SBI-IFUSP

305M810T1859

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

ESTUDO ESPECTRAL DAS ONDAS DE ALFVÉN EM PLASMA CILÍNDRICO

por

Hisataki Shigueoka

Orientador: Paulo Hiroshi Sakanaka

Tese apresentada como requisito parcial para
a obtenção do título de Doutor em Física.

São Paulo

1991

[Signature]
Ricardo Marques Junior
A. C. - L. Chien
Hans Lauterbach
Izete Luiz Calabres

530.442
5555e
D
e.l

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Shigueoka, Hisataki

Estudo espectral das ondas de Alfvén em plasma cilíndrico. São Paulo, 1991.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka

Unitermos: 1. Magnetohidrodinâmica; 2. Ondas de Alfvén; 3. Modos discretos.

USP/IF/SBI - 39/91

Dedicatória

*Dedico esta tese aos meus pais a quem devo a minha formação
de valores morais e espirituais.*

Aos meus filhos, Igor e Lucas, que tanto de VIDA têm me ensinado.

À minha esposa, Lucila, pela paciente e silenciosa dedicação.

Aos meus irmãos.

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Dr. Paulo Hiroshi Sakanaka pelo estímulo e encorajamento para a realização desta tese e pelo respeito à minha independência.

Agradeço ao prof. Dr. Altair Souza de Assis pelo incentivo e encorajamento nas discussões e formulações de idéias para a finalização deste trabalho.

Sou particularmente agradecido ao prof. Dr. Carlos Augusto de Azevedo pela sua disposição, seu espírito vivaz nas inúmeras discussões que tivemos ao longo dos nossos trabalhos.

Agradeço ao diretor e técnicos do NPD da UFF pelos auxílios na utilização do computador IBM/4381.

Agradeço ao prof. Dr. Tsui pelas sugestões oportunas durante o trabalho de pesquisa da tese.

Agradeço ao prof. Dr. Ivan C. de Nascimento e à direção do Instituto de Física da USP pela oportunidade de poder realizar os meus estudos de pós-graduação nesta instituição e ao Dr. Iberê L. Caldas pelo encorajamento e estímulo à pesquisa.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, meus agradecimentos.

Às instituições CAPES-PICD e CNPq pelo apoio financeiro durante a realização do trabalho, meus agradecimentos.

Finalmente, expresso o mais profundo agradecimento à minha esposa, Lucila, que, paciente e corajosamente, suportou as dificuldades, entre muitas, nos momentos das minhas ausências e preocupações durante a elaboração desta tese.

Pensamentos

*Trinta raios convergem no círculo de uma roda
E pelo espaço que há entre eles
Origina-se a utilidade da roda.
A argila é trabalhada na forma de vasos
E no vazio origina-se a utilidade deles.
Abrem-se portas e janelas nas paredes da casa
E pelos vazios é que podemos utilizá-las
Assim da não-existência vem a utilidade e da existência, a posse.*

Lao-tse

filósofo taoísta, séc. VI A.C.

*There can be no doubt that our descendants will learn to exploit
the energy of fusion for peaceful purposes even before its use becomes
necessary for the preservation of human civilization.*

Lev Andreevich Artsimovich

Resumo

Neste trabalho foi estudado o espectro das ondas de MHD ideal em um plasma cilíndrico. Considerando o plasma inomogêneo, o espectro apresenta regiões discretas e contínuas: onda lenta e onda de Alfvén. Os automodos das regiões discretas são as soluções da equação de Hain-Lüst e, nas regiões contínuas, as autofunções apresentam singularidades.

Foram determinadas expressões analíticas em termos da função de Bessel que os autovalores da onda de Alfvén apresentam o comportamento discreto.

Os modos globais discretos de Alfvén foram calculados usando um equilíbrio da configuração de tokamak, $\beta < 1$, e estes modos apresentam uma pequena contribuição da onda compressional. Foi feita uma análise da propagação da energia da onda por meio do vetor de Poynting e este conhecimento tem a sua importância no problema de aquecimento do plasma por ondas de Alfvén. Foi feita, também, uma análise da polarização das ondas.

Foi estudado o espectro da onda devido ao efeito de β , $\beta > 1$. Esta condição é mais aplicável em problemas de plasma espacial, por exemplo, na fotosfera solar. Foram obtidos, pela primeira vez, os modos discretos de onda lenta, previstos teoricamente. As suas soluções (autofunções e autovalores) possuem também a característica global, aqui denominadas de modos globais discretos da onda lenta.

Outro estudo do problema espectral foi realizado para uma configuração de equilíbrio para RFP ("Reversed Field Pinch"). Determinou-se, além dos automodos Sturmianos da onda de Alfvén, os automodos anti-Sturmianos da onda lenta.

Abstract

The spectrum of the ideal MHD waves in cylindrical plasmas has been studied. Assuming non homogeneous plasma, the spectrum presents the discrete and continuum (slow and Alfvén waves) regions. The eigenfunctions of the discrete regions are the solutions of the Hain-Lüst equation. In the continua, the solutions of this equation have singularities.

It have been determined analytical expressions for the discrete eigenfunctions. These happen to be the Bessel's function and its eigenvalues agree with the numerical calculations.

The discrete modes (global modes) of Alfvén waves have been calculated by numerically using the equilibrium configuration of tokamaks, $\beta < 1$, and it was observed that these modes present a small contribution from the compressional waves. An analysis of the energy propagation was done using the Poynting vector. This has its importance in the problem of plasma heating by Alfvén waves. Its polarization was also studied.

The effect of β , through values greater than 1, was also studied. This condition is more aplicable to the spacial plasma problems, for example, in the solar photosphere's plasma. It has been calculated, for the first time, the discrete modes of slow waves, proposed theoretically. Its solutions (eigenfunctions and eigenvalues) have also the characteristics of the global modes, called global discrete slow waves.

The study of spectral problems for the Reversed Field Pinch configurations was also determined here for both Sturmian eigenmodes for the Alfvén waves and Anti-Sturmian eigenmodes for the slow waves.

Conteúdo

I	INTRODUÇÃO	1
I.1	Motivação	1
I.2	O Modelo	3
I.3	Objetivos da Tese	4
I.4	Plano da Dissertação	4
II	EQUAÇÕES BÁSICAS DE MHD IDEAL	7
II.1	Introdução	7
II.2	Equações Básicas de MHD Ideal	7
II.3	Equação de Hain-Lüst	11
II.4	Condições de Contorno na Interface Plasma-Vácuo	15
II.5	Vetores dos Campos $\vec{Q}$, $\vec{E}$, e $\vec{S}$	17
II.5.1	Campo magnético, $\vec{Q}$	17
II.5.2	Campo elétrico, $\vec{E}$	18
II.5.3	Vetor de Poynting, $\vec{S}$	19
III	INTRODUÇÃO ÀS ONDAS DE ALFVÉN	23
III.1	Introdução	23
III.2	O Efeito Mecânico do Campo Magnético	23
III.3	Onda de Alfvén de Cisalhamento	25
III.4	Ondas Magnetossônicas	27
III.5	Velocidades de Fase	28

III.6 Pontos de Acumulação	29
IV ESPECTRO DAS ONDAS DE ALFVÉN	40
IV.1 Introdução	40
IV.2 Aspectos Históricos do Estudo Espectral	41
IV.3 Espectro Discreto em MHD Ideal	43
IV.4 Espectro Contínuo	44
IV.5 Aplicação das Ondas de Alfvén em Tokamaks	46
V ESTUDO ANALÍTICO DOS MODOS DISCRETOS	56
V.1 Introdução	56
V.2 Os Modos Discretos	56
V.3 Análise por “WKB”	61
V.4 Análise Numérica do DAW	63
VI RESULTADOS NUMÉRICOS DAS ONDAS DISCRETAS DE ALFVÉN	66
VI.1 Introdução	66
VI.2 O Método Numérico	66
VI.3 Aplicações à Tokamak	67
VI.4 Efeito de β ($\beta > 1$)	70
VI.5 Aplicações à “RFP”	71
VII CONCLUSÕES E FUTURAS APLICAÇÕES	91
VII.1 Conclusões	91
VII.2 Estudos Futuros	92

Capítulo I

INTRODUÇÃO

I.1 Motivação

O estudo da propagação da onda de Alfvén é de fundamental importância na física de plasmas aplicada tanto à fusão termonuclear controlada como na física espacial. Desde 1942, quando Hannes Alfvén [1] previu a existência de ondas em um plasma magnetizado, muitos estudos surgiram e várias aplicações têm sido realizadas.

A maioria dos experimentos em laboratório está concentrada em adquirir um meio de aquecimento auxiliar de plasmas de interesse para a fusão termonuclear controlada. Por causa desta necessidade, estudos de aquecimento por ondas de radiofrequência constituem uma área de pesquisa muito importante em plasmas de laboratório. Esta forma de aquecimento de plasma é particularmente interessante e pode ter sucesso em baixas frequências (na ordem de MHz) em plasmas toroidais. Dois métodos têm sido propostos para explorar o aquecimento por meio de ondas de Alfvén. O primeiro método usa a localização de ressonância de Alfvén que depende da densidade local de plasma para aquecer uma região específica do plasma. O aquecimento nas regiões interiores à camada de ressonância seria resultado do amortecimento das ondas lentas geradas nesta camada. No segundo método sugere-se o aquecimento usando os automodos globais de Alfvén. Neste

caso a energia dos modos globais não é depositada em camada ressonante dentro do plasma; em vez disso, como o nome já o diz, o aquecimento ocorre através da coluna de plasma. Há evidências experimentais deste processo.

Muitos trabalhos em ondas de Alfvén foram realizados pelo grupo teórico de Lausanne, Suíça, utilizando as equações de MHD ideal. Appert *et al.* (1982)[2] apresentaram o estudo das ondas de Alfvén num plasma cilíndrico com efeitos de gradiente da densidade de plasma e corrente de equilíbrio, quando descobriram os automodos globais de Alfvén.

Hasegawa e Chen (1976)[5] estudaram também as ondas de Alfvén usando como modelo os efeitos de massa finita de elétron, raio de Larmor finito dos íons e mecanismos de amortecimento, tais como, viscosidade dos íons, colisões dos elétrons, amortecimento de Landau e processos não lineares. Com estas correções cinéticas (especialmente o raio de Larmor finito dos íons) eles encontraram que as linhas dos campos magnéticos se acoplam e não mais oscilam independentemente, como aconteceria no modelo de MHD ideal. Estas correções também levaram a substituir a camada de ressonância de Alfvén, com seu contínuo de modos, por uma camada de ressonância, onde a energia da onda de Alfvén compressional é convertida em uma onda cinética de Alfvén de cisalhamento.

Ross *et al.* (1982)[7] incluíram os efeitos cinéticos num modelo cilíndrico e desenvolveram um código numérico baseado neste modelo. Este código usa os perfis da corrente, densidade e temperatura no plasma. Posteriormente, acrescentaram os efeitos de antena (Ross *et al.* (1986))[8]. Este código foi utilizado para modelar plasmas nas máquinas PLT e PRETEXT e mostrou que os modos globais depositam uma energia significativa ao longo do raio da coluna de plasma e não somente próximo à superfície ou numa fina camada de ressonância. Também confirmou-se a previsão de uma maior existência de modos mais na superfície externa quando a camada ressonante de Alfvén está localizada próxima à superfície do plasma (região mais fria do plasma).

Em física espacial, as aplicações das ondas de Alfvén estão mais voltadas para a compreensão dos mecanismos geradores de um aquecimento anômalo que se observa na superfície do Sol: a temperatura na superfície do Sol é cerca de $10^3 K$, porém esta sobe abruptamente para $10^6 K$ em camadas imediatamente superiores. Outra aplicação está voltada para a oscilação da proeminência arciforme (Azevedo *et al.* (1991))[3] e aquecimento da corona solar (Azevedo *et al.* (1991))[4].

Já na magnetosfera terrestre apresentam-se diversas oscilações que podem ser interpretadas como oscilações globais de Alfvén devido à corrente paralela ao campo (Shigueoka *et al.* (1991))[6].

Este trabalho foi assim motivado por extensas aplicações que existem tanto na física de plasma aplicada à fusão termonuclear controlada como na física espacial. Para conhecer as propriedades básicas das ondas em um plasma magnetizado estuda-se os espectros das ondas de Alfvén utilizando a teoria magnetohidrodinâmica ideal. Existem, ainda, algumas lacunas no conhecimento dos espectros, especificamente, o efeito da densidade da corrente, do β do plasma e na análise mais detalhada das ondas de Alfvén torcional e magnetossônica em várias configurações de equilíbrio.

1.2 O Modelo

Para este estudo das ondas de Alfvén considera-se um plasma cilíndrico, homogêneo ou inhomogêneo, desprezando-se a inércia dos elétrons, isto é, sem o efeito do ω_{ci} (frequência de Larmor dos íons). Este modelo cilíndrico pode reproduzir um tokamak, na primeira aproximação, desprezando-se os efeitos da curvatura e do acoplamento entre os modos poloidais, quando se considera que o comprimento do cilindro é o da mesma grandeza de um tokamak, $L = 2\pi R$, onde R é o raio maior do tokamak. Ou seja, o toróide pode ser aproximado a uma geometria cilíndrica usando-se a condição de contorno de que os campos das ondas sejam periódicas com a periodicidade L . Neste caso $n\lambda = 2\pi R$, onde n é um inteiro,

assim $k_z = 2\pi/\lambda = n/R$. Para um cilindro infinito, sem tal condição de contorno periódico, n varia continuamente e R é algum comprimento de escala conveniente.

I.3 Objetivos da Tese

O propósito da tese é estudar os modos discretos (globais) de Alfvén em configurações cilíndricas de plasma, para máquinas tipo tokamak e RFP (“Reversed Field Pinch”). É analisado também o efeito de β em plasma onde os modos são predominantemente magnetossônicos. Nenhuma tentativa foi realizada aqui para estudar o aquecimento por meio destes modos, mas os estudos aqui iniciados já podem ser considerados como uma introdução às futuras pesquisas ligadas ao aquecimento por ondas globais (ou discretas) de Alfvén.

I.4 Plano da Dissertação

No capítulo II são apresentadas as equações básicas de MHD ideal e a equação de Hain-Lüst em coordenadas cilíndricas para o estudo de propagação dos modos (ondas). Estas equações são reescritas, utilizando-se as coordenadas ao longo da linha do campo magnético. As condições de contorno na interface plasma-vácuo são também apresentadas. As expressões dos campos elétricos e magnéticos perturbados e vetor de Poynting são deduzidas para o estudo da polarização e da propagação das ondas.

As propriedades das ondas de Alfvén compressional e de cisalhamento são apresentadas no capítulo III.

No capítulo IV são introduzidos os espectros das ondas de Alfvén: espectros discretos e contínuos, suas propriedades e aplicações.

Soluções analíticas são obtidas e discutidas no capítulo V.

Os resultados numéricos são apresentados no capítulo VI onde são aplicados para os casos de confinamento de um plasma tipo tokamak e RFP. Uma aplicação

especial é realizada para analisar o efeito de β quando β é maior do que 1. Este caso é comumente encontrado em fenômenos ligados ao plasma espacial.

O último capítulo é dedicado às discussões dos resultados, possíveis aplicações e futuros trabalhos propostos.

Bibliografia

- [1] H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, **150**:405, (1942).
- [2] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon, e J. Vaclavik. Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in tokamaks. *Plasma Phys.*, **24**:1147, (1982).
- [3] C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, H. Shigueoka, e P. H. Sakanaka. Discrete Alfvén waves in solar loop prominences. *Solar Physics*, **131**:119, (1991).
- [4] C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, H. Shigueoka, e P. H. Sakanaka. Coronal loop heating by discrete Alfvén waves. *Solar Physics*, (1991), a ser publicado.
- [5] A. Hasegawa e L. Chen. Kinetic processes in plasma heating by resonant mode conversion of Alfvén waves. *Phys. Fluids*, **19**:1924, (1976).
- [6] H. Shigueoka, M. T. Azevedo, A. S. de Assis, C. A. de Azevedo, e P. H. Sakanaka. Discrete Alfvén waves: a model for transverse ULF oscillations? *G.R. Letters*, submetido.
- [7] D. W. Ross, G. L. Chen, e S. M. Mahalajan. Kinetic description of Alfvén wave heating. *Phys. Fluids*, **25**:652, (1982).
- [8] D. W. Ross, Y- M. Li, S. M. Mahalajan, e R. B. Michine. Antenna analysis and boundary conditions for Alfvén wave studies in tokamaks. *Nucl. Fusion*, **26**:139, (1986).

Capítulo II

EQUAÇÕES BÁSICAS DE MHD IDEAL

II.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as equações de MHD linearizadas em coordenadas cilíndricas e as perturbações $\tilde{\xi}$ no sistema de coordenadas ao longo da linha do campo magnético. Este sistema é utilizado para descrever o vetor da onda e o de Poynting que, qualitativamente, podem descrever as características das ondas MHD.

II.2 Equações Básicas de MHD Ideal

No modelo de magnetohidrodinâmica ideal (MHD), considera-se um gás quente ($> 10^6 K$) e denso totalmente ionizado como um fluido de condutor elétrico perfeito. Admite-se que o plasma pode ser descrito por um equilíbrio estático de longa duração. Tal plasma deve ser mantido longe das paredes metálicas, isto é, deve estar confinado. Num confinamento de plasma como em tokamaks, aplica-se um campo magnético suficientemente forte que age sobre as partículas carregadas de tal forma que proporciona uma pressão que equilibra a pressão de gás. Este é o modelo mais simples que exclui os termos não-ideais (resistividade e viscosidade)

e descreve muito bem o estado de equilíbrio do plasma confinado magneticamente e os movimentos globais rápidos que podem destruir o confinamento numa escala de microssegundos.

A região do plasma, Ω_P , figura (II.1), é envolvida por uma região de vácuo Ω_V que, por sua vez, está limitada por uma parede condutora Γ_W que isola todo o sistema. A superfície plasma-vácuo está representada por Γ_P . Para os propósitos de investigação numérica proposta neste trabalho foram considerados casos de contorno fixo, onde a parede condutora está colocada na superfície de plasma, isto é, $\Gamma_W = \Gamma_P$ e contorno livre, ou seja, Γ_W envolvendo Γ_P . Para este segundo caso, uma condição de contorno na superfície plasma-vácuo torna-se necessária.

O modelo de magnetohidrodinâmica (Bernstein (1958); Freidberg (1982)) [1,2] descreve o comportamento macroscópico do plasma como um fluido. As equações básicas no sistema MKS, com a normalização $\mu_0 = 1$ e $c = 1$, são dadas pela equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (\text{II.1})$$

equação do momentum,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (\text{II.2})$$

e equação da lei adiabática,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) (p \rho^{-\gamma}) = 0. \quad (\text{II.3})$$

Estas são acopladas com as equações dos campos elétrico-magnéticos. Nas equações de Maxwell a corrente de deslocamento é desprezada. Usam-se assim a lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{II.4})$$

a lei de Ampère,

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J}, \quad (\text{II.5})$$

a lei de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{II.6})$$

A junção entre as equações do fluido e de Maxwell é dada pela lei de Ohm,

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0, \quad (\text{II.7})$$

onde $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$ é o campo elétrico no sistema de referência que se move com a velocidade do fluido (η , a resistividade, é desprezada). As equações (II.1) a (II.7), com os valores iniciais e condições de contorno apropriadas, para uma geometria especificada do problema, constituem uma descrição completa para os estudos do confinamento, estabilidade (instabilidades e estabilidades) e propagação das ondas de MHD.

Nestas equações as variáveis de fluido são a densidade de massa ρ , a velocidade de fluido $\vec{V}$, a pressão p e a razão de calores específicos $\gamma = 5/3$. As variáveis eletromagnéticas são o vetor campo elétrico $\vec{E}$, o campo magnético $\vec{B}$ e a densidade de corrente $\vec{J}$. As três primeiras equações indicam a evolução temporal de massa, momentum e a energia em termos da conservação de partículas de plasma, balanço de força de inércia (gradiente da pressão e força magnética), e a evolução da pressão devido à convecção e compressão ou expansão. A lei de Ohm, equação (II.7), mostra que, no sistema de referência movendo-se com o plasma, o campo elétrico é nulo, isto é, o plasma é um condutor perfeito. De fato, isso é a consideração de condutividade perfeita na lei de Ohm, que origina o nome de MHD "Ideal". As equações (II.4) a (II.6) indicam que, em MHD ideal, o comportamento eletromagnético é governado pelas equações de Maxwell com frequências baixas.

As incógnitas são a densidade, a pressão e os três componentes do campo magnético, campo elétrico, densidade da corrente elétrica e velocidade do fluido. Ao todo são 14 incógnitas. As equações (II.1) e (II.3) são duas equações escalares para ρ e p , as equações (II.2), (II.5) e (II.7) são três equações vetoriais para os três

componentes de $\vec{V}$, $\vec{J}$ e $\vec{E}$, e, finalmente, as equações (II.4) e (II.6) são as equações das partes irrotacionais e solenoidais do $\vec{B}$.

Ao estudar o sistema plasma-vácuo, é necessário acrescentar as condições de contorno plasma-vácuo às equações (II.1) a (II.7). As equações que descrevem a continuidade dos componentes tangenciais do campo elétrico perturbado, $\vec{E}$, e do campo magnético perturbado, são:

$$[\mathbf{n} \times \vec{E}] = 0, \quad (\text{II.8})$$

e

$$[\mathbf{n} \times \vec{Q}] = 0, \quad (\text{II.9})$$

onde $[[X]]$ especifica a descontinuidade que a quantidade X faz na interface plasma-vácuo. Usando a equação (II.8) e a lei de Faraday, segue-se que

$$[\mathbf{n} \cdot \vec{Q}] = 0. \quad (\text{II.10})$$

No entanto, o componente radial da densidade de corrente perturbada, $\vec{J}$, deve ser contínua em $r = a$, como consequência da equação (II.9):

$$[\mathbf{n} \cdot \vec{J}] = 0. \quad (\text{II.11})$$

Eliminando $\vec{E}$ e $\vec{J}$ na equação de movimento (II.24), as condições de contorno apropriadas são (II.9) e (II.10). A outra descontinuidade está relacionada com o perfil de pressão pela condição de contorno:

$$[p_1 + \vec{B} \cdot \vec{Q}] = 0, \quad (\text{II.12})$$

isto é, a pressão total (pressão do plasma mais a pressão magnética) tem de ser contínua na superfície plasma-vácuo. Por último, supõe-se que a região de vácuo está limitada por uma parede perfeitamente condutora, em uma posição finita ou não, onde vale $\mathbf{n} \cdot \vec{Q} = 0$.

II.3 Equação de Hain-Lüst

Considera-se que o plasma esteja num estado de equilíbrio estático definido por $\partial/\partial t = 0$ (equilíbrio) e $\vec{V}_0 = 0$ (estático). As quantidades de equilíbrio são denotadas por $\vec{r}_0$, ρ_0 , p_0 , $\vec{B}_0$ e $\vec{J}_0$. Se num instante qualquer o sistema está deslocado do seu estado de equilíbrio, em geral, este deslocamento evoluirá com o tempo. Considerando um pequeno deslocamento, pode-se estudar esta evolução linearizando as equações (II.1 a II.7) em torno da solução do equilíbrio. Definem-se por ρ_1 , p_1 , $\vec{B}_1$, $\vec{J}_1$ e $\vec{V}$ as perturbações das quantidades correspondentes.

Utiliza-se uma configuração de equilíbrio do plasma com simetria cilíndrica circular e infinitamente longa para o estudo do espectro de MHD ideal. Nesta configuração, o campo magnético de equilíbrio possui componentes azimutal e longitudinal que dependem somente de r e ela é descrita pelas equações de equilíbrio estático ($\vec{V}_0 = 0$),

$$\nabla p_0 = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0, \quad (\text{II.13})$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \vec{J}_0, \quad (\text{II.14})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (\text{II.15})$$

As equações de MHD ideal são linearizadas conforme a representação Lagrangeana do movimento do fluido como em Bernstein *et al.* (1958), e introduz-se o pequeno deslocamento $\vec{\xi}$, linearizável, definido por

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \vec{V}. \quad (\text{II.16})$$

Na primeira ordem em $\vec{\xi}$, define-se o operador gradiente na forma

$$\nabla = \nabla_0 - (\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0 \quad (\text{II.17})$$

onde ∇_0 é o operador gradiente em relação à posição de equilíbrio. As variáveis perturbadas em termos de primeira ordem em $\vec{\xi}$ são:

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad (\text{II.18})$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \vec{Q} + (\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_0, \quad (\text{II.19})$$

$$p_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi}, \quad (\text{II.20})$$

$$\rho_1 = \rho_0 - \rho_0 \nabla_0 \cdot \vec{\xi}, \quad (\text{II.21})$$

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_0 - \{(\nabla_0 \vec{\xi}) \cdot \nabla_0\} \times \vec{B}_0 + \nabla_0 \times \vec{Q} + \nabla_0 \times \{(\vec{\xi} \cdot \nabla_0) \vec{B}_0\}, \quad (\text{II.22})$$

onde

$$\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0). \quad (\text{II.23})$$

Estas quantidades podem ser substituídas na equação de movimento, resultando em uma equação vetorial para o deslocamento $\vec{\xi}$ (Bernstein *et al.*, 1958):

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F} \{ \vec{\xi} \}, \quad (\text{II.24})$$

$$\vec{F} \{ \vec{\xi} \} = \nabla (\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla p_0) - \vec{Q} \times (\nabla \times \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{Q}). \quad (\text{II.25})$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , figura (II.2), as variáveis de equilíbrio dependem somente de r . Desprezando o índice “o” dos termos de equilíbrio, o campo magnético de equilíbrio é dado por

$$\vec{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r)). \quad (\text{II.26})$$

Neste sistema de coordenadas a equação de equilíbrio, (II.13), é escrita como

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2} + \frac{B_\theta^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = 0. \quad (\text{II.27})$$

Dois dos três perfis, $p(r)$, $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$, podem ser escolhidos arbitrariamente. O terceiro perfil é determinado pela equação (II.27). A densidade de massa $\rho(r)$ não

aparece na equação de equilíbrio e não há outra equação que a relacione; portanto, pode ser escolhida arbitrariamente. Estas arbitrariedades são eliminadas pelas considerações físicas ou experimentais.

O deslocamento $\vec{\xi}$ é descrito como uma série de Fourier com uma variação temporal “oscilatória”, $\vec{\xi}(r, \theta, z, t) = \sum_{m, k_z} \vec{\xi}(r) \exp(im\theta + ik_z z - i\omega t)$, onde ω pode ser real ou imaginário puro. Desse modo os componentes r , θ e z da equação (II.24) são, respectivamente,

$$-\rho\omega^2 \xi_r = \frac{d}{dr} \left[\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \frac{B^2}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + iG(B_z \xi_\theta - B_\theta \xi_z) \right] - \left[F^2 + r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 \right] \xi_r - 2ik_z \frac{B_\theta}{r} (B_z \xi_\theta - B_\theta \xi_z), \quad (\text{II.28})$$

$$-\rho\omega^2 \xi_\theta = \frac{im}{r} \gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + iG \frac{B_z}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + 2ik_z B_\theta B_z \frac{\xi_r}{r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) (B_z \xi_\theta - B_\theta \xi_z) B_z, \quad (\text{II.29})$$

$$-\rho\omega^2 \xi_z = ik_z \gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} - iG \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) - 2ik_z \frac{B_\theta^2}{r} \xi_r + \left(\frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) (B_z \xi_\theta - B_\theta \xi_z) B_\theta, \quad (\text{II.30})$$

onde

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + im \frac{\xi_\theta}{r} + ik_z \xi_z, \quad (\text{II.31})$$

$$F = \frac{m}{r} B_\theta + k_z B_z = (\vec{k} \cdot \vec{B}), \quad G = \frac{m}{r} B_z - k_z B_\theta. \quad (\text{II.32})$$

As soluções das equações acima podem ser reescritas em termos de um sistema local de coordenadas $(r, e_\perp, e_\parallel)$ (Goedbloed (1979))[4], em vez de (r, θ, z) . Seja $\vec{B} = \hat{e}_\parallel B = B_\theta \hat{e}_\theta + B_z \hat{e}_z$, onde $B^2 = B_\theta^2 + B_z^2$ e $\hat{e}_\parallel$ é um vetor unitário localmente paralelo a $\vec{B}$, figura (II.2). O vetor unitário $\hat{e}_r$ é o mesmo em ambos os sistemas de coordenadas enquanto que $\hat{e}_\perp$ é definido como $\hat{e}_\perp \times \hat{e}_\parallel = \hat{e}_r$. Nesta representação, definem-se $\xi_\perp$ e $\xi_\parallel$ como

$$\xi_\perp = i \left(\frac{B_z \xi_\theta - B_\theta \xi_z}{B} \right), \quad \xi_\parallel = i \left(\frac{B_\theta \xi_\theta + B_z \xi_z}{B} \right), \quad (\text{II.33})$$

e a equação (II.31) é escrita na forma

$$\nabla \cdot \bar{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + \frac{G \xi_{\perp}}{B} + \frac{F \xi_{\parallel}}{B}. \quad (\text{II.34})$$

Em termos de $r \xi_r$, $\xi_{\perp}$ e $\xi_{\parallel}$, os três componentes das equações de movimento são escritos como

$$-\frac{\rho \omega^2}{r} (r \xi_r) = \frac{d}{dr} \left[\frac{\gamma p + B^2}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] - \frac{1}{r} \left[F^2 + r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)^2 \right] r \xi_r + \frac{d}{dr} \left[G (\gamma p + B^2) \xi_{\perp} \right] - 2k_z \frac{B_{\theta}}{r} B \xi_{\perp} + \frac{d}{dr} (\gamma p F \xi_{\parallel}), \quad (\text{II.35})$$

$$-\rho \omega^2 B \xi_{\perp} = -(\gamma p + B^2) \frac{G}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) - 2k_z \frac{B_{\theta}}{r^2} B^2 (r \xi_r) - \frac{G \gamma p G}{B} \xi_{\perp} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \right) B^3 \xi_{\perp} - \frac{G \gamma p F}{B} \xi_{\parallel}, \quad (\text{II.36})$$

$$-\rho \omega^2 B \xi_{\parallel} = -F \gamma p \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) - \frac{F \gamma p G}{B} \xi_{\perp} - \frac{F \gamma p F}{B} \xi_{\parallel}. \quad (\text{II.37})$$

A equação (II.36) é o resultado de $B_z \times (\text{II.29}) - B_{\theta} \times (\text{II.30})$ e a (II.37) é, por sua vez, resultado de $B_{\theta} \times (\text{II.29}) + B_z \times (\text{II.30})$.

A partir destas equações obtém-se, com algumas transformações algébricas, a equação diferencial de segunda ordem para componente radial do deslocamento do plasma, $r \xi_r$, deduzida pela primeira vez por Hain-Lüst em 1958 [5], e posteriormente por Goedbloed (1979)[4],

$$\frac{d}{dr} \left[f(r) \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + g(r) (r \xi_r) = 0, \quad (\text{II.38})$$

onde

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{N}{rD}, \\ N &= (\rho \omega^2 - F^2) q_B, \quad D = \rho^2 \omega^4 - H q_B, \\ r g &= \left(\rho \omega^2 - F^2 \right) - r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)^2 - \frac{4k_z^2}{D} \left(\frac{B_{\theta}}{r} \right)^2 \left(q_B - \rho \omega^2 \gamma p \right) \\ &\quad + r \frac{d}{dr} \left[\frac{2k_z B_{\theta}}{D r^2} G q_B \right], \\ q_B &= \rho \omega^2 (\gamma p + B^2) - \gamma p F^2, \quad H = \frac{m^2}{r^2} + k_z^2, \\ F &= \frac{m}{r} B_{\theta} + k_z B_z = (\vec{k} \cdot \vec{B}), \quad G = \frac{m}{r} B_z - k_z B_{\theta}. \end{aligned}$$

Os componentes paralelo e perpendicular de ξ , em termos do ξ_r , são dados nas seguintes expressões:

$$\xi_{\parallel} = \frac{\rho\gamma p F}{rBD} \left[\left(\omega^2 - \frac{F^2}{\rho} \right) \frac{d}{dr} (r\xi_r) + 2k_z \frac{B_{\theta} G}{\rho} \xi_r \right], \quad (\text{II.39})$$

$$\xi_{\perp} = \frac{1}{rBD} \left[Gq_B \frac{d}{dr} (r\xi_r) 2k_z B_{\theta} B^2 \left(\rho\omega^2 - \frac{\gamma p F^2}{B^2} \right) \xi_r \right]. \quad (\text{II.40})$$

A equação (II.38) fornece a solução na região do plasma, $0 < r < a$, com ou sem a região de vácuo. Em $r \cong 0$, pode-se mostrar que as soluções desta equação se comportam como $r\xi_r \propto (r^{|m|}, r^{-|m|})$, exceto quando $m = 0$. Por razões físicas, as soluções são regulares no eixo, portanto, a solução é $r\xi_r = 0$ para $r = 0$. Para o caso especial em que a superfície do plasma coincide com a da parede condutora, a condição de contorno se torna $r\xi_r = 0$ em $r = a$. Esta é conhecida como condição de contorno fixo. Se $\Gamma_V \neq \Gamma_P$, a condição de contorno em $r = a$ é uma expressão mais complicada, que pode ser deduzida a partir das equações de continuidade apresentadas na seção II.2.

II.4 Condições de Contorno na Interface Plasma-Vácuo

O campo magnético perturbado na região do vácuo, $a < r < a_w$ (onde a_w é o raio da parede condutora), pode ser encontrada analiticamente. Nesta região, as seguintes equações são satisfeitas

$$\nabla \times \vec{Q} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{Q} = 0, \quad (\text{II.41})$$

e a condição de contorno na parede condutora,

$$Q_{Vr}(r = r_w) = 0. \quad (\text{II.42})$$

As equações (II.41) podem ser escritas como uma equação diferencial de segunda ordem

$$r^2 \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + r \frac{d\Psi}{dr} - (k_z^2 r^2 + m^2) \Psi = 0 \quad (\text{II.43})$$

onde

$$\bar{Q}_V = \nabla \Psi(r, \theta, z). \quad (\text{II.44})$$

A equação (II.43) é a equação diferencial das funções de Bessel modificadas cuja solução é dada por

$$\Psi(r) = C_1 I_m(k_z r) + C_2 K_m(k_z r),$$

sendo I_m e K_m as funções de Bessel modificadas de ordem m , e C_1 e C_2 são constantes determinadas pelas condições de contorno, (II.10) e (II.42).

As seguintes expressões para $\bar{Q}_V$ na região do vácuo são encontradas:

$$\begin{aligned} Q_{Vr} &= i \frac{F_a \xi_{ra}}{\Delta} [K'_{mW} I'_m(k_z r) - I'_{mW} K'_m(k_z r)], \\ Q_{V\theta} &= -\frac{m}{k_z r} \frac{F_a \xi_{ra}}{\Delta} [K'_{mW} I_m(k_z r) - I'_{mW} K_m(k_z r)], \\ Q_{Vz} &= -\frac{F_a \xi_{ra}}{\Delta} [K'_{mW} I_m(k_z r) - I'_{mW} K_m(k_z r)], \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

onde

$$\Delta \equiv K'_{mW} I'_{ma} - K'_{ma} I'_{mW}, \quad (\text{II.46})$$

e os índices a e W denotam os valores das funções em $r = a$ e $r = r_W$, respectivamente, e a plica (') indica a derivada em relação a seu argumento.

A continuidade da pressão (II.12) nesta interface é

$$\Pi_P(a) = \Pi_V(a) \quad (\text{II.47})$$

onde

$$\Pi = p_1 + \bar{B} \cdot \bar{Q}, \quad p_1 = -\bar{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \bar{\xi}. \quad (\text{II.48})$$

A função Π , na região do plasma, pode ser expressa, com algumas manipulações algébricas, como

$$\Pi_P = -\frac{N}{rD} (r \xi_r)' + r \xi_r \left\{ 2 \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 - \frac{2k_z B_\theta G}{r^2 D} \left[\rho \omega^2 (\gamma p + B^2) - \gamma p F^2 \right] \right\}. \quad (\text{II.49})$$

A expressão Π no lado de vácuo é expressa como

$$\Pi_V(a) = B_{V\theta}(a)Q_{V\theta}(a) + B_{Vz}(a)Q_{Vz}(a), \quad (\text{II.50})$$

e utilizando as equações (II.45) e (II.50), obtemos

$$\frac{\Pi_{Pa}}{a\xi_{ra}} = \frac{F_a^2}{k_z a \Delta} \left[I'_{mW} K_{ma} - I_{ma} K'_{mW} \right]. \quad (\text{II.51})$$

Nota-se que a expressão do membro à direita é independente de ω^2 , dependendo somente dos parâmetros da onda m e k_z e da geometria do plasma a e r_W . Na expressão à esquerda há uma dependência de ω^2 , tal que, um determinado valor de ω^2 pode satisfazer a igualdade acima. Quando se deseja resolver numericamente a equação de Hain-Lüst (II.38), utiliza-se o método de tiro ao alvo (“shooting method”). Este método consiste em escolher um valor de ω^2 e os parâmetros fixos m e k_z para integrar a equação de $r = 0$ até $r = a$ até que a condição de contorno seja satisfeita. A solução é uma autofunção e ω^2 , o seu autovalor. Por outro lado, se não existe a região de vácuo, utiliza-se o mesmo método até que $a\xi_r(a) \rightarrow 0$. Tal princípio é corroborado pelo teorema das oscilações (Ince (1956)) [6], e discutido por Goedbloed (1974 e 1979) [3], [4].

II.5 Vetores dos Campos $\vec{Q}$, $\vec{E}$, e $\vec{S}$

Nesta seção são apresentados os componentes dos campos magnéticos e elétricos perturbados para determinar a polarização das ondas, e do vetor de Poynting para calcular a magnitude e a direção do fluxo de energia das ondas MHD no plasma.

II.5.1 Campo magnético, $\vec{Q}$

O vetor do campo magnético perturbado no plasma foi definido anteriormente como

$$\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) = \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{II.52})$$

Em coordenadas cilíndricas, $\vec{A} \equiv \vec{\xi} \times \vec{B}$, é expressa como

$$\vec{A} = (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta) \hat{e}_r + (-\xi_r B_z) \hat{e}_\theta + (\xi_r B_\theta) \hat{e}_z, \quad (\text{II.53})$$

e utilizando-se a identidade vetorial para $\nabla \times \vec{A}$, obtém-se os componentes do $\vec{Q}$. O componente r é uma função imaginária dada por

$$Q_r = i F \xi_r \quad (\text{II.54})$$

Os outros componentes são:

$$Q_\theta = k_z B \xi_\perp - \frac{d}{dr}(\xi_r B_\theta), \quad Q_z = -\frac{m}{r} B \xi_\perp - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \xi_r B_z). \quad (\text{II.55})$$

Em coordenadas $(r, e_\perp, e_\parallel)$ os componentes são dados como:

$$Q_\perp = F \xi_\perp - \left[B_z \frac{dB_\theta}{dr} - B_\theta \frac{dB_z}{dr} - \frac{B_\theta B_z}{r} \right] \frac{\xi_r}{B} \quad (\text{II.56})$$

$$Q_\parallel = -G \xi_\perp - B \frac{d\xi_r}{dr} - \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_z^2}{r} \right] \frac{\xi_r}{B}. \quad (\text{II.57})$$

Os componentes de $\vec{Q}$, na região do vácuo, foram apresentados nas equações (II.45).

II.5.2 Campo elétrico, $\vec{E}$

Os componentes do campo elétrico perturbado são obtidos a partir da equação da lei de Ohm, $\vec{E} = i\omega \vec{\xi} \times \vec{B}$, que resultam nas seguintes expressões:

$$E_r = \omega B \xi_\perp, \quad E_\theta = -i\omega \xi_r B_z, \quad (\text{II.58})$$

$$E_z = i\omega \xi_r B_\theta, \quad E_\perp = -i\omega B \xi_r, \quad (\text{II.59})$$

$$E_\parallel = 0. \quad (\text{II.60})$$

O fato de se obter $E_\parallel = 0$ é uma consequência de se ter desprezado a resistividade e a inércia dos elétrons.

II.5.3 Vetor de Poynting, $\vec{S}$

A direção e a magnitude do fluxo de energia são dadas pelo vetor de Poynting,

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{Q}}{2}, \quad (\text{II.61})$$

cujos componentes são:

$$S_r = -i \frac{\omega B}{2} \xi_r Q_{\parallel}, \quad (\text{II.62})$$

$$S_{\perp} = \frac{\omega B \xi_r}{2} Q_{\parallel}, \quad (\text{II.63})$$

$$S_{\parallel} = \frac{\omega B}{2} (\xi_{\perp} Q_{\perp} - F \xi_r^2). \quad (\text{II.64})$$

Os componentes $S_{\perp}$ e $S_{\parallel}$ são ambos reais e representam o fluxo de potência. O componente radial do $\vec{S}$ é imaginário, representando a potência reativa. Este componente fornece uma medida da energia armazenada, seja numa onda estacionária radial (no caso em que $S_r(r)$ possua um perfil de onda estacionária), seja numa onda radialmente evanescente (naquele caso em que S_r , $S_{\perp}$ e $S_{\parallel}$ tenham picos próximos da superfície do plasma).

Figura II.1: Plasma limitado por uma parede condutora.

Figura II.2: Sistemas de coordenadas cilíndricas (r , θ , z) e coordenada local de campo magnético (e_r , $e_\perp$, $e_\parallel$) para um plasma cilíndrico portador de corrente.

Bibliografia

- [1] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, e R. M. Kulsrud. An energy principle by hydromagnetic stability problems. *Proc. Roy. Soc.*, **244A**:17, (1958).
- [2] J. P. Freidberg. Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems. *Rev. Modern Phys.*, **54**:801, (1982).
- [3] J. P. Goedbloed e P. H. Sakanaka. New approach to magnetohydrodynamic stability: I. A practical stability concept. *Phys. Fluids*, **17**:908, (1974).
- [4] J. P. Goedbloed. *Lecture Notes on Ideal Magnetohydrodynamics*. Universidade Estadual de Campinas, Brazil, (1979).
- [5] K. Hain e R. Lüst. Zur stabilität zylindersymmetrischer plasmakonfigurationen mit volumenströmen. *Z. Naturforsch.*, **13a**:936, (1958).
- [6] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publ., New York, (1956).

Capítulo III

INTRODUÇÃO ÀS ONDAS DE ALFVÉN

III.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as propriedades físicas das ondas de Alfvén de cisalhamento e de compressão descritas pelas equações de MHD ideal. Estas ondas formam uma base para o desenvolvimento da compreensão do plasma magnetizado.

III.2 O Efeito Mecânico do Campo Magnético

Para estudar o efeito das forças magnéticas no plasma elimina-se a expressão explícita de $\vec{J}$ na equação do momento (II.2) escrevendo

$$\vec{J} \times \vec{B} = -\nabla \frac{B^2}{2} + \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \quad (\text{III.1})$$

a qual foi obtida diretamente usando as identidades vetoriais e as equações (II.4) e (II.5). O efeito da força $\vec{J} \times \vec{B}$, sempre perpendicular a $\vec{B}$ e $\vec{J}$, pode ser analisado pelas duas contribuições. O primeiro termo do lado direito da equação (III.1) mostra que a magnitude de $B^2/2$ age como uma pressão na direção perpendicular a $\vec{B}$. O gradiente de B^2 exerce uma força que empurra o plasma em direção à região de B^2 menor. E pode ser comparado diretamente com o gradiente da

pressão do gás, $-\nabla p$, que aparece também na equação do momentum. Desse modo, o efeito do campo magnético é somar ao gás uma “pressão magnética” $p_m (= B^2/2)$. Esta pressão, naturalmente, não está relacionada à densidade do gás ρ , mas, aos campos magnéticos e se associam a forças mecânicas (gradiente das pressões) que interagem com os movimentos dos fluidos. A associação de uma pressão magnética p_m com o campo magnético conduz a uma comparação com a pressão do gás p . A razão entre estas duas pressões, $\beta = 2p/B^2$, denominada β do plasma, é um meio de saber se os efeitos magnéticos são fracos ($\beta > 0,1$) ou fortes ($\beta < 0,1$).

Para interpretar o segundo termo da equação (III.1), note-se que $\vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \cong B^2 \hat{e}_r / r$, onde r é o raio da curvatura da linha de campo e $\hat{e}_r$ é o vetor unitário em direção ao centro da curvatura. As linhas do campo são curvas e há uma força exercida no plasma de magnitude B^2/r dirigida para o centro da curvatura. A este respeito, a linha do campo magnético é como uma corda elástica e se de algum modo é “vibrada”, ela responde como uma corda elástica, vibrando como uma onda transversal. Isto corresponde à reação da linha do campo magnético. A diferença é, naturalmente, que a corda elástica exerce uma força ao longo do seu comprimento, como também perpendicularmente, enquanto que a linha do campo magnético exerce somente uma força perpendicular e não paralela à sua própria direção. Ondas estão, portanto, associadas aos campos magnéticos, através das forças de tensão e da pressão magnética.

Um plasma descrito pelas equações de MHD ideal apresenta duas velocidades características associadas à densidade de gás ρ , à pressão p e ao campo magnético B , e estas velocidades são definidas como

$$C_S = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2}, \quad V_A = \left(\frac{B^2}{\rho}\right)^{1/2}, \quad (\text{III.2})$$

onde $\rho = n_i m_i$ é a densidade de massa dos íons. Mais precisamente, $\rho = n_e m_e + n_i m_i$, onde $n_e m_e$ é a densidade dos elétrons; mas é essencialmente a densidade de massa dos íons que determina a velocidade de V_A , pois, $m_e \ll m_i$. A primeira

expressão é conhecida como velocidade do som e é a velocidade com que as regiões de compressão e rarefação do fluido se propaga num movimento longitudinal. A outra expressão é conhecida como *velocidade de Alfvén*, V_A , prevista por Alfvén em 1942[1]. Ao contrário do movimento longitudinal realizado pela onda sonora, esta é a velocidade com que a onda realiza oscilações transversais, e não mostra qualquer flutuação na densidade ou pressão do fluido. A figura (III.1) ilustra este tipo de movimento do fluido para a onda de Alfvén [6].

Há um número de razões para se estudar as propriedades das ondas de MHD. Paralelamente ao interesse intrínseco no estudo das ondas de MHD, existe um interesse maior nas aplicações em aquecimento de plasmas de laboratório (Appert *et al.* (1986)[3]; Besson *et al.* (1986)[5]; Borg *et al.* (1990)[7]).

Outra área de aplicações está na contribuição aos mecanismos de aquecimento da coroa solar (Hollweg (1990))[10]. Há evidências de que as ondas de MHD ocorrem em muitos fenômenos astrofísicos, incluindo a magnetosfera, atmosfera solar – as manchas solares, “loop” da coroa – (Priest (1982))[12], e as oscilações e rotação do Sol (heliossismologia) (Leibacher (1985))[11].

III.3 Onda de Alfvén de Cisalhamento

Para iniciar o estudo das propriedades das ondas MHD, é conveniente utilizar uma configuração de plasma infinito, onde o campo magnético é homogêneo e unidirecional.

O equilíbrio neste sistema homogêneo é dado por,

$$\vec{B} = B\hat{e}_z, \quad \rho = \rho, \quad \vec{J} = 0, \quad \vec{v} = 0, \quad p = p, \quad (\text{III.3})$$

onde B , ρ e p são constantes e considera-se o campo magnético somente na direção $\hat{e}_z$. Este estado de equilíbrio é perturbado para investigar os movimentos das ondas, utilizando a equação (II.25) em coordenadas cartesianas.

Pode-se antecipar algumas diferenças significativas entre as ondas num meio

magnetizado com aquelas das ondas sonoras (caso não magnetizado). A presença de um campo magnético introduz uma direção preferencial de movimento, o que significa que as ondas MHD são *anisotrópicas* na forma com que se propagam, propriedade, essa, um tanto quanto diferente em relação às ondas sonoras num meio uniforme, que são isotrópicas.

As soluções de onda plana podem ser examinadas usando-se a representação de Fourier na forma $F(\vec{r}, t) = F_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r})$ para uma frequência ω , vetor de número de onda k e amplitude da onda F_0 , tal que $\nabla = i\vec{k}$ e $\partial/\partial t = -i\omega$. A equação (II.25) pode ser escrita como

$$-\rho\omega^2 \vec{\xi} = -\gamma p \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) - \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \vec{B})] \times \vec{B} \quad (\text{III.4})$$

Considerando que o $\vec{k}$ está no plano $y - z$ sem a perda de generalidade, os componentes da equação são

$$\omega^2 \xi_x = k_z^2 V_A^2 \xi_x, \quad (\text{III.5})$$

$$\omega^2 \xi_y = k_y C_S^2 (k_y \xi_y + k_z \xi_z) + (k_y^2 + k_z^2) V_A^2 \xi_y, \quad (\text{III.6})$$

$$\omega^2 \xi_z = k_z C_S^2 (k_y \xi_y + k_z \xi_z). \quad (\text{III.7})$$

O componente x determina a relação de dispersão na forma

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 = k^2 V_A^2 \cos^2 \theta, \quad (\text{III.8})$$

onde θ é o ângulo entre o vetor da onda $\vec{k}$ (magnitude $k^2 = k_y^2 + k_z^2$) e o campo aplicado $\vec{B}$. Essa equação é denominada *relação de dispersão da onda de Alfvén* [1]. A natureza anisotrópica desta onda aparece evidente com a solução dependendo do ângulo de propagação. Esta relação de dispersão (III.8) é conhecida como onda de Alfvén de cisalhamento¹ ("shear"), ou, simplesmente, onda de Alfvén. A frequência perto do ciclotron dos íons, ω_{ci} , é denominada onda ciclotrônica do íon e quando os efeitos cinéticos estão presentes, é denominada onda de Alfvén cinética.

¹ Em geometria cilíndrica, a denominação *torção* é mais apropriada.

A onda de Alfvén não se propaga nas frequências acima de ω_{ci} , pelo menos em um plasma frio. A sua polarização é tal que o campo magnético perturbado é sempre perpendicular a $\vec{B}$ e $\vec{k}$, isto é, a onda é puramente transversa, figura (III.1). Isto produz um cisalhamento no campo magnético e as linhas do campo magnético são distorcidas sem serem comprimidas. As ondas de Alfvén de cisalhamento não comprimem o plasma desde que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, o que dificulta muito a observação destas ondas por meio de espalhamento de laser, devido às flutuações das densidades. No entanto pequenas flutuações de densidade podem ser observadas devido a efeitos de frequências finitas ou cinéticas.

Outro fator marcante desta onda é que a energia da onda é dirigida para a direção paralela às linhas do campo magnético. A consequência prática é que, se a onda é gerada por uma pequena antena dentro do plasma, a onda se propagará como um raio ao longo das linhas do campo, passando pela ou perto da antena. Se a onda é gerada por uma fonte extensa e se ρ varia com a posição através das linhas do campo, como usualmente acontece, então a forma da frente de onda pode mudar com o tempo e posição desde que cada seção da frente de onda percorra ao longo de $\vec{B}$ com velocidades diferentes (velocidade de Alfvén local). Este efeito é conhecido como mistura de fase (“phase-mixing”).

III.4 Ondas Magnetossônicas

Os outros modos executam movimentos nos eixos y e z . Um simples cálculo entre as equações (III.5 a III.7) resulta em uma *relação de dispersão das ondas magnetossônicas* (Astrom (1950))[4]:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{(V_A^2 + C_S^2) \pm [(V_A^2 - C_S^2)^2 + 4C_S^2 V_A^2 \sin^2 \theta]^{1/2}}{2}, \quad (\text{III.9})$$

onde o sinal “−” representa a onda *magnetossônica lenta* e o sinal “+” a onda *magnetossônica rápida*. Novamente, observa-se a natureza anisotrópica destas ondas, que também dependem do ângulo de propagação θ .

A onda magnetossônica rápida se transforma numa onda sonora se o campo magnético se anula ($\vec{B} = 0$) e as ondas de Alfvén e magnetossônica lenta desaparecem. Outro resultado interessante é o caso de um plasma incompressível ($C_S \rightarrow \infty$). Neste caso, a onda magnetossônica rápida se torna infinita (propagação instantânea), enquanto que as velocidades das ondas de Alfvén e magnetossônica lenta coincidem. Naturalmente, as ondas não são iguais, pois, as suas propriedades físicas são diferentes.

III.5 Velocidades de Fase

As figuras (III.2, III.3) mostram como a velocidade de fase varia em função do ângulo θ para cada uma das três ondas, equações (III.8) e (III.9) nos casos em que $V_A > C_S$ e $V_A < C_S$. Em ambos os casos, quando $\theta = 0$, há duas raízes:

$$\omega^2 = k^2 C_S^2 \quad e \quad \omega^2 = k^2 V_A^2, \quad (\text{III.10})$$

enquanto que, para $\theta = \pi/2$, as duas raízes são

$$\omega^2 = k^2 (C_S^2 + V_A^2) \quad e \quad \omega^2 = 0. \quad (\text{III.11})$$

Para $V_A > C_S$ figura (III.2), a onda rápida se torna em uma onda de Alfvén para $\theta = 0$ e em uma onda magnetossônica para $\theta = \pi/2$, enquanto que a onda lenta é uma onda sonora para $\theta = 0$ e desaparece em $\theta = \pi/2$. No caso em que $C_S > V_A$, figura (III.3), a onda rápida é uma onda sonora para $\theta = 0$ e magnetossônica para $\theta = \pi/2$, enquanto que a onda lenta é uma onda de Alfvén para $\theta = 0$ e desaparece em $\theta = \pi/2$. A onda magnetossônica lenta é altamente anisotrópica da mesma forma que a onda de Alfvén. Ela não se propaga através das linhas do campo magnético, isto é, $\omega^2 = 0$ para $\theta = \pi/2$ ($k_z = 0$).

As ondas sonoras são oscilações longitudinais que também são encontradas num fluido compressível e magnetizado. Para o movimento das partículas, e propagação da onda na direção do campo magnético, não haverá perturbação desde que as

partículas estejam livres para se moverem nesta direção. Desse modo, as ondas serão ondas sonoras longitudinais propagando-se com velocidade C_S ao longo das linhas do campo, figura (III.4).

A condição $C_S > V_A$ é comumente encontrada no plasma espacial, mas, até o momento, não em plasmas de laboratório. Quando $C_S > V_A$, temos $\beta > 1$, por exemplo, na região da cromosfera solar, na magnetosfera de Júpiter. Hasegawa *et al.* (1990)[9] conceberam um reator de fusão idealizado numa configuração de campo magnético dipolar tal que $\beta > 1$ é satisfeita.

A onda rápida é parcialmente anisotrópica. Propaga-se em todos os ângulos θ , sendo mais rápida na direção perpendicular ao campo magnético. Consequentemente, as frentes de onda a partir de uma fonte pontual imersa num plasma homogêneo e infinito será esférica ou elipsóide de revolução. Na direção perpendicular ao campo magnético surge um novo tipo de movimento da onda longitudinal propagando-se com velocidade $(V_A^2 + C_S^2)^{1/2}$. Estas ondas magnetossônicas também são denominadas *ondas de compressão*, pois produzem compressão de plasma transversa a $\vec{B}$, mas, não paralelo a $\vec{B}$. As linhas do campo magnético de equilíbrio são comprimidas sem serem encurvadas. Não há movimento do plasma paralelo a $\vec{B}$ desde que o componente de força $\vec{J} \times \vec{B}$ paralelo a $\vec{B}$ seja nulo, figura (III.5)

As três ondas dadas pelas equações (III.8) e (III.9) mostram as características básicas de propagação das ondas de um plasma descritas pelas equações de MHD ideal num plasma homogêneo. Estes conhecimentos sobre as ondas MHD são de muita utilidade para a posterior análise dos resultados, principalmente no que se refere ao capítulo VI.

III.6 Pontos de Acumulação

Para o estudo das ondas num meio inhomogêneo é útil discutir quando $\vec{k}$ tenha três componentes k_x, k_y, k_z , onde k_z está na direção do campo magnético, e k_x e

k_y estão nas direções perpendiculares.

Considera-se um plano finito na direção x com paredes condutoras em $x = \pm a$, o número de onda k_x é quantizado, $k_x = n\pi/2a$. Aqui, n é o número de nodos da autofunção ξ na direção x . Na figura (III.6) é mostrado o comportamento de ω^2 para os três modos fixando k_y e k_z , mas variando k_x . Em $k_x = 0$ são denominados ω_{II}^2 , ω_A^2 e ω_I^2 . Quando varia na direção x , direção da inomogeneidade, os três autovalores discretos mostram as seguintes características:

- (a) o autovalor $\omega_A^2 = k_z^2 V_A^2$ do espectro de Alfvén é infinitamente degenerado;
- (b) o autovalor da onda lenta possui um ponto de acumulação para $k_x \rightarrow \infty$ (ou $n \rightarrow \infty$),

$$\omega_-^2 \rightarrow \omega_S^2 \equiv \frac{k_z^2 V_A^2 C_S^2}{C_S^2 + V_A^2}; \quad (\text{III.12})$$

- (c) o autovalor da onda rápida se comporta como

$$\omega_+^2 \cong k_x^2 (C_S^2 V_A^2) \rightarrow \omega_F^2 \equiv \infty, \quad (\text{III.13})$$

tal que ∞ é um ponto de acumulação do espectro da onda rápida.

Estas três características serão as bases para a discussão do caso inomogêneo num plasma cilíndrico, onde a degenerescência infinita dos autovalores de Alfvén e o ponto de acumulação do espectro da onda lenta aparecem em um contínuo de modos impróprios da onda lenta.

Os significados de ω_I^2 e ω_{II}^2 , mostrados na figura (III.6), foram a fonte de muitas controvérsias no desenvolvimento da teoria espectral (Grad (1973); Appert *et al.* (1974)) [8],[2]. Seus valores são dados por

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{1}{2}(C_S^2 + V_A^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k_z^2 V_A^2 C_S^2}{k^2 (V_A^2 + C_S^2)^2}} \right] \quad (\text{III.14})$$

onde $k^2 \equiv k_y^2 + k_z^2$. Note-se que k^2 está no plano perpendicular ao eixo x , e que, em coordenadas cilíndricas, $k_y \rightarrow m/r$ e $k_z \rightarrow k_z$. É de muita utilidade observar a sequência de desigualdades:

$$0 \leq \omega_S^2 \leq \omega_-^2 \leq \omega_I^2 \leq \omega_A^2 \leq \omega_{II}^2 \leq \omega_+^2 \leq \omega_F^2 = \infty.$$

Isto mostra uma nítida separação dos três subespectros discretos num meio homogêneo. No próximo capítulo são analisados estes subespectros quando a inhomogeneidade é imposta ao sistema de um plasma cilíndrico.

Figura III.1: Ondas de Alfvén transversais. O $\vec{k} \parallel \vec{B}$ e o movimento do fluido e campos magnéticos perturbados são perpendiculares às $\vec{B}$.

Figura III.2: Velocidade de fase da onda em função de θ para a onda de Alfvén (A), magnetossônicas lenta (L), e rápida (R), nos casos em que $V_A^2 = 2C_S^2$.

Figura III.3: Velocidade de fase da onda em função de θ para a onda de Alfvén (A), magnetossônicas lenta (L), e rápida (R), nos casos em que $C_S^2 = 2V_A^2$.

Figura III.4: Onda sonora longitudinal propagando-se na direção paralela às linhas do campo magnético num plasma compressível.

Figura III.5: Onda magnetossônica rápida propaga-se perpendicularmente ao campo magnético, causando compressão e rarefação no fluido e nas linhas de força.

Figura III.6: Comportamento de $\omega^2(k_x, k_y, k_z)$, equações (III.9) e (III.10), para k_y e k_z fixos e variando $k_x = n\pi/2a$.

Bibliografia

- [1] H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, **150**:405, (1942).
- [2] K. Appert, B. Balet, R. Gruber, F. Troyon, e J. Vaclavik. Continuous spectra of a cylindrical magnetohydrodynamic equilibrium. *Phys. Fluids*, **17**:1471, (1974).
- [3] K. Appert, G. A. Collins, T. Hellsten, J. Vaclavik, e L. Villar. Theory of MHD waves. *Plasma Phys.*, **28**:133, (1986).
- [4] E. Astrom. Magnetohydrodynamic waves in a plasma. *Nature*, **165**:1019, (1950).
- [5] G. Besson, A. de Chambrier, G. A. Collins, B. Joye, A. Lietti, J. B. Lister, J. M. Moret, S. Nowak, C. Simon, e H. Weisen. A review of Alfvén wave heating. *Plasma Phys.*, **28**:1291, (1986).
- [6] J. A. Bittencourt *Fundamentals of Plasma Physics* vol. II, (1979).
- [7] G. G. Borg, K. Appert, A. J. Knight, J. B. Lister, e J. Vaclavik. Alfvén wave heating in a tokamak reactor. *Nucl. Fusion*, **30**:1433, (1990).
- [8] H. Grad. Magnetofluid-dynamic spectrum and low shear stability. *Proc. Natl Acad. Sci., USA*, **70**:3277, (1973).

- [9] A. Hasegawa, L. Chen, e M. E. Mauel. A $D-^3\text{He}$ fusion reactor based on a dipole magnetic field. *Nucl. Fusion*, **30**:2405, (1990).
- [10] J. V. Hollweg. Heating of the solar corona. *Comp. Phys. Rep.*, **12**:205, (1990).
- [11] J. W. Leibacher, R. W. Noyes, J. Toomre, e R. K. Ulrich. Helioseismology. *Scientific Amer.*, **253**:34, (1985).
- [12] E. R. Priest. *Solar Magnetohydrodynamics*. Dordrecht: Reidel, (1982).

Capítulo IV

ESPECTRO DAS ONDAS DE ALFVÉN

IV.1 Introdução

No capítulo precedente foram introduzidas as ondas de MHD numa geometria mais simples (meio homogêneo e plano infinito) com intuito de mostrar as propriedades físicas existentes nestas ondas.

À medida que a geometria do confinamento do plasma se torna mais complexa (cilíndrica, toroidal e dipolar), gradualmente mais análises detalhadas são necessárias. Esta não homogeneidade no plasma fornece problemas interessantes tanto do ponto de vista físico quanto matemático. O que se pergunta é, o que acontece com as três ondas de MHD descritas no capítulo III, quando a homogeneidade é substituída pela inomogeneidade. O primeiro efeito da inomogeneidade é o aparecimento de duas regiões de espectros contínuos, correspondentes à existência de perturbações singulares localizadas nas superfícies magnéticas particulares.

Antes de tratar do problema espectral em MHD ideal é interessante fazer um pequeno preâmbulo sobre o desenvolvimento do problema espectral.

IV.2 Aspectos Históricos do Estudo Espectral

A história do problema espectral teve início em 1958 quando Hain-Lüst deduziram a equação da perturbação linear do plasma em “pinch” linear e difuso mostrada no capítulo II:

$$\frac{d}{dr} \left[f \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + g(r) r \xi_r = 0. \quad (\text{IV.1})$$

Aqui podemos expressar os coeficientes f e g como uma função de ω^2 além da posição r :

$$f(r; \omega^2) = \frac{(\gamma p + B^2)}{r} \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_S^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)}, \quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{aligned} rg(r; \omega^2) = & \rho(\omega^2 - \omega_A^2) - r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{4k_z^2 B_\theta^2}{r^2} \frac{V_A^2(\omega^2 - \beta_0 \omega_A^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} \\ & + r \frac{d}{dr} \left[\frac{2k_z B_\theta}{r^2} G V_A^2 \frac{(1 + \beta_0)(\omega^2 - \omega_S^2)}{(\omega^2 - \omega_I^2)(\omega^2 - \omega_{II}^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

onde

$$\omega_A^2 = \frac{F^2}{\rho}, \quad \omega_S^2 = \frac{\gamma p}{\gamma p + B^2} \frac{F^2}{\rho}, \quad (\text{IV.4})$$

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{H(\gamma p + B^2)}{2\rho} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4\gamma p F^2}{H(\gamma p + B^2)^2} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{IV.5})$$

$$\beta_0 = \frac{C_S^2}{V_A^2}. \quad (\text{IV.6})$$

Note-se que ω_A^2 e ω_S^2 são expressões semelhantes àsquelas obtidas no capítulo anterior, denominadas de modos da onda de Alfvén e da onda lenta, respectivamente.

Num plasma inhomogêneo, os perfis de ω_j^2 ($j = A, S$) variando com r são mostrados na figura (IV.1). A variação dos perfis depende, naturalmente, da inhomogeneidade do sistema, campos e densidade de plasma dependentes de r . Nota-se na figura citada que existe um certo valor de r_s , no intervalo $0 < r \leq a$, onde, localmente, uma das frequências “naturais” do sistema coincide com a

frequência da onda. Sendo assim, pode acontecer que $f(r; \omega^2) = 0$, quando $\omega^2 = \omega_A^2(r_s)$ ou $\omega^2 = \omega_S^2(r_s)$. Neste caso diz-se que a equação diferencial se torna *não-normal*, isto é, não possui um conjunto de soluções linearmente independentes com funções analíticas no espaço de domínio da equação $0 \leq r \leq a$. Esta anormalidade da equação se traduz na existência de perturbações singulares localizadas numa particular superfície magnética descrita por r_s e a posição $r = r_s$ é o ponto singular da equação diferencial. O conjunto de autovalores *impróprios* de ω_A^2 ou ω_S^2 no intervalo $0 < r \leq a$ constitui o *espectro contínuo* de Alfvén ou da onda lenta.

Inicialmente, as singularidades foram estudadas em um plasma frio por Barnston (1964)[4] e Sedláček (1971)[20], mostrando que os modos normais de fato não existem. Usando a transformada de Laplace, encontraram um amortecimento semelhante ao de Landau. Num plasma incompressível, a ligação destes resultados com a presença de um espectro contínuo, ω_A^2 , foi estabelecida por Grad (1969)[13] e por Tataronis e Grossmann (1973)[22] e por Hasegawa e Chen (1974)[14], concluindo que estes “modos” apresentam amortecimentos devido à mistura de fases.

Appert *et al.* (1974)[1] provaram que num plasma compressível existem somente duas singularidades, ω_A e ω_S , e os ω_I e ω_{II} não são singularidades, corrigindo a afirmação de Grad (1973)[12] sobre a existência de quatro singularidades na equação de Hain-Lüst. Desse modo, há duas regiões de espectros contínuos em MHD ideal: o espectro contínuo de Alfvén, $\{\omega_A^2\}$, e o contínuo da magnetossônica lenta, $\{\omega_S^2\}$.

No caso em que $f(r; \omega^2) \neq 0$ e $D \neq 0$ para $0 \leq r \leq a$, a equação de Hain-Lüst pode possuir soluções que satisfazem as condições de contorno na interface plasma-vácuo. Estas soluções são os modos normais do sistema com os valores de ω_A^2 e ω_S^2 bem definidos para os parâmetros da onda, m e k . Diz-se, então, que existe um conjunto de autovalores discretos, um subespectro de Alfvén e da onda lenta, que está localizado abaixo e acima do contínuo (Alfvén e onda lenta).

Na figura (IV.1) é mostrada a distribuição do espectro completo, $\omega^2 < 0$ e

$\omega^2 > 0$, de um *pinch* linear difuso com inhomogeneidade fraca. Ao longo deste capítulo será novamente retomada a figura para as explicações necessárias.

IV.3 Espectro Discreto em MHD Ideal

Na seção anterior falou-se sobre a existência de espectros discretos num plasma cilíndrico descrito pelas equações de MHD ideal. Pela primeira vez, Goedbloed *et al.* (1974)[11], Goedbloed (1975)[11] concluíram que as três ondas de MHD descritas no capítulo II estão separadas em cinco subespectros discretos que se acumulam nas extremidades das regiões de contínua da magnetossônica lenta $\{\omega_S^2\}$, de Alfvén $\{\omega_A^2\}$ e em $\omega^2 = \infty$ para subespectro da magnetossônica rápida. A figura (IV.1) mostra, esquematicamente, para o caso não homogêneo, a existência de subespectros $\{\omega_S^2\}$, $\{\omega_I^2\}$, $\{\omega_A^2\}$ e $\{\omega_{II}^2\}$ que não se sobrepõem.

A figura (IV.2) mostra o perfil típico de $\omega_A^2(r)$ em função do raio r para um plasma difuso com a variação da densidade $\rho(r)$ e para os modos poloidais $m = 1, 2$ e 3 . Existe um valor mínimo $(\omega_A^2)_{min}$ em $r \neq 0$ e um máximo em $r = a$. Para certos valores de ω^2 , abaixo de $(\omega_A^2)_{min}$, isto é, $\omega^2 < (\omega_A^2)_{min}$, existem automodos discretos que se estendem sobre o raio menor do plasma. Estes automodos são denominados de *Automodos Globais de Alfvén* (GAE) que foram descobertos por Appert *et al.* (1982)[2]. Eles propuseram o uso destes automodos de baixas frequências para o aquecimento dos plasmas em tokamaks. Ao mesmo tempo, estes modos discretos foram observados experimentalmente no tokamak TCA por Chambrier *et al.* (1982)[5]. Os trabalhos teóricos iniciais dos GAE foram realizados usando-se as equações de MHD ideal. Embora as frequências dos modos fossem corretamente previstas, o amortecimento e as amplitudes não eram acessíveis. Ross *et al.* (1982)[18] desenvolveram um código para um modelo cilíndrico e cinético que estipulava valores das amplitudes dos campos, impedância da antena e fator Q . O código foi utilizado posteriormente para interpretar os resultados de um interferômetro de laser nos estudos dos modos globais (Evans *et al.* (1984))[7]. Os

automodos correspondentes aos modos $m = 1, 2, 3$ são mostrados na figura (IV.3). Estes automodos mostram um perfil semelhante ao dos modos instáveis de *kink* internos. As diferenças são que, aqui, o autovalor é positivo, $\omega^2 > 0$, e m e k são de mesmo sinal. Os modos discretos para vários modos radiais, k_r , são mostrados na figura (IV.4) e a distância dos autovalores com o $(\omega_A^2)_{min}$, $\Delta\omega^2$, decresce com o aumento de k_r , isto é, $\omega^2(k_r)$ cresce monotonicamente sendo $(\omega_A^2)_{min}$ o ponto de acumulação, $k_r \rightarrow \infty$, figura (IV.5). Isto mostra que a região de automodo discreto possui a propriedade *Sturmiana*. Esta propriedade também é encontrada nos modos instáveis, $\omega^2 < 0$, [11]. Por outro lado, a região onde $\omega^2(k_r)$ decresce monotonicamente com k_r (*anti-Sturmiana*) surge para $\omega^2 > (\omega_A^2)_{max}$ e o ponto de acumulação está localizado em $(\omega_A^2)_{max}$. Estas duas regiões dependem do sinal do $f(r; \omega^2)$ da equação (IV.1), da qual uma das opções é realizada.

Do mesmo modo, podemos afirmar para os modos discretos da magnetossônica lenta, isto é, existem regiões *Sturmiana* e *anti-Sturmiana* localizadas abaixo de $(\omega_S^2)_{min}$ e acima de $(\omega_S^2)_{max}$, respectivamente.

IV.4 Espectro Contínuo

Quando o coeficiente do termo da segunda ordem na equação, isto é, $f(r_s; \omega^2)$ se anula, a equação se torna singular e admite uma solução imprópria com a frequência ω . O conjunto destas frequências constituem o espectro contínuo. Há duas regiões de contínua: uma que corresponde à relação de dispersão da onda torcional de Alfvén, $\omega_A^2(r_s)$, e a outra magnetossônica lenta, $\omega_S^2(r_s)$, apresentadas no capítulo (III). A solução da equação de autovalor é uma **solução imprópria** com divergência logarítmica no ponto singular $r_s(\omega^2)$; em outras palavras, esta solução, quando existe, é classificada como *quase-modo*.

O coeficiente f , equação (IV.2), pode ser expandido numa série de potência em torno da posição $r_s(\omega)$ para mostrar a existência de uma solução singular. A

expansão de $f(r_s; \omega)$ é

$$f(r; \omega) \approx f(r_s; \omega) + f'(r_s; \omega)(r - r_s) \quad (\text{IV.7})$$

$$\approx f'(r_s; \omega)(r - r_s) = \lambda \delta \quad (\text{IV.8})$$

onde $\delta \equiv r - r_s(\omega)$, e λ é um coeficiente constante que depende das funções de equilíbrio em $r_s(\omega)$. A equação (IV.1) se reduz a

$$\frac{d}{d\delta} \left(\delta \frac{d\chi}{d\delta} \right) + \lambda_A \chi = 0 \quad (\text{IV.9})$$

nas vizinhanças do ponto singular, onde λ_A é uma outra constante, $g(r_s)/\lambda$, e $\chi \equiv r\xi_r$.

Esta equação possui duas soluções linearmente independentes que são dadas por

$$S_1 = f_1(r; \omega) \quad (\text{IV.10})$$

$$S_2 = f_1(r; \omega) \ln(\delta) + \delta f_2(r; \omega) \quad (\text{IV.11})$$

onde $f_1(r; \omega)$ e $f_2(r; \omega)$ são funções analíticas de δ . A solução geral para $r\xi_r$, próximo a r_s , pode ser escrita na seguinte forma:

$$r\xi_r = A_1 S_1 + A_2 S_2 \quad (\text{IV.12})$$

onde $A_1(\omega; m; k)$ e $A_2(\omega; m; k)$ são funções independentes de r determinadas pelas condições de contorno em $r = 0$ e $r = a$. Assim, para um dado valor de ω^2 , a variável $r\xi_r$ possui, em geral, uma singularidade logarítmica.

Um problema surge quanto à natureza da segunda solução quando $\delta < 0$. Uma maneira óbvia é mudar a variável δ na equação (IV.9) para $\tau = -\delta$. No entanto, este procedimento não une as soluções em ambos os lados de $\delta = 0$. A continuação analítica das soluções através de $\delta = 0$ requer que para $\delta < 0$,

$$\ln \delta = \ln |\delta| \pm i\pi \quad (\text{IV.13})$$

desde que $e^{i\pi} = -1$. A contribuição imaginária à $r\xi_r$ significa que a onda é amortecida, mesmo que não tenha nenhum mecanismo explícito de amortecimento incluído nas equações de MHD ideal. Chen e Hasegawa (1974)[6] calcularam a razão da absorção de energia no contínuo de Alfvén e têm proposto a aplicação para o aquecimento dos plasmas. Esta situação foi analisada por Tataronis e Grossmann [22] e por Hasegawa e Chen [14], mostrando que estes amortecimentos dos quase-modos é devido à mistura de fase (“phase mixing”) (Grad (1969))[13]. A situação muda drasticamente quando são consideradas a resistividade e viscosidade do plasma. Estes efeitos fazem aumentar a ordem das equações diferenciais da onda e não produzem singularidades.

IV.5 Aplicação das Ondas de Alfvén em Tokamaks

Esta seção é um breve resumo sobre o presente *status* do aquecimento de plasma com ondas de Alfvén. Quando se inclui o efeito Hall na equação da lei de Ohm, a relação de dispersão da onda de Alfvén, em coordenadas cilíndricas, fica expressa como uma relação entre a velocidade local de Alfvén $V_A(r)$, a frequência de excitação ω e o número de onda paralela ao campo magnético $k_{\parallel}$:

$$\omega^2 = V_A^2(r_s) k_{\parallel}^2(r_s) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right), \quad (\text{IV.14})$$

onde r_s é a posição de ressonância de Alfvén e ω_{ci} é a frequência ciclotrônica de íons. A expressão mais geral para a velocidade de Alfvén é dada por

$$V_A = \frac{B(r)}{\sqrt{m_p \langle A \rangle n_e(r)}},$$

onde $B^2(r) = B_{\theta}^2(r) + B_z^2(r)$ é o campo magnético estático total, $n_e(r)$ é o número de elétrons no plasma, $\langle A \rangle$ é a massa atômica efetiva e m_p é a massa do próton. Como já foi discutido anteriormente, pode-se notar que a ressonância de Alfvén

existe no plasma para um intervalo contínuo de frequência ou número de ondas o qual é referido como continuum de Alfvén. O mínimo de frequência, cuja camada ressonante de Alfvén aparece no plasma, é referido como frequência limiar do continuum. Mantendo a frequência constante, pode-se definir uma correspondente densidade. A frequência máxima em que o aquecimento por meio da onda de Alfvén seja possível de ocorrer para uma densidade de plasma menor ou para frequência ciclotrônica de íon mais baixa, aparece indicada na expressão (IV.14).

Uma maneira de aquecer o plasma com as ondas de Alfvén é usar um conjunto de antenas externas para excitar um automodo (tipicamente o primeiro modo radial) da onda magnetossônica rápida. Esta onda pode então sofrer três tipos de interações, que dependem da temperatura do plasma.

(a) Se $\omega \ll k_{\parallel} v_{Te}$, onde v_{Te} é a velocidade térmica dos elétrons, a onda rápida é modo-convertida para uma onda cinética de Alfvén na vizinhança da camada ressonante de Alfvén. A onda de Alfvén cinética então se propaga para o interior do plasma e é amortecida via amortecimento linear de Landau nos elétrons.

(b) Se $\omega \approx k_{\parallel} v_{Te}$, a onda rápida é amortecida pelos elétrons na ressonância pela interação de Cherenkov e pela resistividade do plasma.

(c) Se $\omega \gg k_{\parallel} v_{Te}$, a onda rápida é modo-convertida para uma onda superficial quase-eletrostática na vizinhança da camada ressonante de Alfvén. Esta onda, posteriormente, propaga-se em direção da camada externa do plasma, onde é fracamente amortecida pela resistividade do plasma. Em todos estes casos, o aquecimento do plasma é localizado.

O aquecimento por onda de Alfvén tem uma importante propriedade: no limite de plasma frio, a antena é independente do mecanismo de amortecimento das ondas de Alfvén localizadas ao redor da camada ressonante. No caso mais geral, onde os efeitos cinéticos são incluídos, a onda cinética de Alfvén é amortecida antes de retornar à camada ressonante de Alfvén depois de refletir no centro da coluna de plasma. Esta condição seria encontrada em tokamaks, como NET, para camadas

ressonantes de Alfvén nos raios maiores do que um quinto do raio menor do plasma.

Para $m \neq 0$, o primeiro modo radial da onda magnetossônica é uma onda superficial que se propaga nas baixas frequências. Para $m = 0$ e os modos radiais mais altos, a onda magnetossônica é uma onda que se comporta como aquela em cavidade ressonante. Em pequenos tokamaks, esta ressonância está normalmente acima da frequência ciclotrônica do íon e não é útil para aquecimento por ondas de Alfvén. Neste caso, o aquecimento é somente possível por meio da onda superficial. Em grandes tokamaks, tal como em NET, a ressonância magnetossônica é possível bem abaixo da frequência ciclotrônica do íon e oferece um meio muito eficiente para o aquecimento por ondas de Alfvén.

Aquecimento por onda de Alfvén pode também ser realizado se a antena é usada para excitar uma ressonância do automodo global da onda de Alfvén, ou na onda ciclotrônica do íon, referido como onda discreta de Alfvén (“DAW”). Esta ressonância sempre ocorre numa frequência abaixo do limiar do contínuo tal que sua energia é dissipada diretamente via amortecimento de Landau dos elétrons e “transit time magnetic pumping”. Neste caso, o aquecimento de plasma resultante tem um caráter global. Quando $\omega \ll \omega_{ci}$, a onda discreta de Alfvén pode existir por causa da presença de uma corrente finita de plasma. Num plasma frio, há uma série de modos discretos devido aos vários modos radiais para um dado (m, k) . Num plasma quente, estas ressonâncias correspondem a ondas cinéticas estacionárias.

No plasma solar há evidências da existência das oscilações globais inclusive com frequências coincidentes com as da onda discreta de Alfvén (Pasachof(1990)) [17]. Estas oscilações devem estar associadas às ondas discretas de Alfvén. Aplicações destes conceitos foram feitas no estudo das oscilações de proeminências arciformes no Sol (Azevedo *et al.* (1991) e Tese de Doutorado de Azevedo (1991)) [3,4].

Embora, aparentemente, o problema do aquecimento por ondas de Alfvén pareça solucionado, restam ainda muitas dúvidas que devem ser esclarecidas.

Figura IV.1: Figura esquemática do espectro de um plasma magnetizado com fraca heterogeneidade. As marcas (x) são os pontos de autovalores discretos de ω^2 com m e k_z fixos, mas variando nos modos radiais.

Figura IV.2: Curva da função $\omega_A^2(r)$ para $m = 1, 2, 3$, considerando densidade $\rho(r)$ não uniforme.

Figura IV.3: Perfil de automodos de um “pinch” linear difuso com os modos poloidais m crescentes dos modos discretos de Alfvén.

Figura IV.4: Perfil de autofunção radial para $m = 1$ com os modos radiais k_r crescentes.

Figura IV.5: Variação da distância entre $(\omega_A^2)_{min}$ com os autovalores em função dos modos radiais k_r . Observa-se a tendência de os autovalores convergirem no mínimo de ω_A^2 .

Bibliografia

- [1] K. Appert, B. Balet, R. Gruber, F. Troyon, e J. Vaclavik. Continuous spectra of a cylindrical magnetohydrodynamic equilibrium. *Phys. Fluids*, **17**:1471, (1974).
- [2] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon, e J. Vaclavik. Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in tokamaks. *Plasma Phys.*, **24**:1147, (1982).
- [3] C. A. de Azevedo, A. S. de Assis, H. Shigueoka, e P. H. Sakanaka. Discrete Alfvén waves in solar loop prominences. *Solar Physics*, **131**:119, (1991).
- [4] E. M. Barnston. Electrostatic oscillations in inhomogeneous cold plasmas. *Ann. Phys.*, **29**:282, (1964).
- [5] A. de Chambrier, A. D. Cheetham, A. Heym, F. Hofman, B. Joye, R. Keller, A. Lietti, J. B. Lister, e A. Pochelon. Alfvén wave coupling experiments on the TCA tokamak. *Plasma Phys.*, **24**:893, (1982).
- [6] L. Chen e A. Hasegawa. Plasma heating by spatial resonance of Alfvén wave. *Phys. Fluids*, **17**:1399, (1974).
- [7] T. E. Evans, P. M. Valanju, J. F. Bensch, R. D. Bengtson, Y.-M. Li, S. M. Mahajan, M. E. Oakes, D. W. Ross, X.-Z. Wang, e J. G. Watkins. Direct observation of the structure of global Alfvén eigenmode in a tokamak plasma. *Phys. Rev. Letters*, **53**:1743, (1984).

- [8] J. P. Freidberg. *Phys. Fluids*, **13**:1812, (1970).
- [9] J. P. Goedbloed. Spectrum of ideal magnetohydrodynamics of axysymmetric toroidal systems. *Phys. Fluids*, **18**:1258, (1975).
- [10] J. P. Goedbloed e H. J. L. Hagebeuk. Growth rates of instabilities of a diffuse linear pinch. *Phys. Fluids*, **15**:1090, (1972).
- [11] J. P. Goedbloed e P. H. Sakanaka. New approach to magnetohydrodynamic stability: I. A practical stability concept. *Phys. Fluids*, **17**:908, (1974).
- [12] H. Grad. Magnetofluid-dynamic spectrum and low shear stability. *Proc. Natl Acad. Sci., USA*, **70**:3277, (1973).
- [13] H. Grad. Plasmas. *Phys. Today*, **22**:34, (Dec., 1969).
- [14] A. Hasegawa e L. Chen. Plasma heating by Alfvén wave phase mixing. *Phys. Rev Letters*, **32**:454, (1974).
- [15] W. A. Newcomb. Hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **10**:232, (1960).
- [16] J. M. Pasachoff. *Heidelberg Conference on Mechanisms of Chromospheric and Coronal Heating*. Heidelberg: Germany (1990).
- [17] D. C. Robinson. High- β diffuse pinch configurations. *Plasma Phys.*, **13**:439, (1971).
- [18] D. W. Ross, G. L. Chen, e S. M. Mahalajan. Kinetic description of Alfvén wave heating. *Phys. Fluids*, **25**:652, (1982).
- [19] P.H. Sakanaka e J.P. Goedbloed. New approach to magnetohydrodynamic stability: II. Sigma-stable diffuse pinch configurations. *Phys. Fluids*, **17**:918, (1974).

- [20] Z. Sedláček. Electrostatic oscillations in cold inhomogeneous plasma. *J. Plasma Phys.*, **5**:239, (1971).
- [21] B. R. Suydam. Stability of a linear pinch. *Proc. Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, **31**:157, (1958).
- [22] J. Tataronis e W. Grossmann. Decay of MHD waves by phase mixing. *Z. Physik*, **261**:203, (1973).

Capítulo V

ESTUDO ANALÍTICO DOS MODOS DISCRETOS

V.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os modos discretos de Alfvén por meio de uma solução analítica que resulta em uma função de Bessel. Foi obtida uma expressão explícita de autovalor ω^2 que apresenta a natureza Sturmiana. A técnica de “WKB” foi também utilizada para obter a relação de dispersão para estes modos. É mostrado que o gradiente da corrente de equilíbrio é responsável por estes modos.

V.2 Os Modos Discretos

Nesta seção é mostrada uma solução analítica para os modos discretos de Alfvén. A equação de equilíbrio (II.28) pode ser reescrita na forma,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \mu(r) B_z - \frac{B_\theta}{B_\theta^2 + B_z^2} \frac{dp}{dr}, \quad (\text{V.1})$$

$$\frac{dB_z}{dr} = -\mu(r) B_\theta - \frac{B_z}{B_\theta^2 + B_z^2} \frac{dp}{dr}, \quad (\text{V.2})$$

onde $\mu(r)$ representa o coeficiente da equação $\nabla \times \vec{B} = \mu(r) \vec{B}$ tal que $\mu(r) = \vec{J} \cdot \vec{B} / B^2$. No caso em que $p'(r) = 0$, o equilíbrio é uma *força livre* e $\nabla \times \vec{B}$ é

paralelo a $\vec{B}$.

Para a realização de cálculos analíticos, adotam-se os seguintes perfis para $p(r)$ e $\mu(r)$:

$$p(r) = p_0(1 - p_2r^2 - p_4r^4 - p_6r^6)^{\alpha_p} = p_0 + p_1r^2 + \dots \quad (\text{V.3})$$

$$\mu(r) = \mu_0(1 - a_2r^2 - a_4r^4 - a_6r^6)^{\alpha} = \mu_0 + \mu_1r^2 + \dots \quad (\text{V.4})$$

onde $p_1 = -\alpha_p p_0 p_2$ e $\mu_1 = -\alpha \mu_0 a_2$. Os coeficientes b_0 , b_1 e B_{z1} que fornecem os perfis dos campos magnéticos,

$$b(r) = \frac{B_\theta}{r} = b_0 + b_1r^2 + \dots, \quad (\text{V.5})$$

$$B_z(r) = 1 + B_{z1}r^2 + \dots, \quad (\text{V.6})$$

são obtidos substituindo as equações acima nas expressões (V.1, V.2):

$$b_0 = \frac{\mu_0}{2}, \quad b_1 = -\frac{\mu_0}{4}(\alpha a_2 + \frac{\mu_0^2}{4} - 2\alpha_p p_0 p_2) \quad (\text{V.7})$$

$$B_{z1} = -\frac{\mu_0^2}{4} + \alpha_p p_0 p_2. \quad (\text{V.8})$$

Considerando agora um caso limite onde ω^2 é pequeno, $k_z \ll 1/a$, $p' \ll \mu_0 B_0/2$ e um perfil de $\rho(r)$ tal que

$$\omega_A^2 = \frac{F^2}{\rho} \cong \text{const}, \quad (\text{V.9})$$

onde F^2 é dada em (II.33), nesta aproximação, os coeficientes da equação de Hain-Lüst, definidos em (II.39), são escritos como

$$f(r) \cong -\frac{r(\omega^2 - \omega_A^2)}{m^2} \bar{\rho}, \quad (\text{V.10})$$

$$rg(r) \cong (\omega^2 - \omega_A^2 - C + \frac{T}{m^2}) \bar{\rho}, \quad (\text{V.11})$$

$$C = \frac{r}{\bar{\rho}} \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2, \quad (\text{V.12})$$

$$T = \frac{4k_z^2 r^2}{\bar{\rho}} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2, \quad (\text{V.13})$$

onde $\bar{\rho}$ é um valor médio de $\rho(r)$.

Considerando que $T \rightarrow 0$, e usando o equilíbrio apresentado, o coeficiente C pode ser escrito na forma:

$$-C = h^2 r^2 = \frac{\mu_0^2}{2\rho} \left[\alpha a_2 + \frac{\mu_0^2}{4} - 2\alpha_p p_0 p_2 \right] r^2. \quad (\text{V.14})$$

Finalmente, a equação de Hain-Lüst é escrita como

$$r \frac{d}{dr} r (\omega^2 - \omega_A^2) \frac{d}{dr} (r \xi_r) + [-h m^2 r^2 - m^2 (\omega^2 - \omega_A^2)] r \xi_r = 0 \quad (\text{V.15})$$

ou

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} (r \xi_r) + r \frac{d}{dr} (r \xi_r) + [\lambda^2 r^2 - m^2] r \xi_r = 0, \quad (\text{V.16})$$

onde $\lambda^2 = -h^2 m^2 / (\omega^2 - \omega_A^2)$. Esta é a equação diferencial de Bessel de ordem m cuja solução é dada pela função de Bessel de primeira espécie,

$$r \xi_r = J_m(\lambda r) \quad (\text{V.17})$$

para $\omega^2 < \omega_A^2$. Se o plasma está limitado por uma parede condutora em $r = a$ então $a \xi_r(a) = 0$ e os autovalores são os zeros, $p_{m\nu}$, da função de Bessel, isto é,

$$\lambda a = p_{m\nu}; \quad m, \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{V.18})$$

A solução com $\nu = 1$ é denominada primeiro modo radial e a autofunção correspondente não apresenta zeros no intervalo $0 < r < a$. Outras soluções representam os modos radiais tendo $(\nu - 1)$ no intervalo $r = 0$ até a parede.

Obtem-se, então, uma expressão para os autovalores

$$\omega^2 = \omega_A^2 - \frac{h^2 m^2}{p_{m\nu}^2}. \quad (\text{V.19})$$

A diferença do autovalor para a frequência de Alfvén é dada como

$$\Delta \omega^2 = -\frac{h^2 m^2}{p_{m\nu}^2}. \quad (\text{V.20})$$

A seguinte tabela apresenta as raízes para cada ordem m da função de Bessel:

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$\nu = 1$	3,83171	5,13562	6,38016
$\nu = 2$	7,01559	8,41724	9,76102
$\nu = 3$	10,17346	11,61984	13,01520

Tabela V.1 - Zeros da função de Bessel, $p_{m\nu}$, de ordem $m = 1, 2$ e 3 .

Uma simples dedução do valor de ω^2 pode ser obtida a partir dos seguintes parâmetros:

$$m = 1, k = 0,1, p_0 = 0,02, \alpha = 1, \rho_0 = 1, \quad (V.21)$$

$$\alpha_p = 1, a_2 = 1, p_2 = 1, q_0 = 1, \mu_0 = 0,4 \quad (V.22)$$

onde $h = 0,02006$ é obtido e o valor do autovalor resulta em $\omega^2 = 0,03837$.

Esta solução de maneira simples, porém matematicamente precisa, mostra pela primeira vez uma dedução analítica dos modos discretos de Alfvén. A solução encontrada em (V.19) mostra a natureza dos modos globais discretos de Alfvén cujos autovalores estão na região estável do espectro e são Sturmianas (autovalores crescem com o aumento dos modos radiais).

No ramo instável do espectro, $\omega^2 < 0$, obtemos o seguinte: utilizando-se os parâmetros m e k de sinais contrários, tal que, $F = 0$, isto é, $\omega_A^2 = 0$. Neste caso, a solução acima fornece

$$\omega^2 = -\frac{h^2 m^2}{p_{m\nu}^2}. \quad (V.23)$$

Os autovalores, ω^2 , são negativos e crescem se os zeros da função de Bessel aumentam. Estes valores são os autovalores instáveis, isto é, ω é complexo, que podem ser interpretados fisicamente pelo fato de que as ondas de Alfvén não se propagam perpendicularmente ao campo, $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$, e, conseqüentemente, não há meio de trocar informações através do campo e assim não há nenhum movimento coletivo: **não há onda**. Soluções numéricas foram realizadas para o estudo das instabilidades em plasma cilíndrico (Sakanaka e Goedbloed (1974))[7] e com correções toroidais sem os acoplamentos dos modos poloidais (Galvão *et al* (1978))[3].

Das expressões (II.37) e (II.38), obtém-se as outras componentes de $\vec{\xi}$, nas direções paralelas e perpendiculares ao campo magnético,

$$\xi_{\parallel} \cong \gamma p_0 \mu_0 (r \xi_r)' \ll |\xi_r| \quad (\text{V.24})$$

e

$$\xi_{\perp} \cong -\frac{1}{m} (r \xi_r)' = -\frac{1}{2m} [J_{m-1}(\lambda r) - J_{m+1}(\lambda r)]. \quad (\text{V.25})$$

Deste resultado vemos que as perturbações são essencialmente transversais com um pequeno componente longitudinal proporcional à pressão cinética (p_0) e à corrente de plasma (μ_0). Observa-se também que, embora $\xi_{\parallel}$ seja pequena, ela sempre existe, pois a existência deste modo discreto requer que haja corrente de plasma.

Na tabela (V.2) são apresentadas as diferenças dos autovalores para a frequência de Alfvén calculadas analiticamente, usando a equação (V.21), e das diferenças obtidas numericamente. Os autovalores obtidos por meio destes dois métodos são apresentados na tabela (V.3). Verifica-se uma boa concordância entre estes dois resultados.

ν	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$	
	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.
1	0,003269	0,003942	0,007280	0,008710	0,010613	0,012964
2	0,000975	0,001158	0,002710	0,003233	0,004534	0,005550
3	0,000464	0,000550	0,001422	0,001695	0,002550	0,003125

Tabela V.2 - Autovalores calculados analiticamente ($h^2 m^2 / p_{m\nu}^2$) e numericamente ($\omega_A^2 - \omega_{DAW}^2$).

ν	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$	
	Anal.	Num.	Anal.	Num.	Anal.	Num.
1	0,156731	0,156058	0,352720	0,351290	0,629387	0,627035
2	0,159025	0,158840	0,357290	0,356770	0,635466	0,634449
3	0,159536	0,159450	0,358578	0,358305	0,637450	0,636875

Tabela V.3 - Autovalores calculados analiticamente e numericamente para os modos $m = 1, 2$ e 3 .

V.3 Análise por “WKB”

Nesta seção é mostrada uma outra dedução do modo de Alfvén discreto usando agora uma análise “WKB”. Considerando que a densidade do plasma varia com o raio e a densidade da corrente é relativamente pequena, tal que, $(B_\theta/B_z)^2 \sim \epsilon \ll 1$, isto é, o “twist” é pequeno, e a pressão do plasma é desprezível (baixo β), e o campo $B_z = \text{constante}$.

Supondo que a variação do modo pode ser escrita

$$r\xi_r = h_r e^{(ik_r r)}, \quad (\text{V.26})$$

isto é, adotando a aproximação $\partial/\partial r \approx ik_r$, a equação de Hain-Lüst pode ser aproximada quando $k_r^2 l^2 \gg 1$. Aqui, l é o comprimento característica da não homogeneidade, na dimensão do raio.

A relação acima fornece a equação de dispersão local relacionando ω^2 e o número de onda radial local. Expandindo a relação de dispersão até a primeira ordem em ϵ , obtém-se a seguinte relação de dispersão:

$$[\omega^2 - \omega_{MSW}^2][\omega^2 - \omega_{DAW}^2][\omega^2 - \omega_{HLW}^2] = 0 \quad (\text{V.27})$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_{MSW}^2 &= k_T^2 V_A^2 + s + e, \quad \omega_{DAW}^2 = k_{\parallel}^2 V_A^2 - e, \\ \omega_{HLW}^2 &= H V_A^2 - s, \quad H = \frac{m^2}{r^2} + k_z^2 \cong \frac{m^2}{r^2}, \\ k_{\parallel}^2 V_A^2 &= \frac{F^2}{\rho} = \frac{[mb(r) + k_z B_z]^2}{\rho}, \quad s = 4k_z b m \frac{B_z}{r^2 k_r^2 \rho}, \\ e &= \frac{[4k_z^2 b^2 - 2k_z(b'/r)mB_z - Hr(b^2)']}{k_T^2 \rho}, \\ B^2 &= B_z^2 + B_\theta^2, \quad V_A^2 = \frac{B^2}{\rho}, \\ k_T^2 &= H + k_r^2, \quad b = \frac{B_\theta}{r}, \end{aligned}$$

onde a plica indica a derivada em relação a r , $k_{\parallel}$ é a componente do vetor de onda paralela ao campo magnético. Esta relação de dispersão é mais completa do que aquela publicada por Appert *et al.* (1982)[1]. A dependência em r é eliminada ao colocar r por um raio efetivo r_{ef} . Este raio efetivo é estimado ser da ordem de $0.1a$ a $0.2a$, deduzida dos resultados mais completos feitos pelo esquema apresentado na seção V.2.

Na equação acima, há três automodos. O primeiro, ω_{MSW}^2 , representa o magnetossônico, o segundo, ω_{DAW}^2 , a onda discreta de Alfvén, e o último, ω_{HLW}^2 , a onda helicoidal, ainda em análise incompleta.

Usando o perfil de corrente com $J_z(r) = J_0(1 - r^2/a^2)^{\alpha_j}$ e usando a lei de Ampère, obtém-se $b(r)$. Por sua vez, considerando $k_z = n/R$, $R = L/2\pi$, onde L é o comprimento do cilindro, pode-se expressar a frequência discreta de Alfvén em termos das quantidades conhecidas em $r = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_{DAW}^2 = & k_{\parallel}^2 V_{A0}^2 - \left[nmq_0\alpha_j(m^2 + k_r^2 r^2) + m^2\alpha_j \left(1 + \frac{nq_0}{m}\right) \right. \\ & \left. + 2n^2 \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] \frac{2}{(k_T a)^2} \left(\frac{V_{A0}}{q_0 R}\right)^2, \end{aligned} \quad (V.28)$$

onde α_j representa a forma do perfil de corrente, $(a/q_0 R)^2 \cong (B_{\theta 0}/B_{z0})$ representa o "twist" e q_0 a corrente do plasma através da relação

$$I_p = \frac{\pi a^2 J_0}{\alpha_j + 1} = \frac{2\pi a^2}{\alpha_j + 1} \frac{B_0}{q_0 R}. \quad (V.29)$$

Percebe-se na equação (V.28) que a autofrequência está deslocada para baixo da frequência de Alfvén de cisalhamento por uma quantidade da ordem de ϵ . Considerando que os últimos dois termos desta equação são da ordem mais alta, podemos dizer que o deslocamento de frequência é proporcional a n , α_j , V_A^2 , e $1/R^2$. Também a dependência com m e q_0 é evidente. O valor de k_r é desconhecido; no entanto uma boa escolha é aquela que seria da ordem de $1/r_{ef}$.

O termo dominante da equação (V.28) vem do termo (V.12), o mesmo que deu origem ao autovalor (V.19), portanto as expressões (V.28) e (V.19) são essencial-

mente iguais. A diferença entre estas duas está no fato de que na análise “WKB” deve-se estimar o valor de k_r que é indeterminado.

V.4 Análise Numérica do DAW

Nesta seção são apresentados, antecipadamente, alguns resultados obtidos através de métodos numéricos que serão descritos no capítulo VI. Dois perfis podem ser escolhidos arbitrariamente para resolver a equação de Hain-Lüst. Escolhe-se o perfil da pressão dado por $p(r) = p_0 \exp(\alpha_{p2}r^2 + \alpha_{p4}r^4)$, onde p_0 , α_{p2} e α_{p4} são constantes e o de B_θ obtido resolvendo a equação da lei de Ampère para um dado perfil de J_z . Considerando a densidade de corrente $J_z(r) = J_0 \{1 - r^2\}^{\alpha_j}$ onde α_j é um parâmetro livre que determina a forma do perfil da corrente. Outro perfil escolhido arbitrariamente, que não depende do equilíbrio, é a densidade de massa dado na forma parabólica, $\rho(r) = \rho_0 \{1 - \alpha_p r^2\}$. A constante $\alpha_p \neq 1$ determina o valor de ρ na superfície da coluna de plasma. Como consequência da inhomogeneidade devido à densidade, temos um espectro contínuo da onda de Alfvén além do espectro discreto. A resolução numérica é utilizada para obter o autovalor ω^2 que satisfaça a condição de contorno fixo. Escolhendo os seguintes parâmetros: $B_{z0} = 1$, $\rho_0 = 1$, $\alpha_{p2} = -4$, $\alpha_{p4} = -6$, $\alpha_p = 0.95$, obtém-se os resultados indicados na figura (V.1), que mostra a distância $\Delta\omega^2 = \omega_{DAW}^2 - \omega_{A0}^2$, onde $\omega_{A0}^2 = k_{||}^2 V_{A0}^2$, como uma função para diferentes valores da constante α_j . Nesta figura fica evidente a dependência analisada na seção anterior. Verifica-se também que os modos discretos de Alfvén somente aparecem para α_j maior do que 2. Isto significa que a densidade de corrente deve ter uma variação muito acentuada para se observar os modos discretos de Alfvén. Para α_j menor do que 2, este modo aparece na região do contínuo de Alfvén, isto é, não se obtém mais os modos discretos.

Figura V.1: Distância entre o autovalor discreto de Alfvén e o valor mínimo do contínuo de Alfvén $\Delta\omega^2 = \omega_{DAW}^2 - \omega_{A0}^2$ versus α_j . Os seguintes parâmetros foram utilizados para cada curva:

- (1) $R = 5, m = 1, n = 2, q_0 = 1, B_{z0} = 2$;
- (2) $R = 5, m = 2, n = 2, q_0 = 1, B_{z0} = 1$;
- (3) $R = 5, m = 1, n = 2, q_0 = 1, B_{z0} = 1$;
- (4) $R = 5, m = 1, n = 1, q_0 = 1, B_{z0} = 1$;
- (5) $R = 5, m = 1, n = 2, q_0 = 2, B_{z0} = 1(*)$;
- (6) $R = 10, m = 1, n = 2, q_0 = 1, B_{z0} = 1(- - -)$

Bibliografia

- [1] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon, e J. Vaclavik. Excitation of global eigenmodes of the Alfvén wave in tokamaks. *Plasma Phys.*, **24**:1147, (1982).
- [2] A. de Chambrier, A. D. Cheetham, A. Heym, F. Hofman, B. Joye, R. Keller, A. Lietti, J. B. Lister, e A. Pochelon. Alfvén wave coupling experiments on the TCA tokamak. *Plasma Phys.*, **24**:893, (1982).
- [3] R. M. O. Galvão, P. H. Sakanaka e H. Shigueoka. Influence of toroidal effects on the stability of the internal kink mode. *Phys. Rev. Lett.*, **41**:870, (1978).
- [4] J. P. Goedbloed. Spectrum of ideal magnetohydrodynamics of axysymmetric toroidal systems. *Phys. Fluids*, **18**:1258, (1975).
- [5] H. Grad. Magnetofluid-dynamic spectrum and low shear stability. *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, **70**:3277, (1973).
- [6] D. W. Ross, G. L. Chen, e S. M. Mahalajan. Kinetic description of Alfvén wave heating. *Phys. Fluids*, **25**:652, (1982).
- [7] P. H. Sakanaka e J. P. Goedbloed. New approach to magnetohydrodynamic stability: II. Sigma-stable diffuse pinch configurations. *Phys. Fluids*, **17**:918, (1974).

Capítulo VI

RESULTADOS NUMÉRICOS DAS ONDAS DISCRETAS DE ALFVÉN

VI.1 Introdução

Neste capítulo trata-se de algumas aplicações para os modelos de confinamento de plasma aplicados à fusão termonuclear controlada: Tokamak e RFP (“Reversed Field Pinch”). Uma outra aplicação, não menos importante, é na física solar (fotosfera) onde o plasma possui $\beta > 1$. Os resultados são obtidos numericamente utilizando o método de tiro ao alvo descrito na próxima seção.

VI.2 O Método Numérico

A equação de Hain-Lüst é semelhante à equação de Sturm-Liouville, mas é mais complexa pela maneira como o parâmetro ω^2 aparece nos coeficientes da equação. Goedbloed e Sakanaka (1974) [2] têm mostrado que a equação satisfaz ao teorema de oscilações (Ince (1956))[4] para o problema de autovalor. Para os valores fixos de m e k , este teorema de oscilação supõe que o autovalor decresça monotonicamente quando o número de modos radiais decresce (número de vezes com que a autofunção se torna nula no intervalo $0 < r \leq a$). Este comportamento

foi utilizado para desenvolver o *método de tiro ao alvo* para a determinação de autovalores para a equação de Hain-Lüst.

O objetivo é determinar soluções fundamentais do sistema de equações que satisfaçam as condições de contorno descritas no capítulo II. Os seguintes passos são realizados para o procedimento numérico:

(a) Uma solução analítica em torno de $r \approx 0$ é obtida através da expansão das funções de equilíbrio e, por sua vez, dos coeficientes da equação de Hain-Lüst em termos de uma função polinomial até a quarta ordem;

(b) Esta solução analítica é regular em $r = 0$ e mostra que as autofunções são $\xi_r(0) \neq 0$ para $m = 1$ e $\xi_r(0) = 0$ para $m \neq 1$ e as suas derivadas são $\xi'_r(0) = 0$ e $\xi'_r(0) \neq 0$ para $m = 1$ e $m \neq 1$, respectivamente;

(c) A equação é resolvida numericamente usando um algoritmo apropriado, tipo Runge-Kutta generalizado;

(d) Um valor inicial de ω^2 é escolhido e a equação é resolvida até $r = a$. Se a solução $\xi_r(a)$ satisfaz as condições de contorno, termina aqui o cálculo, se não, varia-se ω^2 até que a condição de contorno em $r = a$ seja satisfeita, tanto para a condição de contorno fixo como livre. Assim se obtém o autovalor ω^2 e sua correspondente autofunção ξ_r .

Este método numérico é capaz de resolver muito bem na região discreta do espectro de MHD, para quaisquer valores de β e de corrente. Através deste método podemos estudar a variação dos autovalores com os perfis da corrente e com os parâmetros da onda. Este método pode também ser utilizado para resolver a equação na região do contínuo, tomando cuidados especiais nas singularidades. Exemplo deste cálculo já foi mostrado na seção IV.4.

VI.3 Aplicações à Tokamak

Para resolver a equação de equilíbrio escolhe-se, arbitrariamente, dois perfis: a pressão cinética do plasma, $p(r)$, e o campo magnético B_θ . A função de pressão

é dada por $p(r) = p_0 \exp[\alpha_{p2}(r/a)^2 + \alpha_{p4}(r/a)^4]$, onde p_0 é o valor da pressão em $r = 0$ que depende da escolha do parâmetro β do plasma, e α_{p2} e α_{p4} são constantes arbitrárias que determinam a forma do perfil desejado. A função de B_θ é obtida resolvendo-se a equação de Ampère para um dado perfil da densidade de corrente do componente z , J_z . Considera-se $J_z(r) = J_0 [1 - (r/a)^2]^{\alpha_j}$ onde J_0 e α_j são parâmetros livres. A densidade de massa é escolhida na forma parabólica $\rho(r) = \rho_0 [1 - \alpha_\rho (r/a)^2]$, onde α_ρ mede quanto a densidade varia do centro da coluna até a superfície do plasma. Considerando $k_z = 0,606$, os seguintes parâmetros típicos para o equilíbrio de um tokamak são utilizados: $B_{z0} = 1$, $\rho_0 = 1$, $\alpha_{p2} = -4$, $\alpha_{p4} = -6$, $\alpha_j = 4$, $a = 1$, $\alpha_\rho = 0,95$ e $p_0 = 0,05$ para $\beta = 0,01$. Na figura (IV.2) é mostrada a variação da função $\omega_A^2(r)$ para $m = 1, 2$ e 3 . Observamos que o máximo está localizado em $r = a$ devido ao fato da diminuição de $\rho(r)$ na borda do plasma. Existe um mínimo na função localizado em $r = 0,43; 0,58; 0,66$ para $m = 1, 2$ e 3 , respectivamente. O valor do mínimo tende a se localizar próximo do máximo da função de $B_\theta(r)$ à medida que m cresce. Nestas posições também se localizam os picos das autofunções para $m = 2$ e 3 , mostrados na figura (IV.3).

O sinal de m determina a direção de rotação dos campos da onda. Numa dada posição de z , o sentido global de rotação depende do sinal de m , considerando-se rotação $\exp[im\theta - i\omega t]$. O campo da onda gira e está localizado no ângulo $\theta = \omega t/m$. Consequentemente, os modos $m > 0$ giram na direção positiva de θ , isto é, no mesmo sentido dos elétrons, e sua polarização é à direita, e os modos $m < 0$ no sentido dos íons.

A polarização do campo da onda depende não somente do sinal de m , mas também da posição no plasma. O sinal de m determina a direção de rotação dos campos da onda, isto é, a polarização varia com o raio e reverte do sinal ao longo do raio. Nos perfis de $iQ_r(r)$, Q_θ (ou $Q_\perp(r)$) mostrados na figura (VI.1), o sentido local da polarização muda quando a razão iQ_r/Q_θ muda de sinal, sendo a polarização à direita quando esta razão é positiva. O campo Q_r está 90° fora de

fase em relação a Q_θ .

O modo discreto de Alfvén para $m = 1$ e $k_r = 0$ está representado na figura (VI.1) pelos perfis dos componentes do vetor do campo magnético perturbado $\vec{Q}$. Observa-se que, em $r < 0,4$, este modo possui a polarização à direita e, em $r > 0,4$, ela muda para a esquerda. Este modo é excluído na região mais externa do plasma.

Na mesma figura, verifica-se que o modo global discreto de Alfvén possui uma pequena contribuição compressional, $Q_\parallel \sim 0$, como fora anteriormente apresentado nos resultados analíticos na seção V.2. Mostra, ainda, que as perturbações transversais na região mais interna estão dirigidas para o sentido contrário ($-e_\perp$) da usual orientação das coordenadas ($e_r, e_\perp, e_\parallel$) e no sentido $+e_\perp$ em $r > 0,4$ na coluna de plasma.

Na figura (VI.2), por sua vez, são apresentados os três componentes do vetor de Poynting. Primeiramente, verifica-se que a densidade de energia é insignificante na borda do plasma, pois esta densidade de energia nos campos da onda decresce com $1/r^4$. Segundo, a energia se propaga preferencialmente ao longo do campo magnético estático total e não em direção à borda. Este comportamento é característico de uma onda discreta de Alfvén que possui natureza transversal. Como esta onda tem um pequeno componente $Q_\parallel$, uma pequena parte da energia se propagará através das linhas de campo estático, como mostra a figura.

No caso de $m = 2$, os vetores $\vec{Q}$ e $\vec{S}$ são mostrados nas figuras (VI.3) e (VI.4), respectivamente.

Com estas soluções numéricas, pretendeu-se mostrar as propriedades dos modos globais discretos de Alfvén.

Utilizando as equações com correções toroidais [1], foram calculados os modos discretos das configurações toroidais, TCA e NET (Shigueoka *et al.* (1991))[3].

VI.4 Efeito de β ($\beta > 1$)

Este efeito se traduz no fato de que $C_S > V_A$, caso analisado no capítulo (III) quando foram introduzidas as ondas magnetossônicas. É definida a quantidade β como sendo a razão entre a pressão cinética do plasma com a pressão magnética. Esta quantidade pode ainda ser relacionada em termos das velocidades de fase do som e de Alfvén,

$$\beta = 2 \frac{p}{B^2} = \frac{2 C_S^2}{\gamma V_A^2} \cong \frac{C_S^2}{V_A^2}, \quad (\text{VI.1})$$

pois $\gamma = 5/3 \cong 2$.

Neste estudo utilizamos os seguintes parâmetros:

$$\beta = 2, \quad m = 1, \quad B_{z0} = 1, \quad J_0 = 0,9, \quad (\text{VI.2})$$

$$\alpha_j = 2, \quad k_z = 0,606, \quad \alpha_\rho = 0,95. \quad (\text{VI.3})$$

Os perfis das funções $\omega_A^2(r)$ e $\omega_S^2(r)$ são mostrados na figura (VI.5), onde é evidente a superposição da região contínua da onda lenta com a de Alfvén. Isto resulta em não normalidade da equação de Hain-Lüst para valores de $\omega^2 < \omega_{Amin}^2 (= 0,7253)$, que está na região contínua da onda lenta; portanto, existe uma ressonância de uma frequência da onda, com natureza transversal, na região do contínuo da onda lenta. Por outro lado, existem os modos discretos da onda lenta para $\omega^2 < \omega_{Smin}^2 (= 0,4642)$. O primeiro *modo global discreto da onda lenta* com $m = 1$ e $k_r = 0$, obtido a partir deste equilíbrio, possui um autovalor $\omega^2 = 0,4594$ e sua autofunção com característica global, semelhante ao modo discreto de Alfvén, figura (VI.6).

A natureza compressional é evidente na figura (VI.7), que mostra a compressão das linhas de campo magnético paralelo ao campo de equilíbrio. A onda possui, para este caso, polarização à direita sem mudança ao longo da coluna de plasma e a sua propagação aparece nas direções transversais, e_r e $e_\perp$, com pouca contribuição na direção paralela ao campo de equilíbrio, figura (VI.8). Esta pequena contribuição é o efeito da onda de Alfvén transversal.

VI.5 Aplicações à “RFP”

Em uma configuração de plasma tipo “RFP”, os componentes magnéticos B_θ e B_z são da mesma magnitude, e o campo magnético B_z muda de sentido próximo à borda do plasma. O perfil do fator de segurança decresce monotonicamente, e possui um forte cisalhamento magnético, tal que RFP pode confinar plasma de alto beta.

De acordo com a teoria de Taylor [5], o equilíbrio do “RFP” é um estado de mínima energia alcançada pelo plasma através de um processo de relaxação com a conservação da forma helicoidal total do campo magnético. O equilíbrio para o sistema neste estado de relaxação é dado por

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{B}, \quad (\text{VI.4})$$

onde μ é constante. Na aproximação cilíndrica, isto é, para um toróide de grande razão de aspecto, a solução para esta equação é obtida em termos das funções de Bessel:

$$B_r = 0, \quad B_\theta = B_0 J_1(\mu r), \quad B_z = B_0 J_0(\mu r). \quad (\text{VI.5})$$

Esta é uma configuração “force-free”, isto é, a corrente total é paralela ao campo magnético em toda a região e sem o gradiente da pressão cinética do plasma. Esta condição é expressa pela constante μ dada pela expressão

$$\mu = \mu_0 \frac{\vec{J} \cdot \vec{B}}{B^2}. \quad (\text{VI.6})$$

Adota-se uma configuração de equilíbrio na qual é permitida a variação dos perfis da densidade de corrente e da pressão, isto é, uma variação espacial de $\mu(r)$. Esta configuração é determinada a partir das equações de balanço de pressão e das equações de Maxwell para o estudo dos modos discretos das ondas de MHD. Para a geometria cilíndrica, as equações são as seguintes:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \mu(r) B_z - \frac{B_\theta}{B_\theta^2 + B_z^2} \frac{dp}{dr}, \quad (\text{VI.7})$$

$$\frac{dB_z}{dr} = -\mu(r)B_\theta - \frac{B_z}{B_\theta^2 + B_z^2} \frac{dp}{dr}. \quad (\text{VI.8})$$

Estas equações são resolvidas numericamente dados os perfis de $\mu(r)$ e $p(r)$ para obter os componentes de $\vec{B}$ e $\vec{J}$. Os perfis de $\mu(r)$, da pressão e de $\rho(r)$ são dados pelas funções:

$$\mu(r) = \mu_0(1 - a_2 r^2 - a_4 r^4 - a_6 r^6)^\alpha, \quad (\text{VI.9})$$

$$p(r) = p_0(1 - p_2 r^2 - p_4 r^4 - p_6 r^6)^{\alpha'}, \quad (\text{VI.10})$$

$$\rho(r) = e^{\alpha'' r^2}. \quad (\text{VI.11})$$

A reversão do sinal do campo magnético B_z depende sensivelmente da mudança do parâmetro μ_0 . Obviamente, o valor de μ é o argumento da função de Bessel que determina os zeros da mesma.

Utilizando a equação de Hain-Lüst, pode-se calcular os autovalores discretos dos modos m e k_z , considerando os seguintes valores dos parâmetros de equilíbrio:

$$\alpha = 2, \quad \alpha_p = 1, \quad \alpha_\mu = 2, \quad q_0 = 0,3, \quad k_z = 0,33, \quad (\text{VI.12})$$

$$a_2 = 0,99, \quad p_0 = 0,04, \quad p_2 = 0,99, \quad a = 1, \quad a_W = 1,04, \quad (\text{VI.13})$$

onde a e a_W são respectivamente, o raio da coluna de plasma e a posição da parede condutora.

Na tabela (VI.1) são apresentados os resultados dos autovalores obtidos numericamente para modo $m = 1$ com a variação dos valores de μ_0 . O valor de ω_L^2 é o máximo valor de ω_S^2 ou de ω_J^2 , aquele que é maior, e ω_I^2 é o mínimo valor de ω_A^2 ou de ω_{II}^2 , aquele que é o menor. Os valores de ω_{A1}^2 e ω_{A2}^2 são os autovalores. O campo magnético B_z é positivo em todo o raio da coluna para $\mu_0 \leq 2,35$. Os perfis de equilíbrio obtidos numericamente são mostrados na figura (VI.9) quando $\mu_0 = 2,28$. O campo magnético B_z não cruza o eixo radial, permanecendo positivo, e o fator de segurança $q(r)$ apresenta uma função decrescente contrária à configuração para tokamak. Os perfis de $\mu(r)$ e $B_\theta(r)$ são apresentados nesta

figura. Para os valores $\mu_0 \leq 2,35$, os autovalores crescem com μ_0 e estão próximos de ω_{Ti}^2 . As autofunções tendem a zero rapidamente na região de $r \cong 0$, que denominamos desta forma, *modo central discreto de Alfvén*. O perfil da autofunção ξ_r para $\mu_0 = 2,28$ é mostrada na figura (VI.10) que apresenta uma variação brusca em $r \cong 0$.

Quando o perfil de B_z apresenta um zero o comportamento das soluções muda drasticamente, tanto em $\xi_r(r)$ como em ω^2 . Os perfis de equilíbrio para $\mu_0 = 2,60$ são mostrados na figura (VI.11) tal que $B_z < 0$ a partir de $r = 0,92$. Neste caso q também apresenta valores negativos. À medida que B_z tende a negativo os autovalores decrescem e se distanciam do ω_{Ti}^2 . O autovalor para o caso de $\mu_0 = 2,60$ se comporta como um modo global discreto de Alfvén, figura (VI.12). Por outro lado, obtém-se mais de um autovalor, ω_{A2}^2 , para o mesmo perfil, como é apresentado na tabela para $\mu_0 \geq 2,70$. Em $\mu_0 = 2,70$, $B_z < 0$ a partir de $r = 0,88$. Os perfis de ω_S^2 , ω_J^2 e ω_A^2 são apresentados na figura (VI.13) o que mostra um comportamento muito diferente dos outros casos apresentados anteriormente neste trabalho. Isto se deve ao fato de que B_z se torna negativo próximo à borda do plasma. Nota-se que, neste caso, o ω_{A2}^2 está próximo de ω_L^2 , isto é, acima do limiar máximo do contínuo da onda lenta e da função ω_J^2 . A natureza desta onda apresenta a propriedade anti-Sturmiana, isto é, os autovalores decrescem à medida que os modos radiais aumentam. A autofunção, tanto para os autovalores ω_{A2}^2 como para ω_{A1}^2 , apresentam um comportamento global, figuras (VI.14 e VI.15). Por outro lado, os ω_{A1}^2 apresentam a propriedade Sturmiana. Os modos anti-Sturmianos são assim conhecidos somente pelo comportamento das soluções da equação tipo Sturm-Liouville. Estes resultados mostram, pela primeira vez, a existência destes modos numa configuração de equilíbrio de um plasma difuso. Tem-se observado que o aparecimento de um modo anti-Sturmiano é muito sensível à variação dos parâmetros e da escolha de configuração de equilíbrio.

μ_0	ω_L^2	ω_U^2	ω_{A1}^2	ω_{A2}^2
2,21	0,58095	2,06540	2,06360	
2,22	0,58483	2,08409	2,08270	
2,23	0,58869	2,10286	2,10116	
2,24	0,59252	2,12172	2,12033	
2,25	0,59633	2,14066	2,13923	
2,26	0,60010	2,15968	2,15829	
2,28	0,60756	2,19797	2,19626	
2,30	0,61488	2,2366	2,23481	
2,35	0,63246	2,33464	2,16817	
2,40	0,64881	2,38147	2,06962	
2,45	0,66356	2,21188	1,96922	
2,50	0,67633	1,91217	1,85172	
2,55	0,68834	1,83712	1,82503	
2,60	0,70344	1,69321	1,52661	
2,65	0,71656	1,52185	1,35197	
2,70	0,72713	1,35365	1,17915	0,72965
2,75	0,73448	1,19003	1,00846	0,74087
2,80	0,73779	1,03235	0,82227	0,74037
2,81	0,73789	1,00164		0,74127
2,82	0,73778	0,97124		0,74209
2,84	0,73693	0,91138		0,74350
2,86	0,73828	0,85285		0,74457
2,88	0,74120	0,79572		0,74533
2,90	0,74355	0,74007		

Tabela VI.1- Autovalores do equilíbrio de “RFP”.

Figura VI.1: Componentes do $\vec{Q}$ da onda discreta de Alfvén. $Q_{||} \sim 0$ mostra a pequena contribuição do modo compressional.

Figura VI.2: Variação radial dos três componentes do vetor de Poynting da onda discreta de Alfvén.

Figura VI.3: O mesmo que figura V.1 para $m = 2$.

Figura VI.4: O mesmo que figura V.2 para $m = 2$.

Figura VI.5: Variação radial das funções ω_A^2 e ω_S^2 para $\beta = 2$ e $m = 1$ mostrando a superposição entre as duas regiões de contínuo.

Figura VI.6: Curva da autofunção ξ_r para $m = 1$ do modo global da onda lenta.

Figura VI.7: Componentes do campo magnético perturbado do modo $m = 1$ da onda lenta com polarização à direita em todo o raio da coluna de plasma.

Figura VI.8: Variação radial dos três componentes do vetor de Poynting da onda lenta.

4281

Figura VI.9: Perfis de equilíbrio para $\mu_0 = 2,28$.

rfn 287

Figura VI.10: Curva da autofunção ξ_r para $\mu_0 = 2,28$ e $\omega^2 = 2,19626$ apresentando uma variação brusca próximo ao centro.

Figura VI.11: Equilíbrio da configuração "RFP" para $\mu_0 = 2,60$ que apresenta a mudança de sinal do campo magnético B_z .

Figura VI.12: Curva da autofunção ξ_r para $\mu_0 = 2,60$ e $\omega^2 = 1,52661$ que apresenta um comportamento de modo global de Alfvén.

w270

Figura VI.13: Variação radial de $\omega_A^2(r)$, (1), $\omega_S^2(r)$, (3), e $\omega_I^2(r)$, (2), para $\mu_0 = 2,70$.

rfn270

Figura VI.14: Curva da autofunção ξ_r , para $\mu_0 = 2,70$ e $\omega^2 = 0,72965$ localizada na região discreta anti-Sturmiana da onda lenta.

Figura VI.15: Curva da autofunção ξ_r para $\mu_0 = 2,70$ e $\omega^2 = 1,17915$ localizada na região discreta Sturmiana de Alfvén.

Bibliografia

- [1] R. M. O. Galvão, P. H. Sakanaka, e H. Shigueoka. Influence of toroidal effects on the stability of the internal kink mode. *Phys. Rev. Lett.*, **41**:870,(1978).
- [2] J. P. Goedbloed e P. H. Sakanaka. New approach to magnetohydrodynamic stability: I. A practical stability concept. *Phys. Fluids*, **17**:908, (1974).
- [3] H. Shigueoka, P. H. Sakanaka, C. A. de Azevedo, e A. S. de Assis. Discrete Alfvén waves in a cylindrical plasma: arbitrary beta and magnetic twist. *Rev. Bras. Fis.*, (1991).
- [4] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publ., New York, (1956).
- [5] J. B. Taylor. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Phys. Rev. Letters* , **33**:1139, (1974).

Capítulo VII

CONCLUSÕES E FUTURAS APLICAÇÕES

VII.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado o estudo do espectro das ondas MHD em plasma cilíndrico inomogêneo.

Uma dedução analítica para os modos discretos de Alfvén foi realizada. A solução é uma função de Bessel. Os modos discretos Sturmianos apresentam-se como zeros desta função. Uma relação de dispersão da onda de Alfvén foi também obtida utilizando-se o método de “WKB”. A expressão obtida concorda com a dedução analítica citada, e é mais completa do que a anteriormente apresentada por Appert em 1982.

Numa configuração de equilíbrio de baixo β , por exemplo em tokamak, os resultados dos modos globais discretos de Alfvén mostram que existe uma pequena contribuição longitudinal (modo compressional), evidente no perfil do campo magnético perturbado, paralelo ao campo estático. O vetor de Poynting calculado mostra a direção preferencial de propagação da energia da onda. A polarização, no equilíbrio considerado, varia espacialmente.

No estudo de um equilíbrio com $\beta > 1$, aparece a superposição do contínuo de Alfvén com o da onda lenta. Os modos discretos calculados, denominados de

modo global discreto da onda magnetossônica lenta, pois estão localizados abaixo do limite inferior da região do contínuo da onda lenta, apresentam a natureza compressional. A direção de propagação é transversal ao campo de equilíbrio.

Os estudos realizados utilizando a configuração de equilíbrio para o "RFP" resultaram em: (a) existe um modo discreto central de Alfvén quando o campo magnético B_z não se torna nulo antes da parede; (b) os autovalores crescem à medida que B_z tende a zero próximo à borda do plasma; (c) na condição de equilíbrio de RFP, $B_z < 0$ na região mais externa do plasma, as autofunções apresentam um aspecto de modos globais de Alfvén. O equilíbrio de RFP apresenta, além destes resultados dos modos discretos de Alfvén (tipo Sturmiano), modos anti-Sturmiano localizados na região acima do contínuo da onda lenta.

VII.2 Estudos Futuros

A técnica aqui utilizada para a resolução do problema pode ser aplicada em muitos casos tanto em plasma de laboratório quanto em plasma espacial. Alguns estudos, mais imediatos, podem ser realizados.

Uma modificação seria incluir o termo de Hall na equação da lei de Ohm. Isto levaria ao estudo do efeito da frequência de giração de Larmor dos íons para um equilíbrio de um plasma cilíndrico e difuso, tanto para uma configuração de $\beta < 1$ como para $\beta > 1$. As aplicações destes conhecimentos são muito importantes para a física de plasma de laboratório por causa da utilidade das ondas de MHD como um meio auxiliar para o aquecimento de plasma. Em física espacial, estes conhecimentos são igualmente importantes para o estudo do aquecimento da corona solar por transporte de energia ao longo dos "loops" coronais.

Um estudo da conversão de modos e das oscilações em fotosfera também seria de muita utilidade para identificar se os modos longitudinais são responsáveis pelos fenômenos de aquecimento que aparecem nesta região.

Um estudo de absorção das ondas, injetadas por uma antena externa, nas

regiões de contínuo de Alfvén, de magnetossônica lenta ou nas regiões discretas é de muito interesse para conhecer os mecanismos de transferência das ondas num plasma magnetizado. Os efeitos de viscosidade e de resistividade também podem ser considerados.

O estudo do espectro, considerando os efeitos de toroidicidade (curvatura dos campos ao longo da direção z) e do acoplamento dos modos poloidais, é de muita utilidade para o aquecimento de plasma em tokamaks, porém, no estágio atual, demandaria um cálculo mais demorado e complexo.