $\mathbf{q}$ é o momento relativo de dois quasi-férmions incidentes e a frequência ω pode ser reinterpretada como a energia de centro de massa de dois quasi-férmions espalhados, ou ainda, o espectro de excitação do vácuo.

6.3 Estados Ligados de Quasi-Férmions

Nesta seção estudaremos a possibilidade de existência de estados ligados de quasi-férmions (provenientes da flutuação do vácuo) no regime de pequenas oscilações em torno do equilíbrio, a partir da analogia com a Teoria de Espalhamento. Da Teoria de Espalhamento temos para a matriz de transição T , no caso de potencial separável, a seguinte forma [37]

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) \propto h(\mathbf{k}') \frac{1}{\Delta^+(\omega)} h(\mathbf{k}) , \quad (6.34)$$

onde $h(\mathbf{k})$ é dado em (6.28) e $\Delta^+(\omega)$ em (6.32). Como estamos interessados na possibilidade de existência de estados ligados de quasi-férmions, devemos estudar os polos da matriz de transição T que correspondem aos zeros de $\Delta^+(\omega)$. Observamos portanto que a condição para existência de estados ligados depende da energia relativa ω dos quasi-férmions incidentes. Ou seja, dada a energia relativa ω , temos que verificar a existência de $\Delta^+(\omega)$ nulo, o que corresponderia a um estado ligado. Se $\Delta^+(\omega)$ não é nulo, significa que os dois quasi-férmions são espalhados no contínuo.

A partir de (6.32) verificamos que $\Delta^+(\omega)$ contém divergências que são canceladas pelos contratermos em $[(1 + Z)\omega^2 - N]$. Substituindo os contratermos $\delta\mu^2$, C e D dados em (5.44 - 5.47) em N dado pela equação (6.26) e escolhendo Z da forma

$$Z = 4\pi g^2 L(m) ,$$

obtemos

$$\Delta^+(\omega) = \frac{1}{8\pi g^2} \left[(1 + 4\pi g^2 L(m))\omega^2 - \mu^2 + 16\pi g^2 G(0) - 24\pi g^2 M^2 L(m) \right] - I_\omega , \quad (6.35)$$

onde I_ω é a integral divergente

$$I_\omega = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda dk \frac{k^2}{(k^2 + M^2)^{1/2}} \frac{1}{(k^2 + M^2 - \omega^2/4)} . \quad (6.36)$$

Temos agora que analisar a integral I_ω . Verificamos que para $0 \leq \omega < 2M$ não há polos no eixo real, enquanto no caso em que $\omega \geq 2M$ a integral I_ω apresenta polos no eixo real.

i) $0 \leq \omega < 2M$. Neste caso temos (vide apêndice C)

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{M^2}{4} + \left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{3M^2}{2} \right) \ln \left(\frac{2\Lambda}{M} \right) + \frac{(4M^2 - \omega^2)^{3/2}}{4\omega} \arctan \left[\frac{\omega}{(4M^2 - \omega^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (6.37)$$

Substituindo este resultado na equação (6.35), obtemos

$$\Delta^+(\omega) = F(\omega) - \frac{\pi\mu^2}{g^2m^2} \quad (6.38)$$

onde

$$F(\omega) = \frac{\pi\omega^2}{g^2m^2} + \left[\left(\frac{\omega}{m} \right)^2 - 6 \left(1 - \frac{g\langle\phi\rangle|_{eq}}{m} \right)^2 \right] \ln \left(1 - \frac{g\langle\phi\rangle|_{eq}}{m} \right) - \left(1 - \frac{g\langle\phi\rangle|_{eq}}{m} \right)^2 - \frac{m}{\omega} \left[4 \left(1 - \frac{g\langle\phi\rangle|_{eq}}{m} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{m} \right)^2 \right]^{3/2} \arctan \left[\frac{\omega/m}{[4(1 - g\langle\phi\rangle|_{eq}/m)^2 - (\omega/m)^2]^{1/2}} \right] \quad (6.39)$$

Neste ponto devemos observar que substituindo (6.38 - 6.39) em (6.31) temos uma solução analítica renormalizada para a dinâmica de pequenas oscilações em torno da situação de equilíbrio do vácuo do plasma escalar quando $0 \leq \omega < 2M$.

Procuremos em seguida os zeros de $\Delta^+(\omega)$. Para um dado valor da constante de acoplamento g e de m/μ temos a partir de (5.65) a solução para $g\langle\phi\rangle|_{eq}/m$. Tendo esta solução, substituímos na equação (6.39) e obtemos a função $F(\omega)$. Nas Figuras abaixo mostramos o comportamento da função $F(\omega)$ e $\pi\mu^2/g^2m^2$ para $m/\mu = 1/2$ e 1 com constante de acoplamento $g^2 = \pi/4$ e $5\pi/2$. Para $m/\mu = 1$ temos estado ligado de dois quasi-férmions, enquanto que para $m/\mu = 1/2$ não há estado ligado.

Figura 6.1: Função $F(\omega)$ e $\pi\mu^2/g^2m^2$ para $m/\mu = 1$ e $g^2 = \pi/4, 5\pi/2$. Para $g^2 = \pi/4$ a energia do estado ligado de quasi-férmions na escala de massa m é $\omega/m = 1.19$. Para $g^2 = 5\pi/2$ a energia do estado ligado é $\omega/m = 1.27$.

Figura 6.2: Função $F(\omega)$ e $\pi\mu^2/g^2m^2$ para $m/\mu = 1/2$ e $g^2 = \pi/4, 5\pi/2$. Neste caso não há estado ligado.

Verificamos na Figura 6.1 que quanto maior a constante de acoplamento, maior é a energia do estado ligado de dois quasi-férmions, como era esperado. Verificamos ainda pelas Figuras 6.1 e 6.2 que a existência de estados ligados de dois quasi-férmions está relacionada com a massa μ . Sendo μ a massa do potencial de Yukawa, à medida que μ aumenta, o alcance do potencial de Yukawa diminui. Isto explica o fato de não termos estado ligado para $m/\mu = 1/2$.

ii) $\omega \geq 2M$. Neste caso a integral I_ω tem uma singularidade em $k = \sqrt{\omega^2/4 - M^2}$. Utilizando-se a Teoria de Resíduos obtemos

$$I_\omega = VP \int_0^\Lambda dk \frac{k^4}{(k^2 + M^2)^{1/2}} [k^2 - (\omega^2/4 - M^2)] + i\pi \frac{\omega^2}{8} \left[1 - \frac{4M^2}{\omega^2} \right] , \quad (6.40)$$

onde VP é o valor principal de Cauchy da integral I_ω . A partir da tabela de integrais do apêndice C, calculamos o VP de Cauchy de I_ω , obtendo

$$\begin{aligned} I_\omega = & \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{(6M^2 - \omega^2)}{4} \left[-\ln 2 + \ln \left(\frac{M}{\Lambda} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{8} \left(1 - \frac{4M^2}{\omega^2} \right)^{3/2} \ln \left[\frac{\omega + (\omega^2 - 4M^2)^{1/2}}{\omega - (\omega^2 - 4M^2)^{1/2}} \right] + \frac{i\pi}{8\omega} (\omega^2 - 4M^2)^{3/2} \right\} . \quad (6.41) \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (6.35) temos

$$\begin{aligned} \Delta^+(\omega) = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ (\omega^2 - 6M^2) \ln \left(\frac{M}{m} \right) - \frac{\mu^2 \pi}{g^2} + \frac{\pi \omega^2}{g^2} \right\} \\ & - \frac{1}{\omega} (\omega^2 - 4M^2)^{3/2} \ln \left[\frac{\omega + (\omega^2 - 4M^2)^{1/2}}{\omega - (\omega^2 - 4M^2)^{1/2}} \right] + \frac{i\pi}{2\omega} (\omega^2 - 4M^2)^{3/2} \} . \quad (6.42) \end{aligned}$$

Verificamos a partir de (6.42) que $\Delta^+(\omega)$ não se anula para $\omega > 2M$. Ou seja, não há estados ligados de dois quasi-férmions se a energia relativa incidente destes for maior que $2M$.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a extensão da aproximação de campo médio, dada uma condição inicial, para a evolução temporal de um sistema composto de férmions e bósons que interagem. Para isto usamos uma técnica de projeção dependente do tempo através da qual obtemos equações de movimento do tipo cinético para o conjunto de variáveis dinâmicas de um corpo. Este formalismo possibilita incluir correlações dinâmicas às equações de campo médio, além de permitir o cálculo com matéria e com temperatura. Na primeira parte do trabalho aplicamos a técnica para um sistema descrito pelo modelo de Jaynes-Cummings e na segunda estudamos o modelo do plasma escalar relativístico.

No capítulo 3 obtivemos as equações que descrevem a dinâmica na aproximação com termos de correlação para o modelo de Jaynes-Cummings. A evolução temporal da inversão atômica e da polarização intrínseca obtidas nesta aproximação foram comparadas com a solução exata, mostrando que a inclusão dos termos de correlação são fundamentais para gerar o amortecimento das oscilações de Rabi resultante da correlação entre os dois subsistemas.

No capítulo 4 adaptamos o formalismo aplicado ao modelo de Jaynes-Cummings ao estudo de sistemas relativísticos. Apresentamos assim, um tratamento não-perturbativo para o problema da condição inicial na Teoria Quântica de Campos para um sistema de férmions interagindo com bósons.

No capítulo 5 obtivemos as equações cinéticas que descrevem a dinâmica efetiva das variáveis de um corpo para o plasma escalar relativístico na aproximação de campo médio. A partir das soluções estacionárias para o vácuo das equações cinéticas, renormalizamos a teoria incluindo contratermos. Verificamos neste processo de renormalização que o modelo do plasma escalar relativístico não permite dinâmica de emparelhamento para as variáveis bosônicas. Enfim, estudamos o comportamento da energia do vácuo gaussiano deste modelo em função do condensado para diferentes valores da constante de acoplamento

No capítulo 6 fizemos uma aplicação das equações cinéticas obtidas no capítulo 5. Estudamos a dinâmica efetiva de pequenas oscilações em torno da solução estacionária. Resolvemos estas equações analiticamente através de uma analogia com a teoria de espalhamento, obtendo as amplitudes de oscilação do emparelhamento e suas respectivas frequências. Desta analogia reinterpretemos o problema de pequenas oscilações do emparelhamento como um problema de espalhamento de dois quasi-férmions gerados da flutuação do vácuo. Finalmente, estudamos a condição de existência de estados ligados de quasi-férmions (provenientes da flutuação do vácuo) neste regime.

Como perspectiva de futuros trabalhos, devemos ressaltar que todos os cálculos do plasma escalar relativístico foram feitos para o vácuo do sistema ($\nu_{k,s}^{(1)} = \nu_{k,s}^{(2)} = 0$). Dando continuidade a este trabalho, o primeiro passo seria estudar as equações com matéria, o que introduz uma dependência com relação a densidade. Este tipo de cálculo consiste em tomar para $\mathcal{F}_0^F$ ocupações não nulas para estados de energia positiva até o momento de Fermi k_F e ocupações nulas acima de k_F .

Outra extensão imediata deste trabalho é incluir termos de correlação no estudo da dinâmica efetiva do plasma escalar relativístico como foi feito no modelo de Jaynes-Cummings.

Apêndice A

Cálculo de traços

Neste apêndice mostramos alguns traços utilizados em nosso cálculo. Começamos calculando traços das densidades bosônicas

$$1) \text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0) &= \text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0^{\text{B}} \mathcal{F}_0^{\text{F}}) \\ &= \text{Tr}_{\text{B}}(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0^{\text{B}}) \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1 n_2 \dots | \prod_c \frac{1}{1 + \nu_c} e^{\epsilon_c \beta_c^\dagger \beta_c} \beta_a^\dagger \beta_b | n_1 n_2 \dots \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Para $a \neq b$ o traço é nulo e para $a = b$ obtemos

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_c \frac{1}{1 + \nu_c} e^{\epsilon_c n_c} n_c \quad (\text{A.2})$$

que pode ser reescrito como

$$\sum_a \frac{1}{1 + \nu_a} n_a e^{\epsilon_a n_a} \sum_{n \neq n_a} \prod_{c \neq a} \frac{1}{1 + \nu_c} e^{\epsilon_c n_c} . \quad (\text{A.3})$$

Utilizando a relação

$$\sum_{n_c} e^{\epsilon_c n_c} = \frac{1}{1 - e^{\epsilon_c}} \quad (\text{A.4})$$

e chamando

$$e^{\epsilon_c} = \frac{\nu_c}{1 + \nu_c} \quad , \quad (\text{A.5})$$

a parte que não depende de a é

$$\sum_{n \neq n_a} \prod_{c \neq a} \frac{1}{1 + \nu_c} \frac{1}{1 - e^{\epsilon_c}} = 1 \quad . \quad (\text{A.6})$$

Logo, o traço é dado por

$$\sum_{n_a} \frac{1}{1 + \nu_a} n_a e^{\epsilon_a n_a} = \sum_{n_a} \frac{1}{1 + \nu_a} \nu_a (1 + \nu_a) = \nu_a \quad (\text{A.7})$$

e portanto,

$$Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_b \mathcal{F}_0) = \nu_a \delta_{ab} \quad . \quad (\text{A.8})$$

$$2) Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0)$$

Temos três casos no qual este traço é diferente de zero:

i) $a = b = c = d$. Neste caso temos

$$Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_a^\dagger \beta_a \beta_a \mathcal{F}_0) = Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_a \beta_a^\dagger \beta_a \mathcal{F}_0) - Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_a \mathcal{F}_0) \quad (\text{A.9})$$

onde $Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_a \mathcal{F}_0) = \nu_a$. O primeiro termo é

$$Tr_{BF}(\beta_a^\dagger \beta_a \beta_a^\dagger \beta_a \mathcal{F}_0) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1 n_2 \dots | \prod_e \frac{1}{1 + \nu_e} e^{\epsilon_e \beta_e^\dagger \beta_e} \beta_a^\dagger \beta_a \beta_a^\dagger \beta_a | n_1 n_2 \dots \rangle \quad . \quad (\text{A.10})$$

Usando a relação

$$\sum_{n_a} e^{z_a n_a} n_a^2 = \nu_a (1 + \nu_a) (1 + 2\nu_a) , \quad (\text{A.11})$$

obtemos

$$\text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0) = 2\nu_a^2 . \quad (\text{A.12})$$

ii) $a = c$ e $b = d$. Neste caso escrevemos

$$\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d = \beta_a^\dagger \beta_c \beta_b^\dagger \beta_d - \beta_a^\dagger \beta_d \delta_{bc} . \quad (\text{A.13})$$

O segundo termo não contribui para o traço e o primeiro termo pode ser calculado de maneira análoga ao caso anterior. Obtemos para esse traço

$$\text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0) = \nu_a \nu_b . \quad (\text{A.14})$$

iii) $a = b$ e $c = d$. Fazendo o cálculo de maneira análoga ao caso anterior, obtemos

$$\text{Tr}_{\text{BF}}(\beta_a^\dagger \beta_b^\dagger \beta_c \beta_d \mathcal{F}_0) = \nu_a \nu_b (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) . \quad (\text{A.15})$$

Calculemos agora os traços das densidades fermiônicas.

1) $\text{Tr}_{\text{BF}}(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \mathcal{F}_0)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{BF}}(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \mathcal{F}_0) &= \text{Tr}_{\text{BF}}(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \mathcal{F}_0^B \mathcal{F}_0^F) \\ &= \text{Tr}_F(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \mathcal{F}_0^F) \\ &= \text{Tr}_F \left\{ \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \left[p_\lambda \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda + (1 - p_\lambda) \alpha_\lambda \alpha_\lambda^\dagger \right] \times \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{\mu \neq \lambda} \left[p_\mu \alpha_\mu^\dagger \alpha_\mu + (1 - p_\mu) \alpha_\mu \alpha_\mu^\dagger \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Observamos que

$$\text{Tr}_{\text{BF}} \left\{ \prod_{\mu \neq \lambda} \left[p_\mu \alpha_\mu^\dagger \alpha_\mu + (1 - p_\mu) \alpha_\mu \alpha_\mu^\dagger \right] \right\} = 1 . \quad (\text{A.17})$$

pois o cálculo deste traço consiste em somar todos os elementos diagonais de uma base no espaço de Fock, ou seja, na base dos autoestados do operador número n_μ com autovalores p_μ . Portanto,

$$Tr_{BF}(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \mathcal{F}_0) = Tr_F \left\{ \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \left[p_\lambda \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda + (1 - p_\lambda) \alpha_\lambda \alpha_\lambda^\dagger \right] \right\} = p_\lambda , \quad (A.18)$$

onde usamos o fato de que $Tr_F(\alpha_\lambda^\dagger \alpha_\lambda \alpha_\lambda \alpha_\lambda^\dagger) = 0$, decorrente das regras de anticomutação para os α_λ .

2) $Tr_{BF}(\alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu^\dagger \alpha_\lambda \alpha_\rho \mathcal{F}_0)$. Para densidades de dois corpos temos

$$Tr_{BF}(\alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu^\dagger \alpha_\lambda \alpha_\rho \mathcal{F}_0) = p_\mu p_\nu (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho}) . \quad (A.19)$$

Apêndice B

Aproximação para $\mathcal{F}'(t)$ na Representação de Heisenberg

Neste apêndice mostramos a aproximação feita para $\mathcal{F}'(t)$. Como vimos no capítulo 3, o cálculo de efeitos de correlação das equações dinâmicas envolvem traços do tipo

$$Tr_{BF}[\mathcal{O}_H, H_H] \int_0^t dt' \mathcal{G}_H(t, t') Q_H(t') \mathcal{L}_H \mathcal{F}_{0H}(t') , \quad (B.1)$$

onde o índice H indica a representação de Heisenberg, $\mathcal{O}$ corresponde aos operadores bosônicos e fermiônicos e

$$\mathcal{G}_H(t, t') = T \exp \left\{ i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}_H(\tau) \mathcal{L}_H(\tau) \right\} \quad (B.2)$$

é o propagador na representação de Heisenberg.

Lembrando que $\mathcal{O}_H = e^{iHt} \mathcal{O}_s e^{-iHt}$, podemos escrever o termo de correlação como

$$\begin{aligned} & Tr_{BF} \int_0^t dt' e^{iHt} \mathcal{O}_s(t) e^{-iHt} e^{iHt'} \mathcal{L}_s e^{-iHt'} \mathcal{G}_H(t, t') Q_s(t') \mathcal{L}_s \mathcal{F}_{0s}(t') e^{-iHt'} \\ &= Tr_{BF} \int_0^t dt' \mathcal{O}_s(t) \mathcal{L}_s \underbrace{e^{-iHt} \mathcal{G}_H(t, t') e^{iHt'} Q_s(t') \mathcal{L}_s \mathcal{F}_{0s}(t') e^{-iHt'}}_{B(t, t')} e^{iHt} , \end{aligned} \quad (B.3)$$

onde na última passagem usamos a propriedade cíclica do traço.

Examinemos $B(t, t')$ através da equação

$$B(t, t') = \mathcal{G}_H(t, t') \mathcal{Q}_H(t') \mathcal{L}_H \mathcal{F}_{0H}(t') .$$

Derivando com relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B(t, t') &= i(-iH B(t, t') + iB(t, t')H) + \\ &+ i e^{-iHt} i \mathcal{P}_H \mathcal{L}_H \mathcal{G}_H(t, t') e^{iHt'} \mathcal{F}_{0s}(t') e^{-iHt'} e^{iHt} \\ &= (HB(t, t') - B(t, t')H) - e^{-iHt} \mathcal{P}_H e^{iHt} e^{-iHt} \mathcal{L}_H e^{iHt} B(t, t') \\ &= \mathcal{L}_s B(t, t') - \mathcal{P}_s \mathcal{L}_s B(t, t') \\ &= \mathcal{Q}_s B(t, t') . \end{aligned} \tag{B.4}$$

A solução da eq. (B.4) é dada por

$$\begin{aligned} B(t, t') &= T \exp \left\{ -i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{Q}_s(\tau) \mathcal{L}_s \right\} \mathcal{Q}_s(t') \mathcal{L}_s \mathcal{F}_{0s} \\ &= \mathcal{G}_s(t, t') \mathcal{Q}_s(t') \mathcal{L}_s \mathcal{F}_{0s} . \end{aligned} \tag{B.5}$$

Logo, na representação de Schrödinger temos a mesma expressão para o termo de correlação

$$Tr \int_0^t dt' \mathcal{O}_s(t) \mathcal{L}_s \mathcal{G}_s(t, t') \mathcal{Q}_s \mathcal{L}_s \mathcal{F}_{0s} , \tag{B.6}$$

mas neste caso a função de Green é dada por

$$\mathcal{G}_s(t, t') = T \exp \left\{ -i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{Q}_s(\tau) \mathcal{L}_s(\tau) \right\} . \tag{B.7}$$

Seguindo Lin [33] implementamos na representação de Heisenberg uma versão modificada da aproximação de mais baixa ordem da referência [26]. Neste trabalho, os autores mostraram uma maneira de aproximar o propagador $\mathcal{G}(t, t')$ na representação de Schrödinger. Eles expandem $\mathcal{G}(t, t')$ em séries de potências de um propagador mais simples definido por

$$\mathcal{G}_s(t, t') = T \exp \left\{ -i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{L}_{0s}(\tau) \right\} , \quad (\text{B.8})$$

onde dividimos

$$H = H_0 + H_1 \quad (\text{B.9})$$

e definimos o operador de Liouville

$$\mathcal{L}\mathcal{G}_H(t, t') = T \exp \left\{ i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{P}_H(\tau) \mathcal{L}_H(\tau) \right\} . \quad (\text{B.10})$$

Os primeiros termos da série são

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s^{(0)}(t, t') &= \mathcal{G}_{0s}(t, t') \\ \mathcal{G}_s^{(1)}(t, t') &= \mathcal{G}_{0s}(t, t') - i \int_{t'}^t dt'' \mathcal{G}_{0s}(t', t'') \mathcal{Q}_s(t'') \mathcal{L}_1(t'') \mathcal{G}_{0s}(t'', t') \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Na representação de Heisenberg temos

$$\mathcal{O}_s \simeq e^{-iH_0 t} \mathcal{O}_H e^{iH_0 t} \quad (\text{B.12})$$

onde aproximamos a evolução do operador por H_0 . A aproximação de mais baixa ordem dessa série para o traço (B.6) é

$$\begin{aligned}
& Tr_{\mathcal{B}\mathcal{F}} \int_0^t dt_1 \mathcal{O}_S(t) \mathcal{L}_S(t) \mathcal{G}_S^{(0)}(t, t_1) \mathcal{Q}_S(t_1) \mathcal{L}_S(t_1) \mathcal{F}_{0S}(t_1) \\
&= Tr_{\mathcal{B}\mathcal{F}} \int_0^t dt_1 \mathcal{O}_H(t) \mathcal{L}_H(t) e^{iH_0 t} \mathcal{G}_S^{(0)}(t, t_1) e^{-iH_0 t_1} \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) \mathcal{F}_{0H}(t_1) e^{iH_0 t_1} e^{-iH_0 t} ,
\end{aligned} \tag{B.13}$$

onde usamos a equação (B.12) além da invariância cíclica do traco. O próximo passo é definir

$$A(t, t_1) \equiv e^{iH_0 t} \mathcal{G}_S^{(0)}(t, t_1) e^{-iH_0 t_1} \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) \mathcal{F}_{0H}(t_1) e^{iH_0 t_1} e^{-iH_0 t} . \tag{B.14}$$

Portanto,

$$A(t_1, t_1) = \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) \mathcal{F}_{0H}(t_1) . \tag{B.15}$$

Usando (B.8) e derivando a eq.(B.14), temos

$$i\dot{A}(t, t_1) = 0 , \tag{B.16}$$

cujas solução com a condição inicial (B.15) é dada por

$$A(t, t_1) = \mathcal{Q}_H(t_1) \mathcal{L}_H(t_1) \mathcal{F}_{0H}(t_1) . \tag{B.17}$$

Logo, a aproximação de ordem mais baixa para $\mathcal{G}_H(t, t_1)$ de (B.1) é

$$\mathcal{G}_H(t, t_1) = \mathcal{I} . \tag{B.18}$$

Analogamente, podemos fazer a transcrição para ordens mais altas da série (B.11). Enfim, a densidade $\mathcal{F}'$ pode ser escrita como uma expansão em H_0 .

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) &= -i \int_0^t dt_1 \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t_1) \\
&- \int_0^t dt_1 \left(\int_{t_1}^t dt_2 \mathcal{Q}(t_2) \mathcal{L}_1(t_2) \right) \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{L} \mathcal{Q}(t_1) \mathcal{L} \mathcal{F}_0(t_1) + \dots .
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Apêndice C

Tabela de Integrais

Escrevemos abaixo as integrais utilizadas neste trabalho.

$$\int dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{C.1})$$

$$\int dx \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{x(x^2 + a^2)^{1/2}}{2} - \frac{a}{2} \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{C.2})$$

$$\int dx x^2 (x^2 + a^2)^{1/2} = \frac{x(x^2 + a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2 x (x^2 + a^2)^{1/2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{C.3})$$

$$\int dx \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} + \ln[x + (x^2 + a^2)^{1/2}] \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
& \int dx \frac{x^4}{(x^2 + b)^{1/2}(x^2 + a)} = \\
& = \frac{x(b + x^2)^{1/2}}{2} - \frac{(b - 2a)}{2} \ln[x + (b + x^2)^{1/2}] \\
& - a \left(\frac{a}{2(a + b)} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{x(a + b)^{1/2} + a^{1/2}(b + x^2)^{1/2}}{x(a + b)^{1/2} - a^{1/2}(b + x^2)^{1/2}} \right] \quad \text{se } a - b > 0 \quad (C.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{x(x^2 + b)^{1/2}}{2} - \frac{(b + 2a)}{2} \ln[x + (x^2 + b)^{1/2}] \\
& + \frac{a^{3/2}}{(b - a)^{1/2}} \arctan \left[\frac{(b - a)^{1/2}x}{b^{1/2}(a + x^2)^{1/2}} \right] \quad \text{se } b - a > 0 \quad (C.6)
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] F. Haake, em Springer Tracts in Modern Physics Vol.66, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [2] R. Zwanzig, em Lectures in Theoretical Physics Vol.3, Interscience, New York, 1961.
- [3] C. Willis e R. Picard, Phys. Rev. **A9**, 1343 (1974).
- [4] P. Bonche, S. Koonin e W. Negele, Phys. Rev. **C13**, 1226 (1976);
H. Reinhardt, Nucl. Phys. **A331**, 353 (1979);
A. Kerman e S. Levit, Phys. Rev. **C24**, 1029 (1981).
- [5] A. Kerman e T. Troudet, Ann. of Phys. **154**, 456 (1984).
- [6] C. Wong e H. Tang, Phys. Rev. Lett. **40**, 1070 (1978).
- [7] H. Orland e R. Shaeffer, Z. Phys. **A290**, 191 (1979);
S. Ayik, Z. Phys. **A298**, 83 (1980);
P. Grag, H. Weindenmller e G. Wolschin, Ann. Phys. (N.Y.) **136**, 190 (1981);
P. Buck e H. Feldmeier, Phys. Lett. **B129**, 172 (1983);
S. Wang e W. Cassing, Ann. Phys. (N.Y.) **159**, 328 (1985).
- [8] A.F.R. de Toledo Piza, em Time Dependent Hartree-Fock and Beyond, Lectures Notes in Physics Vol.171, Springer-Verlag, Berlin, 1982;
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **C27**, 862 (1983);
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **C31**, 613 (1985); M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. **A137**, 367 (1986);
B. Carlson, M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, Nucl. Phys. **A457**, 261 (1986);
A.F.R. de Toledo Piza, Publicao IFUSP/P-659 (1987).

- [9] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); idem **124**, 246 (1961);
 J. Walecka, Ann. Phys. (N.Y.) **83**, 491 (1974);
 S. Chang, Phys. Rev. **D12**, 1071 (1975);
 S.A. Chin, Ann. Phys. (N.Y.) **108**, 301 (1977);
 R. Hakim, Riv. N. Cim., **1**, 1 (1978);
 L. Celenza e C. Shakin, Phys. Rev. **C24**, 2704 (1981);
 J. Alonso, Phys. Rev. **D31**, 1315 (1985);
 B. Serot e J. Walecka, em The relativistic Nuclear Many-Body Problem, Advances in Nuclear Physics - volume 16, Plenum Press, New York (1986);
 B. Serot, Rep. Prog. Phys. **55**, 1855 (1992);
 R. Furnstahl, H.-B. Tang e B. Serot, Phys. Rev. **C52**, 1368 (1995).
- [10] A. Kerman e D. Vautherin, Ann. Phys. (N.Y.) **192**, 408 (1989).
- [11] S. Coleman, R. Jackiw e H.D. Politzer, Phys. Rev. **D10**, 2491 (1974);
 D. Gross e A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).
- [12] J. Alonso e R. Hakim, Phys. Rev. **D29**, 2690 (1984).
- [13] A. Starobinsky, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980);
 A. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981);
 A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publishers (1990).
- [14] O. Éboli, R. Jackiw e So-Yong Pi, Phys. Rev. **D37**, 3557 (1988);
 M. Samiullah, O. Éboli e So-Yong Pi, Phys. Rev. **D44**, 2335 (1991);
 D. Boyanovsky, H.J. de Vega e R. Holman, Phys. Rev. **D49**, 2769 (1994);
 F. Braghin, C. Martin e D. Vautherin, Phys. Lett. **B348**, 343 (1995);
 Érica Regina Takano. dissertação de mestrado IFUSP-1992, Prof. Orientador O. Éboli.
- [15] H.-Th. Elze, M. Gyulassy e D. Vasak, Phys. Lett. **B177**, 402 (1986).
- [16] R. Horsley e W. Shoenmaker, Nucl. Phys. **B280**, 716 (1987).

- [17] C. Miug Ko, Qi Li e R. Wang Phys. Rev. Lett. **59**, 1084 (1987);
 W. Cassing, G. Batko, B. Blättel, V. Koch, A. Lang, U. Mosel, K. Niita, K. Weber
 e G. Wolf, Nucl. Phys. **A519**, 357c (1990);
 G. Baym, Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions, em Proceeding of IV International
 Summer School, la Rábida, Spain, Springer Verlag (1992).
- [18] J. Providência, M. Ruivo e C. Souza, Phys. Rev. **D36**, 1882 (1987);
 W. Cassing, A. Lang, S. Teis e K. Weber, Nucl. Phys. **A545**, 123c (1992);
- [19] P.L. Natti e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **D54**, 7867 (1995).
- [20] P. Stevenson, B. Allès and R. Tarrach, Phys. Rev. **D35**, 2407 (1987);
 A. Kovner and B. Rosenstein, Phys. Rev. **D39**, 2332 (1989).
- [21] A. Kerman e C.-Yong Lin, Ann. Phys. (N.Y.) **241**, 185 (1995).
- [22] M. Ploszajczak, M. Rhodes-Brown, Phys. Rev. **D33**, 3686 (1986);
 J. Alonso e A. Canyellas, Nucl. Phys. **A526**, 623 (1991).
- [23] J. Alonso e R. Hakim, Phys. Rev. **D38**, 1780, (1988).
- [24] S.J. Wang, W. Cassing, Nucl. Phys. **A495**, 371c (1989);
- [25] C-Y. Lin e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev. **D46**, 742 (1992).
- [26] P. Buck, H. Feldmeier e M.C. Nemes, Ann. Phys. (N.Y.) **185**, 170 (1988).
- [27] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963)
 Pierre Meystre em Cavity Quantum Optics and the Quantum Measurement process,
 Progress in Optics, Vol. XXX, pg. 261. Edited by E. Wolf, Elsevier Publishers, 1992.
- [28] G. Kalman, Phys. Rev. **D9**, 1656 (1974).
- [29] E.R. Takano Natti e A.F.R. de Toledo Piza, Phys. **A236**, 321 (1997).
- [30] E.R. Takano Natti e A.F.R. de Toledo Piza, em *Initial-conditions problem for a
 relativistic quantum scalar plasma*, Publicação IFUSP/P-xxxx (1997), HEP-NET
 xxxx, Submetido a Phys. Rev. **D**.
- [31] P. Ring e P. Schuck, *The Many-Body Problem*. Springer Verlag (1980).

- [32] J. des Cloiseaux, em *Problème à N Corps*, École d'été de Physique Théorique les Houches, Gordon and Breach (1967).
- [33] C-Y. Lin e A.F.R. de Toledo Piza, *Mod. Phys. Lett.* **A5**, 1605 (1990).
- [34] H.M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics*, Gordon and Breach Science Publishers (1973).
- [35] L.C. Yong Tese de Doutorado IFUSP (1991).
- [36] D. Rowe, *Nucl. Phys.* **80**, 209 (1966)
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, *Z. Phys.* **A310**, 339 (1983)
M.C. Nemes e A.F.R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **C31**, 613 (1985).
- [37] R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill Book Company (1966).
- [38] P.L. Natti e A.F.R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **D55**, 3403 (1997).