*Roberto
Pantufi
George
Marcelo Gomes
y. Frech*

N.T. 536

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

LEIS DE CONSERVAÇÃO NÃO LOCAIS, ANOMALIAS E MATRIZES-S
EXATAS DE MODELOS BIDIMENSIONAIS

SBI-IFUSP

305M810T0536

Tese de doutoramento apresentada
no Instituto de Física da Univer
sidade de São Paulo

MARIA CRISTINA BATONI ABDALLA
Depto. de Física Matemática USP

SÃO PAULO
setembro 1981

Leis de Conservação não-locais, Anomalias e Matrizes-S exatas de
modelos bidimensionais.

Esta tese foi elaborada no
Instituto de Física da Uni-
versidade de São Paulo, sob
a orientação do Prof. Elcio
Abdalla, com a colaboração
do Prof. Marcelo Gomes

setembro/1981

Abstract

We prove that the CP^{n-1} model does not accomodate pair formation up to third order in perturbation theory. The S-matrix of the CP^{n-1} and $SU(n)$ Thirring models was calculated perturbatively up to 2 loops. The calculation shows that the S-matrix has some deviations from the expected exact one. Furthermore, we calculate the quantized nonlocal charge of the CP^{n-1} model in the framework of renormalized $1/n$ perturbation theory and prove that it is not conserved, nevertheless when fermions are coupled in a minimal or supersymmetric way the anomaly vanishes.

Resumo

Provamos que o modelo CP^{n-1} não permite formação de par até terceira ordem em teoria de perturbação. A matriz-S dos modelos CP^{n-1} e Thirring $SU(n)$ foi calculada em perturbação até 2 loops. O cálculo mostra que a matriz-S tem algumas diferenças em relação à esperada. Além disso calculamos a carga não local quantizada do modelo CP^{n-1} em teoria de perturbação renormalizada $1/n$ e provamos que ela não é conservada, no entanto quando fermions são acoplados de uma maneira mínima ou supersimétrica a anomalia se cancela.

Aos meus filhos

Filipe e Diana

"A minha intenção era a de incluir nesse tratado, antes de escrevê-lo, tudo quanto acreditava saber a respeito das cousas materiais. Mas, do mesmo modo que os pintores que, não podendo representar em tela plana todas as diversas faces de um corpo sólido, escolhem uma das principais que expõem à luz, e, sombreando todas as demais, só as fazem aparecer tanto quanto é possível ver quando se olha para aquela — da mesma maneira, temendo não poder incluir no meu discurso tudo quanto tinha no pensamento, procurei somente nele expor bem amplamente o que concebia sobre a luz; depois quando se me oferecesse ocasião, ali acrescentaria alguma coisa mais...."

R. Descartes
(Discurso do Método)

AGRADECIMENTOS

- Agradeço ao D.A.A.D (Deutscher Akademischer Austauschdienst) pelo apoio financeiro durante meu período de permanência em Hamburgo (DESY).
- À FAPESP pelo apoio financeiro nos dois últimos anos.
- Aos professores e colegas do II Instituto de Física Teórica no DESY, em particular a H. Yoos e B. Berg.
- Aos colegas deste departamento especialmente ao Radu, Nelson e Tereza pela amizade e coleguismo profissional.
- Ao professor Marcelo Gomes pelo muito que me ensinou.
- A Neusa M.L. Martin pelo trabalho de datilografia.
- Finalmente agradeço ao professor e amigo Elcio Abdalla que influenciou de maneira marcante na minha formação profissional.

ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo 1: Teorias em (3+1) e (1+1) dimensões.....	5
1.1 - Teorias não Abelianas em (3+1) dimensões..	5
1.1a- Lagrangeana não Abeliana.....	5
1.1b- Liberdade assintótica.....	8
1.1c- Soluções clássicas e topologia.....	13
1.1d- Confinamento.....	16
Expansão $1/n$	20
Matriz-S.....	25
1.2 - Modelos em (1+1) dimensões.....	34
1.2a- Modelo de Thirring.....	34
1.2b- Modelo de Schwinger.....	39
1.2c- Modelo de Sine-Gordon e Thirring Massivo..	43
1.2d- Modelo de Gross-Neveu.....	46
1.2e- Modelo de Gross-Neveu quiral.....	52
1.2f- Modelo σ -não linear.....	53
1.2g- Modelo CP^{n-1}	58
1.2h- Modelo CP^{n-1} supersimétrico.....	70
Capítulo 2: Abordagem perturbativa.....	79
2.1 - Prova da ausência de pares.....	79
2.2 - Existe uma matriz-S exata?.....	86
2.3 - Conclusão.....	88
Capítulo 3: Modelo CP^{n-1} puro e sua anomalia.....	96
3.1 - Carga clássica.....	96
3.2 - Quantização.....	97
3.3 - Carga quântica.....	103
3.4 - Conclusão.....	104

Capítulo 4: Acoplamento com fermions.....	112
4.1 - O modelo mínimo.....	112
4.1a- Quantização.....	114
4.1b- Carga quântica não-local.....	119
4.2 - O modelo supersimétrico.....	120
4.2a- Quantização.....	121
4.2b- Carga quântica não-local.....	129
4.3 - Conclusão.....	131
Capítulo 5: Conclusões e problemas em aberto.....	133
Apêndice A - Regra de Källen Toll.....	136
Apêndice B - Amplitudes $r_1(\theta), r_2(\theta), u_1(\theta), u_2(\theta)$	139
Apêndice C - Renormalização do modelo CP^{n-1}	150
Apêndice D - Supersimetria.....	155
Referências.....	158

INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos muitos progressos foram alcançados no estudo de teorias de campo em duas dimensões, e muitas idéias novas surgiram, pela primeira vez nestes modelos.

Em 1958 Thirring⁽¹⁾ propôs um modelo de fermions sem massa com auto-interação corrente-corrente que era exatamente solúvel. Klaiber⁽²⁾, em 1967, discutiu exaustivamente o modelo. Um parâmetro, análogo ao spin, em duas dimensões, aparece tomando valores contínuos resultando desta forma na bosonização do modelo quando este parâmetro toma valores inteiros.

Em 1962 Schwinger⁽³⁾ resolve a eletrodinâmica quântica em duas dimensões. Vários autores seguem-no na investigação até que em 1971 surge o trabalho de Lowenstein e Swieca⁽⁴⁾ onde se encontra a interpretação de confinamento dos estados de carga da teoria.

Quando em 1974 Gross e Neveu⁽⁵⁾ mostraram que teorias de campo bidimensionais de fermions sem massa, com interações quadrilineares são assintoticamente livres, o interesse por teorias em duas dimensões cresceu pois pela primeira vez encontrava-se um ponto em comum com teorias de gauge não abelianas em 4 dimensões. Além disso o modelo foi expandido em série de potências de $1/N$ apresentando quebra espontânea de simetria obtendo-se uma teoria renormalizável com massa gerada dinamicamente. No mesmo trabalho os autores introduziram a sua versão quiral onde apesar de haver geração dinâmica de massa a simetria contínua $\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi$ não é quebrada. O modelo quiral continua a exibir liberdade assintótica.

(6)
 Em 1975 Coleman estudou o modelo de sine-Gordon quântico e mostrou sua equivalência com o modelo de Thirring massivo deixando transparecer claramente o mecanismo de bosonização que estava escondido na solução de Klaiber do modelo de Thirring. Sua matriz-S fatorizável também é conhecida. (7) Em 1975 ainda, Polyakov (8) mostra que o modelo σ -não linear com simetria $O(n)$ também apresenta liberdade assintótica. Este modelo pode ser escrito como uma teoria de gauge, isto é, existe uma invariança de gauge escondida que o aproxima ainda mais as teorias de gauge em 4 dimensões. Além disso obteve-se a expansão $1/N$ do modelo (10). Sabe-se que o modelo apresenta soluções tipo instanton para $N=3$ (11) e assim como o modelo de Gross-Neveu, o modelo σ -não linear apresenta uma massa gerada dinamicamente pelo mecanismo de quebra espontânea de simetria. O interesse pelo modelo σ -não linear cresce e em 1975 sua renormalização é provada (12). Em 1976 Pohlmeyer (13) mostra a existência de infinitas cargas locais clássicas conservadas e em 1977 Lüscher (14) constroi as infinitas cargas não-locais provando que são quantidades conservadas. Paralelamente, no mesmo ano, Zamolodchikov e Zamolodchikov (10) constroem a matriz-S total fatorizada, como já era de se esperar visto que o modelo apresentava infinitas leis de conservação. Em fins de 1977 Lüscher (15) quantiza as cargas não locais e prova a ausência de produção de pares, causa primeira da existência de uma matriz-S fatorizável.

O sucesso do modelo σ -não linear com simetria $O(N)$ inspira então generalizações, procurando conservar o fato da interação ser um vínculo geométrico. Esta generalização é proposta por Eichenherr em 1978 (16) em sua tese de doutoramento, onde o modelo CP^{n-1} é proposto. O modelo CP^{n-1} é a própria generalização do modelo σ para uma simetria mais ampla, $SU(N)$, agora com campos complexos e desta forma mostra-se mais rico pois a invariança de

gauge é mais evidente, além de apresentar soluções tipo instanton para qualquer N ⁽¹⁷⁾. O modelo apresenta ainda os chamados vácuos- θ , é expandível em série de potências de $1/N$ e além da liberdade assintótica foi mostrado também que o modelo apresenta confinamento e mesmo acoplado a fermions ⁽¹⁸⁾ preserva o confinamento dos fermions. No entanto quando estes fermions ⁽¹⁹⁾ são acoplados de maneira mínima ou supersimétrica ⁽²⁰⁾ o modelo não mais apresenta confinamento mostrando-se ser fatorizável.

Estas propriedades exibidas pelo modelo CP^{n-1} colocam-no em uma situação de especial interesse pois através de seu estudo pode-se lançar alguma luz em teorias mais realistas.

O nosso desejo neste trabalho é seguir em linhas gerais o que se fez para o modelo $O(n)$, no modelo CP^{n-1} . No capítulo 1 estudamos as propriedades comuns entre modelos bidimensionais e teorias de gauge não abelianas em 4 dimensões. Os modelos de Thirring, Schwinger, Gross-Neveu (quiral), Sine-Gordon, σ -não linear são apresentados e o modelo CP^{n-1} e sua versão supersimétrica ocupam uma posição de destaque no final do capítulo.

No capítulo 2 o modelo CP^{n-1} é tratado perturbativamente onde provamos a não produção de pares num cálculo perturbativo até 3^a ordem ⁽²¹⁾. No entanto a matriz-S provou-se não ser do tipo fatorizável esperado ⁽²²⁾. Esta aparente contradição nos conduziu a um novo problema que foi desenvolvido no capítulo 3. Neste capítulo definimos uma carga Não-local, quantizamos e provamos a sua não conservação ⁽²³⁾.

Esta anomalia encontrada explicaria então a inexistência de uma matriz-S fatorizável, compatível com o confinamento do modelo provado por Lüscher.

Outro resultado, também obtido por Lüscher em 1979⁽¹⁸⁾, onde o CP^{n-1} acoplado supersimetricamente a fermions não confina, nos inspirou o cálculo da anomalia no CP^{n-1} supersimétrico. Além disso o modelo apresenta uma matriz-S fatorizável, verificada em ordem mais baixa de expansão $1/N$. O modelo supersimétrico é desenvolvido no capítulo 4 onde obtivemos um resultado feliz uma vez que as duas anomalias se cancelam.⁽²⁴⁾

Conjecturamos que o importante para o cancelamento das anomalias foi o acoplamento à corrente fermionica $\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$.

Finalmente no capítulo 5 colocamos alguns problemas.

CAPÍTULO I

Modelos em (3+1) e (1+1) dimensões

1.1. Teorias não Abelianas em (3+1) dimensões

1.1.a: Lagrangeana não Abeliana.

O campo eletro magnético descrito pela Lagrangeana

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (1.1)$$

foi o primeiro exemplo conhecido de uma teoria de gauge⁽²⁵⁾. Neste caso o grupo de gauge é o grupo abeliano $U(1)$.

A primeira tentativa de uma generalização de uma teoria de gauge para um grupo mais complicado (não abeliano) foi a de Yang-Mills⁽²⁶⁾. Em tal apresentação o grupo de simetria é $SU(2)$, no entanto a simetria de gauge pode manifestar-se com um grupo qualquer G .

De uma maneira geral, se o campo ϕ se transforma através do grupo de gauge g como

$$\phi \rightarrow \phi' = g\phi \quad (1.2)$$

onde g se confunde com a representação de $g \in G$, isto é, $g=D(g)$. podemos elevar esta transformação a um carater local admitindo que $D(g)$ dependa do espaço tempo. Desta forma a derivada simples de ϕ não é mais invariante

$$\partial_\mu \phi' = g \partial_\mu \phi + (\partial_\mu g)\phi \quad (1.3)$$

Podemos a seguir introduzir o campo A_μ , que será uma matriz na álgebra de Lie de g , da seguinte forma:

$$A^\mu = A^\mu_a T^a \quad (1.4)$$

onde T^a são os geradores do grupo g .

Se prescrevermos a transformação de gauge de A_μ como sendo :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g A_\mu g^{-1} - \frac{i}{e} (\partial_\mu g) g^{-1} \quad (1.5)$$

poderemos definir a derivada covariante

$$D^\mu \phi = (\partial^\mu - ie A^\mu) \phi \quad (1.6)$$

que se transforma como

$$D'^\mu \phi' = g D^\mu \phi \quad (1.7)$$

Tentando-se uma analogia (na forma) com a teoria abeliana, define-se o tensor antissimétrico $G^{\mu\nu}$ como

$$[D^\mu, D^\nu] = -ie G^{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ie [A^\mu, A^\nu] \quad (1.9)$$

onde o último termo aparece devido ao caráter não abeliano da teoria.

Através de uma transformação de gauge, o tensor $G^{\mu\nu}$ se transforma como:

$$G^{\mu\nu} \rightarrow G'^{\mu\nu} = g G^{\mu\nu} g^{-1} \quad (1.10)$$

Desta forma a lagrangeana é dada pelo escalar associado

$$L = - \frac{1}{4} \text{Tr } G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

A interação com outras partículas pode ser obtida através da prescrição minimal (1.6), obtendo-se por ex. no caso de fermions:

$$L = -\frac{1}{4} \text{Tr } G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + m\bar{\psi}\psi \quad (1.12)$$

em analogia com a equação (1.1).

A Lagrangeana para Q.C.D (cromo-dinâmica-quântica) é obtida com o grupo de gauge particular SU(3), onde os ψ representam os quarks e os A_μ os gluons. No caso da interações fortes os ha-drons são considerados como sendo compostos de 3 quarks, partícu-las de spin 1/2 cujas interações são mediadas pelos gluons (bo-sons de massa zero) e os mesons por um par quark/antiquark. Tais objetos possuem uma propriedade nova chamada cor (em n° de 3) que, analogamente à carga elétrica, se conserva.

A introdução desta nova propriedade pode ser justifica-da de várias formas por ex. a razão das secções de choque hadroni-cas e muônicas $R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{muons})}$ só concorda com as expe-
(27)
riências se os quarks possuírem 3 cores distintas. Além do faio de que a função de onda total do hadron Δ^{++} (considerado como formado por 3 quarks) deve ser antissimétrica.

Nesta teoria os quarks aparecem em número n_f , isto é, $\psi = \psi_f$ para $f = 1..n_f$ representando quarks com sabores diferentes. Assim temos os quarks u, d, c, s, b, t e eventualmente outros.

Explicitando todos os índices temos para a Lagrangeana clássica da Q.C.D.

$$L = -\frac{1}{4} \text{Tr } G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_f^i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta^{ij} + ig A_\mu^{ij}) \psi_f^j - m_f \bar{\psi}_f^i \psi_f^i \quad (1.13)$$

$$A_{\mu}^{ij} = A_{\mu}^a T_{ij}^a$$

$$G_{\mu\nu}^{ij} = G_{\mu\nu}^a T_{ij}^a$$

T_{ij}^a são os geradores do grupo

$f = 1 \dots n_f$ é o índice de sabor

$a = 1 \dots 8$ são os campos de gluon

$i, j = 1, 2, 3$ são os índices de cor.

Pode-se entender facilmente porque os campos de gluon aparecem em número de oito. A lagrangeana (1.13) descreve processos onde a cor é um n.º quântico conservado, desta forma para a aniquilação $q + \bar{q} \rightarrow$ gluons temos uma combinação de 3 cores com 3 anticolors resultando em 9 combinações, 8 dos quais são coloridos identificados com os gluons na Q.C.D. O índice de sabor tem um limite superior que citaremos no parágrafo sobre liberdade assintótica.

1.1.b. Liberdade Assintótica

Toda teoria renormalizável obedece, através de suas funções de Green, as equações do grupo de renormalização. A independência das funções de Green não renormalizadas, de uma teoria sem massa, em relação à massa de renormalização implica na seguinte equação para as funções de Green renormalizadas⁽²⁸⁾

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n \gamma(g) \right] \Gamma^n(p, g, \mu) = 0 \quad (1.14)$$

onde $\beta(g)$ e $\gamma(g)$ são funções da constante de acoplamento que dependem da teoria em questão.

A equação (1.14) pode ser resolvida da seguinte maneira:

$$\Gamma^n(p, g, \mu) = \phi \left[\ln(\mu) e^{-\int^g \frac{dg'}{\beta(g')}} \right] e^{n \int^g \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'} \quad (1.15)$$

Visando a análise dos limites ultra-violeta e infra-vermelho mais adiante, escrevemos a seguinte relação, analisando a dimensão da função de Green Γ^n :

$$\Gamma^n\left(\frac{p}{\lambda}, g, \mu\right) = \lambda^{-d + \frac{n}{2}(d-2)} \Gamma^n(p, g, \lambda\mu) \quad (1.16)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo e λ um parâmetro de escala.

Agora se em (1.15) fizermos $\mu \rightarrow \lambda\mu$ temos uma mudança em

$$\phi \left[\ln(\mu) e^{-\int^g \frac{dg'}{\beta(g')}} \right] \rightarrow \phi \left[\ln(\lambda\mu) e^{-\int^g \frac{dg'}{\beta(g')}} \right] \quad (1.17)$$

de maneira que tal mudança pode ser absorvida pela constante de acoplamento $g(\lambda)$.

Desta maneira tendo $g(1) = g$ e

$$\frac{d}{d \ln \lambda} \left[\ln \lambda - \int^g \frac{dg'}{\beta(g')} + \int^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right] = 0 \quad (1.18)$$

obtemos

$$\frac{dg(\lambda)}{d \ln \lambda} = -\beta(g(\lambda)) \quad (1.19)$$

Além disso

$$\int^g \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' = \int^{g(\lambda)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' + \int_1^\lambda \gamma(g(\sigma)) \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (1.20)$$

portanto vale:

$$\Gamma(p, g, \lambda \mu) = \Gamma(p, g(\lambda), \mu) \text{ e} \quad (1.21)$$

Analizamos este resultado fazendo uso da função $\beta(g)$. Suponhamos que para certo g^* , $\beta(g^*) = 0$. Vemos que em perturbação g^* é zero.

Pode-se, além disso, resolver a eq. (1.19) em torno de g^* .

$$\frac{d\bar{g}}{d \ln \lambda} = - \frac{\beta^{(n)}(g^*)}{n!} (\bar{g} - g^*)^n \quad (1.22)$$

cuja solução é:

$$a) \quad n=1 \rightarrow g(\lambda) - g^* = A \lambda^{-\beta'(g^*)} \quad (1.23)$$

$$b) \quad n > 1 \rightarrow \frac{1}{g - g^*} = \frac{(n-1)\beta^{(n)}}{n!} \ln \lambda + a_0 \quad (1.24)$$

Temos então que para o limite $\bar{g} \rightarrow g^*$

$$n \text{ ímpar} \begin{cases} \beta^{(n)} > 0 \rightarrow \lambda \rightarrow \infty \\ \beta^{(n)} < 0 \rightarrow -\lambda \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.25a)$$

$$n \text{ par} \begin{cases} g \rightarrow g_+^* \begin{cases} \beta^{(n)} > 0 \rightarrow \lambda \rightarrow 0 \\ \beta^{(n)} < 0 \rightarrow \lambda \rightarrow \infty \end{cases} \\ g \rightarrow g_-^* \begin{cases} \beta^{(n)} > 0 \rightarrow \lambda \rightarrow \infty \\ \beta^{(n)} < 0 \rightarrow \lambda \rightarrow 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.25b)$$

Esta solução em termos gráficos:

Fig. 1

Isto mostra que se $\beta'(g^*) > 0$ a perturbação descreve muito bem a região infravermelha (como em QCD) enquanto que para $\beta'(g^*) < 0$ a perturbação descreve bem a região ultravioleta (não abeliana); tal caso é conhecido como liberdade assintótica.

É importante mencionar que em 4 dimensões as únicas teorias com liberdade assintótica são as teorias de gauge não-abelianas e a experiência nos mostra que as interações fortes à altas energias devem ser regidas pelo regime de liberdade assintótica.

Uma outra maneira, talvez mais física, de se entender liberdade assintótica é considerar o espalhamento de quarks $q + q \rightarrow q + q$. A constante de acoplamento forte α_s , analogamente à Q.E.D. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, é dada por $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ onde g é a carga de cor. Pode-se no entanto generalizar α_s para uma intensidade de acoplamento efetiva $\alpha_s(Q^2)$ ou Q é a troca de 4-momento. Para entendermos a dependência de $\alpha_s(Q^2)$ com Q^2 consideremos as amplitudes

Fig.2

A figura 2a, representa analogamente à polarização do vácuo na Q.C.D. o efeito da blindagem da cor do quark devido à criação de pares quark-anti-quark. Se 2a fosse a única possibilidade, $\alpha_s(Q^2)$ tenderia a aumentar com Q^2 como na Q.E.D contudo a amplitude (2b) atua no sentido oposto onde o gluon emitido por um quark cria um par de gluons coloridos, e estes se recombinaem num outro gluon que é absorvido pelo segundo quark. Mas (2b) só é possível em Q.C.D. porque os gluons coloridos interagem entre si. Assim a Q.C.D. tem dois efeitos (criação de pares quark-anti-quark e gluons-anti-gluons) que atuam em sentidos opostos: O 1º tende a aumentar o valor de $\alpha_s(Q^2)$ a pequenas distâncias e o 2º tende a diminuir este valor.

Assim o efeito na constante de acoplamento efetiva depende do nº de quarks existente (n_f). Para grandes valores de Q^2 , $\alpha_s(Q^2)$ pode ser escrita⁽³⁰⁾.

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(\mu^2) \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi} (2n_f - 33) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right] \quad (1.26)$$

onde μ é uma massa arbitrária para fixar a escala no logarítmo e $\alpha_s(\mu^2)$ é o valor de $\alpha_s(Q^2)$ para $Q^2 = \mu^2$.

Nesta equação o termo contendo $2n_f$ resulta do efeito dos pares quark-anti-quark e o termo contendo o fator 33 advem do efeito dos gluons.

A série (1.26) pode ser somada

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (1.27)$$

de onde vê-se claramente que para $n_f \leq 16$ a constante de acoplamento decresce à medida que Q^2 aumenta. Logo quanto menor a distância de interação entre os quarks menor o valor do acoplamento efetivo.

O fato da constante de acoplamento variável tornar-se pequena a altas energias, permite o estudo perturbativo de certas correções. No entanto existe uma dificuldade já que as previsões teóricas valem em princípio apenas para momentos grandes tipo espaço que estão fora da região física. Esta dificuldade pode em geral ser superada por métodos de continuação analítica. Há excelentes acordos com a experiência⁽³¹⁾ principalmente no que se refere à amplitude de aniquilação $e^+e^- \rightarrow$ hadrons.

1.1.c - Soluções clássicas e topologia

Muitas teorias de campo clássicas apresentam soluções das equações clássicas de movimento que não se dissipam.⁽³²⁾ Encontramos na literatura uma ampla variedade de soluções deste tipo tais como o "kink", "vortice", "monopolo" e "instanton". A propriedade não dissipativa destas soluções não está ligada a uma simetria interna da teoria mas sim às propriedades puramente topológicas da mesma. Se fossemos estudar estes objetos com mais detalhe deveríamos penetrar no mundo da topologia de fibrados e teoria homotópica.⁽³³⁾ Estas soluções clássicas são rotuladas por elementos de um grupo (em geral discreto) chamado grupo de homotopia. A teoria de Yang-Mills em sua versão euclideana apresenta soluções clássicas estáveis. Tais soluções tratadas pela primeira vez por Polyakov foram denominadas pseudo-partículas ou instantons.⁽³⁴⁾ Estas soluções são estáveis por pequenas perturbações. Tal estabilidade como dissemos é devida uma topologia não trivial desta teoria e o mesmo seria dizer que instantons são soluções topologicamente estáveis.⁽³⁵⁾

Vemos desta forma que um conceito importante neste contexto é o de n° topológico ou equivalentemente carga topológica. Introduzimos este conceito da seguinte forma. Numa teoria de gauge dois campos são considerados equivalentes caso difiram por uma transformação de gauge. Uma transformação de gauge nem sempre pode ser obtida através de transformações infinitesimais (como por ex. a eq.1.5). Isto está ligado ao fato do campo de gauge apresentar certas condições de contorno no infinito e isto divide o campo de gauge em classes distintas, isto porque apesar do tensor de campo tender rapidamente a zero, pode haver no infinito uma excitação de gauge pura residual. Esta excitação de gauge pura pode diferir do campo nulo por uma transformação de gauge singular, isto é: esta excitação não pode ser continuamente deformada em um campo nulo.

Pelo conceito de deformação contínua entende-se que dada uma $f(x)$, para se poder ter uma deformação contínua em $g(x)$, deve existir uma função $h(x,t)$ tal que

$$h(x,t) = \begin{cases} h(x,0) = f(x) \\ h(x,1) = g(x). \end{cases}$$

Tal conceito de deformação leva-nos naturalmente aos conceitos de grupo de homotopia (grupo de deformação) e topologia. Assim 2 soluções com uma certa condição de contorno no infinito pertencem ao mesmo grupo de homotopia se puderem ser continuamente deformadas uma na outra. No caso da teoria de Yang-Mills para o grupo de gauge $SU(2)$ o invariante topológico é o índice de Pontryagin correspondente ao 3° grupo de homotopia de $SU(2)$ que é o grupo dos n° s inteiros. Lembremos que o n^{esimo} grupo de homotopia de um grupo g qualquer corresponde ao grupo das classes de equivalência dos mapeamentos de g na esfera S^n .

Cada um desses grupos é rotulado por um nº topológico ou carga topológica dada por:

$$q = \frac{g^2}{16\pi^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}) d^4x \quad (1.28)$$

onde $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

Para cada valor da carga topológica temos uma classe de soluções e a de menor energia é denominada de vácuo.

Desta forma tem-se um número infinito de vácuos degenerados, obtendo-se o vácuo real como uma combinação linear adequada. Cada combinação, isto é, cada vácuo pode ser rotulada por um nº θ_{vac} que vai de 0 a 2π e cada um destes valores corresponde a um dos físicos inequivalentes. Neste contexto instantons são soluções clássicas de energia zero com número topológico inteiro que ligam um vácuo da teoria a outro, isto é, apresentam o efeito de tunelamento entre 2 vácuos degenerados. E como consequência do tunelamento vê-se então que o vácuo verdadeiro da teoria é dado por uma combinação linear de infinitos vácuos degenerados.

Estas soluções devem ter ainda grande influência no comportamento infravermelho da teoria desempenhando um papel importante nos processos de confinamento.

Outro problema que torna importante tais soluções é a inexistência da partícula η , a qual seria um boson de Goldstone associado a conservação da corrente axial na teoria de Yang-Mills. Este problema chamado "problema U(1)" foi resolvido por t'Hooft levando-se em conta que a divergência da corrente axial é proporcional a densidade de carga topológica.

Finalmente vemos que temos em tais soluções mínimos verdadeiros da ação clássica e que poderíamos pelo menos em princípio expandir a função de partição Euclideana em torno destas soluções. No entanto recentemente descobriu-se⁽³⁶⁾ que os instantons não são suficientes para cumprir este programa por constituírem um conjunto muito pequeno no espaço de soluções, devendo-se levar em conta soluções de n° topológico fracionário (mesons), além de quase-soluções.

1.1.d - Confinamento

Uma teoria que tente descrever as interações fortes deve explicar porque quarks não são observados livremente. Pensa-se então que uma teoria de interações fortes deva confinar quarks e gluons coloridos.

Somente uma solução do problema de confinamento trará luz ao problema do espectro hadrônico (rico em estados ligados) e uma explicação de diversas hipóteses do modelo de partons.

Teorias não abelianas do tipo da QCD fornece um quadro natural para o entendimento de confinamento. O fato é que há fenômenos em teorias de campo não lineares que em princípio não podem ser entendidas em teoria de perturbação.

Por exemplo o aparecimento de cordas magnéticas em supercondutores do 2º tipo só pode ser entendida fora de perturbação. Assim pensa-se que a interação de 2 quarks em QCD seja feita através de um tubo de fluxo.

A ausência de quarks e gluons livres nos leva à hipóte

se que hadrons livres não são coloridos. Uma evidência em QCD deste fato vem do seguinte argumento de Susskind. Se calcularmos a auto energia μ e a energia de ligação L de quarks coloridos nos estados de mesons $q\bar{q}$ temos:

$$\begin{aligned} \mu &\approx g^2 \sum_{c,j} T_{1ij}^c \cdot T_{1j\ell}^c \cdot I \\ L &\approx 2g^2 \sum_c T_{2ij}^c \cdot T_{2k\ell}^c \cdot I' \end{aligned}$$

onde $T^c = \frac{1}{2} \lambda_c$ são os operadores de cor e I e I' integrais sobre momentos internos.

Se calcularmos a massa do meson obteremos $m = 2\mu + L \sim g^2 I T^2$ com $T = T_1 + T_2$. Se $T^2 = 0$, ou seja os quarks não tem cor, obtemos massa zero para o meson. Isto significa estabilidade do estado ligado não colorido.

Este argumento esta ligado a idéia de blindagem do campo cromodinâmico. Esta idéia vem de modelos bidimensionais onde tal fenomeno pode ser descrito exatamente.

Se tivermos um par $q\bar{q}$ em um estado ligado e começarmos a dar energia para que este par se separe, haverá um momento em que torna-se energeticamente mais fácil haver a formação de novos pares na região de interação o que significa uma blindagem dos campos cromoeletricos na região de interações.

Assim ao invés de termos na final do processo 2 estados coloridos obteremos 2 ou + novos estados ligados.

(38)

Existe ainda o critério de Wilson para confinamento. Este critério ba seia-se no fato de que o potencial confinante deve crescer com a distância. Wilson descreveu este critério de maneira invariante de calibre.

$$\langle 0 | \exp(- \oint_c A_\mu dx_\mu) | 0 \rangle \left\{ \begin{array}{l} \sim e^{-S} \quad \text{onde } S \text{ é a área de } c \text{ então há con-} \\ \quad \quad \quad \text{finamento.} \\ \sim e^{-L} \quad \text{onde } L \text{ é o perímetro de } c \text{ então} \\ \quad \quad \quad \text{não há confinamento.} \end{array} \right.$$

Há evidências, a partir de teorias de gauge na rede, que o critério de Wilson fornece confinamento em QCD, havendo o problema no entanto da passagem para o contínuo.

Há outras evidências de confinamento em QCD perturbativa posto que as divergências infravermelhas não se cancelam totalmente para estados coloridos, isto é, no espalhamento de quarks as divergências infravermelhas não se cancelam a menos que os quarks estejam em estados ligados. Outra alternativa é entender o confinamento em cromodinâmica como sendo a fase de baixa energia da teoria, isto porque essa teoria deve explicar 2 fenômenos aparentemente contraditórios. O 1º é o confinamento e o 2º é a liberdade assintótica. Uma descrição fenomenológica disto é dada pelos modelos de "Bag" (MIT e Slac) ⁽³⁹⁾ e o modelo de cordas. ⁽⁴⁰⁾ ⁽⁴¹⁾

O modelo de "Bag" foi desenvolvido simultaneamente no MIT e em Slac. A idéia destes bags é colocar quarks e gluons dentro de uma superfície fechada. Condições de contorno na superfície dos "bags" são tais que gluons e quarks não podem sair.

Hadrons são excitações dos quarks e gluons em uma cavidade. Foram calculados, entre outras coisas, neste modelo espectro e propriedades eletromagnéticas dos hadrons, processo de es-

palhamento e secção de choque totais.

O modelo de corda vem da idéia de que se confinamento ocorre em QCD há uma possibilidade que os gluons formem tubos de fluxos entre os quarks. Uma corda simples descreve um meson, enquanto barions têm configurações de γ -barion ou Δ barion.

meson

Δ -barion γ -barion

Expansão $1/n$

A expansão $1/n$ baseia-se no fato, proveniente da mecânica estatística, de que diversos modelos descrevendo multipletos de n componentes tendem, quando n torna-se muito grande, ao modelo esférico, que é solúvel. Na literatura cita-se Abe e Hikame⁽⁴²⁾ como os precursores desta técnica.

A fim de fixarmos a notação, permanecendo o mais perto possível de modelos realistas de teorias de campo suporemos uma lagrangeana composta de uma parte quadrática nos multipletos e um potencial de interação:

$$L = - \frac{i}{2} \phi_i M_B \phi_i + \bar{\psi}_j M_F \psi_j - V(\phi, \psi) \quad (n.1)$$

onde os índices do multipletto são somados de 1 a n . Para podermos implementar formalmente a expansão $1/n$, suporemos que as constantes de acoplamento decaíam para $n \rightarrow \infty$ ou seja:

$$g = O\left(\frac{1}{n^a}\right) \quad a > 0 \quad (n.2)$$

Assim por ex:

$$L = - \frac{1}{2} \phi_i (\partial^2 - m^2) \phi_i - g (\phi^2)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n \hat{L} \quad (n.3)$$

onde

$$\phi^2 = \phi_i \phi_i \quad (n.4a)$$

$$g = \lambda/n \quad (n.4b)$$

$$\text{Note que } \sum \phi_i \phi_i \sim n \phi_1 \phi_1 ; (\phi^2)^2 = (\sum \phi_i \phi_i)^2 \sim n^2 (\phi_1 \phi_1)^2 \quad (n.5)$$

Além disso termos quárticos e superiores nos múltiplos que comparecem na lagrangeana de interação, deverão ser colocados sob a forma de termos quadráticos, com o auxílio de campos auxiliares. O mesmo se aplica para vínculos, que deverão ser impostos através de multiplicadores de Lagrange.

Em termos de integração funcional, a idéia é simples: Basta usar a expressão:

$$\exp -i \int dx g^2 (\phi^2)^2 = \int \mathcal{D}A \exp -i \int dx [A^2 - 2giA\phi^2] \quad (n.6)$$

e ainda:

$$\delta(P(\phi^2)) = \int \mathcal{D}B \exp -i \int dx B P(\phi^2) \quad (n.7)$$

Assim teremos para a lagrangeana uma forma quadrática, e o funcional gerador será dado por uma expressão do tipo:

$$Z(J_{\phi_i}, J_{\psi_j}) = N^{-1} \int \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\psi_j \mathcal{D}A_1 \dots \mathcal{D}A_k \exp -i \int dx \{ (\phi_i - \xi_i) M_B (\phi_i - \xi_i) + (\bar{\psi}_j - \bar{\eta}_j) M_F (\psi_j - \eta_j) + J_{\phi_i} M_B^{-1} J_{\phi_i} + \bar{J}_{\psi_j} M_F^{-1} J_{\psi_j} + \hat{L}(A_1, \dots, A_k) \} \quad (n.8)$$

Os termos ξ_i e η_j são provenientes de termos lineares na integral de ação do funcional gerador original, como por exemplo termos de fonte: $J_{\phi_i} \phi_i$, $\bar{J}_{\psi_j} \bar{\psi}_j$ e eventualmente outros. $\hat{L}(A_1, \dots, A_k)$ são eventuais termos polinomiais que sobram na introdução de campos com A^2 em (n.6) e outros que não dependem de ϕ_i ou ψ_j e que tenham sido somados e subtraídos para formar o termo quadrático nos campos originais da integral de ação do funcional gerador acima. Agora podemos usar, respectivamente para campos escalares reais, escalares complexos e de Dirac, as expressões

$$N^{-1} \int \mathcal{D}\phi \exp -i \int dx \frac{1}{2} \phi^* M \phi = N^{-1} (\det M)^{-1/2} \quad (n.9a)$$

$$N^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp -i \int dx \phi^* M \phi = N^{-1} (\det M)^{-1} \quad (n.9b)$$

$$N^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp -i \int dx \bar{\psi} M \psi = N^{-1} \det M \quad (n.9c)$$

sendo que para um operador

$$\det M = \exp \operatorname{tr} \ln M \quad (n.10)$$

A expansão de (n.10) em potencias negativas de n é simples.

Tomemos por exemplo o caso:

$$M = -\partial^2 + m^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} R \quad (n.11)$$

$$\ln M = \ln(-\partial^2 + m^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{1}{\sqrt{n}} R\right) \quad (n.12)$$

O primeiro termo contribue com um fator trivial. Para o segundo fazemos uma expansão formal do logaritmo usando o seguinte fato:

$$\operatorname{tr} \left[\frac{1}{-\partial^2 + m^2} \frac{R}{\sqrt{n}} \right]^j = \sum_{n_1 \dots n_j} \langle \varphi_{n_1} | \frac{1}{-\partial^2 + m^2} | \varphi_{n_2} \rangle \langle \varphi_{n_2} | \frac{R}{\sqrt{n}} | \varphi_{n_3} \rangle \dots \langle \varphi_{n_j} | \frac{R}{\sqrt{n}} | \varphi_{n_1} \rangle \quad (n.13)$$

Tomando $|\varphi_n\rangle$ como auto-funções do momento teremos:

$$\langle p | \frac{1}{-\partial^2 + m^2} | q \rangle = \delta(p-q) \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (n.14)$$

Em geral R é um polinomio dos campos auxiliares. No espaço de configurações $\langle x | R | y \rangle = R(x) \delta(x-y)$; no espaço dos momentos, se R for um polinomio temos uma soma de convoluções. Graficamente o termo acima é dado por

Para a interpretação dos campos auxiliares vê-se que a parte quadrática dos mesmos que provem da expansão do determinante, contem termos dos tipos:

Isto quer dizer que estes campos auxiliares, formam uma soma infinita de uma sub classe de gráficos de Feynman que são aqueles que em teoria de perturbação usual formam gráficos tipo "salsicha".

Isto é simples de entender num modelo particular como o Gross-Neveu onde em perturbação temos para a função de 4 fermions a soma:

Esta soma é geométrica e identificando $A(p) =$

$$\left\langle \sum_{j=0}^{\infty} [A(p)]^n \right\rangle = \frac{1}{1-A(p)} \rangle \langle$$

Mas $1-A(p)$ é exatamente a parte quadrática do campo auxiliar obtido pelo método funcional. O termo 1 provem do termo $\hat{L}$ em (n.3), e é o coeficiente do quadrado do campo auxiliar que permaneceu desde que tal campo foi introduzido. O termo $-A(p)$ é o termo quadrá-

tico da expansão do logaritmo.

Assim podemos substituir o gráfico das "salsichas" por

com um campo auxiliar A.

As regras de Feynman podem ser lidas do funcional gerador para cada teoria.

Em geral a estrutura dos gráficos é: (por ex. a função de 4 pontos do campo inicial).

Em

comparecem os "núcleos"

que te-

rão o papel de vértices efetivas para os campos auxiliares.

MATRIZ-S

Matrizes-S são em geral objetos muito complicados, todavia há modelos bidimensionais onde tais objetos são muito mais simples apesar de serem não-triviais. Tal caso ocorre quando o espalhamento é do tipo fatorizado, isto é, o espaço de Hilbert decompõe-se em uma soma direta de espaços com um nº definido de partículas, o que significa ausência de produção e aniquilação de partículas. Tagolnitzer⁽⁴³⁾ demonstrou que num modelo como acima a matriz-S pode ser escrita como sendo um produto de matrizes-S de 2 em 2 partículas.

Historicamente a primeira matriz-S fatorizável foi descoberta na descrição do problema de partículas interagindo por um potencial $\delta(x)$ ⁽⁴⁴⁾.

Modelos fatorizáveis são aqueles que classicamente apresentam infinitas leis de conservação. Isto decorre do fato de que os geradores das simetrias locais podem ser tomados como potências do tensor energia momento. Assim sendo a única possibilidade no espalhamento é de que os números quânticos das partículas troquem entre si, isto é, o conjunto de momentos inicial é igual ao conjunto de momento final.

Isto pode ser visto do seguinte modo: Seja uma teoria de espalhamento bidimensional governada por ∞ leis de conservação correspondente as integrais das correntes locais dadas por Q_n ; $n = 1, 2, \dots \infty$ diagonais nos estados assintóticos de partícula única $\alpha_a(p)$ onde a denota o tipo de partícula com massa m_a e $p = (p^0, p^1)$

$$Q_n |\alpha_a(p)\rangle = q_n^{\alpha_a}(p) |\alpha_a(p)\rangle \quad (S.1)$$

Se levarmos em conta que:

- a) A ação de Q_n num estado contendo um n° arbitrário de partículas é a soma da ação de Q_n em estados de uma partícula

$$Q_n |\alpha_1(p_1) \dots \alpha_k(p_k) \rangle_{in}^{out} = \left[q_n^{\alpha_1}(p_1) + \dots + q_n^{\alpha_k}(p_k) \right] |\alpha_1(p_1) \dots \alpha_k(p_k) \rangle_{in}^{out} \quad (S.2)$$

b) Se $\frac{dQ_n}{dt} = 0 \implies \sum_{j \in in} q_n^{\alpha_j}(p_j) = \sum_{j \in out} q_n^{\alpha_j}(k_j) \quad (S.3)$

- c) e que as cargas $q_n^{\alpha_j}$ são independentes.

Então a teoria satisfaz duas regras de seleção:

- i) O n° de partículas se conserva após o espalhamento.
ii) O conjunto de momentos final é o mesmo que o inicial.

Desta maneira o espalhamento consiste apenas num retardo ou avanço no tempo das partículas em questão com possíveis trocas de número quânticos internos.

As propriedades i) e ii) adicionadas às propriedades da cinemática em 2 dimensões indicam que a matriz-S de multipartícula pode ser escrita em termos das matrizes de 2 partículas, isto é, ela fatora-se num produto de amplitudes mais simples, ou seja, para $p_1^1 > p_2^1 > \dots > p_n^1$

$$S^n(p_1, \dots, p_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n S^{(2)}(p_i, p_j) \quad (S.4)$$

que, por ex, no caso de 3 partículas se escreve:

$$S^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = S^{(2)}(p_1, p_2) S^{(2)}(p_1, p_3) S^{(2)}(p_2, p_3) \quad (S.5)$$

que corresponde as $\frac{n(n-1)}{2}$ colisões (no caso 3) de 2 por 2 partículas. (Ver figuras S.1 e S.2)

O fato da matriz-S ser fatorizável impõe no entanto severas restrições para as amplitudes de espalhamento. Tais restrições podem ser entendidas com o seguinte argumento: Tomemos em espalhamento qualquer de n partículas iniciais com momentos diferentes e apliquemos a simetria local. Esta age diferentemente em cada momento, deslocando-o no espaço, isto significa que se inicialmente tínhamos uma certa ordem da interação, depois de aplicada a simetria, esta ordem será diferente. Em outras palavras se inicialmente a matriz-S escrevia-se como um produto ordenado de $\frac{n(n-1)}{2}$ fatores de matrizes-S 2 em 2 partículas, no final a mesma matriz-S escrever-se-a como um produto de $\frac{n(n-1)}{2}$ matrizes-S de 2 em 2 em ordens diferentes.

É da identificação desta matriz-S escrita de maneiras diferentes, isto é, antes e depois de aplicar a simetria é que obtem-se as chamadas equações de fatorização.⁽⁴⁵⁾

Esquematicamente os 2 processos (antes e depois) se escrevem:

(a)

(b)

de onde se lê a relação:

$$s^{(2)}(p_1, p_2) s^{(2)}(p_1, p_3) s^{(2)}(p_2, p_3) = s^{(2)}(p_2, p_3) s^{(2)}(p_1, p_3) s^{(2)}(p_1, p_2) \quad (S.6)$$

que são as chamadas equações de fatorização.

Estas equações são o ponto de partida do chamado programa de Booststrap para a resolução de modelos classicamente integráveis.

(46)

O programa como um todo consiste no seguinte:

1) Escrever a matriz-S compatível com a simetria do modelo e obter as equações de fatorização e consequentemente os vínculos por ela impostos.

2) Considerar as amplitudes $s^{(2)}$ como funções analíticas de s^* e além disso impor:

a) Unitariedade: $f(\theta)^{**} \cdot f(-\theta) = 1$ (S.7a)

b) Crossing : $f(\theta) = f(i\pi - \theta)$ (S.7b)

Até este ponto as únicas ambiguidades são fatores do tipo

$$\prod \frac{\text{sh } \theta - i \text{ sen } \alpha_i}{i \text{ sh } \theta + i \text{ sen } \alpha_i} \quad (S.8)$$

que são as chamadas ambiguidades do tipo C.D.D.⁽⁴⁷⁾. Os parâmetros α_i caracterizam os estados ligados.

* s é a variável de Mandelstam $s = (p_a^\mu + p_b^\mu)^2 = M_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \text{ ch } \theta_{ab}$

** θ_{ab} é a rapidez que substitui os momentos ($\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b$)

$$p_a^0 = m_a \text{ ch } \theta_a ; p_a^1 = m_a \text{ sh } \theta_a .$$

3) As ambiguidades acima são fixadas através do conhecimento do espectro do modelo por outros métodos (por exemplo métodos semi-clássicos).

O caso de simetria sob o grupo $O(n)$ foi discutido por Zamolodchikov⁽¹⁰⁾ que neste contexto obtiveram as matrizes S do modelo σ -não linear e do modelo Gross-Neveu. Para simetria $U(n)$ as matrizes- S também foram obtidas e foi mostrado⁽⁴⁸⁾ que há 6 classes de soluções. Uma delas (classe III) engloba em parte a solução acima ($O(n)$). Uma outra (classe II) corresponde à matriz- S do modelo de Gross-Neveu quiral e é a candidata à matriz- S do modelo CP^{n-1} (ver capítulo II). Entre as outras classes uma delas é trivial, 2 outras correspondem a situações um tanto patológicas e ainda não entendidas.

Estas classes estão resumidas na seguinte tabela:

Classes	Parameter	$t_1(\theta)$	$u_1(\theta)$	$r_1(\theta)$	$u_2(\theta)$	$r_2(\theta)$	$t_2(\theta)$
I		1	1	0	0	0	0
II	$\lambda = \frac{2}{n}$	$f(\theta, \lambda)$	$t_1(i\pi - \theta)$	0	$-\lambda \frac{i\pi}{\theta} u_1(\theta)$	0	$-\lambda \frac{i\pi}{i\pi - \theta} t_1(\theta)$
III	$\lambda = \frac{1}{n-1}$	$f(\theta, \lambda) f(i\pi - \theta, \lambda)$	$t_1(\theta)$	$-\lambda \frac{i\pi}{\theta} t_1(\theta)$	$r_1(\theta)$	$-\lambda \frac{i\pi}{i\pi - \theta} t_1(\theta)$	$r_2(\theta)$
IV	$\lambda = \frac{1}{n+1}$	$f(\theta, \lambda) f(i\pi - \theta, \lambda) i \tanh \frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}i\pi)$	$-t_1(\theta)$	$\lambda \frac{i\pi}{\theta} t_1(\theta)$	$r_1(\theta)$	$-\lambda \frac{i\pi}{i\pi - \theta} t_1(\theta)$	$r_2(\theta)$
V	$\text{ch } \pi\mu = n$	0	0	$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\theta, k/2\mu i)}{f(\theta, k/2\mu i + \frac{1}{2})}$	$r_1(\theta)$	$\frac{\sin \mu(i\pi - \theta)}{\sin \mu\theta} r_1(\theta)$	$r_2(\theta)$
VI	$e^{\pi\mu} = n$	0	0	$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\theta, k/2\mu i)}{f(\theta, k/2\mu i + \frac{1}{2})}$	$e^{i\mu\theta} r_1(\theta)$	$\frac{\sin \mu(i\pi - \theta)}{\sin \mu\theta} r_1(\theta)$	$e^{i\mu(i\pi - \theta)} r_2(\theta)$

Tabela S1: Soluções mínimas de matrizes- S bidimensionais fatorizadas com simetria $U(n)$.

Na tabela as amplitudes $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$, $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$, $t_1(\theta)$, $t_2(\theta)$ são amplitudes invariantes introduzidas como segue:

No espalhamento partícula-antipartícula (na representação fundamental de $U(n)$) $P_\alpha \bar{P}_\alpha$ a matriz-S pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \text{out} \langle P_\beta(p'_1) \bar{P}_\delta(p'_2) | P_\alpha(p_1) \bar{P}_\gamma(p_2) \rangle_{\text{in}} &= \alpha_\gamma T_{\beta\delta}(\theta) \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) - \\ &- \alpha_\gamma R_{\delta\beta}(\theta) \delta(p'_1 - p_2) \delta(p'_2 - p_1) \end{aligned} \quad (\text{S.9})$$

onde T , R são amplitudes de transição e reflexão respectivamente escritas em função das amplitudes invariantes:

$$\alpha_\gamma T_{\beta\delta}(\theta) = t_1(\theta) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + t_2(\theta) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \quad (\text{S.10a})$$

$$\alpha_\gamma R_{\delta\beta}(\theta) = r_1(\theta) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + r_2(\theta) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \quad (\text{S.10b})$$

No espalhamento partícula partícula a matriz-S é escrita como:

$$\begin{aligned} \text{out} \langle P_\beta(p'_1) P_\delta(p'_2) | P_\alpha(p_1) P_\gamma(p_2) \rangle_{\text{in}} &= \alpha_\gamma U_{\beta\delta}(\theta) \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) - \\ &- \alpha_\gamma U_{\delta\beta}(\theta) \delta(p'_1 - p_2) \delta(p'_2 - p_1) \end{aligned} \quad (\text{S.11})$$

onde U pode também ser escrita em termos de $u_1(\theta)$ e $u_2(\theta)$ que são amplitudes invariantes:

$$\alpha_\gamma U_{\beta\delta}(\theta) = u_1(\theta) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - u_2(\theta) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta} \quad (\text{S.12})$$

A representação gráfica das amplitudes T , R e U é:

O programa exige ainda que se imponha unitariedade as amplitudes U , T, R que em termos das amplitudes invariantes resulta numa série de equações cujas soluções representam as seis classes já apresentadas na tabela S.1.

Todas as seis classes podem ser expressas em termos de uma função $f(\theta, \lambda)$ meromorfa em θ , unicamente definida por

$$f(\theta) \cdot f(-\theta) = 1 \quad (\text{S.13a})$$

$$f(i\pi - \theta) f(i\pi + \theta) = \frac{\theta}{\theta + \pi^2 \lambda^2} \quad (\text{S.13b})$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{S.14})$$

e é explicitamente dada por:

$$f(i\pi\phi, \lambda) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\phi)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\phi)} \quad (\text{S.15})$$

Fig. s.1

Fig. s.2

1.2 - Modelos em (1+1) dimensões

1.2.a - Modelo de Thirring

O modelo de Thirring foi o primeiro, de grande importância no estudo de modelos bidimensionais.

(1)

Thirring em 1958 mostrou que o modelo é exatamente solúvel e calculou os auto estados da hamiltoniana. Todavia suas manipulações foram puramente formais. Daí por diante houve uma série de autores que estudaram o modelo mas sua solução completa e detalhada somente apareceu em 1967 com Klaiber ⁽²⁾.

O modelo é tratado em um espaço-tempo de Minkowski, de duas dimensões com coordenadas

$$x^\mu = (x^0, x^1) \quad (1.29a)$$

e com o tensor métrico e símbolo de Levi-Civita satisfazendo

$$g^{00} = -g^{11} = \varepsilon^{10} = \varepsilon_{01} = 1 ; g^{\mu\nu} = 0 \text{ para } \mu \neq \nu \quad (1.29b)$$

As matrizes de Dirac são dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.29c)$$

satisfazendo

$$\gamma^\mu \gamma^5 = \varepsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (1.29d)$$

O modelo descreve fermions sem massa com auto-interação corrente-corrente sendo sua lagrangeana dada por:

$$L = i\bar{\psi}\partial\psi + g j_\mu j^\mu \quad (1.30)$$

onde $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ é o campo básico da teoria e a corrente j_μ é dada por:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (1.31)$$

A lagrangeana (1.30) possui as simetrias contínuas

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad (1.31a)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\chi \gamma^5} \psi \quad (1.31b)$$

conhecidas, respectivamente por simetria de gauge (global) e simetria quiral associadas à corrente e pseudo-corrente conservadas.

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (1.32)$$

$$j_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi \quad (1.33)$$

As equações de campo da teoria são:

$$i \not{\partial} \psi = -g \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \psi \quad (1.34)$$

A solubilidade deste modelo está ligada ao fato de que a corrente j_μ é conservada e seu rotacional é zero, isto é:

$$\partial_\mu j_\mu = \partial_\mu \epsilon_{\mu\nu} j_\nu = 0 \quad (1.35)$$

indicando desta forma que $j_\mu(x)$ é um campo livre e deve satisfazer

$$\square j^\mu(x) = 0 \quad (1.36)$$

Usando (1.35) podemos escrever j_μ como sendo o gradiente de uma função ϕ :

$$j_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \phi \quad (1.37)$$

isto é, ϕ é um campo escalar livre de massa nula que deve satisfazer

$$\partial^2 \phi = 0 \quad (1.38)$$

Agora usando (1.37) podemos definir uma família de soluções de (1.30) (dependentes de um parâmetro) por:

$$\psi(x) = \exp(i\alpha\phi + \beta\gamma_5\bar{\phi}) \psi(x) \quad (1.39)$$

onde $\psi(x)$ é um campo fermiônico livre.

$$\epsilon_{\mu\nu} j_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \bar{\phi} \quad (1.40)$$

e

$$\alpha - \beta = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \quad (1.41)$$

Note que $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ classicamente e que $\phi(x)$ deve ser regularizado pois representa um campo de massa nula.

A solução (1.39) pode ser quantizada podendo-se com isso calcular qualquer valor esperado de campos arbitrários no vácuo.

Estas soluções dependem de um parâmetro arbitrário que pode ser tomado como sendo:

$$\lambda = \alpha\beta - \sqrt{\pi} \alpha - \sqrt{\pi} \beta \quad (1.42)$$

O fato deste parâmetro λ ser diferente de zero é talvez a característica mais interessante deste modelo.

Pode-se mostrar que por uma transformação de Lorentz o campo $\psi(x)$ sofre uma transformação do seguinte tipo

$$U(\Lambda)^{-1} \psi(x) U(\Lambda) = \left[\exp\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi}\right) \chi \gamma_5 \right] \psi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.43)$$

onde χ é o parâmetro da transformação de Lorentz Λ , isto é, para

$$x \rightarrow \Lambda x ; \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} ; \Lambda_u = e^{\chi_u} ; \Lambda_v = e^{-\chi_v} \quad (1.44)$$

Desta maneira o parâmetro $(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi})$ pode ser visto como o spin em duas dimensões e toma valores contínuos. A interpretação deste fato é que em uma dimensão espacial não podemos definir rotação e o spin é um parâmetro associado ao tipo de transformação de Lorentz aplicada ao campo.

Desta forma não se constituirá surpresa o fato de que em duas dimensões uma lagrangeana tipicamente fermiônica possa se tornar equivalente a uma bosônica. Esta característica do mundo bidimensional é extremamente importante e responsável pela construção de soluções exatas para várias teorias. Consiste basicamente em se escrever um campo espinorial $\psi(x)$, qualquer em termos de um campo escalar, ou melhor, em termos de exponenciais de um campo escalar que vem a ser o potencial da corrente axial denominado pseudo potencial.

O caráter não massivo do pseudo potencial ϕ tem consequências importantes. Em particular a corrente axial j_{μ}^5 é automaticamente conservada.

Costuma-se atribuir também à não massividade de ϕ a existência de estados com carga e pseudo-carga não nulas. No entanto a conservação da mesma não decorre de nenhuma simetria de Nöther aplicada à lagrangeana bosonizada do modelo, ou seja:

$$L = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi \quad (1.45)$$

Desta forma a conservação da carga é de natureza topológica pois o espaço de soluções, com energia finita, não é simplesmente conexo, possuindo diversas classes topológicas inequivalen-

tes (setores), cada uma das quais caracterizadas por uma grandeza proporcional a carga.

Note que devido a divergência infravermelha um campo escalar sem massa sô pode ser introduzi do em um espaço-tempo bidimensional se a métrica do espaço de Hilbert for indefinida no entanto a conservação da carga e pseudo carga garante que o campo ψ escrito como exponencial de ϕ vivam num espaço de Hilbert com métrica definida positiva.

1.2.b - Modelo de Schwinger

A eletrodinâmica quântica para fermions não massivo formulada no espaço-tempo duas dimensões caracterizadas pelas equações (1.29) foi resolvida por Schwinger em 1962.⁽³⁾ Muitos trabalhos seguiram desde então e o mais importante deles foi o de Lowenstein e Swieca (1971)⁽⁴⁾ onde obtiveram a solução completa do modelo além de terem salientado uma física muito importante da teoria que vieram a ser confinamento e os chamados vácuos- θ .

O modelo é descrito pela densidade de lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \quad (1.46)$$

onde $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ é um campo fermiônico, A_μ é o potencial eletromagnético, e é a constante de acoplamento e $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo eletromagnético dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

As equações de campo correspondentes ao modelo são:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = e A_\mu \gamma^\mu \psi = 0 \quad (1.47a)$$

e

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.47b)$$

que são respectivamente as equações de Dirac e de Maxwell.

O modelo possui as simetrias

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \psi(x) \quad (1.48a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (1.48b)$$

Além das simetrias de gauge global e simetria quiral

$$\psi \rightarrow e^{i\omega} \psi \quad (1.49a)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\chi\gamma^5} \psi \quad (1.49b)$$

associadas respectivamente à corrente e pseudo-corrente invariantes de gauge:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.50)$$

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (1.51)$$

O modelo pode ser resolvido em termos de 3 campos: um campo de Dirac livre $\psi(x)$, um campo escalar de massa m : $\tilde{\Sigma}(x)$ e um campo escalar de massa zero e métrica indefinida $\tilde{\eta}(x)$ (necessária por causa do problema infravermelho de um campo escalar de massa zero em duas dimensões).

A solução covariante de (1.46) é:

$$\psi(x) = \exp[i\sqrt{\pi}\gamma^5(\tilde{\eta}^+(x) + \tilde{\Sigma}^+(x))]\phi(x) \exp[i\sqrt{\pi}\gamma^5(\tilde{\eta}^-(x) + \tilde{\Sigma}^-(x))] \quad (1.52)$$

onde $\phi(x)$ é um campo fermiônico livre de massa zero e

$$\Sigma(x) = \Sigma^+(x) + \Sigma^-(x) \quad (1.53a)$$

$$\eta(x) = \eta^+(x) + \eta^-(x) \quad (1.53b)$$

Da equação de Dirac (1.47a):

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{m} (\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\Sigma}(x) + \partial_\mu \eta(x)) \quad (1.54)$$

$$\text{onde } m = e/\sqrt{\pi} ; \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\eta}(x) = \partial_\mu \eta(x) \quad (1.55)$$

O campo A_μ tem massa $e/\sqrt{\pi}$ além de uma parte longitudinal sem massa (que não aparecia na solução original de Schwinger).

Nesta solução as equações de Maxwell (1.47b) ficam modificadas para:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = -e(j^\mu(x) - j_L^\mu(x)) \quad (1.56)$$

onde

$$j_{\mu}(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon^2 \neq 0}} [(\bar{\psi}(x+\epsilon)\gamma_{\mu}\psi(x) - \langle 0|\bar{\psi}(x-\epsilon)\gamma_{\mu}\psi(x)|0\rangle)(1-ie\epsilon^{\mu}A_{\mu}(x))]f^{-1}(\epsilon) \quad (1.57)$$

com $f^{-1}(0)$ sendo uma constante de renormalização.

A corrente (1.57) corresponde à corrente eletromagnética (definição ingênua), isto é:

$$j^{\mu}(x) = j_{\ell}^{\mu}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^{\mu}\eta(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu}\tilde{\Sigma}(x) \quad (1.58)$$

onde o primeiro termo é justamente a corrente livre

$$j_{\ell}^{\mu}(x) = : \bar{\phi}(x) \gamma^{\mu} \phi(x) : \quad (1.59)$$

e o termo

$$j_{\ell}^{\mu}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^{\mu}\eta(x) \equiv j_L^{\mu}(x) \quad (1.60)$$

Agora a equação de Maxwell (1.56) é satisfeita no subespaço físico definido por:

$$j_L^{\mu}(y) \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in H_{\text{fis}}. \quad (1.61)$$

Vamos agora construir uma solução operatorial dentro do subespaço físico. Em tal subespaço a corrente longitudinal j_L^{μ} é identicamente nula e podemos identificar o campo $\eta(x)$ com o potencial $j(x)$ da corrente livre definido por:

$$j_{\ell}^{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\mu} j(x) \quad (1.62)$$

A solução do modelo depende de um parâmetro livre e é dada como segue:

$$\psi^{\alpha}(x) = \exp\left[i \frac{\pi}{2} (Q + \tilde{Q}) + i\chi^{+}(x)\right] \phi(x) \exp[i\chi^{-}(x)] \quad (1.63)$$

com $\chi^{\pm}(x) = \alpha j^{\pm}(x) + \alpha(\sqrt{\pi}-\alpha)Q \Delta_k^{\pm}(x) + \sqrt{\pi}(\sqrt{\pi}-\alpha)\tilde{Q} \tilde{\Delta}_k^{\pm}(x) +$

$$+ \gamma^5(\sqrt{\pi} \tilde{j}^{\pm}(x) + \sqrt{\pi} \tilde{\Sigma}^{\pm}(x)) \quad (1.64)$$

$$j(x)(\tilde{j}(x)) = j^+(x) + j^-(x)(\tilde{j}^+(x) + \tilde{j}^-(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2p^0}} (\epsilon p^1) c^+(p^1) (e^{-ip \cdot x} - \theta(k-p^0))$$

$$+ \text{h.c.} \quad (1.65)$$

onde

$$\Delta_k^{\pm}(x)(\tilde{\Delta}_k^{\mp}(x)) = \pm \frac{i}{2\pi} \int \frac{d(p^1)}{2p^0} (\epsilon(p^1)) \theta(k-p^0) (e^{\mp ip \cdot x} - 1) \quad (1.66)$$

e k é um parâmetro de corte. Q e $\tilde{Q}$ são respectivamente a carga e pseudo carga total.

Os resultados físicos importantes são provenientes da álgebra dos invariantes de gauge. Esta álgebra é gerada pelo campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, pela corrente j_μ e por $T(x,y)$ quantidades bilocais definidas por:

$$T(x,y) = \exp[ik^+(x,y)] \phi(x) \phi^*(y) \exp[ik^-(x,y)] \quad (1.67)$$

$$\text{com } k^\pm(x,y) = e \int_x^y A_\mu^\pm(t) dt^\mu + \chi^\pm(x) - \chi^\pm(y) \quad (1.68)$$

O bilocal $T(x,y)$ corresponde a um dipolo com uma linha de fluxo entre seus constituintes e em particular para $\alpha=\sqrt{\pi}$, $T(x,y)$ toma um valor particularmente simples. Pode-se mostrar usando as funções de Wightman da teoria que neste gauge definindo $\psi(x)$ como:

$$\psi^{\sqrt{\pi}}(x) = \exp[i\sqrt{\pi}\gamma^5 \tilde{\Sigma}^+(x)] \left(\frac{k e^{-\Gamma^+(1)}}{2\pi} \right)^{1/2} \sigma(x) \exp[i\sqrt{\pi}\gamma^5 \tilde{\Sigma}^-(x)] \quad (1.69)$$

tem-se através das funções de Wightman.

$$\langle 0 | \sigma_1(x_1) \dots \sigma_1(x_m) \sigma_2(x_{m+1}) \dots \sigma_2(x_n) \times \sigma_1^*(y_1) \dots \sigma_1^*(y_n) \sigma_2^*(y_{m+1}) \dots \sigma_2^*(y_n) | 0 \rangle = 1 \quad (1.70)$$

$$[\sigma(x), \sigma(y)] \equiv 0 \quad (1.71)$$

$$\text{Disto segue } \sigma_i(x) = \sigma_i(0) \equiv \sigma_i \text{ e } \sigma_i \sigma_i^* = \sigma_i^* \sigma_i = 1 \quad (1.72)$$

Parafraseando a referência (4) os σ s formam uma álgebra abeliana de operadores constantes unitários e o espaço de Hilbert contra infinitos vácuos parametrizados por

$$|n_1 n_2\rangle = (\sigma_1)^{n_1} (\sigma_2)^{n_2} |0\rangle \quad (1.73)$$

onde n_1, n_2 são inteiros arbitrários.

As representações irredutíveis são dadas pelos vácuos θ :

$$|\theta_1 \theta_2\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1 n_2} e^{i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} |n_1 n_2\rangle \quad (1.74)$$

$$\text{com } \sigma_1 = e^{i\theta_1} ; \sigma_2 = e^{i\theta_2} \quad (1.75)$$

Assim sendo os eletrons desapareceram completamente desta teoria o que significa blindagem da carga elétrica. O confinamento pode ser entendido também no gauge de Coulomb. Neste caso temos campos patológicos e o campo do elétron não é uma distribuição temperada. O potencial de Coulomb cresce linearmente com a distância para separações tipo espaço o que impede a existência de estados carregados da teoria.

1.2.c - Modelo de sine-Gordon e Thirring Massivo

O modelo de sine-Gordon é o modelo bidimensional mais simples de interação não linear que apresenta soluções tipo solitons.

O modelo é definido pela densidade de lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \phi \quad (1.76)$$

A equação de campo corresponde é do tipo sine-Gordon (daí o nome do modelo).

$$\partial^2 \phi + k \sin \beta \phi = 0 \quad (1.77)$$

Esta equação de campo é invariante sob a transformação:

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{2\pi n}{\beta} \quad (1.78)$$

tendo portanto o vácuo da teoria uma degenerescência discreta, caracterizada pelo índice n . A teoria possui soluções tipo soliton (solução clássica que liga dois vácuos distintos da teoria).

Coleman em 1975 (6) estudou o modelo quântico e mostrou sua equivalência com o modelo de Thirring massivo. O modelo de Thirring massivo é obtido introduzindo-se em (1.30) um termo de massa. A densidade de lagrangeana então fica:

$$L = i\bar{\psi}\partial\psi + \frac{g}{2} (\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)^2 - m\bar{\psi}\psi \quad (1.79)$$

Sendo que agora o modelo não mais possui simetria quiral apenas simetria de gauge global.

Coleman tratou o termo de massa como perturbação e mostrou que a série perturbativa assim descrita é igual aquela obtida para o modelo de sine-Gordon se fizermos uma perturbação em torno de $\alpha=0$.

A igualdade das duas teorias requer as seguintes identificações:

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = 1 + \frac{g}{\pi} \quad (1.80)$$

$$-\frac{\beta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi = j_{\mu} \quad (1.81)$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta\phi = -m\bar{\psi}\psi \quad (1.82)$$

$$-\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\mu} \phi = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \quad (1.83)$$

As identificações acima caracterizam então o processo geral em duas dimensões chamado de bosonização.

Assim de uma maneira geral um campo de fermions pode ser escrito em termos de um campo de boson pela chamada fórmula de Mandelstan (50).

$$\psi(x) = u : \exp \left[- \frac{2\pi i}{\beta} \int_{-\infty}^x d\xi \dot{\phi}(\xi) + \frac{1}{2} i \beta \phi(x) \right] : \quad (1.84)$$

onde u é um certo spinor constante.

Esses modelos são classicamente integráveis e possuem correntes superiores conservadas. Algumas destas foram explicitamente construídas no caso quântico. Assim nestes modelos deve ser proibida a produção múltipla de partículas e sua matriz-S é fatorizável. A mesma foi calculada no espírito do programa de Bootstrap e o espalhamento de fermions f (soliton de Sine-Gordon) e anti-fermions $\bar{f}$ (anti-solitons) é dado em forma diagonalizada por:

$$S^{\min}(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} S_{ff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{f\bar{f}}^{(+)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{f\bar{f}}^{(-)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{\bar{f}\bar{f}} \end{pmatrix}^{\min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\text{sh } \frac{1}{2} \lambda (\theta + i\pi)}{\text{sh } \frac{1}{2} \lambda (\theta - i\pi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\text{ch } \frac{1}{2} \lambda (\theta + i\pi)}{\text{ch } \frac{1}{2} \lambda (\theta - i\pi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S_{ff}^{\min}(\theta, \lambda)$$

onde

$$S_{ff}^{\min}(\theta, \lambda) = \exp \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{\text{sh } \frac{1}{2} x (1 - \frac{1}{\lambda})}{\text{sh}(\frac{x}{2\lambda}) \text{ch } \frac{1}{2} x} \text{sh } x \frac{\theta}{i\pi} . \quad (1.85)$$

Esta matriz-S apresenta polos em $\theta_k = i\pi (1 - \frac{k}{\lambda})$ o que corresponde a estados ligados com massas $m_k = 2m \sin \frac{k\pi}{2\pi}$ o que está de acordo com o espectro obtido pela aproximação WKB.

Esses resultados foram verificados em teoria de perturbação para $g \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 0$.

1.2.d - Modelo de Gross-Neveu

Neste modelo estuda-se campos fermiônicos, sem massa, de N componentes num espaço-tempo bidimensional.

O modelo é definido pela densidade de Lagrangeana:

$$L = i \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_{\alpha} \not{\partial} \psi_{\alpha} + \frac{g^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha})^2 \quad (1.86)$$

onde g é uma constante de acoplamento adimensional e ψ_{α} é o campo fundamental da teoria.

A característica mais importante deste modelo é o fato de ser o mais simples apresentando liberdade assintótica. A densidade de lagrangeana acima apresenta invariância pela transformação chiral $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ que garante a não massividade do fermion em qualquer ordem de perturbação.

Se tomarmos, no entanto, o limite de $m \rightarrow \infty$ na lagrangeana de Yukawa (5), obteremos:

$$L_Y = i \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_{\alpha} \not{\partial} \psi_{\alpha} - \frac{1}{2} \sigma^2 - g \sum_{\alpha=1}^N \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \sigma \quad (1.87)$$

onde $\sigma(x)$ é um campo escalar, classicamente dado por

Uma vez obtida a função $\Gamma^{(4)}$ podemos escalonar todos os momentos por e^t com relação a p_i^0 e assim obtemos uma constante de acoplamento parametrizada em t que chamamos de $\bar{g}^2(t)$.

De (1.89) e (1.90) obtêm-se então

$$\bar{g}^2(g, t) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2 N}{\pi} t} \quad (1.91)$$

de onde se verifica imediatamente que a teoria é assintoticamente livre pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{g}^2(g, t) = \frac{\pi}{Nt} \quad (1.92)$$

Além disso $\Gamma^{(4)}(g, \mu)$ deve satisfazer a equação do grupo de renormalização homogênea ou seja:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \Gamma^{(4)}(g, \mu) = 0 \quad (1.93)$$

de onde deduzimos

$$\beta(g) = - \frac{g^2 N}{2\pi} < 0 \quad (1.94)$$

cujo sinal negativo indica que a teoria é assintoticamente livre. No entanto a constante de acoplamento efetiva $\bar{g}(g, t)$ satisfaz

$$\frac{d\bar{g}(g, t)}{dt} = \beta(\bar{g}) \quad (1.95)$$

verificando-se um polo em (1.91) para $t = - \frac{\pi}{g^2 N}$ que implica num polo na função $\Gamma^{(4)}$ em $s = - \mu^2 e^{-2\pi/g^2 N}$ mostrando a existência de taquions na teoria e isto indica que podemos estar tomando o vácuo errado, isto é, o vácuo normal que é invariante pela transformação

$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ não é o estado fundamental.

O potencial efetivo pode ser construído

$$V(\sigma_c, \sigma_0, g) = \frac{1}{2} \sigma_c^2 + \frac{g^2 N}{4\pi} \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^2 - 3 \right] \quad (1.96)$$

onde $\sigma_c = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle$ = campo σ clássico

$$\text{e } \sigma_0 \text{ é tal que } \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c = \sigma_0} = 1$$

O mínimo de (1.96) é encontrado para

$$\sigma_{\min} = \sigma_0 \exp\left(1 - \frac{\pi}{g^2 N}\right) \quad (1.97)$$

que é claramente diferente de zero. Assim tomando-se a expansão em torno de $\sigma_{\min}$ verifica-se a quebra da simetria $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ e o aparecimento de uma massa para o campo ψ . A massa gerada, por esse mecanismo dinâmico, para o fermion é

$$M_F = g \sigma_0 \exp\left(1 - \frac{\pi}{g^2 N}\right) \quad (1.98)$$

que por ser um parâmetro físico não depende do ponto de renormalização e portanto deve obedecer a equação do grupo de renormalização homogênea:

$$\left[\sigma_0 \frac{\partial}{\partial \sigma_0} + \bar{\beta}(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] M_F(\sigma_0, g) = 0 \quad (1.99)$$

$$\text{onde } M_F(\sigma_0, g) = \sigma_0 \exp - \int^g \frac{dx}{\bar{\beta}(x)} = \sigma_0 \exp - \int^g \frac{1 + g^2 N/2\pi}{g^3 N/2\pi} \quad (1.100)$$

de onde se vê claramente a equivalência entre M_F e g .

Matriz-S:

É verificável também que o modelo apresenta ausência de produção de pares e consequente fatorização da matriz S.

A ausência de produção múltipla é facilmente verificada em $1/N$, (no limite $N \rightarrow \infty$). Considere os gráficos no processo $2 \rightarrow 4$.

Em particular pela regra de Källén-Toll (ver apêndice) o gráfico (g) é igual a soma de 3 termos correspondentes a 3 possíveis quebras de loop através da contração de 2 linhas, cada uma contendo dois diagramas de árvore no lado direito e no esquerdo da linha pontilhada e diferentes divisões do triângulo na figura g cancela os outros termos de a até f completamente. Estas considerações nos levam a crer que o modelo seja completamente fatorizável.

Os elementos da matriz S de multi partículas são o produto de elemento de matriz S de 2 partículas como se o espalhamento fosse a consequência de colisões de 2 partículas (ver gráf. 1) no parágrafo sobre matriz-S.

(52)

A construção da matriz S é simples; consideremos partículas de massa $\underline{m}$ e momento

$$\begin{aligned} p_a^0 &= m \operatorname{ch} \theta_a \\ p_a^1 &= m \operatorname{sh} \theta_a \end{aligned} \quad (1.101)$$

e associamos a cada uma um operador $A_i(\theta)$.

Os estados assintóticos da teoria estão relacionados com produtos ordenados destes $A_i(\theta_a)$. Assim:

$$\begin{aligned} [\theta_{1i}, \theta_{2j}; \text{out}] &= A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) |0\rangle \\ [\theta_{2i}, \theta_{1j}; \text{in}] &= A_i(\theta_2) A_j(\theta_1) |0\rangle \end{aligned} \quad (1.102)$$

onde nos estados out (in) os operadores estão em ordem crescente (decrescente). Podemos assim escrever qualquer estado $|in\rangle$ com uma superposição de estados $|out\rangle$, obtendo-se os elementos da matriz S , ao comutarmos os operadores A .

$$\begin{aligned} A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) &= \delta_{ij} \sigma_1(\theta_{12}) \sum_{k=1}^N A_k(\theta_2) A_k(\theta_1) + \\ &+ \sigma_2(\theta_{12}) A_j(\theta_2) A_i(\theta_1) + \sigma_3(\theta_{12}) A_i(\theta_2) A_j(\theta_1) \end{aligned} \quad (1.103)$$

onde σ_i são elementos de matriz de 2 partículas e $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$.

Ao calcularmos os elementos de matriz vão aparecer produtos dos operadores acima definidos. Ao comutarmos os mesmos vão aparecer produtos das amplitudes (comutadores) que em geral possuem um número reduzido de soluções. Para o presente modelo, obtemos, com unitariedade, analiticidade, crossing e conhecendo ainda o espectro:

$$\sigma_1(\theta) = -i \frac{\lambda}{i\pi - \theta} \sigma_2(\theta) \quad (1.104)$$

$$\sigma_2(\theta) = \sigma_2^{(0)}(\theta) \frac{\text{sh}\theta + i \text{sen } \alpha}{\text{sh}\theta - i \text{sen } \alpha} \quad (1.105)$$

$$\sigma_3(\theta) = -i \frac{\lambda}{\theta} \sigma_2(\theta) \quad (1.106)$$

onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2} \text{ e } \alpha \text{ é real} \quad (1.107)$$

$$\sigma_2^{(0)}(\theta) = Q(\theta) Q(i\pi - \theta) \quad (1.108)$$

$$Q(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2\pi} - \frac{i\theta}{2\pi}) (\frac{1}{2} - \frac{i\theta}{2\pi})}{\Gamma(-\frac{i\theta}{2\pi}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{i\theta}{2\pi})} \quad (1.109)$$

De uma maneira geral

$$\sigma(\theta) = \sigma^{(0)}(\theta) \prod_i \frac{\text{sh}\theta + i \text{sen } \alpha_i}{\text{sh}\theta - i \text{sen } \alpha_i} \quad (1.110)$$

de cujo denominador obtêm-se os polos que representam os estados ligados.

1.2.e - Modelo de Gross-Neveu quiral

O modelo de Gross-Neveu quiral é definido pela densidade de lagrangeana:

$$L = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{g^2}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \quad (1.111)$$

Este modelo possui uma simetria contínua $\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi$. A expansão $1/N$ deste modelo fornece um grande nº de problemas. Em primeiro lugar a simetria acima é quebrada dinamicamente por um processo inteiramente análogo ao encontrado no modelo de Gross-Neveu comum. No entanto a simetria quebrada neste modelo é contínua o que daria origem a um boson de Goldstone em 2 dimensões. Todavia isto é impossível em 2 dimensões pelo teorema de Coleman: "Não existe bo-

son de Goldstone em 2 dimensões pois aparecem divergências infravermelhas indomáveis".

O processo acima deu origem a diversas confusões dentro da literatura até mesmo Gross e Neveu em seu artigo original cometeram um erro na explicação deste fenômeno. Hoje sabe-se que existe geração de massa para fermion sem quebra espontânea de simetria, e portanto sem boson de Goldstone mas com uma transição de fase do tipo de Kosterlitz-Thouless, isto é, ao invés de um polo na função de 2 pontos temos um corte e seu decaimento para longas distâncias não é exponencial e sim uma potência da distância.

A quiralidade (ou seja o auto valor de $1 \pm \gamma_5$) dos fermions físicos é blindada e tal n° quântico é carregado por excitações livres sem massa (Boson de Goldstone) que desacoplam totalmente da teoria.

Esse modelo é assintoticamente livre e é classicamente integrável. Sua matriz S foi calculada e verificada através de uma expansão $1/N$ modificada. Mostrou-se que essa matriz-S é da classe II (54) que não permite espalhamento partícula-anti-partícula a 180° .

1.2.f - Modelo σ -não linear

O modelo σ -não linear tem uma história interessante e muito variada no contexto de teoria quântica de campos. (55)

Inicialmente foi introduzido no contexto de interações fortes em 4 dimensões para explicar certos resultados de álgebras de corrente e conservação parcial da corrente axial (PCAC). Em sua versão inicial o modelo possuía simetria $O(4)$, isto é 4 campos, que

era quebrada produzindo 3 bosons de Goldstone (que seriam os pions).

Foi somente em 1975 que Polyakov⁽³⁴⁾ e Migdal⁽⁵⁶⁾ estudando o modelo em 2 dimensões acharam fortes analogias com teorias de gauge em 4 dimensões. Estes autores analisaram relações recursivas destas teorias definidas numa rede. Tais analogias tornaram-se cada vez mais evidentes. O modelo é assintoticamente livre.^(34,12) Classicamente podemos integrar o modelo o qual pertence à classe de modelos com soluções tipo soliton.⁽¹³⁾ O modelo pode ser escrito em termos de um campo de gauge.⁽⁹⁾ Para $N=3$ o modelo apresenta soluções tipo instanton.⁽¹¹⁾

A densidade de lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2f} \partial_\mu q_i \partial_\mu q_i$$

$$q_i = q_1, \dots, q_N \quad (1.112)$$

$$q^2 = 1$$

A expansão $1/N$ do modelo pode ser obtida através da lagrangeana efetiva:

$$L_{ef} = \frac{1}{2} (\partial_\mu q_i)^2 + \frac{\omega(\alpha)}{\sqrt{N}} (q^2 - \frac{N}{2f}) - \frac{1}{2} m^2 q_i^2 \quad (1.113)$$

O termo de massa é até esse ponto irrelevante devido ao vínculo geométrico imposto sobre os q_i .

A função geratriz das funções de Green pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$Z[J] = k^{-1} \int \prod_i d\omega(x) \prod_i dq_i(x) \exp \left\{ i \int d^2x [L_{ef}[q_i, \omega] + J_i(x) q_i(x)] \right\} \quad (1.114)$$

onde k implementa a normalização $Z(0) = 1$.

Note que

$$\int \prod_i d\omega(x) \exp \int d^2x \frac{\omega i}{2\sqrt{N}} (q^2 - \frac{N}{2f}) \approx \delta(q^2 - \frac{N}{f}) \quad (1.115)$$

A integral sobre os campos q_i pode ser efetuada explicitamente fornecendo:

$$Z[J] = k^{-1} \int \prod_x d\omega(x) \exp \left\{ i S_{CF}^{eff} |\omega| + \frac{i}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) J_i(x') G_{CF}(x, x'; \omega) \right\} \quad (1.116)$$

onde

$$S_{CF}^{eff} = i \frac{N}{2} \text{tr} \ln \left(\partial^2 + m^2 - \frac{\omega(x)}{\sqrt{N}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega(x) \sqrt{N}}{2f} \quad (1.117)$$

Esta ação efetiva pode ser expandida em potências de $N^{-1/2}$ usando-se:

$$\ln(\partial^2 + m^2 + \frac{\omega(x)}{\sqrt{N}}) = \ln(\partial^2 + m^2) + \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\partial^2 + m^2} \frac{\omega(x)}{\sqrt{N}} \right) \right] \quad (1.118)$$

e como

$$\text{tr} \ln [1+A] = \text{tr} \left[A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots \right] \quad (1.119)$$

e

$$\text{tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} \frac{\omega}{\sqrt{N}} \right]^n = \text{diagrama} \quad (1.120)$$

gera-se a expansão $1/N$ do modelo.

O propagador do campo auxiliar $\omega(x)$ é:

$$[\tilde{\Delta}(p)]^{-1} = - \int d^2k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.121)$$

Para a expansão ser finita no limite $N \rightarrow \infty$, o coeficiente de $\sqrt{N}$ deve ser zero daí vem:

$$\int d^2x \, \omega(x) \frac{\sqrt{N}}{2f} - \frac{1}{2} \sqrt{N} \int d^2x \, \omega(x) \left(\frac{1}{(\partial^2 + m^2)} \right) = 0 \quad (1.122)$$

ou seja

$$\tilde{\omega}(0) \frac{\sqrt{N}}{2f} - \frac{\sqrt{N}}{2} \tilde{\omega}(0) \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} = 0 \quad (1.123)$$

onde Λ é um corte ultravioleta (ou analogamente o ponto de renormalização); assim a condição de estabilidade fica sendo:

$$m^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{2\pi}{f}} \quad (1.124)$$

Sendo m^2 uma constante do grupo de renormalização tiramos como corolário a função β :

$$\left(\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \beta(f) \frac{\partial}{\partial f} \right) m^2 = 0 \quad (1.125)$$

$$\beta(f) = -\frac{f^2}{2\pi} < 0 \quad (1.126)$$

Assim a teoria é assintoticamente livre.

Agora é fácil ver que em ordem mais baixa não-trivial de $1/N$ o modelo não apresenta amplitude de criação de pares onde os gráficos considerados tem a mesma estrutura que os do modelo de Gross-Neveu.

A matriz-S fatorizável do modelo para a amplitude $2 \rightarrow 2$ é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} i k S_{j\ell} &= \left. \langle q_j(p'_1) q_\ell(p'_2) | q_i(p_1) q_u(p_2) \rangle \right|_{in} = \\ &= \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) [\delta_{ik} \delta_{j\ell} S_1(s) - \delta_{ij} \delta_{k\ell} S_2(s) + \delta_{il} \delta_{jk} S_3(s)] + (i \leftrightarrow k)^*, (p_1 \leftrightarrow p_2) \end{aligned} \quad (1.127)$$

onde $s = (p_1^\mu + p_2^\mu)$ e as funções $S_2(s)$ e $S_3(s)$ são as amplitudes de transição e reflexão e $S_1(s)$ descreve o processo $q_i + q_i \rightarrow q_j + q_j$.

Fortes restrições sobre as amplitudes S_1, S_2, S_3 são dadas pelas equações de fatorização dadas por:⁽⁴⁵⁾

$$S_2(\theta)S_3(\theta+\theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta+\theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta+\theta')S_3(\theta') \quad (1.28)$$

$$S_2(\theta)S_1(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta+\theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta+\theta')S_2(\theta') \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} N \quad & S_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_2(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta+\theta')S_3(\theta') + \\ & + S_1(\theta)S_2(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_2(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta+\theta')S_1(\theta') + \\ & + S_1(\theta)S_1(\theta+\theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta+\theta')S_3(\theta) \end{aligned} \quad (1.130)$$

Além disso essas amplitudes devem obedecer unitariedade

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1 \quad (1.131a)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0 \quad (1.131b)$$

$$N S_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \quad (1.131c)$$

e também simetria cruzada:

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta) \quad (1.132a)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta) \quad (1.132b)$$

A solução das equações acima satisfazendo condição de analiticidade real, isto é, as amplitudes devem ser reais se θ for puramente imaginário, são dadas por

$$s_3(\theta) = -\frac{i\lambda}{\theta} s_2(\theta) \quad (1.133a)$$

$$s_1(\theta) = -\frac{i}{i(N-2)\frac{\lambda}{2} - \theta} s_2(\theta) \quad (1.133b)$$

$$\text{com } \lambda = \frac{2\pi}{N-2}$$

O termo correspondente a estados ligados neste modelo não deve existir pois demonstrou-se em aproximação semi-clássica que as partículas q_i não formam estados ligados^(57,58). De maneira que:

$$s_2(\theta) = Q(\theta)Q(i\pi-\theta) \quad (1.134)$$

onde

$$Q(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi})\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}) (-i\frac{\theta}{2\pi})} \quad (1.135)$$

1.2.g - 0 modelo CP^{n-1}

Esse é o mais simples de uma classe muito grande de modelos definidos com simetria $SU(N)$.

Eichenherr em sua tese de doutoramento estudou esta série de modelos⁽¹⁶⁾. A idéia é de generalizar o modelo σ -não linear, isto é, tomar os campos como elementos de um grupo maior, submetido a um vínculo puramente geométrico.

O modelo foi primeiramente definido na representação adjunta de $SU(N)$ por uma matriz q de traço zero que sob $SU(N)$ se transforma da seguinte maneira:

$$q \rightarrow U q U^+ \quad (1.136)$$

Neste espaço existe um produto escalar:

$$(p, q) = \frac{1}{2} \text{tr } p \cdot q \quad (1.137)$$

e uma álgebra não associativa:

$$p \times q = \frac{1}{2} \{p, q\} - \frac{2}{N} (p, q) \cdot \mathbb{I} \quad (1.138)$$

Para obter-se as equações de campo devemos classificar os orbitais de $SU(N)$ o que pode ser feito através da definição do conjunto:

$$\{(q, q^{V_j}) \mid j = 1 \dots N\} \quad (1.139)$$

$$\text{onde } q^{V_0} = 1 ; \quad q^{V_{j+1}} = q^{V_j} \times q \quad (1.140)$$

No entanto devido a

$$(q, q^{V_j}) = \frac{1}{2} \text{tr } q^{j+1} + f(j) (\text{tr } q^2, \dots, \text{tr } q^j) \quad (1.141)$$

O conjunto (1.139) é equivalente ao conhecimento dos seguintes números:

$$\{\text{tr } q^j \mid j = 2 \dots N\} \quad (1.142)$$

estes por outro lado determinam os auto valores de q , que pode ser visto através das seguintes relações:

$$|q - \delta \mathbb{I}| = \sum_{j=0}^N (-\delta)^{N-j} S_j^N = 0 \quad (1.143)$$

e

$$S_{k+1}^N = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} S_j^N \text{tr } q^{k+1-j} ; \quad k=1 \dots N-1 \quad (1.144)$$

Agora a dinâmica pode ser definida por uma densidade de Lagrangeana:

$$L = \partial_{\mu} q \partial_{\mu} q + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_j}{j+1} ((q, q^V_j) - r_j) \quad (1.145)$$

onde r_j são os parâmetros que definem os orbitais e μ_j os multiplicadores de Lagrange.

Um dos modelos mais simples é o dos chamados orbitais idempotentes, onde a matriz q em sua forma diagonal é dada por:

$$q = \text{diag}(\delta, \dots, \delta, -(N-1)\delta) \quad (1.146)$$

Segue-se imediatamente que:

$$q \times q = \text{diag}((2-N)\delta^2, \dots, (2-N)\delta^2, -(2-N)(N-1)\delta^2) \quad (1.147)$$

$$q \times q = (2-N)\delta q, \quad q^V_j = ((2-N)\delta)^{j-1} q \quad (1.148)$$

O grupo pequeno, isto é, aquele que deixa a órbita invariante é $U(n-1)$ de maneira que a órbita pode ser identificada com o espaço complexo projetivo de dimensão $N-1$. Por este motivo este modelo é chamado $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Esta foi a formulação de Eichenherr. No entanto em fins de 78 Lüscher et al ⁽¹⁷⁾ apresentaram uma formulação na representação direta como segue.

Um modelo σ -não linear é definido, de maneira geral, da seguinte maneira:

Seja G um grupo de Lie compacto e H um subgrupo fechado de G . O modelo σ -não linear G/H é uma teoria de campos $\phi(x)$, que tomam valores no espaço quociente G/H , isto é, $g \in G, h \in H$,

$$\phi'(x) = g \phi(x)$$

enquanto $h \phi(x) \approx \phi(x)$.

Em geral a ação para os campos $\phi(x)$, invariante pela transformação acima é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \langle \partial_\mu \phi(x) | \partial_\mu \phi(x) \rangle \quad (1.149)$$

onde $\langle | \rangle$ representa um certo produto escalar em G/H . É claro que, até aqui, poderíamos ter usado qualquer dimensão ou métrica.

Tomemos o caso euclídeano. Quando $|x| \rightarrow \infty$ o campo tende a um campo assintótico ϕ_∞ , $\phi_\infty \in G/H$. ϕ_∞ pode ser não trivial, e pode não ser continuamente transformado na unidade. Isto quer dizer que as soluções caem em classes diferentes - chamadas classes topológicas.

Pode-se demonstrar que as classes de homotopia neste caso são colecionadas pelo grupo: ⁽³²⁾

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H)_g \quad (1.150)$$

$\Pi_n(F)$ é o grupo de transformações que leva F na esfera S^n . Se G for conexo o subscrito acima não é importante. Assim se G for $SO(N)$ e $H = SO(N-1)$, G/H é o modelo $O(n)$ que é não trivial só para $n \geq 4$ pois

$$\Pi_1(SO(n-1)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=3 \text{ pois } SO(2) \simeq S^1 \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

O modelo CP^{n-1} é caracterizado pelos grupos: $G = SU(n)$, $H = U(n-1)$. O grupo $SU(n)/U(n-1)$ é equivalente ao espaço gerado por n complexos: $z = |z_1 \dots z_n|$, que se transforma por $SU(n)$, mas $z \simeq z'$, se $z' = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Isto define as retas em $\mathbb{C}^n$ passando pela origem. Cada uma destas retas é invariante sob uma transformação $U(n-1)$.

Agora vamos deduzir a ação destes fatos gerais:

Para implementar $z' = \lambda z \approx z$ tomemos $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1$ e em cada ponto uma simetria de gauge:

$$z'_\alpha(z) = e^{i\Lambda(x)} z_\alpha(x) \quad ; \quad z' \approx z \quad (1.151)$$

O campo $A_\mu = \frac{i}{2} \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z$ transforma-se em $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$.

A ação invariante pode ser escrita como:

$$S = \frac{n}{2f} \int d^2x \, \overline{D_\mu z} D_\mu z \quad ; \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (1.152)$$

A conexão entre as duas abordagens pode ser feita da seguinte maneira.

Seja $z = (z_1 \dots z_n)$ um auto vetor normalizado com um auto valor $-(N-1)\delta$, $\delta = \pm(2/N(N-1))^{1/2}$ dos campos q .

$$qz = -(N-1)\delta z \quad / \quad \bar{z} \cdot z = 1 \quad (1.153)$$

A decomposição espectral de q toma a forma:

$$q_{ij} = \delta(\delta_{ij} - Nz_i \bar{z}_j) \quad (1.154)$$

e usando ainda que $\partial_\mu \bar{z} \cdot z = -\bar{z} \partial_\mu z$ obtém-se com um cálculo direto que:

$$S_q = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu q, \partial^\mu q) = \frac{1}{2} (\delta N)^2 \int d^2x \{ (\partial_\mu z \cdot \partial^\mu z) - (\bar{z} \partial_\mu z)(z \cdot \partial^\mu \bar{z}) \} = S_z \quad (1.155)$$

O modelo é topologicamente interessante pois para $|x| \rightarrow \infty$,

$$z_\alpha(x) \longrightarrow g \left(\frac{x}{|x|} \right) z_\alpha^\infty \quad (1.156)$$

onde z_α^∞ é um vetor constante e $|g| = 1$. Isto quer dizer que temos um campo puro de gauge. g define um mapa do círculo no infinito em $U(1)$. A carga topológica é o número de vezes que a fase de g gira de 2π enquanto $x/|x|$ dá uma volta de 2π , isto é, se $g = \exp i\psi(x)$

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{\frac{x}{|x|}}^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\psi}{d\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint \partial_\mu \psi \, dx^\mu = \\
 &= -\frac{i}{2\pi} \oint g^{-1} \partial_\mu g \, dx^\mu = -\frac{i}{2\pi} \int dx^\mu \frac{1}{2} \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dx_\mu A^\mu = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \, \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu. \quad (1.157)
 \end{aligned}$$

Instantons:

A densidade de carga topológicas é:

$$q = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \frac{i}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \overline{D_\mu z} D_\nu z. \quad (1.158)$$

pela desigualdade de Cauchy:

$$S \geq \frac{n\pi}{f} |Q| \quad (1.159)$$

A igualdade só se dá se $D_\mu z = \pm i \epsilon_{\mu\nu} D_\nu z$, que são os chamados instantons (+) e anti-instantons (-).

Estas soluções representam um mínimo local da ação e portanto são soluções da equação de movimento.

As soluções de tais equações são dadas por:

$$z(x) = e^{i\Lambda(x)} \frac{\omega^j(x)}{|\omega^j(x)|} \quad (1.160)$$

onde w^j são funções meromorfas de $S = x_1 + i x_2$. (-) para instantons e (+) para antiinstantons.

Expansão $1/N$

O funcional gerador é:

$$Z(J, \bar{J}, k_\mu) = \int \mathcal{D}z \mathcal{D}\bar{z} \prod_k \delta(|z|^2 - \frac{n}{2f}) \exp\{-S + \int d^2x [\bar{J}z + \bar{z}J + k_\mu A_\mu]\} \quad (1.161)$$

$$S = \int d^2x \left\{ \partial_\mu \bar{z} \partial_\mu z + \frac{f}{2n} (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) \right\} \quad (1.162)$$

onde os campos z_α foram reescalados por um fator $\sqrt{n/2f}$ logo $A_\mu = \frac{f}{n} i \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z$ e $D_\mu z = (\partial_\mu + i \frac{if}{n} \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) z$ (1.163)

Conforme explicado no capítulo I introduzindo expansão $1/n$

$$\begin{aligned} & \prod_x \delta(|z(x)|^2 - \frac{n}{2f}) \exp \frac{f}{n} \int d^2x \left[-\frac{1}{2} (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z)^2 + i k_\mu \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z \right] = \\ & = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\lambda_\mu \exp \int d^2x \left\{ \frac{i}{\sqrt{n}} \alpha (|z|^2 - \frac{n}{2f}) - (m^2 + \frac{1}{n} \lambda_\mu \lambda_\mu) |z|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{n}} \partial_\mu \left[i (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) + k_\mu \right] - \frac{f}{2n} k_\mu k_\mu \right\} \end{aligned} \quad (1.164)$$

O parâmetro $m^2 > 0$ é até agora completamente arbitrário. Colocando a expressão acima no funcional gerador temos:

$$Z(J, \bar{J}, k_\mu) = \int \mathcal{D}z \mathcal{D}\bar{z} \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\lambda_\mu \exp \left\{ -S' + \int d^2x \left\{ \bar{J}z + \bar{z}J + \frac{1}{\sqrt{n}} k_\mu \lambda_\mu - \frac{f}{2n} k_\mu k_\mu \right\} \right\} \quad (1.165)$$

$$S' = \int d^2x \left\{ \bar{z} \Delta z + \frac{i\sqrt{n}}{2f} \alpha \right\} \quad (1.166)$$

$$\Delta = D_\mu D_\mu + m^2 - \frac{i}{\sqrt{n}} \alpha \quad (1.167)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{n}} \lambda_\mu \quad (1.168)$$

A integração sobre z é gaussiana e fornece:

$$Z(J, \bar{J}, k_\mu) = \int D\alpha D\lambda_\mu \exp \left\{ -S_{\text{eff}} + \int d^2x \left[\bar{J} \Delta^{-1} J + \frac{1}{\sqrt{n}} k_\mu \lambda_\mu - \frac{f}{2n} k_\mu k_\mu \right] \right\} \quad (1.169)$$

$$S_{\text{eff}} = n \text{tr} \ln \Delta + \frac{i\sqrt{n}}{2f} \int d^2x \alpha(x) \quad (1.170)$$

Podemos expandir S_{eff} em uma série de $1/\sqrt{n}$:

$$S_{\text{eff}} = \Sigma(n)^{1-\frac{\nu}{2}} S(\nu) + \text{cte.} \quad (1.171)$$

No entanto há um termo que aumenta com $\sqrt{n}$.

$$S^{(1)} = \frac{i}{2f} \int d^2x \alpha(x) - i \text{tr} (-\partial^2 + m^2)^{-1} \alpha = i \tilde{\alpha}(0) \left\{ \frac{1}{2f} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \right\} \quad (1.172)$$

onde

$$\tilde{\alpha}(p) = \int d^2x e^{-ipx} \alpha(x) \quad (1.173)$$

$$\begin{aligned} \text{tr} (-\partial^2 + m^2)^{-1} \alpha &= \int \frac{dp dq}{(2\pi)^2} \langle p | \frac{1}{p^2 + m^2} \delta(p-q) | q \rangle \langle q | \tilde{\alpha}(q-p) | p \rangle = \\ &= \tilde{\alpha}(0) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \end{aligned} \quad (1.174)$$

A integral é divergente e deve ser regularizada:

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (1.175)$$

Podemos então renormalizar a constante f :

$$\frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi}{f_R(\mu)} + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \text{ onde } \mu \text{ é o ponto de renormalização.}$$

Além disso a teoria é assintoticamente livre: quando o corte $\Lambda \rightarrow \infty$, a constante de acoplamento nua vai a zero (anti-screening).

Podemos fazer $S^{(1)} = 0$ escolhendo o parâmetro arbitrário m^2 :

$$m^2 = \mu^2 e^{-\frac{2\pi}{f_R(\mu)}} \quad (1.176)$$

O restante do integrando pode ser expandido em série de $1/\sqrt{n}$. A parte quadrática da ação é:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \{ \alpha(x) \Gamma^\alpha(x-y) \alpha(y) + \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x-y) \lambda_\nu(y) \} \quad (1.177)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^\alpha(p) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2][q^2 + m^2]} \quad (1.178)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(p) = z \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(p_\mu + 2k_\mu)(p_\nu + 2k_\nu)}{(k^2 + m^2)[(p+k)^2 + m^2]} \quad (1.179)$$

A primeira integral é finita e a soma em $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ também

$$\tilde{\Gamma}^\alpha(p) = A(p) = \frac{1}{2} [p^2(p^2 + 4m^2)]^{-1/2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4m^2} - \sqrt{p^2}} \quad (1.180)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) [(p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi}] \quad (1.181)$$

As integrais que contribuem para $S^{(\nu)}$ para $\nu \geq 3$ são convergentes e as funções de Green são dadas por

$$\begin{aligned}
 & \langle z_{\alpha_1}(x_1) \dots z_{\alpha_k}(x_k) \bar{z}_{\alpha_{k+1}}(x_{k+1}) \dots \bar{z}_{\alpha_t}(x_t) A_{\mu_{t+1}}(x_{t+1}) \dots A_{\mu_\ell}(x_\ell) \rangle = \\
 & = z(0,0,0)^{-1} \int \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_{\lambda\mu} e^{-S^{(2)}} \exp \left\{ - \sum_3^\infty n^{1-\nu/2} S^{(\nu)} \right\} \cdot \\
 & \frac{\delta}{\delta \bar{J}_\alpha(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta K_{\mu\ell}(x_\ell)} \left\{ \exp \int d^2x \left[\bar{J} \Delta^{-1} J + \frac{1}{\sqrt{n}} K_{\mu}^{\lambda}{}_{\mu} \right] \right\} \quad (1.182)
 \end{aligned}$$

As funções de Green são finitas e o processo de renormalização consiste em renormalizar a massa e as funções de onda de z e α . No entanto só verificamos renormalizabilidade em perturbação (apêndice C).

Os propagadores são:

$$G(p) = (p^2 + m^2)^{-1} \quad (1.183)$$

$$D^\alpha(p) = [A(p)]^{-1} \quad (1.184)$$

$$D^\lambda(p) = \left[(p^2 + 4m^2) A(p) - \frac{1}{\pi} \right]^{-1} \quad (1.185)$$

e a representação gráfica das regras de Feynman fica:

Para os propagadores:

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \alpha \quad \beta \end{array} = \delta_{\alpha\beta} G(p) \quad (1.186)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \cdots \cdots \cdots \end{array} = \mathcal{D}^\alpha(p) \quad (1.187)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ \mu \quad \nu \end{array} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D^\lambda(p) \quad (1.188)$$

Os vértices são

$$= \frac{i}{\sqrt{n}} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.190)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{n}} (p_\mu + p'_\mu) \delta_{\alpha\beta} \quad (1.191)$$

$$= \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.192)$$

O propagador $D^\lambda(p)$ tem um polo em $p^2=0$, já que

$$A(0) = \frac{1}{4\pi m^2}, \quad \text{e} \quad D^\lambda(p) \simeq 12\pi \frac{m^2}{p^2} + O(1), \quad p^2 \rightarrow 0$$

Assim os campos z devem descrever partons confinados.

Notemos neste momento que o modelo CP^1 classicamente é equivalente ao modelo σ -0(3), através de:

$$q^a = \bar{z}_\alpha \sigma^a_{\alpha\beta} z_\beta, \quad \text{onde } \sigma^a \text{ são as matrizes de Pauli } (q^a q^a = 1, S_a = S_z).$$

Quanticamente isto significa que os q^a podem descrever os mesons desta teoria. No entanto isto nunca foi demonstrado.

Além disso pode-se definir a teoria no vácuo $\theta \neq 0$, pela ação modificada

$$S^\theta = S - i\theta Q$$

onde Q é a carga topológica

$$S_{\text{eff}}^\theta = S_{\text{eff}} - i \frac{\theta}{2\pi\sqrt{n}} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \lambda_\nu \quad (1.193)$$

As regras de Feynman adquirem um vértice novo com uma linha que termina no vácuo com um fator $-\frac{\theta}{2\pi\sqrt{n}} \epsilon_\mu p_\nu$, $p \rightarrow 0$.

A densidade topológica $q(x) = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ tem valor esperado no vácuo diferente de zero:

$$\langle q(x) \rangle_\theta = \frac{3im^2}{n\pi} \theta + \theta(1/n^2), \quad (1.194)$$

portanto num vácuo θ há uma densidade de carga topológica de fundo, constante.

Se o propagador de λ_μ não tiver o polo em zero, o vértice proporcional a θ não contribue. Assim a contribuição das configurações com topologia não trivial deve estar ligada de maneira íntima à força confinante.

Além disso a dependência em θ deve ser periódica assim como no modelo de Schwinger. O funcional gerador pode ser visto como uma decomposição em série de Fourier.

$$Z(J, \bar{J}, k_\mu) = \sum_{\substack{n=n^\circ \\ \text{topológico}}} e^{in\theta} Z_n(J, \bar{J}, k_\mu) \quad (1.195)$$

onde para Z_n contribuem as configurações com n° topológico n .

1.2.h - Modelo CP^{n-1} supersimétrico

O modelo CP^{n-1} supersimétrico foi construído por Cremmer e Scherk em supergravidade em 4 dimensões⁽⁵⁹⁾. Partindo do supercampo (ver apêndice D) $\phi_\alpha(\chi, \theta)$, pode-se construir uma teoria supersimétrica com a densidade de lagrangeana (já integrada em θ).

$$L = \overline{D_\mu z} D_\mu z - i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{4} [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2] \quad (1.196)$$

com os vínculos:

$$\bar{z} z = \frac{n}{2f} \quad ; \quad \bar{z} \psi = \bar{\psi} z = 0 \quad (1.197)$$

O modelo apresenta invariância sob transformação de gauge:

$$z'_\alpha(x) = e^{i\Lambda(x)} z_\alpha(x) \quad (1.198a)$$

$$\psi'_\alpha(x) = e^{i\Lambda(x)} \psi_\alpha(x) \quad (1.198b)$$

e sob as transformações de supersimetria:

$$\delta z_\alpha = i \epsilon \psi_\alpha \quad (1.199a)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\alpha &= \frac{1}{2} z_\alpha \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \gamma_5 \epsilon z_\alpha (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) + \\ &+ \gamma_\mu \epsilon [D_\mu z_\alpha + \frac{1}{2} z_\alpha \bar{\psi} \gamma_\mu \psi] \end{aligned} \quad (1.199b)$$

É interessante notar que este modelo apresenta uma supersimetria $O(2)$ estendida adicional.

Expansão $1/n$

Para permanecermos no caso mais geral possível, vamos tomar o modelo supersimétrico como um caso particular de uma interação do modelo CP^{n-1} com fermions massivos e de carga elétrica "e" diferente das partículas z.

Neste caso a lagrangeana é dada por:

$$L = \overline{D}_\mu z D_\mu z + \bar{\psi}(\not{\partial} - M_B)\psi + \frac{e^2 f}{2n} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 - \frac{gv}{2n} |(\bar{\psi} \tau^i \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \tau^i \psi)^2| \quad (1.200)$$

com os vínculos das equações (1.197).

O campo de quark é ψ_α^a onde α é um índice de sabor e a é um índice de cor. O termo de massa nua M_B é suposto ser independente de sabor. As matrizes τ^i são matrizes $N \times N$ com $i=0, \dots, N^2-1$ e formam um conjunto completo e normalizado de matrizes de sabor com as propriedades:

$$\tau^0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}, \quad \text{Tr}(\tau^i \tau^k) = \delta^{ik} \quad (1.201)$$

A derivada covariante D_μ age em z e ψ distintamente:

$$D_\mu z_\alpha = \partial_\mu z_\alpha - \frac{f}{n} (\bar{z} \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) z_\alpha \quad (1.202)$$

$$D_\mu \psi_\alpha^a = \partial_\mu \psi_\alpha^a - e \frac{f}{n} (\bar{z} \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) \psi_\alpha^a \quad (1.203)$$

Analogamente a (1.198a) e (1.198b) temos as transformações de gauge:

$$z'(x) = e^{i\Lambda(x)} z_\alpha(x) \quad (1.204a)$$

$$\psi'^a(x) = e^{ie\Lambda(x)} \psi_\alpha^a(x) \quad (1.204b)$$

O modelo de interesse CP^{n-1} supersimétrico, definido pela densidade de lagrangeana (1.196), é obtido para valores particulares $n=1$, $e=1$, $g_V=f$ e $M_B=0$ em (1.200).

Assim como no caso do modelo CP^{n-1} puro, a expansão $1/n$ do funcional gerador das funções de Green euclidianas é dado por:

$$\begin{aligned} z(J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}) &= \int \mathcal{D}z \mathcal{D}\bar{z} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \prod_x \left[\delta(|z|^2 - \frac{n}{2f}) \delta(\bar{\psi} \cdot z) \delta(\bar{z} \cdot \psi) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -S + \int d^2x [\bar{J} \cdot z + \bar{z} \cdot J + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta] \right\} \end{aligned} \quad (1.205)$$

As interações quânticas e os vínculos podem ser eliminados introduzindo-se campos auxiliares $\alpha, \lambda_\mu, \bar{c}, c, \phi$ e π da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\prod_x \left[\delta(|z|^2 - \frac{n}{2f}) \delta(\bar{\psi} z) \delta(\bar{z} \psi) \right] \exp \int d^2x \left\{ -\frac{f}{2n} \left[(\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) - \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{f}{2n} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 \right] \Big\} = \\ &= \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\lambda_\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \int d^2x \left\{ \frac{i}{\sqrt{n}} \alpha (|z|^2 - \frac{n}{2f}) + \frac{i}{\sqrt{n}} (\bar{c} \bar{z} \psi + \bar{\psi} z c) + \right. \\ &+ \frac{i}{\sqrt{n}} \lambda_\mu ((\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) - \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - (m^2 + \frac{1}{n} \lambda_\mu \lambda_\mu) |z|^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\phi \bar{\psi} \psi + \pi \bar{\psi} \gamma_5 \psi) \\ &- \frac{1}{2f} (\phi \phi + \pi \pi) \Big\} \end{aligned} \quad (1.206)$$

Aqui introduzimos um parâmetro de massa m^2 , que a esta altura do cálculo não faz nenhum papel, como no caso do CP^{n-1} puro. Agora devemos integrar sobre os campos de fermions $\bar{\psi}$ e ψ , e sobre $\bar{z}$ e z ; devemos efetuar a integral

$$Y = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}z \exp - \int d^2x \left\{ + \bar{z} \Delta_B z + \bar{\psi} \Delta_F \psi + \frac{i}{\sqrt{n}} (\bar{c} \bar{z} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot z c) \right. \\ \left. + \bar{J} z + \bar{z} J + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \eta \right\} \quad (1.207)$$

Efetueamos primeiramente a integral sobre os fermions, usando

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp - \int d^2x \left(\bar{\psi} + \bar{\eta} \Delta_F^{-1} - \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{c} \bar{z} \Delta_F^{-1} \right) \Delta_F \left(\psi + \Delta_F^{-1} \eta - \frac{i}{\sqrt{n}} \Delta_F^{-1} z c \right) \\ (1.208)$$

$$= \exp n \operatorname{tr} \ln \Delta_F.$$

Portanto temos para Y a expressão:

$$Y = \int \mathcal{D}\bar{z} \mathcal{D}z \exp - \int d^2x \left\{ \bar{z} \Delta_B z + \frac{1}{n} \bar{z} \bar{c} \Delta_F^{-1} c z - \bar{\eta} \Delta_F^{-1} \eta + \right. \\ \left. + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} c z + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{c} \bar{z} \Delta_F^{-1} \eta + \bar{J} z + \bar{z} J \right\} \exp n \operatorname{tr} \ln \Delta_F. \quad (1.209)$$

Agora podemos integrar sobre z e $\bar{z}$.

$$Y = \int \mathcal{D}\bar{z} \mathcal{D}z \exp \left\{ n \operatorname{tr} \ln \Delta_F + \int d^2x \bar{\eta} \Delta_F^{-1} \eta - \int d^2x \left(\bar{z} + \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} c \right) \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c \right)^{-1} \right) \right. \\ \left. \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c \right)^{-1} \left[z + \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c \right) \left(J + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{c} \Delta_F^{-1} \eta \right) \right] \right\} \quad (1.210)$$

$$= \exp \left\{ n \operatorname{tr} \ln \Delta_F - n \operatorname{tr} \ln \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c \right) + \int d^2x \left[\bar{\eta} \Delta_F^{-1} \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{\eta} \Delta_F^{-1} c \right) \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c \right) \left(J + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{c} \Delta_F^{-1} \eta \right) \right] \right\} \quad (1.211)$$

Temos finalmente para o funcional gerador a expressão

$$Z(J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\lambda_\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \times \exp \left\{ -S_{\text{eff}} + \int d^2x \left[\eta \cdot \Delta_F^{-1} \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\bar{J} + \frac{i}{\sqrt{n}} \bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} c \right) \cdot \left(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \cdot \Delta_F^{-1} c \right)^{-1} \cdot \left(J + \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{c} \cdot \Delta_F^{-1} \eta \right) \right] \right\} \quad (1.212)$$

onde

$$\Delta_B = -D_\mu D_\mu + m^2 - \frac{i}{\sqrt{n}} \alpha, \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\sqrt{n}} \lambda_\mu \quad (1.213)$$

$$\Delta_F = \not{\partial} - M_B - \frac{1}{\sqrt{n}} (\phi + \pi \gamma_5), \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\sqrt{n}} \lambda_\mu \quad (1.214)$$

e a ação efetiva é dada por:

$$S_{\text{eff}} = n \text{tr} \log(\Delta_B + \frac{1}{n} \bar{c} \Delta_F^{-1} c) - n \text{Tr} \log \Delta_F + \\ \int d^2x \left\{ \frac{i\sqrt{n}}{2f} \alpha + \frac{1}{2f} (\phi\phi + \pi\pi) \right\} \quad (1.215)$$

A ação efetiva pode ser expandida numa série de potências de $1/\sqrt{n}$

$$S_{\text{eff}} = \text{cte} + \sum_{v=1}^{\infty} (n)^{1-v/2} S(v) \quad (1.216)$$

A renormalização de f é a mesma que no caso sem fermions e, em particular, liberdade assintótica não é afetada pela inclusão de fermions.

Para a parte quadrática de S temos:

$$S^{(2)} = \int d^2x d^2y \left\{ \frac{1}{2} \alpha(x) \Gamma^\alpha(x-y) \alpha(y) + \frac{1}{2} \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x-y) \lambda_\nu(y) \right. \\ + \frac{1}{2} \phi(x) \Gamma^\phi(x-y) \phi(y) + \frac{1}{2} \pi(x) \Gamma^\pi(x-y) \pi(y) + \lambda_\mu(x) \Gamma_{\mu}^{\lambda\pi}(x-y) \pi(y) \\ \left. + \bar{c}(x) \Gamma^{\bar{c}c}(x-y) c(y) \right\} \quad (1.217)$$

onde

$$\Gamma^{\alpha}(p) = A(p) \quad (1.218)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} \right) p^2 A(p) \quad (1.219)$$

$$\Gamma^{\phi}(p) = (p^2 + 4m^2) A(p) \quad (1.220)$$

$$\Gamma^{\pi}(p) = p^2 A(p) \quad (1.221)$$

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda\pi}(p) = -2 \epsilon_{\mu\nu} p_{\nu} m A(p) \quad (1.222)$$

$$\Gamma^{\bar{c}c}(p) = \left(\frac{i\not{p}}{2} - m \right) A(p) \quad (1.223)$$

onde $A(p)$ indica a integral de um loop:

$$\begin{aligned} A(p) &= \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \{ (q^2 + m^2) ((p+q)^2 + m^2) \}^{-1} \\ &= \frac{1}{4\pi} [p^2 (p^2 + 4m^2)]^{-1/2} \log \frac{\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2 + 4m^2}}{\sqrt{p^2} - \sqrt{p^2 + 4m^2}} \end{aligned} \quad (1.224)$$

e os propagadores são:

$$D^{\bar{z}z}(p) = (p^2 + m^2)^{-1} \quad (1.225)$$

$$D^{\bar{\psi}\psi}(p) = (i\not{p} - m)^{-1} \quad (1.226)$$

$$D^{\alpha}(p) = [A(p)]^{-1} \quad (1.227)$$

$$D^{\lambda}(p) = \Gamma^{\pi}(p) [\Gamma^{\lambda}(p) \Gamma^{\pi}(p) + p^2 (\Gamma^{\lambda\pi}(p))^2]^{-1} \quad (1.228)$$

$$D^{\phi}(p) = [(p^2 + 4m^2) A(p)]^{-1} \quad (1.229)$$

$$D^{\pi}(p) = \Gamma^{\lambda}(p) [\Gamma^{\lambda}(p) \Gamma^{\pi}(p) + p^2 (\Gamma^{\lambda\pi}(p))^2]^{-1} \quad (1.230)$$

$$D^{c\bar{c}}(p) = [\Gamma^{\bar{c}c}(p)]^{-1} \quad (1.232)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} \right) \Gamma^{\lambda}(p) \quad (1.233)$$

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda\pi}(p) = \varepsilon_{\mu\nu} p_{\nu} \Gamma^{\lambda\pi}(p) \quad (1.234)$$

Devido ao polo no propagador do λ_{μ} , tanto os z 's quanto os ψ 's são confinados por uma força coulombiana de longo alcance, e as outras interações podem ser resumidas em uma lagrangeana efetiva válida para baixa energia.

Assim como no caso puro, o propagador do λ possui um polo em $p^2 = 0$.

$$D^{\lambda}(p) = \frac{c}{p^2} + O(1) \quad (1.235)$$

onde

$$c = \frac{12\pi^2 m^2 M^2}{3Ne^2 m^2 + \varepsilon\pi(M^2 + 2Ne^2 m^2)} \quad (1.236)$$

Para $\varepsilon=0$ (caso do modelo com supersimetria) o polo desaparece, e o campo λ não tem mais interpretação de partícula. Neste caso os partons são liberados. O modelo supersimétrico como vimos corresponde a um único sabor ($N=1$), $e=1$, $\varepsilon=0$, $g_V=f$, $M_B=0$. Neste caso a representação gráfica das regras de Feynman que ocorrem na expansão $1/n$ é:

$$\begin{array}{c} p \\ \leftarrow \\ \alpha \quad \beta \end{array} = \delta_{\alpha\beta} D^{z\bar{z}}(p) \quad (1.237)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} = D^{\alpha}(p) \quad (1.238)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} = D^{\pi}(p) \quad (1.239)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \end{array} = D^{c\bar{c}}(p) \quad (1.240)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \beta \end{array} = \delta_{\alpha\beta} D^{\psi\bar{\psi}}(p) \quad (1.241)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ \mu \qquad \qquad \nu \end{array} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} \right) D^{\lambda}(p) \quad (1.242)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ \mu \end{array} = \epsilon_{\mu\nu} \quad (1.243)$$

e os vértices

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \text{---} \\ \beta \end{array} = \frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.244)$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ \text{---} \\ \beta \end{array} = - \frac{1}{n} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.245)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \alpha \\ \beta \end{array} = - \frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.246)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_5 \delta_{\alpha\beta} \quad (1.247)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{n}} (p_\mu + p'_\mu) \delta_{\alpha\beta} \quad (1.248)$$

$$= - \frac{i}{\sqrt{n}} \gamma_\mu \delta_{\alpha\beta} \quad (1.249)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_5 \delta_{\alpha\beta} \quad (1.250)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.251)$$

A maior diferença está no fato do desaparecimento do polo no propagador do A_μ . Apesar dos quarks estarem liberados, não é simples a construção de estados de 1 quark. Assim o campo ψ cria um estado de energia infinita a partir do vácuo, devido à corda infinita formada pelo A_μ necessária para definir um objeto invariante. O objeto finito correspondente é obtido multiplicando-se por uma exponencial apropriada de $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, a situação é análoga à do modelo de Gross-Neveu quiral.

Capítulo 2 - Abordagem perturbativa

2.1 - Prova da ausência de Pares.

Logo após propor o modelo CP^{n-1} , Eichenherr mostrou que, ao nível clássico, o modelo possui infinitas leis de conservação, isto é, existem infinitas cargas locais e não-locais que são conservadas.

Estas infinitas cargas conservadas caso quantizadas garantem ao modelo sua fatorização.

Esta será nossa intenção neste capítulo: a de mostrar a fatorização do modelo CP^{n-1} até a 3ª ordem de perturbação e a obtenção de uma possível matriz S exata para o modelo.

A fatorização do modelo esta diretamente ligada a ausência de produção de pares num espalhamento. Desta forma a linha a seguir será construir a Lagrangeana em perturbação fazendo uso da liberdade assintótica que o modelo exhibe (válido para altas energias) e mostrar que não há produção de pares até 3ª ordem.

A Lagrangeana do modelo é dada por

$$L = \partial_\mu \bar{\xi} \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} g (\xi \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi)^2 \quad (2.1)$$

$$\text{onde } \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad (2.2)$$

$$\bar{\xi} \xi = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i \xi_i = \frac{1}{2g} \quad (2.3)$$

$$\bar{\xi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi = \sum_i \bar{\xi}_i \partial_\mu \xi_i - \partial_\mu \bar{\xi}_i \xi_i \quad (2.4)$$

Escolhemos agora, devida a invariança de gauge, o campo

ξ_n real e os $n-1$ restantes como complexos. Desta forma podemos escrever

$$\xi_n = \left(\frac{1}{2g} - \bar{z}z \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

e ainda $\bar{z}z = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\xi}_i \xi_i$ (2.6)

Substituindo na densidade de lagrangeana (2.1) temos:

$$L = \partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z + \frac{1}{2} g (\bar{z} \partial_\mu z)^2 + \frac{1}{4} \frac{[\partial_\mu (\bar{z}z)]^2}{1/2g - \bar{z}z} \quad (2.7)$$

note que $\bar{\xi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi = \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z$ (2.8)

Podemos agora expandir em g obtendo

$$L = \partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z + \frac{1}{2} g \left[(\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z)^2 + (\partial_\mu (\bar{z}z))^2 \right] + g^2 \bar{z}z [\partial_\mu (\bar{z}z)]^2 + o(g^3) \quad (2.9)$$

Utilizando agora esta densidade de Lagrangeana calcularemos a amplitude

(Fig. 2.1)

Introduzimos uma massa de renormalização μ de forma a se ter

$$p^2 = p'^2 = p_\alpha^2 = p_\beta^2 = \mu^2. \quad (2.10)$$

Isto significa que para $\mu=0$ um momento genérico na concha de massa é escrito na forma

$$r = (r_0, \pm r_0) \quad (2.11)$$

Utilizando conservação de momentos coplanares podemos es colher $p'_1, p_{\alpha 1}, q_{\alpha 1} < 0$ e $p_1, p_{\beta 1}, q_{\beta 1} > 0$ sem perda de generalidade, de modo a garantir que para $\mu=0$ vale:

$$p' \cdot p_\alpha = p' \cdot q_\alpha = p_\alpha \cdot q_\alpha = p \cdot p_\beta = p \cdot q_\beta = p_\beta \cdot q_\beta = 0 \quad (2.12a)$$

$$p' \cdot p = 2p_0 p'_0, \quad p_\alpha p_\beta = 2p_{\alpha 0} p_{\beta 0}, \text{ etc.} \quad (2.12b)$$

$$p' = q_\alpha + p_\alpha \quad (2.12c)$$

$$p = p_\beta + q_\beta \quad (2.12d)$$

Olhando agora para a lagrangeana (2. 9) vemos que os vrtices necessrios at 3 ordem so dados por:

(fig. 2.2)

$$v_1 = [(Q-P)(S-R) + (Q+P)(S+R)] \quad (2.13)$$

(fig. 2.3)

$$v_2 = [(Q-P)(U+T) + (Q-P)(S-R) + (S-R)(T+U)] \quad (2.14)$$

Em segunda ordem temos os grficos

(fig. 2.4)

Onde um gráfico típico, por ex gráfico c, é calculado como segue.

$$c = \frac{1}{(p_\alpha - p_\beta)^2 - \mu^2} [(p_\alpha - p)(p - p_\alpha) - (p_\alpha - p)(q_\beta + p_\alpha - p_\beta)] \\ \times [(p_\beta - p')(p' - p_\beta) + (p_\beta + p')(-p_\beta - p_\alpha - q_\alpha)]$$

$$c = \frac{4}{(p_\alpha - p_\beta)^2 - \mu^2} [p_\alpha(p + q_\beta)] [p_\beta p_\alpha] \quad (2.15)$$

e usando (2.10) obtemos

$$c = -2p_\alpha(p + q_\beta) \quad (2.16)$$

Analogamente o resultado dos outros gráficos fica:

$$a = 2(p_\alpha p_\beta + pp' - 2q_\beta q_\alpha) \quad (2.17)$$

$$b = -2p(p_\alpha - q_\alpha) \quad (2.18)$$

$$d = 2(p_\beta + p)(p_\alpha - q_\alpha) \quad (2.19)$$

$$e = 2(q_\beta + p)(p' + p_\alpha) \quad (2.20)$$

$$f = -2p(p_\alpha + p') \quad (2.21)$$

$$g = -2p_\alpha(p + p_\beta) \quad (2.22)$$

Verificando-se desta maneira explicitamente que em 2ª ordem não há produção de pares.

Continuando em 3ª ordem, obtivemos um total de 112 gráficos contidos na tabela 1. A idéia foi usar a regra de Källén-Toll⁽⁶⁰⁾

(ver apêndice A) para tentarmos uma possível fatorização utilizando o resultado da 2ª ordem. Desta forma os gráficos a, b, c, d, e, f, g multiplicados por um mesmo fator nos dão uma contribuição zero. Um gráfico típico de 3ª ordem é calculado como segue:

$$\begin{aligned}
 &= \int d^2k \frac{1}{(k+p_\alpha-p)^2-\mu^2} \frac{1}{(k+p'-p_\beta)^2-\mu^2} \frac{1}{k^2-\mu^2} \left[(p-p_\alpha)(p_\alpha-p) + \right. \\
 &+ (p_\alpha+2k-p)(p_\alpha-p) \left. \right] \left[(p_\beta-p')(p'-p_\beta) + (p_\beta+p')(2k+p'-p_\beta) \right] \\
 &\times \left[(q_\beta+q_\alpha)(-q_\alpha-q_\beta) + (q_\beta-q_\alpha)(2k-p_\alpha-p+p'-p_\beta) \right] \\
 &= \int d^2k \frac{1}{(k+p_\alpha-p)^2-\mu^2} \frac{1}{(k+p'-p_\beta)^2-\mu^2} \frac{1}{k^2-\mu^2} \left[2p_\alpha p + 2k(p_\alpha+p) \right] \\
 &\times \left[2p' p_\beta + 2k(p_\beta+p') \right] \left[-2q_\beta q_\alpha + 2k(q_\beta-q_\alpha) + qp'q_\beta + 2p_\beta q_\alpha \right].
 \end{aligned}$$

Quando aplicamos a regra de Källen-Toll vamos obter 3 termos correspondentes às diferentes contrações dos propagadores 2 a dois. Teremos então respectivamente os termos contraindo o 1º com o 2º, o 1º com o 3º e depois o 2º com o 3º.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4[q_\beta q_\alpha][p_\alpha(p+p_\beta)]}{(p_\alpha-q_\beta)^2-\mu^2} \int d^2k \frac{1}{k^2-\mu^2} \frac{1}{(k+p'-p_\beta)^2-\mu^2} [2p_\beta p'] + \\
 &+ \frac{4[q_\beta(p_\alpha-q_\alpha)][p'(p_\beta+p)]}{(p'+q_\beta)^2-\mu^2} \int d^2k \frac{1}{k^2-\mu^2} \frac{1}{(k+p_\alpha-p)^2-\mu^2} [2pp_\alpha] + \\
 &+ \frac{4[p(p_\alpha-q_\alpha)][p'p]}{(p-p')^2-\mu^2} \int d^2k \frac{1}{k^2-\mu^2} \frac{1}{(k+q_\alpha+q_\beta)^2-\mu^2} [-2q_\beta q_\alpha]
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

= dB + eC + bA correspondentes às contrações

onde as funções A, B, C e outras são introduzidas como segue:

$$A = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k - q_\alpha - q_\beta)^2 - \mu^2} [-2q_\beta q_\alpha] \quad (2.24a)$$

$$B = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k + p' - p_\beta)^2 - \mu^2} [2p_\beta p'] \quad (2.24b)$$

$$C = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k + p - p_\alpha)^2 - \mu^2} [2pp_\alpha] \quad (2.24c)$$

$$D = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k - p - p')^2 - \mu^2} [2pp'] \quad (2.24d)$$

$$E = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k - p_\alpha - q_\beta)^2 - \mu^2} [2p_\alpha q_\beta] \quad (2.24e)$$

$$F = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k + q_\alpha + p_\beta)^2 - \mu^2} [-2q_\alpha p_\beta] \quad (2.24f)$$

$$G = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k - p + q_\alpha)^2 - \mu^2} [-2pq_\alpha] \quad (2.24g)$$

$$H = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k + p' - q_\beta)^2 - \mu^2} [2p'q_\beta] \quad (2.24h)$$

$$I = \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k - p_\alpha - p_\beta)^2 - \mu^2} [2p_\alpha p_\beta] \quad (2.24i)$$

$$\gamma = 2(p + q_\beta)(p_\alpha - q_\alpha) \quad ; \quad \alpha = 2(p + p_\beta)(p' + p_\alpha) \quad (2.24j)$$

Os resultados estão resumidos na tabela 2 e os termos sobreviventes da soma total são:

$$8pp_{\alpha}(A+B+2C+D+G+E+I) = 8pp \ln \frac{p \cdot p' \cdot p_{\alpha} \cdot q_{\beta} \cdot p \cdot q_{\alpha} \cdot p_{\alpha} \cdot p_{\beta}}{q_{\alpha} \cdot q_{\beta} \cdot p' \cdot p_{\beta} \cdot p \cdot p_{\alpha} \cdot p \cdot p_{\alpha}} = 0 \quad (2.25)$$

De forma que fica provado por cálculos explícitos a não formação de pares até 3ª ordem em perturbação.

Queremos ressaltar no entanto que este resultado foi obtido sem maiores discussões sobre as integrais (2.24a-i). Mas como a teoria é renormalizável, (ver apêndice C) os contratermos são da mesma forma que os outros da lagrangeana (2.9). O procedimento de renormalização não destrói a parte finita obtida e a regra de Källén-Toll continua válida para gráficos divergentes. Isto pode ser verificado da seguinte forma:

Seja W uma amplitude divergente:

$$W = \int d^2k \, P(k) \frac{1}{(k-p)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k+q)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k+r)^2 - \mu^2} \quad (2.26)$$

Aplicando o procedimento de Pauli-Villars de regularização obtemos para cada gráfico a soma de termos do tipo:

$$W_{\text{reg}} = \int d^2k \, P(k) \left[\frac{1}{(k+p)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k+q)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k+r)^2 - \mu^2} - \frac{1}{(k+p)^2 - \Lambda^2} \frac{1}{(k+q)^2 - \Lambda^2} \frac{1}{(k+r)^2 - \Lambda^2} \right] \quad (2.27)$$

Aplicando a regra de Källén-Toll em (2.27) encontraremos duas contribuições do tipo

$$W_{\text{reg}} = P(k_{\mu}, p) \ln \frac{S}{\mu^2} + CP(k_{\Lambda}, p) \quad (2.28)$$

onde o 1º termo é a parte finita da amplitude e o 2º termo, cor-

respondente às contrações envolvendo 2º termo da amplitude (2.27), toma forma polinomial. A soma do termo polinomial correspondente a todos os gráficos cancela com contratermos adequados à lagrangeana original.

2.2 - Existe uma matriz-S exata?

No item anterior verificamos que até 3ª ordem em perturbação o modelo CP^{n-1} não permite formação de pares. Este resultado motivou-nos, naturalmente, a tentar enquadrar o modelo numa das classificações da ref. (48).

Após alguns cálculos preliminares, vimos que a classe de interesse, tanto para o modelo CP^{n-1} como para o Gross-Neveu quiral, seria a classe II pois em ambos os casos encontramos $r_1(\theta) = r_2(\theta) = 0$, isto é, as amplitudes

não contribuem para a matriz S, onde θ é uma variável relacionada com o momento já definida. Este cálculo foi feito levando-se em conta termos até 3ª ordem e os gráficos que serão calculados se encontram na tabela 3, onde, para o modelo CP^{n-1} consideramos os gráficos de 1 a 55 e para o modelo G N quiral os gráficos compatíveis vão de 1 a 47. No apêndice B entramos um breve cálculo de vários tipos de gráficos em cada modelo.

O resultado obtido é a verificação explícita até 3ª ordem (gráfico por gráfico) que as amplitudes $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ não contribuem verificando-se desta forma que qualitativamente estávamos corretos.

No entanto os resultados para as demais amplitudes não foram satisfatórios, isto é, encontramos para $u_1(\theta)$ e $u_2(\theta)$

os seguintes resultados (ver Apêndice B).

$$u_1^{\text{GN}_q}(\theta) = 1 + \frac{ig^2}{\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} - \frac{ig^2 n}{2\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 \quad (2.29)$$

$$u_2^{\text{GN}_q}(\theta) = ig \left(1 - \frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} + \left[\frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} \right]^2 + \frac{g^2}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 \right) \quad (2.30)$$

$$u_1^{\text{CP}^{n-1}}(\theta) = 1 + ig - \frac{ig^2}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} - \frac{ig^2 n}{2\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 - \frac{5ig^3}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 \quad (2.31)$$

$$u_1^{\text{CP}^{n-1}}(\theta) = ig \left(1 + \frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} + \left(\frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 - \frac{3ng^2}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 - \frac{3g^2}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2} \right)^2 \right) \quad (2.32)$$

Estes resultados não carregam o fator $\exp \frac{i\pi}{n}$ que aparece na expansão da matriz-S exata da classe II mas este fator pode vir do spin estranho da teoria pois fermions físicos devem carregar spin $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ (61)

Se olharmos para a tabela 4 vemos imediatamente que para o modelo GN quiral.

$$u_2(\theta) = \frac{2i\pi}{n\theta} u_1(\theta) \quad (2.33)$$

no entanto as demais identidades entre as outras amplitudes não fo-

ram obtidas. Para tal verificação o que tentamos foi escrever a função $f(\theta, \lambda)$ que dá a melhor informação sobre a matriz-S como segue:

$$f(\theta, \lambda) = \frac{(1/2 + \theta/2\pi i)(1/2 + 1/n - \theta/2\pi i)}{(1/2 - \theta/2\pi i)(1/2 + 1/n + \theta/2\pi i)} = X \exp Y. \quad (2.34a)$$

$$X = \frac{i}{\theta} + O\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \quad (2.34b)$$

$$Y = \frac{i\pi}{n} - \frac{2\pi i}{\theta n^2} + O\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \quad (2.34c)$$

$$f(\theta, \lambda) = \exp\left[\frac{i\pi}{n}\right] \left[1 + \frac{ig^2}{\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} - \frac{ig^3 n}{2\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2\right] \quad (2.35)$$

onde usamos

$$\frac{1}{\theta} = \frac{ng}{2\pi} \left[1 - \frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} + \left(\frac{ng}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2\right]. \quad (2.36)$$

No modelo CP^{n-1} esta relação não foi verificada.

2.3- Conclusão

Uma possível explicação para o resultado deste capítulo se baseia no fato que a expansão a altas energias pode ter sido usada fora da região na qual ela é rigorosamente válida. A propriedade de liberdade assintótica vale rigorosamente para momentos transferidos $\gg$ que μ^2 , isto é, fora da concha de massa. Desta maneira certos resultados qualitativos como a ausência de produção de pares e zeros em certas amplitudes foram obtidas, no entanto resultados quantitativos mais finos como as amplitudes não nulas não puderam ser obtidas. A alta energia o quadro físico é de que os partons interagem livremente o que caracteriza uma

fase não confinada.

Como o problema não foi resolvido satisfatoriamente em nível quantitativo, tentaremos explicar de outra maneira atacando as leis não locais de conservação do modelo.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

Tabela 1 (cont.)

           	$= aA$ $= bA$ $= cA$ $= dA$ $= eA$ $= fA$ $= gA$	 	$= bA$ $= cA$ $= 2p'_\beta p_\beta A$ $= gA$ $= eA$ $= \gamma A$	 	$= bA$ $= cA$ $= 2(q_\beta p'_\beta + p p_\alpha - q_\alpha q_\beta) A$ $= fA$ $= dA$ $= \gamma A$ $= \alpha A$
           	$= aA$ $= bA$ $= cA$ $= dA$ $= eA$ $= fA$ $= gA$	 	$= aB$ $= bB$ $= cB$ $= dB$ $= eB$ $= fB$ $= gB$	 	$= aB$ $= bB$ $= cB$ $= dB$ $= eB$ $= fB$ $= gB$
           	$= dB$ $= fB$ $= eB$ $= gB$ $= \gamma B$ $= \alpha B$ $= -2q_\alpha q_\beta B$	 	$= dB$ $= fB$ $= 2(q_\beta p'_\beta + p p_\alpha - q_\alpha q_\beta) B$ $= bB$ $= cB$ $= \alpha B$	 	$= aC$ $= bC$ $= cC$ $= dC$ $= eC$ $= fC$ $= gC$

Tabela 2

$= eC$	$= aC$	$= eC$
$= gC$	$= bC$	$= gC$
$= fC$	$= cC$	$= -2p'p_{\beta}C$
$= dC$	$= dC$	$= bC$
$= -2q_{\alpha}q_{\beta}C$	$= eC$	$= cC$
$= \gamma C$	$= fC$	$= \alpha C$
$= (d+g)D$	$= 2eE$	$= aF$
$= (d+g)D$	$= (b+g)E$	$= bF$
$= (a-2q_{\alpha}q_{\beta})D$	$= (f+\gamma)E$	$= cF$
$= bD$	$= 2cE$	$= dF$
$= 2eD$	$= dE$	$= eF$
$= 2fD$	$= (b+g)E$	$= fF$
$= (c+\alpha)D$	$= (a+2p'p_{\beta})E$	$= gF$
$= (d+\gamma)G$	$= aH$	$= 2gI$
$= (c+e)G$	$= bH$	$= 2dI$
$= (a+2p'p_{\beta})G$	$= cH$	$= (\alpha+b)I$
$= 2gG$	$= dH$	$= (e+f)I$
$= 2bG$	$= eH$	$= (e+f)I$
$= fG$	$= fH$	$= (a-2q_{\alpha}q_{\beta})I$
$= (c+e)G$	$= gH$	$= cI$

Tabela 2 (cont.)

Tabela 3

3.1 - Carga clássica

Além das infinitas cargas locais classicamente conservadas, citadas no parágrafo sobre matriz-S, que aparecem nos modelos com soluções tipo solitons, pode-se construir ainda cargas não-locais a partir da condição de integrabilidade do modelo. ⁽⁶²⁾

A conservação quântica de tais cargas devem implicar numa matriz-S fatorizável. Este é o caso do modelo $O(n)$ conforme mostrado por Lüscher ⁽¹⁵⁾. Isto estaria em conflito com as propriedades infravermelhas desta teoria pois sabe-se que o modelo CP^{n-1} puro descreve partículas confinadas. Conjecturamos então que o confinamento, neste caso, esteja relacionado com a não-conservação de uma das (provavelmente todas) cargas não-locais. Portanto é de se esperar que flutuações quânticas gerem anomalias nesta lei de conservação.

No caso do modelo em questão a corrente de Nöther que corresponde a rotações $SU(N)$ é:

$$j_{\mu}^{ij}(x) = z_i(x) \overline{D_{\mu} z_j}(x) - D_{\mu} z_i(x) \bar{z}_j(x) \quad (3.1)$$

onde $D_{\mu} z = (\partial_{\mu} + iA_{\mu})z$; $A_{\mu} = \frac{if}{n} \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} z$; $\bar{z}z = \frac{n}{2f}$ e a identidade que leva à carga não local conservada é

$$\partial_{\mu} j_{\nu} - \partial_{\nu} j_{\mu} + 2 \frac{2f}{n} [j_{\mu}, j_{\nu}] = 0 \quad (3.2)$$

No modelo CP^{n-1} há candidatos para termos anômalos na equação acima como por ex: $D_{\mu} z_i D_{\nu} \bar{z}_j - D_{\nu} z_i D_{\mu} \bar{z}_j$, $z_i \bar{z}_j F_{\mu\nu}$ etc onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$.

(14)

A carga não-local classicamente conservada é:

$$Q^{ij} = \int dy_1 dy_2 \varepsilon(y_1 - y_2) J_0^{ik}(t, y_1) J_0^{kj}(t, y_2) - \frac{n}{2f} \int dy J_1^{ij}(t, y) \quad (3.3)$$

De modo que $\frac{dQ^{ij}}{dt} = 0$ equivale a mostrar a equação (3.2).

3.2 - Quantização

Em todas as expressões acima teremos problemas na definição do análogo quântico já que há diversos termos envolvendo produtos de dois ou mais campos no mesmo ponto. Para separar a parte divergente destes produtos podemos usar qualquer método de regularização. Precisamos ainda obter uma expansão de Wilson para os eventuais produtos a curtas distâncias. Em particular usaremos o programa BPHZ onde a parte divergente é obtida como sendo um polinômio nos momentos externos de cada gráfico, polinômio este, correspondendo aos primeiros termos da série de Taylor do diagrama em torno de zero.

Quanticamente a expressão (3.3) é divergente devido a singularidade da 1ª integral para pontos próximos. A redefinição da normalização da corrente equivale a multiplicar a 2ª integral por uma constante Z divergente. Para mostrar que Q é finita, olhamos para o comportamento a curtas distâncias da integral acima. No formalismo BPHZ trabalharemos sempre com funções de Green envolvendo a carga dada por (3.3).

(64,65)

A expansão de Wilson para curtas distância se fará necessária ao quantizarmos a carga (3.3) na primeira integral.

Desta forma nosso interesse se concentra no comportamento a curtas distâncias do produto:

$$J_{\mu}^{ik}(x) J_{\nu}^{kj}(g) - J_{\nu}^{ik}(g) J_{\mu}^{kj}(x) \quad (3.4)$$

isto é, nos termos dominantes (quando $\epsilon \rightarrow 0$) de

$$J_{\mu}^{ik}(x+\epsilon) J_{\nu}^{kj}(x-\epsilon) - J_{\nu}^{ik}(x-\epsilon) J_{\mu}^{kj}(x+\epsilon) \quad (3.5)$$

Usando (3.1), podemos escrever para J_{μ}^{ij} :

$$J_{\mu}^{ij} = z_i \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{z}_j + 2i A_{\mu} z_i \bar{z}_j \quad (3.6)$$

obtemos assim para a expressão (3.5):

$$J_{\mu}^{ik}(x+\epsilon) J_{\nu}^{kj}(x-\epsilon) - J_{\nu}^{ik}(x-\epsilon) J_{\mu}^{kj}(x+\epsilon) =$$

$$= - \partial_{\mu} z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) \partial_{\nu} \bar{z}_j(x-\epsilon) + \quad (3.7a)$$

$$+ \partial_{\mu} z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) \partial_{\nu} z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) + \quad (3.7b)$$

$$+ z_i(x+\epsilon) \partial_{\mu} \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) \partial_{\nu} \bar{z}_j(x-\epsilon) - \quad (3.7c)$$

$$- z_i(x+\epsilon) \partial_{\mu} \bar{z}_k(x+\epsilon) \partial_{\nu} z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) + \quad (3.7d)$$

$$+ 2i A_{\mu}(x+\epsilon) z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) \partial_{\nu} \bar{z}_j(x-\epsilon) - \quad (3.7e)$$

$$- 2i A_{\mu}(x+\epsilon) z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) \partial_{\nu} z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) + \quad (3.7f)$$

$$+ 2i z_i(x+\epsilon) \partial_{\mu} \bar{z}_k(x+\epsilon) A_{\nu}(x-\epsilon) z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) - \quad (3.7g)$$

$$- 2i \partial_{\mu} z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) A_{\nu}(x-\epsilon) z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) - \quad (3.7h)$$

$$- 4 A_{\mu}(x+\epsilon) z_i(x+\epsilon) \bar{z}_k(x+\epsilon) A_{\nu}(x-\epsilon) z_k(x-\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) - \quad (3.7i)$$

$$- (\text{termos simétricos: } \epsilon \rightarrow -\epsilon; \mu \leftrightarrow \nu) .$$

A contagem de potencias pode ser feita, observando-se que as potencias nos momentos são as seguintes:

Integral nos loops (2 dimensões) :	2
Propagador dos z :	-2
Propagador dos A_μ :	0
Propagador dos α :	+2
Vértice 1: um A_μ , um $\bar{z}$, um z , :	1
Vértice 2: dois A_μ , um $\bar{z}$, um z :	0
Vértice 3: um α , um $\bar{z}$, um z :	0

Assim

$$\delta(\gamma) = 2\ell + 2P_z + v_1 + 2P_\alpha \quad (3.8)$$

onde ℓ = número de loops

P_x = número de propagadores do campo X .

v_i = número de vértices do tipo i

E_x = nº de linhas externas do tipo X .

Usando as identidades gráficas:

$$\ell - \sum P_i + \sum v_i = 1 \quad (3.9a)$$

$$E_A + 2P_A = 2v_2 + v_1 \quad (3.9b)$$

$$E_\alpha + 2P_\alpha = v_3 \quad (3.9c)$$

$$E_z + P_z = v_1 + v_2 + v_3 \quad (3.9d)$$

$$\text{temos } \delta(\gamma) = 2 - E_A - 2E_\alpha \quad (3.10)$$

Portando gráficos com uma linha externa de α e uma ou duas linhas externas de A_μ são divergentes, independentemente das linhas externas de z , o que é até certo ponto catastrófico, já que gráficos com um número arbitrário de z 's externos são divergentes. No entanto a situação é diferente, e se o número de li-

nas externas de z for maior que 1 (portanto o n° de linhas externas de $\bar{z}$ também será 1. Note que os z 's e $\bar{z}$'s devem ter o mesmo índice) então a amplitude é convergente, devido ao cancelamento de divergências dos gráficos:

O subgráfico divergente (tanto de (a) como de (b)) próprio, aparece na parte destacada. Esta, quando reduzida a um ponto, isto é, seu contratermo mais divergente, cancela devido ao cancelamento entre o loop de $2z$'s e o propagador de α .

Este argumento pode ser generalizado e é mostrado com rigor dentro da teoria de perturbação $1/n$ renormalizada.

Assim cada par de linhas externas $\bar{z}z$ (com o mesmo índice), diminui em 1 unidade o grau de divergência superficial.

$$\delta(\gamma) = 2 - E_A - 2E_\alpha - \frac{E_{\bar{z}} + E_z}{2} \quad (3.12)$$

Com uma simples contagem de potencias vemos que as funções de Green que divergem no limite $\epsilon \rightarrow 0$ terão 2 ou 4 linhas externas de z e nenhuma, uma ou duas linhas externas de A . Isto é as possíveis contribuições divergentes no limite desejado, vem das seguintes funções de Green:

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13a)$$

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} A_{\gamma} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13b)$$

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} A_{\gamma} A_{\delta} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13c)$$

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} z_{\lambda} \bar{z}_{\sigma} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13d)$$

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} z_{\lambda} \bar{z}_{\sigma} A_{\gamma} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13e)$$

$$\langle 0 | T z_{\alpha} \bar{z}_{\beta} z_{\lambda} \bar{z}_{\sigma} A_{\gamma} A_{\delta} (J_{\mu}(x+\epsilon) J_{\nu}(x-\epsilon) - J_{\nu}(x-\epsilon) J_{\mu}(x+\epsilon)) | 0 \rangle \quad (3.13f)$$

Note que termos com duas linhas externas de z e uma linha externa de α (o multiplicador de Lagrange que implementa $z\bar{z} = c^{\text{te}}$) são proibidos por simetria P. Isto porque este termo ($\alpha \bar{z}_j z_i$) deve ser antissimétrico em μ e ν e logaritmicamente divergente devendo ser da forma $\epsilon_{\mu\nu} \alpha z_i \bar{z}_j$ que é um pseudo tensor.

No entanto das funções de Green acima citadas, somente (13a, b, c) contribuirão para nosso cálculo pois se trata da contribuição mais baixa em $1/n$. A estrutura gráfica destes termos esta mostrada na figura 1 acompanhada das funções de Green de (3.13a-c) e os termos equivalentes da equação (3.7).

Fig. 3.2

Veremos no final do capítulo que as partes divergentes destes gráficos se combinam para formar objetos invariantes de gauge.

O caminho a seguir agora é calcular explicitamente a parte divergente dos gráficos da figura 3.2, tomando cada termo da equação (3.7).

$$7a = - \partial_\mu z_i(x+\epsilon) : \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) : \partial_\nu \bar{z}_j(x-\epsilon) - \\ - \partial_\mu z_i(x+\epsilon) \partial_\nu \bar{z}_j(x-\epsilon) \cdot \langle 0 | T \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) | 0 \rangle \quad (3.14)$$

onde $\langle 0 | T \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) | 0 \rangle$ é o termo desejado e calculado como segue:

$$= n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2ik\epsilon}}{(k + \frac{q_1 - q_2}{2})^2 - m^2}$$

onde usou-se que $p_i = k_i - \frac{\Sigma \text{mom. ext.}}{2}$

Neste gráfico apenas uma subtração nos momentos $q_1=q_2=0$ é suficiente pois as duas derivadas estão agindo sobre o campo externo e não no loop.

Desta forma

$$\langle 0 | T \bar{z}_k(x+\epsilon) z_k(x-\epsilon) | 0 \rangle = \frac{n}{2\pi} K_0(2\epsilon m) \quad (3.15)$$

onde

$$K_0(2m\epsilon) = \int \frac{d^2 k}{2\pi} \frac{e^{-2ik\epsilon}}{k^2 + \mu^2} \quad (3.16)$$

é uma função de Bessel modificada de ordem zero.

$$K_0(x) \approx -\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] \ln \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \gamma + (i-\gamma) \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (3.17)$$

e $\gamma = 0,577\dots$ (constante de Euler-Mascheroni).

Finalmente temos para a parte divergente de 7a:

$$\text{Div } 7a = -\frac{n}{2\pi} \hat{c}_\mu z_i(x) \partial_\nu \bar{z}_j(x) K_0(2\epsilon m) - \text{t.s} \quad (3.18)$$

Este termo foi em particular muito simples pois uma subtração bastou e não havia derivadas nos vértices. Apenas para ilustrar vamos apresentar com todo detalhe o termo 7b e depois apresentar os resultados dos demais termos.

$$\begin{aligned} 7b = & \partial_\mu z_i(x+\epsilon) : \bar{z}_k(x+) \partial_\nu z_k(x-\epsilon) : \bar{z}_j(x-\epsilon) + \\ & + \partial_\mu z_i(x+\epsilon) \bar{z}_j(x-\epsilon) \langle 0 | T \bar{z}_k(x+\epsilon) \partial_\nu z_k(x-\epsilon) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$= -in \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-2ik\epsilon} \frac{(k + \frac{q_1 - q_2}{2})_\nu}{(k + \frac{q_1 - q_2}{2})^2 - m^2} =$$

$$= -in \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2ik\epsilon} k_\nu}{k^2 + m^2} + n(-i) \frac{(q_1 - q_2)_\beta}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-2ik\epsilon} \frac{\partial}{\partial (\frac{q_1 - q_2}{2})} \times$$

$$\times \left[\frac{k + \frac{q_1 - q_2}{2}}{(k + \frac{q_1 - q_2}{2})^2 + m^2} \right] \frac{q_1 - q_2}{2}$$

0 termo da derivada na segunda integral contribui com:

$$\frac{g_{\nu\beta}}{k^2 + m^2} - \frac{2k_\beta k_\nu}{(k^2 + m^2)^2}$$

$$= -in \partial_\nu \int \frac{1}{-2i} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2ik\epsilon}}{k^2 + m^2} + (-i) \frac{(q_1 - q_2)_\beta}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2ik\epsilon}}{k^2 + m^2} g_{\nu\beta} +$$

$$+ ni \frac{2(q_1 - q_2)_\beta}{2} \partial_\beta \frac{1}{-2i} \partial_\nu \frac{1}{-2i} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2ik\epsilon}}{(k^2 + m^2)^2} \quad (3.20)$$

$$= \frac{n}{2\pi} \partial_\nu \frac{K_0}{2} - \frac{n}{2\pi} i (q_1 - q_2)_\beta g_{\nu\beta} \frac{K_0}{2} - \frac{n}{2\pi} i \frac{(q_1 - q_2)_\beta}{4} \partial_\nu \partial_\beta K_1$$

Quando as linhas externa i, j são introduzidas temos finalmente

$$\text{Div}(7b) = -\frac{n}{4\pi} \partial_\nu K_0 \partial_\mu z_i \bar{z}_j + \frac{n}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu z_i \bar{z}_j K_0 - \frac{n}{4\pi} \partial_\mu z_i \partial_\nu \bar{z}_j K_0 +$$

$$+ \frac{n}{8\pi} \partial_\mu \partial_\beta z_i \bar{z}_j \partial_\nu \partial_\beta K_1 - \frac{n}{8\pi} \partial_\mu z_i \partial_\beta \bar{z}_j \partial_\nu \partial_\beta K_1 - \text{t.s} \quad (3.21)$$

$$\text{onde } K_1(m\epsilon) = -\frac{\partial}{\partial m^2} K_0(m\epsilon) \quad (3.22)$$

Os gráficos correspondentes aos termos 7c, 7d, 7e, 7f, 7g, 7h, são obtidos da mesma maneira onde o número de subtrações depende do número de derivadas externas.

Note que os termos 7e, 7f, 7g, 7h são os que contribuem para o gráfico 2 da figura 1.

No entanto o cálculo do gráfico 3 se mostrou bem mais delicado pois não é claro a priori que a parte finita do gráfico seja zero. O problema foi solucionado da seguinte maneira:

O que temos feito até agora foi o seguinte: Dado um produto singular o qual denotamos $O(x, \epsilon)$ escrevemos:

$$O(x, \epsilon) = N[O(x, \epsilon)] + R(x, \epsilon) \quad (3.23)$$

isto é, subtraímos (a função de Green) deste produto de maneira a obtermos o produto normal, que é finito no limite considerado $\epsilon \rightarrow 0$, e novamente somamos as mesmas subtrações de maneira que (3.23) é uma identidade. No produto normal o limite $\epsilon \rightarrow 0$ pode ser feito com segurança. No entanto até aqui este processo não foi explícito, e nem era necessário que o fosse, pois calculamos explicitamente as partes divergentes e constantes e pode-se verificar "a posteriori" que esta última é nula. Agora para o caso do gráfico 3 isto deve ser discutido à luz do nosso esquema de subtração. Neste esquema, o vínculo $\bar{z}z = \text{cte}$ é normalizado a zero, isto é:

$$\bar{z}z = 0 \quad (3.24)$$

que resulta da identidade gráfica

$$\triangle + \triangle_{\text{bubble}} = 0$$

já que o propagador do α é o inverso da bolha com sinal oposto, e o

segundo gráfico não é proibido por se tratar de um vértice especial $\bar{z}z$ e não um vértice da lagrangeana. Se a bolha for subtraída de maneira diferente no vértice especial, como por exemplo num processo de subtração onde a massa do polinomio subtraído é diferente da inicial, não vamos ter um cancelamento completo, e teremos em tal caso:

$$\bar{z}z = \text{cte} \neq 0$$

Voltemos agora a (3.23) com

$$N[0(x)] = N[[J_\mu(x), J_\nu(x)]]. \quad (3.25)$$

Dentro do produto normal vale a identidade

$$N[J_\mu(x), J_\nu(x)] = N\left[\frac{1}{2} (\bar{z}z)(x) (\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu)(x)\right] \quad (3.26)$$

Se $\bar{z}z=0$, o produto normal anula-se, e só nos preocupamos com as subtrações, e é o que passamos a fazer daqui por diante.

Estamos agora em condições de apresentar os resultados da parte divergente da expansão 7.

$$\text{div 7a} = -\frac{n}{2\pi} K_0 (\partial_\mu z_i \partial_\nu \bar{z}_j - \partial_\nu z_i \partial_\mu \bar{z}_j) \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} \text{div 7b} = & -\frac{n}{4\pi} \partial_\nu K_0 \partial_\mu z_i \bar{z}_j + \frac{n}{4\pi} \partial_\mu \partial_\nu z_i \bar{z}_j K_0 - \frac{n}{4\pi} \partial_\mu z_i \partial_\nu \bar{z}_j K_0 + \\ & + \frac{n}{8\pi} \partial_\mu \partial_\beta z_i \bar{z}_j \partial_\nu \partial_\beta K_1 - \frac{n}{8\pi} \partial_\mu z_i \partial_\beta \bar{z}_j \partial_\nu \partial_\beta K_1 - (\text{t.s}) \end{aligned} \quad (3.27b)$$

$$\begin{aligned} \text{div 7c} = & \frac{n}{4\pi} \partial_\mu K_0 z_i \partial_\nu \bar{z}_j - \frac{n}{4\pi} \partial_\mu z_i \partial_\nu \bar{z}_j K_0 + \frac{n}{4\pi} z_i \partial_\mu \partial_\nu \bar{z}_j K_0 - \\ & - \frac{n}{8\pi} \partial_\beta z_i \partial_\nu \bar{z}_j \partial_\mu \partial_\beta K_1 + \frac{n}{8\pi} z_i \partial_\nu \partial_\beta \bar{z}_j \partial_\mu \partial_\beta K_1 - (\text{t.s}) \end{aligned} \quad (3.27c)$$

$$\text{div 7d} = -\frac{n}{4\pi} \partial_\mu z_i \bar{z}_j \partial_\nu K_0 + \frac{n}{4\pi} z_i \partial_\mu \bar{z}_j \partial_\nu K_0 + \frac{n}{8\pi} \partial_\beta z_i \bar{z}_j \partial_\mu \partial_\nu \partial_\beta K_1 \quad (3.27d)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \frac{7e}{7f} &= \frac{ni}{2\pi} \left[2K_0 (A_\mu z_i \partial_\nu \bar{z}_j - z_i \bar{z}_j A_\mu \partial_\nu K_0 + (\partial_\nu z_i A_\mu \bar{z}_j - \partial_\nu A_\mu z_i \bar{z}_j + \right. \\ &\quad \left. + z_i A_\mu \partial_\nu \bar{z}_j) K_0 + \frac{1}{2} (z_i A_\mu \partial_\beta \bar{z}_j - \partial_\beta z_i A_\mu \bar{z}_j - \partial_\beta A_\mu z_i \bar{z}_j) \partial_\nu \partial_\beta K_1 \right] \\ &- (t.s) \end{aligned} \quad (3.27e)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \frac{7g}{7h} &= \frac{ni}{2\pi} \left[2K_0 (-A_\nu \partial_\mu z_i \bar{z}_j) - z_i \bar{z}_j A_\nu \partial_\mu K_0 + (z_i \partial_\mu A_\nu \bar{z}_j + z_i \partial_\mu \bar{z}_j A_\nu \right. \\ &\quad \left. - \partial_\mu z_i A_\nu \bar{z}_j) K_0 + \frac{1}{2} (z_i \partial_\beta A_\nu \bar{z}_j + z_i \partial_\beta \bar{z}_j A_\nu - \partial_\beta z_i A_\nu \bar{z}_j) \partial_\mu \partial_\beta K_1 \right] - \\ &- (t.s) \end{aligned} \quad (3.27f)$$

$$\text{div } (7a + A_\beta) = 0 \quad (3.27g)$$

$$\text{div } (7b + A_\beta) = -\frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\beta K_1 \partial_\mu z_i \bar{z}_j A_\beta + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\beta K_1 \partial_\nu z_i \bar{z}_j A_\beta \quad (3.27h)$$

$$\text{div } (7c + A_\beta) = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\beta K_1 z_i \partial_\nu \bar{z}_j A_\beta - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\beta K_1 \partial_\mu \bar{z}_j z_i A_\beta \quad (3.27i)$$

$$\text{div } |7d + A_\beta| = \frac{1}{2} z_i \bar{z}_j \partial_\mu A_\beta \partial_\nu \partial_\beta K_1 - \frac{1}{2} z_i \bar{z}_j \partial_\nu A_\beta \partial_\mu \partial_\beta K_1 \quad (3.27j)$$

Os gráficos 4,5,6 da fig. 3.2 se anulam por simetria pois, todos estes gráficos são simétricos em $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ pois são apenas logaritmicamente divergentes. Além disso, devido ao fato da parte divergente ter uma singularidade logaritmica, e

$$A_\mu(x+\epsilon)A_\nu(x-\epsilon) \approx A_\mu(x)A_\nu(x) + \epsilon_\lambda (\partial_\lambda A_\mu A_\nu - A_\mu \partial_\lambda A_\nu) \quad (3.28)$$

o segundo termo não contribue no limite $\epsilon \rightarrow 0$, e o primeiro é simétrico na troca de μ por ν , também não contribuindo.

Coletamos agora todos os coeficientes de K_0 , $\partial_\mu K_0$, $\partial_\mu \partial_\nu K_1$, $\partial_\mu \partial_\nu \partial_\beta K_1$ e escrevemos em termos de objetos invariantes de gauge: $D_\mu z$, $F_{\mu\nu}$, j_μ :

$$\begin{aligned}
\left[J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x-\epsilon) \right]_{ij} &= \frac{n}{2\pi} 2K_0 (D_\nu z_i D_\mu \bar{z}_j - D_\mu z_i D_\nu \bar{z}_j) - \frac{n}{2\pi} 2z_i \bar{z}_j F_{\mu\nu} K_0 \\
&- \frac{n}{2\pi} \partial_\nu K_0 J_\mu - \frac{n}{2\pi} \partial_\mu K_0 J_\nu + \frac{n}{2\pi} \left[4z_i \bar{z}_j F_{\mu\beta} - \partial_\mu (z_i \bar{\partial}_\beta \bar{z}_j - 2A_\beta z_i \bar{z}_j) \right] \partial_\nu \partial_\beta K_1 \\
&- \frac{n}{2\pi} \left[4z_i \bar{z}_j F_{\mu\beta} - \partial_\nu (z_i \bar{\partial}_\beta \bar{z}_j + 2A_\beta z_i \bar{z}_j) \right] \partial_\mu \partial_\beta \frac{K_1}{4} + \frac{n}{2\pi} \frac{1}{4} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\beta K_1 J_\beta
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Usando agora as expansões:

$$K_0(2m\epsilon) = -\frac{1}{2} (1+m^2\epsilon^2) \ln m^2\epsilon^2 - \gamma + (1-\gamma)m^2\epsilon^2 \tag{3.30a}$$

$$\partial_\alpha K_1(2m\epsilon) = \epsilon_\alpha (2 + \ln m^2\epsilon^2 - 2(1-\gamma)) \tag{3.30b}$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta K_1(2m\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} (2 + \ln m^2\epsilon^2) + \frac{2\epsilon_\alpha \epsilon_\beta}{\epsilon^2} \tag{3.30c}$$

$$\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma K_1(2m\epsilon) = \frac{2}{\epsilon} (\delta_{\alpha\beta} \epsilon_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} \epsilon_\beta + \delta_{\beta\gamma} \epsilon_\alpha) - \frac{4\epsilon_\alpha \epsilon_\beta \epsilon_\gamma}{(\epsilon^2)^2} \tag{3.30d}$$

obtemos para o comutador desejado:

$$\begin{aligned}
J_\mu(x+\epsilon) J_\nu(x-\epsilon) - J_\nu(x-\epsilon) J_\mu(x+\epsilon) &= \frac{n}{2\pi} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu}{2\epsilon^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\epsilon_\mu \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{(\epsilon^2)^2} \right] J_\rho + \frac{n}{2\pi} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \ln m^2\epsilon^2 \right) (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho) + \right. \\
&+ \left. \frac{\delta_\nu^\sigma \epsilon_\mu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} - \frac{\delta_\mu^\sigma \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} \right] \partial_\sigma J_\rho + \frac{n}{2\pi} \left[2\delta_\mu^\rho \frac{\epsilon_\nu \epsilon^\sigma}{\epsilon^2} + 2\delta_\nu^\sigma \frac{\epsilon_\mu \epsilon^\rho}{\epsilon^2} \right] z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma}
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

A expressão acima pode ainda ser escrita numa forma mais conveniente:

$$\begin{aligned}
J_\mu(x+\epsilon) J_\nu(x) - J_\nu(x) J_\mu(x+\epsilon) &= \frac{n}{2\pi} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu}{\epsilon^2} + \frac{2\epsilon_\mu \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{(\epsilon^2)^2} \right] J_\rho \\
&+ \frac{n}{2\pi} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{m^2 \epsilon^2}{4} \right) (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho) + \frac{\delta_\nu^\sigma \epsilon_\mu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} - \frac{\delta_\mu^\sigma \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} - \right. \\
&- \frac{\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \left. \frac{\epsilon_\mu \epsilon_\nu \epsilon^\rho \epsilon^\sigma}{(\epsilon^2)^2} \right] \partial_\sigma J_\rho + \\
&+ \frac{n}{2\pi} \left[2\delta_\mu^\rho \frac{\epsilon_\nu \epsilon^\sigma}{\epsilon^2} + 2\delta_\nu^\sigma \frac{\epsilon_\mu \epsilon^\rho}{\epsilon^2} \right] z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Uma maneira mais compacta de se escrever a mesma expressão é:

$$[J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] = c_{\mu\nu}^\rho j_\rho + D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial_\sigma j_\rho + E_{\mu\nu}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} \tag{3.33}$$

onde

$$c_{\mu\nu}^\rho = \frac{n}{2\pi} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu}{\epsilon^2} + \frac{2\epsilon_\mu \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{(\epsilon^2)^2} \right] \tag{3.34a}$$

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} &= \frac{n}{2\pi} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{m^2 \epsilon^2}{4} \right) (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho) + \frac{\delta_\nu^\sigma \epsilon_\mu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} - \frac{\delta_\mu^\sigma \epsilon_\nu \epsilon^\rho}{2\epsilon^2} - \right. \\
&- \frac{\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \left. \frac{\epsilon_\mu \epsilon_\nu \epsilon^\rho \epsilon^\sigma}{(\epsilon^2)^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.34b}$$

$$E_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{n}{2\pi} \left[2\delta_\mu^\rho \frac{\epsilon_\nu \epsilon^\sigma}{\epsilon^2} + 2\delta_\nu^\sigma \frac{\epsilon_\mu \epsilon^\rho}{\epsilon^2} \right] \tag{3.34c}$$

3.3 - Carga Quântica

Estamos agora em condições de definir o análogo quântico da carga não local dada pela equação (3.3).

$$Q_{\delta}^{ij} = \frac{1}{n} \int_{|y_1 - y_2| \geq \delta} dy_1 dy_2 \varepsilon(y_1 - y_2) J_0^{ik}(t, y_1) J_0^{kj}(t, y_2) - Z_{\delta} \int dy J_1^{ij}(t, y) \quad (3.35)$$

onde Z depende o corte δ . Para garantir ainda que esta carga quântica-não-local seja bem definida precisamos impor que $Z_{\delta} = \frac{n}{2\pi} \ln \mu \delta$ ($\mu = e^{\gamma-1} \frac{m}{2}$) devido aos termos linearmente divergentes que aparecem na expansão do operador $[J_{\mu}(x+\epsilon), J_{\nu}(x)]$.

A seguir verificaremos que esta carga não é independente do tempo, isto é, não se conserva. Isto pode ser visto usando em (3.35) conservação de corrente e integração por partes:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{\delta}}{dt} = & -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} dy \{ (J_1^{ik}(t, y+\delta) + J_1^{ik}(t, y-\delta)) J_0^{kj}(t, y) - \\ & - (J_1^{kj}(t, y+\delta) + J_1^{kj}(t, y-\delta)) J_0^{ik}(t, y) - \frac{n}{2\pi} \ln \mu \delta \partial_0 J_1^{ij}(t, y) \} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Vemos imediatamente que para o 1º e 2º termos da integral acima podemos usar o resultado do comutador $[J_{\mu}(x+\epsilon), J_{\nu}(x)]$. Assim:

$$\begin{aligned} & (J_1^{ik}(t, y+\delta) + J_1^{ik}(t, y-\delta)) J_0^{kj}(t, y) - (J_1^{kj}(t, y+\delta) + J_1^{kj}(t, y-\delta)) J_0^{ik}(t, y) = \\ & = (\gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{m^2 \delta^2}{4}) (\partial_1 J_0 - \partial_0 J_1) + \partial_0 J_1 - 4z_i \bar{z}_j F_{10} . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) em (3.37) obtemos finalmente a anomalia do modelo CP^{n-1}

$$\frac{dQ_{\delta}^{ij}}{dt} = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z_i \bar{z}_j F_{10} dy . \quad (3.38)$$

3.4 - Conclusão

Em expansão $1/n$ o modelo CP^{n-1} permite produção de pares, apesar de ser classicamente integrável. O comportamento peculiar deste modelo, que está ligado à anomalia da carga não-local quântica impedindo a conservação da mesma, tem uma relação muito íntima com o confinamento do modelo.

Como a expansão $1/n$ descreve bem a região infravermelha, devemos esperar, conforme já foi aventado nesta tese, que a carga quântica não seja conservada, pois se o fosse a matriz-S seria fatorizável, enquanto num modelo confinante, a matriz-S correspondente ao espalhamento de estados exóticos possivelmente não existe. As cargas locais também devem apresentar anomalias, conforme suspeitas divulgadas na ref. (67) no entanto não chegamos a calcular as mesmas.

CAPÍTULO 4

Acoplamento com fermions

Vimos que o modelo CP^{n-1} apresenta uma anomalia na conservação de sua carga não-local, o que implica que a matriz S não é mais fatorizável e neste modelo em particular talvez nem exista tal quantidade.

Quando o modelo é acoplado a fermions a situação muda de maneira drástica. Os acoplamentos interessantes são chamados mínimo e supersimétrico. No acoplamento mínimos somamos à lagrangeana do modelo CP^{n-1} , um termo de interação do campo composto A_μ com uma corrente fermiônica. O modelo supersimétrico é obtido por regras standard (ver apêndice D).

Foi recentemente demonstrado que estes dois modelos ^(19,20) apresentam uma matriz S exata fatorizável. Além disso, o polo no propagador do campo A_μ desaparece e não havendo vestígio de interação de longa distância os assim chamados "partons" são liberados.

Assim é de se esperar que a carga não-local quântica seja conservada. Neste capítulo mostramos que o que foi exposto não está em desacordo com os cálculos do capítulo anterior. Uma anomalia extra, proveniente do acoplamento fermionico ⁽⁶⁸⁾ (anomalia de Adler), cancela a anterior e os modelos voltam a apresentar a propriedade de fatorização.

4.1 - O modelo mínimo

Acoplamos o modelo CP^{n-1} minimamente a fermions escrevendo a lagrangeana:

$$L = \overline{D_\mu z} D_\mu z + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi \quad (4.1)$$

onde $D_\mu z = (\partial_\mu + iA_\mu)z$; $\bar{z}z = \frac{n}{2f}$

As equações de Euler-Lagrange para A_μ fornecem:

$$A_\mu = \frac{if}{n} (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z - \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \quad (4.2)$$

assim novamente o campo clássico A_μ não é independente.

Associada às transformações de $SU(n)$ sobre z_i :

$$\delta z_i = \varepsilon_{ij} z_j \quad (4.3a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = -\varepsilon_{ji} \quad (4.3b)$$

existe uma corrente de Nöther clássica conservada:

$$J_{\mu ij} = z_i \overline{D_\mu z_j} - D_\mu z_i \bar{z}_j = j_{\mu ij} - \frac{2f}{n} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi z_i \bar{z}_j \quad (4.4)$$

onde

$$j_{\mu ij} = z_i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{z}_j + \frac{2f}{n} (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_\mu z) z_i \bar{z}_j \quad (4.5)$$

Esta corrente satisfaz à identidade:

$$\begin{aligned} [J^\mu, J^\nu]_{ij} &= \\ &= -\frac{1}{2} \bar{z}z (\partial^\mu J^\nu - \partial^\nu J^\mu)_{ij} - \frac{1}{2} [\partial^\nu (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - \partial^\mu (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma^\nu \psi)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde usamos na última linha:

$$\varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma_\nu \psi) = 0 \quad (4.7)$$

o que decorre da simetria $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$.

Podemos então definir uma carga clássica não-local conservada:

$$Q = \int dy_1 dy_2 \epsilon(y_1 - y_2) J_0(y_1, t) J_0(y_2, t) - \frac{n}{2f} \int (j_1 - \frac{4f}{n} \bar{\psi} \gamma^1 \psi z_i \bar{z}_j) dy \quad (4.8)$$

4.1a - Quantização

Na versão quântica do modelo os cálculos acima devem ser todos reexaminados.

Usando o formalismo de integrais de caminho a integral de fermions pode ser efetuada⁽⁶⁹⁾

$$\int D\psi D\bar{\psi} e^{-\int d^2x \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \psi} = N \exp \text{tr} \ln \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \quad (4.9)$$

onde N é uma constante (infinita) irrelevante.

Note que, como os fermions são de massa zero, a expressão acima torna-se trivial. Ela é uma soma de gráficos de um loop formado exclusivamente por linhas de fermions com vértices i_μ . Assim teremos objetos do tipo:

$$\int dx_1 \dots dx_n A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) B^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1 \dots x_n) \quad \text{onde } B^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1 \dots x_n) \text{ são os loops de fermions citados.}$$

Entretanto, para qualquer dos índices μ de B :

$$\partial_\mu B^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \quad (\text{conservação de corrente } \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

$$\text{e } \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu B^{\nu_1 \dots \nu_n} = 0 \quad (\text{conservação da corrente axial } \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)$$

$$\text{de onde vem } B^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1 \dots x_n) = 0.$$

Este argumento falha para $n=2$ devido à anomalia de Adler. Neste caso devemos calcular explicitamente para obter:

$$B^{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi} \delta(x-y) \delta^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

Isto modifica o propagador do A_μ pela constante $\frac{1}{\pi}$.

$$\tilde{\Gamma}_{A_\mu A_\nu}(p) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left[(p^2 + 4m^2) A(p) \right]^{-1} \quad (4.11)$$

Esta é a única modificação introduzida pelos fermions, e nas funções de Green eles desaparecem totalmente. Em vértices especiais comparecem trivialmente, como é o caso de $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ em um dos vértices especiais; fermions ligam-se diretamente às linhas de fermions externas (caso elas existam), ou formam uma bolha de ordem mais baixa, que é uma constante. No setor de bosons a contribuição é constante.

A modificação no propagador do campo A_μ leva a consequências bem maiores. O polo em $p^2=0$ desapareceu, e a estrutura analítica deste propagador revela um corte e nenhum polo. Isto quer dizer que os partons foram liberados pela interação fermiônica.

Uma matriz-S no setor de bosons foi proposta para o modelo, em concordância com a ordem mais baixa de $1/n$. Desta maneira a anomalia deve se cancelar, o que acontece através do seguinte mecanismo. A expansão de Wilson para o produto de corrente não sofre influência pela presença dos fermions, já que a corrente

$$J_{ij}^\mu = z_i \overline{D^\mu z_j} - D^\mu z_i \bar{z}_j \quad (4.12)$$

só depende dos campos z_i e A_μ , e a expressão é a mesma do CP^{n-1} puro.

$$J_\mu(x+\epsilon)J_\nu(x) - J_\nu(x)J_\mu(x+\epsilon) = C_{\mu\nu}^\rho J_\rho + D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial_\sigma J_\rho + \\ + \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} + N_2 [J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] \quad (4.13)$$

onde

$$C_{\mu\nu}^\rho = \frac{n}{2\pi} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu}\epsilon^\rho}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu}{\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu}{\epsilon^2} + 2 \frac{\epsilon_\mu^\rho \epsilon_\nu^\rho}{(\epsilon^2)^2} \right] \quad (4.14a)$$

$$D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{n}{2\pi} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{m^2 \epsilon^2}{4} \right) (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho) + \frac{\delta_\nu^\sigma \epsilon_\mu^\rho}{2\epsilon^2} - \frac{\delta_\mu^\sigma \epsilon_\nu^\rho}{2\epsilon^2} \right. \\ \left. + \frac{\delta_\mu^\rho \epsilon_\nu^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\delta_\nu^\rho \epsilon_\mu^\sigma}{2\epsilon^2} - \frac{\delta_{\mu\nu}\epsilon^\rho \epsilon^\sigma}{2\epsilon^2} + \frac{\epsilon_\mu^\rho \epsilon_\nu^\sigma}{(\epsilon^2)^2} \right] \quad (4.14b)$$

$$\epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{n}{2\pi} \left[2 \delta_\mu^\rho \frac{\epsilon_\nu^\sigma}{\epsilon^2} + 2 \delta_\nu^\rho \frac{\epsilon_\mu^\sigma}{\epsilon^2} \right] \quad (4.14c)$$

e o termo $N_2 [J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)]$ denota o produto normal, sendo finito para $\epsilon \rightarrow 0$, e a menos de termos infinitesimais em ϵ pode ser escrito como produto normal de corrente no mesmo ponto: $N_2 [J_\mu(x), J_\nu(x)]$.

No caso do modelo CP^{n-1} puro este termo era igual a zero, o que agora não acontece mais devido a anomalia de Adler, dando uma contribuição adicional.

Da equação (4.6) temos para o produto normal (definido de tal forma que $\bar{z}z=0$, isto é, sem fazer subtração na massa)

$$N[J^\mu, J^\nu] = \frac{1}{2} [(z_i \bar{z}_j) \overleftrightarrow{\partial}^\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - (\nu \leftrightarrow \mu)] \quad (4.15)$$

Lembremos que exatamente neste ponto usamos classicamente a conservação da corrente axial, o que não é mais verdade no caso quântico.

Observemos agora que classicamente:

$$\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi = \frac{i n}{f} A_{\mu} + \bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} z \quad (4.16)$$

que gostaríamos de usar no lugar de $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$ em (4.15). No entanto aparece a constante não renormalizada f . Para evitar isto basta notarmos que, usando-se apenas (4.12) obtemos:

$$[J_{\mu}, J_{\nu}] = -\frac{1}{2} \bar{z} z (\partial_{\mu} J_{\nu} - \partial_{\nu} J_{\mu}) + \frac{1}{2} [(z_i \bar{z}_j) \overleftrightarrow{\partial}_{\nu} (z_k \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{z}_k + 2i \bar{z}_k z_k A_{\mu}) - (v \leftrightarrow \mu)] \quad (4.17)$$

Agora escrevemos:

$$N[J_{\mu}, J_{\nu}] = +\frac{1}{2} N[(z_i \bar{z}_j) \overleftrightarrow{\partial}_{\nu} (z_k \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{z}_k + 2i \bar{z}_k z_k A_{\mu}) - (v \leftrightarrow \mu)] \quad (4.18)$$

Os gráficos que contribuem ao lado direito de (4.18) têm a seguinte estrutura:

(Fig. 4.1)

onde no segundo não pode ocorrer um subgráfico do tipo que esta em uma caixa no primeiro.

O gráfico (a) no espaço dos momentos é:

$$I_{\mu\nu} = -\frac{i n}{2} (2q-p)_\nu \left(\frac{q_\mu q_\rho}{q^2} - \delta_{\mu\rho} \right) F(q) \left(\frac{q_\rho q_\sigma}{q^2} - \delta_{\rho\sigma} \right) \frac{1}{F + \frac{1}{\pi}} j_\sigma(q) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.19)$$

onde p é o momento total entrando no vértice V e a função

$$F(q) = [(p^2 + 4m^2)A(p) - \frac{1}{\pi}]. \text{ Portanto:}$$

$$I_{\mu\nu} = -\frac{i n}{2} (2q-p)_\nu j_\mu(q) - \frac{i n (2q-p)_\nu}{2\pi} \left(\frac{q_\mu q_\sigma}{q^2} - \delta_{\mu\sigma} \right) \frac{1}{F + \frac{1}{\pi}} j_\sigma(q) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.20)$$

Onde a conservação de corrente no espaço dos momentos foi usada:

$$q_\mu j^\mu(q) = 0 \quad (4.21)$$

O primeiro termo em (4.20) cancela com o gráfico das figuras (b), (c). O segundo termo pode ser reescrito no espaço de coordenadas notando-se que o fator constante $\frac{1}{\pi} \times$ propagador $A_\mu A_\nu$ corresponde a uma bolha de fermions onde em γ^ν vem um vértice da interação (que só pode ser $A_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi$).

Temos então 2 termos: O primeiro deles corresponde à seguinte parte do segundo termo em (4.20)

$$-\frac{i n}{2\pi} (2q-p)_\nu \left(\frac{q_\mu q_\sigma}{q^2} - \delta_{\mu\sigma} \right) \frac{1}{F + \frac{1}{\pi}} j_\sigma(q) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.22a)$$

o segundo corresponde ao termo restante de (4.20)

$$\frac{i n}{2\pi} p_\nu \left(\frac{q_\mu q_\sigma}{q^2} - \delta_{\mu\sigma} \right) \frac{1}{F + \frac{1}{\pi}} j_\sigma(q) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.22b)$$

Estes termos são respectivamente correspondentes a (4.22a) e (22b).

$$1) -\frac{n}{\pi} z_i \bar{z}_j (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \quad (4.23)$$

$$2) - \frac{n}{2} \partial_\nu [z_i \bar{z}_j (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)] - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.24)$$

que somados resultam no produto normal:

$$N_2[J_\mu, J_\nu] = \frac{n}{\pi} z_i \bar{z}_j F_{\mu\nu} - \frac{n}{2} [\partial_\nu (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - (\mu \leftrightarrow \nu)] \quad (4.25)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

4.1b - Carga quântica não-local

Podemos definir a carga $Q = \lim_{\delta \rightarrow 0} Q_\delta$ onde

$$Q_\delta = \frac{1}{n} \int_{|y_1 - y_2| \geq \delta} dy_1 dy_2 \epsilon(y_1 - y_2) J_0(y_1, t) J_0(y_2, t) - \frac{Z}{n} \int J_1 dy + \int \bar{\psi} \gamma^\mu \psi z_i \bar{z}_j dy \quad (4.26)$$

com $Z = \frac{n}{2\pi} \ln(\mu\delta)$.

De forma que obtemos, usando a expansão de Wilson e a equação (4.25) para o produto normal que:

$$\frac{dQ^{ij}}{dt} = 0 \quad (4.27)$$

até a ordem considerada.

4.2 - O modelo supersimétrico

Tomemos a Lagrangeana supersimétrica* acoplando os modelos CP^{n-1} e Gross-Neveu quiral.

$$L = D_\mu z \overline{D_\mu z} + \bar{\psi}(\not{\partial} + \gamma_\mu \bar{z} \partial_\mu z) \psi + \frac{f}{2n} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5 \psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)^2] \quad (4.29)$$

$$\text{onde } D_\mu z = \partial_\mu z - \frac{2f}{n} (\bar{z} \partial_\mu z) z$$

$$\bar{z}z = \frac{n}{2f} ; \quad \bar{\psi}z = \bar{z}\psi = 0 .$$

Seguindo o mesmo caminho tomado na seção anterior, achamos primeiramente a corrente de Nöther associada às transformações de $SU(n)$.

$$\delta z_i = \epsilon_{ij} z_j \quad (4.29a)$$

$$\delta \psi_i = \epsilon_{ij} \psi_j \quad (4.29b)$$

Para as quais achamos

$$J_\mu^{ij} = z_i \overleftrightarrow{D}_\mu \bar{z}_j + \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_i = j_\mu^{ij} + i_\mu^{ij} \quad (4.30a)$$

onde

$$j_\mu^{ij} = z_i \overleftrightarrow{D}_\mu \bar{z}_j \quad (4.30b)$$

$$i_\mu^{ij} = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_i \quad (4.30c)$$

Esta corrente satisfaz:

---

* O modelo é tratado nas mesmas condições que o acoplamento mínimo (mesma métrica e espaço).

$$\begin{aligned}
[J_\mu, J_\nu] = & \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + \partial_\mu i_\nu - \partial_\nu i_\mu - \partial_\nu [(z_i, \bar{z}_j) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi] + \\
& + \partial_\mu [z_i, \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma_\nu \psi]
\end{aligned}
\quad (4.31)$$

A equação (4.31) nos leva a definir a carga não-local (para $\frac{n}{2f} = 1$):

$$\begin{aligned}
Q = \frac{1}{n} \int dy_1 dy_2 \epsilon(y_1 - y_2) j_0^{ik}(t, y_1) j_0^{kj}(t, y_2) - \\
- \frac{1}{n} \int dy (j_1^{ij}(t, y) + 2 i_1^{ij}(t, y)) + \\
+ \frac{i}{n} \int dy (z_i, \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma^1 \psi)(t, y)
\end{aligned}
\quad (4.32)$$

4.2a - Quantização

Novamente encontramos o problema de verificar se a carga (4.32) continua sendo conservada no caso quântico, ou se a anomalia encontrada para o CP^{n-1} puro continua evitando esta conservação.

O que iremos mostrar é que há novamente um cancelamento de anomalias, e o modelo é fatorizável, desta vez não só no setor de bosons mas também no setor de fermions.

Para obtermos a versão quântica do comutador, precisamos estudar o comportamento a curtas distâncias do produto de duas correntes como no caso anterior.

A expansão mais geral para este produto é:

$$\begin{aligned}
[J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] = & N[J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] + C_{\mu\nu}^\rho j_\rho^{ij} + D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma j_\rho^{ij} + \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} + \\
& + 2m F_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \pi \bar{\psi}_j \psi_i + H_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \phi \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + \\
& + I_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j \gamma_5 c - \psi_i \bar{z}_j \gamma_5 \bar{c}) + 2 C_{\mu\nu}^{\rho} \bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i + K_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma (\bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i) + \\
& + L_{\mu\nu}^\rho \bar{\psi}_j \overleftrightarrow{D}_\rho \psi_i + M_{\mu\nu} z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi + N_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho (z_i \bar{z}_j) \phi + \\
& + O_{\mu\nu}^\rho (z_i \bar{\psi}_j \gamma_\rho \bar{c} - \psi_i \bar{z}_j \gamma_\rho c) + P_{\mu\nu}^\rho (z_i \bar{\psi}_j \gamma_\rho c - \psi_i \bar{z}_j \gamma_\rho \bar{c}) + \\
& + Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j \pi + R_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j \bar{c} + \psi_i \bar{z}_j c) + S_{\mu\nu}^\rho z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\rho \psi + \\
& + T_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j c - \psi_i \bar{z}_j \bar{c}) + U_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j \phi \pi
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Nesta expansão termos de ordem superiores como por exemplo quadrilineares em ψ 's e z 's não foram considerados.

Alguns destes coeficientes devem ser nulos por motivos vários:

- Por uma transformação de conjugação de carga vemos que o lado direito da expansão (4.33) muda de sinal e troca $i \leftrightarrow j$ e assim por invariança C temos que $M_{\mu\nu}$, $P_{\mu\nu}^\rho$, $O_{\mu\nu}^\rho$, $N_{\mu\nu}^\rho$ devem ser zero.
- $L_{\mu\nu}^\rho$ e $S_{\mu\nu}^\rho$ se anulam para $\epsilon \rightarrow 0$ pois estes termos são no máximo logaritmicamente divergente e assim usando somente $\sigma_{\mu\nu}$ e ϵ não conseguimos construir um tensor de terceiro rank que tenha tal propriedade.
- As contribuições de $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ e $U_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ vem da subtração (no momento zero) do gráfico da figura 4.1 mas pode-se ver imediatamente que dão contribuição nula quando antissimetrizados em μ e ν .

d) $R_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ são antissimétricos em μ e ν logo são proporcionais a $\epsilon_{\mu\nu}$ o que é impossível por invariança P.

Com estas observações podemos escrever a equação (4.33) na forma reduzida:

$$\begin{aligned}
 [J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] &= N[J_\mu(x+\epsilon), J_\nu(x)] + C_{\mu\nu}^\rho j_\rho + D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma j_\rho + \\
 &+ \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} + 2m F_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \pi \bar{\psi}_j \psi_i + \\
 &+ H_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \phi \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + I_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j \gamma_5 c - \psi_i \bar{z}_j \gamma_5 \bar{c}) + \\
 &+ 2 C_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i + K_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma (\bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i) \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

Os coeficientes $C_{\mu\nu}^\rho$, $D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$, $\epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ foram calculados no capítulo 3. Os demais são calculados como segue:

$$\begin{aligned}
 1) \quad G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \pi \bar{\psi}_j \psi_i &\propto \pi \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \diagdown \quad \diagup \\ \psi_k \quad \bar{\psi}_k \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bar{\psi}_j \quad \psi_i \end{array} = \\
 &= \pi \bar{\psi}_{j\alpha}(\epsilon) \left[\gamma_{\mu\alpha\beta} \bar{\psi}_{k\beta}(\epsilon) \psi_{k\delta}(0) \gamma_{\nu\delta\gamma} \right] \psi_{i\gamma}(0) + P.F.
 \end{aligned}$$

que equivale ao cálculo do gráfico 3 da figura (4.2):

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \gamma_5 \end{array} &= \pi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\gamma} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \gamma_\mu \frac{1}{i\bar{k}-m} \gamma_5 \frac{1}{i\bar{k}-m} \gamma_\nu e^{ik\epsilon} + P.F. \\
 &= \pi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\gamma} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik\epsilon} \gamma_\mu (ik+m) \gamma_5 (ik+m) \gamma_\nu \frac{1}{(k^2+m^2)^2} + P.F.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\gamma} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik\varepsilon} \frac{\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu}{k^2 + m^2} + \text{P.F.} \\
&= -\pi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\gamma} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5)_{\alpha\gamma} K_0(m\varepsilon) + \text{P.F.} \\
&= 2\pi \bar{\psi}_j \psi_i \varepsilon_{\mu\nu} K_0(m\varepsilon) + \text{P.F.} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

2) $\frac{H_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} \phi \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i}{\quad}$ este termo vem do gráfico 4.

$$\begin{aligned}
&= \phi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\beta} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik\varepsilon} \gamma_\mu \frac{1}{i\bar{k}-m} \frac{1}{i\bar{k}-m} \gamma_\nu + \text{P.F.} \\
&= -2\phi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\beta} K_0(m\varepsilon) \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \alpha\beta + 4m^2 \bar{\psi}_j \psi_i \phi \varepsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik\varepsilon}}{(k^2 + m^2)^2} + \text{P.F.} \quad (4.36)
\end{aligned}$$

A segunda integral em (4.36) é constante e será incluída na parte finita da bolha. O valor da segunda integral é:

$$4m^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2\pi \sigma dr}{(r^2 + 1)^2} = \frac{4\pi}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{\pi} \quad (4.37)$$

Assim este valor será incluído na parte finita a fim de normalizar a parte finita como sendo menos o inverso do propagador de ϕ ou seja:

$$\begin{aligned}
&0 - \left[\left(\bigcirc \right)_{p^2=0} + \frac{1}{\pi} \right] + \left[\left(\bigcirc \right)_{p^2=0} + \frac{1}{\pi} \right] \\
&\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{P.F.}} \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Desta forma na parte finita temos o cancelamento do propagador de ϕ com a bolha assim:

$$\text{Bubble diagram} + \text{Triangle diagram} = 0$$

3) $2m F_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i$ e $2C_{\mu\nu}^{\rho} \bar{\psi}_j \gamma_{\rho} \psi_i$ estes termos vêm do gráfico:

$$= 2m \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i -$$

$$- \frac{2}{\epsilon^2} \bar{\psi}_j \gamma_{\rho} \psi_i (\delta_{\mu\nu} \epsilon^{\rho} - \delta_{\mu\rho} \epsilon^{\nu} - \delta_{\nu\rho} \epsilon^{\mu}) + \text{P.F.} \quad (4.38)$$

4) $I_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j \gamma_5 c - \psi_i \bar{z}_j \gamma_5 \bar{c})$ estes termos vêm dos gráficos:

$$= 4z_i \bar{\psi}_j c \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) + 2\epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 z_i \bar{\psi}_j c + \text{P.F.} \quad (4.39)$$

$$= 4\bar{c} \bar{z}_j \psi_i \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\bar{\epsilon}) + 2\epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \bar{c} \bar{z}_j \psi_i + \text{P.F.} \quad (4.40)$$

Onde em ambos os gráficos o termo com γ_5 é somado à parte finita para normalizá-la de acordo com o inverso do propagador c .

Para proporcionar uma melhor leitura apresentamos nossos resultados tabelados.

Gráfico	Tipo de termo	Contribuição
3	$G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \pi \bar{\psi}_j \psi_i$	$= 2\pi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\beta} \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) + P.F.$
4	$H_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \phi \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i$	$= -2\phi \bar{\psi}_{j\alpha} \psi_{i\beta} K_0(m\epsilon) \epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \alpha\beta + \cancel{1}\pi + P.F.$
5	$\bar{\psi}_j \psi_j$ $\bar{\psi} \psi$	$= 0$
6	$F_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i$ $C_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i$	$= 2m\epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i +$ $+ \frac{2}{\epsilon^2} \bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i (\delta_{\mu\nu} \epsilon^\rho - \delta_\mu^\nu \epsilon^\rho - \delta_{\nu\rho} \epsilon^\mu) + P.F.$
7a	$I_{\mu\nu} c z_i \bar{\psi}_j$	$= 4z_i \bar{\psi}_j c \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) + 2\epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 z_i \bar{\psi}_j c + P.F.$
7b	$J_{\mu\nu} \bar{c} \psi_i \bar{z}_j$	$= 4\bar{c} \bar{z}_j \psi_i \epsilon_{\mu\nu} K_0(m\epsilon) + 2\epsilon_{\mu\nu} \gamma_5 \bar{c} \bar{z}_j \psi_i + P.F.$

Tabela 5

Olhando agora para a soma dos termos contendo $G_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $H_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $F_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $I_{\mu\nu}$ vemos que é proporcional à divergência da corrente axial, isto é:

$$\begin{aligned} & G_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \pi \bar{\psi}_j \psi_i + 2m F_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + H_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma} \bar{\psi}_j \gamma_5 \psi_i + \\ & + I_{\mu\nu} (z_i \bar{\psi}_j \gamma_5 c - \psi_i \bar{z}_j \gamma_5 \bar{c}) = 2 \epsilon_{\mu\nu} K_0 (m\epsilon) \partial_\lambda (\bar{\psi}_j \gamma_\lambda \gamma_5 \psi_i) \\ & = R_{\mu\nu} \epsilon^{\sigma\rho} \partial_\sigma (\bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i) \end{aligned} \quad (4.41)$$

e $R_{\mu\nu}$ pode ser incluído no termo com $K_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$ que será redefinido como segue:

$$K_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma (\bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i) + R_{\mu\nu} \epsilon^{\sigma\rho} \partial_\sigma (\bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i) \equiv 2D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma i_\rho \quad (4.42)$$

A expressão para o comutador fica finalmente:

$$\begin{aligned} [J_\mu, J_\nu] &= N[J_\mu, J_\nu] + C_{\mu\nu}^\rho j_\rho^c + 2 C_{\mu\nu}^{\prime\rho} i_\rho + D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} \partial_\sigma j_\rho^c + 2D_{\mu\nu}^{\prime\sigma\rho} \partial_\sigma i_\rho \\ &+ \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde j_ρ^c é a corrente pura do CP^{n-1} e $i_\rho = \bar{\psi}_j \gamma_\rho \psi_i$ é a corrente pura fermionica.

Do segundo termo da equação (4.38), o coeficiente de $C_{\mu\nu}^{\prime\rho}$ é dado por:

$$C_{\mu\nu}^{\prime\rho} = \frac{n}{\pi} \left| -\delta_{\mu\nu} \frac{\epsilon^\rho}{\epsilon^2} + \delta_{\mu\rho} \frac{\epsilon^\nu}{\epsilon^2} + \delta_{\nu\rho} \frac{\epsilon^\mu}{\epsilon^2} \right| \quad (4.44)$$

No entanto $D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$ continua desconhecido e poderia ser calculado em $1/n$ mas com o valor de $C_{\mu\nu}^{\prime\rho}$, impondo conservação P.T, localidade e conservação de corrente pode-se obter $D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$ diretamente:

1) Localidade implica:

$$D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) = - D_{\nu\mu}^{\sigma\rho}(-\varepsilon) - C_{\nu\mu}^{\rho}(-\varepsilon)\varepsilon^{\sigma} \quad (4.45a)$$

$$C_{\mu\nu}^{\rho}(\varepsilon) = - C_{\nu\mu}^{\rho}(-\varepsilon) \quad (4.45b)$$

2) Conservação P.T. implica

$$D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(-\varepsilon) = D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) \quad (4.46a)$$

$$C_{\mu\nu}^{\rho}(-\varepsilon) = -C_{\mu\nu}^{\rho}(\varepsilon) \quad (4.46b)$$

Seja agora um $F_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon)$ na combinação particular:

$$F_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) = D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) - \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^{\rho}(\varepsilon)\varepsilon^{\sigma} \quad (4.47)$$

$$F_{\nu\mu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) = D_{\nu\mu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) - \frac{1}{2} C_{\nu\mu}^{\rho}(\varepsilon)\varepsilon^{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \text{P.T.} \\ &= D_{\nu\mu}^{\sigma\rho}(-\varepsilon) + \frac{1}{2} C_{\nu\mu}^{\rho}(-\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L} \\ &= -D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) - C_{\mu\nu}^{\rho}(-\varepsilon)\varepsilon^{\sigma} + \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^{\rho}(-\varepsilon) \end{aligned}$$

$$= -D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) - \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^{\rho}(-\varepsilon)\varepsilon^{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \text{L} \\ &= -D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) + \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^{\rho}(\varepsilon)\varepsilon^{\sigma} \end{aligned}$$

$$\therefore F_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) = - F_{\nu\mu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) \quad (4.48)$$

isto é, $F_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon)$ é antissimétrico em μ, ν . Assim podemos escrever um tensor da forma geral:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\sigma\rho}(\varepsilon) &= D_1^{\sigma\rho} \varepsilon^{\rho} (\varepsilon_{\mu} \delta_{\nu}^{\sigma} - \varepsilon_{\nu} \delta_{\mu}^{\sigma}) + D_2^{\sigma\rho} \varepsilon^{\rho} (\varepsilon_{\mu} \delta_{\nu}^{\sigma} - \varepsilon_{\nu} \delta_{\mu}^{\sigma}) + \\ &+ D_3^{\sigma\rho} (\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\mu}^{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Desta forma o coeficiente $D_{\mu\nu}^{\sigma\rho}$ se escreve:

$$D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} = \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^{\rho} \epsilon^{\sigma} + D_1^{\rho} \epsilon^{\rho} (\epsilon_{\mu} \delta_{\nu}^{\sigma} - \epsilon_{\nu} \delta_{\mu}^{\sigma}) + D_2^{\rho} \epsilon^{\rho} (\epsilon_{\mu} \delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon_{\nu} \delta_{\mu}^{\sigma}) + D_3^{\rho} (\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\mu}^{\sigma}) \quad (4.50)$$

Resta ainda impor as equações de conservação de corrente que são:

$$\partial^{\mu} D_{\mu\nu}^{\sigma\rho} = 0 \quad (4.51a)$$

$$\partial^{\mu} C_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad (4.51b)$$

de onde obtemos:

$$\frac{d}{dz^2} (z^2 D_1^{\rho} + D_3^{\rho}) = -\frac{1}{4} z^2 C_1 \quad (4.52a)$$

$$\frac{d}{dz^2} (z^2 D_2^{\rho} - D_3^{\rho}) = -\frac{1}{4} z^2 C_2 \quad (4.52b)$$

cuja solução é:

$$z^2 D_1^{\rho} + D_3^{\rho} = \frac{n}{4\pi} \ln \mu^2 z^2 \quad (4.53)$$

que é suficiente para a definição da versão quântica da carga não local.

4.2.b - Carga quântica não-local

Definimos a versão quântica da carga não-local como:

$$Q_{\delta} = \frac{1}{n} \int_{|y_1 - y_2| \geq \delta} dy_1 dy_2 \epsilon(y_1 - y_2) J_0^{ik}(y_1, t) J_0^{kj}(y_2, t) - \frac{Z_{\delta}}{n} \int dy (j_1^{cij}(y, t) + 2i j_1^{ij}(y, t)) + \frac{i}{\sqrt{n}} \int dy (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma^i \psi)(y, t) \quad (4.54)$$

Escolhendo $Z = \frac{n}{2\pi} \ln \mu\delta$ e usando que:

$$[J_0, J_0]_{T.I.} = - \frac{n}{2\pi(y_1 - y_2)} j_1^c(y_2, t) - \frac{2n}{2\pi(y_1 - y_2)} i_1(y_2, t) + O(|y_1 - y_2|^{-0}) \quad (4.55)$$

verifica-se que a carga dada pela equação (4.54) é bem definida. Resta portanto mostrar que a mesma é conservada

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{n} \int_{|y_1 - y_2| \geq \delta} dy_1 dy_2 \epsilon(y_1 - y_2) & \left[\frac{\partial}{\partial y_1} J_0^{ik}(y_1, t) J_0^{kj}(y_2, t) + \right. \\ & + J_0^{ik}(y_1, t) \frac{\partial J_1}{\partial y_0}(y_2, t) - \frac{Z\delta}{n} \int dy \frac{\partial}{\partial t} (j_1^c + 2i_1) + \\ & \left. + \frac{i}{\sqrt{n}} \int dy \frac{\partial}{\partial t} (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma' \psi) \right] \quad (4.56) \end{aligned}$$

Integrando primeiramente em uma das variáveis temos:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{n} \int dy & \left[(J_0^{ik}(t, y+\delta) + J_1^{ik}(t, y-\delta)) J_0^{kj}(y, t) - (J_1^{kj}(y+\delta, t) + \right. \\ & + J_1^{kj}(y-\delta, t) J_0^{ik}(y, t) - Z\delta \frac{\partial}{\partial t} (j_1^c + 2i_1) + \sqrt{n} i \frac{\partial}{\partial t} (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma' \psi) \left. \right] \quad (4.57) \end{aligned}$$

Para o comutador $[J_0, J_1]$ que aparece acima temos, olhando para (4.43)

$$[J_0, J_1] = N[J_0, J_1] + D_{01}^{\sigma\rho} \partial_\sigma j_\rho + 2 D_{01}'^{\sigma\rho} \partial_\sigma i_\rho + E_{01}^{\rho\sigma} z_i \bar{z}_j F_{\rho\sigma} \quad (4.58)$$

Substituindo (4.58) em (4.57) vê-se imediatamente que $\partial_0 j_1$ e $\partial_0 i_1$ cancelam. Assim temos:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2}{n} \int dy N[J_0, J_1] + \frac{2}{\pi} \int dy z_i \bar{z}_j F_{01} + \frac{i}{\sqrt{n}} \int dy \frac{\partial}{\partial t} (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma' \psi) \quad (4.59)$$

O cálculo de $N[J_0, J_1]$ é completamente análogo ao do acoplamento mínimo e o resultado é:

$$N[J_0, J_1] = -\frac{n}{\pi} z_i \bar{z}_j F_{01} - \frac{\sqrt{n}i}{2} \frac{\partial}{\partial t} (z_i \bar{z}_j \bar{\psi} \gamma^t \psi) \quad (4.60)$$

De tal forma a se obter a conservação da carga, isto é, $\frac{dQ}{dt} = 0$.

4.3 - Conclusão

Ao acoplarmos o modelo CP^{n-1} a fermions, temos em geral para o modelo resultante uma matriz-S fatorizável. No setor de bosons isto aparece que se deve principalmente ao tipo de acoplamento, isto é, do vetor potencial A_μ acoplar minimamente com a corrente fermiônica, o que fornece uma contribuição constante para o propagador do A_μ , "diluindo" a partícula de massa zero e o campo A_μ passa a não descrever partículas físicas, pois não há mais polos em seu propagador.

Assim sendo as sutilezas da interação supersimétrica não são as principais responsáveis pelo cancelamento da anomalia mas desempenham um papel importante em outro nível, ou seja, na conservação da carga clássica não-local.

Graf. 3

Graf. 4

Graf. 6

Graf. 7a

Graf. 7b

+

= 0

Graf. 5

Fig. 4.2

CAPÍTULO 5

Conclusões e Problemas em aberto

Da expansão perturbativa da matriz S , concluímos que apesar da expansão em potências da constante de acoplamento estar correta, o uso da liberdade assintótica e consequente relação entre a variável rapidez (θ), a massa μ e a constante de a-
coplamento está errada. Resultados que não dependem desta relação foram satisfatórios como por exemplo o anulamento das am-
plitudes $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ nos modelos considerados, e a ausência da produção de pares no CP^{n-1} perturbativo. Estes resultados não são incompatíveis com os da secção seguinte, o que podemos concluir olhando para os resultados do capítulo 4, CP^{n-1} aco-
plado minimamente a fermions.

No setor de bosons, a única influência do fermion é gerar uma massa para o campo A_μ , e consequentemente liberar os partons. No limite de altas energias do cálculo perturbativo, estamos supondo que os partons a curtas distâncias se comportem como não confinados, e possuam uma pequena massa, de tal mane-
ira que as condições são exatamente iguais a do modelo chamado acoplamento mínimo, que por sua vez possui matriz- S fatoriza-
vel e ausência de formação de pares.

A anomalia do modelo CP^{n-1} puro, deve estar ligada ao confinamento. No caso de acoplarmos o modelo a fermions esta anomalia só se cancela quando a carga elétrica dos fermions for a mesma dos bosons, isto é, a derivada covariante é a mes-
ma. No entanto já sabemos que esta é a condição em que o confina-
mento deixa de existir nestes modelos.

A discussão da anomalia nos modelos estudados também poderia ter sido feita usando-se a corrente não-local.^(70,71)

$$J_{\mu}^{ij}(x,t) = 2j_0^{ik}(x,t) \int_{-\infty}^x dy j_0^{kj}(y,t) - \epsilon_{\mu\nu} j_{\nu}^{ij}(x,t) \quad (5.1)$$

cuja integral espacial da componente zero é a carga não local considerada. A conservação desta corrente equivale à conservação da carga não local, e o que deveríamos ter mostrado em tal caso seriam as identidades de Ward para a mesma. Para isto seria necessário definir um produto normal do produto de correntes em pontos separados, e estudar a equação de conservação da corrente de Nöther j_{μ}^{ij} quando esta estiver dentro do produto normal considerado. O resultado desta identidade de Ward deverá ser:

$$\partial_{\mu} J_{ij}^{\mu} = \frac{i}{\pi} z_i \bar{z}_j \tilde{F} + \text{termos de superfície} \quad (5.2)$$

$$\text{onde } \tilde{F} = \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.3)$$

O problema do caso $n=2$, isto é o modelo CP^1 deve ser tratado separadamente, já que a expansão $1/n$ possivelmente falha neste caso. A expansão de Wilson, todavia, pode ser calculada em teoria de perturbação e o preço a ser pago é a introdução da constante de acoplamento g . Neste caso, pode-se verificar olhando-se para a mesma classe de gráficos que a anomalia ainda não se cancela (basta substituir A_{μ} por $\frac{f}{n} \bar{z} \frac{\partial}{\partial z} z$, e $n \rightarrow n-1$ pois o número de graus de liberdade nos campos z_i diminui de 1). Isto pode parecer estranho, se observarmos que o modelo CP^1 é equivalente ao modelo σ com simetria $O(3)$, que é fatorizável. No entanto os campos de $O(3)$ podem ser vistos como estados ligados dos campos z_i do CP^1 . Conjecturamos que a anomalia se cancele para processos envolvendo estados ligados.

Há ainda a questão envolvendo as correções radiativas das anomalias, isto é, até que ponto os resultados obtidos serão modificados por ordens mais altas. Nossa conjectura é de que, como no caso da anomalia de Adler, nossos resultados sejam exatos. Se não o forem, os modelos supersimétricos de acoplamento mínimo não serão fatorizáveis, pois a "contra anomalia" é uma anomalia de Adler, que é exata, isto é não possui correções radiativas.

Se a anomalia do modelo CP^{n-1} for exata, podemos usar a equação da anomalia para obter relações entre funções de Green do modelo, que eventualmente possibilitem informações valiosas sobre as mesmas.

Devido a não conservação verificada, também as cargas locais dos modelos considerados devem respectivamente ter anomalias e cancelamentos. De uma maneira geral, cargas quânticas não locais devem ser estudadas no contexto de modelos geométricos. Polyakov introduziu modelos deste tipo no chamado espaço de loops, para ter uma relação mais direta com os campos de Yang-Mills. Uma possível extensão do presente trabalho consiste no estudo de cargas superiores no espaço de loops.

APÊNDICE A

Regra de Källén-Toll

O domínio desta regra foi fundamental para o cálculo de diagramas do capítulo 2 que contêm (até 3ª ordem) no máximo 2 loops e 3 vértices no espaço de (1+1) dimensões. Na sua versão original os autores⁽⁶⁰⁾ se propõe a calcular a integral $F(z_{jk}, m_k^2)$ considerada como uma função analítica de Z_{jk} .

$$F(Z_{jk}, m_k^2) = \int \frac{d\vec{k} P(k, p)}{\prod_{k=0}^n [(k-p_k)^2 + m_k^2 - i\epsilon]} \quad (A.1)$$

$$\text{onde } Z_{jk} = - (p_j - p_k)^2 = (p_{j_0} - p_{k_0})^2 - (\vec{p}_j - \vec{p}_k)^2 \quad (A.2)$$

$P(k, p)$ é um polinômio qualquer que garante a convergência da integrando, no entanto não é uma hipótese fundamental quando aplicamos a uma teoria renormalizável.

Consideremos o caso mais simples que corresponde a uma bolha equivalente a duas linhas internas entre dois vértices e duas linhas externas onde tomaremos o polinômio $P(k, q) \equiv 1$

Neste caso chamaremos a amplitude de $L_{12} \equiv F(z_{12}, m_1^2, m_2^2)$ a qual após usarmos a identidade de Feynman fica

$$L_{12} = i \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2)}{m_1^2 \alpha_1 + m_2^2 \alpha_2 + z_{12} \alpha_1 \alpha_2} = \frac{i\pi}{R_{12}^{1/2}} \ln X_{12} \quad (A.3)$$

onde

$$R_{12} = (z_{12} - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \quad (\text{A.4a})$$

$$X_{12} = \frac{z_{12} - m_1^2 - m_2^2 - \sqrt{R_{12}}}{z_{12} - m_1^2 - m_2^2 + \sqrt{R_{12}}} \quad (\text{A.4b})$$

Uma vez conhecido o valor de L_{jk} seguiremos os passos propostos pelos autores:

1) Para obter $F(z_{jk}, m_k^2)$ tomamos todas as contrações possíveis dos pares $[(k-p_j)^2 + m_j^2]$ e $[(k-p_k)^2 + m_k^2]$ do denominador da eq. (A1) e determinamos os dois valores $k_{jk}^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2$) que zeram simultaneamente o par escolhido isto equivale a resolver os sistemas equivalentes as diversas contrações:

$$\begin{cases} (k - p_j)^2 + m_j^2 = 0 \\ (k - p_k)^2 + m_k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5a})$$

$$\begin{cases} (k - p_j)^2 + m_j^2 = 0 \\ (k - p_k)^2 + m_k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5b})$$

A solução geral é obtida da seguinte forma. Seja

$$Q = k - p_j \quad \text{e} \quad p_{jk} = p_j - p_k \quad (\text{A.6})$$

O Sistema (A.5) fica

$$\begin{cases} Q^2 + m_j^2 = 0 \\ 2Q p_{jk} - m_j^2 + p_{jk}^2 + m_k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{cases} Q^2 + m_j^2 = 0 \\ 2Q p_{jk} - m_j^2 + p_{jk}^2 + m_k^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7b})$$

Cuja solução é:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2p_{jk}^2} \left[(p_{jk}^2 + m_k^2 - m_j^2) p_{kj} \pm \tilde{p}_{kj} (\beta(-p_{kj}^2, m_j^2, m_k^2))^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{2z_{ik}} \left[(z_{jk} + m_k^2 - m_j^2) p_{kj} \pm \tilde{p}_{kj} R_{jk}^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $\tilde{p}_{jk}$ é um vetor ortogonal a p_{jk} isto é:

$$p = (p_x, p_0) \quad (A.9a)$$

$$\tilde{p} = (p_0, p_x) \quad (A.9b)$$

$$\tilde{p}^2 = -p^2$$

Voltamos então para a eq. (A.6) que nos fornece a solução do sistema (A.5)

$$k_{jk}^{(\sigma)} = \frac{1}{2} p_j + p_k + \frac{m_j^2 - m_k^2}{z_{jk}} (p_k - p_j) \pm (p_k - p_j) \frac{R_{jk}^{1/2}}{z_{jk}} \quad (A.10)$$

Onde para a escolha do sinal estabelecemos a convenção + para $\sigma=1$ e - para $\sigma=0$.

Continuando o caminho proposto pelos autores, o passo seguinte é substituir os dois valores de $q_{jk}^{(\sigma)}$ nos demais fatores do integrando e fatorá-los da integral. Chamaremos este polinômio de $A_{jk}^{(\sigma)}$. A seguir toma-se a média dos $A_{jk}^{(\sigma)}$ multiplicando o que foi obtido pela função L_{jk} que corresponde a uma bolha simples como já dissemos.

A integral (A.1) fica então igual a:

$$\begin{aligned} F(z_{jk}, m_k^2, m_j^2) &= \frac{1}{2} \sum_{j < k} \left[A_{jk}^{(1)} + A_{jk}^{(2)} \right] L_{jk} \\ &= \frac{i\pi}{2} \sum_{j < k} \left[A_{jk}^{(1)} + A_{jk}^{(2)} \right] \frac{1}{R_{jk}^{1/2}} \ln \frac{z_{jk}^{-m_j^2 - m_k^2} - \sqrt{R_{jk}}}{z_{jk}^{-m_j^2 - m_k^2} + \sqrt{R_{jk}}} \end{aligned} \quad (A.11)$$

Resta citar ainda que na demonstração introduz-se as coordenadas de cone de luz $k_s = k_0 + k_x$, $k_t = k_0 - k_x$. Os produtos dos propagadores é decomposto em frações parciais de modo que as integrais se tornam triviais.

APÊNDICE B

Amplitudes $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$, $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$

Neste apêndice explicitaremos com algum detalhe os cálculos das amplitudes $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$, $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$ citadas no capítulo 2. Utilizaremos a regra de Källén-Toll desenvolvida no Apêndice A.

F_1 - Modelo de Gross-Neveu quiral

Os gráficos que contribuem são os 47 primeiros da tabela 3. Primeiramente olharemos para a amplitude $r_1(\theta)$. Um gráfico típico com dificuldades significativas é:

$$\begin{aligned}
 &= N \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(q) \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \frac{1}{p+q+k_1-\mu} u(p) \bar{v}(q) \right. \\
 &\quad \times \frac{1}{k_1-\mu} \frac{1}{k_2-\mu} v(p) - \\
 &- \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \frac{1}{p+q+k_1-\mu} u(p) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1-\mu} \frac{1}{k_2-\mu} \gamma_5 v(p) - \\
 &- \bar{u}(q) \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_1-\mu} u(p) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1-\mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2-\mu} v(p) - \\
 &- \bar{u}(q) \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \frac{1}{p+q+k_1-\mu} \gamma_5 u(p) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_1-\mu} \frac{1}{k_2-\mu} v(p) + \\
 &+ \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_1-\mu} u(p) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1-\mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2-\mu} \gamma_5 v(p) + \\
 &+ \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \frac{1}{p+q+k_1-\mu} \gamma_5 u(p) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_1-\mu} \frac{1}{k_2-\mu} \gamma_5 v(p) + \\
 &+ \bar{u}(q) \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_1-\mu} \gamma_5 u(p) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_1-\mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2-\mu} v(p) -
 \end{aligned}$$

$$= \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_2-\mu} \gamma_5 \frac{1}{p+q+k_1-\mu} \gamma_5 u(p) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_1-\mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2-\mu} \gamma_5 v(p) \} \quad (B.1)$$

$$= N^4 \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(q) \frac{1}{k_2+q-\mu} \frac{1}{k_1-p-\mu} u(p) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1-q-\mu} \frac{1}{k_2-p-\mu} v(p) - \right. \\ \left. - \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_2+q-\mu} \frac{1}{k_1+q-\mu} u(p) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1-q-\mu} \frac{1}{k_2-p-\mu} \gamma_5 v(p) \right\} \quad (B.2)$$

onde usamos $k_1 \rightarrow k_1 - q$ e $k_2 \rightarrow k_2 - p$.

$$= \frac{N^4}{(2\pi)^2 (2\pi)^2} \int d^2 k_1 d^2 k_2 \frac{1}{[(p+k_1)^2 - \mu^2] [(q+k_2)^2 - \mu^2] [(q-k_1)^2 - \mu^2] [(p-k_2)^2 - \mu^2]} \times \\ \times \{ \bar{u}(q) k_2 k_1 u(p) \bar{v}(q) k_1 k_2 v(p) - \bar{u}(q) \gamma_5 k_2 k_1 u(p) \bar{v}(q) k_1 k_2 \gamma_5 v(p) \} \quad (B.3)$$

Onde N é um fator de normalização

$$N = (4 \operatorname{sh} \theta e^{\theta p + \theta q})^{-1}$$

Para a solução da integral impomos:

$$\begin{cases} (k_1 - q)^2 = (k_1 + p)^2 = \mu^2 & (B.4a) \\ (k_2 + q)^2 = (k_2 - p)^2 = \mu^2 & (B.4b) \end{cases}$$

cujas soluções são:

$$k_1 = -\frac{1}{2} P_- + \beta_1 \tilde{P}_+ \quad (B.5a)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} P_- - \beta_2 \tilde{P}_+ \quad (B.5b)$$

$$\text{onde } P_{\pm} = p \pm q \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} - \beta_2^2 = \frac{\mu^2}{P_+^2} \quad (B.6)$$

A equação 3 fica:

$$= i \sum_{\beta_1 \beta_2} k_{1\mu}^{\beta_1} k_{1\lambda}^{\beta_2} k_{2\nu}^{\beta_1} k_{2\sigma}^{\beta_2} \{ \bar{u}(q) \gamma_\nu \gamma_\mu u(p) \bar{v}(q) \gamma_\lambda \gamma_\sigma v(p) - \bar{u}(q) \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu u(p) \bar{v}(q) \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\sigma v(p) \} \quad (B.7)$$

Por um cálculo direto obtêm-se a relação entre os espinores u e v no limite de alta energia ($\theta_p \rightarrow +\infty$; $\theta_q \rightarrow -\infty$).

$$\bar{u}(p) \gamma_\mu u(q) = 2e^{\theta_q} (p_\mu + q_\mu) \quad (B.8a)$$

$$\bar{u}(q) \gamma_\nu u(p) = 2e^{\theta_q} (p_\mu + q_\mu) \quad (B.8b)$$

$$\bar{v}(p) \gamma_\mu v(q) = -2e^{\theta_q} (p_\mu + q_\mu) \quad (B.8c)$$

$$\bar{u}(q) \gamma_\mu \gamma_\nu u(p) = \mu (e^{\theta_p} + e^{\theta_q}) g_{\mu\nu} + \frac{2}{\mu} e^{\theta_q} (1 - e^{\theta_q - \theta_p}) (q_\mu p_\nu - p_\mu q_\nu) \quad (B.8d)$$

$$\bar{v}(q) \gamma_\mu \gamma_\nu v(p) = -\mu (e^{\theta_p} + e^{\theta_q}) g_{\mu\nu} - \frac{2}{\mu} e^{\theta_q} (1 - e^{\theta_q - \theta_p}) (q_\mu p_\nu - p_\mu q_\nu) \quad (B.8e)$$

$$\bar{u}(q) \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu u(p) = \mu (e^{\theta_p} + e^{\theta_q}) \epsilon_{\nu\mu} + \frac{2}{\mu} e^{\theta_q} (1 - e^{\theta_q - \theta_p}) (p_\mu \bar{q}_\nu - \bar{p}_\nu q_\mu) \quad (B.8f)$$

$$\bar{v}(q) \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu v(p) = -\mu (e^{\theta_p} + e^{\theta_q}) \epsilon_{\nu\mu} - \frac{2}{\mu} e^{\theta_q} (1 - e^{\theta_q - \theta_p}) (p_\mu \bar{q}_\nu - \bar{p}_\nu q_\mu) \quad (B.8g)$$

As relações B8d-B8g, B4a e B4b substituídas em (B.7) nos fornece uma expressão que, ao ser feita a média nos β , como a regra prescreve, resulta numa amplitude nula.

No entanto outros gráficos mostram, de uma maneira mais clara, que a contribuição é nula por ex:

$$= N \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(q) u(p) \right.$$

$$\left. \text{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \right) \bar{v}(q) \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \frac{1}{k_2 - \mu} v(p) \right.$$

$$\left. - \bar{u}(q) \gamma_5 \bar{u}(p) \text{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \right) \bar{v}(q) \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \frac{1}{k_2 - \mu} v(p) - \right.$$

$$- \bar{u}(q)u(p) \operatorname{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \gamma_5 \right) \bar{v}(q) \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2 - \mu} v(p) -$$

$$- \bar{u}(q)u(p) \operatorname{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \right) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \frac{1}{k_2 - \mu} \gamma_5 v(p) +$$

$$- \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \operatorname{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \right) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \frac{1}{k_2 - \mu} \gamma_5 v(p) +$$

$$+ \bar{u}(q)u(p) \operatorname{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \gamma_5 \right) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2 - \mu} \gamma_5 v(p) -$$

$$- \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \operatorname{tr} \left(\frac{1}{k_1 - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_1 + p - q - \mu} \gamma_5 \right) \bar{v}(q) \gamma_5 \frac{1}{k_2 + p - q - \mu} \gamma_5 \frac{1}{k_2 - \mu} \gamma_5 v(p) \Big\}$$

(B.9)

Note que a 1ª parcela cancela com a 4ª, a 2ª com a 6ª, a 3ª com a 7ª e a 5ª com a 8ª.

A grande maioria dos gráficos que pertencem a amplitude $r_1(\theta)$ se comportam desta maneira. Verificamos desta forma que todos os gráficos até 3ª ordem são nulos. O cálculo da amplitude $r_2(\theta)$ não será detalhado por ser completamente análogo tendo como resultado a contribuição nula também.

Para a amplitude $u_1(\theta)$ os gráficos sobreviventes são:

dos quais calcularemos o gráfico (a).

$$= N(i g)^2 \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(p) \frac{i}{k_1 - \mu} u(p) \bar{u}(q) \frac{i}{-k_1 + p + q - \mu} u(q) \right. \\ \left. - \bar{u}(p) \gamma_5 \frac{i}{k_1 - \mu} u(p) \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{i}{-k_1 + p + q - \mu} u(q) - \bar{u}(p) \frac{i}{k_1 - \mu} \gamma_5 u(p) \bar{u}(q) \frac{i}{-k_1 + p + q - \mu} \gamma_5 u(q) \right.$$

$$\left. + \bar{u}(p) \gamma_5 \frac{i}{k_1 - \mu} \gamma_5 u(p) \bar{u}(q) \gamma_5 \frac{i}{-k_1 + p + q - \mu} \gamma_5 u(q) \right\} \quad (B.10)$$

$$= 2 (i g)^2 \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{i^2}{(k_1 - p)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k_1 + q)^2 - \mu^2} \left[-\bar{u}(p) k_1 u(p) \bar{u}(q) k_1 u(q) + \right. \\ \left. + \bar{u}(p) \gamma_5 k_1 u(p) \bar{u}(q) \gamma_5 k_1 u(q) \right] \quad (B.11)$$

$$= -2 g^2 N \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k_1 - p)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k_1 + q)^2 - \mu^2} \left\{ k_{1\mu} k_{1\nu} \left[\bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) \bar{u}(q) \gamma_\nu u(q) - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{u}(p) \gamma_5 \gamma_\mu u(p) \bar{u}(q) \gamma_5 \gamma_\nu u(q) \right] \right\} \quad (B.12)$$

As funções do tipo $\bar{u}(p) \gamma_\mu u(p)$ são conhecidas e k_1 é achado impondo-se

$$\begin{cases} (k_1 - p)^2 = \mu^2 \\ (k_1 + q)^2 = \mu^2 \end{cases} \quad (B.13a)$$

$$\begin{cases} (k_1 - p)^2 = \mu^2 \\ (k_1 + q)^2 = \mu^2 \end{cases} \quad (B.13b)$$

$$\therefore k_1 = \frac{-p - q}{2} + \beta_1 (\tilde{p} + \tilde{q}) \quad (B.13c)$$

A integral em k_1 agora fatorizada contribui com o resultado

$$\int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k_1 - p)^2 - \mu^2} \frac{1}{(k_1 + q)^2 - \mu^2} = \frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \frac{1}{2p \cdot q} \ln \frac{s}{\mu^2} \quad (B.14)$$

onde $S = (p+q)^2$.

A contribuição final do gráfico é:

$$\text{Gráfico (B.15)} = \frac{ig^2}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2} \quad (\text{B.15})$$

Os demais gráficos são calculados de maneira análoga e os resultados estão na tabela 4 no final deste apêndice.

Para a amplitude $u_2(\theta)$ os gráficos diferentes de zero são

Para esta amplitude vamos detalhar o gráfico (b)

$$\begin{aligned} & \text{Gráfico (b)} = N (ig)^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{u}(q) u(p) \bar{u}(p) u(q) \text{tr} \left(\frac{i}{k-\mu} \right. \right. \\ & \quad \times \left. \frac{i}{k+p-q-\mu} \right) - \\ & \quad - \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) u(q) \text{tr} \gamma_5 \frac{i}{k-\mu} \frac{i}{k+p-q-\mu} - \bar{u}(q) u(p) \bar{u}(p) \gamma_5 u(q) \text{tr} \frac{i}{k-\mu} \gamma_5 \frac{i}{k+p-q-\mu} \\ & \quad \left. + \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) \bar{u}(p) \gamma_5 u(q) \text{tr} \gamma_5 \frac{i}{k-\mu} \gamma_5 \frac{i}{k+p-q-\mu} \right\} \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

$$= -n 2e^{2\theta} p N \left\{ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\text{tr} \frac{k(p-q+k)}{(k^2-\mu^2) [(k+p-q)^2-\mu^2]} - \text{tr} \frac{k \gamma_5 (p-q+k)}{[k^2-\mu^2] [(k+p-q)^2-\mu^2]} \right) \right\}$$

(B.17)

O valor de $k = \frac{1}{2}(p-q) + \beta(\tilde{p}-\tilde{q})$ quando substituído no 2º termo dá contribuição nula. O 1º termo é calculado como nos outros gráficos já citados. Assim temos

$$\text{Diagrama} = - \frac{nig^2}{2\pi} \ln \frac{-S}{\mu^2} \quad (\text{B.18})$$

Os demais gráficos que contribuem para $u_2(\theta)$ se encontram também na tabela 4.

B2 - Modelo CP^{n-1}

O procedimento é completamente análogo onde agora todos os 55 gráficos da tabela 1 contribuem. Primeiramente vamos verificar que as amplitudes $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ são nulas. O mecanismo é bastante claro de modo que vamos calcular um gráfico de cada ordem:

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} &= N \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k-q-p)^2 - \mu^2} \left[-(q-k)^2 + (q+k)(k-q-2p) \right] \left[- \right. \\ &\quad \left. - (k-p)^2 + (k+p)(k-2q-p) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$= N(ig)^2 \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k-q-p)^2 - \mu^2} \left[-2pq + 2k(q-p) \right] \left[-2pq + 2k(p-q) \right] \quad (\text{B.20})$$

Onde N neste caso $= (4\pi g)^{-1}$.

Pode-se ver claramente que o polinômio no integrando da expressão (2) se anula para os dois valores possíveis de k ($k=p$ e $k=q$).

Analisando outro gráfico, agora em 3ª ordem vemos que:

$$k_2 - q - p = N(ig)^3 \int dk_1 dk_2 x$$

$$x = \frac{[-(k_1 - p)^2 + (k_1 + p)(k_1 - 2q - p)] [-(k_2 - k_1)^2 + (k_2 + k_1)(k_2 + k_1 - 2q - 2p)] [-(q - k_2)^2 + (q + k_2)(k_2 - q - 2p)]}{[(k^2 - \mu^2)] [(k_2 - q - p)^2 - \mu^2] [k_1^2 - \mu^2] [(k_1 - q - p)^2 - \mu^2]}$$

Onde também se vê claramente que o integrando é zero para os 2 valores de k_1 e os dois valores de k_2 correspondentes às duas contrações dos propagadores.

Analogamente verifica-se também que $r_2(\theta)$ é zero.

Para ilustrar o cálculo das amplitudes não nulas $u_1(\theta)$ e $u_2(\theta)$ escolhemos para $u_1(\theta)$

$$-k+p+q = N(ig)^2 \int d^2k \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{(k-p-q)^2 - \mu^2} [-(p-k)^2 + (p+k)(2q+p-k)] [-(k-p)^2 + (k+p)(2q+p-k)] = -\frac{ig^2}{\pi} \frac{1}{\mu^2} S$$

e para $u_2(\theta)$

$$-k_2+p+q = N(ig)^3 \int d^2k_1 d^2k_2 x$$

$$x = \frac{[-(q - k_2)^2 + (q + k_2)(-k_2 + 2p + q)] [-(k_2 - k_1)^2 + (k_2 + k_1)(-k_2 - k_1 + 2p + 2q)] [-(k_1 - p)^2 + (k_1 + p)(k_1 + p + 2q)]}{[k_1^2 - \mu^2] [k_2^2 - \mu^2] [(-k_2 + p + q)^2 - \mu^2] [(-k_1 + p + q)^2 - \mu^2]}$$

Para as duas contrações possíveis de k_1 e k_2 encontramos 4 termos iguais e diferentes de zero.

$$= N \frac{1}{4} (4p \cdot q)^3 \left(\frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p+q)^2} \ln \frac{s}{\mu^2} \right)^2$$

$$= 4 \frac{ig^3}{4\pi^2} \left(\ln \frac{s}{\mu^2} \right)^2 = 4.A$$

Os demais resultados estão na tabela que segue:

Modelo ampl.	Gráfico	Contribuição	Modelo ampl.	Gráfico	Contribuição
G.Nq u_1		$\frac{ig^2}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	G.Nq u_2		ig
		$\frac{ig^2}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$			$-\frac{nig^2}{2\pi} \ln \frac{-S}{\mu^2}$
		$-\frac{ig^3n}{(2\pi)^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2$			$-\frac{ig^3n^2}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2$
		$-\frac{ig^3n}{(2\pi)^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2$			$A = \frac{ig^3}{4\pi^2} \left(\ln \frac{S}{\mu^2}\right)^2$
$CP^{n-1} u_1, u_2$		ig	$CP^{n-1} u_1$		$-2A$
u_1, u_2		$\frac{ig^2}{\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	$u_1 u_2$		$-A$
u_1		$\frac{ig^2}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	$u_1 u_2$		$-A$
$u_1 u_2$		$4A$	$u_1 u_2$		$-nA$
u_2		$\frac{ig^2n}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	$u_1 u_2$		$-nA$
u_2		$\frac{g^2i}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	$u_1 u_2$		$-A$
u_2		$\frac{g^2i}{2\pi} \ln \frac{S}{\mu^2}$	$u_1 u_2$		$-A$
u_1		A	$u_1 u_2$		$-A$
u_1		$-2A$	$u_1 u_2$		$-A$

Modelo ampl.	Gráfico	Contribuição
CP^{n-1}		A
u_2		A
u_2		A
u_2		nA
u_2		nA
u_2		nA
u_2		$n^2 A$
u_2		$-2nA$
u_2		$-2nA$
u_2		$-2A$
u_2		$-2A$

Tabela 4 (cont.)

APÊNDICE C

Renormalização do modelo CP^{n-1}

O procedimento é análogo ao proposto por Brëzin⁽¹²⁾ para o modelo σ não linear com a diferença de termos agora campos complexos e gauge fixo. Seguindo este esquema a renormalizabilidade pode ser provada usando as identidades de Ward conectadas com as simetrias de gauge e do modelo $SU(n)$.

Como estamos no esquema perturbativo tomamos

$$Z = (z_i, z_n) \text{ onde } \begin{cases} z_i & \text{são os campos de 1 a } n-1 \\ z_n & \text{é o } n^{\text{ésimo}}. \end{cases}$$

Como $\bar{Z}Z = 1$ o vínculo toma agora a forma

$$z_i^2 z_i + |z_n|^2 = 1$$

Podemos escrever $z_n = \sigma_1 + i \sigma_2$ tal que $\bar{z}_i z_i + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$.

O funcional gerador das funções de Green é dado por

$$Z(J, H) = \int \mathcal{D}z \mathcal{D}\bar{z} \mathcal{D}\sigma_1 f(z, \bar{z}, \sigma_1, \sigma_2) \exp \left\{ -\frac{S}{t} + \int d^2x (J_i \bar{z}_i + \bar{J}_i z_i + H_2 \sigma_2 + H_1 \sigma_1) \right\} \quad (C.1)$$

onde f fixa a gauge. Vamos usar:

$$f(z_i, \bar{z}_i, \sigma_1, \sigma_2) = \delta(\sigma_2) \quad (C.2)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{1 - \bar{z}z - \sigma_2^2}$$

A ação é escrita na forma:

$$S = \int d^2x \left\{ \partial_\mu \bar{z}_i \partial_\mu z_i + \frac{1}{4} (\bar{z}_i \vec{\partial}_\mu z_i + 2i\sigma_1 \partial_\mu \sigma_2 - 2i\sigma_2 \partial_\mu \sigma_1)^2 + \right. \\ \left. + (\partial_\mu \sigma_2)^2 + \frac{[\partial_\mu (\bar{z}z + \sigma_2^2)]^2}{4(1 - \bar{z}z - \sigma_2^2)} \right\} \quad (C.4)$$

onde $J_i(\bar{J}_i)$ é a fonte dos $\bar{z}_i(z_i)$ e $H_1(2)$ é a fonte de $\sigma_1(2)$.

Considerando agora a simetria do problema temos a do grupo $SU(n)$ e a de gauge ($Z \rightarrow e^{i\Lambda}Z$)

$$z_i \rightarrow e^{i\Lambda} z_i \rightarrow z_i + i\Lambda z_i \quad (C.5a)$$

$$\sigma_1 + i\sigma_2 \rightarrow e^{i\Lambda}(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (C.5b)$$

Assim

$$\delta z_i = w_i(\sigma_1 + i\sigma_2) + i\Lambda z_i \quad (C.6a)$$

$$\delta(\sigma_1 + i\sigma_2) = -w_i z_i + i\Lambda(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (C.6b)$$

implicando nas seguintes leis de transformação:

$$\delta\sigma_1 = -\frac{w_i z_i - \bar{w}_i \bar{z}_i}{2} - \Lambda\sigma_2 \quad (C.7a)$$

$$\delta\sigma_2 = -\frac{w_i z_i + \bar{w}_i \bar{z}_i}{2i} + \Lambda\sigma_1 \quad (C.7b)$$

$$\delta(\bar{J}_i z_i + J_i \bar{z}_i) = i\Lambda(\bar{J}_i z_i - J_i \bar{z}_i) + w_i(\sigma_1 + i\sigma_2)\bar{J}_i + \bar{w}_i(\sigma_1 - i\sigma_2)J_i \quad (C.7c)$$

Definimos agora $W(J_i, H_k) = t \ln Z(J_i, H_k)$ de modo a obter sua transformada de Legendre como a ação efetiva:

$$\Gamma(z_i, \bar{z}_i, \sigma_2, H_1) = \int d^2x (J_i \bar{z}_i + \bar{J}_i z_i + H_2 \sigma_2) - W(J_i, H_k) \quad (C.8)$$

onde

$$\bar{z}_i = \frac{\delta w}{\delta J_i} \quad (C.8a)$$

$$z_i = \frac{\delta w}{\delta \bar{J}_i} \quad (C.8b)$$

$$\sigma_2 = \frac{\delta w}{\delta H_2} \quad (C.8c)$$

Como as simetrias de gauge e transformações em $SU(n)$ são independentes, podemos escrever separadamente

$$\delta z_i = \bar{w}_i (\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (C.9a)$$

$$\delta\sigma_1 = -\frac{1}{2} (w_i z_i + \bar{w}_i \bar{z}_i) \quad (C.9b)$$

$$\delta\sigma_2 = -\frac{1}{2i} (w_i z_i - \bar{w}_i \bar{z}_i) \quad (C.9c)$$

Podemos agora usar as invariâncias acima em (C.1) para obter as identidades de Ward:

$$\delta z = 0 \Rightarrow \int d^2x (J_i \delta \bar{z}_i + \bar{J}_i \delta z_i + H_2 \delta\sigma_2 + H_1 \delta\sigma_1) = 0 \quad (C.10)$$

isto é, em termos do funcional Γ :

$$\int d^2x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{z}_i} w_i \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta H_1} - i\sigma_2 \right) + \frac{\delta \Gamma}{\delta z_i} \bar{w}_i \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta H_1} + i\sigma_2 \right) - \frac{H_2}{2i} (w_i z_i - \bar{w}_i \bar{z}_i) - \frac{H_1}{2} (w_i z_i + \bar{w}_i \bar{z}_i) \right] = 0 \quad (C.11)$$

que no gauge $\sigma_2 = 0$, e ainda escolhendo-se a transformação de modo a permanecer neste gauge, isto é $w_i z_i - \bar{w}_i \bar{z}_i = 0$ temos:

$$- \frac{\delta \Gamma}{\delta H_1} (\bar{w}_i \frac{\delta \Gamma}{\delta z_i} + w_i \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{z}_i}) + \frac{H_1}{2} (w_i z_i + \bar{w}_i \bar{z}_i) = 0 \quad (C.12)$$

$$\Gamma = \sum \Gamma^{(n)} t^n \quad (C.13)$$

A ação, satisfaz esta equação. Portanto em zero loops (zero potências de t) encontra-se de fato a ação:

$$\Gamma^{(0)} = S. \quad (C.14)$$

A solução para $\Gamma^{(1)}$ acha-se iterativamente.

$$\int d^2x \left\{ - \frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta H_1} \left[\bar{w}_i \frac{\delta \Gamma^{(1)}}{\delta z_i} + w_i \frac{\delta \Gamma^{(1)}}{\delta \bar{z}_i} \right] - \left[\bar{w}_i \frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta z_i} + w_i \frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta \bar{z}_i} \right] \frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta H_1} \right\} = 0$$

$\Gamma^{(1)}$ deve ser uma função local de dimensão 2 dos campos z_i , portanto deve ter a forma:

$$\Gamma^{(1)} = \int d^2x [A\{z\} + H(x)C(z)] \quad (C.15)$$

onde A contém até 2 derivadas e C nenhuma.

$$\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{z_i} = \frac{\bar{z}_i}{\sqrt{1-\bar{z}z}} \quad (C.16a)$$

$$\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta \bar{z}_i} = \frac{z_i}{\sqrt{1-\bar{z}z}} \quad (C.16b)$$

$$\frac{\delta \Gamma^{(0)}}{\delta H_1} = \sqrt{1-\bar{z}z} \quad (C.16c)$$

temos para $C(z_i)$ a equação

$$\frac{\bar{z}_i}{1-\bar{z}z} C = \frac{\delta C}{\delta z_i} \quad (C.17a)$$

$$\frac{z_i}{1-\bar{z}z} C = \frac{\delta C}{\delta \bar{z}_i} \quad (C.17b)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\mu}{\sqrt{1-\bar{z}z}} \quad (C.17c)$$

Analogamente temos

$$A = \mu \frac{\partial_{\mu} (\bar{z}z + \sigma_2^2)}{(1 - \bar{z}z - \sigma_2^2)^2} \quad (C.18)$$

e temos para $\Gamma^{(1)}$, em geral:

$$\Gamma^{(1)} = \lambda S^{(0)} + \mu \int d^2x \left\{ \frac{\partial_{\mu} (\bar{z}z + \sigma_2^2)}{(1 - \bar{z}z - \sigma_2^2)^2} + \frac{H_1}{(1 - \bar{z}z - \sigma_2^2)^{1/2}} \right\} \quad (C.19)$$

Isto significa que a ação renormalizada fica sendo

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{f}{f_1} \left[\partial_{\mu} \bar{z} \partial_{\mu} z + \frac{f}{4} (\bar{z} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} z)^2 + \frac{[\partial_{\mu} (\bar{z}z + \sigma_2^2)]^2}{4(\frac{1}{f} - \bar{z}z - \sigma_2^2)} \right] - H_1 (\frac{1}{f} - \bar{z}z - \sigma_2^2)^{1/2} \right\} \quad (C.20)$$

Portanto a renormalização do modelo CP^{n-1} em perturbação consiste em uma redefinição dos parâmetros da lagrangeana livre e em uma renormalização multiplicativa.

APÊNDICE D

Supersimetria

(73)

Supersimetria é uma extensão da Álgebra de Lie do grupo de Poincaré, que inclui uma simetria Boson-Fermion. Da álgebra de supersimetria fazem parte rotações e translações do espaço tempo $M^{\mu\nu}$ e P^μ , e um gerador Q_α de spin 1/2, que troca bosons e fermions, satisfazendo:

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \quad (D.1)$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = 0 \quad (D.2)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu \quad (D.3)$$

O conceito de supersimetria tem sido usado com sucesso em teoria de gravitação (supergravidade) tanto no aspecto cinemático, quando no dinâmico por diminuir as divergências. ⁽⁷⁴⁾

Podemos introduzir supersimetria através do conceito de super campo. Vamos apresentar diretamente em 2 dimensões.

θ_λ , $\lambda=1,2$ é uma variável de Grassman e o super campo depende de θ_λ além de x_μ .

Do fato de θ_λ ser uma variável de Grassman, o supercampo $\phi_\alpha(x_\mu, \theta_\lambda)$ pode ser expandido em uma série de potências em θ_λ , sobrevivendo um número finito de termos (mais explicitamente 3 termos).

$$\phi_\alpha(x, \theta) = z_\alpha(x) + i\theta \chi_\alpha(x) + \frac{i}{2} \theta \gamma_5 \theta F_\alpha(x) \quad (D.4)$$

Definimos a superderivada

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} + i \not{\partial} \theta \quad (D.5)$$

Se o campo ϕ_α for real, podemos definir por exemplo o modelo não linear $O(n)$ supersimétrico através do vínculo $\phi_\alpha \phi_\alpha = 1$ (75) que implica

$$z_\alpha z_\alpha = 1 \quad (D.6a)$$

$$z_\alpha \chi_\alpha = 0 \quad (D.6b)$$

$$L = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta \gamma_5 d\theta \mathcal{D}\phi \gamma_5 \mathcal{D}\phi = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu z_\alpha)^2 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{8} (\bar{\psi} \psi)^2 \right] \quad (D.7)$$

No modelo CP^{n-1} exigimos, além de campos complexos e do vínculo $\bar{\phi}_\alpha \phi_\alpha = 1$, que haja uma simetria de gauge

$$\phi'(x, \theta) = \phi(x, \theta) e^{i\Lambda(x, \theta)} \quad (D.8)$$

Construimos então a derivada supercovariante

$$\nabla = D - A \quad (D.9)$$

sendo A um super campo real, transformando-se como

$$A' = A + i \mathcal{D}\Lambda \quad (D.10)$$

A ação supersimétrica é definida como

$$S = \frac{n}{8f} \int d^2x d\theta \gamma_5 d\theta \bar{\nabla}\phi \gamma_5 \nabla\phi \quad (D.11)$$

A equação de campo para A fornece:

$$A = \bar{\phi} - D\phi \quad (D.12)$$

que colocando na ação fornece

$$S = \frac{n}{8f} \int d^2x d\theta \gamma_5 d\theta \{ \bar{D}\phi \gamma_5 D\phi - \bar{\phi} D\phi \gamma_5 \bar{\phi} D\phi \} \quad (D.13)$$

Em termos das componentes, a ação fica:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \frac{n}{2f} \int d^2x \{ & |\partial_\mu z|^2 - i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\bar{z}\partial_\mu z - \\ & - (\bar{g} + \rho\gamma_5\bar{\psi})(g - \rho\gamma_5\psi) + (\bar{z}\partial_\mu z)(\bar{z}\partial_\mu z) + \\ & + \frac{1}{4}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2] \} \end{aligned} \quad (D.14)$$

onde certos campos novos foram introduzidos

$$\psi_\alpha = \chi_\alpha - z_\alpha(\bar{z}.\chi) \quad (D.15a)$$

$$g_\alpha = F_\alpha - z_\alpha(\bar{z}.F) \quad (D.15b)$$

$$\rho = \frac{1}{2} i (z.\bar{\chi} - \bar{z}.\chi) \quad (D.15c)$$

impondo ainda os vínculos

$$\bar{z}.z = 1 \quad (D.16a)$$

$$\bar{z}.\chi + z.\bar{\chi} = 0 \quad (D.16b)$$

$$\bar{z}.F = \bar{F}.z = i\bar{\chi}\gamma_5\chi \quad (D.16c)$$

Desta forma obtem-se, eliminando o campo g_α :

$$S = \frac{n}{2f} \int d^2x \{ \overline{D_\mu z} . D_\mu z - i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{4} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2] \} \quad (D.17)$$

$$\text{onde } D_\mu = \partial_\mu - \bar{z}\partial_\mu z \quad (D.18)$$

e os vínculos se escrevem:

$$\bar{z}.z = 1 \quad (D.19a)$$

$$\bar{z}.\psi = \bar{\psi}.z = 0 \quad (D.19b)$$

REFERÊNCIAS

1. W.Thirring, Annals of Physics 3 (1958) 91.
2. B.Klaiber, Boulder lectures 1967, Lectures in Theoretical Physics; New York, Gordon and Breach 1968.
3. J.Schwinger, Phys.Rev. 128 (1962) 2425.
4. J.Lowenstein and A.Swieca, Annals of Physics 68 (1971) 172.
5. D.J.Gross and A.Neveu, Phys. Rev. D 10 (1974) 3235.
6. S.Coleman, Phys.Rev. D 11 (1975) 2088.
7. M.Karowski, H.J.Thun, Nuclear Physic B 130 (1977) 295.
8. A.M.Polyakov, Phys.Lett. 72 B (1977) 224.
9. A.D'Adda, M.Lüscher, P.Di Vecchia, Phys.Report 49 (1979) 239.
10. A.I.B.Zamolodchikov and A.B.Zamolodchikov Nuclear Phys. B 133(1978) 525.
11. A.Belavin, A.Polyakov JETP Letters 22 (1975) 245.
12. E.Brezin, J.C.Le Guillow and J.Zinn-Justin Phys.Rev.D 14 (1975) 2615.
13. K.Pohlmeyer, Comm. Math. Phys. 46 (1976) 207.
14. M.Lüscher and K.Pohlmeyer, Nuclear Phys. B 137 (1978) 46.
15. M.Lüscher, Nuclear Physic B 135 (1978) 1.
16. H.Eichenherr, Tese de doutoramento, SU(n) invariante nichtlineare σ -modelle . Heidelberg Univ./78.
H.Eichenherr, Nuclear Phys B 146 (1978) 215.
17. A.D'Adda, M.Lüscher, P.Di Vecchia, Nucl.Phys. B 146 (1978) 63.
18. A.D'Adda, P.Di Vecchia, M.Lüscher, Nuclear Phys. B 152 (1979) 125.
19. R.Köberle, V.Kurak IFUSP-Preprint /202.
20. R.Köberle, V.Kurak IFUSP-Preprint /200.
21. E.Abdalla and M.C.B.Abdalla, Phys.Lett. 94B (1980) 69.
22. E.Abdalla and M.C.B.Abdalla, Il Nuovo Cimento 57A (1978) 334.
23. E.Abdalla, M.C.B.Abdalla and M.Gomes, Phys.Rev. D 23 (1981) 1800.
24. E.Abdalla, M.C.B.Abdalla and M.Gomes Preprint IFUSP/253 a ser publicado em Phys.Rev. D.
25. Bjorken and Drell Relativistic Quantum Field Theory (Addison Wesley New York 1964).
26. C.N.Yang, R.L.Mills, Phys.Rev. 96 (1954) 191.
27. P.Becher, M.Bohm, H.Joos, Eichtheorien der Schwachen, Elektromagnetischen und Starcken Wechselwirkung.
28. W.Marciano, H.Pagels; "Quantum Chromodynamic - A Review", Phys Reports 36C (1978) 137.
29. S.Coleman and D.Gross, Phys.Rev. Lett. 31 (1973) 851.
30. D.B.Lichtenberg, Quantum Chromodynamics Univ.de Oxford, 1979-80.
31. E.Reya, Perturbative Quantum Chromodynamics DESY 79/88, DO-TH 79/20 December 1979.

32. S.Coleman, Classical lumps and their quantum descendents.
Erice 1975.
33. M.Forger, Tese de doutoramento. Universidade Livre de Berlin 1980.
34. A.M.Polyakov - Phys.Lett. 59B (1975) 79.
35. S.Coleman - Uses of Instantons Erice 1977.
36. Cargese 1979.
37. L.Susskind, Hamburg-Konferenz 1977, veja página 895.
38. K.G.Wilson, Phys.Rev. D10 (1974) 2445.
39. R.Doria, J.Frenkel and J.C.Taylor, Nuclear Phys B168 (1980) 93.
40. A.Chodos, R.L.Jaffe, K.Johnson, C.B.Thorn, V.F.Weisskopf, Phys Rev.
D9 (1974) 3471.
W.A.Bardeen, M.S.Chanowitz, S.D.Drell, M.Weinstein, T.M.Yan, Phys.
Rev. D11 (1975) 1094.
41. H.B.Nielsen, P.Olesen, Nucl.Phys. B61 (1973) 45;
J.Kogut, L.Susskind, Phys.Rev. D9 (1973) 2273.
42. R.Abe, Prog.Theor.Phys. 48 (1972)1414; 49 (1973)113; 49(1973)1877;
R.Abe e S.Hikami, Prog.Theor.Phys. 49 (1973)442.
43. D.Iagolnitzer, Phys.Rev. D18 (1978)1275.
44. C.N.Yang, Phys.Rev. 168 (1968) 1920.
45. A.B.Zamolodchikov, Al.B.Zamolodchikov, Annals of Phys 120(1979)253.
46. M.Karowski - Kaiserslautern 1979.
47. L.Castillejo, R.H.Dalitz, F.J.Dyson, Phys.Rev. 101 (1956) 453.
48. B.Berg, M.Karowski, V.Kurak, P.Weisz Nucl.Phys. B134 (1978)125.
49. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLanaghan Proc. of IEEE 61 (1973)1443.
50. S.Mandelstam Phys.Rev. D11 (1975)3026.
51. P.Weisz, Nucl.Phys. B122 (1977) 1.
52. A.B.Zamolodchikov, Al.B.Zamolodchikov Phys.Lett. 72B (1978)481.
53. S.Coleman, Commun. Math.Phys. 31 (1973)259.
54. E.Abdalla, B.Berg, P.Weisz, Nucl.Phys. B157 (1979) 387.
55. M.Gell-Mann and M.Levy, Nuovo Cimento 16 (1960) 705.
B.W.Lee, Quiral Dynamics, New York, Gordon.
56. A.A.Migdal Sov.Phys. JETP 42 (1975)413; 743.
57. W.Bardeen, B.Lee and R.Shrock, Phys.Rev. D14 (1976) 985.
58. T.Banks and A.Zaks, Nucl.Phys. B128 (1977) 333.
59. E.Cremmer and J.Scherk Phys.Lett. 74B (1978) 341.
60. G.Källén, J.Toll Jornal Math. Phys. 6 (1965) 299.
61. R.Köberle, V.Kurak, J.A.Swieca, Phys.Rev. D20 (1979)897.
62. H.Eichenherr, M.Forger, Nuclear Phys. B155 (1979) 381, B164(1980)223
63. J.Lowenstein. Lectures on renormalization theory Mariland U. report
1972.
64. W.Zimmermann - Lectures on Elementary Particles and Quantum Field
Theory - Brandeis U. 1970.

65. K.Wilson, Phys. Rev. 179 (1969) 1499.
66. I.Ya. Arefeva - Theoretical Math. Phys. 36 (1979) 573.
67. Y.Y.Goldsmidt, E.Witten, Phys.Lett. 91B (1980) 392.
68. Adler - Elementary Particles and quantum field theory - Brandeis 1970.
69. S.Coleman, Secret symmetry - Erice 1973.
70. E.Brèzin, C.Itzykson, J.Zinn-Justin, J.B.Zuber, Phys.Lett. 82B (1979) 442.
71. T.Curtright, C.Zachos, Phys.Rev.D 21 (1980) 411.
72. A.M.Polyakov, Nuclear Phys. B164 (1980) 171.
73. P.Fayet, S.Ferrara, Phys.Rep. 32 (1977) 249.
74. P. van Nienwenhuizen, Phys.Rep. 68 (1981) 189.
75. E.Witten, Phys.Rev. D16 (1977) 2991.