UNIVERSIDADE DE SâO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Decoerência e Dissipação de Sistemas Quânticos: Técnicas e Aplicações

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
3430
INSTITUTO DE FÍSICA

Sonia Geraij Mokarzel

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

M. C. Nemes

ORIENTADORA: *Profª Dra. Maria Carolina Nemes*

Comissão Examinadora

Profª Dra. Maria Carolina Nemes - UFMG
Prof. Dr Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza - USP
Prof. Dr Carlos Ourivio Escobar - UNICAMP
Prof. Dr Nicin Zagury - UFRJ
Prof. Dr Salomon Sylvain Mizrahi - UFSCAR

Prof. Antonio Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SÃO PAULO
2000

SBI-IFUSP
305M810T3430

530.13
M716d
D
Ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mokarzel, Sonia Geraij

Decoerência e Dissipação em Sistemas Quânticos Acoplados; Técnicas e Aplicações. São Paulo, 2000.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Departamento de Física Matemática

Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes
Área de Concentração: Física Quântica

Unitermos: 1. Decoerência e Dissipação;
2. Álgebra de Lie;
3. Mecânica Estatística de não Equilíbrio;
4. Desacoplamento de Superoperadores.

USP/IF/SBI-069/2000

Agradecimentos

Preciso começar agradecendo a minha orientadora Maria Carolina Nemes, não por obrigação, mais sim por ela ter me proporcionado enorme alegria e prazer ao permitir a realização deste trabalho e por saber valorizar de maneira incomparável todo potencial de seus alunos. Aprendi muito com isto.

Obrigada "Carol"!

À minha família pelas inúmeras orações e principalmente aos meus pais pela vida que me deram.

Obrigada "tia Maria, Madame, Bela, Cecília, Neguinha, Leta, Zinha, Tonhão, Guco, Alessandra, Solange"!

Ao prof. A.F.R. de Toledo Piza, que me iluminou com suas idéias, me presenteou com seus ensinamentos e principalmente por presenciar em sua pessoa um modêlo vivo e real de integridada humana. Obrigada!

Ao Ji il Kim pela dedicação e interesse no acompanhamento e esclarecimentos durante todo o trabalho, e pelo ser Humano Maravilhoso que é. Obrigada!

Ao Alessandro Marques pelas incontáveis horas que debruçou sobre meu computador e meus programas para que este trabalho pudesse sair. Obrigada!

À Catharina M. Guimarães Penha, que com seu exemplo de vida me deu forças para prosseguir nos momentos mais difíceis. Obrigada!

À Maria Regina Guarnieri e suas irmãs "Já e Lú" que com paciência (e que paciência!), carinho e dedicação colocaram-se como ouvintes de minhas lamentações e sofrimentos quando as "continhas" não davam certo. Obrigada!

À Maria Helena Correia Alves por ter acreditado a todo momento e principalmente por ter mantida acesa a chama de minha vontade de aprender. Obrigada!

À você que injustamente deixei de citar peço perdão e agradeço no fundo de minha alma por tudo que me proporcionou e principalmente pela lição de humildade que está me dando agora.

Resumo

Desenvolvemos no presente trabalho um tratamento perturbativo para a matriz densidade reduzida de forma similar a regra áurea de Fermi para espalhamento. Aplicamos a teoria a vários exemplos e em particular reproduzimos os resultados experimentais obtidos no laboratório Kastler Brossel e obtivemos uma relação entre os tempos característicos de dissipação e decoerência.

Por outro lado, desenvolvemos um modelo simples para duas moléculas interagindo com um reservatório. Mostramos resultados surpreendentes quando temos mais que dois substemas interagindo: no caso particular em que as moléculas estão num estado inicial coerente, bombardeadas por fontes de mesma intensidade, o estado assintótico apresenta uma concentração de energia no modo de menor freqüência. Este resultado dá suporte a um modelo fenomenológico de sistemas biológicos onde a condensação de Bose- Einstein é produzida e o estado final também exibe uma concentração de energia no modo de freqüência mais baixa.

Abstract

In the present work we developed a perturbative treatment of reduced density matrices which is similar in spirit to Fermi's Golden Rule for scattering. We applied the theory to several examples and in particular reproduced the results obtained in the laboratory Kastler Brossel experiment quantifying the relation between decoherence and dissipation characteristic times.

On the other hand we developed a simple model for two molecules interacting through a reservoir. We show that rather surprising results may arise when we have more than two subsystems in interaction: in the particular case where both molecules are initially in coherent states, if they are pumped with the same strength, the asymptotic state shows a concentraction of energy on the mode with smallest frequency. This result gives support to a phenomenological model for biological systems where a Bose- Einstein condensation is predicted and the final state also exhibits a concentration of energy in the lowest frequency mode.

Sumário

Introdução 7

1 Considerações Gerais 9
- 1.1 Formulação da Dinâmica Quântica . . . 9
- 1.2 Operador Densidade . . . 14
  - 1.2.1 Estado Puro e Mistura Estatística . . . 16
  - 1.2.2 Evolução Temporal . . . 17
  - 1.2.3 Operador Densidade Reduzido . . . 18
- 1.3 Dinâmica reduzida . . . 19
- 1.4 Decoerência, correlação e dissipação . . . 23

2 "Regra Aurea"para Decoerência e Dissipação 25
- 2.1 Expansão Perturbativa da Densidade Reduzida . . . 25
- 2.2 Acoplamento Linear a um banho de Osciladores . . . 26
- 2.3 Decoerência e Dissipação de uma Superposição Coerente . . . 30

3 Técnicas de Lie para Superoperadores 33
- 3.1 Álgebra de Lie para Superoperadores . . . 33
  - 3.1.1 Transformação de Similaridade e Fórmula de Hausdorff . . . 35
  - 3.1.2 Fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff e de Zassenhaus . . . 36
  - 3.1.3 Exemplo - O operador Deslocamento unitário de Glauber . . . 37
- 3.2 Desacoplamento e ordenamento de operadores . . . 37
  - 3.2.1 Técnica matricial . . . 37
    - 3.2.1.1 Exemplo . . . 37
  - 3.2.2 Técnica de Witschel e Técnica por derivação de parâmetros . 38
    - 3.2.2.1 Exemplo: O oscilador harmônico forçado dissipativo 40

4 Sistema aberto para dois osciladores 43
- 4.1 Dedução da equação mestra . . . 43
- 4.2 Operador densidade para dois osciladores . . . 54
- 4.3 Limite Assintótico - Aplicações . . . 58
- 4.4 Decoerência e Dissipação de uma Superposição Coerente . . . 62

A Evolução de um estado coerente **68**
A.1 Estados coerentes 68
A.2 Superoperadores agindo em um estado coerente 70
A.3 Evolução de $\rho_0 = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$ 73

B Aplicação da técnica 3.2.2 para dois osciladores **76**
B.1 Relação de comutação 76
B.2 Desacoplamento de dois osciladores 80
B.3 Cálculo dos coeficientes 97

Introdução

O século que viu nascer a Mecânica Quântica está terminando com um vertiginoso progresso tecnológico que tem permitido nas últimas décadas testes contundentes de aspectos da interpretação da teoria quântica que foram assuntos de longas discussões, debates e divergências ao longo do mesmo[22]. Um exemplo marcante é o da existência de superposições coerentes de estados macroscopicamente distinguíveis, previsto pela Mecânica Quântica e que implicaria necessariamente (uma vez reivindicado um caráter universal desta teoria) no aparecimento do mesmo fenômeno a nível macroscópico (paradoxo do "gato de Schrödinger "[13, 22, 39]). Uma das soluções propostas para este problema foi a modificação da própria equação de Schrödinger [31] ou sua substituição por equações estocásticas[11, 17] ou ainda hamiltonianos dependentes do tempo [4, 37, 38]. A outra vertente que propõe a solução atualmente mais aceita é a de considerar-se como sistema fechado o sistema de interesse mais o ambiente que o cerca (ou o aparelho de medida). Quantiza-se então o sistema composto de acordo com as regras de quantização usuais. Dentro deste contexto, a "não observacionalidade" de fenômenos de interferência a nível macroscópico é então atribuido ao acoplamento entre o sistema de interesse e o ambiente que o cerca. O mecanismo responsável pelo fenômeno é essencialmente quântico e conhecido como decoerência (perda de pureza) [13]. Recentemente, o grupo do laboratório francês Kastler - Brossel, em Paris, observou a evolução temporal de uma superposição de estados coerentes numa cavidade supercondutora e mostrou que no caso em que a separação entre os estados que compõe a função de onda inicial se torna macroscópica, o tempo de decoerência torna-se muito menor do que qualquer outro tempo característico do sistema [6].

Uma primeira contribuição deste trabalho é no sentido de caracterizar matematicamente o processo de decoerência e o processo concomitante de dissipação em geral. Para tanto, desenvolvemos uma teoria de perturbação para densidades reduzidas, bastante similar em espírito à regra áurea de Fermi para o espalhamento. Em particular, aplicamos o formalismo ao experimento de Paris caracterizando as escalas de tempo de decoerência e dissipação e comprovando quantitativamente o resultado experimental. Usamos nossos resultados ainda para investigar outros casos de interesse.

Uma outra vertente importante de investigação atual relativa às bases da Mecânica

Quântica foi propiciada pela observação em laboratório de condensados bosônicos de átomos frios. Desde sua descoberta um enorme esforço teórico tem sido dedicado à sua compreensão [1].

O fenômeno de condensação bosônica e correlações de muitos corpos não parece ser objeto de estudo exclusivo da Física. Já em 1968 H. Fröhlich [32] propõe um mecanismo de coerência de longo alcance em sistemas biológicos que resultaria num fenômeno desse tipo também: a idéia principal é que se moléculas com momento dipolar não nulo estão mergulhadas num reservatório comum, vão trocar energia através do reservatório e, se energia for bombeada a essas moléculas, haverá transferência da mesma aos outros graus de liberdade presentes no processo de tal forma que o estado estacionário que será atingido apresentará um excesso de energia canalizado para um único modo (exatamente como no fenômeno de condensação de Bose - Einstein). Esse modo é o modo de menor freqüência.

Obviamente a solução completa desse problema é extremamente complicada. No entanto, a construção de um modelo esquemático com duas moléculas interagindo com um reservatório é possível de ser mostrado e, embora esteja longe de poder exibir o fenômeno de condensação bosônica, permite estudar alguns mecanismos importantes para o mesmo de forma analítica. Com essa motivação construímos então um modelo de dois osciladores acoplados via reservatório. Do ponto de vista da Mecânica Quântica este é um problema interessante em si, por envolver mais do que dois subsistemas em interação. Pudemos observar que as propriedades de transferência de energia, por exemplo, podem revelar comportamentos inesperados e surpreendentes. Em particular mostramos que, sendo os osciladores inicialmente em estados coerentes, bombeados por fontes de mesma intensidade, (essa condição pode ser eventualmente relaxada) o estado assintótico será tal que o oscilador de menor freqüência concentrará a maior quantidade de energia.

A resolução completa e analítica deste problema foi possível graças a uma extenção de técnicas de algebra de Lie para superoperadores [14, 24, 29]. Esta técnica foi originalmente proposta e usada para o cálculo de correlações. Ela pode ser generalizada para sistemas linearmente acoplados e, como fizemos, para o cálculo de densidades reduzidas.

Assim como propriedades de transferência de energia em sistemas que envolvem mais do que dois graus de liberdade são surpreendentes, as propriedades de decoerência também constituem um estudo muito rico dinâmicamente. Resultados preliminares indicam que há também "transferência de coerência"entre os subsistemas em questão.

Capítulo 1

Considerações Gerais

Este capítulo é um compêndio das ferramentas necessárias para o desenvolvimento da tese. Serve também ao propósito de estabelecer a linguagem que será usada até o fim do nosso trabalho.

1.1 Formulação da Dinâmica Quântica

O estado de um sistema quântico é completamente especificado por um elemento de um espaço vetorial. Na representação de coordenadas, os vetores são dados pelas funções de onda de quadrado integrável cujo módulo ao quadrado mede a probabilidade de encontrar a partícula no ponto "x". Para obtermos a evolução de um sistema quântico "postula-se" a existência de um hamiltoniano, $\mathbf{H}$, e que a evolução de um estado $|\psi(t)\rangle$ seja de acordo com a equação de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}|\psi(t)\rangle \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{H}$ é um observável e portanto hermiteano. Supondo que $\mathbf{H}$ não dependa explicitamente do tempo, então, formalmente podemos escrever:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle \tag{1.2}$$

onde $|\psi(t_0)\rangle$ é o estado do sistema no instante t_0. Seja

$$\mathbf{U}(t,t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t-t_0)}. \tag{1.3}$$

Como $\mathbf{H}$ é hermiteano, então

$$\mathbf{U}^\dagger(t,t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t-t_0)} = \mathbf{U}^{-1}(t,t_0),$$

ou seja, $\mathbf{U}(t,t_0)$ é um operador unitário. Ele possui as seguintes propriedades notáveis:

1. Conserva a condição de normalização do vetor de onda no tempo, satisfaz a equação

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t,t_0) = \mathbf{H}\,\mathbf{U}(t,t_0), \quad \text{com} \quad \mathbf{U}(t,t) = \hat{1}. \tag{1.4}$$

2. Satisfaz a propriedade de grupo

   $\mathbf{U}(t,t_1)\mathbf{U}(t_1,t_0) = \mathbf{U}(t,t_0)$, propriedade que resulta da evolução matemática determinista da equação de Schrödinger.

No caso de $\mathbf{H}$ depender explicitamente do tempo, um operador de evolução pode ser definido generalizando a equação 1.4

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t,t_0) = \mathbf{H}(t)\mathbf{U}(t,t_0) \text{ com } \mathbf{U}(t_0,t_0) = \hat{1} \text{ e } \mathbf{H}(t) \text{ hermiteano.}$$

Neste caso, no entanto, o Hamiltoniano $\mathbf{H}(t)$, em geral, não comuta consigo mesmo em tempos diferentes, ou seja,

$$[\mathbf{H}_1(t_1), \mathbf{H}_2(t_2)] \neq 0 \quad \text{se} \quad t_1 \neq t_2.$$

Supondo que $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sejam independente do tempo nos intervalos $t_0 < t_1 < t_0 + \Delta t$ e $t_0 + \Delta t < t_2 < t_0 + 2\Delta t$ respectivamente, então

$$\mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t, t_0) = \mathbf{U}_2(t_0 + 2\Delta t, t_0 + \Delta t)\mathbf{U}_1(t_0 + \Delta t, t_0)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_2\Delta t}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_1\Delta t} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2)\Delta t}$$

pois, $[\mathbf{H}_1(t_1), \mathbf{H}_2(t_2)] \neq 0$, mostrando que $\mathbf{U}(t,t_0) \neq e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}(t')dt'}$ que seria de fato a solução correta se $\mathbf{H}(t)$ fosse uma função numérica.

A solução que leva em conta a não comutatividade do Hamiltoniano em tempos diferentes poderá ser pensada em termos de uma sucessão de transformações unitárias infinitesimais que avançam no tempo em intervalos dt durante os quais a variação de $\mathbf{H}(t)$ é desprezível

$$\mathbf{U}(t + dt) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t)dt + \mathcal{O}(dt^2).$$

Cuja representação integral é dada por [26]

$$\mathbf{U}(t,t_0) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}(t')\mathbf{U}(t',t_0)dt'.$$

Seja $\mathbf{H}$ dependente ou independente do tempo, $\mathbf{U}(t,t_0)$ deve ser unitário e satisfazer a propriedade de grupo. No que segue consideraremos o caso de hamiltonianas independentes do tempo, por simplicidade.

A evolução unitária pode ser imaginada como uma "rotação"contínua do vetor de estado no espaço de Hilbert, $\mathcal{E}$, que goza das seguintes propriedades:

1. O produto escalar de dois vetores no espaço de Hilbert, $\mathcal{E}$, permanece constante se ambos forem submetidos à mesma evolução unitária

$$\langle \mathbf{U}\psi|\mathbf{U}\phi\rangle = \langle\psi|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle.$$

2. Uma evolução unitária leva estados ortogonais, ϕ_{n_i} ϕ_{n_j} onde n_i n_j são indices discretos arbitrários, à estados ortogonais

$$\langle \mathbf{U}\phi_{n_i}|\mathbf{U}\phi_{n_j}\rangle = \langle\phi_{n_i}|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\phi_{n_j}\rangle = \langle\phi_{n_i}|\phi_{n_j}\rangle = \delta_{n_i n_j} \text{ se } \{|n_i\rangle\} \text{ for ortogonal.}$$

3. Transforma um vetor de estado $|\psi\rangle$ em $|\psi'\rangle$, segundo a regra $|\psi'\rangle = \mathbf{U}|\psi\rangle$. Com isto, a evolução de um estado $|\psi(t)\rangle$ (1.1), pode ser descrita por uma tranformação unitária

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \text{ com a condição inicial, para } t = t_0,\ \mathbf{U}(t_0,t_0) = \hat{1}$$

Deste modo, a probabilidade de encontrar o estado$|\psi(t_0)\rangle$ no vetor de estado $|\phi_n\rangle$ é:

$$p_n(t_0) = \left|\langle\phi_n|\psi(t_0)\rangle\right|^2$$

evolui dinamicamente no tempo t como:

$$p_n(t) = \left|\langle\phi_n|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi_n|\mathbf{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle\right|^2.$$

4. Transforma um operador hermiteano, $\mathbb{O}$, escrito na base $\{|n\rangle\}$, $\mathbb{O} = \sum O_{nm}|n\rangle\langle m|$, em um operador $\mathbb{O}'$ na base $\{|n\rangle'\}$, onde $|n\rangle' = \mathbf{U}|n\rangle$, segundo a regra

$$\mathbb{O}' = \sum O_{nm}|n\rangle'\langle m|' = \sum O_{nm}\mathbf{U}|n\rangle\langle m|\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\left(\sum O_{nm}|n\rangle\langle m|\right)\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbb{O}\mathbf{U}^\dagger.$$

No caso geral, a evolução no tempo do valor médio de qualquer grandeza devido à evolução do vetor de estado, pode ser representada por:

$$\langle\mathbb{O}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\mathbb{O}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\mathbf{U}^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}\mathbf{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{1.5}$$

$$= \langle\psi(t_0)|\mathbb{O}_H(t)|\psi(t_0)\rangle, \text{ onde}$$

$\mathbb{O}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}\mathbf{U}(t,t_0)$ é chamada *representação de Heisenberg* do operador.

Nesta representação o operador evolui com o tempo e o vetor de estado não varia no tempo. Na representação Schrödinger , a evolução temporal é atribuida ao vetor de estado mantendo-se os operadores fixos no tempo.
A equivalência das duas representações é estabelecida pela equação 1.5, ou seja,

$$\mathbb{O}_H(t) = \mathbf{U}^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}_S(t_0)\mathbf{U}(t,t_0), \quad \text{ou ainda,}$$

$$|\psi_H(t_0)\rangle = \mathbf{U}^\dagger|\psi_S(t)\rangle = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle. \tag{1.6}$$

A evolução temporal dos operadores na representação de Heisenberg, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{O}_H(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}^\dagger\right)\mathbb{O}_S\mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{O}_S\right)\mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger\mathbb{O}_S\left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}\right) \\
&= +\frac{i}{\hbar}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}_S\mathbb{O}_S\mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{O}_S\right)\mathbf{U} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{U}^\dagger\mathbb{O}_S\mathbf{H}_S\mathbf{U} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left\{-\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}_S\mathbf{U}\right)\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbb{O}_S\mathbf{U}\right) + \mathbf{U}^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{O}_S\right)\mathbf{U} + \left(\mathbf{U}^\dagger\mathbb{O}_S\mathbf{U}\right)\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}_S\mathbf{U}\right)\right\} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left\{[\mathbb{O}_H(t), \mathbf{H}_H] + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{O}_S\right)_H\right\}
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathbb{O}_H(t) = [\mathbb{O}_H(t), \mathbf{H}_H] + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{O}_S\right)_H$$

onde $\mathbf{H}_H = \mathbf{H}_S = \mathbf{H}$.
Se o operador $\mathbb{O}$ não depender explicitamente do tempo, então

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathbb{O}_H(t) = [\mathbb{O}_H(t), \mathbf{H}_H]. \tag{1.7}$$

As descrições de Heisenberg e de Schrödinger não esgotam as alternativas de formulação para a dinâmica quântica. É comum estudar sistemas cujo hamiltoniano, independente do tempo, pode ser decomposto em uma parte não interagente, $\mathbf{H}_0$, e uma parte que descreve a interação do sistema com outro, $\mathbf{H}_{int}$. Neste caso, em que $\mathbf{H}_{total} = \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}$, é conveniente usar a *representação de interação* introduzida por Dirac, que em certo sentido é intermediária entre a representação de Schrödinger (evolução do vetor de estado no tempo em relação apenas a $\mathbf{H}_{int}$) e de Heisenberg (evolução dos operadores no tempo em relação apenas a $\mathbf{H}_0$). Nesta representação, define-se, além do já definido operador unitário da equação 1.3, um operador de evolução também unitário, mas associado somente a $\mathbf{H}_0$

$$\mathbf{U}_0(t, t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t_0)}.$$

Deste modo, evolução dinâmica da probabilidade calculada no tempo, t poderá ser escrita por:

$$\begin{aligned}
p_n(t) &= \left|\langle\phi_n|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi_n|\mathbf{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle\right|^2 \\
&= \left|\langle\phi_n|\mathbf{U}_0(t, t_0)\mathbf{U}_0^\dagger(t, t_0)\mathbf{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle\right|^2 \\
&= \left|\langle\phi_n|\mathbf{U}_0(t, t_0)|\widetilde{\psi}(t)\rangle\right|^2,
\end{aligned}$$

que pode ser interpretada em termos do produto escalar do autovetor dependente do tempo $\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)|\phi_n\rangle$ com o vetor de estado dependente do tempo, definido na representação de interação, por

$$|\widetilde{\psi}(t)\rangle \equiv \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)|\psi_S(t)\rangle.$$

A evolução deste estado é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\widetilde{\psi}(t)\rangle &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\right)|\psi_S(t)\rangle + \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle\right) \\
&= +\frac{i}{\hbar}\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_0|\psi_S(t)\rangle - \frac{i}{\hbar}\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}|\psi_S(t)\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}|\psi_S(t)\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t,t_0)\right)\left(\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\right)|\psi_S(t)\rangle \\
&\downarrow \\
\frac{d}{dt}|\widetilde{\psi}(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)|\widetilde{\psi}(t)\rangle
\end{aligned} \tag{1.8}$$

onde

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t,t_0) = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t_0)}\mathbf{H}_{int}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_0(t-t_0)}}_{\mathbf{H}_0 \text{ independente do tempo}} \tag{1.9}$$

note que o vetor de estado na representação de interação, $|\widetilde{\psi}(t)\rangle$, evolui devido apenas a hamiltoniana de interação dos sistemas.

Por outro lado, a evolução no tempo de qualquer variável dinâmica $\mathbb{O}$, de acordo com a equação 1.5, nos leva a:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbb{O}\rangle(t) &= \langle\psi(t)|\mathbb{O}|\psi(t)\rangle = \langle\widetilde{\psi}(t)|\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}\mathbf{U}_0(t,t_0)|\widetilde{\psi}(t)\rangle \\
&= \langle\widetilde{\psi}(t)|\widetilde{\mathbb{O}}(t)|\widetilde{\psi}(t)\rangle
\end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{\mathbb{O}}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}\mathbf{U}_0(t,t_0) \tag{1.10}$$

define um operador na representação de interação.
A evolução temporal dos operadores na representação de interação é dado por:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\widetilde{\mathbb{O}}(t) &= i\hbar\frac{d}{dt}\left(\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbb{O}\mathbf{U}_0(t,t_0)\right) \\
&= -\mathbf{H}_0\widetilde{\mathbb{O}}(t) + i\hbar\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}\mathbb{O}\right)\mathbf{U}_0(t,t_0) + \widetilde{\mathbb{O}}(t)\mathbf{H}_0.
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{O}$ não depende explicitamente do tempo,então

$$i\hbar\frac{d}{dt}\widetilde{\mathbb{O}}(t) = \left[\widetilde{\mathbb{O}}(t), \mathbf{H}_0\right].$$

Se compararmos a equação anterior à equação 1.7 observamos que a evolução temporal dos operadores na representação de interação, $\widetilde{\mathbb{O}}(t)$, se dá devido apenas a hamiltoniana intrinseca do sistema.

1.2 Operador Densidade

Descrever um sistema físico através de um vetor de estado não é a forma mais geral. Um formalismo geral que permite descrever qualquer sistema físico é o formalismo da *matriz densidade*, que caracteriza o sistema físico por um conjunto de vetores de estado, $|\psi_j(t)\rangle$, e por um conjunto de pesos arbitrários, p_j, que especificam a contribuição relativa de cada um de seus estados.
Cada um dos estados possíveis, $|\psi_j(t)\rangle$,que é normalizado mas não necessáriamente ortogonal, poderá ser expandido numa base, ϕ_n onde $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}$ e $\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1$ (relação de completeza).

$$|\psi_j(t)\rangle = \sum_n C_n^{(j)}(t)|\phi_n\rangle \Longrightarrow C_n^{(j)}(t) = \langle\phi_n|\psi_j(t)\rangle.$$

Assim, podemos escrever a matriz densidade por:

$$\rho_{sr} = \sum_j p_j\langle\phi_s|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\phi_r\rangle = \sum_j C_s^{(j)}(t)C_r^{*(j)}(t).$$

Se $\mathbf{A}$ é um observável com elementos de matriz $A_{mn} = \langle\phi_m|\mathbf{A}|\phi_n\rangle$ então, o valor médio de $\mathbf{A}$ no instante t será:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{A}\rangle(t) &= \sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\mathbf{A}|\psi_j(t)\rangle \\
&= \sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\mathbf{A}|\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi_j(t)\rangle \\
&= \sum_n\sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\mathbf{A}|\phi_n\rangle\left(\langle\phi_n|\psi_j(t)\rangle\right) \\
&= \sum_n\left(\langle\phi_n|\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\right)\langle\psi_j(t)|\mathbf{A}|\phi_n\rangle \\
&= \sum_n\langle\phi_n|\left(\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\right)\mathbf{A}|\phi_n\rangle
\end{aligned}$$

ou seja

$$\langle \mathbf{A} \rangle (t) = Tr\rho(t)\mathbf{A} \tag{1.11}$$

onde

$$\rho(t) = \sum_j p_j |\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)| \quad \text{é o } \textit{operador densidade}. \tag{1.12}$$

Portanto o operador densidade é a generalização do vetor de estado e a matriz densidade é a representação do operador densidade em certa base.
O operador densidade obedece às seguintes propriedades:

1. o **hermiticidade**

$$\begin{aligned} \rho^\dagger = & \left(\sum_j p_j |\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)| \right)^\dagger \\ = & \sum_j p_j^* |\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|. \end{aligned}$$

Como

$$p_j = p_j^* \quad \text{pois } p_j \text{ é real,}$$

então

$$\rho^\dagger = \rho(t).$$

Conseqüentemente:

(a) O valor médio de qualquer observável é real,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle^* (t) \quad & = (Tr\rho(t)\mathbf{A})^* = Tr\,(\rho(t)\mathbf{A})^\dagger \\ & = Tr\,(\rho(t))^\dagger\,(\mathbf{A})^\dagger = Tr\rho(t)\mathbf{A} \\ & = \langle \mathbf{A} \rangle (t). \end{aligned}$$

(b) O operador densidade pode ser diagonalizado por uma transformação unitária

$$\begin{aligned} & \rho'(t) = \mathbf{U}\rho(t)\mathbf{U}^\dagger \qquad (1.13) \\ \Longrightarrow \quad & Tr\rho'(t) = Tr\mathbf{U}\rho(t)\mathbf{U}^\dagger = Tr\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\rho(t) = Tr\rho(t) \\ \Longrightarrow \quad & \text{o traço de um operador é um invariante à mudança de representação.} \end{aligned}$$

2. ◇ **Positividade semi definida**

Seja um estado qualquer $|v\rangle$, então

$$\begin{aligned}\langle v|\rho(t)|v\rangle &= \langle v|\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)||v\rangle \\ &= \sum_j p_j\langle v|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)||v\rangle \\ &= \sum_j p_j\,|\langle v|\psi_j(t)\rangle|^2 \geq 0 \\ &\downarrow \\ &\rho(t) \geq 0.\end{aligned}$$

3. ◇ $\mathbf{Tr}\rho^2(\mathbf{t}) \leq \mathbf{1}$

$$\begin{aligned}Tr\rho^2(t) &= \sum_n \langle\phi_n|\left(\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\right)\left(\sum_k p_k|\psi_k(t)\rangle\langle\psi_k(t)\right)|\phi_n\rangle \\ &= \sum_j p_j \sum_k p_k \sum_n \langle\psi_k(t)|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\psi_k(t)\rangle\end{aligned}$$

da relação de completeza, $\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1$, teremos

$$Tr\rho^2(t) = \sum_j p_j \sum_k p_k\,|\langle\psi_k(t)|\psi_j(t)\rangle|^2.$$

Como

$$|\langle\psi_k(t)|\psi_j(t)\rangle|^2 \leq 1 \text{ e } \sum_k p_k = 1 \Rightarrow \sum_k p_k\,|\langle\psi_k(t)|\psi_j(t)\rangle|^2 \leq 1 \text{ para } \forall\, k,$$

então

$$Tr\rho^2(t) \leq \sum_j p_j = 1.$$

1.2.1 Estado Puro e Mistura Estatística

O operador densidade pode ser visto como uma distribuição muito grande de sistemas idênticos, *ensemble*, preparados de tal forma que cada fração p_j está no estado $|\psi_j(t)\rangle$.

Se considerarmos um número muito grande de sistemas idênticos, todos preparados num mesmo estado quântico, então

$$p_j = 1 \ \forall \ j \ \text{ e } \ \sum_j p_j |\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)| = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Um tal conjunto é denominado *estado puro* onde, o operador densidade passa a ser um *projetor* e conseqüentemente **idempotente**, ou seja,

$$\rho(t) = |\psi\rangle\langle\psi| \ \ \text{(projetor)} \ \ \Longrightarrow Tr\rho^2(t) = 1 \ \ \text{(idempotente)}$$

Desta forma, é possível interpretar os autovalores de ρ como probabilidades de que o sistema, cujo estado é descrito por ρ, se encontre no autovetor correspondente a esse autovalor. Tais probabilidades são chamadas probabilidades de ocupação associadas aos respectivos vetores de estado.
Potanto, uma maneira necessária e suficiente para se medir a pureza de um estado, que em laboratório é sempre um procedimento delicado de se obter, é verificar se

$$\rho^2(t) = \rho(t) \ \ \text{ou se} \ \ Tr\rho^2(t) = Tr\rho(t) = 1$$

Caso contrário teremos uma *mistura estatística*, onde

$$\rho^2(t) \neq \rho(t) \ \ \text{e} \ \ Tr\rho^2(t) \leq 1$$

A diferença entre estados puros e mistura estatistica está relacionada a medida da "desordem"do sistema [25] através da entropia de Boltzman-von Newman [35]

$$S_B = -Tr\left(\rho \ln \rho\right)$$

ou através da entropia linear [5, 13]

$$\delta(t) = Tr\left(\rho - \rho^2\right) \ \ \textit{defeito de idempotência} \tag{1.14}$$

1.2.2 Evolução Temporal

Derivando-se o operador densidade, definido na equação 1.12, em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \sum_j p_j \left(\frac{d}{dt}|\psi_j(t)\rangle\right)\langle\psi_j(t)| + \sum_j p_j |\psi_j(t)\rangle \left(\frac{d}{dt}\langle\psi_j(t)|\right).$$

Se o ensemble não é perturbado, cada um dos sistemas evolui de acordo com a equação de Schrödinger 1.1, cujo hermiteano conjugado é

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\mathbf{H}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho(t) &= \sum_j p_j \left(\frac{1}{i\hbar}\mathbf{H}\right)|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)| + \sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\left(-\frac{1}{i\hbar}\mathbf{H}\right)\\ &= \frac{1}{i\hbar}\mathbf{H}\left(\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\right) - \frac{1}{i\hbar}\left(\sum_j p_j|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\right)\mathbf{H}\\ &= \frac{1}{i\hbar}\left(\mathbf{H}\rho(t) - \rho(t)\mathbf{H}\right),\end{aligned}$$

teremos

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\mathbf{H}, \rho(t)\right]. \tag{1.15}$$

Devido a analogia com a mecânica clássica, esta equação é conhecida como *equação de Liouville-von Neumann*. Se definirmos um *superoperador* linear

$$\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar}\left[\mathbf{H}, \cdot\right] \tag{1.16}$$

denominado *superoperador liouvilliano* (a notação $(\cdot)$ denota o superoperador), que atua sobre o operador densidade $\rho(t)$, podemos escrever a equação de Liouville-von Neumann numa forma mais compacta, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t). \tag{1.17}$$

1.2.3 Operador Densidade Reduzido

Conforme já mencionamos, é comum estudar sistemas cujo hamiltoniano pode ser decomposto numa parte intrínseca, $\mathbf{H}_0$, e numa parte de interação, $\mathbf{H}_{int}$. Para podermos estudar os subsistemas deste sistema composto, através do operador densidade, temos que definir um operador densidade para cada um dos subsistemas.
Para tanto, vamos considerar um sistema composto, $a + b + ...$, formado pelos subsistemas a, b,..., onde os estados de um sistema composto são associados a vetores produto no espaço de Hilbert, correspondentes aos estados de cada um dos subsistemas, ou seja, o espaço de estado do sistema composto é o produto tensorial $\mathcal{E}_{a+b+..} = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b \otimes ...$ dos espaços de estados dos subsistemas a, b,... gerados por bases ortonormais, $\{|n_a\rangle\}$, $\{|n_b\rangle\}$,... dos espaços $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_b$,... respectivamente. Então,

uma base do espaço produto, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{a+b+..}$,é constituida pelos vetores, também ortonormais da forma $\{|n_{ab..}\rangle\} = \{|n_a\rangle\} \otimes \{|n_b\rangle\} \otimes ...$
Assim, qualquer vetor, do espaço $\mathcal{E}_a$ por exemplo, pode ser escrito como

$$|a\rangle = \sum_{na} a_{na}|n_a\rangle,$$

e um vetor genérico no espaço produto, de dois subsistemas a e b por exemplo, será escrito por

$$|n\rangle = \sum_{na\,nb} (a_{na}|n_a\rangle) \otimes (a_{nb}|n_b\rangle).$$

Seja $\mathbf{O}_a$ um observável de $\mathcal{E}_a$ e $\mathbf{O} = \mathbf{O}_a \otimes \mathbf{1}_b$ a sua extensão em $\mathcal{E}_{a+b}$.
O valor esperado de $\mathbf{O}_a$ é dado por :

$$\langle \mathbf{O}_a \rangle = Tr\rho\mathbf{O}$$

onde ρ é o operador densidade em $\mathcal{E}_{a+b}$ associado ao sistema composto.
Assim:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{O}_a \rangle &= \sum_{n_a n_b} \langle n_a n_b|\rho\mathbf{O}|n_a n_b\rangle \\
&= \sum_{n_a n_b} \langle n_a n_b|\rho(\mathbf{O}_a \otimes \mathbf{1}_b)|n_a n_b\rangle \\
&= \sum_{n_a n_b} \langle n_a n_b|\rho\left(\mathbf{O}_a|n_a\rangle \otimes |n_b\rangle\right) \\
&= \sum_{n_a} \langle n_a| \left(\sum_{n_b} \langle n_b|\rho|n_b\rangle\right) \mathbf{O}_a|n_a\rangle.
\end{aligned}$$

Definindo o operador *densidade reduzido* do subsistema a por:

$$\rho_a \equiv \sum_{n_b} \langle n_b|\rho|n_b\rangle \equiv Tr_b\rho \tag{1.18}$$

onde Tr_b denota o **traço parcial** no espaço $\mathcal{E}_b$, podemos escrever

$$\langle \mathbf{O}_a \rangle = \sum_{n_a} \langle n_a|\rho_a \mathbf{O}_a|n_a\rangle = Tr_a\rho_a\mathbf{O}_a. \tag{1.19}$$

1.3 Dinâmica reduzida

A evolução temporal do operador densidade reduzido, ρ_a, é dada através do cálculo do traço da equação 1.15

$$Tr_b\left(\frac{d}{dt}\rho(t)\right) = \frac{1}{i\hbar}Tr_b\left([\mathbf{H},\rho(t)]\right)$$
$$\downarrow$$
$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_a(t) = Tr_b\left([\mathbf{H},\rho(t)]\right).$$

Se não houver interação entre os sistemas a e b então o hamiltoniano total, $\mathbf{H}$, poderá ser decomposto em $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$ e a evolução do operador densidade reduzido será unitária como a equação 1.15, ou seja,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho_a(t) = [\mathbf{H}_a, \rho_a(t)].$$

Por outro lado quando há interação entre os sistemas, $\mathbf{H}_{int}$, a evolução do operador densidade reduzido, ρ_a, não será em geral unitária. Formalmente, a maneira mais direta de ver isto consiste em considerarmos a densidade reduzida na representação de orbitais naturais, i e, na representação em que ele é diagonal.Teremos então:

$$\rho_a(t) = \sum_j p_j(t)|a_j(t)\rangle\langle a_j(t)|$$

onde $p_j(t)$ representa a probabilidade de ocupação do orbital no tempo t.

Considerando a derivada temporal de $\rho_a(t)$,

$$i\frac{d}{dt}\rho_a(t) = [\mathbf{h}(t), \rho_a(t)] + \sum_i |a_j(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}p_j(t)\right)\langle a_j(t)|$$

onde $\mathbf{h}(t)$ é o operador hermiteano que caracteriza a transformação unitária responsável pela evolução dos orbitais naturais $|a_j(t)\rangle$, notamos claramente que o último termo do lado direito é uma contribuição não unitária pois, descreve a mudança dos <u>autovalores</u> como função do tempo. Está dinâmica jamais poderá ser caracterizada em termos de um operador unitário.

É possível encontrar uma relação formal entre $\mathbf{h}(t)$, $p_j(t)$ e os ingredientes da dinâmica, $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{H}_b$ e $\mathbf{H}_{int}$, [18], em termos de operadores de projeção e integrais de memória. Embora a estrutura da evolução quântica de subsistemas interagentes esteja completamente contida na descrição exata da referência [18], é muito difícil utilizá-la na prática ou implementar aproximações. Dada a importância de compreender melhor a dinâmica das correlações quânticas e do processo de decoerência em casos de interesse prático, preferimos aqui, neste trabalho, adotar uma outra estratégia. Deduziremos então, no que segue a equação que será o ponto de partida para as aproximações posteriores.

A evolução do operador densidade, $\rho(t)$, na representação de interação, conforme equação 1.10, é dada por:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) \quad = i\hbar\frac{d}{dt}\left(\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\rho(t)\mathbf{U}_0(t,t_0)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathbf{H}_0\widetilde{\rho}(t) + i\hbar\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}\rho(t)\right)\mathbf{U}_0(t,t_0) + \widetilde{\rho}(t)\mathbf{H}_0 \\
&= -\left[\mathbf{H}_0, \widetilde{\rho}(t)\right] + \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left[\mathbf{H}, \rho(t)\right]\mathbf{U}_0(t,t_0) \\
&= -\left[\mathbf{H}_0, \widetilde{\rho}(t)\right] + \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left[\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}, \rho(t)\right]\mathbf{U}_0(t,t_0) \\
&= -\left[\mathbf{H}_0, \widetilde{\rho}(t)\right] + \mathbf{H}_o\widetilde{\rho}(t) - \widetilde{\rho}(t)\mathbf{H}_o + \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\left[\mathbf{H}_{int}, \rho(t)\right]\mathbf{U}_0(t,t_0) \\
&= \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}\rho\mathbf{U}_0(t,t_0) - \mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\rho\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t,t_0) \\
&= \overbrace{\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t,t_0)}^{\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)}\underbrace{\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\rho\mathbf{U}_0(t,t_0)}_{\widetilde{\rho}(t)} - \\
&- \overbrace{\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\rho\mathbf{U}_0(t,t_0)}^{\widetilde{\rho}(t)}\underbrace{\mathbf{U}_0^\dagger(t,t_0)\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t,t_0)}_{\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)} = \widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)\widetilde{\rho}(t) - \widetilde{\rho}(t)\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
i\hbar\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}(t) = \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \widetilde{\rho}(t)\right]. \tag{1.20}
$$

A equação diferencial 1.20 é equivalente a equação integral

$$
\widetilde{\rho}(t) = \widetilde{\rho}(0) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^t dt'\left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), \widetilde{\rho}(t')\right]. \tag{1.21}
$$

Nas últimas décadas, uma questão que tem assumido relevância crescente é o tratamento de sistemas quânticos abertos. A idéia central é que, apesar da Mecânica Quântica ser aplicada a sistemas fechados, na prática é impossível isolar completamente o sistema do ambiente que o cerca. Para tornar o problema tratável, modularemos o ambiente como um banho de osciladores harmônicos e o acoplamento ao sistema de interesse, um oscilador harmônico, será linear. Trataremos sistemas quânticos gerais cuja dinâmica possa ser escrita por:

$$
\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R + \mathbf{H}_{int} \tag{1.22}
$$

onde $\mathbf{H}_S$ é o hamiltoniano do sistema, $\mathbf{H}_R$ é o hamiltoniano do reservatório (banho) e $\mathbf{H}_{int}$ é o hamiltoniano de interação.
Os dois tipos mais utilizados de hamiltonianas que se encaixam nestas premissas são:

1. Posição-posição

$$\mathbf{H}_{(CL)} = \underbrace{\hbar\omega_0\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\right)}_{\mathbf{H}_S} + \underbrace{\hbar\sum_k\left(\omega_k\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger\hat{\mathbf{c}}_k + \frac{1}{2}\right)}_{\mathbf{H}_R}$$
$$+\underbrace{\sum_k\left(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger\right)\left(\gamma_k\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger + \gamma_k^*\hat{\mathbf{c}}_k\right)}_{\mathbf{H}_{int}} \tag{1.23}$$

2. Onda girante

$$\mathbf{H}_{(RWA)} = \underbrace{\hbar\omega_0\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\right)}_{\mathbf{H}_S} + \underbrace{\hbar\sum_k\left(\omega_k\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger\hat{\mathbf{c}}_k + \frac{1}{2}\right)}_{\mathbf{H}_R}$$
$$+\underbrace{\sum_k\gamma_k\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger + \gamma_k^*\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{c}}_k}_{\mathbf{H}_{int}} \tag{1.24}$$

onde $\mathbf{H}_{(RWA)}$ decorre da primeira se desprezarmos termos não ressonantes. Isto é uma excelente aproximação no regime de acoplamento fraco [20, 21, 19].

A densidade reduzida do sistema de interesse nestes dois casos pode ser obtida facilmente na aproximação de Born-Markov e a dedução das equações resultantes pode-ser encontrada em vários livros textos [9, 16, 30, 8] e não será repetida aqui[1]. O resultado é:

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_{(CL)}\rho_S(t) &= -\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_S, \rho_S(t)\right] \\
&+k\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right) \\
&+k\overline{n}\left(2\hat{\mathbf{a}}^\dagger\rho_S(t)\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger\right) \\
&-kM\left(2\hat{\mathbf{a}}^\dagger\rho\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\right)^2\rho - \rho\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\right)^2\right) \\
&-kM^*\left(2\hat{\mathbf{a}}\rho\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^2\rho - \rho\hat{\mathbf{a}}^2\right),
\end{aligned} \tag{1.25}$$

$$i\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_{(RWA)}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_S, \rho_S(t)\right]$$

[1] na seção 4.1 faremos a dedução para dois osciladores

$$+k\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{a}\rho_S(t)\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_S(t)-\rho_S(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$+k\overline{n}\left(2\hat{a}^\dagger\rho_S(t)\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho_S(t)-\rho_S(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger\right). \tag{1.26}$$

Se o banho for frio $\overline{n}\to 0$ podemos escrever [2]:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t)=-\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_S,\rho_S(t)\right]+k\left(2\hat{a}\rho_S(t)\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_S(t)-\rho_S(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \tag{1.27}$$

O segundo termo não unitários na evolução, caracterizados por anticomutadores e termos do tipo $\hat{a}^\dagger\cdot\hat{a}$ é em geral chamado, o dissipador.

1.4 Decoerência, correlação e dissipação

Um dos problemas mais intrigantes no que se refere a contrastes entre a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica é a inexistência de superposições coerentes de estados macroscópicamente distingüíveis na primeira. Em princípio, a existência de fenômenos de interferência a nível microscópico implicaria no aparecimento do mesmo fenômeno a nível macroscópico. O intrigante é a inexistência clássica dos fenômenos de interferência quântica advindos de correlações. A mais famosa ilustração do problema foi proposta por Schrödinger em 1935 com o "Paradoxo do Gato"[22]. Na tentiva de resolver esta questão, os conceitos de decoerência, de superposições coerentes e dissipação aparecem como ingredientes fundamentais. Geralmente o sistema observado, que interage com o ambiente, relaxa em direção a um equilíbrio térmico com o ambiente, fenômeno comumente conhecido como dissipação [12]. Por outro lado, o ambiente age sobre o sistema devido às flutuações térmicas provocando a destruição de estados quânticos puros numa escala de tempo extremamente curta, processo esse que é denominado decoerência (perda de pureza) [9, 13, 10, 3, 6, 7, 2]. Neste contexto, através desses processos, decoerências e dissipação, num estado quântico composto por uma superposição coerente de estados distingüíveis, torna-se uma mistura estatística. Apesar de ambos terem origem no acoplamento do sistema ao meio, dissipação e decoerência são fenômenos distintos que podem ocorrer independentemente[3].
No presente trabalho trataremos especificamente destes tipos de efeitos não unitários.

Conforme mencionado anteriormente, embora os dois processo estejam relacionados intimamente, eles são essencialmente distintos. Um dos objetivos do presente trabalho é propor uma expansão pertubativa tanto para a decoerência como para a dissipação e estudar casos de interesse. Para isso é conveniente introduzir uma medida de decoerência através do defeito de idempotência (ou entropia linear) conforme equação 1.14

$$\delta_i(t)=1-Tr{\rho_i}^2 \tag{1.28}$$

[2] veja seção 4.1

e da dissipação

$$\frac{E_i(t)}{E_i(0)} = \frac{tr\left(\mathbf{H}_i\rho_i(t)\right)}{tr\left(\mathbf{H}_i\rho_i(0)\right)} \tag{1.29}$$

onde i é um índice mudo, podendo representar o sistema, o ambiente ou a interação e $E_i(t)$, $E_i(0)$ são as energias do sistema "i"no instante t e no instante inicial respectivamente.

Capítulo 2

"Regra Aurea" para Decoerência e Dissipação

No presente capítulo deduziremos expressões gerais perturbativas para o cálculo do defeito de idempotência e da dissipação. Aplicações serão feitas para os hamiltonianos de um oscilador linearmente acoplado a um banho de osciladores, conforme equações 1.23 e 1.24. Estes exemplos tem caráter didático e nos mostrarão os mecanismos característicos da dissipação e decoêrencia. Finalmente, aplicaremos a teoria desenvolvida para estudar a decoerência e dissipação de uma superposição coerente de estados coerentes. Mostraremos a relação quantitativa entre os tempos característicos dos dois processos.

2.1 Expansão Perturbativa da Densidade Reduzida

A dinâmica completa do sistema, equação 1.22, é descrita como mostrado no capítulo anterior pela equação de Lioville-von Neumann, 1.17 ou na representação de interação 1.20.
A equação na representação de interação pode ser iterada e truncada numa dada ordem desde que a interação entre o sistema e o ambiente possa ser considerada fraca num sentido adequado.
A iteração é feita substituindo 1.21 em 1.20 até segunda ordem em $\mathbf{H}_{int}$, obtendo:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}(t) &= \widetilde{\rho}(0) + \frac{-i}{\hbar}\int_0^t dt' \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), \widetilde{\rho}(t')\right] \\
&= \widetilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_1), \widetilde{\rho}(0)\right] \\
&-\frac{1}{2\hbar}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_2), \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_1), \widetilde{\rho}(0)\right]\right] + \mathbb{O}\left(\mathbf{H}_{int}^3\right) \\
&= \widetilde{\rho}^{(0)} + \widetilde{\rho}^{(1)} + \widetilde{\rho}^{(2)} + \cdots
\end{aligned}$$

A dinâmica reduzida do sistema de interesse S ou R será dada por

$$\widetilde{\rho}_i = Tr_j \widetilde{\rho} \quad \text{onde } i,\ j \text{ representam os sistemas e } i \neq j.$$

Esta é a equação de partida para o cálculo pertubativo do defeito de idempotência, 1.28, e dissipação, 1.29, definidos no capítulo anterior. Dentro do contexto perturbativo exposto e supondo que a condição inicial $\widetilde{\rho}(0)$ é fatorizada, podemos escrever expressões gerais para $\delta_S(t)$ e $E_S(t)$ ou para $\delta_R(t)$ e $E_R(t)$ como segue:

$$\begin{aligned}
\delta_j^{(1)}(t) &= 0 \\
\delta_j^{(2)}(t) &= -tr\left(\rho_j^{(1)}(t)\right)^2 - 2tr\rho_j^{(0)}(t)\rho_j^{(2)}(t) && (2.1)\\
E_j^{(1)}(t) &= Tr\mathbf{H}_j\rho_j^{(1)}(t) \\
E_j^{(2)}(t) &= Tr\mathbf{H}_j\rho_j^{(2)}(t) \qquad j = S \text{ ou } R. && (2.2)
\end{aligned}$$

2.2 Acoplamento Linear a um banho de Osciladores

Consideremos inicialmente a dinâmica dada pela hamiltoniana $\mathbf{H}_{RWA}$ da equação, 1.24, com γ_k real por simplicidade.
Para uma condição inicial, $\rho(0)$, fatorizável

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0),$$

podemos escrever a dinâmica reduzida numa forma compacta por:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_l^{(1)}(t) &= -iTr_m \int_0^t dt_1 \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_1), \widetilde{\rho}(0)\right] \\
\widetilde{\rho}_l^{(1)}(t) &= -i\sum_j \sum_{j'\neq j} \left\{ \int_0^t dt_1 \langle \hat{\mathbf{o}}_m^{j'}(t_1)\rangle \left[\hat{\mathbf{o}}_l^j(t_1), \widetilde{\rho}_l(0)\right] \right\}_{(j,j')=\left\{\substack{com\\ sem}\ \substack{\uparrow\\ \uparrow}\right\}} \\
\widetilde{\rho}_l^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}Tr_m \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_1 \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_2), \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t_1), \widetilde{\rho}(0)\right]\right] \\
\widetilde{\rho}_l^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}\sum_j \sum_{j'\neq j} \left\{ \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \left[\hat{\mathbf{o}}_l^j(t_2), \left[\hat{\mathbf{o}}_l^j(t_1), \widetilde{\rho}_l(0)\right]\right] \langle \hat{\mathbf{o}}_m^{j'}(t_2)\hat{\mathbf{o}}_m^{j'}(t_1)\rangle \right. \\
&\quad + \left[\hat{\mathbf{o}}_l^j(t_2), \hat{\mathbf{o}}_l^{j'}(t_1)\widetilde{\rho}_l(0)\right] \langle \hat{\mathbf{o}}_m^{j'}(t_2)\hat{\mathbf{o}}_m^j(t_1)\rangle \\
&\quad \left. - \left[\hat{\mathbf{o}}_l^j(t_2), \widetilde{\rho}_l(0)\hat{\mathbf{o}}_l^{j'}(t_1)\right] \langle \hat{\mathbf{o}}_m^j(t_1)\hat{\mathbf{o}}_m^{j'}(t_2)\rangle \right\}_{(j,j')=\left\{\substack{com\\ sem}\ \substack{\uparrow\\ \uparrow}\right\}}
\end{aligned}$$

onde:

1. Se "l" for o sistema e "m" for o reservatório então

$$\hat{\mathrm{o}}_m^j(t) = \begin{cases} \Gamma^\dagger(t) = \sum_k \gamma_k e^{i\hbar(\omega_k-\omega_0)t}\hat{\mathrm{c}}_k^\dagger & \text{para } j = \text{com } \dagger \\ \Gamma(t) = \sum_k \gamma_k e^{-i\hbar(\omega_k-\omega_0)t}\hat{\mathrm{c}}_k & \text{para } j = \text{sem } \dagger \end{cases}$$

$$\hat{\mathrm{o}}_l^j(t) = \begin{cases} \hat{\mathrm{a}}^\dagger & \text{para } j = \text{com } \dagger \\ \hat{\mathrm{a}} & \text{para } j = \text{sem } \dagger. \end{cases}$$

Logo

$$\rho_S^{(1)}(t) = -\int_0^t dt_1 \left\{ \left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \tilde{\rho}_S(0)\right] \langle\Gamma(t_1)\rangle + \left[\hat{\mathrm{a}}, \tilde{\rho}_S(0)\right] \langle\Gamma^\dagger(t_1)\rangle \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho_S^{(2)}(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^{t_2} dt_2 dt_1 \Big\{ & \left[\hat{\mathrm{a}}, \left[\hat{\mathrm{a}}, \tilde{\rho}_S(0)\right]\right] \langle\Gamma^\dagger(t_2)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle \\ & + \left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \tilde{\rho}_S(0)\right]\right] \langle\Gamma(t_2)\Gamma(t_1)\rangle \\ & + \left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \hat{\mathrm{a}}\tilde{\rho}_S(0)\right] \langle\Gamma(t_2)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle + \left[\hat{\mathrm{a}}, \hat{\mathrm{a}}^\dagger\tilde{\rho}_S(0)\right] \langle\Gamma^\dagger(t_2)\Gamma(t_1)\rangle \\ & - \left[\hat{\mathrm{a}}, \tilde{\rho}_S(0)\hat{\mathrm{a}}^\dagger\right] \langle\Gamma(t_1)\Gamma^\dagger(t_1)\rangle - \left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \tilde{\rho}_S(0)\hat{\mathrm{a}}\right] \langle\Gamma^\dagger(t_1)\Gamma(t_2)\rangle \Big\}. \end{aligned}$$

2. Caso contrário, se "l" for o reservatório e "m" for o sistema então teremos:

$$\tilde{\rho}_R^{(1)}(t) = -\int_0^t dt_1 \left\{ \left[\Gamma^\dagger(t_1), \tilde{\rho}_R(0)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}\rangle + \left[\Gamma(t_1), \tilde{\rho}_R(0)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}^\dagger\rangle \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_R^{(2)}(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^{t_2} dt_2 dt_1 \Big\{ & \left[\Gamma(t_2), \left[\Gamma(t_1), \tilde{\rho}_R(0)\right]\right] \langle\hat{\mathrm{a}}^{\dagger 2}\rangle \\ & + \left[\Gamma^\dagger(t_2), \left[\Gamma^\dagger(t_1), \rho(0)\right]\right] \langle\hat{\mathrm{a}}^2\rangle \\ & + \left[\Gamma^\dagger(t_2), \Gamma(t_1)\tilde{\rho}_R(0)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}\hat{\mathrm{a}}^\dagger\rangle + \left[\Gamma(t_2), \Gamma^\dagger(t_1)\rho(0)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}^\dagger\hat{\mathrm{a}}\rangle \\ & - \left[\Gamma(t_2), \tilde{\rho}_R(0)\Gamma^\dagger(t_1)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}\hat{\mathrm{a}}^\dagger\rangle - \left[\Gamma^\dagger(t_2), \tilde{\rho}_R(0)\Gamma(t_1)\right] \langle\hat{\mathrm{a}}^\dagger\hat{\mathrm{a}}\rangle \Big\}. \end{aligned}$$

Tomemos a condição inicial

$$\rho_S(0) = |n\rangle\langle n|, \qquad \rho_R(0) = \tfrac{1}{Z}e^{-\beta \mathrm{H}_R},$$

$$\rho(0) = |n\rangle\langle n| \otimes \tfrac{1}{Z}e^{-\beta \mathrm{H}_R},$$

onde $|n\rangle\langle n|$ é a densidade correspondente a um auto estado do oscilador principal, H_R é dado pela equação 1.24 e Z a função de partição correspondente. Com isto temos todos os ingredientes necessários para o cálculo perturbativo da decoerência e dissipação. A dinâmica reduzida para o subsistema S, em segunda ordem, será:

$$\begin{aligned} \rho_S^{(2)}(t) = |n\rangle\langle n| - \sum_k \gamma^2{}_k \frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \Big\{ & \left[(2n+1)\,\overline{n}_k + n\right] |n\rangle\langle n| \\ & - n\,(\overline{n}_k + 1)\,|n-1\rangle\langle n-1| - (n-1)\,\overline{n}_k |n+1\rangle\langle n+1| \Big\} \end{aligned}$$

onde $\delta_k = (\omega_o - \omega_k)$ e $\overline{n}_k$ é o número de excitações do banho[1].

Neste caso simples já podemos identificar alguns dos mecanismos importantes da dinâmica reduzida a tempos curtos: primeiramente notamos que $\rho_S^{(2)}(t)$ deixará de ser um estado puro adquirindo as contribuições dos termos diagonais $|n-1\rangle\langle n-1|$ e $|n+1\rangle\langle n+1|$. Além disto, podemos claramente identificar o que acontece a tempos muito curtos, no que é freqüentemente chamado *regime pré-cinético*: para tempos tais que

$$\delta_k t \ll 1, \quad \text{o termo dependente do tempo} \quad \frac{\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \to t^2$$

e portanto a expressão para a densidade reduzida fica independente das freqüências do problema. Em particular isto implica que todos os modos do banho para os quais $\gamma_k \neq 0$ vão contribuir para a densidade reduzida do sistema de interesse, mesmo aqueles com energias muito diferentes da energia inicial disponível. Vemos então que o regime pré-cinético é dominado pelo princípio da incerteza energia-tempo.
Após este tempo, ie $\delta_k t \sim 1$, a função $\left(\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t\right) \left(\frac{\delta_k}{2}\right)^{-2}$ começa a limitar a contribuição dos estados mais distantes tal que

$$\frac{\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \longrightarrow \delta\left(\omega_o - \omega_k\right) t \tag{2.3}$$

e a contribuição do reservatório à evolução do subsistema de interesse será predominantemente através dos estados com energia próximas a ω_0. Inicia-se então o regime cinético, onde se aplicam as considerações que serão feitas na dedução da equação mestra[2].
Substituindo $\rho_S^{(2)}(t)$ nas equações 2.1 e 2.2 encontramos respectivamente:

$$\delta_S(t) = \delta_S^{(2)}(t) = 2 \sum_k \gamma^2{}_k \left\{(2n+1)\,\overline{n}_k + n\right\} \frac{\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}$$

e

$$E_{S_{(RWA)}}^{(2)}(t) = \hbar\omega_0 \sum_k \gamma^2{}_k \left(\overline{n}_k - n\right) \frac{\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}$$

$$\downarrow$$

$$E_{S_{(RWA)}}(t) = n\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0 \sum_k \gamma^2{}_k \left(\overline{n}_k - n\right) \frac{\sin^2 \frac{\delta_k}{2} t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \tag{2.4}$$

Das expressões acima vê-se imediatamente algumas diferenças essenciais entre os processos de decoerência e dissipação: no caso da decoerência, todas as contribuições incorporadas a $\rho_S^{(2)}(t)$ pela interação adicionam-se contribuindo positivamente para

[1] maiores detalhes na seção 4.1
[2] seção 4.1

a perda de pureza. No caso da dissipação, vemos que os modos que tem $\overline{n}_k > n$ tendem a excitar o sistema enquanto que os que tem $\overline{n}_k < n$ tendem a desexcitá-lo. O resultado é portanto um balanço entre perda e ganho de energia como se vê claramente na expressão 2.4. Em particular este balanço poderá ser nulo,não havendo dissipação mas havendo decoerência. É razoável então pensar que o tempo característico da perda de pureza é mais rápido do que da perda de energia. Isto será demonstrado mais rigorosamente na secção2.3. É possível tambem usar um estado inicial do tipo

$$\rho(0) = \rho_S^{(0)} \otimes \frac{e^{-\beta \mathbf{H}_R}}{Z} \tag{2.5}$$

onde $\rho_s(0)$ é um estado inicial qualquer do sistema de interesse. Neste caso obtemos para a dissipação e decoerência até segunda ordem

$$\begin{aligned} E_{S_{(RWA)}}(t) &= E^{(0)}_{S_{(RWA)}}(t) + E^{(2)}_{S_{(RWA)}}(t) \\ &= Tr\mathbf{H}_S\rho_S(0) + \hbar\sum_k \omega_0\gamma^2{}_k\left(\overline{n}_k - \langle\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rangle\right)\frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} E_{R_{(RWA)}}(t) &= E^{(0)}_{R_{(RWA)}}(t) + E^{(2)}_{R_{(RWA)}}(t) \\ &= Tr\mathbf{H}_R\rho_R(0) - \hbar\sum_k \omega_k\gamma^2{}_k\left(\overline{n}_k - \langle\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rangle\right)\frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \delta_{S_{(RWA)}}(t) &= 1 - tr\rho^2{}_S(0) \\ &+2\sum_k \gamma^2{}_k\frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}\left\{\overline{n}_k tr\rho^2{}_S(0) + (2\overline{n}_k+1)\,tr\left(\left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger,\hat{\mathbf{a}}\rho_S(0)\right]\rho_S(0)\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \delta_{R_{(RWA)}}(t) &= 1 - tr\rho^2{}_R(0) + \sum_k \gamma^2{}_k\frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}\left\{tr\left[\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger,\rho_R(0)\right]\left[\hat{\mathbf{c}}_k,\rho_R(0)\right]\langle\hat{\mathbf{a}}\rangle\langle\hat{\mathbf{a}}^\dagger\rangle\right. \\ &\left. + 2\langle\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rangle tr\rho^2{}_R(0) + 2\left(2\langle\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rangle+1\right)tr\left(\left[\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger,\hat{\mathbf{c}}_k\rho_R(0)\right]\rho_R(0)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

É claro que o resultado anterior pode ser imediatamente obtido das expressões acima. O fato da energia total se conservar,

$$\Delta\{E_{S_{(RWA)}}(t) + E_{R_{(RWA)}}(t) + E_{\mathrm{int}_{(RWA)}}(t)\} = 0,$$

nos leva a concluir em segunda ordem, usando a condição 2.3, que a correção à interação se anula, ou seja,

$$\Delta E_{\mathrm{int}_{(RWA)}}(t) = -\Delta\{E_{S_{(RWA)}}(t) + E_{R_{(RWA)}}(t)\} = -\{E_{S_{(RWA)}}(t) + E_{R_{(RWA)}}(t)\} = 0.$$

Por outro lado, os dois subsistemas perdem pureza como pode ser visto a partir de $\delta_S(t)$ e $\delta_R(t)$ como conseqüência direta da interação pois $\delta_S(t)$ e $\delta_R(t)$ tornam-se positivos.

Um caso interessante é o acoplamento posição posição dado pela equação 1.23 onde consideraremos novamente γ_k real por simplicidade. Tomando a mesma condição inicial 2.5, e usando as mesmas técnicas é simples obter as expressões para $E^{(2)}(t)$ e $\delta^{(2)}(t)$. No entanto estas expressões são pouco elucidativas e por isso não as escreveremos explicitamente. Vale a pena, entretanto investigar um fenômeno que acontece com a variação de energia na interação. Em segunda ordem,

$$E^{(2)}_{int}(t) = -E^{(2)}_R(t) - E^{(2)}_S(t)$$

assegurando a conservação da energia, como deve ser. Para fazer este cálculo utilizaremos uma expansão em série de Taylor no tempo de $tr\left(\mathbf{H}_{int}\rho^{(2)}_{int}(t)\right)$ dos subsistemas a tempos curtos. Mostramos então apenas as expressões em ordem de t^2 para as energias do sistema de interesse, do reservatório e do acoplamento

$$\begin{aligned}
E^{(2)}_{S_{(p-p)}}(t) &= t^2\hbar\omega_0 \sum_k \gamma^2{}_k\,(2\overline{n}_k + 1) \\
E^{(2)}_{R_{(p-p)}}(t) &= t^2\hbar \sum_k \omega_k\gamma^2{}_k \left(2\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + \langle(\hat{a}^\dagger)^2\rangle + \langle(\hat{a})^2\rangle + 1\right) \\
E^{(2)}_{int_{(p-p)}}(t) &= -t^2\hbar\omega_0 \sum_k \gamma^2{}_k\,(2\overline{n}_k + 1) \\
&\quad -t^2\hbar \sum_k \omega_k\gamma^2{}_k \left(2\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + \langle(\hat{a}^\dagger)^2\rangle + \langle(\hat{a})^2\rangle + 1\right)
\end{aligned}$$

Note que aqui, contrariamente ao que ocorre no caso anterior, as duas energias <u>crescem</u>. Em particular, a energia do oscilador principal cresce <u>independentemente</u> do estado incial $\rho(0)$. Isto quer dizer que mesmo que o estado inicial seja o estado fundamental do oscilador em questão, e mesmo se os osciladores do banho também estiverem em seus estados fundamentais, $\overline{n}_k = 0$, essa energia <u>aumenta</u>. Isto é um efeito quântico devido à interação. No caso anterior, o estado fundamental do hamiltoniano de partida consiste em ter todos os osciladores individualmente em seu estados fundamentais. Aqui isto já não é mais verdade e existe um estado com energia <u>menor</u> do que a deste, que é o estado fundamental do sistema fora da RWA. Então é possível, para o estado inicialmente utilizado, uma tentativa de atingir esse estado de menor energia, sendo para isso necessário <u>ceder</u> energia.

2.3 Decoerência e Dissipação de uma Superposição Coerente

Vamos agora aplicar o esquema perturbativo desenvolvido para estudar quantitativamente a relação entre as escalas de tempo características da decoerência e dissipação para um estado inicial especial, uma superposição coerente de estados coerentes.

Seja

$$\rho(0) = N^2(\alpha)\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\right)\left(\langle\alpha| + \langle-\alpha|\right) \otimes \prod_k |\hat{o}_k\rangle\langle\hat{o}_k| \tag{2.10}$$

com

$$N(\alpha) = \left(2 + 2e^{-2|\alpha|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

que evolui sob a hamiltoniana $\mathbf{H}_{RWA}$ equação 1.24. Note que no estado inicial considerado o banho encontra-se a temperatura nula $\overline{n_k} \longrightarrow 0$. O símbolo $|\hat{o}_k\rangle$ indica que o k-ésimo oscilador encontra-se no estado fundamental. Obtemos até segunda ordem conforme equação 2.6

$$E_{S_{(RWA)}}(t) = E^{(0)}_{S_{(RWA)}}(t) - N^2(\alpha)\hbar\omega_0|\alpha|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\sum_k \gamma^2{}_k \frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}$$

para a energia (dissipação). Note que o sistema de interesse vai perder energia para o banho, neste caso. Por outro lado, da equação 2.8

$$\delta_{S_{(RWA)}}(t) = 2N^2(\alpha)|\alpha|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\sum_k \gamma^2{}_k \frac{\sin^2\frac{\delta_k}{2}t}{\left(\frac{\delta_k}{2}\right)^2}.$$

Para definir tempos característicos de decoerência e dissipação fazemos o seguinte: supomos um espectro suave e contínuo para o reservatório e uma dependência suave de γ_k com k. Nestas condições, as somas que aparecem nas expressões acima podem ser convertidas em integrais. Usando uma densidade de estados[3] $D(\omega)$ e a condição 2.3, escrevemos

$$E_{S_{(RWA)}}(t) = E^{(0)}_{S_{(RWA)}}(t) - N^2(\alpha)\hbar\omega_0|\alpha|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\gamma^2(\omega_0)D(\omega_0)t$$
$$\delta_{S_{(RWA)}}(t) = 2N^2(\alpha)|\alpha|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\gamma^2(\omega_0)D(\omega_0)t$$

o que nos permite definir as escalas de tempo da seguinte forma

$$-\frac{E^{(0)}_{S_{(RWA)}}(t) - E_{S_{(RWA)}}(t)}{E^{(0)puro}_{S_{(RWA)}}} = \frac{t}{\tau_{diss}} \tag{2.11}$$

onde

$$E^{(0)puro}_{S_{(RWA)}} = \langle\alpha|\hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|\alpha\rangle = \hbar\omega_0\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right). \tag{2.12}$$

Assim,

$$\tau^{-1}_{diss} = N^2(\alpha)\frac{|\alpha|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\gamma^2(\omega_0)D(\omega_0)}{|\alpha|^2 + \frac{1}{2}}.$$

[3]maiores detalhes na seção 4.1

Analogamente definimos

$$\delta_{S_{(RWA)}}(t) = \frac{t}{\tau_{dec}}$$

com

$$\tau_{dec}^{-1} = 2N^2(\alpha)|\alpha|^2 \left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right) \gamma^2(\omega_0) D(\omega_0).$$

A relação entre esses tempos é

$$\frac{\tau_{diss}}{\tau_{dec}} = 2|\alpha|^2 + 1$$

Esta relação foi obtida na referência [7] de forma qualitativa. Mostramos então que o tempo de decoerência é de fato mais curto que o tempo de dissipação e será tanto menor quanto maior for $|\alpha|^2$, ie, quanto mais macroscópico for o estado de "gato de Schrödinger ". Esta relação espelha matematicamente o entendimento da emergência do mundo clássico: quanto mais "clássico"maior o número médio de fotons dos estados que compõe a superposição coerente, maior $|\alpha|^2$, mais difícil será detectar efeitos quânticos que eles passam a produzir, pois a coerência entre as componentes será perdida rapidamente.

Capítulo 3

Técnicas de Lie para Superoperadores

No presente capítulo mostramos como a álgebra de Lie para superoperadores pode ser utilizada para o desacoplamentode uma álgebra que envolve dois graus de liberdade. Particular ênfase é dada ao cálculo do operador densidade. Discutimos os vários métodos possíveis ilustrados como exemplos.

3.1 Álgebra de Lie para Superoperadores

A solução de equação de Liouville-von Neumann, 4.16, quando o Liuvilliano, $\mathcal{L}$, é independente do tempo é dada por

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho_0 \tag{3.1}$$

Em muitos casos de interesse $\mathcal{L}$ é uma combinação linear de um conjunto de superoperadores que queremos expressar como um produto ordenado de exponenciais destes superoperadores.

$$e^{\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \cdots} = e^{\alpha'_1 \mathbf{A}_1} e^{\alpha'_2 \mathbf{A}_2} \cdots$$

onde o conjunto dos elementos $\{\mathbf{A}_i\}$ formam uma algebra de Lie [28] e $\{\alpha_i\}$ são números complexos.
Os superoperadores atuam no espaço formado pelos operadores lineares que atuam no espaço unitário $\mathcal{E}$. O espaço de atuação dos superoperadores é chamado *espaço de Liouville* $\mathcal{L}$.

Uma algebra de Lie é definida por um conjunto de operadores $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n\}$ fechado sob comutação, ou seja, a operação de comutação entre qualquer par de elementos do conjunto, resulta numa combinação linear de elementos do próprio

conjunto.

$$[\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j}^{(k)} \mathbf{A}_k$$

onde o número de elementos da álgebra, n, define sua dimensionalidade e $c_{i,j}^{(k)}$ são denominadas constantes de estrutura da álgebra que satisfaz a identidade de Jacobi

$$\sum_{l,m} \left(c_{i,j}^{(l)} c_{l,k}^{(m)} + c_{j,k}^{(l)} c_{l,i}^{(m)} + c_{k,i}^{(l)} c_{l,j}^{(m)} \right) = 0$$

e a anti simetria do comutador

$$c_{i,j}^{(k)} = -c_{j,i}^{(k)}$$

Reciprocamente, dado as constantes $c_{i,j}^{(k)}$ que satisfaçam estas igualdades, elas serão as constantes de uma álgebra de Lie.
A principal vantagem do uso das técnicas algébricas de Lie reside na sua generalidade. Pois, uma vez que uma álgebra é gerada por um espaço vetorial, uma base pode ser escolhida para o espaço vetorial de qualquer álgebra.
No caso específico que envolve osciladores harmônicos surge o aparecimento de superoperadores bosônicos que para um hamiltoniano de interação linear nas variáves $\hat{x}$ e $\hat{p}$ dos osciladores, estes superoperadores bosônicos formam uma álgebra fechada, o que permite aplicar as técnicas da algebra de Lie.
Os superoperadores bosônicos representam a ação dos superoperadores, de criação e aniquilação do oscilador harmônico, $\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger$ e $\hat{\mathbf{a}}_1$ respectivamente, sobre um operador $\mathbf{A}$ qualquer,

$$(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot)\, \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_1 \mathbf{A} \quad \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \cdot\right) \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \mathbf{A} \quad (\cdot \hat{\mathbf{a}}_1)\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{a}}_1 \quad \left(\cdot \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\right) \mathbf{A} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \tag{3.2}$$

que obedecem as relações de comutação

$$\left[(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot), (\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \cdot)\right] = (1 \cdot) = 1, \qquad \left[(\cdot \hat{\mathbf{a}}_1), (\cdot \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger)\right] = -(\cdot 1) = -1 \tag{3.3}$$

sendo nula as demais combinações de comutação.

O produto bilinear dos superoperadores bosônicos é dado por:

$$\left.\begin{array}{ll}
(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot^2) = (\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot)^2 = (\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot)(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot) & (\cdot \hat{\mathbf{a}}_1{}^2) = (\cdot \hat{\mathbf{a}}_1)^2 = (\cdot \hat{\mathbf{a}}_1)(\cdot \hat{\mathbf{a}}_1) \\
\left(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\right) = (\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot)\left(\cdot \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\right) = \left(\cdot \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\right)(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot) & \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot\right) = \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \cdot\right)(\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot) \\
\left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot\right)^2 = \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \cdot\right)^2 (\hat{\mathbf{a}}_2 \cdot)^2 \Leftrightarrow \left[\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger, \hat{\mathbf{a}}_2\right] = 0 & \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot\right)^2 = \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot\right)\left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot\right)
\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

idem para a troca de $\hat{\mathbf{a}}_1$ com $\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger$ ou $\hat{\mathbf{a}}_2$ com $\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger$

3.1.1 Transformação de Similaridade e Fórmula de Hausdorff

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ operadores pertencentes a álgebra de Lie, e x um número complexo.

Seja $f(x) = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}}$ sujeito à condição $f(x=0) = \mathbf{B}$,

então, $f(x)$ satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d}{dx}f(x) = \mathbf{A}e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}} + e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}}(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}f(x) - f(x)\mathbf{A} = [\mathbf{A}, f(x)]$$

cuja solução será:

$$f(x) = \mathbf{B} + \int_0^x dx' \, [\mathbf{A}, f(x')]$$

Substituindo $f(x') = \mathbf{B} + \int_0^{x'} dx'' \, [\mathbf{A}, f(x'')]$ e prosseguindo iterativamente, obtemos:

$$f(x) = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}} = \mathbf{B} + x\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{x^2}{2!}\,[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \ldots + \frac{x^n}{n!}\overbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \ldots [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \ldots]]}^{\text{"n" comutadores}}$$

Podemos ainda escrever a equação diferencial para $f(x)$ na forma:

$$\frac{d}{dx}f(x) = [\mathbf{A}, \cdot]\, f(x)$$

cuja solução será:

$$f(x) = e^{x[\mathbf{A}, \cdot]} f(x=0) = e^{x[\mathbf{A}, \cdot]}\mathbf{B}$$

obtendo assim a identidade:

$$e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}} = e^{x[\mathbf{A}, \cdot]}\mathbf{B}$$

Resumidamente, uma transformação de similaridade de Hausdorff [24, 36] é definida por:

$$\left.\begin{aligned} e^{x\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-x\mathbf{A}} &= \mathbf{B} + x\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \tfrac{x^2}{2!}\,[\mathbf{A}\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \ldots \tfrac{x^n}{n!}\overbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \ldots [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \ldots]]}^{\text{"n" comutadores}} \\ &= \textstyle\sum_{n=o}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!}[\mathbf{A}, \cdot]^n\mathbf{B} \\ &= e^{x[\mathbf{A}, \cdot]}\mathbf{B} \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

onde, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$ e o superoperador $[\mathbf{A}, \cdot]^n$ indica:

$$[\mathbf{A}, \cdot]^0 \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

$$[\mathbf{A}, \cdot]\mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

$$[\mathbf{A}, \cdot]^2 \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \cdot]\left([\mathbf{A}, \cdot]\mathbf{B}\right) = [\mathbf{A}, \cdot]\left([\mathbf{A}, \mathbf{B}]\right) = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]$$

$$[\mathbf{A}, \cdot]^n \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \cdot]^{n-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

Através da definição da equação 3.5 pode-se mostrar que se expandirmos em série de Taylor uma função, $\mathbb{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$, dos elementos da álgebra de Lie, iremos obter:

$$\begin{aligned} e^{[\mathbf{A}_i, \cdot]}\mathbb{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n) &= e^{\mathbf{A}_i}\mathbb{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)e^{-\mathbf{A}_i} \\ &= \mathbb{G}\left(e^{[\mathbf{A}_i, \cdot]}\mathbf{A}_1, e^{[\mathbf{A}_i, \cdot]}\mathbf{A}_2, ...e^{[\mathbf{A}_i, \cdot]}\mathbf{A}_n\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2 Fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff e de Zassenhaus

A fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (fórmula BCH) estabelece que para quaisquer operador $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$ existe um operador $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$ tal que:

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{C}} \tag{3.7}$$

onde [23]

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + ... + \mathbf{Z}_n + ...$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{B} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{1}{12}\{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{B}]\} \end{aligned}$$

A expressão dual, conhecida como fórmula de Zassenhaus [34, 23], é dada por:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}_2}...e^{\mathbf{C}_n}... \tag{3.8}$$

onde, $\mathbf{C}_n$ constitui uma soma de produtos de comutadores de n-ésimo grau de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Suzuki, [27], estudou a convergência de 3.8 e deu uma forma sistemática para obtenção dos operadores C_n, cujos termos de menor ordem são:

$$C_2 = -\frac{1}{2}[A, B]$$

$$C_3 = \frac{1}{3}[B, [A, B]] + \frac{1}{6}[A, [A, B]]$$

3.1.3 Exemplo - O operador Deslocamento unitário de Glauber

Seja: $A = \alpha\hat{a}_1^\dagger$ e $B = -\alpha^*\hat{a}_1$.
Com isto, usando a fórmula BCH 3.7, onde

$$\begin{aligned}
Z_1 &= B = -\alpha^*\hat{a}_1 \\
Z_2 &= \frac{1}{2}[A, B] = \frac{1}{2}\left[\alpha\hat{a}_1^\dagger, -\alpha^*\hat{a}_1\right] = \frac{1}{2}|\alpha|^2 \\
Z_3 &= 0, \quad \text{pois,} \quad [A, [A, B]] = \left[\alpha\hat{a}_1, |\alpha|^2\right] = 0 \\
C &= A + Z_1 + Z_2 + ... + Z_n + ... = \alpha\hat{a}_1^\dagger - \alpha^*\hat{a}_1 + \frac{1}{2}|\alpha|^2,
\end{aligned}$$

podemos obter o operador unitário de deslocamento de Glauber

$$D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger - \alpha^*\hat{a}_1} = e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}_1} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \tag{3.9}$$

3.2 Desacoplamento e ordenamento de operadores

Existem diversas técnicas para desacoplar uma exponencial de elementos de uma álgebra de Lie em produtos de exponenciais destes elementos.
As técnicas que iremos ressaltar são:

3.2.1 Técnica matricial

A técnica matricial, introduzida por Baker e Hausdorff e redescobertas por Gilmore [28, 29], utiliza a representação matricial de menor dimensionalidade dos elementos de uma álgebra de Lie, expressando as exponenciais destes elementos por meio de uma série de potências de matrizes.

3.2.1.1 Exemplo

Uma importante classe de sistemas de interesse em mecânica quântica é a classe de operadores que representam a álgebra SU(2) de momento angular. As relações que definem essa álgebra são:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm; \quad [J_+, J_-] = 2J_z$$

Uma representação bi-dimensional dessa álgebra é dada pelas seguintes matrizes

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever o exponencial de uma combinação linear de operadores em forma matricial

$$e^{\omega_+ J_+ + \omega_z J_z + \omega_- J_-} = \begin{pmatrix} \cosh k + \frac{\omega_z}{2k} \sinh k & \frac{\omega_+}{k} \sinh k \\ \frac{\omega_-}{k} \sinh k & \cosh k - \frac{\omega_z}{2k} \sinh k \end{pmatrix},$$

com $k = \sqrt{\frac{1}{4}\omega^2{}_z + \omega_+\omega_-}$. Por outro lado temos

$$e^{\Gamma_+ J_+} e^{\Gamma_z J_z} e^{\Gamma_- J_-} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Gamma_z}{2}} + \Gamma_+\Gamma_- e^{-\frac{\Gamma_z}{2}} & \Gamma_+ e^{-\frac{\Gamma_z}{2}} \\ \Gamma_- e^{-\frac{\Gamma_z}{2}} & e^{-\frac{\Gamma_z}{2}} \end{pmatrix},$$

onde os fatores Γ são dados em termos dos fatores ω e k como segue

$$\Gamma_z = \ln\left(\frac{2k}{2k\cosh k - \omega_z \sinh k}\right), \quad \Gamma_+ = \frac{\omega_+ \sinh k}{k}\Gamma_z, \quad \Gamma_- = \frac{\omega_- \sinh k}{k}\Gamma_z.$$

3.2.2 Técnica de Witschel e Técnica por derivação de parâmetros

A técnica de Witschel [23], basea-se nas transformações de similaridade de Hausdorff, 3.5 e 3.6, que é aplicada sucessivamente permitindo obter um conjunto de equações algébricas cuja solução fornece os coeficientes de desacoplamento.

A definição da derivada de um operador exponencial em relação a um parâmetro foi proposta por Wilcox [33]. Ela objetiva determinar os coeficientes, β_i, que permitem expressar uma exponencial de combinações lineares de operadores $\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + ...\alpha_n\mathbf{A}_n$, em um produto de exponenciais de operadores, em qualquer ordem.

$$e^{\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + ...\alpha_n\mathbf{A}_n} = e^{\beta_1\mathbf{A}_1} e^{\beta_2\mathbf{A}_2} ... e^{\beta_n\mathbf{A}_n}$$

Para tanto, as fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff e de Zassenhaus, são suficientemente gerais, porém a efetiva fatoração das exponenciais dependem da álgebra dos operadores.

A aplicação da técnica por derivação de parâmetros [14] consiste em:

- multiplicar a soma, $\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + ...\alpha_n\mathbf{A}_n$, por um parâmetro, t por exemplo, fazendo com que os coeficientes β_i sejam funções destes parâmetros, ou seja,

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i t} = \prod_{i=1}^{n} e^{\beta_i(t)\mathbf{A}_i}$$

- derivar em relação ao parâmetro, t,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i \left(e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i t}\right) = \dot{\beta}_1(t)\mathbf{A}_1 \prod_{i=1}^{n} e^{\beta_i(t)\mathbf{A}_i} + \dot{\beta}_2(t) e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1} \mathbf{A}_2 \prod_{i=2}^{n} e^{\beta_i(t)\mathbf{A}_i} + \ldots \dot{\beta}_n(t) \prod_{i=1}^{n-1} e^{\beta_i(t)\mathbf{A}_i} \mathbf{A}_n e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_n}$$

- Usar a transformação de semelhança 3.5 (para o segundo termo por exemplo)

$$e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1}\mathbf{A}_2 = e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1}\mathbf{A}_2 e^{-\beta_1(t)\mathbf{A}_1} e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1} = \sum_n \frac{\beta_1^n(t)}{n!} [\mathbf{A}_1, \cdot]^n \mathbf{A}_2 e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1}$$
$$\equiv \mathbf{F}_2(\beta_1(t), \{\mathbf{A}_i\}) e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1} \equiv \mathbf{F}_2 e^{\beta_1(t)\mathbf{A}_1},$$

analogamente para os termos seguintes,

$$\mathbf{F}_3 \equiv \mathbf{F}_3(\beta_1(t), \beta_2(t), \{\mathbf{A}_i\}); \qquad \ldots \qquad \mathbf{F}_n \equiv \mathbf{F}_n(\beta_1(t), \beta_2(t), ..\beta_{n-1}(t), \{\mathbf{A}_i\})$$

- e escrever

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i \left(e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i t}\right) = \left(\dot{\beta}_1(t)\mathbf{A}_1 + \dot{\beta}_2(t)\mathbf{F}_2 + \ldots + \dot{\beta}_n(t)\mathbf{F}_n\right) \odot \left(e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i t}\right)$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}_i = \dot{\beta}_1(t)\mathbf{A}_1 + \dot{\beta}_2(t)\mathbf{F}_2 + \ldots + \dot{\beta}_n(t)\mathbf{F}_n$$

onde, ao compararmos os coeficientes dos operadores $\{\mathbf{A}_i\}$, iremos obter um sistema de equações diferenciais, cuja solução nos fornece os coeficientes β_i, com a condição inicial $\beta_i(t=0) = 0$.
É importante notar que se desacoplarmos numa ordem diferente, iremos obter diferentes equações diferenciais que poderão ser mais fáceis ou mais difíceis de serem resolvidas.

3.2.2.1 Exemplo: O oscilador harmônico forçado dissipativo

Vamos tratar aqui um exemplo muito importante, o de um oscilador harmonico forçado e acoplado a um banho frio. Por simplicidade, vamos adotar também, como condição inicial um estado coerente.

A equação que governa este sistema pode ser escrita da 1.27 onde $\mathbf{H}_S$ e dado por

$$\mathbf{H}_S = \hbar\omega_0 \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\right) + \hbar f\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hbar f^*\hat{\mathbf{a}}.$$

Com isto teremos

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t) \quad \longrightarrow \quad \rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0)$$

onde

$$\mathcal{L} = -i\omega_0\left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}, \cdot\right] - i\left[f\hat{\mathbf{a}}^\dagger + f^*\hat{\mathbf{a}}, \cdot\right] + k\left(2\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right)$$

Através das relações de comutação B.1, verificamos que a álgebra, dada pelo liouvilliano da equação anterior, se fecha. Com isto, podemos ordenar essa exponencial como um produto de seus elementos,

$$e^{\mathcal{L}t} = e^{-iCt - iDt + \mathcal{L}_0 t} = e^{\lambda(t)C}e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0}$$

onde

$$\begin{aligned}
&C = f\left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\right), \quad D = f^*\left(\hat{\mathbf{a}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}\right),\\
&\mathcal{L}_0 = -i\omega_0\left[\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}, \cdot\right] + k\left(2\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right),\\
&\lambda(0) = \mu(0) = v(0) = 0,\\
&[\mathcal{L}_0, C] = -\left(i\omega_0 + k\right)C\\
&[\mathcal{L}_0, D] = \left(i\omega_0 - k\right)D\\
&[C, D] = 0.
\end{aligned}$$

Derivando em relação ao parâmetro t obtemos:

$$\mathcal{L}e^{\mathcal{L}t} = \left(\dot{\lambda}(t)C + \dot{\mu}(t)D\right)e^{\mathcal{L}t} + \dot{v}(t)e^{\lambda(t)C}e^{\mu(t)D}\mathcal{L}_0 e^{v(t)\mathcal{L}_0}.$$

Como

$$e^{\mu(t)D}\mathcal{L}_0 e^{v(t)\mathcal{L}_0} = e^{\mu(t)D}\mathcal{L}_0 e^{-\mu(t)D}e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0},$$

então

$$\mathcal{L}e^{\mathcal{L}t} = \left(\dot{\lambda}(t)C + \dot{\mu}(t)D\right)e^{\mathcal{L}t} + \dot{v}(t)e^{\lambda(t)C}e^{\mu(t)D}\mathcal{L}_0 e^{-\mu(t)D}e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0}.$$

Aplicando o lema 3.5,

$$e^{\mu(t)D}\mathcal{L}_0 e^{-\mu(t)D} = \sum_n \frac{\mu^n}{n!}\left[D, \mathcal{L}_0\right] = \mathcal{L}_0 - \mu\left(i\omega_0 - k\right)D$$

escreveremos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}e^{\mathcal{L}t} &= \left(\dot{\lambda}(t)C + \dot{\mu}(t)D\right)e^{\mathcal{L}t} + e^{\lambda(t)C}\left[\dot{v}(t)\mathcal{L}_0 - \dot{v}(t)\mu\left(i\omega_0 - k\right)D\right]e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0}\\ &= \left[\dot{\lambda}(t)C + \dot{\mu}(t)D - \dot{v}(t)\mu\left(i\omega_0 - k\right)D\right]e^{\mathcal{L}t} + \dot{v}(t)e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0}.\end{aligned}$$

Como

$$e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0} = e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{-\lambda(t)C}e^{\lambda(t)C}e^{\mu(t)D}e^{v(t)\mathcal{L}_0} = e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{-\lambda(t)C}e^{\mathcal{L}t}$$

então

$$\mathcal{L}e^{\mathcal{L}t} = \left[\dot{\lambda}(t)C + \dot{\mu}(t)D - \dot{v}(t)\mu\left(i\omega_0 - k\right)D\right]e^{\mathcal{L}t} + \dot{v}(t)e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{-\lambda(t)C}e^{\mathcal{L}t}.$$

Aplicando o lema 3.5,

$$e^{\lambda(t)C}\mathcal{L}_0 e^{-\lambda(t)C} = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!}\left[C, \cdot\right] = \mathcal{L}_0 + \lambda\left(i\omega_0 + k\right)C$$

escreveremos

$$\mathcal{L}e^{\mathcal{L}t} = \left\{\left[\dot{\lambda}(t) + \dot{v}(t)\lambda\left(i\omega_0 + k\right)\right]C + \left[\dot{\mu}(t) - \dot{v}(t)\mu\left(i\omega_0 - k\right)\right]D + \dot{v}(t)\mathcal{L}_0\right\}e^{\mathcal{L}t}.$$

Com isto

$$\mathcal{L} = \left[\dot{\lambda}(t) + \dot{v}(t)\lambda\left(i\omega_0 + k\right)\right]C + \left[\dot{\mu}(t) - \dot{v}(t)\mu\left(i\omega_0 - k\right)\right]D + \dot{v}(t)\mathcal{L}_0$$

Comparando os coeficientes obtemos

$$v(t) = t, \qquad \lambda(t) = \frac{1 - e^{(i\omega_0 - k)t}}{ik + \omega_0}, \qquad \mu(t) = \frac{1 - e^{-(i\omega_0 + k)t}}{ik - \omega_0} = -\lambda^*(t).$$

Ordenando $\mathcal{L}_0$ na forma

$$e^{\mathcal{L}_0 t} = e^{j(t)J}e^{m(t)M}e^{p(t)P}$$

onde[1]

$$\begin{aligned}&J = \hat{a}\cdot\hat{a}^\dagger, \quad M = \hat{a}^\dagger\hat{a}\cdot, \quad P = \cdot\hat{a}^\dagger\hat{a}\\ &[J, M] = J, \quad [J, P] = J, \quad [P, M] = 0.\end{aligned}$$

[1] ver relações de comutação B.1

Derivando em relação ao parâmetro t e procedendo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, obtemos

$$j(t) = e^{2kt} - 1, \quad m(t) = -i\omega_0 t - kt, \quad p(t) = i\omega_0 t - kt = m^*(t).$$

Assim, a evolução temporal de um oscilador harmonico forçado dissipativo

$$\begin{aligned}\rho(t) &= e^{\mathcal{L}t}\rho(0) \\ &= e^{\lambda(t)C} e^{\mu(t)D} e^{j(t)J} e^{m(t)M} e^{p(t)P} \rho(0),\end{aligned}$$

para um estado inicial coerente $\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, é dada por[2]:

$$\rho(t) = |\alpha e^{(-i\omega_0 - k)} + \frac{f}{ik + \omega_0}\left(1 - e^{(i\omega_0 - k)t}\right)\rangle\langle\alpha e^{(-i\omega_0 - k)} + \frac{f}{ik + \omega_0}\left(1 - e^{(i\omega_0 - k)t}\right)|$$

que é um estado coerente deslocado com amplitude que depende da razão entre a fonte (f) e a freqüência do oscilador (ω_0) com o coeficiente de dissipação k.

[2]ver apêndiceA

Capítulo 4

Sistema aberto para dois osciladores

Tendo considerado em capítulos anteriores possíveis tratamentos para a decoerência e dissipação de dois sistemas quânticos acoplados, vamos mostrar aqui a possibilidade de tratar simultaneamente três subsistemas. Escolhemos por simplicidade dois osciladores harmônicos acoplados entre sí, em contato com um reservatório frio e bombeados por fontes externas. Estendemos a técnica desenvolvida no capítulo 3 para o tratamento de dois osciladores.

4.1 Dedução da equação mestra

Nesta secção, deduziremos a equação Mestra, considerando aproximações adequadas para a dinâmica de dois osciladores acoplados entre sí, forçados externamente e em contato com um reservatório (banho) térmico. O Hamiltoniano total é dado por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}$$

onde:

$$\mathbf{H}_{int} = \hbar \sum_k \left(\alpha_k \hat{\mathbf{c}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \alpha_k^* \hat{\mathbf{c}}_k \hat{\mathbf{a}}^\dagger \right) + \hbar \sum_k \left(\beta_k \hat{\mathbf{c}}_k^\dagger \hat{\mathbf{b}} + \beta_k^* \hat{\mathbf{c}}_k \hat{\mathbf{b}}^\dagger \right)$$

é o Hamiltoniano de interação entre os osciladores representados pelos operadores $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$, $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$, $\hat{\mathbf{b}}$, o reservatório representado pelos operadores $\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger$, $\hat{\mathbf{c}}_k$ e α_k, β_k são constantes de acoplamento. O hamiltoniano livre $\mathbf{H}_0$, é escrito como:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{S'} + \mathbf{H}_R, \qquad \mathbf{H}_{S'} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_f$$

onde

$$\mathbf{H}_R = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{c}}_k^\dagger \hat{\mathbf{c}}_k + \frac{1}{2} \right)$$

é o Hamiltoniano do reservatório,

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b = \hbar\omega_a \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_b \left(\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}} + \frac{1}{2}\right)$$

é o Hamiltoniano dos osciladores,

$$\mathbf{H}_g = \hbar g \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}^\dagger\right)$$

é o Hamiltoniano de acoplamento entre os osciladores,

$$\mathbf{H}_f = \hbar f_a\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hbar f_a^*\hat{\mathbf{a}} + \hbar f_b\hat{\mathbf{b}}^\dagger + \hbar f_b^*\hat{\mathbf{b}}$$

é o Hamiltoniano de acoplamento dos osciladores com suas fontes externas. Note que os acoplamentos, tanto dos osciladores entre si quanto de cada um deles com o reservatório é do tipo RWA. Além disso, os osciladores podem acoplar-se ao reservatório com constantes de acoplamento α_k e β_k diferentes e o bombeamento externo de energia, matematicamente expresso pelos termos de fonte, é independente para cada oscilador.

Tomando o traço sobre o reservatório da equação 1.20, a equação da densidade reduzida para o sistema constituído pelos dois osciladores "ab" será:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = \frac{-i}{\hbar} tr_R \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \widetilde{\rho}(t)\right].$$

Note que esta não é uma equação diferencial fechada para $\widetilde{\rho}_S(t)$, pois nela aparece $\widetilde{\rho}(t)$. A idéia é obter uma equação fechada em função de $\widetilde{\rho}_S(t)$

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = \Lambda\widetilde{\rho}_S(t),$$

para isso, iremos determinar Λ em função de $\mathbf{H}_{int}$ através da evolução do operador densidade na forma integral, equação 1.21, truncando na ordem dominante. Partiremos, conforme já mencionamos, da equação 1.21, interando-a uma vez,

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = \frac{-i}{\hbar} tr_R \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \widetilde{\rho}(0)\right] + \frac{-1}{\hbar^2} tr_R \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \int_0^t dt' \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), \widetilde{\rho}(t')\right]\right], \quad (4.1)$$

onde,

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \left[\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), \widetilde{\rho}(t')\right]\right] &= \widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t')\widetilde{\rho}(t') - \widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)\widetilde{\rho}(t')\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t') \\ &+ \widetilde{\rho}(t')\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t')\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t) - \widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t')\widetilde{\rho}(t')\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t). \quad (4.2)\end{aligned}$$

Como, da equação 1.9,

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t) = \mathbf{U}_0^\dagger(t)\mathbf{H}_{int}\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{U}_{S'}^\dagger(t)e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\mathbf{H}_{int}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\mathbf{U}_{S'}(t)$$

onde $\mathbf{U}_{S'}(t)$ é o propagador relativo à hamiltoniana dependente do tempo $\mathbf{H}_{S'}$, então

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t) = \hbar \sum_k \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \alpha_k \hat{\mathbf{c}}^\dagger_k \hat{\mathbf{a}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \mathbf{U}_{S'}(t) + \hbar \sum_k \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \alpha^*_k \hat{\mathbf{c}}_k \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \mathbf{U}_{S'}(t)$$
$$+\hbar \sum_k \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \beta_k \hat{\mathbf{c}}^\dagger_k \hat{\mathbf{b}} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \mathbf{U}_{S'}(t) + \hbar \sum_k \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \beta^*_k \hat{\mathbf{c}}_k \hat{\mathbf{b}}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t} \mathbf{U}_{S'}(t).$$

Com o objetivo de simplificar a notação, definiremos

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma^\dagger_1(t) \equiv \hbar \sum_k e^{i\omega_k t} \alpha_k \hat{\mathbf{c}}^\dagger_k, & \Gamma_2(t) \equiv \hbar \sum_k e^{-i\omega_k t} \beta^*_k \hat{\mathbf{c}}_k, \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger(t) \equiv \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) \hat{\mathbf{a}}^\dagger \mathbf{U}_{S'}(t), & \hat{\mathbf{b}}(t) \equiv \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) \hat{\mathbf{b}} \mathbf{U}_{S'}(t), \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

que podemos substituir em $\mathbf{H}_{int}$ obtendo:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t) = \Gamma^\dagger_1(t)\hat{\mathbf{a}}(t) + \Gamma_1(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t) + \Gamma^\dagger_2(t)\hat{\mathbf{b}}(t) + \Gamma_2(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t).$$

Substituindo no primeiro termo do duplo comutador da equação 4.2, teremos:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t')\widetilde{\rho}(t') = \Big(& \Gamma_1(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t))\Gamma^\dagger_1(t')\hat{\mathbf{a}}(t') + \Gamma_1(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t))\Gamma^\dagger_2(t')\hat{\mathbf{b}}(t') \\ + & \Gamma_2(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t)\Gamma^\dagger_2(t')\hat{\mathbf{b}}(t') + \Gamma_2(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t)\Gamma^\dagger_1(t')\hat{\mathbf{a}}(t') \\ + & \Gamma^\dagger_1(t)\hat{\mathbf{a}}(t)\Gamma_1(t')\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t') + \Gamma^\dagger_1(t)\hat{\mathbf{a}}(t)\Gamma_2(t')\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t') \\ + & \Gamma^\dagger_2(t)\hat{\mathbf{b}}(t)\Gamma_2(t')\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t') + \Gamma^\dagger_2(t)\hat{\mathbf{b}}(t)\Gamma_1(t')\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t')\Big)\widetilde{\rho}(t') \\ & + \Big(\Gamma^\dagger_1(t)\hat{\mathbf{a}}(t)\Gamma^\dagger_1(t')\hat{\mathbf{a}}(t') + \Gamma^\dagger_1(t)\hat{\mathbf{a}}(t)\Gamma^\dagger_2(t')\hat{\mathbf{b}}(t') \\ + & \Gamma^\dagger_2(t)\hat{\mathbf{b}}(t)\Gamma^\dagger_2(t')\hat{\mathbf{b}}(t') + \Gamma^\dagger_2(t)\hat{\mathbf{b}}(t)\Gamma^\dagger_1(t')\hat{\mathbf{a}}(t') \\ + & \Gamma_1(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t))\Gamma_1(t')\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t') + \Gamma_1(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t))\Gamma_2(t')\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t') \\ + & \Gamma_2(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t)\Gamma_2(t')\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t') + \Gamma_2(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger(t)\Gamma_1(t')\hat{\mathbf{a}}^\dagger(t')\Big)\widetilde{\rho}(t') \end{aligned}$$

Para compactar a notação, definiremos $\hat{\mathbf{a}}(t) \equiv \hat{\mathbf{o}}_1(t)$, $\hat{\mathbf{b}}(t) \equiv \hat{\mathbf{o}}_2(t)$ e escreveremos:

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t)\widetilde{\mathbf{H}}_{int}(t')\widetilde{\rho}(t') = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\Gamma_i(t)\Gamma^\dagger_j(t')\hat{\mathbf{o}}^\dagger_i(t)\hat{\mathbf{o}}_j(t') + \Gamma^\dagger_i(t)\Gamma_j(t')\hat{\mathbf{o}}_i(t)\hat{\mathbf{o}}^\dagger_j(t')\Big)\widetilde{\rho}(t')$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\Gamma^\dagger_i(t)\Gamma^\dagger_j(t')\hat{\mathbf{o}}_i(t)\hat{\mathbf{o}}_j(t') + \Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\hat{\mathbf{o}}^\dagger_i(t)\hat{\mathbf{o}}^\dagger_j(t')\Big)\widetilde{\rho}(t')$$

Podemos agora, proceder de maneira análoga para os outros termos e reescrevera

equação 4.1, na forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} tr_R \sum_{i=1}^{2} \left[\Gamma_i^\dagger(t)\hat{o}_i(t) + \Gamma_i(t)\hat{o}_i^\dagger(t), \widetilde{\rho}(0)\right] \\
& -\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i(t)\Gamma_j^\dagger(t')\hat{o}_i^\dagger(t)\hat{o}_j(t') + \Gamma_i^\dagger(t)\Gamma_j(t')\hat{o}_i(t)\hat{o}_j^\dagger(t')\right)\widetilde{\rho}(t') \\
& -\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i^\dagger(t)\Gamma_j^\dagger(t')\hat{o}_i(t)\hat{o}_j(t') + \Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\hat{o}_i^\dagger(t)\hat{o}_j^\dagger(t')\right)\widetilde{\rho}(t') \\
& +\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i^\dagger(t)\hat{o}_i(t)\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j(t')\hat{o}_j^\dagger(t') + \Gamma_i(t)\hat{o}_i^\dagger(t)\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j^\dagger(t')\hat{o}_j(t')\right) \\
& +\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i^\dagger(t)\hat{o}_i(t)\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j^\dagger(t')\hat{o}_j(t') + \Gamma_i(t)\hat{o}_i^\dagger(t)\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j(t')\hat{o}_j^\dagger(t')\right) \\
& -\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \widetilde{\rho}(t')\left(\Gamma_i^\dagger(t')\Gamma_j(t)\hat{o}_i(t')\hat{o}_j^\dagger(t) + \Gamma_i(t')\Gamma_j^\dagger(t)\hat{o}_i^\dagger(t')\hat{o}_j(t)\right) \\
& -\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \widetilde{\rho}(t')\left(\Gamma_i^\dagger(t')\Gamma_j^\dagger(t)\hat{o}_i(t')\hat{o}_j(t) + \Gamma_i(t')\Gamma_j(t)\hat{o}_i^\dagger(t')\hat{o}_j^\dagger(t)\right) \\
& +\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i^\dagger(t')\hat{o}_i(t')\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j(t)\hat{o}_j^\dagger(t) + \Gamma_i(t')\hat{o}_i^\dagger(t')\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j^\dagger(t)\hat{o}_j(t)\right) \\
& +\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_i^\dagger(t')\hat{o}_i(t')\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j^\dagger(t)\hat{o}_j(t) + \Gamma_i(t')\hat{o}_i^\dagger(t')\widetilde{\rho}(t')\Gamma_j(t)\hat{o}_j^\dagger(t)\right)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Esta equação ainda é exata, não fechada e sem solução. Para torná-la analiticamente tratável faremos as seguintes hipóteses dinâmicas:

1. Hipótese para $\widetilde{\rho}(t')$ descorrelacionado e um banho estático.
   $\widetilde{\rho}(t') = \widetilde{\rho}_S(t') \otimes \widetilde{\rho}_R(0)$, sendo $\widetilde{\rho}_R(0)$ um banho térmico dado por:

$$
\widetilde{\rho}_R(0) = \rho_R(0) = \prod_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_k n}\right)^{-1} e^{-\beta\hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k} = \prod_k \left(\frac{1}{1+\overline{n}_k}\right)\left(\frac{\overline{n}_k}{1+\overline{n}_k}\right)^{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k},
$$

   onde $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B, é a constante de Boltzmann, T, temperatura, e $\overline{n}_k$ é

o número médio de fótons no reservatório do k-ésimo modo, dado pela distribuição de Planck, ou seja,

$$\overline{n}_k = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} \quad \rightarrow \quad 1 + \overline{n}_k = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_k n}.$$

Conseqüentemente, usando uma base de estado de Fock, podemos concluir quanto aos traços sobre as variáveis do reservatório da equação 4.4

$$\left.\begin{array}{c} Tr\rho_R(0)\hat{c}_k^{\dagger m}\,\hat{c}_{k'}^{n} = \langle \hat{c}_k^{\dagger m}\,\hat{c}_{k'}^{n}\rangle = \langle \hat{c}_k^{\dagger m}\,\hat{c}_k^{m}\rangle\,\delta_{k\,k'}\;\;\delta_{m\,n} \\ \downarrow \\ \langle \Gamma_k(t)\,\Gamma_k(t')\rangle = \langle \Gamma_k^{\dagger}(t'')\,\Gamma_k^{\dagger}(t)\rangle = \langle \Gamma_k(t)\rangle = \langle \Gamma_k^{\dagger}(t')\rangle = 0. \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

Fisicamente esta hipótese assume que o banho não é afetado pela presença do subsistema S, supostamente muito menor que o reservatório, implicando implicitamente que a interação entre ambos é fraca. A própria validade dessa aproximação pode ser um critério quanto à força do acoplamento entre S e o banho. Essa aproximação é não perturvativa no sentido em que todas as ordens na interação serão consideradas para a evolução de $\tilde{\rho}_S$, porém restringe a classe de densidades reduzidas àquelas que satisfazem ao ansatz proposto como hipótese.

2. Hipótese de ruído branco onde o reservatório é considerado infinito, fazendo com que o intervalo entre dois modos adjacentes atinja o limite contínuo. Assim, pode-se definir uma densidade de modos, $D(\omega)$, do reservatório onde $D(\omega)d\omega$ fornece o número de modos no intervalo compreendido entre ω e $\omega + d\omega$ e fazer as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \sum_k &\rightarrow \int_0^{\infty} D(\omega)d\omega \\ \overline{n}_k &\rightarrow \overline{n}(\omega) \\ \alpha_k &\rightarrow \alpha(\omega) \\ \beta_k &\rightarrow \beta(\omega) \end{aligned}$$

Na hipótese de ruído branco, é suposto que $D(\omega)\,|\alpha(\omega)|^2$, $D(\omega)\alpha(\omega)\beta^*(\omega)$, $D(\omega)\,|\alpha(\omega)|^2\,\overline{n}(\omega)$,.. são funções suficientemente suaves de ω. Com isto, a transformada de Fourier dessas funções terá a forma de uma função que decai de maneira tão rápida quanto mais suave forem estas funções, de tal modo que no limite em que as funções são completamente planas, o tempo de decaimento de sua transformada tende a zero.

Assim podemos modelar o banho na forma:

$$D(\omega)\,|\alpha(\omega)|^2 \approx \frac{k_a}{\pi}, \qquad D(\omega)\,|\beta(\omega)|^2 \approx \frac{k_b}{\pi},$$

$$D(\omega)\alpha(\omega)\beta^*(\omega) \approx \frac{k_c}{\pi} = \frac{\sqrt{k_a k_b}}{\pi}, \qquad \overline{n}(\omega) \approx \overline{n}. \tag{4.6}$$

Esta hipótese é usual e, como veremos, será responsável pelo caráter markoviano da equação resultante.

A primeira hipótese, reduz a equação, 4.4 a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = &-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\langle\Gamma_i(t)\Gamma_j^\dagger(t')\rangle\hat{\mathrm{o}}_i^\dagger(t)\hat{\mathrm{o}}_j(t') + \langle\Gamma_i^\dagger(t)\Gamma_j(t')\rangle\hat{\mathrm{o}}_i(t)\hat{\mathrm{o}}_j^\dagger(t')\right)\widetilde{\rho}_S(t') \\
&+\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\langle\Gamma_j(t')\Gamma_i^\dagger(t)\rangle\hat{\mathrm{o}}_i(t)\widetilde{\rho}_S(t')\hat{\mathrm{o}}_j^\dagger(t') + \langle\Gamma_j^\dagger(t')\Gamma_i(t)\rangle\hat{\mathrm{o}}_i^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t')\hat{\mathrm{o}}_j(t')\right) \\
&-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \widetilde{\rho}_S(t')\left(\langle\Gamma_i^\dagger(t')\Gamma_j(t)\rangle\hat{\mathrm{o}}_i(t')\hat{\mathrm{o}}_j^\dagger(t) + \langle\Gamma_i(t')\Gamma_j^\dagger(t)\rangle\hat{\mathrm{o}}_i^\dagger(t')\hat{\mathrm{o}}_j(t)\right) \\
&+\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^{2} \left(\langle\Gamma_j(t)\Gamma_i^\dagger(t')\rangle\hat{\mathrm{o}}_i(t')\widetilde{\rho}_S(t')\hat{\mathrm{o}}_j^\dagger(t) + \langle\Gamma_j^\dagger(t)\Gamma_i(t')\rangle\hat{\mathrm{o}}_i^\dagger(t')\widetilde{\rho}_S(t')\hat{\mathrm{o}}_j(t)\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Resolvendo o primeiro termo da equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle &= \sum_{k,k'}\langle\hat{\mathrm{c}}_k\hat{\mathrm{c}}_{k'}^\dagger\rangle\alpha_k^*\alpha_{k'}e^{-i(\omega_k t-\omega_{k'}t')} = \sum_k (\overline{n}_k+1)\,|\alpha_k|^2 e^{-i\omega_k(t-t')}, \\
\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle &= \sum_{k,k'}\langle\hat{\mathrm{c}}_k\hat{\mathrm{c}}_{k'}^\dagger\rangle\alpha_k^*\beta_{k'}e^{-i(\omega_k t-\omega_{k'}t')} = \sum_k (\overline{n}_k+1)\,\alpha_k^*\beta_{k'}e^{-i\omega_k(t-t')}, \\
\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle &= \sum_{k,k'}\langle\hat{\mathrm{c}}_k\hat{\mathrm{c}}_{k'}^\dagger\rangle\beta_k^*\alpha_{k'}e^{-i(\omega_k t-\omega_{k'}t')} = \sum_k (\overline{n}_k+1)\,\beta_k^*\alpha_{k'}e^{-i\omega_k(t-t')}, \\
\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle &= \sum_{k,k'}\langle\hat{\mathrm{c}}_k\hat{\mathrm{c}}_{k'}^\dagger\rangle\beta_k^*\beta_{k'}e^{-i(\omega_k t-\omega_{k'}t')} = \sum_k (\overline{n}_k+1)\,|\beta_k|^2 e^{-i\omega_k(t-t')}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Da segunda hipótese, equação 4.6, teremos:

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle = \int_0^\infty d(\omega)D(\omega)\,(\overline{n}+1)\,|\alpha(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle = (\overline{n}+1)\,\frac{k_a}{\pi}\int_0^\infty d(\omega)e^{-i\omega(t-t')},$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle = \int_0^\infty d(\omega)D(\omega)\,(\overline{n}+1)\,\alpha^*\beta e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_1(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle\,(\overline{n}+1)\,\frac{k_c}{\pi}\int_0^\infty d(\omega)e^{-i\omega(t-t')},$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle = \int_0^\infty d(\omega)D(\omega)\,(\overline{n}+1)\,\alpha\beta^* e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle = (\overline{n}+1)\,\frac{k_c}{\pi}\int_0^\infty d(\omega)e^{-i\omega(t-t')},$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle = \int_0^\infty d(\omega)D(\omega)\,(\overline{n}+1)\,|\beta(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\hbar^2}\langle\Gamma_2(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle = (\overline{n}+1)\,\frac{k_b}{\pi}\int_0^\infty d(\omega)e^{-i\omega(t-t')}.$$

Uma vez que

$$\int_0^\infty d\omega e^{\pm i\omega t} = \pi\delta(t) \pm iP\left(\frac{1}{t}\right),$$

onde $P\left(\frac{1}{t}\right)$ denota a parte principal de $\left(\frac{1}{t}\right)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\langle\Gamma_1(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle &= \langle\Gamma_1(t')\Gamma_1^\dagger(t)\rangle = \hbar^2\,(\overline{n}+1)\,k_a\delta(t-t'),\\
\langle\Gamma_1(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle &= \langle\Gamma_1(t')\Gamma_2^\dagger(t)\rangle = \hbar^2\,(\overline{n}+1)\,k_c\delta(t-t'),\\
\langle\Gamma_2(t)\Gamma_1^\dagger(t')\rangle &= \langle\Gamma_2(t')\Gamma_1^\dagger(t)\rangle = \hbar^2\,(\overline{n}+1)\,k_c\delta(t-t'),\\
\langle\Gamma_2(t)\Gamma_2^\dagger(t')\rangle &= \langle\Gamma_2(t')\Gamma_2^\dagger(t)\rangle = \hbar^2\,(\overline{n}+1)\,k_b\delta(t-t').
\end{aligned}$$

Estas expressões foram escritas sem as contribuições da parte principal $P\left(\frac{1}{t}\right)$, cujo efeito sobre a dinâmica de $\widetilde{\rho}_S$ não é tratado aqui. Na literatura, ele é geralmente assumido como pequeno.

Resolvendo de maneira análoga para os outros termos da equação 4.7 e retornando à notação original, teremos:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) = -\overline{n}\left(k_a\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) + k_b\hat{b}(t)\hat{b}^\dagger(t)\right)\widetilde{\rho}_S(t)$$

$$-\overline{n}k_c\left(\hat{a}(t)\hat{b}^\dagger(t) + \hat{b}(t)\hat{a}^\dagger(t)\right)\widetilde{\rho}_S(t)$$

$$
\begin{aligned}
&-(\overline{n}+1)\left(k_a\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)k_b\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t)\right)\widetilde{\rho}_S(t)\\
&-(\overline{n}+1)\,k_c\left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{b}(t)+\hat{b}^\dagger(t)\hat{a}(t)\right)\widetilde{\rho}_S(t)\\
&+\overline{n}\left(k_a\hat{a}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}(t)+k_b\hat{b}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}(t)\right)\\
&+\overline{n}k_c\left(\hat{a}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}(t)+\hat{b}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}(t)\right)\\
&+(\overline{n}+1)\left(k_a\hat{a}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger(t)+k_b\hat{b}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}^\dagger(t)\right)\\
&+(\overline{n}+1)\,k_c\left(\hat{a}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}^\dagger(t)+\hat{b}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger(t)\right)\\
&-(\overline{n})\,\widetilde{\rho}_S(t)\left(k_a\hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t)+k_b\hat{b}(t)\hat{b}^\dagger(t)\right)\\
&-(\overline{n})\,\widetilde{\rho}_S(t)k_c\left(\hat{a}(t)\hat{b}^\dagger(t)+\hat{b}(t)\hat{a}^\dagger(t)\right)\\
&-(\overline{n}+1)\,\widetilde{\rho}_S(t)\left(k_a\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)+k_b\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t)\right)\\
&-(\overline{n}+1)\,\widetilde{\rho}_S(t)k_c\left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{b}(t)+\hat{b}^\dagger(t)\hat{a}(t)\right)\\
&+\overline{n}\left(k_a\hat{a}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}(t)+k_b\hat{b}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}(t)\right)\\
&+\overline{n}k_c\left(\hat{a}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}(t)+\hat{b}^\dagger(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}(t)\right)\\
&+(\overline{n}+1)\left(k_a\hat{a}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger(t)+k_b\hat{b}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}^\dagger(t)\right)\\
&+(\overline{n}+1)\,k_c\left(\hat{a}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{b}^\dagger(t)+\hat{b}(t)\widetilde{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger(t)\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Por outro lado:

1. Explicitando a representação de interação para $\widetilde{\rho}(t)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{U}^\dagger_{S'}(t)e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\rho_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\mathbf{U}_{S'}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{U}^\dagger_{S'}(t)\rho_S(t)\mathbf{U}_{S'}(t)\right)\\
&= \frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_{S'},\widetilde{\rho}_S(t)\right] + \mathbf{U}^\dagger_{S'}(t)\left(\frac{d}{dt}\rho_S(t)\right)\mathbf{U}_{S'}(t),
\end{aligned}
$$

chegaremos a

$$
\mathbf{U}_{S'}(t)\left(\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_S(t)\right)\mathbf{U}^\dagger_{S'}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_{S'},\rho_S(t)\right] + \frac{d}{dt}\rho_S(t).
$$

2. Se tomarmos o primeiro termo da equação 4.9 como exemplo e substituirmos a relação 4.3,

$$\hat{a}(t)\hat{a}^{\dagger}(t)\tilde{\rho}_S(t) =$$

$$= \mathbf{U}^{\dagger}_{S'}(t)\hat{a}\,\mathbf{U}_{S'}(t)\mathbf{U}^{\dagger}_{S'}(t)\hat{a}^{\dagger}\mathbf{U}_{S'}(t)\mathbf{U}^{\dagger}_{S'}(t)e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\rho_S(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}_R t}\mathbf{U}_{S'}(t)$$

$$= \mathbf{U}^{\dagger}_{S'}(t)\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t)\mathbf{U}_{S'}(t),$$

concluiremos que

$$\mathbf{U}_{S'}(t)\hat{a}(t)\hat{a}^{\dagger}(t)\tilde{\rho}_S(t)\mathbf{U}^{\dagger}_{S'}(t) = \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t). \tag{4.10}$$

Procedendo de maneira análoga para os outros termos da equação 4.9, concluiremos a idéia inicial desta seção e podemos escrever a equação mestra markoviana para o sistema aberto, S,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_S(t) = &-\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_{S'}, \rho_S(t)\right] \\
&+k_a\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{a}\rho_S(t)\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right) \\
&+k_b\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{b}\rho_S(t)\hat{b}^{\dagger} - \hat{b}^{\dagger}\hat{b}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right) \\
&+k_c\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{a}\rho_S(t)\hat{b}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{b}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{b}\right) \\
&+k_c\left(\overline{n}+1\right)\left(2\hat{b}\rho_S(t)\hat{a}^{\dagger} - \hat{b}^{\dagger}\hat{a}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{b}^{\dagger}\hat{a}\right) \\
&+k_a\overline{n}\left(2\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t)\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right) \\
&+k_b\overline{n}\left(\hat{b}^{\dagger}\rho_S(t)\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^{\dagger}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{b}\hat{b}^{\dagger}\right) \\
&+k_c\overline{n}\left(2\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t)\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right) \\
&+k_c\overline{n}\left(2\hat{b}^{\dagger}\rho_S(t)\hat{a} - \hat{b}\hat{a}^{\dagger}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{b}\hat{a}^{\dagger}\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O resultado para um banho com tempereturaeratura nula, $\overline{n} \to 0$, será:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) = &-\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_{S'}, \rho_S(t)\right] \\ &+k_a\left(2\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right) \\ &+k_b\left(2\hat{\mathbf{b}}\rho_S(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger - \hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\right) \\ &+k_c\left(2\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\right) \\ &+k_c\left(2\hat{\mathbf{b}}\rho_S(t)\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\rho_S(t) - \rho_S(t)\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Da definição do superoperador Liouviliano, 1.16, e da equação 1.17 obtemos o liouvilliano para um sistema de dois osciladores acoplados entre si, forçados externamente e em contato com um reservatório:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{i}{\hbar}\left[\mathbf{H}_{S'}, \cdot\,\right] \\ &+k_a\left(2\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right) + k_b\left(2\hat{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger - \hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\right) \\ &+k_c\left(2\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\right) + k_c\left(2\hat{\mathbf{b}}\cdot - \hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\cdot - \cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right). \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\cdot\left(-i\omega_a - k_a\right) + \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\left(i\omega_a - k_a\right) + 2k_a\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger \\ &+\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\cdot\left(-i\omega_b - k_b\right) + \cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\left(i\omega_b - k_b\right) + 2k_b\hat{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger \\ &+\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\cdot\left(-ig - k_c\right) + \cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{b}}\left(ig - k_c\right) + 2k_c\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}}^\dagger \\ &+\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}^\dagger\cdot\left(-ig - k_c\right) + \cdot\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}^\dagger\left(ig - k_c\right) + 2k_c\hat{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{a}}^\dagger \\ &-i\left[f_a\hat{\mathbf{a}}^\dagger + f_a^*\hat{\mathbf{a}}, \cdot\right] - i\left[f_b\hat{\mathbf{b}}^\dagger + f_b^*\hat{\mathbf{b}}, \cdot\right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde ${k_c}^2 = k_b k_a$.

A presença das fontes e do acoplamento entre os osciladores, que está contida dentro do hamiltoniano, $\mathbf{H}_{S'}$, não altera a estrutura da equação 4.11 pois, ao definirmos a relação 4.3 e fazermos a substituição 4.10, não precisamos saber quem é $\mathbf{H}_0$ dado que a dependência temporal de $\hat{\mathbf{a}}(t)$ mantém plausível as aproximações feitas pois ela é lenta comparada com as escalas de tempo do reservatório. Com isto, podemos escrever o superoperador Liouvilliano com ou sem fonte f, com ou sem acoplamento g, se cancelarmos na equação 4.13 os termos que não nos interessam, sem comprometer a dedução da equação Mestra. Assim podemos escrever as hamiltonianas,

$\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b + \mathbf{H}_g$, dos dois osciladores acoplados, em modos normais, por exemplo, e obter a equação Mestra

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \cdot (-i\omega_1 - k_1) + \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (i\omega_1 - k_1) + 2k_1 \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger \\ & + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot (-i\omega_2 - k_2) + \cdot \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 (i\omega_2 - k_2) + 2k_2 \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger \\ & + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \cdot (-k_3) + \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 (-k_3) + 2k_3 \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2^\dagger \\ & + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \cdot (-k_3) + \cdot \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger (-k_3) + 2k_3 \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1^\dagger \\ & - i \left[f_1 \hat{a}_1^\dagger + f_1^* \hat{a}_1, \cdot \right] - i \left[f_2 \hat{a}_2^\dagger + f_2^* \hat{a}_2, \cdot \right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \cdot (-i\omega_1 - k_1) + \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (i\omega_1 - k_1) + 2k_1 \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger \\ & + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot (-i\omega_2 - k_2) + \cdot \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 (i\omega_2 - k_2) + 2k_2 \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger \\ & + k_3 \left(2\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \cdot - \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \\ & + k_3 \left(2\hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \cdot - \cdot \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \\ & - i \left[f_1 \hat{a}_1^\dagger + f_1^* \hat{a}_1, \cdot \right] - i \left[f_2 \hat{a}_2^\dagger + f_2^* \hat{a}_2, \cdot \right] \qquad (4.14)\end{aligned}$$

onde ${k_3}^2 = k_2 k_1$.
Se os osciladores não forem forçados, podemos simplesmente eliminar a fonte da equação anterior e escrever:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \cdot (-i\omega_1 - k_1) + \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 (i\omega_1 - k_1) + 2k_1 \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger \\ & + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot (-i\omega_2 - k_2) + \cdot \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 (i\omega_2 - k_2) + 2k_2 \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger \\ & + k_3 \left(2\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \cdot - \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \\ & + k_3 \left(2\hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \cdot - \cdot \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \qquad (4.15)\end{aligned}$$

onde ${k_3}^2 = k_2 k_1$.
Note que se fizermos, na equação 4.13, uma troca de índices e eliminarmos g obteremos a equação 4.14. Por outro lado, se escrevermos a equação 4.13 em modos normais, obteremos estruturalmente a mesma equação anterior com diferença na redefinição dos ks, ou seja, neste caso:

$$\begin{aligned}k_1 &= k_a h_1^2 + k_b h_2^2 + 2k_c h_1 h_2, \\ k_2 &= k_a h_2^2 + k_b h_2^1 - 2k_c h_1 h_2, \\ k_3 &= h_1 h_2 (k_b - k_a) + k_c \left(h_1^2 - h_2^2 \right)\end{aligned}$$

onde

$$h_1 = \sqrt{\frac{\Omega_1 - \omega_a}{R}}, \qquad h_2 = \sqrt{\frac{\Omega_1 - \omega_a}{R}},$$

$$R = \sqrt{(\omega_a - \omega_b)^2 + 4g}, \qquad \Omega_{\substack{1\\2}} = \frac{\omega_a + \omega_b \pm R}{2},$$

$$\hat{\mathbf{a}} = h_1\hat{\mathbf{a}}_1 - h_2\hat{\mathbf{a}}_2, \qquad \hat{\mathbf{b}} = h_1\hat{\mathbf{a}}_2 + h_2\hat{\mathbf{a}}_1,$$

$$g \leq \sqrt{\omega_a\omega_b}$$

Note que existe um limite superior físico para a intensidade da constante de acoplamento entre os osciladores. No limite para $g = \sqrt{\omega_a\omega_b}$ teremos $\Omega_2 = 0$ e para valores maiores uma instabilidade será gerada, pois um dos modos normais apresentará freqüência negativa.
Podemos observar ainda que a existência de k_c (ou k_3) vem do fato dos osciladores estarem imersos no mesmo banho, enquanto que $k_3^{(mn)}$ existe independente deste fato. Quando os osciladores não estão no mesmo banho, a hamiltoniana de interação $\mathbf{H}_{int}$, se altera, alterando a estrutura da equação 4.11. Observando o desenvolvimento da equação Mestra, verificamos que sendo os banhos diferentes cada oscilador terá sua hamiltoniana de interação fazendo com que os termos cruzados que geram k_c (ou k_3), equação 4.4, deixem de existir, ou seja:

$$\langle \Gamma_{h_i}(t)\, \Gamma^\dagger_{h_j}(t)\rangle = 0 \quad \text{para } h_i \neq h_j \implies \nexists\ k_c \ \ (\text{ou } k_3)$$

4.2 Operador densidade para dois osciladores

Deduzida a equação Mestra, podemos calcular a evolução temporal de um estado inicial coerente fatorizado $\rho_S(0) = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$ onde $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ são estados dos osciladores representados pela hamiltoniana $\mathbf{H}_1 = \hbar\Omega_1\left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_1 + \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{H}_2 = \hbar\Omega_2\left(\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2 + \frac{1}{2}\right)$ respectivamente. Para obtermos a evolução temporal, dada pela equação 1.17, utilizaremos o ordenamento do liouvilliano sem fontes dado no apêndice B.2 e escreveremos[1]:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\rho(t)_S}_{\text{(sem fontes)}} &\equiv \rho_0(t) \\
&= e^{j_1(t)\hat{\mathbf{a}}_1\cdot\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{\mathbf{a}}_2\cdot\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger} e^{z(t)\hat{\mathbf{a}}_2\cdot\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger} e^{z^*(t)\hat{\mathbf{a}}_1\cdot\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger} e^{q(t)\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\cdot} e^{q^*(t)\cdot\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2} e^{m_2(t)\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2\cdot} e^{m_2^*(t)\cdot\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2} \odot \\
&\odot e^{m_1(t)\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_1\cdot} e^{m_1^*(t)\cdot\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_1} e^{q(t)\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2\cdot} e^{q^*(t)\cdot\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger}\rho_0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para calcularmos os coeficientes ($q(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$ e $j_1(t)$, $j_2(t)$, $z(t)$, equações B.2 e A.20 respectivamente) deste desacoplamento, utilizamos o sistema descrito pela

[1] doravante omitiremos o subscrito S.

equação 4.15. Podemos entretanto utilizar o mesmo procedimento para calcular os coeficientes do sistema descrito pela equação 4.13 sem fontes obtendo resultado semelhante ao encontrado. Assim, podemos generalizar os coeficientes escrevendo:

$$
\begin{aligned}
q(t) &= 2D\left(1-e^{r\,t}\right)\left(\Delta_+ e^{r\,t}-\Delta_-\right)^{-1} \quad \text{para} \quad r \neq 0 \\
e^{m_1(t)} &= \frac{e^{-R\,t}}{2r} e^{-\frac{c\,t}{2}}\left(\Delta_+ e^{r\,t}-\Delta_-\right) \\
e^{m_2(t)} &= e^{-2R\,t} e^{-m_1(t)}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

onde

$$r=\sqrt{c^2+4D^2}, \qquad c=k_2-k_1+i\left(\Omega_2-\Omega_1\right),$$

$$R=\frac{k_2+k_1}{2}+\frac{i\left(\Omega_2+\Omega_1\right)}{2}, \qquad \Delta_{\binom{+}{-}}=c\binom{+}{-}r$$

$D=k_3$ para o sistema descrito pala equação 4.15

$D=k_e+ig$ para o sistema descrito pala equação 4.13 sem fontes

$D=k_e$ para o sistema descrito pala equação 4.13 sem fontes e desacoplado.

A atuação dos superoperadores, dados na equação 4.16, sobre um estado coerente foi desenvolvida no apêndice A.3, e o resultado é dado pela equação A.21

$$\rho(t)=|\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}|\otimes|\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}| \tag{4.18}$$

onde

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{1t} &\equiv \alpha_1 e^{m_1(t)}+\alpha_2 q(t) e^{m_1(t)} \\
\alpha_{2t} &\equiv \alpha_1 q(t) e^{m_1(t)}+\alpha_2\left[e^{m_2(t)}+q(t)^2 e^{m_1(t)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

De maneira análoga podemos escrever para o sistema descrito pela equação 4.13

$$\rho(t)=|\alpha_{At}\rangle\langle\alpha_{At}|\otimes|\alpha_{Bt}\rangle\langle\alpha_{Bt}| \tag{4.20}$$

onde

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{At} &\equiv \alpha_A e^{m_1(t)}+\alpha_B q(t) e^{m_1(t)} \\
\alpha_{Bt} &\equiv \alpha_A q(t) e^{m_1(t)}+\alpha_B\left[e^{m_2(t)}+q(t)^2 e^{m_1(t)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

e os coeficientes são dados pelas condições da equação 4.17.

Podemos mostrar a simetria entre α_{1t} e α_{2t} partindo de um mesmo estado inicial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\alpha_{1t} = \alpha e^{m_1(t)} \left(1 + q(t)\right),$$
$$\alpha_{2t} = \alpha \left[e^{m_2(t)} + q(t) e^{m_1(t)} \left(1 + q(t)\right)\right],$$

fazendo as constantes de dissipação e as freqüências iguais e utilizando a equação B.4, obtendo

$$\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = \alpha e^{-(i\omega + 2k\, t)}$$

Além de notarmos a simetria, como era esperado, vemos que os osciladores dissipam energia com constantes de dissipação dobrada devido ao acoplamento entre eles via banho.

Uma outra maneira de observarmos a simetria entre α_{1t} e α_{2t} é ordenarmos a equação 4.16 de forma a trocar "1"com "2". A evolução temporal que encontraremos tem estrutura inversa à exposta na equação 4.19, com coeficientes diferentes.

A equação 4.14 representa o mesmo sistema que acabamos de descrever, acrescida de fonte. Podemos calcular o estado coerente estacionário do sistema descrito pela equação 4.14 ou do sistema descrito pela equação 4.13, sem conhecer sua evolução temporal, fazendo:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{L}\rho(0) = 0$$

e encontrar um produto de estados coerentes dado por:

$$\rho_{\text{estac.}} = |\mathcal{A}_{\substack{1\\A}}\rangle\langle\mathcal{A}_{\substack{1\\A}}| \otimes |\mathcal{A}_{\substack{2\\B}}\rangle\langle\mathcal{A}_{\substack{2\\B}}| \tag{4.22}$$

onde:

1° Se o sistema for descrito pela equação 4.14

$$\mathcal{A}_{\substack{1\\2}} = \frac{i f_{\substack{2\\1}} k_3 - i f_{\substack{1\\2}} \left(i\omega_{\substack{2\\1}} + k_{\substack{2\\1}}\right)}{-\omega_1\omega_2 + i\left(\omega_1 k_2 + \omega_2 k_1\right)}. \tag{4.23}$$

2° Se o sistema for descrito pela equação 4.13

$$\mathcal{A}_{\substack{A\\B}} = \frac{i f_{\substack{B\\A}} \left(ig + k_C\right) - i f_{\substack{A\\B}} \left(i\omega_{\substack{B\\A}} + k_{\substack{B\\A}}\right)}{\left(g^2 - \omega_A\omega_B\right) + i\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A\right)}. \tag{4.24}$$

A condição necessária para <u>zerar</u> o denominador da equação 4.23 ou 4.24 é dada pela parte real do denominador igual a zero. Isto só ocorre quando tivermos uma partícula livre, ou seja, quando ω_A ou ω_B for igual a zero, conseqüentemente dada a condição de energia positiva $0 \leq g^2 \leq \omega_A\omega_B \longrightarrow g = 0$, ou ainda uma "partícula livre nos modos normais", pois se $g^2 = \omega_A\omega_B \longrightarrow \omega_2 = 0$. Para obtermos a

evolução temporal de um dos sistemas com fonte, podemos utilizar o ordenamento dos superoperadores sem fontes, $\mathcal{L}_0$, acrescentando os superoperadores da fonte. Ao fazermos o desacoplamento, notamos que a presença dos superoperadores com fontes não geram os superoperadores de $\mathcal{L}_0$. Conseqüentemente, os coeficientes encontrados no desacoplamento de $\mathcal{L}_0$ permanecerão os mesmos. Assim, podemos escrever o ordenamento partindo da evolução temporal $\rho_0(t)$ obtida na equação 4.16 sem fontes[2] e obter:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}\,t}\rho(0) = e^{f_{12}(t)(\hat{a}_2\cdot - \cdot\hat{a}_2)}e^{f_1(t)(\hat{a}_1\cdot - \cdot\hat{a}_1)}e^{f_2(t)(\hat{a}_2^\dagger\cdot - \cdot\hat{a}_2^\dagger)}e^{f_1(t)(\hat{a}_1^\dagger\cdot - \cdot\hat{a}_1^\dagger)}e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$\rho(t) = e^{f_{12}(t)(\hat{a}_2\cdot - \cdot\hat{a}_2)}e^{f_1(t)(\hat{a}_1\cdot - \cdot\hat{a}_1)}e^{f_2(t)(\hat{a}_2^\dagger\cdot - \cdot\hat{a}_2^\dagger)}e^{f_1(t)(\hat{a}_1^\dagger\cdot - \cdot\hat{a}_1^\dagger)}\rho_0(t). \tag{4.25}$$

Utilizando a técnica exponencial 3.2.2, detalhada no apêndice B, encontraremos um sistema de equações cuja solução nos dará os coeficientes

$$f_1(t) = -f_1^*(t) \qquad f_2(t) = -f_{12}^*(t)$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} &= \mathcal{A}_{\substack{1\\2}}\left\{1 + \frac{e^{-\left(R-\frac{r}{2}\right)t}}{r}\left[e^{-rt}\left(R-\frac{r}{2}\right) - \left(R+\frac{r}{2}\right)\right]\right\} \\ &+ \frac{ie^{-\left(R-\frac{r}{2}\right)t}}{r} f_{\substack{1\\2}}\left(e^{-rt} - 1\right)\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde R, r e $\mathcal{A}_{\substack{1\\2}}$ são dados pelas equações 4.17 e 4.23 respectivamente.
Com isto, podemos escrever a evolução temporal para um estado inicial produto de dois estados coerentes e descorrelacionados para o sistema descrito pela equação 4.14

$$\rho(t) = |\alpha_{1ft}\rangle\langle\alpha_{1ft}| \otimes |\alpha_{2ft}\rangle\langle\alpha_{2ft}| \tag{4.27}$$

onde

$$\alpha_{\left(\substack{1\\2}\right)ft} = \alpha_{\left(\substack{1\\2}\right)t} + f_{\substack{1\\2}}(t),$$

e $\alpha_{\left(\substack{1\\2}\right)t}$, $f_{\substack{1\\2}}(t)$ são dados pelas equações 4.19, 4.26 respectivamente.

A equação Mestra leva para um estado que é assintoticamente independente do tempo, sem importar de qual estado se parta. Portanto, calcular a solução geral como função do tempo, $\rho(t)$ e tomar o limite assintótico é o mesmo que encontrar o estado estacionário calculado em 4.22, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\rho(t) = \rho_{\text{estac.}}$$

[2]desenvolvimento semelhante foi feito na seção 3.2.2.1

De maneira análoga podemos calcular a evolução temporal para o sistema descrito pela equação 4.13 e escrever:

$$\rho(t) = |\alpha_{Aft}\rangle\langle\alpha_{Aft}| \otimes |\alpha_{Bft}\rangle\langle\alpha_{Bft}| \tag{4.28}$$

onde

$$\alpha_{\binom{A}{B}ft} = \alpha_{\binom{A}{B}t} + f_{\substack{A\\B}}(t),$$

$$\begin{pmatrix} f_A(t) \\ f_B(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{\substack{A\\B}} \left\{ 1 + \frac{e^{-\left(R-\frac{r}{2}\right)t}}{r} \left[e^{-rt}\left(R - \frac{r}{2}\right) - \left(R + \frac{r}{2}\right) \right] \right\}$$

$$+ \frac{ie^{-\left(R-\frac{r}{2}\right)t}}{r} f_{\substack{A\\B}} \left(e^{-rt} - 1\right)$$

e os coeficientes R, r e $\mathcal{A}_{\substack{A\\B}}$ são dados pelas equações 4.17 e 4.24 respectivamente.

4.3 Limite Assintótico - Aplicações

Encontrados os estados estacionários, equações 4.23 e 4.24, podemos calcular a excitação média, $\mathcal{E}$, para cada um dos osciladores e analizar as trocas de excitações medidas pelos acoplamentos dos osciladores entre si e via banho. Considerando o sistema descrito pela equação 4.14 obtemos

$$\mathcal{E}_{\substack{1\\2}} = Tr \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{A}_1\rangle\langle\mathcal{A}_1| \\ |\mathcal{A}_2\rangle\langle\mathcal{A}_2| \end{pmatrix} \right\}$$

ou

$$\mathcal{E}_{\substack{1\\2}} = \frac{f^2_{\substack{1\\2}} \left(\omega^2_{\substack{2\\1}} + k^2_{\substack{2\\1}}\right) + f^2_{\substack{2\\1}} k^2_3 - 2 f_1 f_2 k_3 k_{\substack{2\\1}}}{\left(\omega_1 k_2 + \omega_2 k_1\right)^2 + \omega^2_1 \omega^2_2}. \tag{4.29}$$

Analogamente para o sistema descrito pela equação 4.13

$$\mathcal{E}_{\substack{A\\B}} = \frac{f^2_{\substack{A\\B}} \left(\omega^2_{\substack{B\\A}} + k^2_{\substack{B\\A}}\right) + f^2_{\substack{B\\A}} g^2 + f^2_{\substack{B\\A}} k^2_C - 2 f_A f_B \left(k_C k_{\substack{B\\A}} + g\omega_{\substack{B\\A}}\right)}{\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A - 2gk_C\right)^2 + \left(g^2 - k^2_C + k_A k_B - \omega_A \omega_B\right)^2}. \tag{4.30}$$

Calculando através da equação 4.29, a excitação média para os osciladores acoplados via banho com a mesma constante de acoplamento, ou seja, $g = 0$ $k_1 = k_2 = k_3 = k$ iremos obter:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{f^2_1 \omega^2_2 + k^2 \left(f_1 - f_2\right)^2}{k^2 \left(\omega_1 + \omega_2\right)^2 + \omega^2_1 \omega^2_2}, \tag{4.31}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{f^2_2 \omega^2_1 + k^2 \left(f_1 - f_2\right)^2}{k^2 \left(\omega_1 + \omega_2\right)^2 + \omega^2_1 \omega^2_2}, \tag{4.32}$$

Essas expressões nos permite concluir que:

- Se o bombeamento dos osciladores forem iguais, $f_A = f_B = f$, então terá maior excitação quem tiver menor freqüência.

- A diferença de excitação entre os dois osciladores cresce com o quadrado da amplitude da fonte f.

- Quando as fontes forem diferentes e obedecerem a desigualdade

$$\frac{f_{(\omega_{menor})}}{\omega_{(menor)}} \geq \frac{f_{(\omega_{maior})}}{\omega_{(maior)}}$$

  que é uma espécie de "fluxo de excitações", notamos que se o "fluxo de excitações" for o mesmo para os dois sistemas então o sistema de menor freqüência terá maior excitação

As figuras 4.1 e 4.2 nos mostram que quem tem maior excitação é o oscilador que tem menor freqüência, no caso oscilador 1. Note nestas figuras que o que está prevalecendo é a desigualdade $f_1\omega_2 \geq f_2\omega_1$ e não o fato do oscilador de maior excitação estar sendo mais ou menos bombeado.

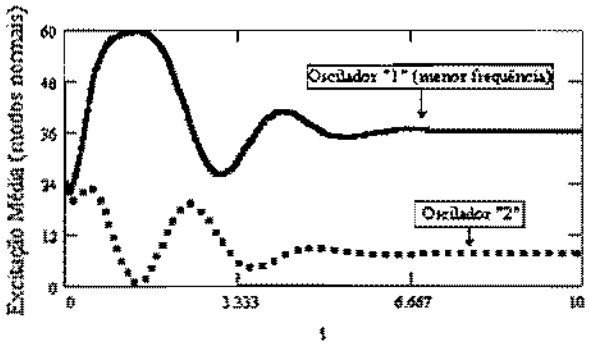

Figura 4.1: Comparando a excitação média do oscilador 1 com o oscilador 2 onde $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $f_1 = 15$, $f_2 = 10$, $k_1 = k_2 = 0.9$

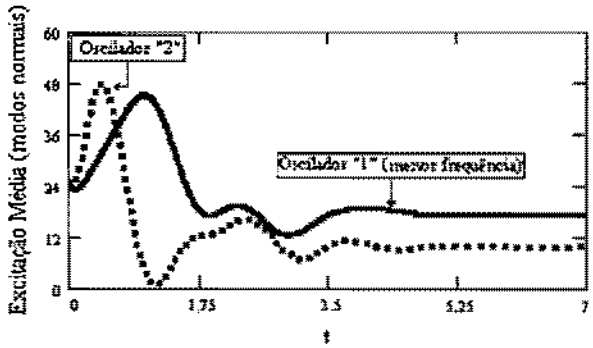

Figura 4.2: Comparando a excitação média do oscilador 1 com o oscilador 2 onde $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4$, $f_1 = 10$, $f_2 = 15$, $k_1 = k_2 = 0.9$

Com o objetivo de tentar entender a diferença essencial entre os acoplamentos "via g "e "via banho, kc," comparamos a excitação média, $\mathcal{E}$,do oscilador "A"dissipando num banho $\mathcal{E}_0$

$$\mathcal{E}_{A0} = \frac{f^2{}_A\left(\omega^2{}_B + k^2{}_B\right)}{\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A\right)^2 + \left(k_A k_B - \omega_A \omega_B\right)^2} \tag{4.33}$$

ou

$$\mathcal{E}_{A0} = \frac{f^2{}_A}{\omega^2{}_A + k^2{}_A}$$

com:

- A excitação média dele acoplado a "B"que dissipa em outro banho, $\mathcal{E}_g$. Devido ao contato com este segundo oscilador, o oscilador A sofre dinâmicamente uma alteração na sua excitação média. Em particular, no regime estacionário, sua excitação média pode ser maior, igual ou menor que o oscilador "A" desacoplado do item anterior. Esta taxa é controlada essencialmente pela fonte do oscilador B.
  Para escrever a excitação média do oscilador A, usamos a equação 4.30 e consideramos $k_C = 0$ obtendo:

  $$\mathcal{E}_{Ag} = \frac{f^2{}_A\left(\omega^2{}_B + k^2{}_B\right) + f_B g\left(f_B g - 2 f_A \omega_B\right)}{\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A\right)^2 + \left(g^2 + k_A k_B - \omega_A \omega_B\right)^2}$$

  ou

  $$\mathcal{E}_{Ag} = \frac{f^2{}_A\left(\omega^2{}_B + k^2{}_B\right) + f_B g\left(f_B g - 2 f_A \omega_B\right)}{\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A\right)^2 + \left(k_A k_B - \omega_A \omega_B\right)^2 + g^2\left(g^2 + 2 k_A k_B - 2\omega_A \omega_B\right)}. \tag{4.34}$$

  Verifica-se nesta equação que se $f_B \geq 2 f_A \frac{\omega_B}{g}$ ou $f_B = 0$ então $\mathcal{E}_{Ag} > \mathcal{E}_{A0}$
  Note que f_B tem que ser maior que um fator de f_A e isto não garante o fato de que: se $f_B > f_A$ então $\mathcal{E}_{Ag} > \mathcal{E}_{A0}$. Um outro fato curioso de se notar é que se o oscilador "B" não for bombeado, mesmo assim $\mathcal{E}_{Ag}$ será maior que $\mathcal{E}_{A0}$.

- A excitação média dele acoplado a "B" através da dissipação por um mesmo banho, $\mathcal{E}_k$. Neste caso, o acoplamento dos osciladores "A e B" será via banho. Para escrever a excitação média do oscilador A, usamos a equação 4.30 e consideramos $g = 0$ obtendo:

$$\mathcal{E}_{Ak} = \frac{f^2{}_A\left(\omega^2{}_B + k^2{}_B\right) + f_B k_C\left(f_B k_C - 2 f_A k_B\right)}{\left(\omega_A k_B + \omega_B k_A\right)^2 + \left(k_A k_B - \omega_A \omega_B\right)^2 + k^2{}_C\left(k^2{}_C - 2 k_A k_B + 2\omega_A \omega_B\right)^2}. \tag{4.35}$$

A restrição imposta na dedução da equação Mestra, $k_A k_B < \omega_A \omega_B$, faz com que o denominador desta equação seja maior que o da equação 4.33 do primeiro item dificultando garantir as condições de maior excitação média para $\mathcal{E}_{Ak}$. A garantia que podemos ter é a de que se $o \leq f_B \leq 2 f_A \frac{k_B}{k_C}$ então $\mathcal{E}_{Ak} < \mathcal{E}_{A0}$.

Na figura 4.3 observamos que: o oscilador " A" tem maior excitação quando acoplado "via g"e a amplitude de oscilação da fonte " B"for igual a zero; existe uma faixa de amplitude de oscilação da fonte " B" onde o oscilador "A"tem maior excitação se for acoplado "via k"; o acoplamento "via g"e "via k"não corresponde a soma deles individualmente.

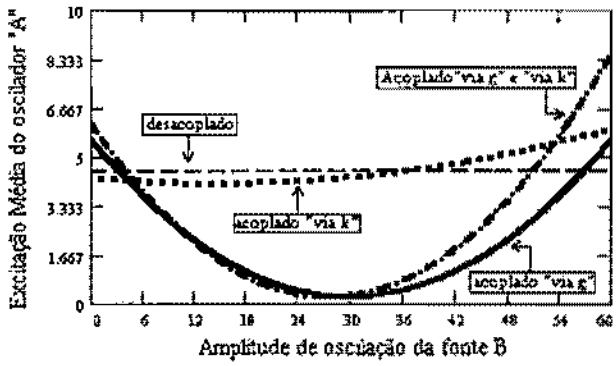

Figura 4.3: Comparando o oscilador "A" desacoplado, com ele acoplado de vários modos com ele desacoplado $\omega_A = 7$, $\omega_B = 4$, $f_A = 15$, $k_A = k_B = 0.9$, $g = 2$

Para sabermos as condições que leva a um dos osciladores "A ou B" ter maior excitação média consideramos um caso particular onde os dois osciladores estão acoplados e sendo bombeados, mas apenas o oscilador "A" dissipa num banho. Neste caso, para calcularmos a excitação média dada pela equação 4.30, consideraremos $k_B = k_C = 0$ e iremos obter:

$$\mathcal{E}_A = \frac{f^2{}_A \omega^2{}_B + f^2{}_B g^2 - 2 f_A f_B g \omega_B}{\left(\omega_B k_A\right)^2 + \left(g^2 - \omega_A \omega_B\right)^2}. \tag{4.36}$$

$$\mathcal{E}_B = \frac{f^2{}_B\left(\omega^2{}_A + k^2{}_A\right) + f^2{}_A g^2 - 2 f_A f_B g \omega_A}{\left(\omega_B k_A\right)^2 + \left(g^2 - \omega_A \omega_B\right)^2}. \tag{4.37}$$

Veja que neste caso, a excitação média do oscilador "A"sempre diminuirá devido ao fato dele estar imerso num banho, enquanto que o oscilador "B"poderá perder ou ganhar excitação média devido ao fato do oscilador "A"estar dissipando. Particularmente se as freqüências e os bombeamentos forem os mesmos, $\omega_A = \omega_B = \omega$ e $f_A = f_B = f$ respectivamente a excitação média do oscilador "B"será maior que a do oscilador "A"como era de se esperar. Por outro lado, se o oscilador "B"não for bombeado, $f_B = 0$, e se $\omega_{(menor)} \leq g \leq \omega_{(maior)}$, então terá maior energia quem tiver menor freqüência. A figura 4.4 mostra esta relação e mostra também que existe uma faixa de amplitude de oscilação da fonte "B"que faz o oscilador "B"ter menor excitação média.

Na figura 4.4 observamos que: o oscilador " B" poderá ter excitação média maior ou menor que a do oscilador " A"quando a amplitude da fonte "B"for zero, dependendo do valor de g; a freqüência do oscilador "A"determina se a excitação do oscilador " B"irá manter-se maior que a do oscilador " A" para qualquer freqüência.

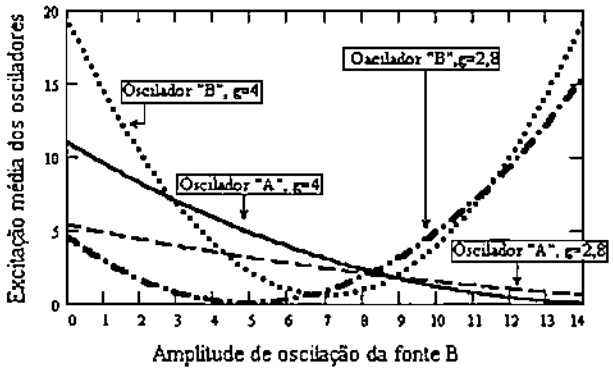

Figura 4.4: Comparando o oscilador "A" acoplado à um oscilador "B" via g. $\omega_A = 11$, $\omega_B = 3$, $f_A = 20$, $k_A = 2$, $k_B = 0$

Tivemos a curiosidade de saber qual a probabilidade P de num certo instante t, o estado estacionário ser atingido, ou seja,

$$p = tr\rho(t)\rho_\infty = e^{-|\alpha_1 f_t - A_1|^2}$$

Dada a quantidade de parâmetros envolvidos tornando a expressão pouco elucidativa, optamos por elucidar graficamente. Observado na figura 4.5 podemos a princípio definir duas escalas de tempo; uma ligada a condição inicial e outra ligada a dinâmica propriamente dita. O gráfico nos mostra também que o estado inicial α interfere na dinâmica do sistema. Constatamos em vários gráficos que fizemos que o bombeamento das fontes f mantém por mais tempo a condição inicial enquanto que a dissipação k leva rápidamente ao estado estacionário.

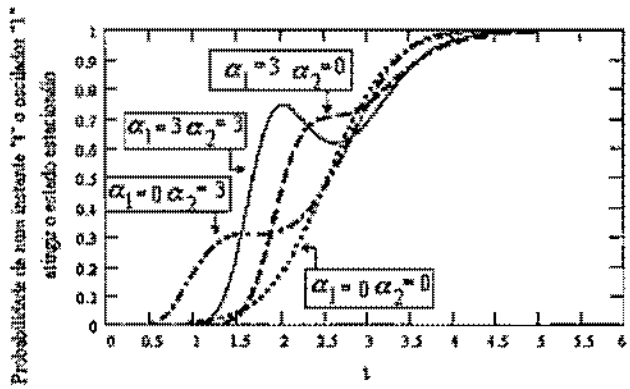

Figura 4.5: Comparando a excitação média doo oscilador 1 com o oscilador 2 onde $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4$, $f_1 = 10$, $f_2 = 15$, $k_1 = k_2 = 0.9$

4.4 Decoerência e Dissipação de uma Superposição Coerente

O fenômeno que iremos analisar é a dinâmica do entrelaçamento. Em todos os casos estudados com a condição inicial de dois estados coerentes fatorizados, este fenômeno não ocorreu. Partimos então de um estado que é constituido por uma superposição coerente de estados coerentes em um dos osciladores e o outro num estado coerente fundamental. Vamos fazer uma aplicação para estudar quantitativamente a relação entre as escalas de tempo características da decoerência e dissipação [3].
Seja

$$\rho(0) = N^2(\alpha)\left(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\right)\left(\langle\alpha| + \langle-\alpha|\right) \otimes |0\rangle\langle 0| \tag{4.38}$$

com

$$N(\alpha) = \left(2 + 2e^{-2|\alpha|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

A evolução temporal sem fontes dada pela equação 4.16 nos fornece

$$\begin{aligned}\rho(t) = {} & N^2(\alpha)\left(|\alpha_{g1}\rangle\langle\alpha_{g1}| \otimes |\alpha_{q2}\rangle\langle\alpha_{q2}| + |-\alpha_{g1}\rangle\langle-\alpha_{g1}| \otimes |-\alpha_{q2}\rangle\langle-\alpha_{q2}|\right) \\ & + N^2(\alpha)e^{-2|\alpha|^2}e^{2\left(|\alpha_{g1}|^2+|\alpha_{q2}|^2\right)}|\alpha_{g1}\rangle\langle-\alpha_{g1}| \otimes |\alpha_{q2}\rangle\langle-\alpha_{q2}| \\ & + N^2(\alpha)e^{-2|\alpha|^2}e^{2\left(|\alpha_{g1}|^2+|\alpha_{q2}|^2\right)}|-\alpha_{g1}\rangle\langle\alpha_{g1}| \otimes |-\alpha_{q2}\rangle\langle\alpha_{q2}|\end{aligned} \tag{4.39}$$

onde

$$\alpha_{g1} = \alpha e^{m_1(t)} \qquad \alpha_{q2} = g(t)\alpha_{g1}$$

[3] semelhante ao que estudamos na seção 2.3

e os coeficientes $m_1(t)$, $q(t)$ são dados pela equação 4.17.
Para obtermos a evolução temporal para cada um dos osciladores faremos:

$$\begin{aligned}
\rho_1(t) &= tr_2\rho(t) \\
\rho_1(t) &= N^2(\alpha)\left(|\alpha_{g1}\rangle\langle\alpha_{g1}| + |-\alpha_{g1}\rangle\langle-\alpha_{g1}|\right) \\
&\quad + N^2(\alpha)e^{-2|\alpha|^2}e^{2|\alpha_{g1}|^2}\left(|\alpha_{g1}\rangle\langle-\alpha_{g1}| + |-\alpha_{g1}\rangle\langle\alpha_{g1}|\right),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2(t) &= tr_1\rho(t) \\
\rho_2(t) &= N^2(\alpha)\left(|\alpha_{q2}\rangle\langle\alpha_{q2}| + |-\alpha_{q2}\rangle\langle-\alpha_{q2}|\right) \\
&\quad + N^2(\alpha)e^{-2|\alpha|^2}e^{2|\alpha_{q2}|^2}\left(|\alpha_{q2}\rangle\langle-\alpha_{q2}| + |-\alpha_{q2}\rangle\langle\alpha_{q2}|\right)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Como era de se esperar, ambos os osciladores dissipam para o reservatório e atingem seus estados fundamentais a tempos longos. Nesse processo, o oscilador 1 sofre a característica decoerência de sua superposição inicial.

Note entretanto que há "transferência de coerência"ocasionada pelo acoplamento. O oscilador 2, apesar de inicialmente sem superposições, é levado a apresentar coerência entre estados distintos $|\alpha_{f2}\rangle$ e $|-\alpha_{f2}\rangle$ e, a semelhança do oscilador 1, também apresentará processo de decoerência. Uma vez que os coeficientes, $m_1(t)$ e $q(t)$, são generalizados para vários sistemas de dois osciladores, então a evolução temporal também pode representar a evolução de qualquer um dos sistemas apresentados.
Podemos agora estudar a dissipação desses subsistemas, através do cálculo da energia.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(t) &= tr\mathbf{H}_{12}\rho(t) \\
\mathbf{E}(t) &= 2\hbar^2\omega_1\omega_2 N^2(\alpha)|\alpha_{g1}|^2|\alpha_{q2}|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1(t) &= tr\mathbf{H}_1\rho_1(t) \\
\mathrm{E}_1(t) &= 2\hbar\omega_1 N^2(\alpha)|\alpha_{g1}|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_2(t) &= tr\mathbf{H}_2\rho_2(t) \\
\mathrm{E}_2(t) &= 2\hbar\omega_2 N^2(\alpha)|\alpha_{q2}|^2\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

É interessante observar que a razão entre as energias $\mathrm{E}_2(t)$ e $\mathrm{E}_1(t)$ em qualquer instante, resulta no módulo ao quadrado do coeficiente $|q(t)|^2$ que é diretamente proporcional à constante de "comunicação" entre os osciladores, acoplamento g ou dissipação k_3 ou k_C, dependendo do sistema utilizado.
Estudando a decoerência destes subsistemas através do defeito de idempotencia obtemos

$$\delta(t) = 1 - tr\rho^2(t)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2} - 2N^4(\alpha)\left(e^{-2\left(|\alpha_{g1}|^2+|\alpha_{g2}|^2\right)} + e^{-2|\alpha|^2}e^{2\left(|\alpha_{g1}|^2+|\alpha_{g2}|^2\right)}\right)^2 \tag{4.45}$$

$$\delta_1(t) = 1 - tr\rho^2{}_1(t)$$
$$\delta_1(t) = \frac{1}{2} - 2N^4(\alpha)\left(e^{-2|\alpha_{g1}|^2} + e^{-2|\alpha|^2}e^{2|\alpha_{g1}|^2}\right)^2 \tag{4.46}$$

$$\delta_2(t) = 1 - tr\rho^2{}_2(t)$$
$$\delta_2(t) = \frac{1}{2} - 2N^4(\alpha)\left(e^{-2|\alpha_{g2}|^2} + e^{-2|\alpha|^2}e^{2|\alpha_{g2}|^2}\right)^2. \tag{4.47}$$

Vamos definir os tempos característicos de decoerência e dissipação fazendo uma expansão em série de Taylor e tomando os termos até primeira ordem para o oscilador cujo estado inicial é dado por uma superposição de estados (no nosso caso é o oscilador 1). Assim escreveremos para a energia e o defeito de idempotencia, respectivamente:

$$\mathrm{E}_1^{(1)}(t) = (\mathrm{E}_1(t))_{t=0} + t\left(\frac{d}{dt}\mathrm{E}_1(t)\right)_{t=0}$$
$$\mathrm{E}_1^{(1)}(t) = \mathrm{E}_1^{(0)} - t4k_1|\alpha|^2\hbar\omega_1 N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right) \tag{4.48}$$

$$\delta_1^{(1)}(t) = (\delta_1(t))_{t=0} + t\left(\frac{d}{dt}\delta_1(t)\right)_{t=0}$$
$$\delta_1^{(1)}(t) = t8k_1|\alpha|^2N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right) \tag{4.49}$$

Definindo uma escala de tempo de dissipação

$$-\frac{\mathrm{E}_1^{(0)} - \mathrm{E}_1^{(1)}(t)}{\mathrm{E}_{puro}^{(0)}} = \frac{t}{\tau_{diss}}$$

onde

$$\tau_{diss}^{-1} = \frac{4k_1|\alpha|^2N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)}{|\alpha|^2 + \frac{1}{2}}.$$

Analogamente definimos

$$\delta_1^{(1)}(t) = \frac{t}{\tau_{dec}}$$

com

$$\tau_{dec}^{-1} = 8k_1|\alpha|^2N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right).$$

Uma vez garantido que o oscilador cujo estado inicial é dado por uma superposição de estados está imerso em um banho, $k_1 \neq 0$, então podemos fazer a relação entre estes tempos

$$\frac{\tau_{diss}}{\tau_{dec}} = 2|\alpha|^2 + 1$$

e obter curiosamente o mesmo resultado obtido na seção 2.3.
Voltamos ao modelo de dois osciladores acoplados dissipando em banhos diferentes, fizemos uma expansão para o defeito de idempotencia do sistema "1" em $\frac{g}{k2}$ e em $\frac{k1}{k2}$ e encontramos

$$\delta_1^{(1)}(t) = 8t|\alpha|^2 N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\left(k1 + \frac{g^2}{k2 + \frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{k2}}\right)$$

onde concluimos que quanto maior o acoplamento do sistema "2", k_2, ou quanto maior a diferença de oscilações dos sistemas $\omega_2 - \omega_1$, menor a decoerência. Em particular se o sistema "1" não estiver acoplado, $k_1 = 0$, então

$$\delta_1^{(1)}(t) = 8t|\alpha|^2 N^2(\alpha)\left(1 - e^{-2|\alpha|^2}\right)\left(\frac{g^2}{k2 + \frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{k2}}\right)$$

quanto maior o acoplamento menor a decoerência.

Conclusão

Este trabalho é dedicado em parte ao desenvolvimento de ferramentas teóricas que permitem tratar decoerência e dissipação de sistemas acoplados. Para tempos curtos comparados com os tempos característicos da evolução livre dos subsistemas, mostramos que embora esses dois fenômenos tenham ingredientes comuns, são profundamente distintos. Utilizamos essa técnica perturbativa para explicar a "emergência da classicidade" em situações que envolvem superposições de estados quânticos. Introduzimos escalas de tempo características desses fenômenos que podem ser usadas facilmente em outros contextos.

Estudamos também fenômenos essencialmente vinculados a mais do que dois sistemas em interação. Para isto, investimos em construir técnicas para calcular a densidade reduzida em casos que sua dinâmica é suposta linerar, markoviana e obedeça aos critérios do teorema de Lindblad. Essas técnicas envolvem álgebra de Lie para superoperadores e foram usadas por [14], dentre outros.
O que inovamos no capítulo 3 e no apêndice B foi aplicar as técnicas diretamente para o cálculo do estado e não da função de correlação associadas como havia sido feito anteriormente.
Em posse das técnicas apropriadas, calculamos a evolução temporal para vário tipos de sistemas. Calculamos a densidade total do sistema como função do tempo para a condição inicial de um produto de estados coerentes, fizemos aplicações para observar propriedades do estado assintótico mostrando que existem comportamentos surpreendentes advindos desta dinâmica, como por exemplo o fato de uma fonte externa ser maior para um dos sistemas, não significar que este terá maior energia. Tendo como motivação principal um trabalho de H. Fröhlich que prevê comportamentos não usuais e bastante interessantes para sistemas biológicos envolvendo moléculas com momento dipolar que podem trocar energia através do reservatório térmico no qual estão imersas, consideramos duas moléculas representadas por dois osciladores em modos normais dissipando num mesmo reservatório com mesma constante de dissipação e mostramos que mesmo neste caso simples, comportamentos não usuais ao senso comum também ocorrem, como o fato de ter maior energia quem tiver menor freqüência mesmo que este esteja sendo bombeado com menor intensidade que o outro. Guardada as devidas proporções, este resultado foi encontrado no trabalho de H. Fröhlich o que nos motiva muito a buscar um modelo teórico mais próximo ao modelo experimental proposto por ele.

Finalmente verificamos a dinâmica do entrelaçamento que ocorre com os subsistema quando o estado inicial de um deles é correlacionado. Definimos, através

de uma expansão, e calculamos os tempos de dissipação e decoerência como feito no capítulo 2 para tempos curtos e surpeendentemente encontramos a mesma razão entre os tempos encontrada no capítulo 2, o que nos leva a crer que para o estado inicial dado, a razão entre os tempos de dissipação e decoerência não é afetada pela presença do outro oscilador nem do acoplamento entre eles. Fizemos uma expansão para o defeito de idempotencia do sistema "1"em $\frac{g}{k2}$ e em $\frac{k1}{k2}$ para um modelo de dois osciladores acoplados e dissipando em banhos diferentes e concluimos que se aumentarmos o acoplamento do outro sistema, ou se aumentarmos a diferença de oscilação dos sistemas $\omega_2 - \omega_1$, poderemos "segurar" a decoerência.

Apêndice A

Evolução de um estado coerente

A.1 Estados coerentes

Um estado coerente é um estado de incerteza mínima. Tais estados são autoestados do operador de destruição $\hat{\mathbf{a}}$, que não é auto-adjunto, tendo autovalores complexos. O estado coerente do oscilador harmônico simples, $|\alpha\rangle$, pode ser expresso em termos do operador deslocamento de Glauber, 3.9, atuando no estado de vácuo $|0\rangle$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{\mathbf{a}})^n}{n!}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger} \left(1 - \alpha^* \hat{\mathbf{a}} + ...\right)|0\rangle \\
&\downarrow \\
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger}|0\rangle \quad \longrightarrow \quad \langle\alpha| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\langle 0|e^{\alpha^* \hat{\mathbf{a}}}, \\
&\downarrow \\
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger\right)^n |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

ou ainda

$$
|\alpha+\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2} e^{(\alpha+\beta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2} e^{\beta \hat{\mathbf{a}}^\dagger} \overbrace{e^{\alpha \hat{\mathbf{a}}^\dagger}|0\rangle}^{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}|\alpha\rangle}
$$

$$
|\alpha+\beta\rangle = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2} e^{\beta \hat{\mathbf{a}}^\dagger}|\alpha\rangle \tag{A.2}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
e^{\beta \hat{\mathbf{a}}^\dagger}|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2}|\alpha+\beta\rangle \tag{A.3}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\langle\alpha|e^{\beta \hat{\mathbf{a}}} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2}\langle\alpha+\beta|, \tag{A.4}
$$

mostrando que os estados coerentes não são auto estado de $\hat{a}^\dagger$.
Para mostrarmos que $|\alpha\rangle$ é auto estado de $\hat{a}$, faremos o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}\hat{a}D(\alpha) &= \hat{a}\left(e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\alpha^*\hat{a}}\right) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger}f(\hat{a}) \\ &= \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n f(\hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n f(\hat{a})\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\left[\hat{a},\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\right] &= \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1} + \hat{a}^\dagger\left[\hat{a},\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}\right] \\ &= \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1} + \hat{a}^\dagger\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-2} + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2\left[\hat{a},\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-2}\right] = \ldots \\ \ldots &= n\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1} = \hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n - \left(\hat{a}^\dagger\right)^n\hat{a}\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\hat{a}D(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n\hat{a}f(\hat{a}) + \alpha\sum_{n-1=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}f(\hat{a}) \\ &= D(\alpha)\hat{a} + \alpha D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{a}+\alpha) \\ &\Downarrow \\ D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) &= \hat{a}+\alpha \\ &\Downarrow \\ D^\dagger(\alpha)\hat{a}|\alpha\rangle &= D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha)|0\rangle = (\hat{a}+\alpha)|0\rangle = \alpha|0\rangle \\ &\Downarrow \\ D(\alpha)D^\dagger(\alpha)\hat{a}|\alpha\rangle &= D(\alpha)\alpha|0\rangle \\ &\downarrow \\ \hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \Longrightarrow \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*\end{aligned} \tag{A.5}$$

De maneira similar, demonstra-se que

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*.$$

Para verificarmos a ortogonalidade dos estados coerentes faremos o produto escalar de dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ expandindo numa base de numero, i é:

$$\begin{aligned}\langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}\sum_{n,m}\langle m|\left(\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}\right)^*\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}\sum_{n,m}\frac{\alpha^n\beta^{*m}}{\sqrt{n!m!}}\delta_{nm} \\ \langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}\sum_{n}\frac{\alpha\beta^{*n}}{n!} = e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2-2\alpha\beta^*+|\beta|^2\right)} \neq \delta_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{A.6}$$

mostrando assim que a base dos estados coerentes não é ortonormal.

A.2 Superoperadores agindo em um estado coerente

Do produto bilinear, 3.4, podemos agrupar a atuação das exponenciais dos superoperadores dados pela equação 4.16, de três maneiras:

- 1ª **Maneira** - Superoperadores "tipo 1-2"com ponto à direita ou à esquerda. A exponencial desses superoperadores atuando num estado coerente desloca o estado coerente. Detalharemos a seguir os cálculos para os quatro superoperadores que aparecem na equação em questão, da segunte forma:

  1. Superoperador $\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_2\cdot$

$$e^{q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle=\sum_k\frac{\left(q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot\right)^k}{k!}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle$$

onde expressamos a exponencial na forma de soma.
Uma vez que $\left[\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_2^\dagger\cdot\right]=0$, equação 3.4, podemos separar $\hat{a}_1^\dagger$ de $\hat{a}_2$ e escrever

$$e^{q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle=\sum_k\frac{\left(q(t)\hat{a}_1^\dagger\cdot\right)^k}{k!}(\hat{a}_2\cdot)^k|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle$$

Como o estado coerente $|\alpha_2\rangle$ é auto estado do operador $\hat{a}_2$, então

$$\begin{aligned}e^{q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle&=\sum_k\frac{\left(q(t)\hat{a}_1^\dagger\cdot\right)^k}{k!}(\hat{a}_2\cdot)^{k-1}\hat{a}_2|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle\\&=\sum_k\frac{\left(q(t)\hat{a}_1^\dagger\cdot\right)^k}{k!}\alpha_2(\hat{a}_2\cdot)^{k-2}\hat{a}_2|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle\\&=\sum_k\frac{\left(q(t)\hat{a}_1^\dagger\cdot\right)^k}{k!}{\alpha_2}^k|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle\end{aligned}$$

retornando à forma exponencial

$$e^{q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle=e^{q(t)\alpha_2\hat{a}_1^\dagger\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle,$$

Por outro lado, da equação A.3 podemos concluir que:

$$e^{q(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle=e^{-\frac{|\alpha_1|^2}{2}}e^{\frac{|\alpha_1+q(t)\alpha_2|^2}{2}}|\alpha_1+q(t)\alpha_2\rangle\otimes|\alpha_2\rangle. \qquad (A.7)$$

2. Superoperador $\hat{a}_1\ \hat{a}_2^\dagger\cdot$
Para obtermos a atuação de $e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle$, basta trocar $\hat{a}_1$ com $\hat{a}_2$ e α_1 com α_2 do item anterior, i e:

$$e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle = e^{q(t)\hat{a}_2^\dagger\cdot\hat{a}_1\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle = e^{q(t)(\alpha_1)\hat{a}_2^\dagger\cdot}|\alpha_2\rangle\otimes|\alpha_1\rangle$$
$$\downarrow$$
$$e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle = e^{-\frac{|\alpha_2|^2}{2}}e^{\frac{|\alpha_2+q(t)\alpha_1|^2}{2}}|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2+q(t)\alpha_1\rangle. \quad (A.8)$$

3. Superoperador $\cdot\hat{a}_1\ \hat{a}_2^\dagger$

$$\begin{aligned}
e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger}\langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2| &= \sum_k \frac{\left(q^*(t)\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right)^k}{k!}\langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2| \\
&= \sum_k \langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2|(\cdot\hat{a}_2^\dagger)^k\frac{(q^*(t)\cdot\hat{a}_1)^k}{k!} \\
&= \sum_k \langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2|\hat{a}_2^\dagger(\cdot\hat{a}_2^\dagger)^{k-1}\frac{(q^*(t)\cdot\hat{a}_1)^k}{k!} \\
&= \sum_k \langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2|\hat{a}_2^\dagger(\cdot\hat{a}_2^\dagger)^{k-2}\alpha_2{}^*\frac{(q^*(t)\cdot\hat{a}_1)^k}{k!} \\
&= \langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2|\sum_k \alpha_2{}^{*k}\frac{(q^*(t)\cdot\hat{a}_1)^k}{k!} \\
&= e^{\cdot\hat{a}_1 q^*(t)\alpha_2{}^*}\langle\alpha_1|\otimes\langle\alpha_2|.
\end{aligned}$$

Da equação A.4 concluimos

$$e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2| = e^{-\frac{|\alpha_1|^2}{2}}e^{\frac{|\alpha_2^*+q^*(t)\alpha_1^*|^2}{2}}\langle\alpha_1+q(t)\alpha_2|\langle\alpha_2|. \quad (A.9)$$

4. Superoperador $\cdot\hat{a}_1^\dagger\ \hat{a}_2$
Para obtermos a atuação de $e^{q_t^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2|$, basta trocar $\hat{a}_1$ com $\hat{a}_2$ e α_1 com α_2 do item anterior, i e:

$$e^{q_t^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2| = e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2| = e^{q^*(t)(\alpha_1^*)\cdot\hat{a}_2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2|$$
$$\downarrow$$
$$e^{q_t^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2| = e^{-\frac{|\alpha_2|^2}{2}}e^{\frac{|\alpha_2^*+q^*(t)\alpha_1^*|^2}{2}}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2+q(t)\alpha_1|,. \quad (A.10)$$

- 2ª **Maneira** - Superoperadores "tipo 11"ou "tipo 22"com <u>ponto à direita ou à esquerda</u>. Para mostra que a exponencial desses superoperadores atuando num estado coerente, "gira" o estado e cria uma fase faremos os cálculos para os quatros superoperadores que aparecem na equação 4.16.

1. Superoperadores $\hat{a}_1^\dagger\ \hat{a}_1\cdot$ e $\hat{a}_2^\dagger\ \hat{a}_2\cdot$

$$
\begin{aligned}
e^{m_1(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot}|\alpha_1\rangle &= \sum_n e^{m_1(t)n}|n\rangle\langle n||\alpha_1\rangle \\
&= \sum_{n,n'} e^{m_1(t)n}|n\rangle\langle n|n'\rangle e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\frac{{\alpha_1}^{n'}}{\sqrt{n'!}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\sum_n e^{m_1(t)n}\frac{{\alpha_1}^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1 e^{m_1(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}e^{\frac{1}{2}|\alpha_1 e^{m_1(t)}|^2}e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1 e^{m_1(t)}|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1 e^{m_1(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
\end{aligned}
$$

como

$$
|\alpha_1 e^{m_1(t)}\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1 e^{m_1(t)}|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1 e^{m_1(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,
$$

então podemos concluir

$$
e^{m_1(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot}|\alpha_1\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}e^{\frac{1}{2}|e^{m_1(t)}\alpha_1|^2}|\alpha_1 e^{m_1(t)}\rangle. \tag{A.11}
$$

Analogamente

$$
e^{m_2(t)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\cdot}|\alpha_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_2|^2}e^{\frac{1}{2}|e^{m_2(t)}\alpha_2|^2}|\alpha_2 e^{m_2(t)}\rangle. \tag{A.12}
$$

2. Superoperadores $\cdot\hat{a}_1^\dagger\ \hat{a}_1$ e $\cdot\hat{a}_2^\dagger\ \hat{a}_2$

$$
\begin{aligned}
e^{m_1^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1}\langle\alpha_1| &= \\
&= \sum_n e^{m_1^*(t)n^*}|n\rangle\langle n||\langle\alpha_1| \\
&= \sum_{n,n'} e^{m_1^*(t)n^*}|n\rangle\langle n|\langle n'|e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\frac{{\alpha_1^*}^{n'}}{\sqrt{n'!}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\sum_n e^{m_1^*(t)n}\frac{{\alpha_1^*}^n}{\sqrt{n!}}\langle n| \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1^* e^{m_1^*(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}\langle n| \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}e^{\frac{1}{2}|\alpha_1^* e^{m_1^*(t)}|^2}e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1^* e^{m_1(t)}|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1^* e^{m_1^*(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}\langle n|
\end{aligned}
$$

como

$$
\langle\alpha_1 e^{m_1(t)}| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1 e^{m_1(t)}|^2}\sum_n \frac{\left(\alpha_1^* e^{m_1^*(t)}\right)^n}{\sqrt{n!}}\langle n|
$$

então podemos concluir

$$e^{m_1^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1}\langle\alpha_1| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2}e^{\frac{1}{2}|e^{m_1(t)}\alpha_1|^2}\langle\alpha_1 e^{m_1(t)}|. \tag{A.13}$$

Analogamente

$$e^{m_2^*(t)\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2}\langle\alpha_2| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_2|^2}e^{\frac{1}{2}|e^{m_2(t)}\alpha_2|^2}\langle\alpha_2 e^{m_2(t)}| \tag{A.14}$$

- 3ª **Maneira** - Superoperadores"tipo 11"ou "tipo 22" com ponto no meio. Para mostra que a exponencial desses superoperadores atuando num estado coerente não altera o estado, faremos o segunte cálculo:

  1. Superoperadores $\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger$, $\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger$, $\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger$ e $\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger$

$$\begin{aligned} e^{j_1(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| &= \sum_k \frac{j_1(t)^k}{k!}(\hat{a}_1)^k|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|(\hat{a}_1^\dagger)^k \\ &= e^{j_1(t)|\alpha_1|^2}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|. \end{aligned} \tag{A.15}$$

  Analogamente:

$$\begin{aligned} e^{j_2(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger}|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| &= \sum_k \frac{j_2(t)^k}{k!}(\hat{a}_2)^k|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|(\hat{a}_2^\dagger)^k \\ &= e^{j_2(t)|\alpha_2|^2}|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|, \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} e^{z(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger}|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1| &= \sum_k \frac{z(t)^k}{k!}(\hat{a}_2)^k|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1|(\hat{a}_1^\dagger)^k \\ &= e^{z(t)\alpha_2\alpha_1^*}|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1|, \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} e^{z^*(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| &= \sum_k \frac{(z^*(t))^k}{k!}(\hat{a}_1)^k|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|(\hat{a}_2^\dagger)^k \\ &= e^{z^*(t)\alpha_2^*\alpha_1}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|. \end{aligned} \tag{A.18}$$

A.3 Evolução de $\rho_0 = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$

Com o estado inicial em questão, mostraremos a evolução de $\rho(t)$ da equação 4.16.

1. Os superoperadores das equações A.7 e A.9 atuando em $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$, resultam:

$$\begin{aligned} & e^{q(t)\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger}\cdot e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \\ &\quad = e^{-|\alpha_1|^2}e^{|\alpha_1+q(t)\alpha_2|^2}|\alpha_1 + q(t)\alpha_2\rangle\langle\alpha_1 + q(t)\alpha_2| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \end{aligned}$$

com isto

$$\rho(t) = e^{|\alpha_1|^2} e^{-|\alpha_1+q(t)\alpha_2|^2} e^{j_1(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger} e^{z(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{z^*(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger} e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot} \odot$$
$$\odot\, e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2} e^{m_2(t)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\cdot} e^{m_2^*(t)\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2} e^{m_1(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot} e^{m_1^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1} |\alpha_1 + q(t)\alpha_2\rangle \odot$$
$$\odot\, \langle\alpha_1 + q(t)\alpha_2| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$$

2. Os superoperadores das equações A.11, A.12, A.13 e A.12 atuando em $|\alpha_1 + q(t)\alpha_2\rangle\langle\alpha_1 + q(t)\alpha_2| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$, resultam:

$$e^{m_2(t)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\cdot} e^{m_2^*(t)\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2} e^{m_1(t)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot} e^{m_1^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1} \odot$$
$$\odot |\alpha_1 + q(t)\alpha_2\rangle\langle\alpha_1 + q(t)\alpha_2| \otimes |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| =$$
$$= e^{-|\alpha_1+q(t)\alpha_2|^2} e^{|(\alpha_1+q(t)\alpha_2)e^{m_1(t)}|^2} e^{-|\alpha_2|^2} e^{|\alpha_2 e^{m_2(t)}|^2} \odot$$
$$\odot |\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}\rangle\langle\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}| \otimes |\alpha_2 e^{m_2(t)}\rangle\langle\alpha_2 e^{m_2(t)}|$$

com isto

$$\rho(t) = e^{-|\alpha_1|^2} e^{|(\alpha_1+q(t)\alpha_2)e^{m_1(t)}|^2} e^{-|\alpha_2|^2} e^{|\alpha_2 e^{m_2(t)}|^2} \odot$$
$$\odot\, e^{j_1(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger} e^{z(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{z^*(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger} e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot} e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2} \odot$$
$$\odot\, |\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}\rangle\langle\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}| \otimes |\alpha_2 e^{m_2(t)}\rangle\langle\alpha_2 e^{m_2(t)}|$$

3. Os superoperadores das equações A.8 e A.10 atuando em $|\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}\rangle\langle\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}| \otimes |\alpha_2 e^{m_2(t)}\rangle\langle\alpha_2 e^{m_2(t)}|$, resultam:

$$e^{q(t)\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot} e^{q^*(t)\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2} |\left(\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right) e^{m_1(t)}\rangle\langle\left(\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right) e^{m_1(t)}| \otimes$$
$$\otimes |\alpha_2 e^{m_2(t)}\rangle\langle\alpha_2 e^{m_2(t)}| = e^{-|\alpha_2 e^{m_2(t)}|^2} e^{|(\alpha_1+q(t)\alpha_2)e^{m_1(t)}|^2 + |\alpha_2 e^{m_2(t)}|^2} \odot$$
$$\odot |\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}\rangle\langle\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}| \otimes$$
$$\otimes |\alpha_2 e^{m_2(t)} + q(t)\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}\rangle\langle\alpha_2 e^{m_2(t)} + q(t)\left[\alpha_1 + q(t)\alpha_2\right] e^{m_1(t)}|.$$

Definindo

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1t} &\equiv \alpha_1 e^{m_1(t)} + \alpha_2 q(t) e^{m_1(t)} \\ \alpha_{2t} &\equiv \alpha_1 q(t) e^{m_1(t)} + \alpha_2 \left[e^{m_2(t)} + q(t)^2 e^{m_1(t)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{A.19}$$

teremos

$$\rho(t) = e^{-|\alpha_1|^2} e^{|\alpha_{1t}|^2} e^{-|\alpha_2|^2} e^{|\alpha_{2t}|^2} e^{j_1(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger} e^{z(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{z^*(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger} \odot$$
$$\odot |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|.$$

4. Os superoperadores das equações das equações A.17 e A.18 atuando em $|\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|$, resultam:

$$e^{z(t)\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger} e^{z^*(t)\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}| =$$
$$e^{z(t)(\alpha_{1t})^*\alpha_{2t}} e^{z^*(t)\alpha_{1t}(\alpha_{2t})^*} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|,$$

com isto

$$\rho(t) = e^{-|\alpha_1|^2} e^{-|\alpha_2|^2} e^{z(t)(\alpha_{1t})^* \alpha_{2t}} e^{z^*(t)\alpha_{1t}(\alpha_{2t})^*} e^{|\alpha_{1t}|^2} e^{|\alpha_{2t}|^2} \odot$$
$$\odot e^{j_1(t)\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|.$$

5. Os superoperadores das equações A.15 e A.16 atuando em $|\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|$, resultam:

$$e^{j_1(t)\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger} e^{j_2(t)\hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}| =$$
$$= e^{j_1(t)|\alpha_{1t}|^2} e^{j_2(t)|\alpha_{2t}|^2} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|,$$

com isto

$$\rho(t) = e^{-|\alpha_1|^2} e^{-|\alpha_2|^2} e^{z(t)(\alpha_{1t})^* \alpha_{2t}} e^{z^*(t)\alpha_{1t}(\alpha_2)^*} \odot$$
$$\odot e^{(j_1(t)+1)|\alpha_{1t}|^2} e^{(j_2(t)+1)|\alpha_{2t}|^2} |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|.$$

Uma vez que $Tr\rho(t) = 1$, então podemos determinar os coeficientes $j_2(t)$, $j_1(t)$, $z(t)$,

$$\left.\begin{aligned}
j_2(t) &= (1 + |q(t)|^2)\left(\left|e^{m_2(t)}\right|^{-2}\right) - 1 \\
j_1(t) &= \left|e^{-m_1(t)} + q(t)^2 e^{-m_2(t)}\right|^2 + (|q(t)|^2)\left(\left|e^{m_2(t)}\right|^{-2}\right) - 1 \\
z(t) &= -q(t)e^{-\left(m_1^*(t)+m_2(t)\right)} - q^*(t)\,(1 + |q(t)|^2)\left|e^{m_2(t)}\right|^{-2}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.20)}$$

Assim, podemos finalmente obter a evolução temporal do estado coerente objeto desta seção, e escrever:

$$\rho(t) = |\alpha_{1t}\rangle\langle\alpha_{1t}| \otimes |\alpha_{2t}\rangle\langle\alpha_{2t}|. \qquad \text{(A.21)}$$

Apêndice B

Aplicação da técnica 3.2.2 para dois osciladores

B.1 Relação de comutação

Dadas as relações de comutação entre os superoperadores bosônicos,

$$\begin{aligned}
\left[(\hat{a}_1\cdot),(\hat{a}_1^\dagger\cdot)\right] &= (1\cdot) = 1 \\
\left[(\cdot\hat{a}_1),(\cdot\hat{a}_1^\dagger)\right] &= -(\cdot 1) = -1 \\
\left[(\cdot\hat{a}_1),(\hat{a}_1^\dagger\cdot)\right] &= \left[(\hat{a}_1\cdot),(\cdot\hat{a}_1^\dagger)\right] = 0
\end{aligned}$$

construiremos, a seguir, uma tabela de comutação entre os superoperadores,

$$\begin{array}{llllll}
\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot \equiv \hat{\mathbb{M}}_1, & \cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \equiv \hat{\mathbb{P}}_1, & \hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger \equiv \hat{\mathbb{J}}_1, & \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot \equiv \hat{\mathbb{N}}, & \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot \equiv \hat{\mathbb{Q}}, & \hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger \equiv \hat{\mathbb{Z}}, \\
\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\cdot \equiv \hat{\mathbb{M}}_2, & \cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \equiv \hat{\mathbb{P}}_2, & \hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger \equiv \hat{\mathbb{J}}_2, & \cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 \equiv \hat{\mathbb{N}}_l, & \cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger \equiv \hat{\mathbb{Q}}_l, & \hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger \equiv \hat{\mathbb{Z}}_l,
\end{array}$$

de interesse ao nosso trabalho.

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_l,\hat{\mathbb{J}}_1\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger\right] = \hat{a}_1\cdot\overbrace{\left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_1\cdot,\cdot\hat{a}_1^\dagger\right]}^{0} + \overbrace{\left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1\cdot\right]}^{-\hat{a}_1\cdot}\cdot\hat{a}_1^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_1$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_1,\hat{\mathbb{Q}}\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1^\dagger\cdot\right]\hat{a}_2\cdot = \hat{\mathbb{Q}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_l,\hat{\mathbb{N}}\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_1\cdot,\hat{a}_1\cdot\right]\hat{a}_2^\dagger\cdot = -\hat{\mathbb{N}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_1, \hat{\mathbb{Z}}_l\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \cdot, \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2^\dagger\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1 \cdot, \hat{a}_1 \cdot\right] \cdot \hat{a}_2^\dagger = -\hat{\mathbb{Z}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_1, \hat{\mathbb{J}}_1\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger\right] = \underbrace{\left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1, \hat{a}_1 \cdot\right]}_{0} \cdot \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \cdot \underbrace{\left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1^\dagger\right]}_{\cdot \hat{a}_1^\dagger} = -\hat{\mathbb{J}}_1$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_1, \hat{\mathbb{Q}}_l\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1\right] \cdot \hat{a}_2^\dagger = \hat{\mathbb{Q}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_1, \hat{\mathbb{N}}_l\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1^\dagger\right] \cdot \hat{a}_2 = -\hat{\mathbb{N}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_1, \hat{\mathbb{Z}}\right] = \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1, \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1^\dagger\right] = \hat{a}_2 \cdot \left[\cdot \hat{a}_1^\dagger \cdot \hat{a}_1, \cdot \hat{a}_1^\dagger\right] = -\hat{\mathbb{Z}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{J}}_1, \hat{\mathbb{Q}}\right] = \left[\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \cdot\right] = \left[\hat{a}_1 \cdot \cdot \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger \cdot\right] \hat{a}_2 \cdot = \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{J}}_1, \hat{\mathbb{Q}}_l\right] = \left[\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_1^\dagger, \cdot \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger\right] = \left[\hat{a}_1 \cdot \cdot \hat{a}_1^\dagger, \cdot \hat{a}_1\right] \cdot \hat{a}_2^\dagger = \hat{\mathbb{Z}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_2, \hat{\mathbb{J}}_2\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2 \cdot\right] \cdot \hat{a}_2^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_2$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_2, \hat{\mathbb{Q}}\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \cdot\right] = \hat{a}_1^\dagger \cdot \left[\hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2 \cdot\right] = -\hat{\mathbb{Q}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_2, \hat{\mathbb{N}}\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \cdot\right] = \hat{a}_1 \cdot \left[\hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2^\dagger \cdot\right] = \hat{\mathbb{N}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{M}}_2, \hat{\mathbb{Z}}\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_1^\dagger\right] = \left[\hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2 \cdot, \hat{a}_2 \cdot\right] \cdot \hat{a}_1^\dagger = -\hat{\mathbb{Z}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_2, \hat{\mathbb{J}}_2\right] = \left[\cdot \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \hat{a}_2 \cdot \hat{a}_2^\dagger\right] = \hat{a}_2 \cdot \left[\cdot \hat{a}_2^\dagger \cdot \hat{a}_2, \cdot \hat{a}_2^\dagger\right] = -\hat{\mathbb{J}}_2$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_2, \hat{\mathbb{Q}}_l\right] = \left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right] = \cdot\hat{a}_1\left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = -\hat{\mathbb{Q}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_2, \hat{\mathbb{N}}_l\right] = \left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right] = \cdot\hat{a}_1^\dagger\left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_2\right] = \hat{\mathbb{N}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{P}}_2, \hat{\mathbb{Z}}_l\right] = \left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = \hat{a}_1\cdot\left[\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = -\hat{\mathbb{Z}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{J}}_2, \hat{\mathbb{N}}\right] = \left[\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot\right] = \hat{a}_1\cdot\left[\hat{a}_2\cdot\cdot\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\cdot\right] = \hat{\mathbb{Z}}_l$$

$$\left[\hat{\mathbb{J}}_2, \hat{\mathbb{N}}_l\right] = \left[\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger, \cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right] = \cdot\hat{a}_1^\dagger\left[\hat{a}_2\cdot\cdot\hat{a}_2^\dagger, \cdot\hat{a}_2\right] = \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\left[\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathbb{Z}}\right] = \left[\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot, \hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger\right] = \hat{a}_2\cdot\left[\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot, \cdot\hat{a}_1^\dagger\right] + \left[\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot, \hat{a}_2\cdot\right]\cdot\hat{a}_1^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_1$$

$$\left[\hat{\mathbb{N}}_l, \hat{\mathbb{Z}}_l\right] = \left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = \hat{a}_1\cdot\left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_2^\dagger\right] + \left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2, \hat{a}_1\cdot\right]\cdot\hat{a}_2^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_1$$

$$\left[\hat{\mathbb{Q}}_l, \hat{\mathbb{Z}}\right] = \left[\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger\right] = \hat{a}_2\cdot\left[\cdot\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger, \cdot\hat{a}_1^\dagger\right] + \left[\cdot\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2\cdot\right]\cdot\hat{a}_1^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_2$$

$$\left[\hat{\mathbb{Q}}, \hat{\mathbb{Z}}_l\right] = \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot, \hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = \hat{a}_1\cdot\left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2\cdot, \cdot\hat{a}_2^\dagger\right] + \left[\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2\cdot, \hat{a}_1\cdot\right]\cdot\hat{a}_2^\dagger = -\hat{\mathbb{J}}_2$$

$$\left[\hat{\mathbb{N}}, \hat{\mathbb{Q}}\right] = \left[\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot, \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot\right] = \left[\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot, \hat{a}_1^\dagger\cdot\right]\hat{a}_2\cdot + \hat{a}_1^\dagger\cdot\left[\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\cdot, \hat{a}_2\cdot\right] = \hat{\mathbb{M}}_2 - \hat{\mathbb{M}}_1$$

$$\left[\hat{\mathbb{N}}_l, \hat{\mathbb{Q}}_l\right] = \left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right] = \left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_1\right]\cdot\hat{a}_2^\dagger + \cdot\hat{a}_1\left[\cdot\hat{a}_1^\dagger\cdot\hat{a}_2, \cdot\hat{a}_2^\dagger\right] = \hat{\mathbb{P}}_2 - \hat{\mathbb{P}}_1.$$

Sendo as demais relações de comutação utilizadas no nosso trabalho iguais a zero, podemos resumir todas as relações de comutação calculadas na tabela que segue:

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{M}}_1, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{Q}} \\ \hat{\mathbb{N}} \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{Q}} \\ -\hat{\mathbb{N}} \\ -\hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{P}}_1, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \\ \hat{\mathbb{N}}_l \\ \hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \\ -\hat{\mathbb{N}}_l \\ -\hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix},$$

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{M}}_2, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{Q}} \\ \hat{\mathbb{N}} \\ \hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbb{J}}_2 \\ -\hat{\mathbb{Q}} \\ \hat{\mathbb{N}} \\ -\hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{P}}_2, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \\ \hat{\mathbb{N}}_l \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbb{J}}_2 \\ -\hat{\mathbb{Q}}_l \\ \hat{\mathbb{N}}_l \\ -\hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix},$$

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{J}}_1, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \hat{\mathbb{P}}_1 \\ \hat{\mathbb{Q}} \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{Z}} \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{J}}_2, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{M}}_2 \\ \hat{\mathbb{P}}_2 \\ \hat{\mathbb{N}} \\ \hat{\mathbb{N}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \\ \hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix},$$

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{Z}}, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{P}}_1 \\ \hat{\mathbb{M}}_2 \\ \hat{\mathbb{N}} \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}} \\ \hat{\mathbb{Z}} \\ \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{J}}_2 \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{Z}}_l, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \hat{\mathbb{P}}_2 \\ \hat{\mathbb{N}}_l \\ \hat{\mathbb{Q}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_l \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \\ \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{J}}_2 \end{pmatrix},$$

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{Q}}, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{N}} \\ \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{M}}_2 \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{M}}_1 - \hat{\mathbb{M}}_2 \\ -\hat{\mathbb{Q}} \\ -\hat{\mathbb{Z}} \\ \hat{\mathbb{Q}} \\ -\hat{\mathbb{J}}_2 \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{N}}, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Q}} \\ \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \hat{\mathbb{M}}_2 \\ \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{M}}_2 - \hat{\mathbb{M}}_1 \\ \hat{\mathbb{N}} \\ -\hat{\mathbb{N}} \\ -\hat{\mathbb{Z}}_l \\ -\hat{\mathbb{J}}_1 \end{pmatrix},$$

$$\bullet \left[\hat{\mathbb{Q}}_l, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{N}}_l \\ \hat{\mathbb{P}}_1 \\ \hat{\mathbb{J}}_1 \\ \hat{\mathbb{P}}_2 \\ \hat{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{P}}_1 - \hat{\mathbb{P}}_2 \\ -\hat{\mathbb{Q}}_l \\ -\hat{\mathbb{Z}}_l \\ \hat{\mathbb{Q}}_l \\ -\hat{\mathbb{J}}_2 \end{pmatrix}, \qquad \bullet \left[\hat{\mathbb{N}}_l, \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Q}}_l \\ \hat{\mathbb{P}}_1 \\ \hat{\mathbb{P}}_2 \\ \hat{\mathbb{J}}_2 \\ \hat{\mathbb{Z}}_l \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{P}}_2 - \hat{\mathbb{P}}_1 \\ \hat{\mathbb{N}}_l \\ -\hat{\mathbb{N}}_l \\ -\hat{\mathbb{Z}} \\ -\hat{\mathbb{J}}_1 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

B.2 Desacoplamento de dois osciladores

O liuvilliano encontrado na dedução da equação Mestra 4.15, pode ser ordenado da seguinte maneira:

$$e^{\mathcal{L}_0 t} = \left(e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)\left(e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\odot$$

$$\odot\left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{q(t)\hat{\mathbb{Q}}}\right)\left(e^{q_l(t)\hat{\mathbb{Q}}_l}\right).$$

Para calcularmos os coeficientes do ordenamento dado, utilizaremos a técnica de derivação de parâmetros apresentada no capítulo 3.
O objetivo desta técnica é obter através de derivação, a mesma exponencial em ambos os lados da igualdade e manter os superoperadores que não estiverem na cabeça das exponenciais, por conta da derivada, **sempre a esquerda das exponenciais**, para que possam ficar "livres", serem comparados e seus coeficientes determinados. Para atingir este objetivo de uma maneira prática definiremos:

1. $\hat{\mathbf{e}}_1 \equiv e^{q(t)\hat{\mathbb{Q}}}e^{q_l(t)\hat{\mathbb{Q}}_l}$,
2. $\hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\hat{\mathbf{e}}_1$,
3. $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\hat{\mathbf{e}}_2$,
4. $\hat{\mathbf{e}}_4 \equiv e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\hat{\mathbf{e}}_3$,
5. $\hat{\mathbf{e}}_5 \equiv e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\hat{\mathbf{e}}_4$,
6. $\hat{\mathbf{e}}_6 \equiv e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\hat{\mathbf{e}}_5$,
7. $e^{\mathcal{L}_0 t} \equiv e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbf{e}}_6$,

em seguida faremos a derivada no tempo de cada item definido, por exemplo $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_1$, escrevendo o resultado como um produto de um superoperador vezes o próprio item definido, $\hat{\mathbf{e}}_1$. Procuraremos explicar detalhadamente até a derivada da segunda definição e depois utilizaremos o mesmo raciocínio para as derivadas das definições seguintes até que consigamos escrever $\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t} = (\sum \text{de superoperadores})e^{\mathcal{L}_0 t}$ e determinarmos os valores dos coeficientes.

1. A derivada no tempo para $\hat{\mathbf{e}}_1$ é dada por:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_1\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}} + \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_1.$$

   atingindo o objetivo de maneira direta, pois de acordo com as equações B.1, a relação de comutação entre estes superoperadores é zero.

2. A derivada no tempo para $\hat{\mathbf{e}}_2$ é dada por:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$

$$+\left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_1\right),$$

observamos que o primeiro termo atinge o objetivo proposto, enquanto que no segundo termo podemos substituir $\hat{\mathbf{e}}_1$, calculado no item 1.

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}} + \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_1.$$

Para podermos escrever o segundo termo em função de $\hat{\mathbf{e}}_2$, temos que transportar as exponenciais para a direita dos superoperadores $\hat{\mathbb{Q}}$ e $\hat{\mathbb{Q}}_l$. O artifício usado é mostrado a seguir.

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}\odot$$
$$\odot\underbrace{\left(e^{-m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)}_{1}\hat{\mathbf{e}}_1$$
$$+ \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\odot$$
$$\odot\underbrace{\left(e^{-p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)}_{1}\hat{\mathbf{e}}_1.$$

As relações de comutação em B.1, nos indica que os superoperadores $\hat{\mathbb{P}}_1$, $\hat{\mathbb{P}}_2$ e $\hat{\mathbb{M}}_1$, $\hat{\mathbb{M}}_2$ comutam entre sí e com os superoperadores $\hat{\mathbb{Q}}$ e $\hat{\mathbb{Q}}_l$ respectivamente, então:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\odot$$
$$\odot\underbrace{\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\hat{\mathbf{e}}_1}_{\hat{\mathbf{e}}_2}$$
$$+ \left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\odot$$
$$\odot\underbrace{\left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\hat{\mathbf{e}}_1}_{\hat{\mathbf{e}}_2}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$

$$+ \left(e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\left(e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right)\left(e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right)\hat{\mathbf{e}}_2$$

$$+ \left(e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\left(e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right)\left(e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right)\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Para que os superoperadores, $\hat{\mathbb{Q}}$ e $\hat{\mathbb{Q}}_l$, fiquem a esquerda das exponenciais, utilizaremos a transformação de semelhança 3.5 e as relações de comutação dadas em B.1,como segue

$$e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}\,e^{-m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\left[e^{m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\hat{\mathbb{Q}}\,e^{-m_1(t)\hat{\mathbb{M}}_1}\right]e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\left[\underbrace{\left(1 + \frac{m_1(t)}{1!} + \frac{m_1(t)^2}{2!} + \ldots\right)}_{=e^{m_1(t)}}\hat{\mathbb{Q}}\right]e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{m_1(t)}\left[e^{m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\hat{\mathbb{Q}}e^{-m_2(t)\hat{\mathbb{M}}_2}\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{m_1(t)}\left[\left(1 - \frac{m_2(t)}{1!} + \frac{m_2(t)^2}{2!} - \ldots\right)\hat{\mathbb{Q}}\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{m_1(t)-m_2(t)}\;\hat{\mathbb{Q}},$$

$$e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\;e^{-p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\left[e^{p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\hat{\mathbb{Q}}_l\;e^{-p_1(t)\hat{\mathbb{P}}_1}\right]e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\left[\left(1 + \frac{p_1(t)}{1!} + \frac{p_1(t)^2}{2!} + \ldots\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\right]e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right) e^{p_1(t)} \left[e^{p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\hat{\mathbb{Q}}_l e^{-p_2(t)\hat{\mathbb{P}}_2}\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right) e^{p_1(t)} \left[\left(1 - \frac{p_2(t)}{1!} + \frac{p_2(t)^2}{2!} - \ldots\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right) e^{p_1(t)-p_2(t)}\hat{\mathbb{Q}}_l,$$

e finalmente atinjir nosso objetivo escrevendo:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\hat{\mathbb{Q}} + \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Para as derivadas das definições restantes, utilizaremos o mesmo roteiro que foi detalhado para $\hat{\mathbf{e}}_2$.

3. A derivada no tempo da terceira definição $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\hat{\mathbf{e}}_2$ é dada por:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_3\right) = \left(\frac{d}{dt}n(t)\right)\hat{\mathbb{N}}\hat{\mathbf{e}}_3 + \left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_2\right)$$
$$= \left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 + \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_2$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}n(t)\right)\hat{\mathbb{N}}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Utilizando os artifícios feitos para o segundo caso e as relações de comutação dadas em B.1, teremos:

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_3 = \left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2\right]\left(e^{-n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\hat{\mathbf{e}}_3$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\left[\left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$
$$+ \left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)\hat{\mathbb{N}}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Da transformação de semelhança 3.5 podemos transportar os superoperadores $\hat{\mathbb{M}}_1$, $\hat{\mathbb{M}}_2$, $\hat{\mathbb{Q}}$ para e esquerda das exponenciais, como mostramos a seguir,

$$\left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left(e^{-n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right) = \left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_1 + \left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)n(t)\hat{\mathbb{N}}$$

$$\left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left(e^{-n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right) = \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\hat{\mathbb{M}}_2 - \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)n(t)\hat{\mathbb{N}}$$

$$\left(e^{n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-n(t)\hat{\mathbb{N}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\left(\hat{\mathbb{Q}} + n(t)\hat{\mathbb{M}}_2 - n(t)\hat{\mathbb{M}}_1 - n(t)^2\hat{\mathbb{N}}\right)$$

e atijir nosso objetivo escrevendo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_3\right) &= \hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right) + n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right) - n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)n(t) - \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)n(t)\right]\hat{\mathbf{e}}_3 \\
&+\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}q_1(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}\right]\hat{\mathbf{e}}_3.
\end{aligned}$$

4. A derivada no tempo da quarta definição $\hat{\mathbf{e}}_4 \equiv e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\hat{\mathbf{e}}_3$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_4\right) &= \left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_3\right) + \left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)\hat{\mathbb{N}}_l\hat{\mathbf{e}}_4 \\
&= \left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3
\end{aligned}$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2+\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1+\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}_l\right]\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$+\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)\hat{\mathbb{N}}_l\hat{\mathbf{e}}_4.$$

Utilizando os artifícios já mostrados e as relações de comutação dadas em B.1, teremos:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_4\right)=\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2+\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1\right]\left(e^{-n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\left[\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4$$

$$+\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)\hat{\mathbb{N}}_l\hat{\mathbf{e}}_4.$$

Da transformação de semelhança 3.5 podemos escrever:

$$\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2\left(e^{-n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)=\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_2-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l$$

$$\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1\left(e^{-n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right) = \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)\hat{\mathbb{P}}_1 + \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l$$

$$\left(e^{n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-n_l(t)\hat{\mathbb{N}}_l}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\left(\hat{\mathbb{Q}}_l + n_l(t)\hat{\mathbb{P}}_2 - n_l(t)\hat{\mathbb{P}}_1 - n_l(t)^2\hat{\mathbb{N}}_l\right)$$

e atijir nosso objetivo escrevendo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_4\right) = {} & \hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right) + n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right) - n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right) + n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{Q}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right) - n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4 \\
& +\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4.
\end{aligned}$$

5. A derivada no tempo da quinta definição $\hat{\mathbf{e}}_5 \equiv e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\hat{\mathbf{e}}_4$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_5\right) = {} & \left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_4\right) + \left(\frac{d}{dt}z(t)\right)\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbf{e}}_5 \\
& + \left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_4\\
&+\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbf{e}}_5.
\end{aligned}
$$

Utilizando os artifícios já mostrados e as relações de comutação dadas em B.1, teremos:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_5\right)=&\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\left[\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\left[\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\left[\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\right]\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{P}}_1\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\left[\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbf{e}}_5.
\end{aligned}
$$

Da transformação de semelhança 3.5 podemos escrever:

$$
\begin{array}{ll}
\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{P}}_1\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)=\tilde{\mathbb{P}}_1+z(t)\hat{\mathbb{Z}} & \left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)=\tilde{\mathbb{Q}}_l+z(t)\tilde{\mathbb{J}}_2\\
\left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)=\hat{\mathbb{M}}_2+z(t)\hat{\mathbb{Z}} & \left(e^{z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)\hat{\mathbb{N}}\left(e^{-z(t)\hat{\mathbb{Z}}}\right)=\hat{\mathbb{N}}+z(t)\hat{\mathbb{J}}_1
\end{array}
$$

e atijir nosso objetivo escrevendo:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_5\right)=&\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5\\
&+\hat{\mathbb{Q}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5
\end{aligned}
$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1z(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_5$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_5.$$

6. Derivando no tempo a sexta definição $\hat{\mathbf{e}}_6 \equiv e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\hat{\mathbf{e}}_5$, utilizando os artifícios já mostrados e as relações de comutação dadas na tabela B.1 obtemos:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_6\right)=\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_5\right)+\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)\hat{\mathbb{Z}}_l\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$=\left[\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\left[\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\left[\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{P}}_2\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$
\begin{aligned}
&+\hat{\mathbb{Q}}_l \left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\left[\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\left[\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\right]\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{Z}}z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{Z}}\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{J}}_2\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)\hat{\mathbb{Z}}_l\hat{\mathbf{e}}_6.
\end{aligned}
$$

Da transformação de semelhança 3.5 podemos escrever:

$$
\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{P}}_2\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)=\hat{\mathbb{P}}_2+z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l \qquad \left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)=\hat{\mathbb{Q}}+z_l(t)\hat{\mathbb{J}}_2
$$

$$
\left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)=\hat{\mathbb{M}}_1+z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l \quad \left(e^{z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left(e^{-z_l(t)\hat{\mathbb{Z}}_l}\right)=\hat{\mathbb{N}}_l+z_l(t)\hat{\mathbb{J}}_1
$$

e atijir nosso objetivo escrevendo:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_6\right)=&\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6 \\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6
\end{aligned}
$$

$$+\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{Q}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[n_l(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_6$$

$$+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\hat{\mathbf{e}}_6.$$

7. Derivando no tempo a sétima definição $e^{\mathcal{L}_0 t} \equiv e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1} e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2} \hat{\mathbb{e}}_B$, utilizando os artifícios mencionados e as relações de comutacão dedas pela tabela B.1 obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t} &= e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1} e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2} \left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbb{e}}_B\right) + \left(\frac{d}{dt}j_1(t)\right)\hat{\mathbb{J}}_1 e^{\mathcal{L}_0 t} + \left(\frac{d}{dt}j_2(t)\right)\hat{\mathbb{J}}_2 e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&= \left[e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\hat{\mathbb{M}}_1 e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbb{M}}_2 e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right) + n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\hat{\mathbb{Q}} e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbb{N}} e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right) - n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbb{N}} e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right]\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\hat{\mathbb{P}}_1 e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbb{P}}_2 e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right) + n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\hat{\mathbb{Q}}_l e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\hat{\mathbb{N}}_l e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right) - n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \left[e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\hat{\mathbb{N}}_l e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right]\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \hat{\mathbb{J}}_1 z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right) - n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \hat{\mathbb{J}}_1 z(t) n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right) - n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right] e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&+ \hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[n_l(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right)\right] e^{\mathcal{L}_0 t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{d}{dt}j_1(t)\right)\hat{\mathbb{J}}_1 e^{\mathcal{L}_0 t}+\left(\frac{d}{dt}j_2(t)\right)\hat{\mathbb{J}}_2 e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{J}}_2\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{J}}_2 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}.
\end{aligned}
$$

Da transformação de semelhança 3.5 podemos escrever:

$$
\begin{array}{llll}
\left(e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)\hat{\mathbb{M}}_1\left(e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)=\hat{\mathbb{M}}_1+j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1 & & \left(e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)\hat{\mathbb{P}}_1\left(e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)=\hat{\mathbb{P}}_1+j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1 & \\
\left(e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)\hat{\mathbb{M}}_2\left(e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)=\hat{\mathbb{M}}_2+j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2 & & \left(e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)\hat{\mathbb{P}}_2\left(e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)=\hat{\mathbb{P}}_2+j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2 & \\
\left(e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)\hat{\mathbb{Q}}\left(e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)=\hat{\mathbb{Q}}+j_1(t)\hat{\mathbb{Z}} & & \left(e^{j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)\hat{\mathbb{Q}}_l\left(e^{-j_1(t)\hat{\mathbb{J}}_1}\right)=\hat{\mathbb{Q}}_l+j_1(t)\hat{\mathbb{Z}}_l & \\
\left(e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)\hat{\mathbb{N}}\left(e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)=\hat{\mathbb{N}}+j_2(t)\hat{\mathbb{Z}}_l & & \left(e^{j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)\hat{\mathbb{N}}_l\left(e^{-j_2(t)\hat{\mathbb{J}}_2}\right)=\hat{\mathbb{N}}_l+j_2(t)\hat{\mathbb{Z}} &
\end{array}
$$

e atijir nosso objetivo final escrevendo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t}=&\,\hat{\mathbb{M}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{M}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{N}}\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}\\
&+\hat{\mathbb{P}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}
\end{aligned}
$$

$$+\hat{\mathbb{P}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{Q}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{N}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 z_l(t)\left[n_l(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 j_1(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1 j_1(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_1\left(\frac{d}{dt}j_1(t)\right)e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2\left(\frac{d}{dt}j_2(t)\right)e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2 z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2 j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$+\hat{\mathbb{J}}_2 j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_2(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0 t}$$

$$
\begin{aligned}
&+\hat{\mathbb{Z}}z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}\left[j_1(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}+j_2(t)\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}j_2(t)n_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_l\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_lj_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]e^{\mathcal{L}_0t}\\
&+\hat{\mathbb{Z}}_lj_2(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]e^{\mathcal{L}_0t}.
\end{aligned}
$$

Escrevendo a equação para $\mathcal{L}_0$ em termos dos superoperadores $\hat{\mathbf{a}}_1$ $\hat{\mathbf{a}}_2$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0=&\,\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_1\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\\
&+\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\\
&+\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\\
&+\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]\\
&+\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\cdot\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]\\
&+\cdot\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger\hat{\mathbf{a}}_1\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]\\
&+\cdot\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger\hat{\mathbf{a}}_2\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]
\end{aligned}
$$

$$+\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\left[\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger z(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger z(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger z_l(t)\left[n_l(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger j_1(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger j_1(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_1^\dagger\left(\frac{d}{dt}j_1(t)\right)$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger\left(\frac{d}{dt}j_2(t)\right)$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger\left[z(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger z_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_2^\dagger j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)+n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger z(t)\left[n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}-n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger\left[\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)+z(t)\left(\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger\left[j_1(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}+j_2(t)\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right)-n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_2\cdot\hat{a}_1^\dagger j_2(t)n_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\left[\left(\frac{d}{dt}z_l(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger\left[n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))}-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger j_2(t)\left[\left(\frac{d}{dt}n(t)\right)-n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}\right]$$

$$+\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2^\dagger j_2(t)n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right].$$

B.3 Cálculo dos coeficientes

Se compararmos os coeficientes da derivada obtida acima com o liouvilliano, $\mathcal{L}_0$, da secção 4.1, equação 4.15, encontraremos um sistema de equações lineares que apresentaremos a seguir.

Comparando os coeficientes dos superoperadores $(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\cdot)$, $(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\cdot)$, $(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\cdot)$, $(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\cdot)$, obtemos respectivamente:

1) $$\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right)-n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}=-i\Omega_1-k_1$$

2) $$\left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)+n(t)\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}=-i\Omega_2-k_2$$

3) $$\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))}=-k_3$$

$$4)\ \left(\frac{d}{dt}n(t)\right) + n(t)\left[\left(\frac{d}{dt}m_1(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}m_2(t)\right)\right] - n(t)^2\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)e^{(m_1(t)-m_2(t))} = -k_3$$

Comparando os coeficientes os superoperadores $(\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)$, $(\cdot\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)$, $(\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger)$, $(\cdot\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)$, obtemos respectivamente:

$$5)\ \left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))} = i\Omega_1 - k_1$$

$$6)\ \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right) + n_l(t)\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))} = i\Omega_2 - k_2$$

$$7)\ \left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))} = -k_3$$

$$8)\ \left(\frac{d}{dt}n_l(t)\right) + n_l(t)\left[\left(\frac{d}{dt}p_1(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}p_2(t)\right)\right] - n_l(t)^2\left(\frac{d}{dt}q_l(t)\right)e^{(p_1(t)-p_2(t))} = -k_3$$

Ao resolver o sistema de equações 1, 2, 3, 4, que é simétrico ao sistema de equações 5, 6, 7, 8, encontraremos uma equação de Riccati cuja solução nos fornecerá os coeficientes que estamos procurando:

$$\left.\begin{array}{l}
q(t) = n(t) = (q_l(t))^* = (n_l(t))^* \\[2ex]
q(t) = 2k_3\left(1 - e^{r\,t}\right)\left(\Delta_+ e^{r\,t} - \Delta_-\right)^{-1} \quad \text{para} \quad r \neq 0 \\[2ex]
e^{m_1(t)} = \frac{c^{-R\,t}}{2r}e^{-\frac{r\,t}{2}}\left(\Delta_+ e^{r\,t} - \Delta_-\right) = e^{(p_1(t))^*} \\[2ex]
e^{m_2(t)} = e^{-2R\,t}e^{-m_1(t)} = e^{(p_2(t))^*} \\[2ex]
\text{onde} \\[2ex]
r = \sqrt{c^2 + 4k^2{}_3}, \qquad\qquad c = k_2 - k_1 + i\left(\Omega_2 - \Omega_1\right), \\[2ex]
R = \frac{k_2+k_1}{2} + \frac{i(\Omega_2+\Omega_1)}{2}, \qquad\qquad \Delta_{\binom{+}{-}} = c\,\binom{+}{-}\,r.
\end{array}\right\} \tag{B.2}$$

Note que $m_1(t)$ e $m_2(t)$ tendem a $-\infty$ quando $t \to \infty$, visto que

$$(k_1 + k_2) > \Re e\{r\} \tag{B.3}$$

Com efeito, se $(k_1 + k_2) \geq \Re e\{r\}$ então $(k_1 + k_2)^2 \geq (\Re e\{r\})^2$, pois k_1 e k_2 são positivos.
A equação B.2 mostra que

$$(k_1 + k_2)^2 > (\Re e\{r\})^2 \Longleftrightarrow$$

$$(k_1 + k_2)^2 > \frac{1}{2}\left\{(k_2 - k_1)^2 + 4k_3{}^2 - (\Omega_2 - \Omega_1)^2\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\left\{(k_2 - k_1)^2 + 4k_3{}^2 - (\Omega_2 - \Omega_1)^2\right\}^2 + 2\left\{(\Omega_2 - \Omega_1)(k_2 - k_1) + 4k_3\right\}^2}$$

$$\left\{2(k_1 + k_2)^2 - \left\{(k_2 - k_1)^2 + 4k_3{}^2 - (\Omega_2 - \Omega_1)^2 - 4g^2\right\}\right\}^2 >$$

$$\left\{(k_2 - k_1)^2 + 4k_3{}^2 - (\Omega_2 - \Omega_1)^2 - 4g^2\right\}^2 + 2\left\{(\Omega_2 - \Omega_1)(k_2 - k_1) + 4gk_3\right\}^2$$

Como $k_3{}^2 = k_1 k_2$ então a desigualdade torna-se,

$$\left\{2k_3(\Omega_2 - \Omega_1) - 2g(k_2 - k_1)\right\}^2 > 0$$

que é sempre verdadeiro, comprovando assim a desigualdade da equação B.3.

Note ainda que se $k_1 = k_2 = k_3 = k$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ teremos

$$\left.\begin{aligned}
q(t) &= \left(1 - e^{2k\,t}\right)\left(1 + e^{2k\,t}\right)^{-1} \\
1 + q(t) &= 2\left(1 + e^{2k\,t}\right)^{-1} \\
1 - q(t) &= e^{2k\,t}\left(1 + q(t)\right) \\
e^{m_1(t)} &= e^{-R\,t}e^{-k\,t}\left(1 + q(t)\right)^{-1} \\
e^{m_2(t)} &= e^{m_1(t)}\left(1 + q(t)\right)\left(1 - q(t)\right)
\end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
3430
INSTITUTO DE FÍSICA

Referências Bibliográficas

[1] F. Dalfovo et al., *Rev. Mod. Phys.* , **71**, 463 (1999);

[2] J.P. Paz, W.H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* , **82**, 26 (1999);

[3] K.M. Fonseca Romero, M.C.Nemes, *Phys. Lett.* , **A235**, 432 (1997);

[4] V.J. Menon, N. Chamana, Y. Singh, *Prog. Theor. Phys.* , **98**, 321 (1997);

[5] J.I. Kim, M.C. Nemes, A.F.R. de Toledo Piza, H.E.Borges, *Phys. Rev. Lett.* , **77**, 207 (1996);

[6] M. Brune et al., *Phys. Rev. Lett.* , **77**, 4887 (1996);

[7] L.Davidovich, M. Brune, J.M.Raimond,S. Haroche, *Phys. Rev.* , **A53**, 1295 (1996);

[8] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, New York, 1995);

[9] D.F. Walls e G.J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer, Berlin, 1995);

[10] W.H. Zurek, S. Habib, J.P.Paz, *Phys. Rev. Lett.* , **70**, 1187 (1993);

[11] N. Gisin, I.C.Percival,, *Journal Physics* , **A25**, 5677 (1992);

[12] B.L.Hu, Juan P.Paz, Yuhong Zhang, *Phys. Rev.* , **D45**, 2843 (1992);

[13] W.H. Zurek, *Phys. Today.* , **44**, 36 (1991);

[14] O.N. Borges, *Fatoração da função Exponencial do Liouvilliano de Equações Mestra* Tese de doutorado UFMG Belo Horizonte 1991;

[15] L. de la Peña, *Introduccíon a la mecánica cuántica*, (Ediciones científicas universitárias, México, 1991);

[16] C.W. Gardiner, *Quantum Noise*, (Springer, Berlin, 1991);

[17] G.Ghirardi, A.Rimini, P.Pearle, in *"Sixty-Two Years of Uncertainty"*, A. Miller (ed) (Plenum, New York (1990);

[18] M.C. Nemes, A.F.R. de Toledo Piza, *Physica A*, **137**,367 (1986);

[19] A.O. Caldeira, A.J. Leggett, *Phys. Rev.* , **A31**, 1059 (1985);

[20] A.O. Caldeira, A.J. Leggett, *Physica* , **A 121**, 587 (1983);

[21] A.O. Caldeira, A.J. Leggett, *Ann. Phys.* ,**149**, 374 (1983);

[22] J. Wheler, W.H. Zurek, *Quantum Theory and Mesurement*, (Princeton University Press 1983);

[23] W. Witschel, *International Journal of Quantum Chemistry* , **20**, 1233-1241 (1981);

[24] J.M. Normand, *A Lie Group: Rotations in Quantum Mechanics* Amsterdam: North-Holland, 1980

[25] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* , **50**, 221 (1978);

[26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu,F. Laloë, *Quantum Mechanics*,(Wiley, New York, 1977);

[27] M. Suzuki, *Communications in Mathematical Physics* , **57**, 193-200 (1977);

[28] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras,and Some of Their Applications*, (Wiley, New York, 1974);

[29] R. Gilmore, *Journal of Mathematical Physics* , **15**, 2090-2092 (1974);

[30] W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (Wiley, New York, 1973);

[31] M.D. Kostin, *Journal Chemistry Physics* , **57**, 3589 (1972);

[32] H. Fröhlich, *International Journal of Quantum Chemistry* , **v.II**, 641-649 (1968);

[33] R.M. Wilcox, *Journal of Mathematical Physics* , **8**, 962-982 (1967);

[34] K.Kumar, *Journal of Mathematical Physics* , **6**, 1928-1934 (1965);

[35] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press 1955);

[36] W. Magnus, *Communications on Pure and Applied Mathematics* ,**VII**, 649-673 (1954);

[37] E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* , **3**, 440 (1948);

[38] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* , **18**, 397 (1941);

[39] E.Schrödinger , *Naturwissenschaffen* ,**23**, 807,823 e 844 (1935);