

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Aspectos da Decoerência em Sistemas Quânticos

Andréa Nemes Salgueiro

Tese de Doutorado
apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo



ORIENTADOR: *Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza*

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Antônio Fernando Piza".

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza - USP

Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira - UNICAMP

Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco - UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzeig - USP

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi - UFSC

SÃO PAULO
2000

A handwritten signature in blue ink, appearing to be a stylized name.

SBI-IFUSP



305M810T3412

Def. 29/09/00

530.12

S164a

D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Salgueiro, Andréa Nemes

Aspectos da Decoerência em Sistemas Quânticos.
São Paulo, 2000.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando R. de T. Piza
Área de Concentração: Física Quântica

- Unitermos: 1. Decoerência
2. Subsistemas Quânticos;
3. Superposições Mesoscópicas;
4. Gatos de Schrödinger.

USP/IF/SBI-056/2000

Aos meus pais científicos: Carolina e Piza, e à Maria.

A Ciência é a luz que ilumina a escuridão.

agradecimento

- À minha família por ser tão especial: Nanica iluminando sempre o nosso caminho, às minhas duas mães complementares sempre tão presentes, me apoiando e incentivando: Sonia e Carol; à minha irmã por todo amor, incentivo e por ter me emprestado o carro nos finais de semana; ao meu pai que de longe me acompanha; à Darcy que deixou saudades, à Maria minha Torre de Babel; à Lolô sempre dando paz, amor e equilíbrio, ao Pai João nosso guardião, à tia Etinha e Bicudinhos pela força e ao Zezo sempre dando idéias mirabolantes.
- Aos meus pais científicos: Carolina e Piza por toda ajuda prestada para que este trabalho saísse, por terem me ensinado tudo o que sei, pelos bons momentos, por estarem sempre presentes e serem como são, e por serem peças tão importantes na minha vida.
- Ao Francisco: por fazer parte da minha vida, pelo apoio e paciência dados nas horas mais difíceis, pela companhia nos finais de semana, pelos bons momentos, pelo auxílio prestado na digitação e na colocação dos gráficos, pelo empréstimo do computador, enfim por tudo.
- À minha grande amiga Helô que me acompanha desde os tempos do pré-primário, pelo apoio, amizade e incentivo.
- À Sonia e à Karen pela amizade, força e incentivo.
- Ao Lin, pela companhia durante o almoço, pelo amizade e pela ajuda prestada.
- Aos meus amigos do departamento, Sonia, Ji, Marcelo, Alessandro, Leonardo, Fábio, Mário, Molina, Samira, Luis, Clériston, Marcos, Cedric, Wagner, Francisco etc... pela amizade, pelo auxílio e convivência sempre muito agradável.
- Aos meus amigos e colaboradores, Sonia, Karen, Ji, Zé Geraldo, Marcos, Lloyd, pelo companherismo e pelas discussões sempre esclarecedoras.
- Ao Mário por ter me emprestado o computador.
- À Ilda, À Janete e à Thais pela amizade e momentos de descontração.
- Aos meus amigos mineiros: Sérgio, Lú, Alexandre, Raquel, Gutinho, Antônio, Zé Geraldo e Carla pela amizade, pelo apoio, pelo companherismo, pelas horas de descontração e por me receberem tão bem sempre que visito as alterosas.

- Ao pessoal da secretaria da FMA sempre tão atenciosos e aos professores do departamento pela convivência sempre agradável.
- Ao prof. Mahir Hussein por todo apoio e incentivo.
- À todos aqueles que de alguma forma ajudaram e tornaram possível a realização deste trabalho.
- Ao Prof. Hans Weidenmüller, Monika, Lloyd por terem me recebido tão bem no tempo em que passei na Alemanha e pela amizade.
- À USP e à UFMG pela assistência, por me acolherem e pela minha formação acadêmica.
- À FAPESP pelo apoio financeiro, por ter possibilitado a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo da dinâmica de subsistemas quânticos dando ênfase ao fenômeno da decoerência. Em particular, estudamos os efeitos da decoerência num sistema de dois níveis acoplado a um outro sistema cujo espectro de energia é um contínuo no contexto do fenômeno quântico de tunelamento. Investigamos também aspectos da relação entre a descrição do sistema de dois níveis e a descrição do modelo linear na aproximação de onda girante em termos de uma equação mestra na aproximação de Born-Markov e a dinâmica exata destes dois subsistemas. Estudamos também o experimento proposto por L. Davidovich e colaboradores para medir a decoerência de superposições mesoscópicas de estados coerentes dentro do contexto da computação quântica. Este experimento pode ser re-interpretado como um computador quântico capaz de solucionar o problema de Deutsch. O grande problema deste experimento, do ponto de vista da computação quântica, é a presença da decoerência. Esta decoerência provoca o aparecimento de erros no resultado final. Assim, nós mostramos uma maneira de reduzi-la, diminuindo assim os eventuais erros que possam aparecer. Finalmente, mostramos através de dois exemplos a relação entre o efeito Zeno e a decoerência.

Abstract

We study the quantum decoherence process in different contexts. In particular, we study decoherence effects in the dynamics of a two-level system coupled to another system which has a continuous energy spectrum. We also investigate when the master equation description, in a Born Markov approximation reproduces the exact solution. We extend this investigation to the model which describes the interaction between a harmonic oscillator and a thermal bath of harmonic oscillators in the rotating wave approximation. We also study the two atom correlation scheme originally proposed by Davidovich, Brune, Raimond and Haroche for measuring the decoherence of a mesoscopic superposition of coherent states of a QED cavity in the context of quantum computation. We show that this experiment is equivalent to a quantum computer solving Deutsch's problem. We find a way to reduce the errors due to decoherence. Finally, we show how the Zeno effect is related to the decoherence process.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Conceitos Fundamentais	6
2.1	Introdução	6
2.2	Subsistemas Quânticos e Matriz Densidade	6
2.3	Correlações, Estados Naturais, Probabilidade de Ocupação e Decoerência	11
2.3.1	Exemplo Ilustrativo: O modelo Jaynes-Cummings (MJC) na sua versão mais simplificada	12
3	Modelo para o Tunelamento de Sistemas Biestáveis.	15
3.1	Introdução	15
3.2	Ferramentas Básicas	17
3.3	Solução Exata Estacionária	19
3.3.1	Cálculo das Amplitudes para Diversos Tipos de Acoplamento	22
3.4	Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro de energia puramente contínuo	24
3.5	Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro limitado para um caso particular	33
3.6	Comparação entre o modelo contínuo e o modelo spin-bóson	39
3.7	Comparação da Solução Exata com o Resultado da Aproximação Born-Markov para o Subsistema de Dois Níveis	44
4	Modelo de um oscilador acoplado a diversos osciladores não interagentes entre si na aproximação RWA	47
4.1	Introdução	47
4.2	Solução Exata para o Modelo Linear	48
4.3	Evolução Temporal de uma Superposição de Estados Coerentes quando o Reser- vatório se Encontra no Estado Fundamental	54
4.4	Comparação entre a Solução Exata e a Fornecido pela Aproximação de Born-Markov	57
5	Revisando o Experimento de Paris do ponto de vista do Problema de Deutsch	60
5.1	Introdução	60
5.2	O Problema de Deutsch	61

5.3	Descrição do Experimento	62
5.3.1	Passagem do Primeiro Átomo	62
5.3.2	Passagem do Segundo Átomo	65
5.4	Reinterpretação do Experimento de Paris: Uma realização Experimental do Problema de Deutsch	66
5.5	Discussão da Decoerência do Campo dentro da cavidade: Cálculo Exato e Mestre: .	68
6	O Efeito Zeno	74
6.1	Introdução	74
6.2	A Essência do Efeito Zeno	75
6.3	Decoerência e Efeito Zeno	78
6.3.1	Exemplos: Decoerência e o Efeito Zeno	79
7	Conclusão	87
A	Taxa de Tunelamento Dissipativa e Unitária: Caso Geral	89
B	Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro limitado para o caso geral	91
C	Dedução da Equação Mestra	95
C.1	Equação Mestra para um Modelo Linear na RWA	98

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Quântica foi elaborada para descrever sistemas fechados, isto é, completamente isolados. No entanto, na prática a situação é bem diferente, pois o sistema está sempre interagindo com alguma coisa, seja um aparelho de medida ou o próprio ambiente. Esta interação do sistema com o exterior provoca uma troca de energia entre eles, enquanto que o exterior injeta algum tipo de ruído no sistema, por difusão [1, 2]. Dado isso, a necessidade de incorporar tais fenômenos à Teoria Quântica foi reconhecida, surgindo dois tipos de enfoque. O primeiro deles tentou modificar o esquema de quantização canônica [3, 4, 5], a fim de podermos quantizar sistemas não-hamiltonianos. O segundo enfoque, bem mais difundido, mantém esta quantização inalterada, mas muda o sistema. Assim, considera-se o sistema de interesse acoplado a um reservatório térmico e estuda-se a dinâmica efetiva do subsistema de interesse. Este método foi originalmente proposto por Senitzky no estudo da relaxação dos modos normais do campo eletromagnético dentro de uma cavidade [6]. Com este segundo procedimento conseguiu-se estabelecer relações entre a dinâmica macroscópica irreversível e a dinâmica microscópica reversível. A evolução do sistema será irreversível quando considerarmos o reservatório com um número infinito de graus de liberdade. A vantagem do segundo procedimento está relacionada ao isolamento do sistema composto “reservatório+sistema”. Dentro deste contexto, surge uma equação exata que governa a dinâmica do sistema, porém esta equação é de difícil solução devido aos efeitos provenientes dos termos de memória na evolução temporal do sistema. Então, lança-se mão da aproximação markoviana, que consiste em desprezar os efeitos de memória que surgem devido ao estabelecimento de correlações entre o sistema e o reservatório. Assim, dentro desta aproximação, o comportamento do sistema no passado não afeta o comportamento no presente.

A Teoria Quântica introduziu inovações em relação à Teoria Clássica. Uma delas está relacionada à inexistência de superposições coerentes de estados macroscopicamente distinguíveis, que surge quando reivindicamos o caráter universal das leis da dinâmica quântica. A existência do fenômeno de interferência em nível microscópico implicaria, então, no aparecimento do mesmo em nível macroscópico. O que intriga os físicos é a inexistência da interferência em nível macroscópico. A mais famosa ilustração do problema foi dada por Schrödinger, em 1935, com o “Paradoxo do Gato” [7, 8], ou da “Gata” como diz a ref. [9]. Na tentativa de resolver esta questão, um dos modelos propostos enfatiza o papel da flutuação e dissipação como os responsáveis pela transformação de superposições coerentes em misturas estatísticas [10, 11]. Esta transformação é conhecida como decoerência ou perda de pureza [12, 13] e a escala de tempo em que ela ocorre é, em geral, extremamente rápida. É importante perceber que tanto a dissipação quanto a decoerência tem a mesma

origem dinâmica, ou seja, elas são resultado do acoplamento do sistema com o exterior, embora possam ocorrer independentemente [14]. Outra inovação está relacionada à penetração da partícula numa região classicamente proibida, conhecida como tunelamento. Este fenômeno pode ser entendido como resultado de efeitos dispersivos na evolução temporal dos estados quânticos localizados. Os processos de tunelamento podem ser divididos em dois grupos principais: 1-) Tunelamento Macroscópico Quântico (MTQ) no qual o sistema tunela de um estado metaestável do potencial para um contínuo [16, 17, 18] e 2-) Processos de Coerência Macroscópica Quântica (MQC) no qual oscilações semelhantes às da molécula de amônia aparecem entre dois estados degenerados do poço separados por uma barreira classicamente impenetrável [16]. Dentro deste contexto, o fenômeno de interferência quântica desempenha um papel importante, sendo de extrema relevância o estudo da decoerência nestes sistemas tunelantes. No entanto, dentro do formalismo semi-clássico usual utilizado para descrever tais sistemas, este tratamento torna-se muito difícil. Então, para introduzir os fenômenos de decoerência e dissipação na descrição, deve-se acoplar este sistema tunelante com um outro sistema. Um modelo muito famoso, conhecido como modelo spin-bóson, investiga os efeitos da dissipação num sistema de dois níveis tunelante acoplado a um banho de osciladores harmônicos [19]. Variações deste modelo tem aparecido recentemente na literatura. Uma delas consiste em truncar os osciladores do banho num sistema de dois níveis, o que resulta num banho de vários sistemas de dois níveis que pode ser visto como um banho de spins [20].

Um outro aspecto da Teoria Quântica ainda obscuro é a questão da medida. É sabido que qualquer medida feita num sistema quântico, o perturba de maneira irreversível, a menos das medidas não demolidoras (QND). A medida estabelece correlações entre o estado do objeto medido e o do aparelho de medida. Um tratamento completo da medida deve levar em conta, além da interação entre os dois sistemas, a dinâmica intrínseca do sistema, o que poderá acarretar mudanças no estado a ser medido [21, 22, 23, 24, 25]. Além disso, a dinâmica do dispositivo de medida e de sua interação com o sistema observado devem ser tratadas, por razões de consistência, também em termos da teoria quântica. No entanto, esta descrição tende a ser complicada, devido à natureza macroscópica do dispositivo de medida, e às peculiaridades da cinemática quântica. Observando os estados resultantes de uma medida, verifica-se a imunidade de tais estados ao princípio de superposição, já que nunca se observou combinações lineares de estados do tipo “posições do ponteiro”, e isso é entendido como uma característica do aparelho de medida que é visto como um objeto clássico. O que se procura intensamente é a emergência desta classicalidade a partir da teoria quântica. Um tratamento padrão dessas questões consiste na introdução de um postulado adicional que, numa de suas versões correntes, efetivamente “prescreve” o estado do sistema quântico após a conclusão do processo de medida. O estado encontrado, após a medida de um determinado observável g , será reduzido à sua projeção normalizada sobre o sub-espaço dos autovetores degenerados de g associados ao autovalor obtido. Este “postulado” é freqüentemente designado como “redução do pacote de ondas”. Um tópico interessante associado a teoria da medida está ligado a inibição da evolução temporal natural de um determinado sistema quântico devida a observação contínua. Neste sentido, o sistema tem sua dinâmica congelada. No entanto, existe muita controvérsia na compreensão deste efeito. É visível a divisão de determinados grupos: o primeiro deles aposta no postulado da redução como o responsável por este efeito [26] e o segundo deles responsabiliza a forte perturbação causada pela interação entre o aparelho de medida e o sistema a ser medido [27, 28, 29].

O avanço das técnicas experimentais tem possibilitado um estudo detalhado de sistemas quânticos,

abrindo caminho para uma verificação da Teoria Quântica que tanta perplexidade tem causado, dada a peculiaridade dos resultados previstos por ela. Estas técnicas permitiram a obtenção de sistemas mesoscópicos, onde é possível observar a decoerência numa escala de tempo observável. Um dos exemplos mais espetaculares de tal observação é o experimento que foi feito pelo laboratório francês Kastler Brossel em 1997, onde eles utilizam superposições de estados coerentes do campo localizado dentro de uma cavidade supercondutora como estados mesoscópicos [30]. Além disso, estas técnicas tem possibilitado a utilização de sistemas quânticos aplicados a tecnologia. Muitos exemplos podem ser citados, no entanto um deles vem tendo destaque nos últimos tempos, embora seja uma idéia já antiga: a obtenção de um computador quântico [31, 32]. É claro que a sua construção está longe de ser obtida, mas muitos algoritmos têm sido solucionados com o auxílio de sistemas quânticos tais como armadilhas de íons [33, 34], cavidades supercondutoras [35, 36, 37], sistemas que apresentam ressonância nuclear magnética [38] etc... . A grande dificuldade em controlar a informação, que deve estar armazenada dentro destes sistemas quânticos para se executar um algoritmo, está relacionada ao processo de perda de coerência devida a interação do sistema quântico com o meio.

Neste trabalho discutimos um pouco estas questões da Teoria Quântica dando ênfase ao fenômeno de decoerência. No capítulo 2, introduzimos os conceitos necessários para o tratamento de subsistemas quânticos, além de discutirmos um pouco o significado das correlações e da decoerência. No capítulo 3, estudamos um modelo que mostra os efeitos da decoerência num sistema de dois níveis tunelante acoplado a um outro sistema, cujo espectro de energia é contínuo, através da probabilidade de tunelamento, do defeito de idempotência e das taxas de tunelamento dissipativa e unitária. Além disso, discutimos o resultado exato fornecido pelo modelo com o obtido através da aproximação mestra. No capítulo 4, estudamos a solução exata do modelo linear de osciladores harmônicos na aproximação de onda girante, que consiste em desprezar os termos anti-ressonantes presentes na hamiltoniana, e a comparamos com a solução obtida pela equação mestra, a partir de uma condição inicial particular. Discutimos também as variações de comportamento da decoerência com relação a finitude ou não dos graus de liberdade do reservatório térmico. No capítulo 5, re-interpretamos o experimento feito no laboratório Kastler Brossel, do ponto de vista do problema de Deutsch, que consiste em determinar se uma função é ou não constante no contexto da computação quântica [32]. Discutimos ainda uma maneira de reduzir os efeitos da decoerência para tornar viável a implementação deste experimento como um algoritmo para solucioná-lo. No capítulo 6, discutimos o efeito Zeno do ponto de vista de um processo dinâmico, onde a decoerência apresenta um papel fundamental. Mostramos dois exemplos, onde fica claro o papel da decoerência na obtenção deste efeito, além de discutirmos o resultado obtido do ponto de vista do postulado da redução. Este trabalho contém três apêndices. No primeiro deles, mostramos que é possível obter as taxas de tunelamento dissipativa e unitária para um sistema descrito por uma matriz densidade de dimensão $n \times n$. No segundo apêndice, mostramos a solução exata para a matriz densidade reduzida do sistema de dois níveis referente ao modelo descrito no capítulo 3, quando o espectro do sistema é limitado. No terceiro e último apêndice, discutimos a obtenção da equação mestra na aproximação de Born-Markov.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

2.1 Introdução

Neste capítulo, faremos uma breve revisão dos conceitos fundamentais necessários para estudarmos a Teoria dos Sistemas Quânticos Abertos, dando ênfase ao fenômeno da decoerência, presente nos subsistemas quânticos, assunto principal deste trabalho. Dentro deste contexto, o formalismo dos operadores densidade é o mais adequado para se descrever a dinâmica do subsistema quântico, pois ele contém toda a informação a respeito dos termos ligados a interferência e também torna possível uma descrição fechada e completa, dependendo do caso. Este tratamento, embora simplifique a descrição do sistema, torna seu estudo viável.¹

Na seção seguinte, desenvolveremos este formalismo que está por trás do estudo do subsistema quântico. Na terceira seção, falaremos das correlações, onde discutiremos a relação entre o grau de coerência e as probabilidades de ocupação dos orbitais naturais. Além disso, mostraremos um exemplo que ilustra bem o fenômeno da decoerência para um dos subsistemas.

2.2 Subsistemas Quânticos e Matriz Densidade

Na formulação usual da Mecânica Quântica os estados de um sistema são associados a vetores pertencentes a um espaço Hilbert, em geral de dimensão infinita. Os estados de dois ou mais sistemas quânticos estão associados a vetores pertencentes a um espaço produto dos espaços de Hilbert de cada um dos subsistemas.

Considere os vetores ortonormais $\{|u_i\rangle\}$ com $i = 1, 2, 3 \dots$ uma base no espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 e os vetores ortonormais $\{|v_i\rangle\}$ com $i = 1, 2, 3 \dots$ uma base no segundo espaço de Hilbert \mathcal{H}_2 . Então a base no espaço produto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é constituída pelos vetores ortonormais.

$$|\omega_{i,j}\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots$$

O produto escalar destes vetores é dado por

¹Parte do formalismo utilizado neste capítulo pode ser encontrada nas notas de aula do curso "Dinâmica Efetiva de Subsistemas e Teoria de Muitos Corpos" ministrado pelo professor A.R. de Toledo Piza em Agosto de 1987, pag. 695, publicação interna do IFUSP

$$\langle \omega_{k,l} | \omega_{i,j} \rangle = \langle u_k | u_i \rangle \otimes \langle v_l | v_j \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Podemos ainda escrever um vetor genérico $|\phi\rangle$ do espaço produto como

$$|\phi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\omega_{ij}\rangle, \quad (2.1)$$

mas cabe aqui chamar atenção para o fato de que o estado $|\phi\rangle$ de maneira geral, não pode ser escrito como o produto de um certo vetor pertencente ao primeiro espaço de Hilbert por outro vetor pertencente ao segundo espaço de Hilbert. Isso só será possível quando o coeficiente c_{ij} , tiver a forma particular, $c_{ij} = a_i b_j$ assim

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \sum_{ij} c_{ij} |\omega_{ij}\rangle = \sum_{ij} a_i b_j (|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle) = \sum_i a_i |u_i\rangle \otimes \sum_j b_j |v_j\rangle \\ |\phi\rangle &= |a\rangle \otimes |b\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vamos agora nos concentrar na dinâmica do sistema e para isso, os espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são escolhidos de tal forma que podemos estudar variáveis dinâmicas relativas a um subsistema apenas, por exemplo \mathcal{H}_1 . Formalmente, estas variáveis são operadores hermiteanos agindo não trivialmente num dos espaços envolvidos no produto. Estes operadores podem ser escritos em termos da base $|\omega_{ij}\rangle$

$$\hat{O} = \sum_{ijk} |\omega_{ik}\rangle \hat{O}_{ij} \langle \omega_{jk}| \quad (2.3)$$

com coeficientes $\hat{O}_{ij} \delta_{kl} = \langle \omega_{ik} | \hat{O} | \omega_{jl} \rangle = \langle u_i | \hat{O} | u_j \rangle \delta_{kl}$. Este operador \hat{O} é um operador do espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 estendido ao espaço produto, agindo como a identidade no espaço \mathcal{H}_2 .

As quantidades relevantes relativas ao primeiro subsistema aparecem como valores esperados do operador \hat{O} (2.3), em algum estado do sistema, cujo termo é dado por (2.1), isto é,

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_\phi &= \langle \phi | \hat{O} | \phi \rangle = \sum_{ijkl} c_{ik}^* \langle \omega_{ik} | \hat{O} | \omega_{jl} \rangle c_{jl} \\ &= \sum_{ijl} c_{il}^* \hat{O}_{ij} c_{jl}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Uma forma conveniente de escrever valores esperados é através do traço $\langle \hat{O} \rangle_\phi = \text{Tr}[\hat{O} \hat{\rho}]$ com $\hat{\rho} = |\phi\rangle \langle \phi|$, onde o traço Tr significa a soma dos elementos de matriz diagonais numa base qualquer e $\hat{\rho}$ é o operador densidade que corresponde aos chamados estados quânticos puros e podem ser associados a um vetor no espaço, como $|\phi\rangle$, por exemplo. Na base do estado produto $|\omega_{ik}\rangle$, $\langle \hat{O} \rangle_\phi$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle_\phi &= \sum_{ik} \langle \omega_{ik} | \hat{O} \hat{\rho} | \omega_{ik} \rangle = \sum_{ik} \langle \omega_{ik} | \hat{O} | \phi \rangle \langle \phi | \omega_{ik} \rangle \\
&= \sum_{ik} \langle \phi | \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{ik} | \hat{O} | \phi \rangle = \langle \phi | \hat{O} | \phi \rangle,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

que é idêntico a equação (2.4), como deveria ser. Cabe aqui relembrarmos uma importante e simples propriedade do traço, conhecida como invariância cíclica, isto é, $\text{Tr}(\hat{O}\hat{P}\hat{Q}) = \text{Tr}(\hat{Q}\hat{O}\hat{P}) = \text{Tr}(\hat{P}\hat{Q}\hat{O})$ e assim é possível escrever $\langle \hat{O} \rangle_\phi = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O})$. Como este operador \hat{O} se refere apenas a um dos subsistemas, então é possível escrever este valor médio da seguinte maneira

$$\langle O \rangle_\phi = \sum_{ijl} c_{il}^* \hat{O}_{ij} c_{jl} \equiv \sum_{ij} \hat{O}_{ij} \sum_l c_{il}^* c_{jl} \equiv \sum_{ij} \hat{O}_{ij} \rho_{ji}$$

onde os operadores \hat{O} e $\hat{\rho}$ são operadores pertencentes ao espaço de \mathcal{H}_1

$$\hat{O} = \sum_{ij} |u_i\rangle O_{ij} \langle u_j| \quad \text{e} \quad \hat{\rho} = \sum_{ij} |u_j\rangle \rho_{ji} \langle u_i| = \hat{\rho}^\dagger$$

com

$$\begin{aligned}
\rho_{ji} &= \sum_l c_{il}^* c_{jl} = \sum_l \langle \omega_{jl} | \phi \rangle \langle \phi | \omega_{il} \rangle = \sum_l (\langle u_j | \otimes \langle v_l |) | \phi \rangle \langle \phi | (| u_i \rangle \otimes | v_l \rangle) \\
&= \langle u_j | \sum_l \langle v_l | \hat{\rho} | v_l \rangle | u_i \rangle = \langle u_j | \text{Tr}_2 \hat{\rho} | u_i \rangle = \langle u_j | \hat{\rho}_1 | u_i \rangle
\end{aligned}$$

onde $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2 \hat{\rho}$ é conhecido como a matriz densidade reduzida relativa ao subsistema pertencente a \mathcal{H}_1 , já que eliminamos as variáveis do sistema pertencente a \mathcal{H}_2 . É importante não confundir $\hat{\rho}$ com $\hat{\rho}_1$, já que a primeira descreve o sistema completo e corresponde a um estado puro, o que nem sempre é verdade para $\hat{\rho}_1$. Outro fator importante relaciona-se as quantidades observáveis (traços), que são lineares na densidade, mas quadráticas nos vetores de estado. Isto significa que as densidades atuam no nível das probabilidades, enquanto que os vetores atuam no nível das amplitudes de probabilidade.

A matriz densidade tem algumas propriedades importantes que serão mostradas a seguir:

1. Se $|\phi\rangle$ é um vetor normalizado, $\langle \phi | \phi \rangle = 1$, então é imediato mostrar que a densidade completa $\hat{\rho} \equiv |\phi\rangle \langle \phi|$ é um operador projeção, isto é, $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$ e seus autovalores são, portanto, 0 e 1. Desta forma, é possível interpretar os autovalores de $\hat{\rho}$ como probabilidades de que o sistema, cujo estado é descrito por $\hat{\rho}$, se encontre no autovetor correspondente a estes autovalores. A estas probabilidades damos o nome de *probabilidade de ocupação* associada aos respectivos vetores de estado. Então, a probabilidade de um sistema quântico descrito por $\hat{\rho}$, ser observado num estado $|\psi\rangle$ (normalizado) pode ser escrita como

$$\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle = |\langle \psi | \phi \rangle|^2 = \text{Tr}[\hat{\rho} |\psi\rangle \langle \psi|].$$

2. Se $\hat{\rho}$ é um operador projeção, em geral, $\hat{\rho}_1 \equiv \text{Tr}_2 \hat{\rho}$ não é. De fato, embora $\hat{\rho}_1$ seja hermiteano, $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1^\dagger$ em geral, é falso que $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1^2$. Caso seja verdade que $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1^2$, então novamente temos como autovalores 0 e 1, o que significa

$$\hat{\rho}_1 = |a_1\rangle\langle a_1|, \quad \langle a_1|a_1\rangle = 1$$

com $|a_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e neste caso, a densidade completa $\hat{\rho}$ deve ter a forma de um produto de estados, isto é,

$$\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi| = (|a_1\rangle \otimes |b_2\rangle) (\langle a_1| \otimes \langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_2\rangle\langle b_2|$$

onde $|a_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|b_2\rangle \in \mathcal{H}_2$.

3. O operador densidade completo $\hat{\rho}$ e os operadores reduzidos $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são positivos semi-definidos $\hat{\rho}, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \geq 0$ e tem traço igual a um, $\text{Tr} \hat{\rho} = \text{Tr} \hat{\rho}_1 = \text{Tr} \hat{\rho}_2 = 1$. Nestas condições, podemos aplicar o teorema de Hilbert-Schmidt [39], segundo o qual o espectro de $\hat{\rho}_1$ é discreto e caso haja um número infinito de autovalores positivos não-nulos, o único ponto de acumulação possível para o espectro é zero. Desta forma, é possível escolher uma base, em particular, a base $|u_i\rangle$ de \mathcal{H}_1 , como constituída pelos autovalores de $\hat{\rho}_1$ devidamente ortonormalizados

$$\hat{\rho}_1 |u_i\rangle = p_i |u_i\rangle, \quad p_i \geq 0, \quad \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

e neste caso, $\hat{\rho}_1$ tem a forma simples,

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i |u_i\rangle p_i \langle u_i| \quad (2.7)$$

e o fato de que $\hat{\rho}_1 \neq \hat{\rho}_1^2$ aparece como diretamente ligado à existência de *mais* de um autovalor p_i diferente de zero, dada a normalização $\text{Tr} \hat{\rho}_1 = \sum_i p_i = 1$. Os *autovalores* p_i podem ser interpretados também como *probabilidades de ocupação*: eles dão, de fato, a probabilidade de que o sistema composto no estado associado à densidade reduzida completa $\hat{\rho}$, tenha o subsistema associado a \mathcal{H}_1 no estado $|u_i\rangle$

$$p_i = \langle \phi | (|u_i\rangle\langle u_i| \otimes \hat{1}_2) | \phi \rangle = \text{Tr} [(|u_i\rangle\langle u_i| \otimes \hat{1}_2) \hat{\rho}] = \text{Tr}_1 [|u_i\rangle\langle u_i| \hat{\rho}_1].$$

Por outro lado, em analogia a $\hat{\rho}_1$, podemos também definir um operador densidade *reduzido* para o subsistema correspondente a \mathcal{H}_2 , e para isto basta calcularmos $\hat{\rho}_2 \equiv \text{Tr}_1 \hat{\rho}$. No caso das duas densidades reduzidas $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ terem o mesmo espectro, então uma base completa no espaço

produto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é composta dos autovetores $|u_i\rangle$ com autovalores não-nulos associados a \mathcal{H}_1 e autovetores $|v_i\rangle$ com autovalores não-nulos associados a \mathcal{H}_2 e a estes estados que diagonalizam $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ em relação a densidade completa são chamados de orbitais naturais. Consideramos, por exemplo, um vetor $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e a base $\{|u_i\rangle\} \in \mathcal{H}_1$ referente aos autovetores de $\hat{\rho}_1$, podemos expandir $|\phi\rangle$ da seguinte maneira

$$|\phi\rangle = \sum_i |u_i\rangle \otimes |a_{2i}\rangle$$

onde estes vetores $|a_{2i}\rangle$ de \mathcal{H}_2 são os “coeficientes” da expansão dados pelo produtos escalares em \mathcal{H}_1 “ $|a_{2i}\rangle = \langle u_i|\phi\rangle$ ” que para uma expansão específica tem a forma

$$|v_i\rangle = \sqrt{p_i}^{-1} |a_{2i}\rangle \quad \text{com } p_i \neq 0.$$

Assim, $|\phi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\phi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle. \quad (2.8)$$

Esta expressão tem características especiais, tais como a expansão ser sempre do tipo discreta devido ao Teorema de Hilbert-Schmidt [39], os vetores $|v_i\rangle$ e $|u_i\rangle$ formam conjuntos ortonormais, respectivamente, em \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 e os coeficientes da expansão, $\sqrt{p_i}$, estão diretamente ligados as probabilidades de ocupação dos estados $|u_i\rangle$ pelo subsistema correspondente a \mathcal{H}_1 . A matriz densidade reduzida para o subsistema pertencente a \mathcal{H}_2 , $\hat{\rho}_2$, para a expansão (2.8) tem a forma

$$\hat{\rho}_2 = \sum_i |v_i\rangle p_i \langle v_i| \quad (2.9)$$

que se comparado a equação (2.7) mostra também que $|v_i\rangle$ são autovetores de $\hat{\rho}_2$ associados aos autovalores p_i , que são autovalores de $\hat{\rho}_1$. Desta forma, $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ tem o mesmo espectro. A base completa do espaço produto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é formada dos autovetores de autovalor não-nulo $|u_i\rangle$, correspondente ao espaço \mathcal{H}_1 e $|v_i\rangle$, correspondente ao espaço \mathcal{H}_2 . De posse da base produto, $|u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$ a expansão geral (2.1) fica reduzida a forma da equação (2.8), onde aparecem apenas os termos do tipo $i = j$. Então, os orbitais naturais, neste caso, são os estados $|u_i\rangle$ e $|v_i\rangle$, pois eles diagonalizam, respectivamente, as densidades reduzidas $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ com relação a uma densidade completa $\hat{\rho}$. Assim, estes estados ficam completamente determinados a partir de $|\phi\rangle$ e da escolha de um espaço produto, fornecendo as propriedades intrínsecas do sistema composto, com as respectivas probabilidade de ocupação.

2.3 Correlações, Estados Naturais, Probabilidade de Ocupação e Decoerência

Na seção anterior, vimos que o operador densidade total $\hat{\rho}$, que é um projetor, corresponde a estados quânticos puros, como $|\phi\rangle$. No entanto, as densidades reduzidas $\hat{\rho}_1 \equiv \text{Tr}_2 \hat{\rho}$ e $\hat{\rho}_2 \equiv \text{Tr}_1 \hat{\rho}$ não correspondem, em geral, a estados quânticos puros dos respectivos subsistemas, o que significa que existem correlações entre eles. As densidades correspondentes a estes estados quânticos não-puros são conhecidas como misturas estatística de estados com mais de uma probabilidade de ocupação diferente de zero, como é o caso de (2.7) e (2.9). Uma mistura estatística nada mais é do que uma média ponderada com as probabilidades de ocupação p_i de densidades correspondentes aos estados quânticos puros ortogonais $|u_i\rangle$ e $|v_i\rangle$. Uma maneira de medir a transição de um sistema puro para um mistura estatística é através do cálculo da entropia linear ou defeito de idempotência definido como [12, 13]

$$\delta(t) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}^2(t)) = 1 - \text{Tr}\hat{\rho}^2(t) \quad (2.10)$$

onde $\hat{\rho}$ uma matriz densidade qualquer que pode ser completa ou reduzida. O defeito de idempotência varia no intervalo $0 \leq \delta(t) \leq 1$, onde $\delta(t) = 0$ significa que o estado é puro e caso contrário, o sistema é uma mistura estatística, que quando $\delta(t) = 1$ caracteriza uma situação de máxima correlação entre os sistemas envolvidos. A transformação de um estado puro numa mistura estatística é chamada de decoerência, podendo, então, ser medida pelo defeito de idempotência. Esta decoerência é resultado de uma evolução não-unitária e não-linear dos estados, característica de sistemas abertos. A decoerência pode ser observada durante um processo de medida que perturba o sistema de interesse de tal maneira que ele evoluiu de um estado puro para uma mistura estatística. Expressões do tipo (2.7) e (2.9) e expansões em termos dos orbitais naturais para descrever o estado $|\phi\rangle$, como por exemplo, (2.8) deixam explícitas as correlações que existem entre os subsistemas do sistema total dado que ele seja descrito pelo estado $|\phi\rangle$. Um maior número de termos nestas expansões significa um maior condicionamento dos estados do sistema e neste sentido, eles estão mais correlacionados. Neste sentido a menor correlação corresponde a um único termo $|\phi\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$ com $p_i = 1$ e portanto, $|\phi\rangle$ é um estado fatorizável do tipo dado pela equação (2.2).

Os valores esperados dos observáveis em tais misturas aparecem também como somas incoerentes dos valores esperados nos respectivos estados puros, igualmente ponderados com a probabilidade de ocupação

$$\langle \hat{O} \rangle_\phi = \text{Tr}_1[\hat{O}\hat{\rho}] = \text{Tr}_1 \left[\sum_i |u_i\rangle p_i \langle u_i| \hat{O} \right] = \sum_i p_i \langle u_i| \hat{O} |u_i\rangle = \sum_i p_i \langle \hat{O} \rangle. \quad (2.11)$$

O grau de incoerência de (2.11) está diretamente relacionado às probabilidades de ocupação p_i que controlam também o número de termos na expansão em estados naturais de $|\phi\rangle$. Além disso, um determinado estado natural ($|u_i\rangle \in \mathcal{H}_1$ ou $|v_i\rangle \in \mathcal{H}_2$) só aparece uma vez na expansão do vetor $|\phi\rangle$, desde que o p_i correspondente seja não-nulo. Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre os estados naturais de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 e implica que dado que o subsistema 1 esteja no estado $|u_i\rangle \in \mathcal{H}_1$, então o subsistema 2 deverá necessariamente estar no estado correspondente $|v_i\rangle \in \mathcal{H}_2$.

2.3.1 Exemplo Ilustrativo: O modelo Jaynes-Cummings (MJC) na sua versão mais simplificada

O objetivo desta subseção é ilustrar os conceitos que foram discutidos anteriormente, através de um exemplo simples. A hamiltoniana que descreve o modelo MJC [40] para um acoplamento do tipo RWA é

$$H = \hbar\omega_0 \frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\Omega(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a), \quad (2.12)$$

onde ω_0 e ω correspondem, respectivamente, as frequências características do átomo e do campo. Note que $\sigma_z + a^\dagger a$ é uma constante de movimento, o que permite considerar apenas o subespaço gerado pelos vetores $|e\rangle \otimes |0\rangle$ e $|g\rangle \otimes |1\rangle$, que é desacoplado do espaço complementar. Assim, o campo pode conter ou não um fóton, enquanto que o átomo composto por dois níveis ativos $|e\rangle$ e $|g\rangle$, pode ou não sofrer uma transição. Vamos, então, representar a hamiltoniana (2.12) na base $\{|0e\rangle, |1g\rangle\}$

$$\begin{aligned} \hat{H}|0e\rangle &= \frac{\hbar\omega_0}{2}|0e\rangle + \hbar\Omega|1g\rangle \\ \hat{H}|1g\rangle &= \hbar\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)|1g\rangle + \hbar\Omega|0e\rangle \end{aligned}$$

que quando $\omega = \omega_0$ se reduz a

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Podemos diagonalizar (2.13), determinando os autovalores e autovetores de \hat{H}

$$\begin{aligned} |E_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0e\rangle + |1g\rangle); & E_+ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\Omega \\ |E_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0e\rangle - |1g\rangle); & E_- &= \frac{\hbar\omega_0}{2} - \hbar\Omega \end{aligned}$$

e a partir deles, podemos escrever os vetores $|0e\rangle$ e $|1g\rangle$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |0e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_+\rangle + |E_-\rangle) \\ |1g\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_+\rangle - |E_-\rangle). \end{aligned}$$

Vamos estudar a evolução temporal de um estado $|\phi(t)\rangle$ dentro do formalismo das matrizes densidade, que é dada pela equação de Liouville-Von Neumann, derivada diretamente da equação de Schrödinger

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

a partir da condição inicial $\hat{\rho}(0) = |0e\rangle\langle 0e|$. Neste caso, obtemos o seguinte operador de densidade total (considerando $\hbar = 1$)

$$\hat{\rho}(t) = |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| = \cos^2 \Omega t |0e\rangle\langle 0e| + \sin^2 \Omega t |1g\rangle\langle 1g| + i \sin 2\Omega t |0e\rangle\langle 1g| - i \sin 2\Omega t |1g\rangle\langle 0e|.$$

Note que a matriz de densidade total contém, além das populações, os termos de interferência entre os dois subsistemas, portanto esta densidade total representa um estado puro, isto é $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$. Desta forma, o defeito de idempotência é nulo para todos os tempos, $\delta(t) = 0$.

A seguir, estudamos a dinâmica reduzida de um dos subsistemas, por exemplo o átomo. A matriz densidade reduzida do subsistema átomo $\hat{\rho}_a$ é obtida após tomarmos o traço nas variáveis do segundo subsistema, no caso o campo, isto é $\hat{\rho}_a = \text{Tr}_c \hat{\rho}$

$$\hat{\rho}_a = \text{Tr}_c \hat{\rho} = |e\rangle \cos^2 \Omega t \langle e| + |g\rangle \sin^2 \Omega t \langle g|,$$

que tem a forma de uma mistura estatística, vide (2.7) e portanto, $\hat{\rho}_a \neq \hat{\rho}_a^2$. Assim podemos calcular o defeito de idempotência que mede a decoerência sofrida por um dos subsistemas, no caso átomo devida a interação com outro subsistema, o campo

$$\delta_a(t) = 1 - \text{Tr} \hat{\rho}_a^2 = 2 \sin^2 \Omega t \cos^2 \Omega t = \frac{1}{2} \sin^2(2\Omega t).$$

Podemos calcular também a matriz densidade relativa ao outro subsistema, no caso o campo e para isso, devemos eliminar as variáveis do subsistema átomo

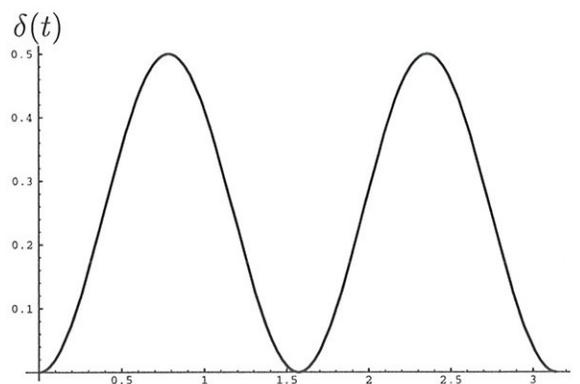
$$\rho_c(t) = \text{Tr}_a \hat{\rho}(t) = |0\rangle \cos^2 \Omega t \langle 0| + |1\rangle \sin^2 \Omega t \langle 1|,$$

que também tem a forma de uma mistura estatística e o defeito de idempotência é dado por

$$\delta_c(t) = 1 - \text{Tr} \hat{\rho}_c^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2\Omega t.$$

Repare que tanto $\delta_c(t)$ como $\delta_a(t)$ se anulam para todos os instantes múltiplos de $\pi/2\Omega$ e neste instante, átomo, campo e o sistema completo são representados por estados puros. O sistema completo tem, portanto, a forma de um estado fatorizável do tipo $|1\rangle \otimes |g\rangle$ com $p_1 = 1$, idêntico a equação (2.2), correspondendo a uma situação de menor correlação entre os subsistemas. A medida

Figura 2.1: O defeito de idempotência como função do tempo



que nos afastamos dos tempos múltiplos de $\pi/2\Omega$, observamos que o sistema começa a perder coerência até atingir o máximo grau de decoerência em $t = n\pi/4\Omega$, com $n = 1, 3, \dots$. Para esses tempos os subsistemas estão maximamente correlacionados sendo representados por uma mistura estatística dos estados $|0e\rangle$ e $|1g\rangle$, em que peso estatístico de cada um deles é $1/2$. Durante a transição de um estado puro para uma mistura estatística, o sistema perde coerência e o quanto foi perdido é medido por $\delta(t)$.

Capítulo 3

Modelo para o Tunelamento de Sistemas Biestáveis.

3.1 Introdução

O fenômeno de tunelamento é uma das manifestações da Mecânica Quântica que se dá através da penetração da partícula numa região classicamente proibida. Este fenômeno é uma consequência direta da equação de Schrödinger e tem sido descrito por tratamentos semi-clássicos tais como a aproximação WKB em diversos contextos [41, 42, 43]. Geralmente, o movimento num fenômeno de tunelamento pode ser entendido como resultado de efeitos dispersivos na evolução temporal dos estados quânticos localizados, os quais não são autoestados da energia. Dentro deste contexto, o fenômeno de interferência quântica pode desempenhar um papel muito importante. Então, nos perguntamos como a decoerência afeta esse processo de tunelamento, o que se torna muito difícil de observar dentro do formalismo semi-clássico. Os processos de tunelamento podem ser divididos em dois grupos principais: **1)** Os processos chamados Tunelamento Macroscópico Quântico (**MQT**) no qual o sistema tunela de um estado metaestável do potencial para um contínuo, isto é, transições entre estados localizados em um lado do poço [15, 16, 17, 18] representado pela figura (a) de (3.1). **2)** Os processos de Coerência Macroscópica Quântica (**MQC**) [15, 44, 45, 46, 47] no qual aparecem oscilações similares às da molécula de amônia [48] entre os dois estados degenerados do poço separados por uma barreira de potencial classicamente impenetrável, representado pela figura (b) de (3.1). A menos de eventuais complicações técnicas ligadas ao espectro contínuo no caso MQT, estes dois grupos de fenômenos podem ser abordados também em termos dos efeitos dispersivos na evolução temporal quântica de estados não estacionários.

Neste capítulo, trataremos os fenômenos de dissipação e decoerência dentro do contexto da coerência macroscópica quântica (**MQC**). Dentro de certas condições, torna-se adequado o uso da aproximação de dois níveis, principalmente no caso de sistemas quânticos complexos com espectro de energia discreto que tem apenas dois estados estacionários com participação ativa na dinâmica. Desta forma, os outros estados estacionários são ignorados permitindo um tratamento analítico completo da dinâmica. Dentro deste contexto se encaixam sistemas simétricos, bi-estáveis e ligados cujo espectro discreto de energia é caracterizado por uma estrutura de estados do dubleto. Uma maneira esquemática de representar o que está acontecendo é considerar dois poços separados por

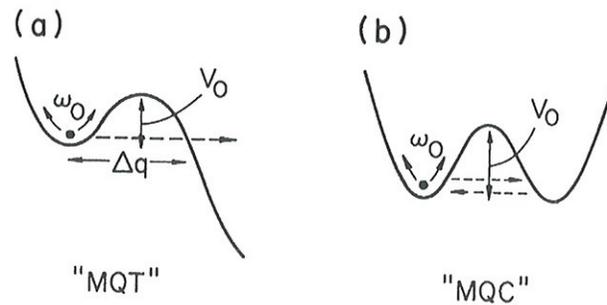


Figura 3.1: Tunelamento macroscópico quântico e coerência macroscópica quântica

uma barreira infinita. Os estados estacionários destes dois poços são degenerados, pois estes poços têm a mesma largura. À medida que a altura desta barreira torna-se finita, temos um único sistema. Os autoestados de menor energia são agora combinações simétricas e anti-simétricas dos estados anteriores e a degenerescência é removida pela possibilidade de haver tunelamento entre esses dois poços. A diferença de energia entre os dois estados está diretamente relacionada com a altura e a largura da barreira. Na situação em que a diferença de energia entre o dubleto do estado fundamental e o dubleto do primeiro estado excitado for maior do que a diferença entre os níveis que compõem o dubleto e no caso particular em que os efeitos térmicos são desprezíveis, o sistema estará efetivamente restrito a um espaço de Hilbert de duas dimensões gerado pelo dubleto do estado fundamental. Na aproximação de dois níveis é conveniente expressar o sistema em questão, em termos de uma álgebra de spin $1/2$. Os fenômenos de decoerência e dissipação são introduzidos nesta descrição através do acoplamento do sistema de dois níveis com um outro sistema, possivelmente com um espectro de energia contínuo. Este tipo de sistema foi usado na década de 60 para estudar o movimento de impurezas em sólidos cristalinos [49] e mais recentemente, explorado por Leggett e seus colaboradores no contexto de sistemas abertos em Mecânica Quântica [19, 15].

Leggett e seus colaboradores estudaram a dinâmica de um sistema de dois níveis acoplado a um banho de osciladores harmônicos conhecido como modelo spin-bóson. Aqui estudaremos a dinâmica de um sistema de dois níveis acoplado a um sistema genérico cujo espectro de energia é contínuo. Este modelo é solúvel e apresenta muitos aspectos semelhantes ao modelo spin-bóson e permite o cálculo da matriz densidade reduzida associada ao sistema de dois níveis em todos os tempos, mostrando explicitamente os efeitos de decoerência e dissipação. Um dos efeitos mais interessantes do modelo spin-bóson é a localização do sistema a temperatura nula no regime de acoplamento sub-ôhmico [19]. Isto significa que neste regime, o estado localizado é um autoestado da Hamiltoniana. No modelo tratado por nós, observamos o aparecimento de uma localização parcial que só aparecerá no caso do espectro do sistema responsável pela dissipação, o qual chamaremos de contínuo, ser limitado inferiormente. Mostramos também que estes dois modelos têm uma estrutura muito semelhante e que este fenômeno de localização depende fortemente do modelo adotado para descrever o reservatório térmico.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na segunda seção, mostramos as ferramentas básicas que serão utilizadas ao longo do capítulo. Nas seções que seguem, discutimos as soluções exatas estacionárias, num espectro puramente contínuo e num espectro limitado e a partir destas

soluções exatas, determinamos a matriz densidade reduzida do sistema de dois níveis, permitindo um estudo completo da dinâmica do sistema reduzido, em questão. Na penúltima seção, comparamos o modelo spin-bóson com o modelo discutido ao longo deste capítulo, onde damos ênfase ao fenômeno da localização no contexto da aproximação adiabática. Finalmente na última seção, comparamos os resultados fornecidos pela equação resultante da aproximação de Born-Markov obtida para o modelo proposto com os resultados exatos discutidos nas seções anteriores.

3.2 Ferramentas Básicas

Esta seção expõe os conceitos básicos que utilizamos ao longo deste capítulo. Revisamos a evolução temporal, em termos do formalismo de matrizes densidade, para um sistema de dois níveis a partir da condição inicial que representa um dos estados do dubleto do poço de potencial simétrico. Calculamos também a probabilidade do sistema ser encontrado no outro estado do dubleto e isso nós chamamos de probabilidade de tunelamento. Neste caso temos um sistema isolado. Para estudar os efeitos da decoerência desse sistema, devemos acoplá-lo a outros graus de liberdade. Desta forma, usamos a entropia linear ou defeito de idempotência $\delta(t)$ para medir a pureza do estado e a relacionamos com o módulo do vetor de Bloch e com a taxa de tunelamento.

O tunelamento entre os estados localizados à esquerda e à direita num poço de potencial na aproximação de dois níveis pode ser descrito pela Hamiltoniana efetiva

$$H_\sigma = \frac{\epsilon}{2} (\sigma_3 + \hat{1}_\sigma),$$

onde $\hat{1}_\sigma$ é a matriz identidade 2×2 e σ_z é a matriz de Pauli cujos autovetores são $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e conseqüentemente autoestados da energia. Já os estados localizados não são autoestados da energia e sim superposições desses autoestados de H . Os estados localizados à “esquerda” e à “direita” têm, respectivamente, as formas

$$|l\rangle \equiv \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |r\rangle \equiv \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Calculamos, a seguir, a matriz densidade na base $|\pm\rangle$ (com $\hbar = 1$) num dado tempo t , a partir da condição inicial $\rho(t=0) = |l\rangle\langle l|$

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\epsilon t} \\ e^{-i\epsilon t} & 1 \end{pmatrix} = \rho^2(t). \quad (3.1)$$

Repare que esta matriz densidade (3.1) representa um estado puro, pois $\rho(t) = \rho^2(t)$. A partir desta matriz densidade, podemos calcular a probabilidade de encontrarmos o sistema num dado tempo t no lado direito do poço $|r\rangle\langle r|$, ou seja, no estado ortogonal e, neste caso, complementar ao estado inicial

$$P(t) = \text{Tr} [|r\rangle\langle r| \rho(t)] = \text{sen}^2 \frac{\epsilon t}{2}. \quad (3.2)$$

Ao acoplarmos este sistema a outros graus de liberdade, temos uma matriz densidade reduzida hermiteana, positiva e de traço unitário que nem sempre representa um estado puro (isto é, que não é em geral idempotente). Os efeitos de decoerência sofridos pelo subsistema de dois níveis devido a interação com outros graus de liberdade podem ser medidos através do defeito de idempotência ou entropia linear definido como $\delta \equiv 1 - \text{Tr}[\rho^2(t)]$ [12, 13]. A forma mais conveniente de representar esta matriz densidade reduzida é usando os autovalores e autovetores, isto é

$$\rho(t) = \sum_k |t, k\rangle p_k(t) \langle t, k|. \quad (3.3)$$

Note que, no caso mais geral, os autovalores e autovetores dependem do tempo. A dependência temporal dos autovalores $p_k(t)$ revela uma mudança no tempo das propriedades de coerência do estado do subsistema, enquanto que estes autovetores evoluem unitariamente, pois eles formam uma base ortonormal dependente do tempo no espaço de fase quântico do sistema de dois níveis. O defeito de idempotência pode ser escrito em termos destes autovalores e autovetores

$$\delta = 1 - \sum_k p_k(t)^2 = 2p_1(t)(1 - p_1(t)) \quad (3.4)$$

onde foi usada a propriedade de unitariedade do traço de $\rho(t)$. No caso da eq. (3.1) temos um estado puro, $\delta \equiv 0$ e é fácil verificar que os autovalores da matriz densidade são $p_1 = 1$ e $p_2 = 0$. Supondo que a matriz densidade reduzida evolui a partir da condição inicial $\rho(t=0) = |l\rangle\langle l|$, então a probabilidade de tunelamento em termos dos autovetores e autovalores é

$$P(t) = \sum_k p_k(t) |\langle r|t, k\rangle|^2.$$

Este jeito alternativo de escrever a probabilidade de tunelamento facilitará a visualização dos efeitos unitários e não-unitários, especialmente quando calcularmos a taxa de tunelamento $R(t) \equiv \dot{P}(t)$. Esta taxa de tunelamento pode, então, ser dividida em duas contribuições: a unitária $R_u(t)$ e a dissipativa $R_d(t)$

$$R(t) \equiv \dot{P}(t) = \sum_k \dot{p}_k(t) |\langle r|t, k\rangle|^2 + \sum_k p_k(t) \frac{d}{dt} |\langle r|t, k\rangle|^2 = R_d(t) + R_u(t),$$

e com o uso da unitariedade do traço e também da normalização de $|r\rangle$, podemos escrever essas taxas $R_d(t)$ e $R_u(t)$ da seguinte forma

$$R_d(t) \equiv \sum_k \dot{p}_k(t) |\langle r|t, k\rangle|^2 = (2|\langle r|t, 1\rangle|^2 - 1) \dot{p}_1(t) \quad (3.5)$$

e

$$R_u(t) \equiv \sum_k p_k(t) \frac{d}{dt} |\langle r|t, k \rangle|^2 = (2p_1(t) - 1) \frac{d}{dt} |\langle r|t, 1 \rangle|^2. \quad (3.6)$$

Repare que no caso de uma evolução puramente unitária, como é o caso da eq. (3.1), têm-se $R_d = 0$ e $R_u = \frac{\epsilon}{2} \sin(\epsilon t)$. Esta decomposição da taxa de tunelamento na parte unitária e dissipativa pode ser estendida para casos onde a matriz densidade possua dimensões maiores e isso está mostrado no apêndice A.

A matriz densidade 2×2 pode ser também convenientemente representada pelo vetor de Bloch com as componentes definidas como os valores médios das matrizes de Pauli

$$\vec{\beta}(t) \equiv \langle \vec{\sigma} \rangle_t = \text{Tr} \vec{\sigma} \rho(t).$$

A seguir, mostraremos a relação entre o vetor de Bloch e o defeito de idempotência. Esta relação é muito útil porque fornece uma representação geométrica para a perda de pureza. O defeito de idempotência está diretamente ligado ao módulo do vetor de Bloch, isto é, $\delta = 1 - |\vec{\beta}|^2$, enquanto que a evolução temporal unitária dos autovetores de $\rho(t)$ é dada em termos dos ângulos esféricos de $\vec{\beta}(t)$. Desta forma, a probabilidade de tunelamento também pode ser escrita em termos do vetor de Bloch, já que esta está relacionada diretamente aos autovalores e autovetores de $\rho(t)$

$$P(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \vec{\beta}(t) \cdot \vec{\beta}_r \right),$$

onde $\vec{\beta}_r$ é o vetor de Bloch associado a matriz densidade $|r\rangle\langle r|$. As taxas de tunelamento dissipativa e unitária também podem ser escritas em termos do vetor de Bloch onde todas as informações sobre a coerência de $\rho(t)$ encontra-se no módulo do vetor de Bloch $\vec{\beta}$.

3.3 Solução Exata Estacionária

O tunelamento pode, ser entendido como resultado de efeitos dispersivos presentes na evolução temporal dos estados quânticos espacialmente localizados que não são autoestados da energia. O interessante é estudar como a decoerência afeta este processo e para isso consideramos como modelo um sistema de dois níveis cujo espectro de energia é caracterizado por uma estrutura de estados do dubleto acoplado a um outro sistema cujo espectro de energia contém um estado discreto, representado pelo vetor normalizado $|0_b\rangle$, e um contínuo de estados $|\eta\rangle$, normalizados em energia como $\langle \eta|\eta' \rangle = \delta(\eta - \eta')$. A Hamiltoniana que caracteriza este modelo tem a forma

$$\begin{aligned} H = & \frac{\epsilon}{2} (\sigma_3 + \hat{1}_\sigma) \otimes \hat{1}_b + \left(|0_b\rangle e_0 \langle 0_b| + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta |\eta\rangle \eta \langle \eta| \right) \otimes \hat{1}_\sigma \\ & + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g(\eta) |\eta\rangle \sigma_- \langle 0_b| + g^*(\eta) |0_b\rangle \sigma_+ \langle \eta|] \\ & + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g'(\eta) |\eta\rangle \sigma_+ \langle 0_b| + g'^*(\eta) |0_b\rangle \sigma_- \langle \eta|] \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $g(\eta)$ e $g'(\eta)$ são os elementos de matriz acoplamento $\langle -\eta|\hat{g}|0_b\rangle$ e $\langle +\eta|\hat{g}'|0_b\rangle$ que podem depender de η . Repare que no caso especial $g(\eta) = g'(\eta) = g^*(\eta) = g'^*(\eta)$ e $\eta_0 = 0$, a hamiltoniana (3.7) torna-se estruturalmente semelhante a hamiltoniana que descreve o modelo spin-bóson [19]

$$H = \frac{\epsilon}{2}(\sigma_3 + \hat{\mathbf{1}}_\sigma) \otimes \hat{\mathbf{1}}_\sigma + \left(|0_b\rangle e_0 \langle 0_b| + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta ||\eta\rangle \eta \langle \eta| \right) \otimes \hat{\mathbf{1}}_\sigma + \sigma_x \int_{\eta_0=0}^{\bar{\eta}} d\eta [|\eta\rangle g(\eta) \langle 0_b| + |0_b\rangle g^*(\eta) \langle \eta|]. \quad (3.8)$$

O sistema total e o caso particular representados, respectivamente por, eqs. (3.7) e (3.8) podem ser construídos na base $\{|s0_b\rangle, \{|s\eta\rangle\}$, com $s = +, -$ e $\eta_0 \leq \eta \leq \bar{\eta}$. Além disso, a forma de acoplamento mostra que os sub-espacos gerados por duas bases $\{|+0_b\rangle, \{|-\eta\rangle\}$ e $\{|-0_b\rangle, \{|+\eta\rangle\}$ são invariantes sob a ação de H , dando origem a duas dinâmicas independentes, cada uma delas com o seu tempo de relaxação. Este modelo permite o estudo de uma grande variedade de regimes cujas mudanças dependem exclusivamente da escolha dos parâmetros ϵ e e_0 , da faixa do espectro contínuo que varia de η até $\bar{\eta}$ e das formas dos acoplamentos: $g(\eta)$ e $g'(\eta)$.

O vetor de estado mais geral em cada um dos sub-espacos invariantes de H pode ser escrito como

$$|\psi_a\rangle = a_0 | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A(\eta) | - \eta \rangle$$

$$|\psi_b\rangle = b_0 | - 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta B(\eta) | + \eta \rangle.$$

e a partir destes vetores de estado, o problema dos autovalores de H

$$(E - H)|\psi_{a,b}^{(E)}\rangle = 0$$

pode ser reduzido a dois pares de equações independentes, mas com uma estrutura de coeficientes de expansão muito semelhante

$$(E - \epsilon - e_0)a_0^{(E)} = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g^*(\eta) A^{(E)}(\eta),$$

$$(E - \eta)A^{(E)}(\eta) = g(\eta)a_0^{(E)} \quad (3.9)$$

e

$$(E - e_0)b_0^{(E)} = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g'^*(\eta) B^{(E)}(\eta),$$

$$(E - \epsilon - \eta)B^{(E)}(\eta) = g'(\eta)b_0^{(E)}. \quad (3.10)$$

A solução destes dois sistemas de equações linearmente acopladas (3.9) e (3.10) foi encontrada por Fano [52] para descrever as propriedades do decaimento de um estado quântico em interação com um espectro contínuo de estados em teoria de espalhamento quântico e por van Kampen [53] dentro de um outro contexto, a saber, no estudo da equação de Vlasov. No caso do conjunto de equações (3.9), temos como solução para a amplitude do estado discreto

$$|a_0^{(E)}|^2 = \frac{|g(E)|^2}{[E - \epsilon - e_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g(E)|^4} \quad (3.11)$$

onde $F(E)$ é o valor principal da integral

$$F(E) = \mathcal{P} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{E - \eta}. \quad (3.12)$$

A solução para o coeficiente contínuo é

$$A^{(E)}(\eta) = \left[\frac{\mathcal{P}}{E - \eta} + z(E)\delta(E - \eta) \right] g(\eta)a_0^{(E)} \quad (3.13)$$

com

$$Z(E) = \frac{E - \epsilon - e_0 - F(E)}{|g(E)|^2}.$$

O valor da amplitude de $a_0^{(E)}$ dado por (3.11) carrega a convenção de fase adotada que irá aparecer na variável contínua $A^{(E)}(\eta)$ através da equação (3.13). A solução do outro conjunto de equação (3.10) é completamente análoga, não havendo nenhuma necessidade de ser mostrada aqui.

O espectro de H é composto de energias associadas a estados do contínuo, as quais chamaremos de E , assim como energias associadas aos estados discretos que se localizam fora da faixa do contínuo, tanto abaixo como acima dela, as quais denominaremos E_d (inferior) e \bar{E}_d (superior). Estas energias associadas ao contínuo são determinadas por $Z(E)$, enquanto que as energias ligadas aos estados discretos só aparecem quando a faixa do contínuo for finita, o que significa que os limites de integração são finitos. No caso de um dos limites ser finito e o outro infinito, por exemplo, $\eta = 0$ e $\eta \rightarrow \infty$, apenas uma entre as duas soluções discretas sobrevive e, no caso dos dois limites serem infinitos ($\eta_0 \rightarrow -\infty$ e $\bar{\eta} \rightarrow \infty$), nenhuma delas sobrevive. Estas soluções discretas mais baixas, tornam-se relevantes para comparar este modelo tratado com outros modelos dissipativos, tais como o modelo spin-bóson. Estes autovalores ligados aos estados discretos podem ser obtidos a partir da solução da equação de dispersão

$$E - \epsilon - e_0 = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{E - \eta}, \quad (3.14)$$

sujeita às condições: $E_d < \eta_0$ ou $E_d > \bar{\eta}$. Esta equação fornece dois autovalores: E_d e \bar{E}_d para diversos tipos de acoplamento $|g(\eta)|^2$. Depois de determinar tais autovalores, encontramos a solução da eq. (3.13), associada a eles

$$A^{(E_d)}(\eta) = \frac{g(\eta)}{E_d - \eta} a_0^{(E_d)} \quad (3.15)$$

e de $a_0^{(E)}$ que é determinada a partir da condição de normalização (a menos de uma fase)

$$|a_0^{(E_d)}|^2 = \left(1 - \left(\frac{dF}{dE} \right)_{E=E_d} \right)^{-1}. \quad (3.16)$$

3.3.1 Cálculo das Amplitudes para Diversos Tipos de Acoplamento

A seguir, determinamos esses dois autovalores discretos e as amplitudes $a_0^{(E_d)}$ e $A^{(E_d)}(\eta)$ para alguns tipos de acoplamento:

1-) O acoplamento é uma função de η , mais especificadamente $|g|^2 \sqrt{\eta}$ dentro do intervalo $\eta_0 < \eta < \bar{\eta}$. Este tipo de acoplamento corresponde ao regime de acoplamento sub-ôhmico no caso do modelo spin-bóson [19]. A equação de dispersão para esta forma de acoplamento é:

$$E - \epsilon - e_0 = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2 \sqrt{\eta}}{E - \eta}.$$

No caso de $\eta_0 = 0$, uma das raízes da equação acima será negativa $E_d < 0$ e a outra raiz será positiva $\bar{E}_d > \eta$. No entanto, à medida que $\eta \rightarrow \infty$ a amplitude de probabilidade $|a^{(\bar{E}_d)}|^2$ de obtermos o estado discreto no estado correspondente a energia $\hbar \bar{E}_d$ vai a zero. Por outro lado, a outra raiz E_d tende para menos infinito $E_d \rightarrow -\infty$, à medida que $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ e a amplitude de probabilidade $|a^{(E_d)}|^2$ de obtermos o estado discreto associado a energia E_d se aproxima de um. A solução da equação de dispersão acima é, então,

$$\begin{aligned} E_d - \epsilon - e_0 &= \int_{\eta_0=0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2 \sqrt{\eta}}{E_d - \eta} \\ &= -2|g|^2 \sqrt{\bar{\eta}} + 2|g|^2 \sqrt{E_d} \arctan \sqrt{\frac{\bar{\eta}}{E_d}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e a amplitude de probabilidade $|a^{(E_d)}|^2$ associada a $E = E_d < 0$ é

$$|a^{(E_d)}|^2 = \left(1 - \frac{|g|^2 \sqrt{\bar{\eta}}}{E_d - \bar{\eta}} - \frac{\operatorname{arctanh}(\sqrt{\frac{\bar{\eta}}{E_d}}) E}{\sqrt{E}(E - \eta)} + \frac{\operatorname{arctanh}(\sqrt{\frac{\bar{\eta}}{E_d}}) \bar{\eta}}{\sqrt{E}(E - \bar{\eta})} \right) \quad (3.18)$$

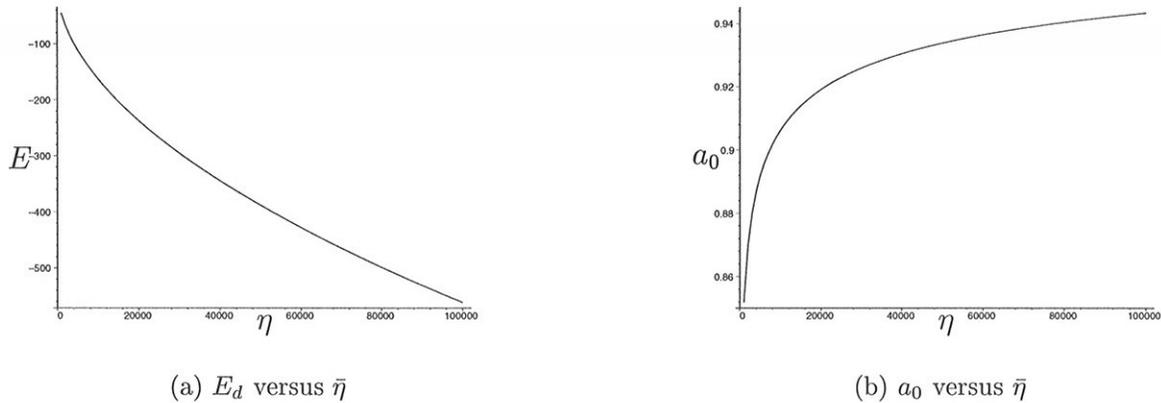


Figura 3.2: Cálculos realizados com $g(\eta) = g^2 \sqrt{\eta}$; com $g = 1$, $\epsilon = 0.5$ e $e_0 = 0$

e no limite de $\bar{\eta} \rightarrow \infty$, esta raiz $E_d \rightarrow -\infty$ e a $|a^{(E_d)}|^2 \rightarrow 1$ e este comportamento pode ser visto respectivamente, nos gráficos de (3.2).

2-) O acoplamento é independente de η e vale $|g|^2$ no intervalo $\eta_0 < \eta < \bar{\eta}$ e zero para qualquer outro intervalo. Então, para esta forma de acoplamento a equação de dispersão tem a forma

$$\begin{aligned}
 E - \epsilon - e_0 &= \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{E - \eta} \\
 &= |g|^2 \ln\left(\frac{E - \eta_0}{E - \bar{\eta}}\right).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Esta equação fornece duas soluções: $E_d < \eta_0$ e $\bar{E}_d > \bar{\eta}$ e a partir delas, calculamos a amplitude de probabilidade $|a^{(E)}|^2$ de obtermos os estados discretos associados as energias E_d e \bar{E}_d , isto é,

$$|a^{(E)}|^2 = \left(1 + |g|^2 \frac{\bar{\eta} - \eta_0}{(E - \bar{\eta})(E - \eta_0)}\right)^{-1}, \tag{3.20}$$

onde $E = \bar{E}_d, E_d$. No caso de $\eta \rightarrow \infty$, a equação (3.19) tem como solução apenas uma raiz à medida que $E_d \rightarrow -\infty$, enquanto que a amplitude de probabilidade $|a^{(E)}|^2 \rightarrow 1$ e isso pode ser visto, respectivamente, nos gráficos de (3.3).

Este comportamento é idêntico ao caso anterior e está ligado ao fenômeno da localização que aparece no modelo de spin-bóson. No entanto, deixaremos esta discussão para a última seção deste capítulo.

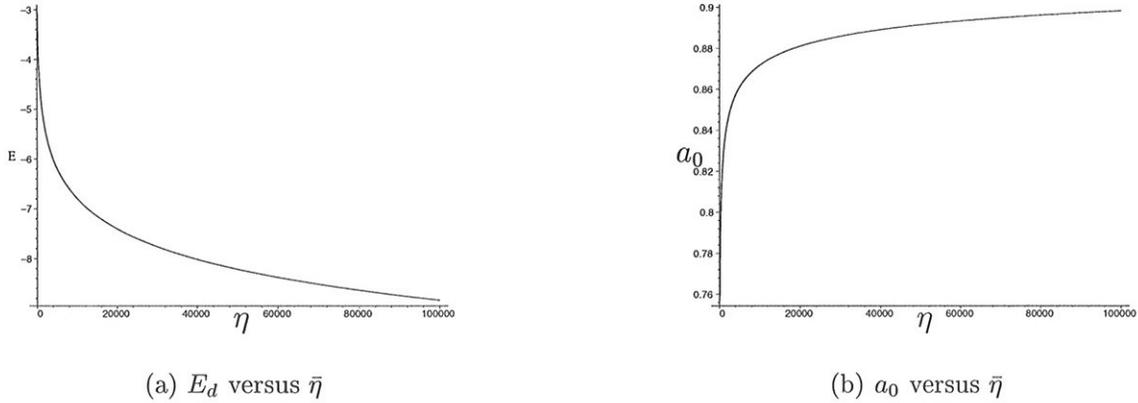


Figura 3.3: Cálculos realizados com $g(\eta) = g^2$; com $g = 1$, $\epsilon = 0.5$ e $e_0 = 0$

3.4 Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro de energia puramente contínuo

Nesta seção consideramos o caso onde o intervalo de energia é muito grande tanto abaixo como acima de e_0 ou em outras palavras,

$$\eta_0 \ll e_0 \quad \text{e} \quad e_0 + \epsilon \ll \bar{\eta}.$$

Isso significa que não teremos contribuições de estados discretos e assim, os estados estacionários se reduzem a

$$\begin{aligned} |\psi_a^{(E)}\rangle &= a_0^{(E)} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A^{(E)}(\eta) | - \eta \rangle \\ |\psi_b^{(E)}\rangle &= b_0^{(E)} | - 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta B^{(E)}(\eta) | + \eta \rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde E representa os autovalores de H que correspondem a parte contínua do espectro. Vamos considerar a evolução temporal de um estado localizado

$$|t = 0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0_b\rangle = |l\rangle \otimes |0_b\rangle. \quad (3.22)$$

As componentes $| + 0_b \rangle$ e $| - 0_b \rangle$ podem ser escritas em termos dos estados estacionários de H determinados a partir das soluções das eqs. (3.9) e (3.10), pois sabemos como o operador evolução

$U(t, t_0 = 0) = \exp(-iHt)$ (com $\hbar = 1$) age nestes estados. Assim, o estado do sistema num dado tempo t é

$$|t\rangle = e^{-iHt}|t=0\rangle = \frac{e^{-iHt}}{\sqrt{2}} \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE a_0^{(E*)} |\psi_a^{(E)}\rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' b_0^{(E'*)} |\psi_b^{(E')}\rangle \right), \quad (3.23)$$

que deve ser re-expressa em termos dos estados estacionários dados pela eq. (3.21). A matriz densidade reduzida do sistema de dois níveis num dado tempo t é obtida, a partir de (3.23), após tomarmos o traço sobre a variável associada ao contínuo, resultando em

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{++}(t) & \rho_{+-}(t) \\ \rho_{+-}^*(t) & 1 - \rho_{++}(t) \end{pmatrix}$$

com

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \left| \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2 - \left| \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |b_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2 \right) \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_{+-}(t) = \frac{1}{2} & \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' |b_0^{(E')}|^2 e^{iE't} \right. \\ & \left. + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' b_0^{*(E')} a_0^{(E)} e^{-i(E'-E)t} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta B^{(E')}(\eta) A^{*(E)}(\eta) \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

que dependem explicitamente das amplitudes dos estados discretos, a menos do último termo da eq. (3.25), que é o único em que as amplitudes do contínuo $A^{(E)}(\eta)$ e $B^{(E)}(\eta)$ intervêm explicitamente. Este último termo descreve a re-correlação das componentes do estado do sistema de dois níveis no sub-espaço contínuo do sistema b ao qual estão acoplados através de $g(\eta)$ e $g'(\eta)$. Repare que este termo desaparece se qualquer um dos acoplamentos for igual a zero.

A probabilidade de tunelamento do subsistema de dois níveis no estado inicialmente localizado a esquerda $|l\rangle$ para o estado complementar $|r\rangle$ num dado tempo t , definida em termos da matriz densidade reduzida $\rho(t)$ como na eq. (3.2), é dada por

$$P(t) = \text{Tr} [|r\rangle\langle r| \rho(t)] = \frac{1}{2} (1 - 2 \text{Re} \rho_{+-}) \quad (3.26)$$

e o defeito de idempotência (3.4) da matriz densidade reduzida do sistema tem a forma

$$\delta(t) = 2 [\rho_{++}(t) (1 - \rho_{++}(t)) - |\rho_{+-}(t)|^2]. \quad (3.27)$$

Este modelo permite o estudo de diversos regimes, inclusive o regime de acoplamento forte que acontece quando $g(\eta)$ e $g'(\eta)$ são muito maiores do que a separação entre os estados do dubleto.

Vamos estudar agora o que acontece com o tunelamento e a decoerência no caso simples $g'(\eta) \equiv 0$, ou seja, quando o sistema tem um único tempo de relaxação. Neste caso, em particular, o estado $|-0_b\rangle$ é um estado estacionário de H , enquanto que, os estados $|+0_b\rangle$ e $|- \eta\rangle$, associados ao outro acoplamento $g(\eta)$, não são. A matriz densidade reduzida para este caso pode ser determinada a partir das eqs (3.23), fazendo $b_0^{*(E')} = 0$, o que significa $g'(\eta) \equiv 0$, resultando em,

$$\rho_{++}(t) \rightarrow \frac{1}{2} \left| \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2, \quad g'(\eta) \equiv 0 \quad (3.28)$$

e

$$\rho_{+-}(t) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-i(E-e_0)t}, \quad g'(\eta) \equiv 0. \quad (3.29)$$

onde $|a_0^{(E)}|^2$, eq. (3.11), é a densidade espectral. Neste caso, estas expressões podem ser calculadas de forma exata e fechada quando, por exemplo, o elemento de matriz $g(\eta)$ for independente de η , e a correção deslocamento da energia $F(E)$, eq. (3.12) depender suavemente da energia no intervalo da ordem de $\pi|g|^2$ na vizinhança de $E = \epsilon + e_0$. Este é exatamente o caso onde a faixa do contínuo é muito larga, tanto acima quanto abaixo desta energia. Então, a equação (3.11) é adequadamente aproximada por uma Breit-Wigner [54]

$$|a_0^{(E)}|^2 \rightarrow \frac{|g|^2}{(E - e_R)^2 + \pi^2|g|^4} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - e_R)^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$

onde $e_R - \epsilon - e_0 - F(e_R) = 0$ e $\Gamma = 2\pi|g|^2$ é a largura da Breit-Wigner dada pela Regra áurea. Note que para valores maiores que $\bar{\eta} - e_0 \simeq e_0 - \eta_0$, temos $F(e_R) \simeq F(e_0) \simeq 0$ então $e_R - e_0 \simeq \epsilon$. Estendendo os limites de integração para $\pm\infty$, a matriz densidade é facilmente obtida através de integrações simples de contorno

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \quad \text{e} \quad \rho_{+-}(t) = \frac{1}{2} e^{-i(e_R - e_0)t - \frac{\Gamma t}{2}} \quad (3.30)$$

e a partir destas soluções, fica trivial calcularmos a probabilidade de tunelamento também numa forma fechada

$$P(t) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \cos(e_R - e_0)t \right). \quad (3.31)$$

A decoerência é medida através do defeito de idempotência $\delta(t)$ (3.4) que também tem uma forma fechada

$$\delta(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}) \quad (3.32)$$

e a partir de $P(t)$ e $\delta(t)$, calculamos as taxas de tunelamento e de perda de coerência

$$\dot{P}(t) = \frac{e^{-\frac{\Gamma t}{2}}}{2} \left(\frac{\Gamma}{2} \cos(e_R - e_0)t + (e_R - e_0) \text{sen}(e_R - e_0)t \right)$$

e

$$\dot{\delta}(t) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\Gamma t} (2e^{-\Gamma t} - 1.)$$

Note que ambas são proporcionais a largura da Breit-Wigner Γ , que está diretamente relacionada a dissipação, gerando um único tempo de relaxação τ_d definido como $\tau_d = 1/\Gamma$. Além disso, a taxa de tunelamento $R(t) \equiv \dot{P}(t)$ contém uma escala de tempo adicional relacionada ao período de evolução unitária $\tau_u \equiv 2\pi/(e_R - e_0) \simeq 2\pi/\epsilon$. Repare que na ausência de acoplamento, como é o caso da seção 3.2, tanto a probabilidade de tunelamento $P(t)$, como a taxa de tunelamento $R(t) \equiv \dot{P}$ tem como escala de tempo característica $\tau_u \equiv 2\pi/\epsilon$ e neste tempo, o sistema já retornou para o estado inicial, o que significa que $P(\tau_u) = \dot{P}(\tau_u) = 0$. Na presença do acoplamento, como vimos, existem duas escalas de tempo características τ_u e τ_d e a situação anterior é modificada, como mostram as equações acima, então, torna-se apropriada a separação da taxa de tunelamento na parte unitária $R_u(t)$ e dissipativa $R_d(t)$ definidas na seção 3.2 deste capítulo, pois elas nos mostram aspectos importantes da dinâmica que são governados por estas partes. Estas quantidades dependem dos autovalores e autovetores da matriz densidade reduzida, como mostram as eqs. (3.5) e (3.6). Os autovalores da matriz densidade reduzida $\rho(t)$ são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\rho_{++}(1 - \rho_{++}) - \rho_{+-}\rho_{-+}}$$

Como os autovalores e os autovetores, e conseqüentemente as taxas de tunelamento dissipativa e unitária têm expressões muito pouco elucidativas, tornando-se difícil tirar alguma conclusão imediata, nós explicaremos o comportamento do sistema através de gráficos. No regime de acoplamento fraco $\tau_d \gg \tau_u$, a probabilidade de tunelamento do sistema é dominada por um comportamento oscilatório e isso acontece porque há um domínio de efeitos unitários, que é confirmado pela contribuição unitária na taxa de tunelamento, $R_u(t)$. A taxa dissipativa é bem pequena e é responsável pela diminuição da amplitude do movimento com relação ao caso sem nenhum acoplamento descrito na seção 3.2. Repare que o sistema perde apenas um pouco de sua pureza dada a fraca atuação da parte não unitária, o que significa que não há um entrelaçamento intenso entre os dois sistemas. O vetor de Bloch confirma isso. Podemos calcular explicitamente as componentes deste vetor de Bloch: $\langle \sigma_x(t) \rangle$, $\langle \sigma_y(t) \rangle$ e $\langle \sigma_z(t) \rangle$ e a partir delas, temos todas as informações sobre a trajetória deste vetor ao longo da esfera. Além disso, dada a relação entre este vetor e o defeito de idempotência, também temos informações sobre a perda de pureza do sistema. As componentes são dadas por

$$\langle \sigma_x(t) \rangle \equiv Tr(\rho \sigma_x) \equiv \rho_{++} - \rho_{--} = e^{-\Gamma t} - 1, \quad (3.33)$$

$$\langle \sigma_y(t) \rangle \equiv Tr(\rho \sigma_y) \equiv \rho_{+-} + \rho_{-+} = e^{-\Gamma t} \text{sen} [(e_R - e_0)t], \quad (3.34)$$

$$\langle \sigma_z(t) \rangle \equiv Tr(\rho \sigma_z) \equiv \rho_{++} - \rho_{--} = e^{-\Gamma t} \text{cos} [(e_R - e_0)t] \quad (3.35)$$

e o módulo do vetor de Bloch é,

$$|\vec{\sigma}(t)| = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}(1 - e^{-\Gamma t})}.$$

Repare que a trajetória que o sistema faz até completar um período $\tau_u = 2\pi$, mostrada pela figura (3.5), localiza-se muito próximo a superfície da esfera, caracterizando um estado que perdeu um pouco de sua pureza, demorando um pouco para atingir o estado final e esta demora está relacionada as oscilações que aparecem em $P(t)$. No regime de acoplamento forte $\tau_d \ll \tau_u$ eq. (3.31), a taxa de tunelamento $P(t)$ é dominada por efeitos de perda de coerência para tempos $t < \tau_d$ levando a uma saturação em $P = 1/2$ e este comportamento está totalmente ligado a efeitos não-unitários, que é responsável também pelo desaparecimento das oscilações. Neste caso, a contribuição dada pela taxa dissipativa torna-se importante. O defeito de idempotência $\delta(t)$ mostra que o estado voltará a ser puro quando a taxa dissipativa for a zero. Neste caso, o sistema perde muito mais pureza se comparado ao regime de acoplamento fraco. O vetor de Bloch confirma esse fato através da trajetória que se dá dentro da esfera e o estado não dá tantas voltas para chegar ao estado final. Assim, este regime é caracterizado por um forte entrelaçamento entre o sistema de dois níveis e o contínuo.

As figuras (3.4) e (3.6) mostram $P(t)$, $\delta(t)$ e as taxas de tunelamento total, dissipativa e unitária, dadas respectivamente por, $R(t)$, $R_d(t)$ e $R_u(t)$ para os regimes de acoplamento fraco e forte. As figuras (3.5) e (3.7) mostram a evolução temporal do vetor de Bloch para os regimes de acoplamento fraco e forte.

A dependência linear com o tempo de $P(t)$ e $\delta(t)$, eqs. (3.31) e (3.32) em $t = 0$ merece um comentário. É fácil mostrar que ambas as quantidades, quando a faixa do contínuo $\eta_0 < \eta < \bar{\eta}$ é finita e está sujeita as condições $\eta_0 \ll e_0$ e $e_0 + \epsilon \ll \bar{\eta}$, são proporcionais a t^2 . É importante ressaltar, que para este caso, $|a_0^{(E)}|^2$ não pode mais ser aproximado por uma Breit-Wigner, já que outras energias contribuirão para a forma da linha. Além disso, a correção na frequência, dada por $F(E)$, passa a ser relevante. Desta forma, podemos escrever para tempos $t \ll 1/\lambda$ com $\lambda = \text{sup}(\bar{\eta}, |\eta_0|)$

$$\rho_{++}(t) \approx \frac{1}{2} \left| \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 \left(1 - iEt - \frac{1}{2}E^2t^2 \right) \right|^2 = \frac{1}{2} (1 - (I_2 - I_1^2)t^2) + \mathcal{O}(t^4)$$

onde

$$I_n \equiv \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 E^n,$$

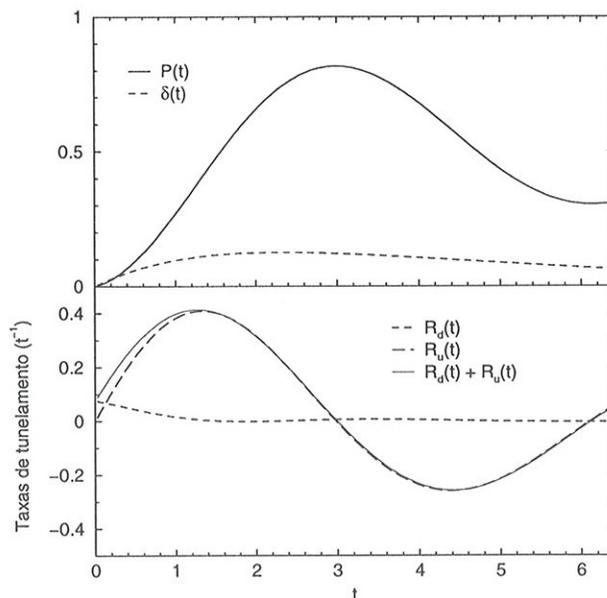


Figura 3.4: O primeiro gráfico mostra a probabilidade de tunelamento $P(t)$ e o defeito de idempotência $\delta(t)$ para o regime de acoplamento *fraco* com apenas um único tempo de relaxação com $\epsilon = 1$ e $\Gamma = 0.3$. O segundo gráfico mostra as taxas de tunelamento total, dissipativa e unitária para um regime de acoplamento *fraco* com apenas um único tempo de relaxação.

Trajétória do vetor de Bloch

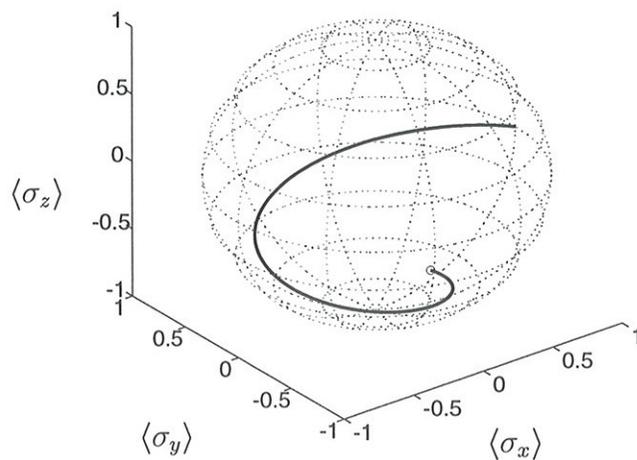


Figura 3.5: Trajetória do vetor de Bloch no regime de acoplamento *fraco* com apenas um único tempo de relaxação.

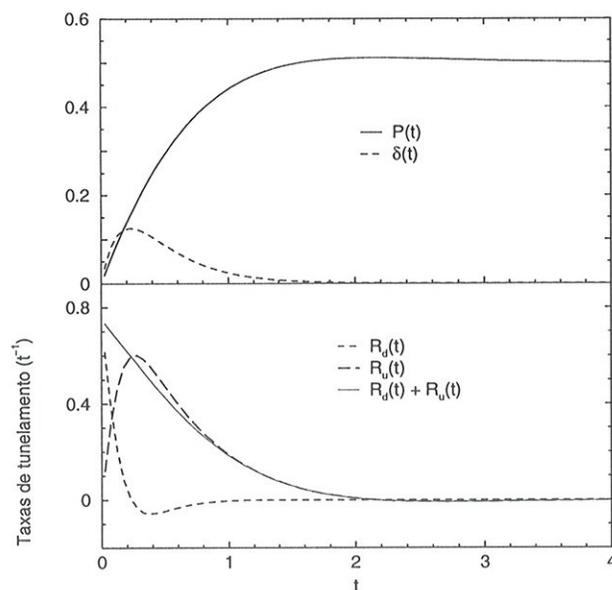


Figura 3.6: O primeiro gráfico mostra a probabilidade de tunelamento $P(t)$ e o defeito de idempotência $\delta(t)$ para o regime de acoplamento *forte* com apenas um único tempo de relaxação com $\epsilon = 1$ e $\Gamma = 3$. O segundo gráfico mostra as taxas de tunelamento total, dissipativa e unitária para um regime de acoplamento *forte*.

Trajetória do vetor de Bloch

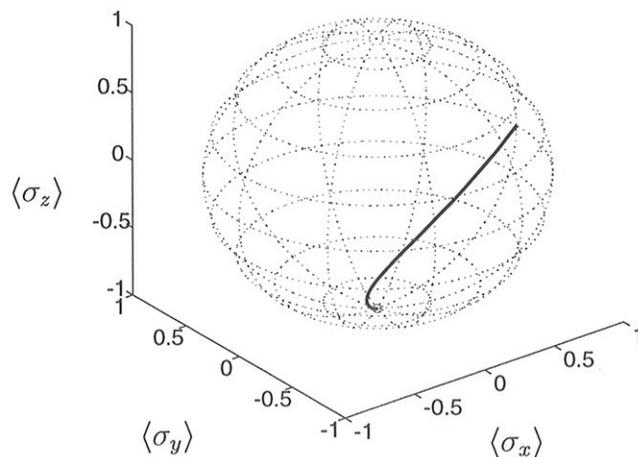


Figura 3.7: Trajetória do vetor de Bloch no regime de acoplamento *forte* com apenas um único tempo de relaxação.

já que quando $g'(\eta) \equiv 0$, temos $|\rho_{+-}|^2 = \rho_{++}/2$, eq. (3.27) o que resulta na seguinte expressão para o defeito de idempotência

$$\delta(t) = (I_2 - I_1^2)t^2 + \mathcal{O}(t^4).$$

Uma expansão semelhante para o fator exponencial pode ser feita para os elementos da matriz densidade reduzida ρ_{+-} , eq. (3.25) que junto com a eq. (3.26) também mostram que $P(t) \propto t^2 + \mathcal{O}(t^4)$. Note que I_2 cresce linearmente com λ enquanto que $I_1 = \epsilon + e_0$ vai com $\lambda \rightarrow \infty$, então o coeficiente de t^2 na expansão de tempo curto de $\delta(t)$ diverge neste limite. O resultado para I_1 é a bem conhecida regra de soma do centróide, que sai diretamente da primeira equação (3.9) ao ser multiplicada por $a_0^{*(E)}$ e integrada em E . Esta dependência da decoerência com o tempo será discutida também no próximo capítulo, dentro de um outro contexto, onde nós também verificamos que este tipo de dependência com o tempo está diretamente relacionada a finitude ou não da faixa do espectro do outro subsistema envolvido no problema.

A seguir, discutimos o que acontece com o tunelamento e com a decoerência num caso mais geral, onde existem dois tempos de relaxação envolvidos. Neste caso, os acoplamentos $g(\eta)$ e $g'(\eta)$ são diferentes de zero e os elementos da matriz densidade são dados pelas eqs. (3.24) e (3.25). Calculamos estes elementos de matriz fazendo as mesmas hipóteses do caso mais simples onde obtemos

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma' t} \right) \quad (3.36)$$

onde Γ' é definido como a largura da Breit-Wigner associada a

$$|b_0^{(E)}|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'}{(E - e'_R)^2 + \frac{\Gamma'^2}{4}},$$

com $\Gamma' = 2\pi|g'|^2$ (g' considerado independente de η) e ρ_{+-} é obtido a partir das eq. (3.25), usando eq. (3.13) e o método da ref.([52])

$$\rho_{+-}(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-i(e_R - e'_R)t - \frac{\Gamma + \Gamma'}{2}t} + \frac{2\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma + \Gamma'} e^{i(e_R - e'_R)t} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2}t} \right) \right]. \quad (3.37)$$

Aqui já se pode notar a característica dinâmica nova introduzida pelo acoplamento g' . A existência simultânea dos dois tipos de acoplamento dá origem ao fenômeno da recorrelação, mencionado anteriormente e matematicamente expresso pelo segundo termo da equação acima. As conseqüências físicas desta recorrelação podem ser facilmente apreciadas na probabilidade de tunelamento eq. (3.26)

$$P(t) = \frac{1}{2} \left[1 - e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2}t} \cos \epsilon t - \frac{2\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma + \Gamma'} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2}t} \right) \cos \epsilon t \right],$$

onde se vê claramente que o papel desta recorrelação é provocar oscilações estacionárias que vão sobreviver após um tempo transiente caracterizado pelo $\sup(\frac{\hbar}{\Gamma}, \frac{\hbar}{\Gamma'})$, o que não ocorre nos casos estudados anteriormente. Isto também está refletido no comportamento do defeito de idempotência

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma' t} \right) \left(1 - e^{-\Gamma t} + e^{-\Gamma' t} \right) - \frac{1}{2} e^{-(\Gamma + \Gamma') t} - \frac{2\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma + \Gamma'} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2} t} \right) \left[e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2} t} \cos 2\epsilon t + \frac{\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma + \Gamma'} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma + \Gamma'}{2} t} \right) \right].$$

Repare que as duas grandezas acima $P(t)$ e $\delta(t)$ são governadas pelas constante dissipativas Γ e Γ' . No caso destas duas constantes serem iguais $\Gamma = \Gamma'$, $P(t)$ adquire máxima amplitude de oscilações e as exponenciais responsáveis pelo amortecimento, se cancelam, recuperando a mesma forma obtida para o caso sem acoplamento discutido na seção 3.2

$$P(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\epsilon t)) \quad (3.38)$$

no entanto, $\delta(t)$ não recupera o resultado da seção 3.2, ou seja, o estado que tunela não é mais puro e $\delta(t)$ atinge seu valor máximo e neste limite, se reduz a

$$\delta(t) \xrightarrow{\Gamma = \Gamma'} 2e^{-\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}) \sin^2 \epsilon t.$$

Repare que o defeito de idempotência adquire um comportamento diferente do esperado: quanto mais forte for o acoplamento com relação a diferença de energia entre os estados do dubleto ϵ , mais puro é o estado que tunela e esse comportamento pode ser visto com a ajuda do gráfico 3.10. Assintoticamente, tanto $P(t)$ como $\delta(t)$ apresentam oscilações estacionárias e $\delta(t)$ também tem valor não nulo e portanto, o estado estacionário que oscila com frequência ϵ não é puro, ao contrário do caso onde o acoplamento é nulo, o que quer dizer $g(\eta) = g'(\eta) = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \frac{1}{2} - \frac{2\Gamma\Gamma'}{(\Gamma + \Gamma')^2}.$$

Podemos ainda calcular, explicitamente, os valores médios: $\langle \sigma_x(t) \rangle$, $\langle \sigma_y(t) \rangle$ e $\langle \sigma_z(t) \rangle$, dados respectivamente por,

$$\langle \sigma_x(t) \rangle = \cos [(e_R - e_{R'})t] e^{\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')t} + \frac{2\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma\Gamma'} (1 - e^{\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')t}) \cos [(e_R - e_{R'})t], \quad (3.39)$$

$$\langle \sigma_y(t) \rangle = \sin [(e_r - e_{r'})t] e^{\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')t} - \frac{2\sqrt{\Gamma\Gamma'}}{\Gamma\Gamma'} (1 - e^{\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')t}) \sin [(e_r - e_{r'})t], \quad (3.40)$$

$$\langle \sigma_z(t) \rangle = e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma' t} \quad (3.41)$$

que se reduzem, quando $\Gamma = \Gamma'$, a

$$\langle \sigma_x(t) \rangle \xrightarrow{\Gamma=\Gamma'} \cos[(e_R - e_{R'})t], \quad (3.42)$$

$$\langle \sigma_y(t) \rangle \xrightarrow{\Gamma=\Gamma'} \text{sen}[(e_R - e_{R'})t](e^{-\Gamma t} - 1), \quad (3.43)$$

$$\langle \sigma_z(t) \rangle \xrightarrow{\Gamma=\Gamma'} 0 \quad (3.44)$$

e a partir deles determinamos o vetor de Bloch e a sua trajetória, conforme mostram as figuras abaixo. As taxas de tunelamento dissipativa R_d e unitária R_u podem ser obtidas a partir da matriz densidade reduzida. A figura abaixo mostra um resultado típico para um regime de acoplamento forte moderado.

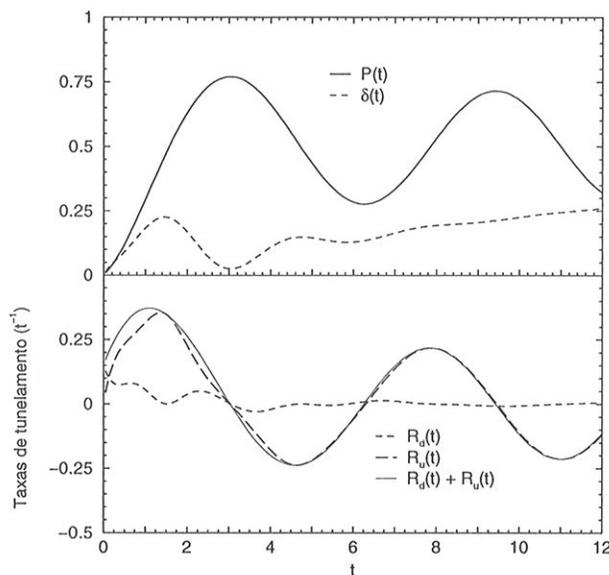


Figura 3.8: O primeiro gráfico mostra a probabilidade de tunelamento $P(t)$ e o defeito de idempotência $\delta(t)$ para o regime de acoplamento *forte moderado* com dois tempos de relaxação com $\epsilon = 1$, $\Gamma = 1$ e $\Gamma' = 0.05$. O segundo gráfico mostra as taxas de tunelamento total, dissipativa e unitária para um regime de acoplamento *forte moderado* com dois tempos de relaxação.

3.5 Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro limitado para um caso particular

No apêndice B pode ser encontrada a solução exata mais geral, para o caso do espectro ser limitado, tal que $\eta_0 < \eta < \bar{\eta}$. Neste caso, todas as soluções contribuem, ou seja, aquelas relacionadas aos estados do espectro discreto e aos estados do espectro contínuo.

Trajetória do vetor de Bloch

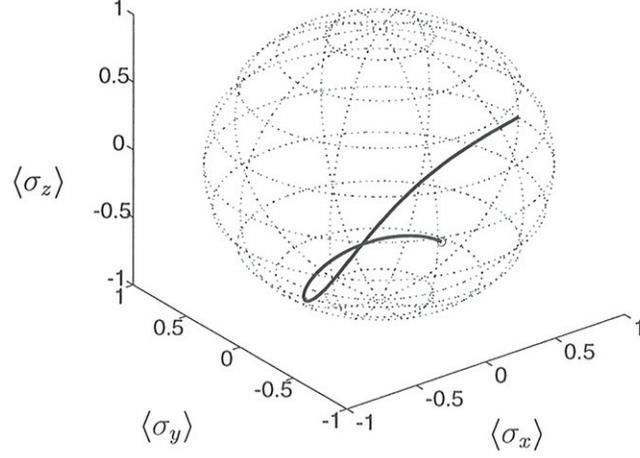


Figura 3.9: Trajetória do vetor de Bloch no regime de acoplamento *forte moderado* com dois tempos de relaxação.

Nesta seção consideramos a solução exata para um caso particular onde o intervalo de energia é finito, $\eta_0 < \eta < \bar{\eta} \rightarrow \infty$, tal que η_0 seja da ordem e_0 . Neste caso, as soluções discretas mais baixas do espectro E_d e E'_d tornam-se importantes, já as amplitudes relevantes para as soluções discretas localizadas acima de $\bar{\eta}$ desaparecem à medida que $\bar{\eta} \rightarrow \infty$. Os estados estacionários são dados por

$$\begin{aligned}
 |\psi_a^{(E_a)}\rangle &= a_0^{(E_a)} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A(\eta)^{(E_a)} | - \eta \rangle \\
 |\psi_b^{(E_b)}\rangle &= b_0^{(E_b)} | - 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta B(\eta)^{(E_b)} | + \eta \rangle,
 \end{aligned}$$

onde E_a é um dos autovalores da energia relacionado a dinâmica descrita por $g(\eta)$, o qual pode estar associado tanto a estados discretos de energia mais baixa E_d como a estados contínuos E , enquanto que E_b é um dos autovalores da energia associado a dinâmica descrita por $g'(\eta)$, o qual pode estar associado tanto a estados discretos de energia mais baixa E'_d como a estados contínuos E' . A equação de dispersão (3.14) determina as energias destes estados discretos.

O próximo passo será calcular a evolução temporal da matriz densidade reduzida de dois níveis para este caso de espectro puramente discreto. Devemos, então, escrever a condição inicial em termos dos estados estacionários $|\psi_a^{(E_a)}\rangle$ e $|\psi_b^{(E_b)}\rangle$ e depois re-escrevê-los em termos de $| + 0_b \rangle$ e $| - 0_b \rangle$, obtendo

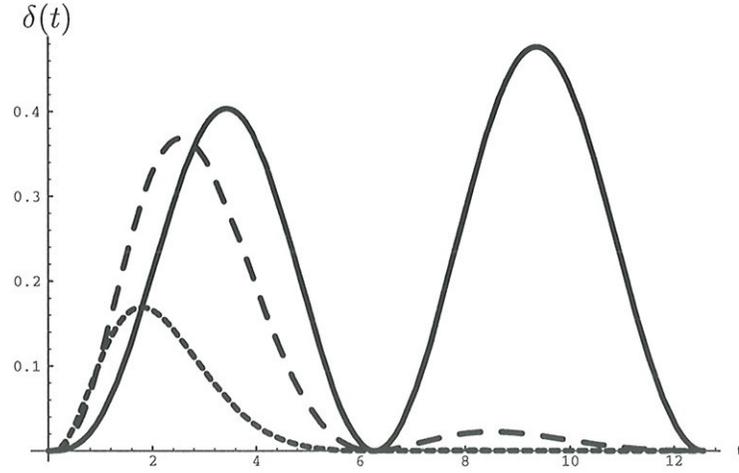


Figura 3.10: Estes gráficos mostram o comportamento do defeito de idempotência no regime puramente contínuo envolvendo dois tempos de relaxação iguais. O gráfico representado pela linha contínua mostra o comportamento do defeito de idempotência no caso onde o acoplamento é fraco ($\Gamma = \Gamma' = 0.1$) com relação a diferença de energia entre os estados do dubleto ($\epsilon = 0.5$). O gráfico com a linha tracejada cujo espaçamento é maior representa o comportamento do defeito de idempotência no caso onde o acoplamento e a diferença de energia entre os estados do dubleto tem o mesmo valor ($\epsilon = \Gamma = \Gamma' = 0.5$). O gráfico com a linha tracejada cujo espaçamento é menor ilustra o comportamento do defeito de idempotência no caso onde o acoplamento é forte ($\Gamma = \Gamma' = 1$) com relação a diferença de energia entre os estados do dubleto ($\epsilon = 0.5$). Repare que quanto mais forte for o acoplamento com relação a diferença de energia entre os estados do dubleto, mais puro é o estado que tunela.

$$\begin{aligned}
|t=0\rangle &= \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0_b\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(|a_0^{(E_d)}|^2 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE |a_0^{(E)}|^2 \right) |+0_b\rangle + \left(|b_0^{(E'_d)}|^2 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE' |b_0^{(E')}|^2 \right) |-0_b\rangle \right. \\
&\quad + \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta a_0^{*(E_d)} A(\eta)^{(E_d)} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE a_0^{*(E)} A(\eta)^{(E)} \right) |-\eta\rangle \\
&\quad \left. + \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{*(E'_d)} B(\eta)^{(E'_d)} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE' b_0^{*(E')} B(\eta)^{(E')} \right) |+\eta\rangle \right]. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

O estado do sistema num dado tempo t é, portanto,

$$\begin{aligned}
|t\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(|a_0^{(E_d)}|^2 e^{-iE_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right) | + 0_b \rangle \right. \\
& + \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta a_0^{*(E_d)} A(\eta)^{(E_d)} e^{-iE_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE a_0^{*(E)} A(\eta)^{(E)} e^{-iEt} \right) | - \eta \rangle \\
& + \left(|b_0^{(E'_d)}|^2 e^{-iE'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE' |b_0^{(E')}|^2 e^{-iE' t} \right) | - 0_b \rangle \\
& \left. + \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{*(E'_d)} B(\eta)^{(E'_d)} e^{-iE'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE' b_0^{*(E')} B(\eta)^{(E')} e^{-iE' t} \right) | + \eta \rangle \right]. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

A matriz densidade reduzida é obtida após tomarmos o traço nas variáveis, que representam um sistema cujo espectro é caracterizado por um contínuo, na matriz densidade total $|t\rangle\langle t|$. Assim sendo, obtemos os seguintes elementos de matriz,

$$\begin{aligned}
\rho_{++} = & \frac{1}{2} \left(\left| |a_0^{(E_d)}|^2 e^{-iE_d t} + |a_0^{(\bar{E}_d)}|^2 e^{-i\bar{E}_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2 \right. \\
& \left. + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{(E'_d)} B(\eta)^{(E'_d)} e^{-iE'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{(E')} B(\eta)^{(E')} e^{-iE' t} \right) \quad (3.47)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_{+-}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left(|a_0^{(E_d)}|^2 e^{-iE_d t} + |a_0^{(\bar{E}_d)}|^2 e^{-i\bar{E}_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right) \right. \\
& \left(|b_0^{(E'_d)}|^2 e^{iE'_d t} + |b_0^{(\bar{E}'_d)}|^2 e^{i\bar{E}'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE' |b_0^{(E')}|^2 e^{iE' t} \right) \\
& + \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta a_0^{(E_d)} A^{*(E_d)}(\eta) e^{iE_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta a_0^{(E)} A^{*(E)}(\eta) e^{iEt} \right) \\
& \left. \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{*(E'_d)} B^{(E'_d)}(\eta) e^{-iE'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta b_0^{*(E')} B^{(E')}(\eta) e^{-iE' t} \right) \right\}, \quad (3.48)
\end{aligned}$$

que, no caso $\eta_0 < \eta < \bar{\eta} \rightarrow \infty$, se reduzem a

$$\begin{aligned}
\rho_{++} & \rightarrow \frac{1}{2}, \\
\rho_{--} & \rightarrow \frac{1}{2}, \\
\rho_{+-} & \rightarrow \frac{1}{2} e^{-i(E_d - E'_d)t} \\
\rho_{-+} & = \rho_{+-}^*,
\end{aligned} \quad (3.49)$$

já que quando $\bar{\eta} \rightarrow \infty$, apenas um dos autovalores sobrevive: $E_d \rightarrow -\infty$ para o caso da dinâmica envolvendo $g(\eta)$ e $E'_d \rightarrow -\infty$ para o caso da dinâmica envolvendo $g'(\eta)$, enquanto que as amplitudes do discreto $|a_0^{(E_d)}|^2 \rightarrow 1$ e $|b_0^{(E'_d)}|^2 \rightarrow 1$ e as soluções do contínuo $A(\eta)^{(E_d)} \rightarrow 0$ e $B(\eta)^{(E'_d)} \rightarrow 0$. Para determiná-los, resolvemos em primeiro lugar as equações de dispersão abaixo, como mostrado na seção 3.3.

$$\begin{aligned} E_d - \epsilon - e_0 &= \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \frac{g(\eta)}{E_d - \eta} \\ E'_d - e_0 &= \int_{\eta_0}^{\bar{\eta} \rightarrow \infty} d\eta \frac{g'(\eta)}{E'_d - \eta}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

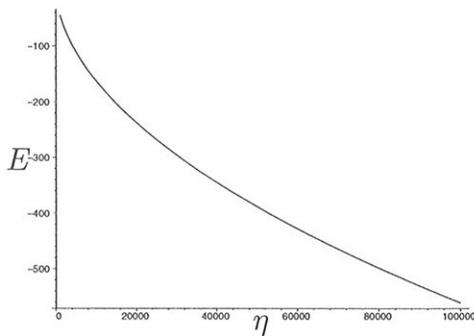
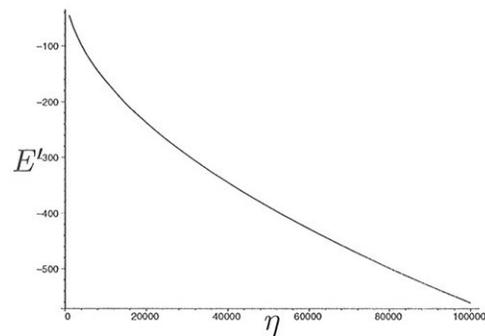
(a) E_d versus $\bar{\eta}$ (b) E'_d versus $\bar{\eta}$

Figura 3.11: Energias discretas mais baixas para as dinâmicas envolvendo $g(\eta)$ $g'(\eta)$ e , para $g(\eta) = g'(\eta) = \sqrt{\eta}$

Uma análise numérica das equações acima indica que a diferença entre estas energias discretas, $E_d - E'_d$ será proporcional a diferença de energia entre os estados do dubleto, ϵ . Os gráficos de (3.11) e de (3.12), mostram, respectivamente, os autovalores E_d e E'_d e o comportamento das amplitudes $|a_0^{(E_d)}|^2$ e $|b_0^{(E'_d)}|^2$ para um regime de acoplamento dependente de η , mais precisamente $g(\eta) = g'(\eta) = g^2 \sqrt{\eta}$.

Os próximos gráficos ilustram a diferença entre as duas energias discretas mais baixas, isto é, $E_d - E'_d$ (3.13(a)) e a diferença entre as amplitudes, isto é, $|a_0^{(E_d)}|^2 - |b_0^{(E'_d)}|^2$ (3.13(b)). Numericamente é possível ver que a diferença entre estas energias discretas tende a diferença de energia entre os estados do dubleto, dada por ϵ , à medida que $\eta \rightarrow \infty$.

A partir dos resultados acima, podemos calcular a probabilidade de tunelamento $P(t)$ e o defeito de idempotência $\delta(t)$. A probabilidade de tunelamento é dada por

$$P(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos[(E_d - E'_d)t]) \quad (3.51)$$

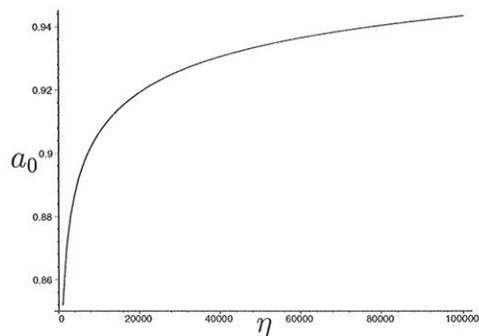
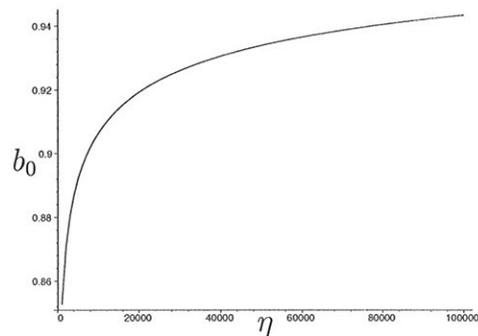
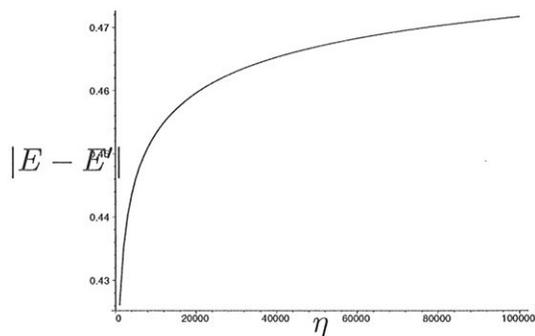
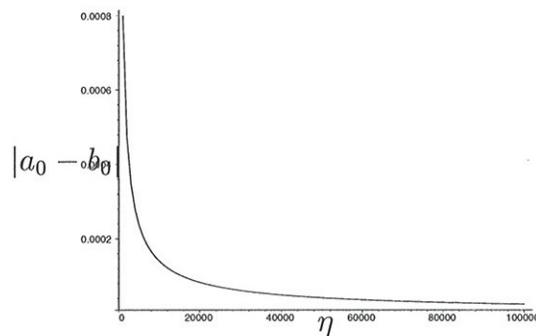
(a) a_0 versus $\bar{\eta}$ (b) b_0 versus $\bar{\eta}$

Figura 3.12: Cálculos realizados com $g = 1$, $\epsilon = 0.5$ e $e_0 = 0$ para $g(\eta) = g'(\eta) = \sqrt{\eta}$



(a) Diferença das energias discretas mais baixas



(b) Diferença entre as amplitudes associadas às energias discretas mais baixas

Figura 3.13: Cálculos realizados com $g = 1$, $\epsilon = 0.5$ e $e_0 = 0$ para $g(\eta) = g'(\eta) = \sqrt{\eta}$

que recai no caso discutido na seção 3.1. O sistema tunela com frequência $(E_d - E'_d)$ que está ligada a diferença de energia entre o dubleto. O tunelamento não irá ocorrer somente quando os estados do dubleto forem degenerados $\epsilon = 0$, o que significa, $E_d = E'_d$ que só acontece quando $g(\eta) = g'(\eta)$. Neste caso, haverá "localização" do estado $|t\rangle\langle t| \rightarrow |l\rangle\langle l|$. O defeito de idempotência é dado por

$$\delta(t) = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (3.52)$$

que representa um estado puro, como deveria ser. Isso pode ser entendido em termos dos estados estacionários que atuam nos dois casos: no caso puramente discreto apenas os dois estados fundamentais que são discretos atuam na dinâmica, enquanto que no caso puramente contínuo e no caso mais geral ($\eta_0 < \eta < \bar{\eta}$) existe uma contribuição de mais de um estado, havendo correlação entre eles, o que modifica a pureza do estado que tunela.

3.6 Comparação entre o modelo contínuo e o modelo spin-bóson

O modelo spin-bóson introduz efeitos dissipativos na dinâmica de subsistema de dois níveis através do acoplamento deste subsistema com um reservatório térmico caracterizado por um banho de osciladores harmônicos. Num artigo de revisão [19], A. Leggett e colaboradores estudam a dinâmica desse sistema de dois níveis acoplado ao reservatório de osciladores harmônicos usando o método das integrais funcionais. Eles obtêm expressões quantitativas, tais como, valor médio de σ_z e função de correlação simétrica $C(t)$, em termos de uma série que contém contribuições do termo difusivo e dissipativo dependendo apenas da densidade espectral $J(\omega)$ do reservatório térmico. Esta densidade espectral está diretamente relacionada com o acoplamento g . As diversas formas de $J(\omega)$ possibilitaram um estudo detalhado do comportamento do tunelamento na presença de um meio dissipativo. O caso mais interessante ocorre quando $J(\omega) = A\omega^s$, com $0 < s < 1$, o sistema fica localizado a temperatura zero. Como o modelo discutido neste capítulo se encaixa dentro do contexto do modelo spin-bóson, já que ele também é composto por um sistema de dois níveis acoplado a um outro sistema cujo espectro de energia pode ser contínuo, introduzindo assim efeitos de dissipação e decoerência, nos perguntamos quais as semelhanças ou diferenças entre estes dois modelos.

O modelo tratado neste capítulo torna-se estruturalmente semelhante ao modelo spin-bóson quando $g(\eta) = g'(\eta) = g^*(\eta) = g'^*(\eta)$ e $\eta_0 = 0$ dado pela hamiltoniana eq. (3.8). Em ambos os casos a hamiltoniana total pode ser dividida em três partes $H_\sigma + H_b + H_{int}$ com $H_\sigma = \frac{1}{2}\sigma_z$ para os dois modelos e

$$H_b = |0_b\rangle e_0 \langle 0_b| + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta |\eta\rangle \langle \eta|$$

$$H_{int} = \sigma_x \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g(\eta) (|\eta\rangle \langle 0_b| + |0_b\rangle \langle \eta|) \equiv \sigma_x G$$

para o modelo contínuo e

$$H_b = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}$$

$$H_{int} = \sigma_x \sum_{\alpha} g_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}}} (a_{\alpha}^{\dagger} + a_{\alpha}) \equiv \sigma_x G$$

para o modelo spin-bóson.

Uma maneira conveniente de representar estes operadores consiste em adotar como base os estados localizados do spin na qual σ_x é diagonal. A hamiltoniana de ambos os casos representada nesta base tem a forma

$$H = \begin{pmatrix} H_b + G & \frac{-i}{2}\epsilon \\ \frac{i}{2}\epsilon & H_b - G \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Vamos considerar uma aproximação do tipo adiabática (Born-Oppenheimer) no limite extremo, ou seja, $\epsilon = 0$, para eliminar os osciladores que compõe o reservatório no modelo spin-bóson e no caso do modelo tratado aqui, elimina-se o contínuo. Os operadores $H \pm G$ podem ser diagonalizados separadamente nos dois casos,

$$\begin{aligned} (H_b + G)|\psi_+^{(E+)}\rangle &= E_+ |\psi_+^{(E+)}\rangle \\ (H_b - G)|\psi_-^{(E-)}\rangle &= E_- |\psi_-^{(E-)}\rangle \end{aligned} \quad (3.54)$$

No caso do modelo spin-bóson, estes dois operadores $H \pm G$ são escritos em termos de novos operadores b_{α} e b_{α}^{\dagger} , com $b_{\alpha} \equiv a_{\alpha} - A_{\alpha}$ e $b_{\alpha}^{\dagger} \equiv a_{\alpha}^{\dagger} - A_{\alpha}^*$ que diagonalizam $H_b \pm G$. Desta forma,

$$\begin{aligned} H_b \pm G &= \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \pm \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}}} (a_{\alpha}^{\dagger} + a_{\alpha}) \\ &\rightarrow \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} (b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} + |A_{\alpha}^{\pm}|^2) \pm \sum_{\alpha} (A_{\alpha}^{(\ast\pm)} + A_{\alpha}^{\pm} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}g_{\alpha}}}) \\ &= \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} + E_0^{\pm} \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $A_{\alpha} = \mp g_{\alpha} / \sqrt{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}^3 \hbar^2}$ é o valor adequado para esta constante que diagonaliza a hamiltoniana acima, já que ela elimina os termos cruzados da nova transformação. A partir dela, calculamos E_0^{\pm}

$$\begin{aligned} E_0^{\pm} &= |A_{\alpha}^{\pm}|^2 \pm \sum_{\alpha} g_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}}} (A_{\alpha}^{(\ast\pm)} + A_{\alpha}^{\pm}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{4m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Note que $E_0^+ = E_0^-$ e neste caso, os operadores já diagonalizados $H_b \pm G$ tem a mesma hamiltoniana referente a um oscilador harmônico deslocado e portanto, os autovalores E_+ e E_- são iguais, isto significa que estes autovalores são degenerados.

No caso do modelo contínuo, os operadores $H_b \pm G$ são

$$H_b \pm G = \left(|0_b\rangle e_0 \langle 0_b| + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta |\eta\rangle \eta \langle \eta| \right) \pm \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g(\eta) [|\eta\rangle \langle 0_b| + |0_b\rangle \langle \eta|] \quad (3.57)$$

que podem também ser diagonalizados. Neste caso, os autovetores e autovalores da primeira equação de (3.54) são, respectivamente,

$$|\psi_+^{(E_+)}\rangle = a_0^{(E_+)} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A(\eta)^{(E_+)} | - \eta \rangle \quad (3.58)$$

e

$$\begin{aligned} (E_+ - e_0) a_0^{(E_+)} &= \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g^*(\eta) A^{(E_+)}(\eta), \\ (E_+ - \eta) A^{(E_+)}(\eta) &= \frac{1}{2} g(\eta) a_0^{(E_+)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

e no caso da segunda equação de (3.54), são

$$|\psi_-^{(E_-)}\rangle = a_0^{(E_-)} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A(\eta)^{(E_-)} | - \eta \rangle \quad (3.60)$$

e

$$\begin{aligned} (E_- - e_0) a_0^{(E_-)} &= -\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta g^*(\eta) A^{(E_-)}(\eta), \\ (E_- - \eta) A^{(E_-)}(\eta) &= -\frac{1}{2} g(\eta) a_0^{(E_-)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde E_+ e E_- são energias associadas tanto a parte do espectro contínuo como a discreta, assim como os autovetores. Uma maneira elucidativa de discernir as contribuições discretas das contínuas consiste em separar os autovalores e autovetores resultante destas duas contribuições. Assim, temos para os autovalores E_{\pm} , as contribuições discretas e contínuas, as quais identificaremos como $E_{d\pm}$ e η_{\pm} , associadas aos autovetores $|\psi_{d\pm}\rangle$ e $|\psi_{\eta_{\pm}}\rangle$, respectivamente. Estes autovalores e autovetores podem ser resolvidas pelo método do Fano e van Kampen, seguindo os passos descritos na seção 3.3. Desta forma, a solução para o coeficiente contínuo existe $A(\eta)^{(E_{\pm})}$ do autovetor é

$$A^{(E_+)}(\eta) = \left[\frac{\mathcal{P}}{E_+ - \eta} + Z(E_+) \delta(E_+ - \eta) \right] \frac{1}{2} g(\eta) a_0^{(E_+)} \quad (3.62)$$

para o conjunto de equações (3.59) e

$$A^{(E_-)}(\eta) = \left[\frac{\mathcal{P}}{E_- - \eta} + Z(E_-)\delta(E_- - \eta) \right] \left(-\frac{1}{2}g(\eta)a_0^{(E_-)} \right) \quad (3.63)$$

para o conjunto de equações (3.61). A equação de dispersão é composta de energias associadas a estados discretos e a estados do contínuo e a forma é a mesma para os dois grupos de eqs. (3.59) e (3.61). No caso do espectro discreto, esta equação se reduz a

$$E_{d\pm} - e_0 = \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{E_{d\pm} - \eta} \quad (3.64)$$

onde as soluções para a equação acima são obtidas para $E_{d\pm} < \eta_0$ ou $E_{d\pm} > \bar{\eta}$, conforme discutido na seção 3.3. Para a região do espectro $\eta_0 < \eta_{\pm} < \bar{\eta}$, temos como solução $Z(\eta_{\pm})$ cuja forma é

$$Z(\eta_{\pm}) = \frac{4 \left(\eta_{\pm} - e_0 - \frac{1}{4}P \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{\eta_{\pm} - \eta} \right)}{|g(\eta_{\pm})|^2} \quad (3.65)$$

Desta forma, diagonalizamos os operadores $H_b \pm G$ para o modelo contínuo, isto é,

$$H_b \pm G = |\psi_{d\pm}\rangle E_{d\pm} \langle \psi_{d\pm}| + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta |\psi_{\eta_{\pm}}\rangle \eta_{\pm} \langle \psi_{\eta_{\pm}}| \quad (3.66)$$

onde $E_{d\pm}$ são os autovalores correspondentes aos autovetores discretos, enquanto que η_{\pm} são os autovalores do espectro contínuo. As energias associadas ao espectro discreto $E_{d\pm}$ são obtidas a partir da eq. (3.64) e são idênticas, pois ambas dependem apenas do acoplamento através de $|g(\eta)|^2$. Os estados discretos associados a estas energias podem ser escritos da seguinte maneira

$$|\psi_{d+}^{E_{d+}}\rangle = a_{0d+}^{E_{d+}} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A_{d+}^{E_{d+}}(\eta) | - \eta \rangle \quad (3.67)$$

$$|\psi_{d-}^{E_{d-}}\rangle = a_{0d-}^{E_{d-}} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A_{d-}^{E_{d-}}(\eta) | - \eta \rangle \quad (3.68)$$

com

$$a_{0d+}^{E_{d+}} = \left(1 + \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{(E_{d+} - \eta)^2} \right)^{-1} \quad (3.69)$$

$$a_{0d-}^{E_{d-}} = \left(1 + \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{(E_{d-} - \eta)^2} \right)^{-1} \quad (3.70)$$

e

$$A_{d+}^{E_{d+}} = \frac{|g(\eta)|^2}{(E_{d+} - \eta)} a_{0d+}^{E_{d+}} \quad (3.71)$$

$$A_{d-}^{E_{d-}} = \frac{|g(\eta)|^2}{(E_{d-} - \eta)} a_{0d+}^{E_{d-}} \quad (3.72)$$

Os autoestados associados a parte do contínuo que se encontram no intervalo $\eta_0 < \eta_{\pm} < \bar{\eta}$, podem ser obtidos a partir das eqs. (3.58) e (3.60) fazendo $E_{\pm} = \eta_{\pm}$, ou seja,

$$|\psi^{\eta+}\rangle = a_0^{\eta+} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A^{\eta+}(\eta) | - \eta \rangle \quad (3.73)$$

$$|\psi^{\eta-}\rangle = a_0^{\eta-} | + 0_b \rangle + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta A^{\eta-}(\eta) | - \eta \rangle \quad (3.74)$$

onde $A^{\eta+}(\eta)$ e $A^{\eta-}(\eta)$ são determinados, respectivamente, pelas equações (3.62) e (3.63), depois de nela substituírmos a equação (3.65). Para descobrir quem são $a_0^{\eta+}$ e $a_0^{\eta-}$, basta substituir $A^{\eta+}(\eta)$ na segunda equação do sistema descrito pela eq. (3.59) e $A^{\eta-}(\eta)$ na segunda equação do sistema descrito pela eq. (3.61). Estas energias $\eta_+ = \eta_-$ são idênticas porque dependem apenas da forma do acoplamento, como é o caso das energias discretas.

Agora vamos considerar a aproximação adiabática para um ϵ bem pequeno, o que permite um tratamento do problema por Teoria de Perturbação, onde o termo correspondente a ela, nos dois modelos, é o termo fora da diagonal $\pm \frac{i\epsilon}{2}$. Como as energias que aparecem no problema de autovalores são degeneradas, devemos utilizar o método de Teoria de Perturbação Degenerada, onde iremos nos concentrar apenas nos estados adiabáticos de energia mais baixa. Estes estados, para os dois modelos, são os estados do dubleto denominados $|\phi_0^{\pm}\rangle$ com energia E_0 . A matriz secular M correspondente a este caso é

$$M = \begin{pmatrix} E_0' & \frac{-i\epsilon}{2} \langle \phi_0^+ | \phi_0^- \rangle \\ \frac{i\epsilon}{2} \langle \phi_0^- | \phi_0^+ \rangle & E_0' \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

onde no caso do modelo spin-bóson, temos

$$E_0'^{\pm} = E_0^{\pm} + \langle \phi_0^{\pm} | \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} | \phi_0^{\pm} \rangle$$

e no caso do modelo contínuo

$$E_0'^{\pm} = E_0^{\pm} + \langle \phi_0^{\pm} | \left(\sum_{i=1}^2 |\psi_{d\pm}\rangle E_{d\pm} \langle \psi_{d\pm}| \right) | \phi_0^{\pm} \rangle + \langle \phi_0^{\pm} | \left(\int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta |\psi_{\eta\pm}\rangle \eta_{\pm} \langle \psi_{\eta\pm}| \right) | \phi_0^{\pm} \rangle$$

onde $\langle \phi_0^+ | \phi_0^- \rangle$ representa o produto escalar "overlap" das funções de onda. Então, diagonalizando esta matriz obtemos que a diferença entre os autovalores é proporcional a este produto escalar,

isto é, $\lambda_+ - \lambda_- = \epsilon\Omega$, com $\Omega \equiv \langle \phi_0^+ | \phi_0^- \rangle$. Isto significa que estes autovalores serão degenerados, se e somente se, este produto escalar for zero ou quando os estados do dubleto forem degenerados $\epsilon = 0$. Mostraremos, a seguir, que este "overlap" depende do modelo em questão. No caso do modelo spin-bóson, este "overlap" $\langle \phi_0^\pm | \phi_0^\pm \rangle$ envolve estados coerentes de osciladores harmônicos com deslocamentos opostos que dependem, em particular, dos acoplamentos g_α [19]. A diminuição do "overlap" implica numa diminuição da diferença de energia entre os estados não perturbados e como consequência disso, temos a localização destes estados, o que acaba sendo responsável pelo retardamento observado na probabilidade de tunelamento entre estes estados localizados. No caso do modelo contínuo, por outro lado, E_0 é a raiz da equação de dispersão (3.64) no caso $E_0 < \eta_0$, correspondendo aos estados representados por (3.58) e (3.60), onde $|\psi_{d+}^{(E_{d+})}\rangle \rightarrow |\phi_0^+\rangle$ e $|\psi_{d-}^{(E_{d-})}\rangle \rightarrow |\phi_0^-\rangle$ e portanto, o "overlap" tem uma expressão fechada que depende do acoplamento $g(\eta)$ e da solução da equação de dispersão para E_0 .

$$\langle \phi_0^+ | \phi_0^- \rangle = \frac{1 - \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} \frac{|g(\eta)|^2}{4(E_0 - \eta)^2}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} \frac{|g(\eta)|^2}{4(E_0 - \eta)^2}}. \quad (3.76)$$

No caso de $g(\eta) = \gamma\eta^s$ com $0 < s < 1$ e para $e_0 = \eta_0 = 0$, observamos que $E_0 \rightarrow -\infty$, $|a_0^{(E_0)^2}| \rightarrow 1$, a medida que $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ e neste limite o "overlap" $\langle \phi_0^+ | \phi_0^- \rangle \rightarrow 1$, conforme mostramos na seção 3.3 e a probabilidade de tunelamento se aproxima do valor livre conforme mostramos na seção 3.5. Para valores de $\bar{\eta}$ não tão grandes, se comparados com ϵ , este "overlap" é menor do que um, o que provoca um retardamento na probabilidade de tunelamento. Este resultado é análogo ao obtido para o modelo spin-bóson. Para o modelo contínuo, a localização ocorrerá apenas quando os estados do dubleto forem degenerados $\epsilon = 0$, portanto, a localização obtida a partir do modelo spin-bóson é uma consequência direta do espectro de osciladores harmônicos. Sendo assim, não está garantido que qualquer outro espectro ocasione este fenômeno de localização.

3.7 Comparação da Solução Exata com o Resultado da Aproximação Born-Markov para o Subistema de Dois Níveis

A dinâmica dissipativa da matriz densidade reduzida de um sistema de dois níveis é freqüentemente descrita em termos da equação mestra válida no regime de acoplamento fraco derivada sob a hipótese de acoplamento fraco com um reservatório de osciladores harmônicos, conforme mostra o apêndice B. Estes muitos graus de liberdade serão eliminados da descrição através da hipótese de validade da aproximação de Born-Markov. Além disso, as funções de correlação envolvendo estes graus de liberdade do reservatório podem ser calculadas para todos os tempos usando a condição inicial do sistema. A forma usual da equação mestra [21, 55, 56, 57] é obtida considerando a hamiltoniana de interação entre o reservatório e o sistema

$$H_{\text{int}} = \sum_k \left(g_k b_k^\dagger \sigma_- + g_k^* b_k \sigma_+ \right) \quad (3.77)$$

onde b_k , b_k^\dagger são os operadores de abaixamento e levantamento que atuam no k -ésimo oscilador harmônico do reservatório. Este termo de acoplamento é semelhante ao termo que envolve $g(\eta)$ na eq. (3.7) se associarmos ao estado fundamental ao estado discreto do modelo $|0_b\rangle$ e neste caso, a Hamiltoniana de interação é dada por

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_+ \langle \eta|] \quad (3.78)$$

As equações mestras geradas a partir das hamiltonianas (3.77) e (3.78) são idênticas e no limite de temperatura nula, tem a forma abaixo

$$\frac{\rho(t)}{dt} = -i\frac{\epsilon}{2} [\sigma_3, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2} (2\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \rho(t) \sigma_+ \sigma_-)$$

onde γ é o coeficiente de atrito relacionado a hamiltoniana de interação e a distribuição de frequências do reservatório.

A solução desta equação mestra sujeita a condição inicial $\rho(0) = |r\rangle\langle r|$, isto é ,

$$\rho_{++}(0) = \rho_{+-}(0) = \frac{1}{2} \quad (3.79)$$

é

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} \quad \text{e} \quad \rho_{+-}(t) = \frac{1}{2} e^{i\epsilon t - \frac{\gamma}{2} t}$$

que reproduz o resultado exato para um único tempo de relaxação eq. (3.30), com uma correspondência direta entre $\gamma \leftrightarrow \Gamma$. No entanto, a equação mestra trata apenas o regime de acoplamento fraco devida a aproximação de Born-Markov envolvida na sua dedução. Neste caso, portanto, a equação mestra reproduz exatamente o resultado exato para um único tempo de relaxação num regime de acoplamento fraco. Um resultado análogo a este será mostrado no próximo capítulo, dentro de um outro contexto. Então nos perguntamos se esse resultado não seria geral e portanto, este resultado merece uma investigação mais detalhada que, no entanto, foge do âmbito deste trabalho.

No caso da existência de dois tempos de relaxação, devemos inserir mais um termo associado a g'_k na hamiltoniana de interação, ou seja,

$$H_{\text{int}} \rightarrow \sum_k \left(g_k b_k^\dagger \sigma_- + g_k^* b_k \sigma_+ \right) + \sum_k \left(g'_k b_k^\dagger \sigma_+ + g'^*_k b_k \sigma_- \right) \quad (3.80)$$

no caso de um banho de osciladores e $g'(\eta)$ no caso do modelo contínuo,

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_+ \langle \eta|] + \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g'(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g'^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_+ \langle \eta|] \quad (3.81)$$

As equações mestras geradas pelas hamiltonianas (3.80) e (3.81) são novamente iguais

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -i\frac{\epsilon}{2} [\sigma_3, \rho(t)] + \frac{\gamma}{2} (2\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \rho(t) \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\gamma'}{2} (2\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \rho(t) \sigma_- \sigma_+) + \frac{\sqrt{\gamma\gamma'}}{2} (2\sigma_+ \rho(t) \sigma_+ + 2\sigma_- \rho(t) \sigma_-) \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde γ' é uma constante análoga a γ , mas está associada ao novo termo da hamiltoniana de interação. A solução desta equação sujeita a mesma condição inicial (3.79) é

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} e^{-(\gamma+\gamma')t} + \frac{\gamma'}{\gamma + \gamma'} (1 - e^{-(\gamma+\gamma')t})$$

e

$$\rho_{+-}(t) = \frac{e^{-(\gamma+\gamma')t}}{2\sqrt{\epsilon^2 - \gamma\gamma'}} \left[\sqrt{\gamma\gamma'} - i\epsilon \sin\left(2\sqrt{\epsilon^2 - \gamma\gamma'} t\right) + \sqrt{\epsilon^2 - \gamma\gamma'} \cos\left(2\sqrt{\epsilon^2 - \gamma\gamma'} t\right) \right]$$

que é diferente dos resultados exatos para dois tempos de relaxação. No caso do elemento de matriz ρ_{++} , eq. (3.36), exato envolvendo dois tempos de relaxação diferentes, temos uma exponencial envolvendo Γ e outra exponencial envolvendo Γ' , enquanto que o mesmo elemento de matriz calculado pela equação mestra apresenta uma única exponencial envolvendo a soma dos dois parâmetros Γ e Γ' . No entanto, existe uma relação entre estes cálculos, que aparecem ao expandirmos a exponencial até primeira ordem nos parâmetros dissipativos Γ , Γ' . Neste limite, em particular, o resultado dado pela equação mestra coincide com o resultado exato e é igual a

$$\rho_{++}(t) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}t + \frac{\gamma'}{2}t$$

com uma equivalência entre $\gamma \leftrightarrow \Gamma$ e $\gamma' \leftrightarrow \Gamma'$. O mesmo vale para o elemento $\rho_{+-}(t)$, eq. (3.37). Este resultado é uma consequência da aproximação de Born-Markov envolvida na dedução da mestra. A aproximação de Born implica num truncamento da expansão no acoplamento a partir da segunda ordem, produzindo um resultado o qual é exponenciado em todas as ordens devido a aproximação de Markov. Desta forma, não há nenhuma garantia que a equação mestra reproduza adequadamente resultados exatos que vão além do truncamento envolvido na aproximação de Born. Por exemplo, em dinâmicas envolvendo mais de dois tempos de relaxação coincidentes, isto é, $\gamma = \gamma'$, a equação mestra reproduz o resultado exato em regime de acoplamento fraco, a menos de uma correção na frequência original do sistema ϵ .

Capítulo 4

Modelo de um oscilador acoplado a diversos osciladores não interagentes entre si na aproximação RWA

4.1 Introdução

Neste capítulo, trataremos mais um caso onde a equação mestra reproduz completamente o cálculo exato. Esse resultado esclarece de uma vez a dúvida relacionada à validade da equação mestra para o modelo discutido aqui no regime de temperatura nula. A reprodução da solução exata a partir da aproximação Born-Markov já foi mostrada dentro de outros contextos, tais como o modelo discutido no capítulo anterior. Além disso, mostraremos a condição que é responsável pela diminuição da decoerência sofrida pelo sistema, a partir de uma determinada condição inicial, sujeita a hamiltoniana deste modelo na aproximação RWA. O modelo em questão é bem conhecido e pode ser utilizado para tratar sistemas dissipativos em Mecânica Quântica, entre outras coisas [59, 60, 61]. Este modelo consiste em acoplarmos linearmente um oscilador harmônico a um reservatório térmico que é composto por um conjunto de N osciladores não interagentes. Consideramos ainda a aproximação RWA (Rotating Wave Approximation) que consiste em desprezar os termos anti-ressonantes presentes na hamiltoniana que descreve este modelo. Em problemas de óptica quântica, esta aproximação é muito conveniente no caso da constante de acoplamento ser muito pequena em relação à frequência natural do sistema. Este modelo dentro desta aproximação é usado para tratar, por exemplo, a perda de coerência e a dissipação sofrida pelo campo eletromagnético que se encontra dentro de uma cavidade e isso acontece devido à interação entre o modo relevante do campo e os modos da cavidade [1, 10, 62, 63, 64]. M. Rosenau da Costa e colaboradores [61] utilizaram este método para resolver analiticamente este modelo dentro e fora da aproximação RWA, a fim de estudar as condições de validade da RWA e mostrar que a existência dos estados coerentes dissipativos está intimamente relacionada a esta aproximação. W. D. José e colaboradores também utilizaram a mesma técnica para resolver analiticamente este modelo na aproximação RWA e estudar a relação entre a decoerência e a forma de linha [65]. No próximo capítulo mostraremos na prática um caso onde o resultado obtido neste capítulo pode ser aplicado.

4.2 Solução Exata para o Modelo Linear

A hamiltoniana que descreve um oscilador harmônico linearmente acoplado a outros vários osciladores harmônicos não-interagentes entre si, que compõem o reservatório térmico, na aproximação RWA é

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar \sum_k^{\bar{k}} \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k^{\bar{k}} \left(\gamma_k b_k^\dagger a + \gamma_k^* b_k a^\dagger \right) \quad (4.1)$$

onde ω_0 é a frequência do oscilador principal e ω_k é a frequência de um dos k osciladores do reservatório térmico. Esta hamiltoniana é adequada para descrever a perda de coerência e dissipação sofrida por um campo eletromagnético que se encontra dentro de uma cavidade supercondutora [1, 10, 62, 63, 64].

A seguir, calculamos as equações de Heisenberg para os operadores $a(t)$ e $b_k(t)$ a partir da hamiltoniana (4.1)

$$\frac{da(t)}{dt} = -i\omega_0 a(t) - i \sum_{k=1}^{\bar{k}} \gamma_k^* b_k(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{db_k(t)}{dt} = -i\omega_k b_k(t) - i\gamma_k a(t) \quad (4.3)$$

A partir da evolução temporal destes operadores, fica fácil calcularmos a evolução temporal para qualquer condição inicial. Uma maneira de resolver este sistema de equações acopladas consiste em considerar os modos normais que diagonalizam o sistema de equações acopladas acima (4.2) e (4.3) e também a hamiltoniana (4.1). Desta forma, as novas variáveis do problema passam a ser os coeficientes de expansão dos operadores $a(t)$ e $b_k(t)$ nos novos operadores de modos normais e para determiná-las, além de utilizar as equações acopladas (4.2) e (4.3) para as novas variáveis, devemos utilizar também a nova equação de Heisenberg proveniente da hamiltoniana diagonalizada. Considere os modos normais

$$\hat{a}(t) = \sum_n c_0^{(n)} \hat{C}_n(t) \quad (4.4)$$

$$\hat{b}_k(t) = \sum_n c_k^{(n)} \hat{C}_n(t) \quad (4.5)$$

onde $c_0^{(n)}$ e $c_k^{(n)}$ são os coeficientes de expansão dos operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_k(t)$ nos novos operadores $\hat{C}_n(t)$, e satisfazem a equação de normalização

$$c_0^{(n)} c_0^{(n)} + \sum_n c_k^{(n)} c_k^{(n)} = 1. \quad (4.6)$$

Assim, podemos escrever $\hat{C}_n(t)$ como

$$\hat{C}_n(t) = c_0^{(n)} \hat{a}(t) + \sum_n c_k^{(n)} \hat{b}_k(t), \quad (4.7)$$

que satisfaz a relação de comutação $[\hat{C}_n, \hat{C}_n^\dagger] = 1$. Estes operadores diagonalizam a hamiltoniana (4.1) que passa a ter a forma

$$\hat{H} = \hbar \sum_n f_n \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \quad (4.8)$$

e a partir dela, determinamos a nova equação de Heisenberg

$$\frac{d\hat{C}_n(t)}{dt} = -i f_n \hat{C}_n(t), \quad (4.9)$$

que tem como solução $\hat{C}_n(t) = \hat{C}_n(0) e^{-i f_n t}$, onde f_n é o espectro de frequência dos modos normais. Devemos, então, substituir (4.4) e (4.5) nas equações (4.2) e (4.3), o que resulta em

$$\sum_n c_0^{(n)} \frac{d\hat{C}_n(t)}{dt} = -i \omega_0 \sum_n c_0^{(n)} \hat{C}_n(t) - i \sum_k^{\bar{k}} \sum_n \gamma_k^* c_k^{(n)} \hat{C}_n(t) \quad (4.10)$$

$$\sum_n c_k^{(n)} \frac{d\hat{C}_n(t)}{dt} = -i \omega_k \sum_n c_k^{(n)} \hat{C}_n(t) - i \gamma_k \sum_n c_0^{(n)} \hat{C}_n(t) \quad (4.11)$$

e para obtermos as equações em termos das novas variáveis, devemos substituir (4.9) nas equações (4.10) e (4.11), obtendo

$$(f_n - \omega_0) c_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \gamma_k c_k^{(n)} \quad (4.12)$$

$$(f_n - \omega_k) c_k^{(n)} = \gamma_k c_0. \quad (4.13)$$

A partir destas equações determinamos a expressão para a frequência dos modos normais f_n , isolando os $c_k^{(n)}$ de (4.13) para depois substituir a expressão resultante em (4.12), isto é,

$$(\omega_0 - f_n) = \sum_k^{\bar{k}} \frac{\gamma_k^2}{(\omega_k - f_n)}. \quad (4.14)$$

Podemos ainda reescrever a equação acima (4.14), separando a contribuição da frequência livre mais próxima da frequência dos modos normais f_n , então temos,

$$\begin{aligned}
(\omega_0 - f_n) &= \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)} + \sum_{k \neq k_j}^{\bar{k}} \frac{\gamma_k^2}{(\omega_k - f_n)} \\
&= \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)} + \delta_n,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde ω_{k_j} é a frequência do reservatório mais próxima da frequência dos modos normais f_n . Note que o primeiro termo do lado direito, que contém a contribuição da frequência mais próxima da frequência dos modos normais, é significativamente maior do que a dos outros termos representados por δ_n , que a rigor dependem dos coeficientes γ_k também, em particular como eles dependem de k . Podemos, ainda reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\frac{(\omega_0 - f_n - \delta_n)^2}{\gamma_{k_j}^2} = \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)^2}, \tag{4.16}$$

que será útil para calcularmos a expressão fechada para $c_0^{2(n)}$. Para obtê-la, devemos primeiro elevar ao quadrado a equação (4.12), para em seguida isolarmos $c_0^{2(n)}$ e na expressão resultante substituir o resultado de (4.16), além de utilizarmos a condição de normalização para os coeficientes de expansão $c_0^{(n)}$ e $c_k^{(n)}$, o que resulta em

$$c_0^{(n)} = \left(1 + \sum_k^{\bar{k}} \frac{\gamma_k^2}{(\omega_k - f_n)^2} \right)^{-1}, \tag{4.17}$$

que também pode ser reescrita, separando a contribuição de frequência mais próxima de f_n . Assim, temos

$$c_0^{2(n)} = \left(1 + \sum_{k \neq k_j}^{\bar{k}} \frac{\gamma_k^2}{(\omega_k - f_n)^2} + \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)^2} \right)^{-1} \equiv \left(1 + \Delta_n + \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)^2} \right)^{-1}, \tag{4.18}$$

onde o termo

$$\Delta_n \equiv \sum_{k \neq k_j}^{\bar{k}} \frac{\gamma_k^2}{(\omega_k - f_n)^2}$$

deve ser pequeno se comparado ao outro termo

$$\frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_{k_j} - f_n)^2},$$

no limite de acoplamento fraco e para este caso, temos $\omega_{k_j} \approx f_n$. Finalmente substituindo (4.16) em (4.17), temos

$$c_0^{2(n)} = \frac{\gamma_{k_j}^2}{(\omega_0 - f_n - \delta_n)^2 + \gamma_{k_j}^2(1 + \Delta_n)} \quad (4.19)$$

Esta expressão é exata e dela podemos extrair algumas informações. O acoplamento introduz uma correção δ_n na frequência, que deve ser tanto menor quanto menor for o acoplamento, além de introduzir uma largura $\gamma_{k_j}^2(1 + \Delta_n)$, que para acoplamento fraco pode ser considerada constante. O efeito desta interação é distribuir os graus de liberdade do oscilador em termos dos modos normais do sistema completo na forma de um pico $f_n \approx \omega_0 - \delta_n$ com largura de aproximadamente $(1 + \Delta_n)\gamma^2$. A partir de (4.19) e (4.13), podemos determinar o coeficiente $c_k^{(n)}$, já que $c_0^{(n)}$ e $c_k^{(n)}$ estão diretamente relacionados pela equação abaixo

$$c_k^{2(n)} = \frac{\gamma_k^2 c_0^{2(n)}}{(f_n - \omega_k)^2}. \quad (4.20)$$

Depois de determinadas as expressões para os coeficientes $c_0^{(n)}$ e $c_k^{(n)}$, fica fácil calcularmos as expressões fechadas para $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_k(t)$, encontrando assim, a solução para o sistema de equações acopladas dadas por (4.2) e (4.3).

As expressões para os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_k(t)$ são obtidas a partir de (4.4) e (4.5), respectivamente, substituindo a expressão para $\hat{C}_n(t)$, o que significa

$$\hat{a}(t) = \sum_n c_0^{(n)} [c_0^{(n)} \hat{a}(t) + \sum_n c_k^{(n)} \hat{b}_k(t)] e^{-if_n t} \quad (4.21)$$

$$\hat{b}_k(t) = \sum_n c_k^{(n)} [c_0^{(n)} \hat{a}(t) + \sum_n c_k^{(n)} \hat{b}_k(t)] e^{-if_n t}. \quad (4.22)$$

Agora que conhecemos a forma destes operadores, podemos calcular a evolução temporal do sistema a partir de uma dada condição inicial e é o que faremos na próxima seção.

Vamos reescrever (4.1) considerando o espectro de excitações do reservatório contínuo. Neste caso, podemos aplicar a mesma técnica já utilizada no capítulo anterior, desenvolvida por Fano e van Kampen [52, 53]. Este tratamento já foi utilizado por diversas pessoas [61, 62, 65, 66]. Um trabalho bem completo sobre este assunto foi desenvolvido por Rosenau e colaboradores [61], onde eles discutem o modelo Caldeira- Leggett [15, 60] e também a aproximação RWA. Eles investigam a evolução temporal de um estado coerente e a relação entre a forma da linha e o tipo de acoplamento. Assim, a hamiltoniana RWA (4.1) escrita no contínuo tem a forma:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} d\omega \omega \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega + \hbar \int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} d\omega \gamma(\omega) \left(\hat{a}^\dagger \hat{b}_\omega + \hat{a} \hat{b}_\omega^\dagger \right), \quad (4.23)$$

onde os operadores \hat{b}_ω e \hat{b}_ω^\dagger satisfazem a relação de comutação $[\hat{b}_\omega, \hat{b}_\omega^\dagger] = \delta(\omega - \tilde{\omega})$

As equações de movimento para esta hamiltoniana (4.23) são análogas às equações (4.2) e (4.3) e tem a forma

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega_0\hat{a}(t) - i \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega \gamma(\omega) \hat{b}_\omega(t), \quad (4.24)$$

$$\frac{d\hat{b}_\omega(t)}{dt} = -i\omega\hat{b}_\omega(t) - i\gamma(\omega)\hat{a}(t) \quad (4.25)$$

e para solucioná-las, devemos escrever os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_\omega(t)$ em termos dos modos normais

$$\hat{a}(t) = \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0(\Omega) \hat{C}_\Omega(t) \quad (4.26)$$

$$\hat{b}_\omega(t) = \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_\omega(\Omega) \hat{C}_\Omega(t), \quad (4.27)$$

onde os coeficientes $c_0(\Omega)$ e $c_\omega(\Omega)$ são os coeficientes de expansão dos operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_\omega(t)$ nos novos operadores $\hat{C}_\Omega(t)$ que satisfazem a relação de comutação $[C_\Omega, C_{\tilde{\Omega}}^\dagger] = \delta(\Omega - \tilde{\Omega})$. Podemos, então, escrever $\hat{C}_\Omega(t)$ como

$$\hat{C}_\Omega(t) = c_0(\Omega)\hat{a}(t) + \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega c_\omega(\Omega)\hat{b}_\omega(t), \quad (4.28)$$

o qual diagonaliza a hamiltoniana (4.23), que passa a ter a forma

$$\hat{H} = \hbar \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega \Omega \hat{C}_\Omega^\dagger \hat{C}_\Omega \quad (4.29)$$

e a partir dela, determinamos a nova equação de Heisenberg

$$\frac{d\hat{C}_\Omega(t)}{dt} = -i\Omega\hat{C}_\Omega(t), \quad (4.30)$$

cuja solução é $\hat{C}_\Omega(t) = \hat{C}_\Omega(0)e^{-i\Omega t}$, onde Ω é o espectro de frequência dos modos normais. Para determinarmos a solução para o sistema de equações descrito por (4.24) e (4.25), devemos repetir o procedimento utilizado para o caso discreto. Assim, substituindo (4.26) e (4.27) em (4.24) e (4.25), obtemos um resultado análogo para contínuo das expressões (4.12) e (4.13)

$$(\Omega - \omega_0)c_0(\Omega) = \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega \gamma(\omega) c_\omega(\Omega) \quad (4.31)$$

$$(\Omega - \omega)c_\omega(\Omega) = \gamma(\omega)c_0(\Omega). \quad (4.32)$$

A solução deste sistema de equações é obtida usando o método desenvolvido por Fano e van Kampen [52, 53], idêntico ao descrito no capítulo 3 e tem a forma

$$c_\omega(\Omega) = \left[\frac{P}{(\Omega - \omega)} + Z(\omega)\delta(\Omega - \omega) \right] \gamma(\omega)c_0(\Omega) \quad (4.33)$$

que ao ser substituída na primeira equação de (4.31), fornece

$$(\Omega - \omega_0) = P \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega \frac{\gamma^2(\omega)}{(\Omega - \omega)} + Z(\Omega)\gamma^2(\Omega) \quad (4.34)$$

A equação acima representa, a equação de dispersão para o sistema, análogo a equação (4.15). Repare que aqui também podem aparecer freqüências associadas as energias correspondentes aos estados discretos, além das freqüências associadas as energias correspondentes aos estados que estão no contínuo, como acontece com o modelo do capítulo 3. As soluções discretas são obtidas fazendo $\gamma^2(\Omega) \equiv 0$ em (4.34) que tendem a desaparecer quando o espectro de freqüências é ilimitado, ou seja, $\omega_0 \rightarrow -\infty$ e $\bar{\omega} \rightarrow \infty$, restando apenas, as freqüências associadas aos estados do contínuo. A partir de (4.34), encontramos o valor de $Z(\Omega)$

$$Z(\Omega) = \frac{\Omega - \omega_0 - F(\Omega)}{\gamma^2(\Omega)}, \quad (4.35)$$

onde

$$F(\Omega) \equiv P \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega \frac{\gamma^2(\omega)}{(\Omega - \omega)}. \quad (4.36)$$

Substituindo $c_\omega(\Omega)$ na condição de normalização derivada através do cálculo do comutador $[\hat{C}_\Omega, \hat{C}_\Omega^\dagger] = \delta(\Omega - \tilde{\Omega})$, isto é,

$$c_0(\Omega)c_0(\tilde{\Omega}) + \int d\omega c_\omega(\Omega)c_\omega(\tilde{\Omega}) = \delta(\Omega - \tilde{\Omega}) \quad (4.37)$$

e utilizando o procedimento descrito por Fano, encontramos como solução para $c_0^2(\Omega)$ a equação

$$c_0^2(\Omega) = \frac{\gamma^2(\Omega)}{[\Omega - \omega_0 - F(\Omega)]^2 + [\pi\gamma^2(\Omega)]^2}, \quad (4.38)$$

que é análoga a solução para o caso discreto dada por (4.19). Esta expressão descreve exatamente como o sistema se distribui em termos dos modos normais. A correção na freqüência $F(\Omega)$ depende totalmente da forma do acoplamento e de sua intensidade $\gamma^2(\omega)$. Sabe-se que $\gamma^2(\omega)$ está diretamente ligado à densidade espectral $J(\omega)$ que apresenta diversos comportamentos dependendo

do tipo de regime, a saber ôhmico sub-ôhmico e supra-ôhmico [19, 15, 67] e o mesmo vale para o acoplamento discreto γ_k . Assim essa equação nos mostra a relação entre a forma de linha $c_0^2(\Omega)$ e densidade espectral $J(\omega)$, que está associada à largura da linha. A partir de $c_0^2(\Omega)$, podemos obter outro coeficiente $c_\omega(\Omega)$, substituindo $c_0^2(\Omega)$ em (4.33) e assim obtemos uma forma fechada para os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_\omega(t)$

$$\hat{a}(t) = \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0(\Omega) [c_0(\Omega) \hat{a}(t) + \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega c_\omega(\Omega) \hat{b}_\omega(t)] e^{-i\Omega t} \quad (4.39)$$

$$\hat{b}_\omega(t) = \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_\omega(\Omega) [c_0(\Omega) \hat{a}(t) + \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\omega c_\omega(\Omega) \hat{b}_\omega(t)] e^{-i\Omega t}. \quad (4.40)$$

A partir destes operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_\omega(t)$, podemos calcular a evolução temporal do sistema para qualquer condição inicial.

Na próxima seção, estudamos a evolução temporal quando o sistema tem como condição inicial uma superposição de estados coerentes, enquanto que o reservatório está no estado fundamental ($T = 0$) e a partir do estado resultante desta evolução construímos a matriz densidade reduzida do sistema, onde estudamos a decoerência.

4.3 Evolução Temporal de uma Superposição de Estados Coerentes quando o Reservatório se Encontra no Estado Fundamental

Considere, inicialmente, o sistema num estado coerente e o reservatório no estado de vácuo fundamental (ou de “vácuo”), isto é, $|\alpha, 0\rangle$. Sabe-se como os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{b}_{\omega(k)}(t)$ contínuos (e discretos) agem num estado coerente, assim como no vácuo. Desta forma, a evolução temporal do operador $\hat{a}(t)$ no caso discreto agindo nesta condição inicial tem a seguinte forma

$$\hat{a}(t)|\alpha, 0\rangle \equiv \alpha(t)|\alpha, 0\rangle = \alpha_0 \sum_n^{\bar{n}} c_0^{2(n)} e^{-if_n t} |\alpha, 0\rangle \quad (4.41)$$

e para o caso contínuo

$$\hat{a}(t)|\alpha, 0\rangle \equiv \alpha(t)|\alpha, 0\rangle = \alpha_0 \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} c_0^2(\Omega) e^{-i\Omega t} |\alpha, 0\rangle, \quad (4.42)$$

onde $\alpha(t)$ depende da forma da linha, isto é,

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sum_n^{\bar{n}} c_0^{2(n)} e^{-if_n t} = \sum_n^{\bar{n}} \alpha_0 \frac{\gamma_{k_j}^2 e^{-if_n t}}{(\omega_0 - f_n - \delta_n)^2 + \gamma_{k_j}^2 (1 + \Delta_n)} \quad (4.43)$$

para o caso discreto e

$$\alpha(t) = \alpha_0 \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) e^{-i\Omega t} = \alpha_0 \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega \frac{\gamma^2(\Omega)}{(\Omega - \omega_0 - F(\Omega))^2 + (\pi\gamma^2(\Omega))^2} e^{-i\Omega t} \quad (4.44)$$

para o caso contínuo, que no caso do espectro ser ilimitado, ou seja, $\omega_0 \rightarrow -\infty$ e $\bar{\omega} \rightarrow \infty$, $\alpha(t)$ pode ser interpretado como a transformada de Fourier da forma de linha. A evolução do operador do banho discreto $\hat{b}_k(t)$ é dada por

$$\hat{b}_k(t)|\alpha, 0\rangle \equiv \beta_k(t)|\alpha, 0\rangle = \alpha_0 \sum_n^{\bar{n}} c_0^{(n)} c_k^{(n)} e^{-if_n t} |\alpha, 0\rangle, \quad (4.45)$$

enquanto que a evolução do operador do banho contínuo $\hat{b}_\omega(t)$ é

$$\hat{b}_\omega(t)|\alpha, 0\rangle \equiv \beta_\omega(t)|\alpha, 0\rangle = \alpha_0 \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} c_0(\Omega) c_\omega(\Omega) e^{-i\Omega t} |\alpha, 0\rangle. \quad (4.46)$$

Considere, agora, que inicialmente o sistema esteja preparado numa superposição de estados coerentes e o reservatório no estado fundamental, isto é, $N_\alpha[|\alpha, 0\rangle \pm |-\alpha, 0\rangle]$. É possível mostrar que a solução da equação de Schrödinger, a partir da hamiltoniana (4.1) para esta condição inicial tem a forma [24, 68, 69]

$$|t\rangle = N_\alpha \left(|\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k^{\bar{k}} |\beta_k(t)\rangle \pm |-\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k^{\bar{k}} |\beta_k(t)\rangle \right), \quad (4.47)$$

onde N_α é o fator de normalização. A partir desta solução (4.47) determinamos a matriz densidade reduzida do sistema tomando o traço nas variáveis do reservatório

$$\rho_\alpha^{(\pm)}(t) = N_\alpha \left[|\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \pm \left(|\alpha(t)\rangle \Gamma_b(t) \langle -\alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \Gamma_b^{(*)}(t) \langle \alpha(t)| \right) \right], \quad (4.48)$$

onde $\Gamma_b(t) \equiv \prod_k^{\bar{k}} \langle -\beta_k(t) | \beta_k(t) \rangle = \prod_k^{\bar{k}} e^{-2|\beta_k(t)|^2} = e^{-2\sum_k^{\bar{k}} |\beta_k(t)|^2}$. Estamos interessados no cálculo da decoerência que pode ser medida pelo defeito de idempotência $\delta(t) = 1 - \text{Tr} \rho_\alpha^{2(\pm)}(t)$, que é dado pela expressão abaixo [12, 13]

$$\delta(t) = \left\{ 1 - \frac{[1 + \Gamma_b^2(t)][1 + \Gamma_a^2(t)] \pm \Gamma_a(t)\Gamma_b(t)}{2[1 \pm \Gamma_a(0)]^2} \right\}, \quad (4.49)$$

onde $\Gamma_a(t) \equiv \langle -\alpha(t) | \alpha(t) \rangle = e^{-2|\alpha(t)|^2}$. Podemos determinar $\Gamma_a(t)$, já que conhecemos $\alpha(t)$, assim como $\Gamma_b(t)$ e para simplificar o cálculo desta quantidade utilizaremos a conservação do número de fótons, isto é, $|\alpha_0|^2 = |\alpha(t)|^2 + \sum_k^{\bar{k}} |\beta_k(t)|^2$. Assim, para o caso discreto $\Gamma_a(t)$ e $\Gamma_b(t)$ tem a forma

$$\Gamma_a(t) = e^{|\alpha_0|^2 \sum_{n,n'} c_0^{2(n)} c_0^{2(n')} e^{-i(f_n - f'_n)t}} \quad (4.50)$$

$$\Gamma_b(t) = e^{|\alpha_0|^2 (1 - \sum_{n,n'} c_0^{2(n)} c_0^{2(n')} e^{-i(f_n - f'_n)t})}, \quad (4.51)$$

enquanto que o defeito de idempotência $\delta(t)$ é dado por

$$\delta(t) = \left(1 - \frac{[1 + e^{4|\alpha_0|^2 \sum_{n,n'} c_0^{2(n)} c_0^{2(n')} e^{-i(f_n - f'_n)t}][1 + e^{4|\alpha_0|^2 (1 - \sum_{n,n'} c_0^{2(n)} c_0^{2(n')} e^{-i(f_n - f'_n)t})}]}{2[1 \pm e^{2|\alpha_0|^2}]^2} \right), \quad (4.52)$$

onde $c_0^{2(n)}(c_0^{2(n')})$ é dado por (4.19) que no caso de acoplamento fraco e temperatura nula, podemos aproximar $c_0^{2(n)}$ como [65]

$$c_0^{2(n)} \approx \frac{\gamma^2}{(\omega_c - f_n)^2 + \gamma^2} \quad (4.53)$$

A seguir, calculamos o defeito de idempotência para o caso contínuo, onde as quantidades $\Gamma_a(t)$ e $\Gamma_b(t)$ são iguais a

$$\Gamma_a(t) = e^{|\alpha_0|^2 [\int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) e^{-i\Omega t}] [\int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega' c_0^2(\Omega') e^{i\Omega' t}]} \quad (4.54)$$

$$\Gamma_b(t) = e^{|\alpha_0|^2 (1 - [\int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) e^{-i\Omega t}] [\int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega' c_0^2(\Omega') e^{i\Omega' t}])}, \quad (4.55)$$

onde $c_0^2(\Omega)(c_0^2(\Omega'))$ pode ser aproximado no limite de acoplamento fraco como

$$c_0^2(\Omega) \approx \frac{\pi \gamma^2(\omega_0)}{[\Omega - \omega_0 - F(\omega_0)]^2 + [\pi \gamma^2(\omega_0)]^2}, \quad (4.56)$$

onde $\gamma(\omega_0)$ é a forma da largura da linha e pode ser considerada constante no regime de temperatura nula, levando a uma linha do tipo Breit-Wigner e $F(\omega_0)$ é uma correção na frequência que é pequena neste caso [54]. Assim, se estendermos $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ e $\omega_0 \rightarrow -\infty$ em (4.54) e (4.55), $\Gamma_a(t)$ e $\Gamma_b(t)$ passam a ser dados por

$$\Gamma_a(t) = e^{-2|\alpha_0|^2 e^{-\pi \gamma^2(\omega_0)t}} \quad e \quad \Gamma_b(t) = e^{-2|\alpha_0|^2 (1 - e^{-\pi \gamma^2(\omega_0)t})}. \quad (4.57)$$

No caso de temperatura nula quando a largura da linha é do tipo Breit-Wigner, o defeito de idempotência pode ser calculado e tem a forma abaixo

$$\delta(t) = \left(1 - \frac{[1 + e^{-4|\alpha_0|^2 (1 - e^{-\pi \gamma^2 t})}][1 + e^{-4|\alpha_0|^2 e^{-\pi \gamma^2 t}}] \pm e^{-4|\alpha_0|^2}}{2[1 \pm e^{-2|\alpha_0|^2}]^2} \right). \quad (4.58)$$

Podemos ainda estudar o caso onde a faixa de frequências dos osciladores do banho é limitada a $\omega_0 \leq \Omega \leq \bar{\omega}$. Podemos expandir a quantidade $|\alpha(t)|$ para tempos t , tais que, $t \ll \lambda \equiv \sup|(\bar{\omega}, \omega_0)|$, o que resulta em

$$|\alpha(t)|^2 = \left| \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) e^{-i\Omega t} \right|^2 \approx \left| \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) \left(1 - i\Omega t - \frac{1}{2}\Omega^2 t^2 \right) \right|^2 = 1 - (I_2 - I_1^2)t^2 + O(t^4) \quad (4.59)$$

onde $I_n \equiv \int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} d\Omega c_0^2(\Omega) \Omega^n$. Assim, as quantidades $\Gamma_a(t)$ e $\Gamma_b(t)$ também podem ser expandidas

$$\Gamma_a(t) = e^{-2|\alpha(t)|^2} = e^{-2|\alpha_0|^2(1-(I_2-I_1^2)t^2)} \approx e^{-2|\alpha_0|^2} (1 + 2(I_2 - I_1^2)t^2) \quad (4.60)$$

$$\Gamma_b(t) = e^{2(|\alpha_0|^2 - |\alpha(t)|^2)} e^{-2|\alpha_0|^2(I_2 - I_1^2)t^2} \approx e^{-2|\alpha_0|^2} (2(I_2 - I_1^2)t^2) \quad (4.61)$$

e conseqüentemente, os termos fora da diagonal são proporcionais a t^2 assim como o defeito de idempotência. Por outro lado, no caso da distribuição em frequências ser ilimitado, a expansão acima não é válida e a expressão que deve ser expandida é (4.57), levando a

$$\Gamma_a(t) = e^{-2|\alpha_0|^2} (1 + 2|\alpha_0|^2 \pi \gamma^2(\omega_0) t) \quad \text{e} \quad \Gamma_b(t) = 1 - 2|\alpha_0|^2 \pi \gamma^2(\omega_0) t. \quad (4.62)$$

Repare que existe uma diferença crucial de como estas quantidades se comportam em torno de $t = 0$ e esta diferença de comportamento está totalmente relacionada à finitude da faixa de frequências do banho. O defeito de idempotência apresenta uma dependência quadrática com o tempo para o caso do espectro ser limitado, enquanto que uma dependência linear aparece quando o espectro é ilimitado. Temos, portanto, um resultado análogo ao obtido no capítulo 3. Assim, podemos afirmar que o comportamento das funções para tempos curtos, no caso o defeito de idempotência, dependem crucialmente da finitude ou não da faixa de frequências do banho. No próximo capítulo, mostraremos um caso real onde este resultado poderá ser aplicado. Na próxima seção comparamos este resultado exato com o fornecido pela equação mestra.

4.4 Comparação entre a Solução Exata e a Fornecido pela Aproximação de Born-Markov

A dinâmica da matriz densidade reduzida pode ser descrita pela equação mestra, considerando a hamiltoniana total dada por (4.1 e 4.23) a temperatura nula ($T = 0$). A dedução da equação mestra, cuja interação tenha a forma $H_{int} = \hbar \sum_i S_i R_i$, onde S_i são os operadores que pertencem ao espaço de Hilbert do sistema e R_i são os operadores que pertencem ao espaço de Hilbert do reservatório térmico, pode ser encontrada no apêndice C. Para este caso ela se reduz a

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i\omega_0 [a^\dagger a, \rho] + k (2a^\dagger \rho a - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a), \quad (4.63)$$

onde k é a constante dissipativa, que nos casos discreto e contínuo adquirem, respectivamente as formas

$$k = \gamma_{k_j}^2 \quad \text{e} \quad k = \gamma^2(\omega_0). \quad (4.64)$$

Repare que em ambos os casos, a constante dissipativa está diretamente relacionada ao acoplamento ligado à frequência mais próxima a frequência livre do sistema. No caso da equação mestra, isto ocorre porque devido ao caráter fraco da interação entre o sistema e o reservatório, o termo que mais contribui para o tempo de correlação do reservatório é aquele que está ligado à frequência livre do sistema. Assim, existe apenas um único tempo de relaxação envolvido, ou em outras palavras, apenas o(s) oscilador(es) do reservatório cuja frequência é da ordem desta frequência livre contribui significativamente para a função de correlação do banho e conseqüentemente, para os coeficientes dissipativos e difusivos. É importante lembrar que esta frequência também está relacionada a largura da linha, como mostram as equações (4.19) e (4.38) e estas larguras podem ser aproximadas como $\gamma_{k_j}^2$ ou $\gamma^2(\omega_0)$ no regime de acoplamento fraco e que no limite de temperatura nula, podem ser consideradas constante, lembrando sempre que neste caso, a forma da linha é do tipo Breit-Wigner [54, 65].

A solução desta equação mestra $\rho(t) = e^{L(t)}\rho(0)$ pode ser dada através dos métodos algébricos de Lie que permitem o desacoplamento da exponencial de superoperadores, tornando possível a ação da exponencial desacoplada na condição inicial [70, 71, 72, 73, 74]. No caso em questão, a solução é

$$\rho(t) = e^{(e^{-2kt}-1)Jt} e^{-(kt+i\omega_0)Mt} e^{(-kt+i\omega_0)Pt} \rho(0), \quad (4.65)$$

onde $J \equiv a \bullet a^\dagger$, $M \equiv a^\dagger a \bullet$ e $P \equiv \bullet a^\dagger a$ são os superoperadores. Considere como condição inicial o seguinte estado $\rho(0) = N_\alpha [(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)(\langle\alpha| \pm \langle-\alpha|)]$, então a matriz densidade reduzida num tempo t é da mesma forma que a obtida para o caso exato (4.48),

$$\rho_\alpha^{master(\pm)}(t) = N_\alpha \left[|\alpha(t)\rangle \langle\alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle-\alpha(t)| \pm \left(|\alpha(t)\rangle \Gamma_b(t) \langle-\alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \Gamma_b^*(t) \langle-\alpha(t)| \right) \right], \quad (4.66)$$

onde $\Gamma_b(t) = e^{-2(|\alpha_0|^2 - |\alpha(t)|^2)} = e^{-2|\alpha_0|^2(1-e^{-2kt})}$. Podemos obter o defeito de idempotência, a partir de (4.66), com

$$\Gamma_a(t) = e^{-2|\alpha(t)|^2} = e^{-2|\alpha_0|^2} e^{-2kt} \quad (4.67)$$

$$\Gamma_b(t) = e^{-2|\alpha_0|^2} (1 - e^{-2kt}), \quad (4.68)$$

onde k é dado por (4.64), dependendo do caso em questão. Cabe aqui chamar a atenção para a forma do resultado acima (4.67) e (4.68), pois ela é idêntica a obtida para o caso exato quando temos apenas um tempo de relaxação envolvido e o espectro de frequências do reservatório é ilimitado (veja (4.57)). Esta reprodução perfeita da equação mestra acontece quando, no caso exato, temos apenas uma frequência que contribui mais expressivamente, o que caracteriza um regime de acoplamento fraco

coincidindo com uma das hipóteses envolvidas na dedução da mestra e como consequência temos apenas um tempo de relaxação envolvido. Este tempo está relacionado, como já dissemos antes, à frequência cuja contribuição é a importante. Cabe aqui mencionar que os erros são desprezíveis ($\text{largura} \ll \omega_0$ se estendermos a faixa de frequência para $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ e $\omega_0 \rightarrow -\infty$, ao invés de mantermos o limite usual $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ e $\omega_0 \rightarrow 0$, já que a contribuição de peso maior vem de frequências da ordem de ω_0). Assim, concluímos que a equação mestra reproduz perfeitamente o resultado exato quando existe um único tempo de relaxação envolvido e neste caso, isso está relacionado a hipótese de acoplamento fraco. No entanto, fora deste regime, a forma da linha apresenta contribuições de outras frequências, o que ocasiona o aparecimento de diversos tempos de relaxação dado que o reservatório é composto de vários osciladores e estes novos tempos de relaxação estão ligados às frequências dos osciladores presentes no reservatório que contribuem com mais força. No trabalho de Rosenau e colaboradores [61], eles estudam como a forma da linha muda nos diversos regimes e é fácil ver a transição do regime onde apenas uma frequência contribui (acoplamento fraco) para o regime onde mais frequências associadas a outra faixa do espectro contribuem.

É importante notar que para duas hamiltonianas diferentes, a estudada neste capítulo e a estudada no capítulo 3, encontramos o mesmo resultado, ou seja, que a equação mestra reproduz adequadamente o cálculo exato, quando temos apenas um único tempo de relaxação envolvido. Assim, seria interessante investigar se é possível determinarmos uma condição geral que determina este resultado apenas olhando para a dedução da equação mestra, mas sem especificar a forma da hamiltoniana, o que ficará para um trabalho futuro.

Capítulo 5

Revisando o Experimento de Paris do ponto de vista do Problema de Deutsch

5.1 Introdução

A idéia de computação quântica vem sendo muito explorada ao longo das últimas décadas (veja, por exemplo ref.[75, 76, 77]) já que foi demonstrada a eficiência de sistemas quânticos para otimizar algoritmos lentos, tais como aqueles para fatorização de números, ou para solucionar problemas nem sempre factíveis em computadores clássicos. Schor desenvolveu um algoritmo para fatorar números em computadores quânticos [78] e através dele, foi demonstrada a vantagem que a computação quântica tem em relação a clássica, em termos dos tempos envolvidos na execução de tal algoritmo, além de enfatizar as dificuldades de realizar experimentalmente tais computadores. É importante lembrar que o modelo usual de computação está baseado nas portas lógicas universais e algum tempo depois foi mostrado que estas portas lógicas poderiam ser montadas utilizando sistemas quânticos ao invés dos tradicionais sistemas clássicos [31, 32, 75, 76, 77]. Este resultado abriu caminho para se pensar na utilização de sistemas quânticos para se resolver um algoritmo, já que a evolução unitária é sempre reversível. A conexão entre as leis da física e o que é computável foi enfatizada por Feynman e Deutsch [31, 32]. Um computador quântico pode aceitar como entrada, estados que representam uma superposição coerente de diferentes entradas e subseqüentemente evoluir para uma superposição coerente de saídas. No entanto, como os sistemas não estão completamente isolados do ambiente, estas superposições quânticas podem ser destruídas pela decoerência, transformando estes estados em misturas estatísticas. Assim, a decoerência destrói as duas características principais do computador quântico: o emaranhamento entre os qubits e o fenômeno da interferência, sendo, portanto, a principal fonte de erro no resultado final da computação. Do ponto de vista de sistemas físicos, a unidade básica de informação chamada de qubit, é representada por um sistema de dois níveis que pode ser preparado num dos dois estados de base $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Sistemas lógicos quânticos foram demonstrados utilizando armadilhas de íons [33, 34], cavidades supercondutoras (QED) [35, 36, 37, 79] e sistemas que apresentam ressonância magnética nuclear (NMR) [38].

Neste capítulo, nos concentraremos na re-interpretação do experimento que mediu a perda de coerência de uma superposição mesoscópica de estados coerentes, que se encontra dentro da cavidade supercondutora C , formada pela passagem de átomos de Rydberg excitados [30]. Este experimento

foi proposto por L. Davidovich e colaboradores em 1996 [80] e mais tarde colocado em prática por Brune e colaboradores [30]. Este experimento pode ser visto como um computador quântico baseado nos qubits, formados pelo átomos e pela superposição coerente de estados do campo dentro da cavidade supercondutora. Em particular, é possível implementar uma função binária $f(x)$ e responder a pergunta feita por Deutsch: se esta função é constante ou varia. No caso do experimento, esta implementação da função acontece quando o átomo interage com o campo dentro da cavidade supercondutora. Uma realização experimental deste problema foi mostrada em 1998 por dois grupos diferentes usando sistemas que apresentam NMR [81, 82]. Durante a redação deste capítulo apareceu um trabalho onde eles utilizam o mesmo sistema físico para descrever um computador quântico e investigar os efeitos da decoerência dentro do contexto das equações mestras [83]. O nosso trabalho vai um pouco além do resultado obtido na ref.[83], pois utilizamos o resultado exato e através dele, discutimos também uma forma de reduzir esta decoerência.

5.2 O Problema de Deutsch

Considere uma função binária $f(x)$ de um número binário x . O problema de Deutsch [32] consiste em descobrir se $f(x)$ é uma função constante ou se ela varia. Deutsch mostrou que um computador quântico pode responder esta pergunta da seguinte maneira: O sistema que compõe o computador é composto de dois qubits $|x\rangle|y\rangle$, onde $|x\rangle$ é o estado de entrada/saída e $|y\rangle$ é a parte do sistema que evolui de acordo com a regra

$$|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle, \quad (5.1)$$

onde \oplus representa uma soma binária definida como

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 0 &= 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Uma forma particular de um estado de entrada do computador (ignorando o fator de normalização) é dada por

$$|\text{in}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle). \quad (5.3)$$

É possível escrever os dois estados possíveis de saída, sem o prévio conhecimento da função $f(x)$

$$|\text{out}\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)(|f(0)\rangle - \overline{|f(0)\rangle}), \quad (5.4)$$

onde o sinal de soma corresponde a $f(x) = \text{constante}$ e sinal de subtração correspondente a $f(x) \neq \text{constante}$. A notação $\overline{|f(0)\rangle}$ significa “não $f(x)$ ”. Numa medida simples da saída do sistema $|x\rangle$, a resposta à questão proposta por Deutsch pode ser respondida após rodarmos $|x\rangle$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle + |1\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |0\rangle - |1\rangle, \end{aligned} \tag{5.5}$$

e efetuarmos uma medida. O resultado desta medida será $|x\rangle = |0\rangle$ com probabilidade um se a função é constante, ou $|x\rangle = |1\rangle$ se a função é não constante. Note que a resposta do problema de Deutsch é dada através do resultado da medida do estado $|x\rangle$.

5.3 Descrição do Experimento

O avanço experimental essencial que permitiu a monitoração e observação do processo de decoerência e estados macroscopicamente distinguíveis em Óptica Quântica foi a possibilidade de obter estados aprisionados em cavidades supercondutoras com alto fator de qualidade, pois faz com que o estado a ser observado tenha um aumento do tempo de decoerência diminuindo acoplamentos externos, o que significa que o sistema se aproxima do caso isolado [84, 85]. Nestas condições, a decoerência do estado produzido é medida através de medidas de correlações entre os estados finais dos dois átomos de Rydberg [30] que interagem seqüencialmente com um dos modos da cavidade. Não cabe aqui uma descrição detalhada dos experimentos que têm sido propostos, então nesta seção, ilustraremos sucintamente um destes experimentos proposto por Davidovich e colaboradores [80]. Este experimento permite a criação de superposições de estados coerentes do campo (popularmente conhecidos como “gatos ópticos”), que se encontram dentro da cavidade supercondutora, através da passagem de um átomo de dois níveis pela aparelhagem mostrada na figura 5.1. A decoerência destas superposições é monitorada pela passagem de um segundo átomo de dois níveis pela mesma aparelhagem. Esta experiência utiliza a idéia de estados emaranhados (entangled) do tipo “átomo+campo” e portanto, a medida de um certo estado atômico fornece informações a respeito do campo que se encontra armazenado numa das cavidades que compõem esta aparelhagem.

5.3.1 Passagem do Primeiro Átomo

A formação dos “gatos ópticos” foi experimentalmente obtida através da passagem de um único átomo por toda a aparelhagem abaixo com freqüências e intensidades de campo escolhidas de forma apropriada [30].

O átomo é preparado no estado $|e\rangle$ ($n = 51$) em **B** e entra na primeira Zona de Ramsey **R1**, onde interage com o campo clássico ressonante [86]. Ao deixá-la o átomo está numa superposição de estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, onde $|g\rangle$ corresponde ao número quântico principal $n = 50$

$$|\psi_{\text{átomo1}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \tag{5.6}$$

O átomo está pronto para atravessar a cavidade supercondutora **C**. Esta cavidade não é ressonante com a freqüência de transição atômica $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$, mas é quase ressonante com a transição atômica

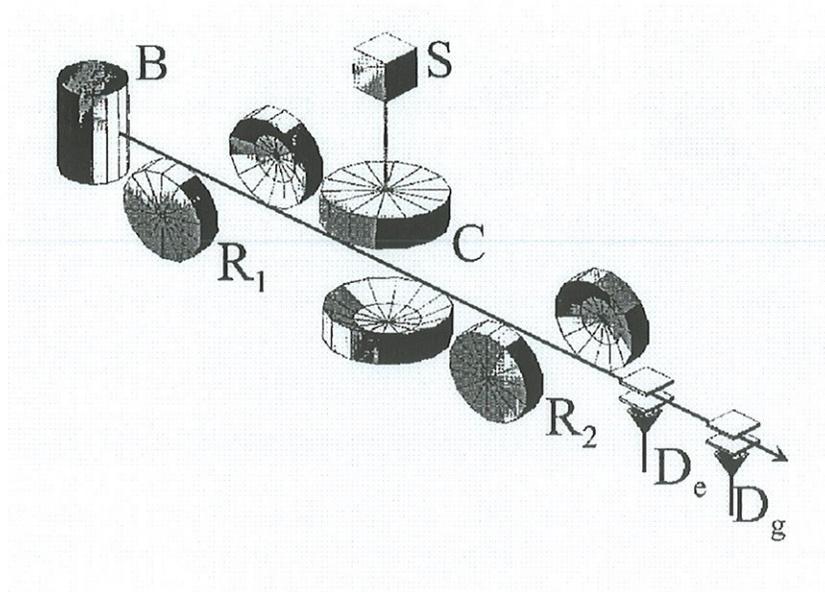


Figura 5.1: Aparato Experimental utilizado na preparação dos “gatos ópticos”

correspondente dos níveis $|e\rangle$ e $|i\rangle$, onde $|i\rangle$ corresponde ao nível quântico $n = 52$. A frequência de transição entre $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ é igual a 51,099 GHz. Ao atravessar a cavidade **C**, o estado atômico $|e\rangle$ provoca uma defasagem na fase do campo, enquanto que $|g\rangle$ não provoca nenhuma defasagem, como mostraremos a seguir. A interação entre o elétron e o campo de radiação é muito bem aproximado nas condições experimentais por [10, 87]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_{campo} + \hat{H}_{átomo} + \hat{H}_{int}.$$

Explicitamente, a forma da hamiltoniana acima é

$$\hat{H} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_{ie} \sigma_z + \hbar\Omega(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (5.7)$$

onde ω_c é a frequência característica do campo presente na cavidade supercondutora **C**, ω_{ie} é a frequência correspondente à transição atômica entre os níveis $|e\rangle$ e $|i\rangle$, e Ω é a frequência de Rabi.

Uma análise por Teoria de Perturbação Independente do Tempo até segunda ordem é conveniente para tratar o problema de autovalores e autovetores da hamiltoniana total acima, já que a dessintonia $\delta = \omega_c - |\omega_{ie}|$ é muito grande em relação a frequência de acoplamento de Rabi Ω , portanto, para um estado de campo genérico, o efeito desta interação produz um estado $|\psi'\rangle$ que pode ser escrito como

$$|\psi'\rangle = \left(e^{-i\phi(a^\dagger a + 1)} |i\rangle\langle i| + e^{i\phi a^\dagger a} |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \right) |\psi\rangle, \quad (5.8)$$

onde $|\psi\rangle$ é o estado do conjunto “campo+átomo” antes da passagem do átomo pela cavidade **C** e é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle \quad (5.9)$$

e ϕ é uma fase definida como

$$\phi = \frac{\Omega^2 t}{\delta}, \quad (5.10)$$

onde t é o tempo que o átomo permanece na cavidade supercondutora **C**. No caso desta proposta experimental, o átomo que passa no estado $|e\rangle$ provoca uma defasagem π no campo coerente que está dentro da cavidade supercondutora **C**, enquanto que o átomo que passa no estado $|g\rangle$ nada provoca no campo presente em **C**, portanto, $\phi = \pi$. Após a passagem pela cavidade supercondutora **C**, o estado do “átomo+campo”, torna-se

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, -\alpha\rangle + |g, +\alpha\rangle), \quad (5.11)$$

e atravessa a Segunda Zona de Ramsey **R2** e novamente, sofre uma rotação análoga à descrita na Primeira Zona de Ramsey **R1**. O estado do conjunto “átomo+campo” após atravessar a Segunda Zona de Ramsey **R2** é

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|e\rangle + |g\rangle) \otimes |-\alpha\rangle + (|e\rangle - |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle]. \quad (5.12)$$

Logo após deixar a Segunda Zona de Ramsey, o primeiro átomo poderá ser detectado no estado $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ e a partir da detecção e do uso do Postulado da Redução do Pacote, sabemos em qual estado o campo dentro de **C** se encontra. Estes estados encontrados dentro de **C** são os tais “gatos ópticos pares e ímpares”

$$|\psi_\theta\rangle = \frac{1}{N_\theta} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle), \quad (5.13)$$

onde N_θ é a constante de normalização e o valor do ângulo θ dependerá do estado em que o átomo será detectado. Se o átomo for detectado em $|e\rangle$, $\theta = \pi$, caso contrário, isto é, se o átomo for detectado em $|g\rangle$, $\theta = 0$. A constante de normalização é dada por

$$N_\theta = \sqrt{2(1 + e^{i\theta} e^{-2|\alpha|^2})}.$$

Cabe aqui ressaltar o importante papel da segunda Zona de Ramsey que é formar os “gatos ópticos” dentro de **C**, a partir da rotação que ela efetua no átomo, que nesta etapa, está emaranhado com o campo dentro de **C**. Outro fato importante é que devemos utilizar o Postulado da Redução para determinarmos qual é o tipo de gato que se encontra dentro de **C**, a partir da detecção do átomo.

A matriz densidade correspondente ao estado dado em (5.13) é

$$\rho_1(\theta, t = 0) = \frac{1}{N_\theta^2} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle) (\langle\alpha| + \langle-\alpha|e^{-i\theta}). \quad (5.14)$$

5.3.2 Passagem do Segundo Átomo

O segundo átomo é enviado depois que o primeiro átomo deixa a cavidade supercondutora **C**. Durante o tempo em que o segundo átomo atravessa **R1** e atinge **C**, o campo deixado dentro de **C** evolui através de sua interação com o “reservatório”. O tempo durante o qual o segundo átomo interage com esse campo será representado por τ . Após a passagem do segundo átomo por **R1**, o estado do conjunto “átomo+campo” será

$$\rho_2^{(0)}(\theta, \tau) = \frac{1}{2} (|e_2\rangle + |g_2\rangle) (\langle e_2| + \langle g_2|) \otimes \rho_1(\theta, \tau), \quad (5.15)$$

onde $\rho_1(\theta, \tau)$ é o operador evoluído no tempo τ levando em conta a interação com a cavidade **C**

$$\rho_1(\theta, \tau) = e^{L\tau} \rho_1(\theta, 0), \quad (5.16)$$

onde L representa o liouvilliano que modela adequadamente a interação da “cavidade+campo” cuja a forma é do tipo RWA descrita no capítulo anterior pela eq (4.1). Após a passagem do segundo átomo pela cavidade supercondutora **C**, o estado do conjunto “átomo+campo” será

$$\rho^{(1)}(\theta, \tau) = \left(e^{i\phi a^\dagger a} |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| \right) \rho_2^{(0)}(\theta, \tau) \left(e^{-i\phi a^\dagger a} |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| \right). \quad (5.17)$$

Substituindo (5.15) em (5.17), temos

$$\rho_2^{(1)}(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \left(|e\rangle \langle e| e^{i\phi a^\dagger a} \rho_1(\theta, \tau) e^{-i\phi a^\dagger a} + |e\rangle \langle g| e^{i\phi a^\dagger a} \rho_1(\theta, \tau) + |g\rangle \langle e| \rho_1(\theta, \tau) e^{-i\phi a^\dagger a} + |g\rangle \langle g| \rho_1(\theta, \tau) \right). \quad (5.18)$$

O segundo átomo vai, ainda, passar pela segunda Zona de Ramsey antes de ser medido. Ao deixar a segunda Zona de Ramsey **R2**, o sistema “segundo átomo+campo” é descrito pela seguinte matriz densidade

$$\begin{aligned} \rho_2^{(2)}(\theta, \tau) = \frac{1}{4} \left((|e\rangle + |g\rangle) (\langle e| + \langle g|) e^{i\phi a^\dagger a} \rho_1(\theta, \tau) e^{-i\phi a^\dagger a} + (|e\rangle + |g\rangle) (-\langle e| + \langle g|) e^{i\phi a^\dagger a} \rho_1(\theta, \tau) \right. \\ \left. + (-|e\rangle + |g\rangle) (\langle e| + \langle g|) \rho_1(\theta, \tau) e^{-i\phi a^\dagger a} + (-|e\rangle + |g\rangle) (-\langle e| + \langle g|) \rho_1(\theta, \tau) \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

A probabilidade de detecção do segundo átomo no estado $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ é

$$P_g^e(\theta, \tau) = \left\langle \begin{array}{c} e \\ g \end{array} \middle| \text{Tr}_c \rho_2^{(2)}(\theta, \tau) \middle| \begin{array}{c} e \\ g \end{array} \right\rangle, \quad (5.20)$$

onde Tr_c é o traço nas variáveis do campo e θ é o ângulo determinado pela detecção do primeiro átomo no estado $|e\rangle(\theta = \pi)$ ou $|g\rangle(\theta = 0)$. Portanto,

$$P_g^c(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ 1 \mp e^{i\theta} \text{Re} \left[\text{Tr} \left(e^{i\phi a^\dagger a} \rho_1(\theta, \tau) \right) \right] \right\} \quad (5.21)$$

e no caso em questão $\phi = \pi$ [80]. O sinal de subtração em (5.21) corresponde a medida de probabilidade de detecção do segundo átomo no estado $|e\rangle$, enquanto que o sinal de soma corresponde ao estado $|g\rangle$.

Na próxima seção iremos re-interpretar este experimento do ponto de vista do problema de Deutsch, exposto na seção anterior.

5.4 Reinterpretação do Experimento de Paris: Uma realização Experimental do Problema de Deutsch

O experimento descrito na seção anterior pode ser visto como uma realização do problema de Deutsch para uma função do tipo $f(x) = x$, ou seja não constante. Este experimento é bastante conveniente para tratar o problema de Deutsch porque o átomo envolvido no experimento é do tipo de dois níveis ($|e\rangle$ e $|g\rangle$). O mesmo acontece com o campo dentro da cavidade supercondutora, já que existem dois tipos de superposições de estados coerentes, dada a existência de apenas dois autovalores não nulos, relacionados à diagonalização da matriz densidade reduzida associada ao campo para a condição inicial do experimento [68, 69]. Assim, o estado do campo dentro da cavidade corresponde ao outro sistema envolvido na computação, mesmo não sendo ortogonais, como devem ser os sistemas binários. E é este estado do campo dentro da cavidade que irá evoluir de acordo com a regra de Deutsch $x \rightarrow x \oplus f(x) = x$, enquanto que o átomo nada sofre durante a evolução. No caso dos computadores quânticos, estes dois sistemas são chamados de “qubits”, então convenientemente, adotaremos a seguinte linguagem

$$\begin{array}{ll} |e\rangle \rightarrow |1\rangle & |+\alpha\rangle \rightarrow |1\rangle \\ |g\rangle \rightarrow |0\rangle & |-\alpha\rangle \rightarrow |0\rangle. \end{array}$$

A execução do algoritmo ocorre na segunda etapa do experimento, onde o segundo átomo passa pela aparelhagem (veja seção 5.3.1, figura 5.1). Nesta etapa, já se sabe qual é o tipo de superposição mesoscópica de estados coerentes é encontrada dentro da cavidade supercondutora \mathbf{C} , desde de que o observador use o Postulado da Redução, pois a medida do primeiro átomo num determinado estado está diretamente relacionada a uma das duas superposições de estados coerentes (“gatos”), pois estes dois sistemas, estão correlacionados. No caso deste algoritmo, a superposição mesoscópica do campo mais adequada é a do tipo “gato ímpar”, isto é $(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \rightarrow (|1\rangle - |0\rangle)$, enquanto que no caso do átomo, ele deve ser preparado no estado $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$.

Considere o campo dentro da cavidade supercondutora \mathbf{C} numa superposição de estados coerentes do tipo “gato ímpar” e o segundo átomo preparado no estado $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$. Primeiramente, este

átomo preparado em $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$ atravessa a Primeira Zona de Ramsey **R1**. A zona de Ramsey tem o papel de rodar o átomo e este torna-se uma superposição entre os dois níveis de Rydberg ativos $|e\rangle \rightarrow 1$ e $|g\rangle \rightarrow 0$, ou seja,

$$|1\rangle \rightarrow (|1\rangle + |0\rangle).$$

Repare que este estado resultante produto direto com o estado de gato ímpar, que se encontra dentro da cavidade supercondutora **C** é o estado de entrada da computação

$$(|1\rangle + |0\rangle) \otimes (|1\rangle - |0\rangle).$$

Depois que este átomo passou por **R1**, ele atravessa a cavidade supercondutora **C**. Esta cavidade supercondutora é responsável pela implementação da função f seguindo a regra de Deutsch, que no caso do experimento em questão, pode ser vista como a mudança de fase que o átomo provoca no estado do campo que se encontra dentro de **C**. Esta mudança de fase é definida como

$$\begin{aligned} |e\rangle|\alpha\rangle &\rightarrow |e\rangle|e^{i\phi}\alpha\rangle \\ |g\rangle|\alpha\rangle &\rightarrow |g\rangle|\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde ϕ é a fase que depende dos parâmetros da cavidade e velocidade atômica, que aqui escolhemos convenientemente $\phi = \pi$. Desta forma, para $\phi = \pi$ em (5.22), a regra de Deutsch é do tipo $j \rightarrow j \oplus (f(x) = x)$, resultando na evolução abaixo

$$\begin{aligned} |e\rangle|+\alpha\rangle &\rightarrow |e\rangle|-\alpha\rangle \\ |e\rangle|-\alpha\rangle &\rightarrow |e\rangle|+\alpha\rangle \\ |g\rangle|+\alpha\rangle &\rightarrow |g\rangle|+\alpha\rangle \\ |g\rangle|-\alpha\rangle &\rightarrow |g\rangle|-\alpha\rangle \end{aligned} \quad (5.23)$$

que pode ser traduzida para a linguagem da computação como

$$\begin{aligned} |1\rangle|1\rangle &\rightarrow |1\rangle|1 \oplus 1\rangle = |1\rangle|0\rangle \\ |1\rangle|0\rangle &\rightarrow |1\rangle|0 \oplus 1\rangle = |1\rangle|1\rangle \\ |0\rangle|1\rangle &\rightarrow |0\rangle|1 \oplus 0\rangle = |0\rangle|1\rangle \\ |0\rangle|0\rangle &\rightarrow |0\rangle|0 \oplus 0\rangle = |0\rangle|0\rangle \end{aligned} \quad (5.24)$$

Portanto, podemos afirmar que este experimento $\phi = \pi$ reproduz adequadamente uma função do tipo $f(x) = x$, embora não seja o problema original de Deutsch, este experimento já possibilita um grande avanço para alcançarmos a solução do problema original onde a função f é uma constante. Mudar esta função $f(x) = x$ para uma função constante, no caso deste experimento, implicaria em uma mudança da fase da cavidade através do ajuste da velocidade do átomo e da defasagem da

cavidade supercondutora, que são fatores de extrema importância para o sucesso deste experimento. No caso de $f(x) = \text{constante}$ a fase da cavidade deveria ser ajustada para $\phi = 2\pi$. Assim, para o caso $\phi = \pi$, o estado que deixa a cavidade tem a forma

$$(|g\rangle - |e\rangle)(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)(|1\rangle - |0\rangle)$$

Por último, este átomo atravessa a Segunda Zona de Ramsey **R2**, Nesta etapa, apenas o estado do átomo sofre modificação, enquanto que o campo permanece inalterado, isto se em princípio, não considerarmos os efeitos da decoerência. Desta forma, o estado resultante é

$$|\psi_f\rangle \propto |e\rangle(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \rightarrow |1\rangle(|1\rangle - |0\rangle) \quad (5.25)$$

e se efetuarmos uma medida no átomo, obtemos com certeza absoluta o estado $|e\rangle$ que carrega a informação a respeito do tipo da função f , pois afinal foi a forma dela que gerou este estado final. Como mostramos, este experimento pode ser visto como uma espécie de problema de Deutsch, cuja forma da função é do tipo $f(x) = x$, que é não constante. No entanto, existe um problema com o experimento do ponto de vista da computação quântica: a decoerência a que o campo está sujeito devido a interação com os modos da cavidade, que aliás foi o motivo crucial para elaboração e montagem deste experimento [30, 80]. Eles medem uma probabilidade condicional, que nos diz qual a probabilidade de medir o primeiro átomo num certo estado e o segundo num outro, $P_{(e,g)}(\theta, t)$, e para o caso discutido nesta seção, temos certeza da medida desses dois estados do átomo, já que o estado do campo conveniente para a computação, no início, é um gato ímpar, associado a medida do primeiro átomo no estado $|e\rangle(|1\rangle)$, enquanto que o segundo átomo só pode ser medido com certeza em $|e\rangle$, como mostrado pela eq. (5.25). Foi mostrado teoricamente [68, 69] que esta probabilidade condicional é diretamente proporcional aos autovalores da matriz densidade reduzida do campo, portanto, uma medida direta da decoerência. Na ausência da decoerência, esta probabilidade condicional P_{ee} deve ser igual a um para todo o tempo, $P_{ee} = 1$. Uma das consequências mais graves da decoerência para a computação quântica é a perda de informação, e conseqüentemente não podemos mais afirmar com certeza total quem é a função f . Na próxima seção, mostraremos como reduzi-la no caso deste experimento.

5.5 Discussão da Decoerência do Campo dentro da cavidade: Cálculo Exato e Mestre:

A decoerência é um dos fatores responsáveis pelo aparecimento de erros na computação quântica, justamente porque ocasiona perda de informação. A questão agora é investigar se existe uma maneira de reduzir este erro causado por ela e é o que tentamos fazer, no que segue.

O campo presente dentro da cavidade supercondutora, começa a perder coerência e a sofrer dissipação, embora pequena, a partir de sua preparação, identificada pela detecção do segundo átomo ($k = 1/2t_{cav}$; $t_{cav} = 160\mu s$ e $Q = 5,1 \times 10^7$) [30]. Um modelo freqüentemente adotado para estes efeitos é acoplar linearmente o modo relevante da cavidade supercondutora **C** a um conjunto de N osciladores harmônicos desacoplados [87, 10, 24]. O acoplamento entre o campo e os

osciladores "externos" é suposto do tipo RWA. A hamiltoniana adequada para descrever o sistema, em questão, é da mesma forma da do capítulo anterior, cuja forma é

$$\hat{H} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar \sum_k^{\bar{k}} \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k^{\bar{k}} \left(\gamma_k b_k^\dagger a + \gamma_k^* b_k a^\dagger \right) \quad (5.26)$$

Note que nós introduzimos explicitamente uma frequência de corte superior \bar{k} que caracteriza uma cavidade cujos modos são finitos. Esta finitude dos modos da cavidade pode reduzir consideravelmente o tempo de decoerência, como mostramos no capítulo anterior. Como discutido nas referências [68, 69], a probabilidade de detectarmos o segundo átomo no estado $|e\rangle$ é obtida da seguinte maneira. Considere a condição inicial da forma

$$|t=0\rangle = N_\alpha (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \otimes |0_b\rangle, \quad (5.27)$$

que representa o estado do campo dentro da cavidade \mathbf{C} após a detecção do primeiro átomo em $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, respectivamente, representada pelos sinais de subtração e adição. O reservatório térmico encontra-se inicialmente no estado fundamental $|0_b\rangle$, que corresponde ao caso de temperatura nula. A evolução temporal desta condição inicial (5.27), sujeita à ação da hamiltoniana (5.26), é

$$|t\rangle = N_\alpha \left(|\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k^{\bar{k}} |\beta_k(t)\rangle \pm |-\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k^{\bar{k}} |-\beta_k(t)\rangle \right), \quad (5.28)$$

onde as amplitudes $\alpha(t)$ e $\beta_k(t)$ são soluções das equações linearmente acopladas

$$i\dot{\alpha} = \sum_k^{\bar{k}} \gamma_k \beta_k \quad (5.29)$$

$$i\dot{\beta}_k = (\omega_k - \omega_c)\beta_k + \gamma_k \alpha. \quad (5.30)$$

Podemos construir a matriz densidade reduzida do sistema num dado tempo t , a partir de (5.28)

$$\hat{\rho}_\alpha^{(\pm)}(t) = N_\alpha^2 [|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle\langle-\alpha(t)| \pm |\alpha(t)\rangle\Gamma_b(t)\langle-\alpha(t)| \pm |-\alpha(t)\rangle\Gamma_b^*(t)\langle+\alpha(t)|], \quad (5.31)$$

onde

$$\Gamma_b \equiv \prod_k^{\bar{k}} \langle -\beta_k(t) | \beta_k(t) \rangle.$$

Foi mostrado que a matriz densidade reduzida dada por (5.31) tem sempre dois autovalores e autovetores não nulos e este fato está diretamente relacionado a condição inicial adotada [68, 69] e então, a matriz densidade reduzida pode ser escrita como

$$\hat{\rho}_\alpha^{(\pm)}(t) = N_\alpha^2 \left[(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle) \lambda_p^{(\pm)}(t) (\langle\alpha(t)| + \langle-\alpha(t)|) \right. \\ \left. + (|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle) \lambda_i^{(\pm)}(t) (\langle\alpha(t)| - \langle-\alpha(t)|) \right], \quad (5.32)$$

onde $\lambda_i^{(\pm)}$ e $\lambda_p^{(\pm)}$ são diretamente os autovalores da matriz densidade reduzida cuja a forma é

$$\lambda_p^{(\pm)} = \frac{[1 + \Gamma_a(t)][1 \pm \Gamma_b(t)]}{2[1 \pm \Gamma_a(0)]} \quad (5.33)$$

$$\lambda_i^{(\pm)} = \frac{[1 - \Gamma_a(t)][1 \mp \Gamma_b(t)]}{2[1 \pm \Gamma_a(0)]} \quad (5.34)$$

onde

$$\Gamma_a(0) = e^{-2|\alpha_0|^2} \quad (5.35)$$

$$\Gamma_a(t) \equiv \langle -\alpha(t) | \alpha(t) \rangle = e^{-2|\alpha(t)|^2} \quad (5.36)$$

$$\Gamma_b(t) \equiv \langle -\beta_k(t) | \beta_k(t) \rangle = \prod_k^{\bar{k}} e^{-2|\beta_k(t)|^2} = e^{-2|\alpha_0|^2(1-|\alpha(t)|^2)}. \quad (5.37)$$

Mostrou-se que estes autovalores estão diretamente relacionados a probabilidade de detecção do segundo átomo em $|e\rangle$ e $|g\rangle$ condicionada à observação do primeiro átomo em um destes estados [80, 30]. Neste caso, devemos substituir a eq. (5.32) em (5.21) e como esta matriz densidade reduzida é exata, nós temos uma forma exata para esta probabilidade condicional também

$$P_{(e,g)}^{(\pm)}(t) = \frac{1}{2} [1 \mp (\lambda_p^{(\pm)}(t) - \lambda_i^{(\pm)}(t))] \quad (5.38)$$

Assim, vê-se imediatamente a relação entre esta probabilidade e os autovalores e para isso, utilizamos o fato da soma destes autovalores serem sempre um, ou seja, $\lambda_p^{(\pm)}(t) + \lambda_i^{(\pm)}(t) = 1$

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \lambda_i^-(t) \\ P_{eg}(t) &= \lambda_p^-(t) \\ P_{ge}(t) &= \lambda_i^+(t) \\ P_{gg}(t) &= \lambda_p^+(t). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Como estamos interessados no estudo dos efeitos da decoerência do ponto de vista do computador quântico, escolhemos como condição inicial, o caso que retrata o gato ímpar, isto é, a condição inicial com o sinal de subtração da eq. (5.27), que está associada a medida do primeiro átomo em $|e\rangle$. Com o desenvolvimento do algoritmo de Deutsch, obtemos como medida com certeza absoluta,

na ausência da decoerência, o estado $|e\rangle$ para o segundo átomo. Então, a probabilidade condicional mais conveniente para estudar os efeitos da decoerência neste caso é $P_{ee}(t)$, que está associada ao autovalor $\lambda_i^-(t)$, isto é,

$$P_{ee}^{\bar{k}}(t) = \frac{[1 - \Gamma_a(t)][1 + \Gamma_b(t)]}{2[1 - \Gamma_a(0)]}, \quad (5.40)$$

onde \bar{k} indica que a cavidade tem um número de modos finito, o que significa que um espectro de frequências limitado. As quantidades $\Gamma_a(t)$ e $\Gamma_b(t)$ são dadas, respectivamente, pelas equações (5.36) e (5.37). No caso do espectro de frequências associado aos modos da cavidade ser contínuo, isto é, $\bar{k} \rightarrow \infty$ e se considerarmos $\gamma_k = \gamma$, podemos calcular o valor exato da probabilidade condicional dada pela equação (5.40), usando a forma usual dada pela equação mestra. Com base no que foi mostrado no capítulo anterior, sabemos que a equação mestra reproduz adequadamente o resultado exato, no caso particular desta condição inicial usada aqui, cujo estado do campo é uma superposição de estados coerentes e o estado do reservatório térmico encontra-se inicialmente no estado fundamental. Então, para o caso do espectro ser contínuo, $\bar{k} \rightarrow \infty$, temos

$$\Gamma_a \rightarrow e^{-2|\alpha_0|^2 e^{-\frac{t}{t_c}}} \quad (5.41)$$

$$\Gamma_b \rightarrow e^{-2|\alpha_0|^2(1-e^{-\frac{t}{t_c}})} \quad (5.42)$$

e portanto, a probabilidade condicional (5.40) é descrita pela expressão abaixo

$$P_{ee}^{\bar{k} \rightarrow \infty}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{e^{-2|\alpha_0|^2 e^{-\frac{t}{t_c}}} - e^{-2|\alpha_0|^2(1-e^{-\frac{t}{t_c}})}}{(1 - e^{-2|\alpha_0|^2})} \right\}, \quad (5.43)$$

onde t_c é o tempo de relaxação da cavidade e $|\alpha_0|^2$ é o número de fótons da cavidade. O estado, que se encontra dentro da cavidade, já está em processo de decoerência mesmo para tempos curtos $t \ll t_c$, ou seja, ele é uma mistura estatística de superposições pares e ímpares de estados coerentes. Para tempos intermediários, esta mistura estatística atinge seu valor máximo, ou seja, $P_{ee}(t) = 1/2$, até que a cavidade comece a relaxar e atinja seu estado assintótico, o estado de vácuo num tempo que é muito longo se comparado com o tempo de relaxação da cavidade $t_c = 1/\gamma$. Assim, podemos expandir a equação (5.43) para tempos curtos, $t \ll t_c$, resultando em,

$$P_{ee}^{\bar{k} \rightarrow \infty}(t) = 1 - \xi(|\alpha_0|^2) \frac{t}{t_c}, \quad (5.44)$$

onde

$$\xi(|\alpha_0|^2) = \left(\frac{1 + e^{-2|\alpha_0|^2}}{1 - e^{-2|\alpha_0|^2}} \right) |\alpha_0|^2. \quad (5.45)$$

Observe que $\xi(|\alpha_0|^2)$ tem uma dependência aproximadamente linear para valores de $|\alpha_0|^2 \geq 2$, pois a medida que o número de fótons existentes na cavidade for maior, as exponenciais em (5.45)

tendem a zero. Então, a chance de que ocorra um erro na computação quântica dentro deste regime é $|\alpha_0|^2(t/t_c)$, como mostra (5.44), isto é,

$$P_{ee}^{\bar{k} \rightarrow \infty}(t) = 1 - |\alpha_0|^2 \frac{t}{t_c}. \quad (5.46)$$

Fica claro na expressão acima o efeito causado pelo número de fótons dentro da cavidade para a decoerência, o que significa que quanto maior for o número de fótons dentro de \mathbf{C} , maior será a decoerência e conseqüentemente, o erro na computação. No caso do experimento, $|\alpha_0|^2 = 2$ e vale a expansão dada pela eq. (5.46).

No caso dos modos normais serem finitos, ou seja, o espectro de frequências é limitado e portanto, \bar{k} é finito, a equação mestra não reproduz de maneira correta o resultado exato. Temos, então, que usar a solução exata obtida no capítulo anterior. Veremos, a seguir, que a finitude dos modos da cavidade tem um papel extremamente importante para a decoerência. Assim, no caso de espectro finito temos

$$\Gamma_a \rightarrow e^{-2|\alpha_0|^2|\bar{\alpha}(t)|^2} \quad (5.47)$$

$$\Gamma_b \rightarrow e^{-2\sum_{\bar{k}}|\beta_k|^2} = e^{-2|\alpha_0|^2(1-|\bar{\alpha}(t)|^2)}, \quad (5.48)$$

onde $|\bar{\alpha}(t)|^2 = |\alpha(t)|^2/|\alpha_0|^2$ e a partir de (5.47) e (5.48), obtemos a probabilidade condicional dada por (5.40)

$$P_{ee}^{\bar{k}}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{e^{-2|\alpha_0|^2|\bar{\alpha}(t)|^2} - e^{-2|\alpha_0|^2(1-|\bar{\alpha}(t)|^2)}}{(1 - e^{|\alpha_0|^2})} \right\}, \quad (5.49)$$

que tem uma forma qualitativa análoga a equação (5.43), a menos da solução formal para $|\bar{\alpha}(t)|^2$, cuja a expressão formal pode ser encontrada após a solução das equações acopladas (5.29) e (5.30). Como estamos interessados no comportamento de $P_{ee}^{\bar{k}}(t)$ para tempos curtos, faremos uma expansão da função $|\alpha(t)|^2$ em série de Taylor em torno de $t = 0$, isto é,

$$|\alpha(t)|^2 \approx |\alpha_0|^2 + \frac{d|\alpha(t)|^2}{dt}t + \frac{d^2|\alpha(t)|^2}{dt^2} \frac{t^2}{2}, \quad (5.50)$$

que para o caso da condição inicial dada por (5.27), se reduz a

$$|\alpha(t)|^2 \approx |\alpha_0|^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} \sum_k^{\bar{k}} \gamma_k^2 \right) = |\alpha_0|^2 \left(1 - \frac{t^2}{2t_c^2} \right), \quad (5.51)$$

onde $t_c^2 \equiv (\sum_k^{\bar{k}} \gamma_k^2)^{-1}$. Assim podemos expandir (5.49) para tempos curtos, onde $|\alpha(t)|^2$ é dado por (5.51) que resulta em

$$P_{ee}^{\bar{k}}(t) = 1 - \xi(|\alpha_0|^2) \left(\frac{t}{\bar{t}_c} \right)^2, \quad (5.52)$$

onde \bar{t}_c é o tempo de relaxação definido como $\bar{t}_c = (\sum_k^{\bar{k}} |\gamma_k|^2)^{-1}$. Note que se \bar{k} for finito esta expansão é perfeitamente válida porque temos um coeficiente finito que acompanha o termo t^2 . No caso de um banho usual de osciladores harmônicos em um regime de dissipação ôhmica [88], \bar{t}_c é proporcional ao inverso da constante de dissipação, ou seja, $\bar{t}_c = 1/\bar{\gamma}$. Entretanto no limite $\bar{k} \rightarrow \infty$ o coeficiente do termo t^2 diverge e como consequência, a expansão (5.52) não é válida, dando lugar a expansão feita em (5.46) cuja dependência é linear no tempo. Assim, é evidente como os efeitos da decoerência são reduzidos quando a cavidade tem modos finitos. Uma maneira experimental de implementar esta finitude dos modos seria por exemplo introduzir um filtro do tipo *banda baixa*, responsável pela filtragem de algumas frequências que se localizam acima de \bar{k} .

Capítulo 6

O Efeito Zeno

6.1 Introdução

O processo de medida em Mecânica Quântica ainda não foi completamente entendido e tem sido motivo de muita discórdia entre os pesquisadores [23, 21]. A medida tem como objetivo determinar o valor de um observável físico associado à dinâmica do sistema com o máximo de precisão possível. É sabido também que qualquer medida feita num sistema quântico, o perturba de maneira irreversível, a menos das medidas conhecidas como QND (“Quantum Non-Demolishing”) [21]. A medida estabelece correlações entre o estado do objeto medido e o do aparelho de medida. Se o aparelho mede a variável dinâmica R do objeto com autovetores $|r\rangle$, então a evolução do estado do conjunto “objeto + aparelho”, a partir de um estado inicial descorrelacionado $|r\rangle \otimes |\alpha_0\rangle$, é um estado final do tipo $|r\rangle \otimes |\alpha_r\rangle$, onde $|r\rangle$ é o estado do objeto e $|\alpha_r\rangle$ é o vetor de estado do aparelho [89]. Este tipo de medida é o mesmo introduzido por von Neumann em 1932, onde por simplicidade, o estado da variável dinâmica que será medida não muda [90]. No entanto, para um tratamento completo da medida, deve-se levar em conta, além da interação entre os dois sistemas, a dinâmica intrínseca do sistema, o que poderá acarretar mudanças no estado a ser medido [21]. Considere agora que o objeto tenha como estado inicial uma superposição coerente de autovetores r , inicialmente, descorrelacionado do aparelho de medida. Então, este estado $|\psi(t_0)\rangle = \sum_r c_r |r\rangle \otimes |\alpha_0\rangle$ evolui para o estado final $|\psi(t)\rangle = \sum_r c_r |r\rangle \otimes |\alpha_r\rangle$, que exhibe claramente uma correlação entre o aparelho e o objeto. O operador densidade para o conjunto tem a forma num tempo t , $\rho(t) = |\psi_r(t)\rangle \langle \psi_r(t)|$ e descreve um estado puro. No entanto, a matriz densidade reduzida do objeto, obtida após tomarmos o traço nas variáveis do aparelho de medida, não representa mais um estado puro. Se os estados $|\alpha_r\rangle$ do aparelho forem todos ortogonais, então a matriz densidade do objeto será uma mistura estatística $\rho(t) = \sum_r |c_r|^2 |r\rangle \langle r|$ [27].

Neste capítulo, nos concentraremos num tópico relacionado à teoria da medida conhecido como Efeito Zeno. A formulação original dela foi dada por Misra e Sudarshan [91] e Khalfin [92], onde eles se referem ao Efeito Zeno como a inibição do processo de emissão espontânea de uma partícula que se encontra num estado instável, devida a observação contínua. Misra e Sudarshan se baseiam na seqüência evolução temporal unitária e colapso da função de onda para interpretar os resultados de medidas contínuas [91]. Num outro trabalho, junto com Chiu, eles mostram o anulamento da derivada da probabilidade de sobrevivência $P(t)$ que no exemplo $P(t) \approx t^{3/2}$, levando a inibição

do decaimento de um sistema quântico instável [93]. Existem outros trabalhos [94, 95] onde os autores constroem um modelo quântico para medidas, onde um dos exemplos estudados num destes trabalhos [95] é um sistema de dois níveis interagindo impulsivamente com o aparelho de medida, que adiciona ruído branco ao sinal da medida, levando a uma equação do tipo mestra para descrever a evolução do sistema, onde o duplo comutador que aparece nesta equação mestra contém os efeitos da medida. Aqui, o Efeito Zeno é obtido no regime de acoplamento forte $\Gamma \rightarrow \infty$ e medidas extremamente rápidas [95]. Neste regime de acoplamento forte, obtêm-se para tempos curtos uma dependência não linear no tempo (no caso, quadrática), característica de sistemas que apresentam Efeito Zeno [21, 96, 91, 92]. Estes são só alguns exemplos dos trabalhos teóricos que têm aparecido com o intuito de entender tal efeito.

Em 1988, Cook propôs um experimento usando um único íon em uma armadilha para demonstrar o Efeito Zeno. Mais tarde, em 1990, Itano e colaboradores observaram este efeito num ensemble de íons presos numa armadilha do tipo Penning [97]. No experimento, a população dos dois níveis é medida através do acoplamento com o terceiro nível atômico, que ao decair emite uma luz fluorescente. Os dois primeiros níveis representam o objeto medido e o terceiro nível junto com os fótons emitidos fazem o papel do medidor. Os dois níveis de energia menor $|1\rangle$ e $|2\rangle$ estão separados por uma frequência da ordem de 320 MHz devido a presença do campo magnético da ordem de $0.8T$ dentro da armadilha [98]. Este experimento é muito interessante, e vem provocando muitas discussões entre os pesquisadores (veja, em particular, L. Ballentine [27], A. Peres [29], T. Petrosky, S. Tasaki e I. Prigogine [28], S. Inagaki, M. Namiki e T. Tajiri [99] e Itano e colaboradores [26]). Itano e colaboradores responsabilizam o colapso da função de onda como o responsável pela observação do Efeito Zeno. No entanto, L. Ballentine [27], H. Fearn e W. Lamb [101], Anu Venugplan e R. Ghosh [102], entre outros [21], atribuem a forte perturbação causada pelos pulsos ópticos e o acoplamento com a radiação como a responsável pela inibição da excitação do átomo. Ballentine diz ainda que o Postulado da Redução do Pacote de onda pode levar a resultados incorretos para medidas repetidas [27, 103].

Vários trabalhos reavaliaram o Efeito Zeno como um processo puramente dinâmico [21, 99, 100]. Entre eles, podemos citar o trabalho de Pascazio e Namiki [100], onde eles mostram que quando um sistema evolui a partir de uma certa condição inicial e está sujeito a um tipo de evolução impulsiva, é possível mostrar que o sistema não decai. Neste capítulo, discutiremos o Efeito Zeno deste ponto de vista dinâmico, seguindo a mesma linha desenvolvida por Pascazio e Namiki, onde mostramos o papel fundamental da decoerência na inibição da evolução temporal natural do sistema de interesse. Através de dois exemplos ilustraremos este papel da decoerência para a observação do Efeito Zeno.

6.2 A Essência do Efeito Zeno

Nesta seção, faremos uma breve revisão do que é o chamado Efeito Zeno e quais são as condições necessárias para que ele ocorra.

Considere um modelo que descreve a medida do decaimento de um sistema e suponha que inicialmente, este sistema tenha sido preparado num estado instável $|u\rangle$. Então o vetor de estado que representa o sistema num dado tempo t , pode ser escrito da seguinte maneira

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|u\rangle = (|u\rangle\langle u|) e^{-iHt}|u\rangle + (1 - |u\rangle\langle u|) e^{-iHt}|u\rangle. \quad (6.1)$$

A probabilidade de que o sistema esteja no estado inicial após um tempo $t > 0$ é

$$P(t) = |\langle u|e^{-iHt}|u\rangle|^2. \quad (6.2)$$

Podemos expressar este estado $|u\rangle$ em termos dos autoestados da energia $|\eta\rangle$ e esta representação é conveniente e suficiente para lidarmos com uma situação dinâmica cujo sistema principal corresponde a hamiltonianas de espectro contínuo limitados inferiormente e que se estendem até ∞ . Neste caso, os vetores de estado são dados em termos de funções de quadrado integrável $\phi(\eta) \equiv \langle \eta|\phi\rangle$ no intervalo $0 \leq \eta < \infty$, e eles evoluem de acordo com o operador evolução unitário $U(t) \equiv e^{-iHt}$ que está definido para todas as funções de quadrado integrável $\phi(\eta)$. A hamiltoniana é um operador auto-adjunto gerador do grupo de tais transformações unitárias cujo domínio é um conjunto D de funções $\psi_D(\eta) \in D$ tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-iHt}}{it} \psi_D$$

existe [39] e que correspondem a funções cujo segundo momento é finito

$$\psi_D \in D \rightarrow \int_0^\infty d\eta |\psi_D(\eta)|^2 \eta^2 < \infty$$

A probabilidade do sistema ser encontrado no mesmo estado não estacionário e normalizado $\phi(\eta)$ preparado em $t = 0$ é dado por

$$P(t) = \left| \int_0^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 e^{-i\eta t} \right|^2, \quad P(0) = 1 \quad (6.3)$$

Esta probabilidade envolve basicamente a transformada de Fourier da função distribuição da energia $|\phi(\eta)|^2$ do estado inicial. Chiu, Sudarshan e Misra mostraram que uma das condições para que o efeito Zeno exista, além do espectro ser limitado inferiormente, $P(t)$ deve desviar do comportamento exponencial em tempos curtos também, e isso significa uma dependência não linear e a quantidade que mede este desvio é a taxa de variação da probabilidade $\dot{P}(t)$ que deve ser igual a zero para tempos curtos e isto só acontece quando a energia média é finita [93]

$$\int_0^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 \eta < \infty \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (6.4)$$

Existe uma versão do Efeito Zeno, onde o Postulado da Redução do pacote de onda desempenha um papel fundamental. Considere $\rho(0)$ a matriz densidade inicial que descreve o sistema instável.

A evolução temporal desta matriz densidade é dada em termos do operador unitário $U(t)$, com a energia limitada inferiormente. Se utilizarmos o Postulado da Redução, a evolução temporal desta matriz densidade pode ser escrita como

$$\rho(t) = QU(t)\rho(0)U^\dagger(t)Q, \quad (6.5)$$

onde Q é o operador projeção pertencente ao subespaço do estado instável que informa se o estado permanece no estado instável, após uma medida ideal efetuada num certo tempo t . É importante lembrar que a normalização está embutida no Postulado da Redução, o que significa que o estado resultante da aplicação do Postulado já está normalizado $\text{Tr}\rho(t) = 1$. Então, a probabilidade de encontrar o sistema no estado instável é

$$P(t) = \text{Tr}[U(t)\rho(0)U^\dagger(t)Q]. \quad (6.6)$$

Uma medida, representada por Q , é efetuada após a preparação do estado em $\rho(0)$. Então, esta medida projeta este estado no estado instável. Se uma série de observações seja feita nos tempos $t/N, 2t/N, \dots, (N-1)t/N, t$, então o estado resultante será

$$\rho^N(t) = V_N(t)\rho(0)V_N^\dagger(t), \quad (6.7)$$

com

$$V_N(t) \equiv [QU(t/N)Q]^N$$

e

$$P^N(t) = \text{Tr}[V_N(t)\rho(0)V_N^\dagger(t)], \quad (6.8)$$

que no limite $N \rightarrow \infty$ (observação contínua) se reduz a

$$P(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} P^N(t) = 1 \quad (6.9)$$

No caso de processos de decaimento exponencial, a coisa é bem diferente, $P'(t)$ tem um decaimento exponencial $P'(t) = e^{-\Gamma t}$, que não é influenciado pelo limite de medidas contínuas $N \rightarrow \infty$, isto é,

$$P'(t) = (e^{-\Gamma(t/N)})^N = e^{-\Gamma t},$$

que dentro do formalismo do Efeito Zeno Quântico visto como um processo dinâmico, $P'(t)$ apresenta uma dependência linear em t para tempos curtos, isto é, $P'(t) \approx 1 - \Gamma t$, enquanto que a taxa de variação desta probabilidade é não nula, isto é, $\dot{P}'(t) = -\Gamma$, contradizendo a eq.(6.4), e assim, este sistema *nunca* apresentará Efeito Zeno.

Seguindo a mesma linha desenvolvida por Chiu, Sudarshan e Misra [93] e Pascazio e colaboradores [100], isto é, nos baseando sempre em (6.4), iremos determinar qual a física que esta por trás desta inibição da evolução natural de um sistema quântico.

6.3 Decoerência e Efeito Zeno

Nesta seção iremos investigar qual é a física que ocasiona o Efeito Zeno, no sentido de que, a taxa de variação da probabilidade vá a zero, resultando numa dependência não linear para a probabilidade em tempos curtos.

Investigaremos a evolução temporal de um estado não estacionário $\psi(\eta)$, próximo do estado de referência $\phi(\eta)$ e para isso, calcularemos a uma quantidade análoga a $P(t)$

$$P_\psi(t) \equiv \left| \int_0^\infty d\eta \phi^*(\eta) e^{-i\eta t} \psi(\eta) \right|^2, \quad (6.10)$$

o que nos ajudará a entender o que acontece durante a evolução temporal natural de um sistema quântico e a partir dela, determinar sob quais condições ela poderá ser inibida. O estado $\psi(\eta)$ está normalizado e como está próximo do estado de referência $\phi(\eta)$, pode ser escrito como

$$\psi(\eta) = \alpha_0 \phi(\eta) + \beta_0 \phi_\perp(\eta), \quad (6.11)$$

tal que $|\beta_0|^2 = 1 - |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \ll 1$ e $|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1$ e portanto, sendo decomposto no vetor $\phi(\eta)$ e no vetor ortogonal a ele $\phi_\perp(\eta)$ também normalizado, definido como,

$$\phi_\perp(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\langle \psi | \phi \rangle|^2}} (\psi(\eta) - \phi(\eta) \langle \psi | \phi \rangle). \quad (6.12)$$

Então, a quantidade $P_\psi(t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P_\psi(t) &= |\alpha_0|^2 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 e^{-i\eta t} + |\beta_0|^2 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta \phi^*(\eta) e^{-i\eta t} \phi_\perp(\eta) \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta' \phi(\eta') e^{-i\eta' t} \phi_\perp(\eta') \\ &= |\alpha_0|^2 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 e^{-i\eta t} + |\beta_0|^2 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta \phi^*(\eta) e^{-i\eta t} \phi_\perp(\eta) \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta' \phi(\eta') e^{-i\eta' t} \phi_\perp(\eta') \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [\alpha_0^* \beta_0 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 e^{-i\eta t} \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta' \phi^*(\eta') e^{-i\eta' t} \phi_\perp(\eta')], \end{aligned} \quad (6.13)$$

com $P_\psi(0) = |\alpha_0|^2$ e como estamos interessados no comportamento de $P_\psi(t)$ em torno de $t = 0$, calculamos a taxa de variação da probabilidade de modo a verificar ou não, a condição dada por (6.4), onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dP_\psi(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= |\alpha_0|^2 \frac{dP(t)}{dt} \Big|_{t=0} + |\beta_0|^2 \frac{d}{dt} \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta \phi^*(\eta) e^{-i\eta t} \phi_\perp(\eta) \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta' \phi(\eta') e^{-i\eta' t} \phi_\perp(\eta') \Big|_{t=0} \\ &\quad + 2 \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [\alpha_0^* \beta_0 \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta |\phi(\eta)|^2 e^{-i\eta t} \int_{\eta_0=0}^\infty d\eta' \phi^*(\eta') e^{-i\eta' t} \phi_\perp(\eta') \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

O primeiro termo descreve a taxa de variação do vetor $\phi(\eta)$ com relação a condição inicial, no caso, $\phi(\eta)$ e ele irá se anular, já que a energia média deste estado é finita, conforme discutido na seção 5.2, veja a eq.(6.3) e (6.4). O segundo termo pode ser calculado e tem a seguinte forma

$$i|\beta_0|^2 \left[\int_{\eta=0}^{\infty} d\eta \int_{\eta=0}^{\infty} d\eta' \phi^*(\eta) \phi_{\perp}(\eta) e^{i\eta t} (\eta - \eta') \phi(\eta') \phi_{\perp}^*(\eta') e^{-i\eta' t} \right],$$

onde $\phi(\eta)$ e $\phi_{\perp}(\eta)$ são ortogonais. Este termo irá a zero quando $\int_{\eta=0}^{\infty} d\eta \phi^*(\eta) \phi_{\perp}(\eta) \eta < \infty$ e isso pode ser mostrado com a ajuda da desigualdade de Schwarz, pois os estados $\phi(\eta)$, $\phi_{\perp}(\eta)$ e $\psi(\eta)$ têm energia média finita. Desta forma, a única contribuição não nula em $\dot{P}(t)$ vem do último termo, já que os estados $\phi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ têm energias médias finitas. Este último termo envolve a coerência entre as componentes perpendicular e paralela do estado $\psi(\eta)$ com relação a $\phi(\eta)$, então, a taxa de variação de $P_{\psi}(t)$ é igual a taxa de variação deste último termo, pois os demais são nulos como vimos

$$\frac{dP(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 2\text{Im}[\alpha_0^* \beta_0 \int_{\eta=0}^{\infty} d\eta \phi^*(\eta) \eta \phi_{\perp}(\eta)] \quad (6.15)$$

e portanto, mostramos que a evolução de um estado não estacionário, cuja a energia média é finita, desenvolve uma taxa de variação não nula para tempos curtos, assim ele adquire uma componente perpendicular ao estado inicial e esta taxa envolve, como mostra a eq. (6.15), a coerência entre as componentes paralela e perpendicular. Uma maneira de matar esta parte não nula da taxa consiste em destruir esta coerência e isso pode ser feito através da interação entre os graus de liberdade externo e do sistema em questão. Uma vez feito isso, o Efeito Zeno pode ser observado. A seguir, daremos um exemplo, onde este efeito é visto claramente.

6.3.1 Exemplos: Decoerência e o Efeito Zeno

Considere graus de liberdade externos representados como sendo um sistema de dois níveis estacionários, pelos autovetores $|\pm\rangle$ da matriz de Pauli σ_z . A interação entre o sistema de dois níveis e o sistema principal será do tipo impulsiva e ocorrerá num tempo $t = \tau$. Então, uma possível hamiltoniana associada a esta interação, que pode funcionar como uma medida, pode ser escrita como

$$H_{int} = g\delta(t - \tau)[\Pi_{\phi} \otimes 1_S + \Pi_{\perp} \otimes \sigma_x] \quad (6.16)$$

onde $\Pi_{\phi} \equiv |\phi\rangle\langle\phi|$, $\Pi_{\perp} \equiv 1 - \Pi_{\phi}$, 1_S e σ_x são matrizes 2×2 , respectivamente, a matriz identidade e a matriz de Pauli usual σ_x e g é a constante de acoplamento adimensional ($\hbar \equiv 1$). A evolução do “sistema principal + sistema de dois níveis” num intervalo de tempo $\tau - \epsilon$ e $\tau + \epsilon$, com ϵ infinitesimal será governado pelo seguinte operador evolução

$$U_{int}(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) = e^{-i\Pi_{\phi}} e^{-i\Pi_{\perp}\sigma_x} = [1 + (e^{-ig} - 1)\Pi_{\phi}][1 + (\cos(g) - 1)\Pi_{\perp} - i\text{sen}(g)\Pi_{\sigma_x}]$$

que se reduz a

$$U_{int}(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) = -i(\Pi_\phi + \Pi_\perp \sigma_x)$$

quando $g = \pi/2$. Então, se o sistema de dois níveis estiver no estado $|-\rangle$ inicialmente, a evolução do sistema composto durante este intervalo de tempo, será

$$[\alpha_0 \phi(\eta) + \beta_0 \phi_\perp(\eta)] \otimes |-\rangle \rightarrow -i[\alpha_0 \phi(\eta) \otimes |-\rangle + \beta_0 \phi_\perp(\eta) \otimes |+\rangle], \quad (6.17)$$

isto significa que as componentes paralela e perpendicular do sistema principal correspondente ao estado de referência inicial $\phi(\eta)$ estão correlacionadas aos estados ortogonais do sistema de dois níveis e nesta condição, estão impossibilitados de gerar uma taxa de variação não nula, levando portanto, a inibição da evolução natural de um sistema quântico. Devemos ressaltar que a primeira etapa do experimento descrito no capítulo anterior, reproduz exatamente o que foi descrito acima (vide (6.17)), após a passagem do átomo, que já está correlacionado com o campo dentro da cavidade supercondutora, pela segunda Zona de Ramsey.

A seguir, vamos investigar outro exemplo onde observamos também que a decoerência, leva ao aparecimento do Efeito Zeno. Este exemplo encaixa-se na mesma linha do trabalho desenvolvido por Pascazio e colaboradores e do experimento realizado por Itano e colaboradores [98], baseado por sua vez na proposta experimental desenvolvida por Cook [97]. No entanto, como já dissemos Itano e colaboradores responsabilizam o Postulado da Redução como o responsável pelo Efeito Zeno que eles lá observam, enquanto que Ballentine [27], H. Fearn e W. E. Lamb [101], Pascazio e Namiki [100], entre outros [21] seguem a linha da decoerência para explicar a observação de tal fenômeno.

Considere o sistema de dois níveis, como o sistema que será medido, descrito pela hamiltoniana abaixo

$$H_0 = |+\rangle \frac{\epsilon}{2} \langle +| + |-\rangle \frac{-\epsilon}{2} \langle -|$$

e um “medidor” que consiste de um sistema de *três* níveis descrito, também quando isolado, pela hamiltoniana

$$H_m = \sum_{j=-1}^{+1} |\Phi_j\rangle j \delta \langle \Phi_j|.$$

onde os autovalores associados aos autovetores $|\pm\rangle$ de H_0 são portanto $\pm\epsilon/2$, enquanto os autovalores associados aos três autovetores $|\Phi_j\rangle$, $j = -1, 0, +1$ de H_m são respectivamente $-\delta$, 0 e $+\delta$. Esses dois sistemas podem ser acoplados através de uma hamiltoniana adicional H_{int} dependente do tempo e impulsiva, cuja ação se limita apenas ao instante em que é feita a medida $t = t_0$. Esta hamiltoniana de interação é escolhida de modo a efetuar uma medida que transforme um estado, que antes da medida era do tipo

$$|\phi\rangle \otimes |\Phi_0\rangle = (c_+|\phi_+\rangle + c_-|\phi_-\rangle) \otimes |\Phi_0\rangle \quad (6.18)$$

em um estado do tipo

$$c_+|\phi_+\rangle \otimes |\Phi_{+1}\rangle + c_-|\phi_-\rangle \otimes |\Phi_{-1}\rangle. \quad (6.19)$$

após a medida, com

$$|\phi_{\pm}\rangle \equiv \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Desta forma, a hamiltoniana que descreve a interação que acarretará a mudança acima tem a forma

$$\begin{aligned} H_{int}(t) &= \frac{\pi}{2} \hbar \delta(t - t_0) (|\Phi_{+1}\rangle \Pi_+ \langle \Phi_0| + |\Phi_{-1}\rangle \Pi_- \langle \Phi_0| + \text{hermiteano conjugado}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} \hbar \delta(t - t_0) \Gamma, \end{aligned}$$

onde Π_{\pm} são os operadores de projeção $\Pi_{\pm} = |\phi_{\pm}\rangle \langle \phi_{\pm}|$.

A seguir, calculamos a evolução temporal do sistema total, descrita pela hamiltoniana completa $H = H_0 + H_m + H_{int}(t)$, a partir do estado inicial

$$|\Psi_{0,m}(t=0)\rangle = |\phi_+\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \quad (6.20)$$

até um tempo $T > t_0$. A evolução temporal deve ser dividida em duas etapas. A primeira delas vai de $t = 0$ até $t = t_0 - \eta$, onde apenas $H_0 + H_m$ governam a evolução do sistema, já que $H_{int}(t) = 0$ neste intervalo de tempo. A segunda atua no intervalo de tempo $t = t_0 - \eta$ até $t = t_0 + \eta$, onde consideramos apenas a atuação de H_{int} e como ela é do tipo impulsiva, podemos desprezar os efeitos de H_0 e H_m . Então, o operador evolução que atua no intervalo $t = 0$ até $t = t_0 - \eta$ tem a forma

$$U(0, t_0 - \eta) = e^{-i(H_0 + H_m)(t_0 - \eta)}, \quad (6.21)$$

enquanto que o operador evolução que atua no intervalo $t = t_0 - \eta$ e $t = t_0 + \eta$ é dado por

$$U_{int}(t_0 - \eta, t_0 + \eta) = e^{-i \frac{\pi}{2} \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} dt' \delta(t' - t_0) \Gamma} = (\hat{1} - \Gamma^2) + \Gamma^2 \cos(g) - i\Gamma \text{sen}(g), \quad (6.22)$$

onde escolhemos convenientemente $g = \pi/2$ que anula o termo proporcional a função cosseno, em outras palavras, o termo proporcional a Γ^2 . Qualquer outro valor de g implicaria na existência de uma componente proporcional a $|\Phi_0\rangle$ no estado posterior à interação, o que poderia ser interpretado

como um processo de medida cuja eficiência é menor do que 100%. No caso onde $g = \pi/2$, o operador evolução (6.22), se reduz a

$$U_{int}(t_0 - \eta, t_0 + \eta) = -i\Gamma \quad (6.23)$$

Desta forma, a evolução temporal do estado inicial (6.20), durante o intervalo $t = 0$ até $t = t_0 - \eta$, tem como estado resultante

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} |\Psi_{0,m}(t_0 - \eta)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + H_m)t_0} |\phi_+\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \\ &= \left(\cos \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_+\rangle - i \sin \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_-\rangle \right) \otimes |\Phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (6.24)$$

cuja forma é idêntica a do estado descrito pela eq. (6.18). Agora, vamos calcular a segunda etapa da evolução temporal, onde somente H_{int} atua, assim, devemos aplicar o operador dado pela eq. (6.23) no estado resultante (6.24), fornecendo o resultado abaixo

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |\Psi_{0,m}(t_0 + \eta)\rangle = -i \left(\cos \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_+\rangle \otimes |\Phi_{+1}\rangle - i \sin \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_-\rangle \otimes |\Phi_{-1}\rangle \right), \quad (6.25)$$

cuja forma é idêntica a do estado descrito pela eq. (6.19). A evolução subsequente, de $t = t_0 + \eta$ até $T > t_0$, é novamente determinada por $H_0 + H_m$ apenas, e portanto, operador evolução que atua no estado (6.25) durante este intervalo de tempo é (6.21)

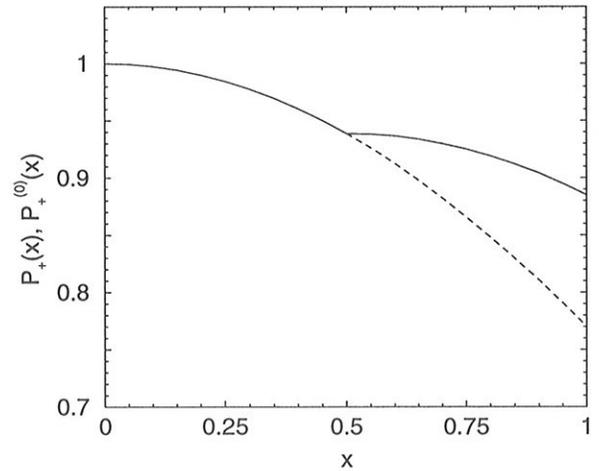
$$\begin{aligned} |\Psi_{0,m}(T)\rangle &= -i e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + H_m)(T - t_0)} \left(\cos \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_+\rangle \otimes |\Phi_{+1}\rangle - i \sin \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} |\phi_-\rangle \otimes |\Phi_{-1}\rangle \right) = \\ &= -i \cos \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} \left(\cos \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} |\phi_+\rangle - i \sin \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} |\phi_-\rangle \right) \otimes |\Phi_{+1}\rangle e^{-i\delta(T - t_0)} - \\ &\quad - \sin \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} \left(-i \sin \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} |\phi_+\rangle + \cos \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} |\phi_-\rangle \right) \otimes |\Phi_{-1}\rangle e^{i\delta(T - t_0)}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

A seguir calculamos a probabilidade $P_+(T)$ de que o sistema medido esteja no estado $|\phi_+\rangle$ no tempo T (para $T > t_0$, e independentemente do estado do “medidor”) como

$$\begin{aligned} P_+(T) &= \langle \Psi_{0,m}(T) | (|\phi_+\rangle\langle\phi_+|) \otimes \hat{1}_m | \Psi_{0,m}(T) \rangle = \\ &= \cos^2 \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} \cos^2 \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} + \sin^2 \frac{\epsilon t_0}{2\hbar} \sin^2 \frac{\epsilon(T - t_0)}{2\hbar} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\epsilon t_0}{\hbar} \cos \frac{\epsilon(T - t_0)}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

e para compararmos o resultado obtido acima, vamos calcular a mesma probabilidade para o caso onde a interação representada por H_{int} não tivesse ocorrido, então o estado do sistema composto no tempo T (e para qualquer $T > 0$) seria dado simplesmente por

Figura 6.1: $P_+(x)$ (linha cheia, $x > 0.5$) e $P_+^{(0)}(x)$ (linha cheia, $x < 0.5$ e tracejada, $x > 0.5$), com $x = \epsilon T/\hbar$. A evolução com a intervenção de $H'(t)$ em $x = 0.5$ corresponde à linha cheia, de $x = 0$ a $x = 1$.



$$|\Psi_{0,m}^{(0)}\rangle = \left(\cos \frac{\epsilon T}{2\hbar} |\phi_+\rangle - 2i \sin \frac{\epsilon T}{2\hbar} |\phi_-\rangle \right) \otimes |\Phi_0\rangle$$

e assim a probabilidade correspondente a $P_+(T)$ seria

$$P_+^{(0)}(T) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\epsilon T}{\hbar} \right). \quad (6.28)$$

A comparação entre as expressões (6.27) e (6.28) mostra que a presença da interação inibe a evolução temporal livre de $P_+^{(0)}(T)$, conforme mostra a figura 6.1 e esta inibição da evolução livre de $P_+^{(0)}(T)$ pode ser vista como Efeito Zeno.

O próximo passo consiste em investigar o mecanismo responsável por esta inibição, causada pela presença da interação impulsiva e para isso, devemos trabalhar com a taxa de variação da probabilidade, seguindo os passos discutidos nesta seção. A taxa de variação dessa probabilidade com o tempo é dada em geral por

$$\frac{dP_+}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \Psi_{0,m} | [H(t), |\phi_+\rangle \langle \phi_+| \otimes \hat{I}_m] | \Psi_{0,m} \rangle$$

com $H(t) = H_0 + H_m + H_{int}(t)$. Para qualquer $t \neq t_0$ o termo impulsivo de interação é nulo e a expressão se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dt} &= \frac{i\epsilon}{2\hbar} \langle \Psi_{0,m} | (|\phi_-\rangle \langle \phi_+| - |\phi_+\rangle \langle \phi_-|) \otimes \hat{I}_m | \Psi_{0,m} \rangle = \\ &= -\frac{\epsilon}{2\hbar} \text{Im} \langle \Psi_{0,m} | (|\phi_-\rangle \langle \phi_+|) \otimes \hat{I}_m | \Psi_{0,m} \rangle, \quad t \neq t_0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

que quando o estado é do tipo (6.18), o que quer dizer, um estado que é o produto de uma combinação linear de $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$ com um estado normalizado qualquer do sistema de três níveis, que no caso do

exemplo se reduz a (6.25). Desta forma, a taxa de variação da probabilidade se reduz simplesmente a

$$\text{estado (6.18)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP_+}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\hbar} \text{Im } c_-^* c_+,$$

que se anula para $t = 0$ (pois então $c_- = 0$) e cresce para $0 < t < t_0$, à medida que c_- cresce devido à evolução temporal do estado inicial e estes resultados se encaixam totalmente dentro do formalismo desenvolvido para $\Psi(\eta)$ próximo do estado de referência $\Phi(\eta)$. É importante aqui perceber que a taxa de variação da probabilidade envolve um “termo cruzado” dos coeficientes de expansão do estado do sistema de dois níveis na base $\{|\phi_{\pm}\rangle\}$, que é análogo ao termo descrito por (6.15). Por outro lado, para um vetor de estado do tipo (6.19), no qual as componentes $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$ se correlacionam com estados do sistema de três níveis que são *ortogonais entre si*, os termos cruzados necessários para levar a um valor não nulo da taxa de variação da probabilidade são excluídos devido ao fato de que $\langle \Phi_{\pm 1} | \hat{I}_m | \Phi_{\mp 1} \rangle = 0$. Desse modo

$$\text{estado (6.19)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP_+}{dt} = 0.$$

Concluimos, portanto, que a presença da interação leva ao anulamento da taxa de variação da probabilidade através da destruição dos termos cruzados necessários para que seu valor seja diferente de zero. O mecanismo responsável por esse anulamento é justamente o estabelecimento de correlações entre as componentes $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$ do estado (6.18) com estados do sistema medidor que são ortogonais entre si. O processo de decoerência sofrido pelo sistema de dois níveis através da interação $H_{int}(t)$, e pode ser, portanto, apontado como o ingrediente básico que leva ao comportamento de $P_+(T)$ mostrado na figura 6.1. Este resultado concorda com a discussão feita logo abaixo da expressão (6.15) e sob o ponto de vista das condições de Chiu, Misra e Sudarshan, este resultado para $P_+(T)$ é visto como Efeito Zeno, já que a taxa de variação da probabilidade se anula quando ocorre a interação.

O próximo passo será discutir o Efeito Zeno do ponto de vista do Postulado da Redução. De fato, utilizando o Postulado, o estado do sistema após uma medida cujo resultado indica que o estado é $|\phi_+\rangle$ será novamente $|\phi_+\rangle$, e como a probabilidade para tempos curtos, após a preparação pode ser expandida como, $1 - \left(\frac{\delta t \epsilon}{2\hbar}\right)^2$, a probabilidade de obter este mesmo resultado ao longo de uma série de medidas contínuas separadas por intervalos de tempo do tipo δt será

$$P_+^{(N)} = \left[1 - \left(\frac{\delta t}{\tau}\right)^2 \right]^N = 1 - N \left(\frac{\delta t}{\tau}\right)^2 + \frac{N(N-1)}{2} \left(\frac{\delta t}{\tau}\right)^4 - \dots \quad (6.30)$$

Se a seqüência de N medidas é efetuada em um tempo total T , $\delta t = T/N$ e então

$$P_+^{(N)} = 1 - N \frac{T^2}{N^2 \tau^2} + \dots = 1 - \frac{1}{N} \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 + \dots$$

o que, mantendo T fixo e tomando o limite $N \rightarrow \infty$ (que corresponde à “observação contínua”), leva a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_+^{(N)} = 1,$$

isto é, o estado do sistema permanece igual ao estado inicial com probabilidade 1. É claro que o Postulado da Redução desempenha um papel central nessa formulação, pois é usado de forma essencial para escrever a relação (6.30).

A seguir, extrapolamos o cálculo da probabilidade, que leva ao resultado da figura 6.1 para o caso correspondente a uma série de N interações H' agindo em tempos $n \delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$ e envolvendo seqüencialmente N sistemas *independentes* de três níveis. O resultado desse cálculo é

$$P_+(N \delta t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos^N \frac{\epsilon \delta t}{\hbar} \right) \quad (6.31)$$

que se reduz também a 1 nas mesmas condições que (6.30).

É preciso comentar ainda o fato de que as probabilidades (6.30) e (6.31) levam a resultados diferentes no caso de uma sucessão *finita* de N medidas ou interações, separadas por intervalos de tempo curtos mas também finitos δt . De fato, utilizando a evolução temporal definida para o modelo, a equação (6.30) aparece sob a forma

$$P_+^{(N)} = \cos^{2N} \frac{\epsilon \delta t}{2\hbar} \quad (6.32)$$

que difere de (6.31) para $N \geq 2$. Essa diferença se deve ao caráter inclusivo da probabilidade dada por (6.31), em que são computadas também as probabilidades associadas às componentes $|\phi_+\rangle$ resultantes da evolução unitária da componente $|\phi_-\rangle$ presente imediatamente após a interação precedente, e que são excluídas pelo argumento que envolve o postulado da redução. Isso faz com que se tenha $P_+(N \delta t) > P_+^{(N)}$ para $N \geq 2$ e, quando $N \rightarrow \infty$ (com δt fixo), $P_+(N \delta t) \rightarrow 1/2$ enquanto $P_+^{(N)} \rightarrow 0$. A partir de (6.31) e de (6.32) pode-se verificar também que o efeito de uma medida ou interação adicional sobre as probabilidades, após uma seqüência de N medidas ou interações anteriores, é o de alterar essas probabilidades de acordo com as relações

$$\frac{P_+[(N+1)\delta t]}{P_+(N\delta t)} = \cos^2 \frac{\epsilon \delta t}{2\hbar} + \frac{1 - P_+(N\delta t)}{P_+(N\delta t)} \sin^2 \frac{\epsilon \delta t}{2\hbar} > \frac{P_+^{(N+1)}}{P_+^{(N)}} = \cos^2 \frac{\epsilon \delta t}{2\hbar}.$$

A vantagem de olharmos o Efeito Zeno do ponto de vista de uma processo dinâmico é que não nos envolvemos em questões filosóficas da Mecânica Quântica, o que acaba ocorrendo no caso do Postulado da Redução. Baseado no que mostramos aqui, fica claro o papel fundamental que a decoerência tem no processo de inibição da evolução natural do sistema. Assim, podemos ver o Efeito Zeno como uma seqüência direta deste processo dinâmico quântico. Cabe aqui lembrar o que Pascazio e Namiki [100] já haviam notado: o Postulado da Redução não é um pré-requisito

fundamental para a ocorrência do Efeito Zeno. Além disso, o Postulado fornece um resultado diferente do caso onde há interação quando N observações finitas são efetuadas, pois na presença da interação a outra componente, resultante da evolução livre é levada em conta, o que não acontece com o uso do Postulado.

Capítulo 7

Conclusão

No presente trabalho, investigamos aspectos da Teoria Quântica de sistemas abertos dando ênfase ao fenômeno da decoerência. Em particular, discutimos as conseqüências relativas a presença desta decoerência em sistemas de dois níveis tunelantes, em sistemas nos quais observa-se Efeito Zeno e por último em um oscilador harmônico acoplado linearmente a outros osciladores não-interagentes, no sentido de reduzir os efeitos dela sobre este sistema, onde os resultados obtidos nos auxiliaram na re-interpretação do experimento proposto por L. Davidovich e colaboradores, que recentemente foi montado no laboratório Kastler Brossel [80, 30], do ponto de vista do problema proposto por Deutsch.

Nos sistemas tunelantes, obtivemos a solução exata para a matriz densidade reduzida do sistema de dois níveis acoplado a um outro sistema cujo espectro de energia é um contínuo, onde investigamos diversos regimes de acoplamento para um único tempo de relaxação e também para dois tempos de relaxação diferentes e iguais. No caso do espectro ser puramente contínuo, observamos o aparecimento de duas escalas de tempo. A primeira delas está relacionada ao período de evolução unitária τ_u , enquanto que a outra está relacionada a dissipação τ_d , caracterizando um regime onde apenas um único tempo de relaxação está envolvido. No regime de acoplamento fraco $\tau_d \gg \tau_u$, a probabilidade de tunelamento é dominada por um comportamento oscilatório e o sistema perde apenas um pouco de sua pureza, devido ao domínio da contribuição unitária, conforme mostram as taxas de tunelamento unitária e dissipativa e a taxa do defeito de idempotência. No regime de acoplamento forte $\tau_d \ll \tau_u$, a taxa de tunelamento é dominada pela componente dissipativa, levando a uma saturação $P(t) = 1/2$ para tempos $t < \tau_d$ e o defeito de idempotência mostra que o sistema perde pureza rapidamente, caracterizando um regime de forte entrelaçamento entre o sistema de dois níveis e o outro sistema cujo espectro de energia é contínuo. No caso onde existem dois tempos de relaxação envolvidos, observamos o aparecimento do fenômeno de interferência dos coeficientes do contínuo, ao qual chamamos de recorrelação e como conseqüência, ocorre o estabelecimento de oscilações estacionárias que sobrevivem após um tempo transiente caracterizado como $\sup(\frac{\hbar}{\Gamma}, \frac{\hbar}{\Gamma'})$. Estas oscilações estacionárias são encontradas tanto na probabilidade de tunelamento como no defeito de idempotência. No regime onde estes dois tempos de relaxação são iguais, a probabilidade de tunelamento adquire amplitude máxima e o estado tunela com freqüência igual a diferença de energia entre os dubletos, no caso ϵ . Já o defeito de idempotência apresenta um resultado bem diferente do esperado: o estado tunelante não é puro e quanto mais forte for o acoplamento se comparado com a diferença de energia dos dubletos, mais puro será o estado tunelante. Por outro lado, no caso

onde o espectro é puramente discreto e os dois tempos de relaxação são iguais, o estado tunela com uma frequência que é aproximadamente a diferença de energia dos dubletos e é um estado puro, e se comparado com o caso puramente contínuo, ocorre um retardamento no tunelamento. No entanto, o estado que tunela não chega a congelar, como ocorre no caso do modelo spin-bóson.

No caso dos osciladores acoplados linearmente e no sistema de dois níveis tunelante, a equação mestra reproduz adequadamente o resultado exato, quando existe apenas um único tempo de relaxação envolvido e o espectro pode ser aproximado como uma Breit-Wigner. Seria interessante investigarmos se este fato é apenas uma coincidência ou se podemos extrair da dedução da equação mestra ingredientes que permitam afirmar que este é um comportamento geral destas equações. Observamos também que o tamanho do sistema que faz o papel de reservatório térmico, ser finito ou não, é decisivo para o comportamento da decoerência ser do tipo linear ou quadrático no tempo para regime de tempo curto. Este resultado permite que o problema de Deutsch seja implementado experimentalmente nas cavidades de alto Q , através de uma limitação da participação de alguns modos da cavidade no experimento, reduzindo assim a decoerência que é tão prejudicial na implementação de um algoritmo via computação quântica.

Mostramos também que a decoerência tem um papel fundamental na inibição da evolução natural de um sistema quântico quando este está interagindo com um outro sistema, seguindo o formalismo geral desenvolvido por Pascazio e Namiki [100] aliado às condições desenvolvidas por Misra, Sudarshan, Chiu [93] e Khalfin [92]. Assim, podemos justificar o aparecimento do Efeito Zeno sem falar no Postulado da Redução, pois como enfatizado por Pascazio e Namiki, o Postulado não é pre-requisito para a observação do Efeito Zeno.

Apêndice A

Taxa de Tunelamento Dissipativa e Unitária: Caso Geral

Neste apêndice, estendemos o formalismo utilizado no capítulo 3 para tratar matrizes densidade de mais de duas dimensões, onde mostramos como devem ficar as taxas de tunelamento unitária e dissipativa.

A matriz densidade reduzida geral pode ser sempre escrita em termos dos orbitais naturais $|n(t)\rangle$ e dos autovalores associados a eles $p_n(t)$, conforme já mostramos no capítulo 1

$$\rho(t) = \sum_n |n(t)\rangle p_n(t) \langle n(t)|.$$

A probabilidade que este estado, em questão, seja encontrado num dado subespaço definido em termos do projetor,

$$\mathcal{P} \equiv \sum_k |b_k\rangle \langle b_k|,$$

onde $|b_k\rangle$ constituem uma base ortonormal, é dada por

$$P(t) = \text{Tr} [\rho(t)\mathcal{P}].$$

Os vetores $|b_k\rangle$ podem ser expandidos nos orbitais naturais de $\rho(t)$ como $|b_k\rangle = \sum_n \beta_n^{(k)}(t) |n(t)\rangle$, tal que $P(t)$ pode ser escrito como

$$P(t) = \sum_n p_n(t) \sum_k |\beta_n^{(k)}|^2.$$

As contribuições dissipativas e unitárias são obtidas através das derivadas com relação ao tempo proporcionais a \dot{p}_n e $\dot{\beta}_n^{(k)}$, respectivamente

$$\frac{dP(t)}{dt} = \sum_n \frac{dp_n(t)}{dt} \sum_k |\beta_n^{(k)}|^2 + \sum_n p_n(t) \sum_k \frac{d|\beta_n^{(k)}|^2}{dt} \equiv R_d(t) + R_u(t).$$

Apêndice B

Densidade reduzida do sistema de dois níveis no regime de acoplamento constante e espectro limitado para o caso geral

Neste apêndice mostraremos a solução exata completa para a matriz densidade reduzida do sistema para o caso do espectro ser limitado, ou seja, $\eta_0 \leq \eta \leq \bar{\eta}$, ficando clara as contribuições que vem do contínuo e do discreto. Na seção 3.5 do capítulo 3 estudamos um caso particular desse espectro limitado, cuja a faixa abrangente era $0 \leq \eta \leq \infty$. Neste limite observamos que a contribuição dominante vinha da parte discreta do espectro.

A matriz densidade reduzida para um dado tempo t foi obtida seguindo o método discutido ao longo da seção 3.4 do capítulo 3 sujeita a mesma condição inicial, isto é,

$$\rho(0) = \frac{1}{2} [(|+0_b\rangle + |-0_b\rangle)(\langle+0_b| + \langle-0_b|)],$$

Assim, esta matriz densidade reduzida para um dado tempo t é dada por

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{++}(t) & \rho_{+-}(t) \\ \rho_{+-}^*(t) & 1 - \rho_{++}(t) \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \rho_{++}(t) = \frac{1}{2} & \left(1 + \left| |a_0^{(E_d)}|^2 e^{-iE_d t} + |a_0^{(\bar{E}_d)}|^2 e^{-i\bar{E}_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2 \right. \\ & \left. - \left| |b_0^{(E'_d)}|^2 e^{-iE'_d t} + |b_0^{(\bar{E}'_d)}|^2 e^{-i\bar{E}'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |b_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_{+-}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left(|a_0^{(E_d)}|^2 e^{-iE_d t} + |a_0^{(\bar{E}_d)}|^2 e^{-iE_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE |a_0^{(E)}|^2 e^{-iEt} \right) \right. \\
& \left(|b_0^{(E'_d)}|^2 e^{iE'_d t} + |b_0^{(\bar{E}'_d)}|^2 e^{i\bar{E}'_d t} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' |b_0^{(E')}|^2 e^{iE't} \right) \\
& + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta b_0^{*(E'_d)} a_0^{(E_d)} A^{*(E_d)}(\eta) B^{(E'_d)}(\eta) e^{-i(E'_d - E_d)t} \\
& + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta b_0^{*(\bar{E}'_d)} a_0^{(\bar{E}_d)} A^{*(\bar{E}_d)}(\eta) B^{(\bar{E}'_d)}(\eta) e^{-i(\bar{E}'_d - \bar{E}_d)t} \\
& \left. + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' b_0^{*(E')} a_0^{(E)} e^{-i(E' - E)t} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta B^{(E')}(\eta) A^{*(E)}(\eta) \right\}, \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

onde E_d, \bar{E}_d são as energias do discreto e E é a energia do contínuo, associadas aos estados pertencentes a dinâmica governada por $g(\eta)$. E'_d, \bar{E}'_d são as energias do discreto e E' é a energia do contínuo, associadas aos estados pertencentes a dinâmica governada por $g'(\eta)$. Podemos simplificar um pouco mais as expressões acima, ao substituirmos as soluções para os coeficientes $a_0^{(E_d, \bar{E}_d, E)}$, $A(\eta)^{(E_d, \bar{E}_d, E)}$, $b_0^{(E'_d, \bar{E}'_d, E')}$ e $B(\eta)^{(E'_d, \bar{E}'_d, E')}$, obtidas a partir do método utilizado na seção 3.4. As soluções abaixo são obtidas a partir de energias que dependem da parte discreta do espectro para a dinâmica envolvendo $g(\eta)$

$$|a_0^{(E_i)}|^2 = \left(1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{(E_i - \eta)^2} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad A^{(E_i)}(\eta) = \frac{g(\eta)}{(E_i - \eta)} a_0^{(E_i)}, \quad (\text{B.3})$$

com $E_i = E_d, \bar{E}_d$. A seguir mostramos a solução para estes mesmos coeficientes no caso da energia pertencer a parte contínua do espectro

$$|a_0^{(E)}|^2 = \frac{|g(E)|^2}{[E - \epsilon - e_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g(E)|^4} \quad \text{e} \quad A^{(E)}(\eta) = \left[\frac{P}{(E - \eta)} + Z(E) \delta(E - \eta) \right] g(\eta) a_0^{(E)}. \quad (\text{B.4})$$

onde a correção na frequência $F(E)$ e a solução do contínuo $Z(E)$ são dadas por

$$F(E) = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g(\eta)|^2}{(E - \eta)} \quad \text{e} \quad Z(E) = \frac{E - \epsilon - e_0 - F(E)}{|g(E)|^2}.$$

Expressões análogas a (B.3) e (B.4) são obtidas para a dinâmica envolvendo $g'(\eta)$, isto é,

$$|b_0^{(E'_i)}|^2 = \left(1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'(\eta)|^2}{(E'_i - \eta)^2} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad B^{(E'_i)}(\eta) = \frac{g'(\eta)}{(E'_i - \eta)} a_0^{(E'_i)}, \quad (\text{B.5})$$

com $E_i = E'_d, \bar{E}'_d$ e

$$|b_0^{(E')}|^2 = \frac{|g'(E')|^2}{[E' - e_0 - F(E')]^2 + \pi^2 |g'(E')|^4} \quad \text{e} \quad B^{(E')}(\eta) = \left[\frac{P}{(E - \eta)} + Z(E')\delta(E' - \eta) \right] g'(\eta) a_0^{(E')}. \quad (\text{B.6})$$

com $F(E')$ e $Z(E')$ dadas, respectivamente, por

$$F(E') = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'(\eta)|^2}{(E' - \eta)} \quad \text{e} \quad Z(E') = \frac{E - \epsilon - e_0 - F(E')}{|g'(E')|^2}.$$

Consideramos agora $g(\eta) = g$ e $g'(\eta) = g'$, tornando possível resolvermos algumas integrais que aparecem em (B.1) e (B.2). Então, para este caso de acoplamento constante, obtemos as seguintes expressões para (B.1) e (B.2), respectivamente

$$\rho_{++}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \left| \frac{e^{-iE_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(E_d - \eta)^2}} + \frac{e^{-i\bar{E}_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(\bar{E}_d - \eta)^2}} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \frac{|g(E)|^2 e^{-iEt}}{[E - \epsilon - e_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g(E)|^4} \right|^2 - \left| \frac{e^{-iE'_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(E'_d - \eta)^2}} + \frac{e^{-i\bar{E}'_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(\bar{E}'_d - \eta)^2}} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \frac{|g'(E)|^2 e^{-iEt}}{[E' - e_0 - F(E')]^2 + \pi^2 |g'(E')|^4} \right|^2 \right) \quad (\text{B.7})$$

que se reduz a 1/2 no caso de $g = g'$, como deveria ser e

$$\begin{aligned}
\rho_{+-}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{e^{-iE_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(E_d - \eta)^2}} + \frac{e^{-i\bar{E}_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(\bar{E}_d - \eta)^2}} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \frac{|g|^2 e^{-iEt}}{[E - \epsilon - e_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g|^4} \right) \right. \\
& \left(\frac{e^{iE'_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(E'_d - \eta)^2}} + \frac{e^{i\bar{E}'_d t}}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(\bar{E}'_d - \eta)^2}} + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' \frac{|g'|^2 e^{iE't}}{[E' - e_0 - F(E')]^2 + \pi^2 |g'|^4} \right) \\
& + gg' \left(\frac{1}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(E_d - \eta)^2}} \right) \left(\frac{1}{(1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(E'_d - \eta)^2})} \right) \frac{e^{-i(E'_d - E_d)t}}{(E'_d - E_d)} \ln \left(\frac{(E_d - \bar{\eta})(E'_d - \bar{\eta})}{(E_d - \eta_0)(E'_d - \eta_0)} \right) \\
& + gg' \left(\frac{1}{1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(\bar{E}_d - \eta)^2}} \right) \left(\frac{1}{(1 + \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(\bar{E}'_d - \eta)^2})} \right) \frac{e^{-i(\bar{E}'_d - \bar{E}_d)t}}{(\bar{E}'_d - \bar{E}_d)} \ln \left(\frac{(\bar{E}_d - \bar{\eta})(\bar{E}'_d - \bar{\eta})}{(\bar{E}_d - \eta_0)(\bar{E}'_d - \eta_0)} \right) \\
& + gg' \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} dE' \left(\frac{|g|^2 e^{-iEt}}{[E - \epsilon - e_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g|^4} \right) \left(\frac{|g'|^2 e^{-iE't}}{[E' - e_0 - F(E')]^2 + \pi^2 |g'|^4} \right) \\
& \left. \left[Z(E)Z(E')\delta(E - E') + \frac{P}{(E - E')} \left(\ln \left(\frac{(E - \eta_0)(E' - \eta_0)}{(\bar{\eta} - E)(\bar{\eta} - E')} \right) + \pi^2 \delta(E - E') + Z(E') - Z(E) \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

onde a correção na energia é dada por

$$F(E) = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g|^2}{(E - \eta)} \quad \text{e} \quad F(E') = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta \frac{|g'|^2}{(E' - \eta)}.$$

A solução das equações depende de cálculo numérico, principalmente quando se trata da parte do contínuo. As quantidades $|a_0^{(E)}|^2$ e $|b_0^{(E')}|^2$ não podem mais ser aproximadas por Breit-Wigner como fizemos na seção 3.3, pois várias energias irão contribuir e não poderemos mais desprezar a correção na energia que neste limite de espectro limitado, passa a ser importante.

Apêndice C

Dedução da Equação Mestra

Neste apêndice faremos uma breve revisão da dedução da equação mestra. Esta dedução pode ser feita de várias maneiras que podem ser encontradas nas referências [10, 21, 55, 56, 104]. Escolhemos o formalismo desenvolvido na ref. [55].

Considere a hamiltoniana total

$$H = H_S + H_R + H_{int}, \quad (\text{C.1})$$

onde H_S e H_R são, respectivamente, as hamiltonianas que descrevem o sistema S e o reservatório térmico R , enquanto que H_{int} descreve a interação entre eles. Considere o operador densidade total $\rho(t)$ definido no espaço $S \otimes R$ e o operador densidade reduzido do sistema definido como $\rho_S(t) = \text{Tr}_R \rho(t)$, onde o traço é calculado nas variáveis do reservatório.

Procuramos uma equação dinâmica para o operador densidade reduzido do sistema e para isso, utilizamos a equação de Liouville-Von Neuman para o operador densidade total

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho(t)], \quad (\text{C.2})$$

onde H é a hamiltoniana total dada por (C.1). Agora, escrevemos (C.2) na representação de interação, separando o movimento gerado por $H_S + H_R$ do movimento gerado por H_{int}

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (\text{C.3})$$

com $\tilde{\rho} = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} \rho(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t}$ e $\tilde{H}_{int}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t} H_{int} e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S+H_R)t}$. Integrando formalmente (C.3), temos

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t')], \quad (\text{C.4})$$

e substituindo (C.4) no comutador presente em (C.2), temos

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{int}(t), [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (C.5)$$

Esta equação é exata e de difícil solução, pois ela é linear e não-markoviana [105]. A vantagem de uma equação formal exata é a de que ela pode nos revelar muito do ingredientes físicos essenciais que governam a dinâmica efetiva. Esta equação contém uma parte unitária e uma parte não unitária contida no termo da integral, responsável por propriedades importantes, características de evoluções de subsistemas, tais como, decoerência, dissipação, variação da energia entre outras. Então, nela faremos algumas aproximações de modo que a solução de (C.5) torne-se viável.

Consideramos que inicialmente o sistema e o reservatório estão descorrelacionados, então a matriz densidade total, neste tempo, deve ser escrita como

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0), \quad (C.6)$$

onde $\rho_R(0)$ é o operador densidade do reservatório inicial. Então, substituindo (C.6) em (C.5), encontramos a seguinte equação, após tomarmos o traço nas variáveis do reservatório,

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ [\tilde{H}_{int}(t), [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \}, \quad (C.7)$$

onde usamos $\text{Tr}_R[\tilde{H}_{int}, \rho_R(0)] = 0$.

Esta situação inicial de descorrelação entre os dois sistemas é modificada ao longo do tempo, devido a interação entre eles descrita por H_{int} . Esta interação é considerada fraca e como o reservatório é um sistema grande, então ele é pouco afetado por esta interação. Assim sendo, podemos supor que o reservatório permanece no mesmo estado em que foi preparado inicialmente para todo o tempo. Com isso a matriz densidade total pode ser escrita como

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_S(t) \rho_R(0). \quad (C.8)$$

Faremos agora a segunda aproximação que consiste em desprezar termos de ordem maior do que a segunda ordem em \tilde{H}_{int} . Esta aproximação é conhecida como aproximação de Born. Assim a equação (C.7) se reduz a

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ [\tilde{H}_{int}(t), [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \rho_R(0)]] \}. \quad (C.9)$$

A equação acima (C.9) continua sendo complicada, pois ela não é markoviana, o que significa que a evolução de $\tilde{\rho}_S(t)$ depende do passado através da integração de $\tilde{\rho}_S(t')$. Num sistema markoviano, o comportamento do sistema no passado não afeta o comportamento no presente. Então, a próxima aproximação a ser feita será markoviana que consiste em substituímos $\tilde{\rho}_S(t')$ por $\tilde{\rho}_S(t)$ em (C.9), isto é

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ [\tilde{H}_{int}(t), [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \rho_R(0)]] \}. \quad (\text{C.10})$$

Esta equação é conhecida como equação mestra na aproximação de Born-Markov. Para entender um pouco melhor o significado do integrando de (C.10), vamos especificar um pouco a hamiltoniana de interação, isto é,

$$H_{int} = \sum_i S_i \Gamma_i, \quad (\text{C.11})$$

onde S_i e Γ_i são, respectivamente, operadores nos espaços de Hilbert de S e de R . Substituindo (C.11) em (C.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ [\tilde{S}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{S}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}_S(t') \rho_R(0)]] \} \\ &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \{ [\tilde{S}_i(t) \tilde{S}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') - \tilde{S}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') \tilde{S}_i(t)] \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{\rho}_S(t') \tilde{S}_j(t') \tilde{S}_i(t) - \tilde{S}_i(t) \tilde{\rho}_S(t') \tilde{S}_j(t')] \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

com

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R = \text{Tr}_R [\rho_R(0) \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')] \quad (\text{C.13})$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R = \text{Tr}_R [\rho_R(0) \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t)]. \quad (\text{C.14})$$

As propriedades do reservatório entram em (C.12) através das funções de correlação (C.13) e (C.14). Uma maneira de justificar substituição de $\tilde{\rho}_S(t')$ por $\tilde{\rho}_S(t)$ na equação (C.9) está relacionada ao decaimento destas funções de correlação do reservatório, ou seja, esta substituição é válida quando esta escala de decaimento é muito mais rápida se comparada com a escala de em que $\tilde{\rho}_S(t)$ varia. Portanto, a aproximação markoviana está baseada em duas escalas de tempo: uma escala lenta a qual o sistema S varia e uma rápida que caracteriza o decaimento das funções de correlação do reservatório. Idealmente, estas funções de correlação do reservatório podem ser aproximadas como

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \approx \delta(t - t'). \quad (\text{C.15})$$

Na seção seguinte, mostraremos, como exemplo, a dedução da equação mestra para o modelo linear na RWA. As outras equações mestras, que aparecem no presente trabalho, podem ser deduzidas da mesma maneira.

C.1 Equação Mestra para um Modelo Linear na RWA

Deduziremos a equação mestra para um oscilador linearmente acoplado a outros osciladores não-interagentes na aproximação RWA para ilustrar dedução acima. A hamiltoniana que descreve este modelo é dada por

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j + \hbar(a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma). \quad (\text{C.16})$$

com $\Gamma \equiv \sum_j k_j b_j$, onde ω_c é a frequência do oscilador principal e ω_j é a frequência do j -ésimo oscilador do reservatório.

O reservatório térmico encontra-se num estado de equilíbrio térmico a temperatura T e é descrito por,

$$\rho_R(0) = \prod_j e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_B T} b_j^\dagger b_j} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_B T}}),$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Identificando os termos presentes na hamiltoniana de interação (C.16) com a hamiltoniana de interação na forma geral (C.11), encontramos

$$s_1 = a \quad , \quad s_2 = a^\dagger \quad , \quad \Gamma_1 = \sum_j k_j^* b_j^\dagger \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \sum_j k_j b_j, \quad (\text{C.17})$$

que na representação de interação adquirem a forma

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= a e^{-i\omega_c t} \\ \tilde{s}_2(t) &= a^\dagger e^{i\omega_c t} \\ \tilde{\Gamma}_1(t) = \tilde{\Gamma}_1^\dagger(t) &= \sum_j k_j^* b_j^\dagger e^{i\omega_j t} \\ \tilde{\Gamma}_2(t) = \tilde{\Gamma}_2(t) &= \sum_j k_j b_j e^{-i\omega_j t} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Podemos calcular as somas em (C.12) que variam $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, reduzindo esta equação a

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} &= - \int_0^t dt' \{ [a a \tilde{\rho}_S(t') - a \tilde{\rho}_S(t') a] e^{-i\omega_c(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \\ &+ [a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho}_S(t') - a^\dagger \tilde{\rho}_S(t') a^\dagger] e^{i\omega_c(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\ &+ [a a^\dagger \tilde{\rho}_S(t') - a^\dagger \tilde{\rho}_S(t') a] e^{-i\omega_c(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\ &+ [a^\dagger a \tilde{\rho}_S(t') - a \tilde{\rho}_S(t') a^\dagger] e^{i\omega_c(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde as funções de correlação do reservatório são dadas, explicitamente, por

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_i |k_i|^2 e^{i\omega_i(t-t')} \bar{n}(\omega_j, T), \quad (\text{C.22})$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_i |k_i|^2 e^{-i\omega_i(t-t')} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1], \quad (\text{C.23})$$

com

$$\bar{n}(\omega_j, T) = \text{Tr}_R(\rho_R(0) b_j^\dagger b_j) = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_B T}}}, \quad (\text{C.24})$$

onde $\bar{n}(\omega_j, T)$ é o número médio de fótons para o oscilador com frequência ω_j em equilíbrio térmico a temperatura T . As funções de correlação do reservatório envolvem somas sobre os osciladores do reservatório e esta soma pode ser substituída por uma integral, desde que a densidade de estados $D(\omega)$ seja introduzida, tal que $D(\omega)d\omega$ dê o número de osciladores com frequências dentro do intervalo ω até $\omega + d\omega$. Efetuando uma mudança de variável $\tau = t - t'$ em (C.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = & - \int_0^t d\tau \{ [aa^\dagger \tilde{\rho}_S(t-\tau) - a^\dagger \tilde{\rho}_S(t-\tau)a] e^{-i\omega_c \tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + h.c. \\ & + [a^\dagger a \tilde{\rho}_S(t-\tau) - a \tilde{\rho}_S(t-\tau) a^\dagger] e^{i\omega_c \tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + h.c. \} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

onde as funções de correlação do reservatório, após transformarmos a soma nos osciladores do reservatório em integrais, são iguais a

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = \int_0^\infty d\omega D(\omega) |k(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} \bar{n}(\omega_j, T), \quad (\text{C.26})$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \int_0^\infty d\omega D(\omega) |k(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1], \quad (\text{C.27})$$

com $\bar{n}(\omega_j, T)$ dado por (C.24) substituindo ω_j por ω .

A seguir, nos concentraremos na aproximação markoviana. A aproximação markoviana supõe que o tempo de correlação do reservatório é curto se comparado com a escala de tempo onde ocorrem as mudanças em $\tilde{\rho}_S$. A primeira questão a ser investigada está relacionada a situação em que as equações (C.26) e (C.27) podem ser aproximadamente proporcionais a $\delta(\tau)$. O tempo de correlação do reservatório pode ser calculado explicitamente através destas equações, a partir de um certo $k(\omega)$. A estimativa para este tempo de correlação do reservatório pode ser dada, por exemplo, considerando $k(\omega)$ uma constante. Note que na equação (C.25), a exponencial $e^{i\omega_c \tau}$ multiplica a função de correlação do reservatório e são somente as frequências $\omega \approx \omega_c$ que são importantes em

(C.26) e (C.27). Então, pode-se estender o limite de integração inferior para $-\infty$ em (C.26) e (C.27) e assim, temos uma transformada de Fourier e o tempo de correlação é facilmente obtido. Baseado nestes argumentos, podemos afirmar que o integrando varia numa escala muito mais rápida do que a escala de evolução de $\tilde{\rho}_S$, e assim, podemos substituir $\tilde{\rho}_S(t - \tau)$ por $\tilde{\rho}_S(t)$ em (C.25), obtendo

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = \alpha[a\tilde{\rho}_S(t)a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho}_S(t)] + \beta[a\tilde{\rho}_S(t)a^\dagger + a^\dagger\tilde{\rho}_S(t)a - a^\dagger a\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t)aa^\dagger] + h.c. \quad (C.28)$$

com

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} D(\omega) |k(\omega)|^2 \quad (C.29)$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} D(\omega) |k(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T). \quad (C.30)$$

Note que t é a escala de tempo característica da mudança de $\tilde{\rho}_S$ e como a integração em τ é dominada por escalas de tempo muito mais rápidas do que esta, então pode-se estender o limite de integração superior de τ para ∞ , onde para calcularmos os valores de α e β , utilizamos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega - \omega_c)\tau} = \pi \delta(\omega - \omega_c) + i \frac{P}{\omega_c - \omega}, \quad (C.31)$$

onde P indica o valor principal de Cauchy. Então, encontramos

$$\alpha = \pi D(\omega_c) |k(\omega_c)|^2 + i\Delta, \quad (C.32)$$

$$\beta = \pi D(\omega_c) |k(\omega_c)|^2 \bar{n}(\omega_c) + i\Delta', \quad (C.33)$$

com

$$\Delta = P \int_0^\infty d\omega \frac{D(\omega) |k(\omega)|^2}{(\omega_c - \omega)}, \quad (C.34)$$

$$\Delta' = P \int_0^\infty d\omega \frac{D(\omega) |k(\omega)|^2}{(\omega_c - \omega)} \bar{n}(\omega, T). \quad (C.35)$$

Finalmente, temos a equação mestra, após substituímos os valores de α e β dados, respectivamente, por (C.32) e (C.33) e voltarmos para a representação de Schrödinger, onde

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S] + e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} \frac{d\tilde{\rho}_S}{dt} e^{\frac{i}{\hbar} H_S t}.$$

Assim, a equação mestra é descrita por

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3412 ex. 1

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i\omega'_c[a^\dagger a, \rho_S] + \kappa(2a\rho_S a^\dagger - a^\dagger a\rho_S - \rho_S a^\dagger a) + 2\kappa\bar{n}(a\rho_S a^\dagger - a^\dagger \rho_S a - a^\dagger a\rho_S - \rho_S a a^\dagger), \quad (\text{C.36})$$

onde $\omega'_c = \omega_c + \Delta$, $\kappa = \pi D(\omega_c)|k(\omega_c)|^2$ e $\bar{n} = n(\omega_c, T)$. Note que no caso de temperatura nula, a equação mestra acima se reduz a

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i\omega'_c[a^\dagger a, \rho_S] + \kappa(2a\rho_S a^\dagger - a^\dagger a\rho_S - \rho_S a^\dagger a). \quad (\text{C.37})$$

Este mesmo procedimento foi utilizado para deduzir as equações mestras presentes na seção 3.7. Para o caso onde temos um único tempo de relaxação, as hamiltonianas de interação, utilizadas para deduzir as equações mestras respectivas a elas, têm as formas

$$H_{int} = \sum_k \left(g_k b_k^\dagger \sigma_- + g_k^* b_k \sigma_+ \right)$$

e

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_- \langle \eta|].$$

Para o caso onde temos dois tempos de relaxação, as equações mestras são obtidas a partir das hamiltonianas

$$H_{int} = \sum_k \left(g_k b_k^\dagger \sigma_- + g_k^* b_k \sigma_+ \right) + \sum_k \left(g'_k b_k^\dagger \sigma_- + g'^*_k b_k \sigma_+ \right)$$

e

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_- \langle \eta|] + \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} d\eta [g'(\eta)|\eta\rangle\sigma_- \langle 0_b| + g'^*(\eta)|0_b\rangle\sigma_- \langle \eta|].$$

Note que todas estas hamiltonianas de interação podem ser escritas na forma (C.11).

Bibliografia

- [1] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms in Electromagnetic Fields* (World Scientific), (1994)
- [2] J. Dalibard, J. Dupont-Roc, C. Cohen-Tannoudji, *Journal du Physique* **43**, 1617 (1982).
- [3] E. Kanai, *Prog. Teo. Phys.*, **3**, 440 (1948).
- [4] M. D. Kostin, *J. Chem. Phys.*, **57**, 3589 (1972).
- [5] E. Nelson, *Phys. Rev.*, **150**, 1079 (1969).
- [6] I. Senitzky, *Phys. Rev.*, **119**, 670 (1960).
- [7] E. Schödinger, *Naturwissenschaften*, **23**, 807, 823 e 844 (1935).
- [8] J. Wheeler, W. H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, (Princeton University Press), (1983).
- [9] D. Kleppner, *Physics Today* **11**, (Novembro 1996).
- [10] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Springer-Verlag 1994).
- [11] W. H. Zurek, *Phys. Today*, 37 (1991).
- [12] P. C. Lichtner, J. J. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1521 (1976).
- [13] W. H. Zurek, S. Habib, J. P. Paz, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 37 (1991).
- [14] K. M. Fonseca Romero e M. C. Nemes, *Phys. Lett.* **A235**, 432 (1997); K. M. Fonseca Romero, *Métodos e Aplicações da Dinâmica de Sistemas Quânticos*, Tese de Doutorado- IFUSP, São Paulo, (1998).
- [15] A. Caldeira e A. Leggett, *Ann. Phys. (N. Y.)* **149**, 374 (1983).
- [16] L. Gunther e B. Barbara, *Quantum Tunneling of Magnetization-QTM'94*, (Kluwer Academic Publishers 1994).
- [17] P. C. E. Stamp e E. M. Chudnovsky e B. Barbara, *Int. J. of Mod. Phys.* **6 (9)**, 1355 (1992).
- [18] I. S. Tupitsyn, N. V. Prokof'ev e P. C. E. Stamp, *Int. J. of Mod. Phys.* **B 11 (24)**, 2901 (1997).

- [19] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg e W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 1 (1987).
- [20] K. M. Forsythe e N. Makri, *Phys. Rev.* **B60**, 972 (1999) e referências lá citadas.
- [21] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu e H. D. Zeh, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York), (1996) e referências lá citadas.
- [22] P. Busch, P. J. Lahti e P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement m2*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1991/96).
- [23] O. Pessoa Jr., *Notas de Aula: Fundamentos da Mecânica Quântica* IFUSP, São Paulo (1992).
- [24] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1994).
- [25] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica - Curso de Pós-Graduação do IFUSP*, (1999). 1
- [26] W. H. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger e D. J. Wineland, *Phys. Rev.* **A43**, 5168 (1991).
- [27] L. E. Ballentine, *Phys. Rev.* **A43**, 5165 (1991).
- [28] T. Petrosky, S. Tasaki e I. Prigogine, *Phys. Lett.* **151**, 109 (1990); *Physica* **A170**, 306 (1991).
- [29] A. Peres e A. Ron, *Phys. Rev.* **A42**, 5720 (1990).
- [30] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4877 (1996).
- [31] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [32] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. Lond.* **A400**, 97 (1985).
- [33] J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [34] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett* **75**, 4714 (1995).
- [35] P. Domokos, J.M. Raimond, M.Brune and S. Haroche, *Phys. Rev.* **A52**, 3554 (1995).
- [36] Q.A. Turchette, C.J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi and H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710 (1995).
- [37] X. Maitre, E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J.M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 769 (1997).
- [38] D. G. Cory, A. F. Fahmy e T. F. Havel, *proc. Natl. Acad. Sci. USA* **94**, 1634 (1997).
- [39] M. Reed e B. Simon, *Methods Of Modern Mathematical Physics*, **vol. I**, (Academic Press New York, 1972).

- [40] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc IEEE, **51**, 89 (1963).
- [41] D. M. Brink, M. C. Nemes and D. Vautherin, Annals of Physics **147**, 171 (1983).
- [42] M.ENZ e R. Schilling, J. Phys. C: Solid State Phys. **19**, 1765 (1986).
- [43] J. L. Van Hemmen e A. Sütö, Physica **141B**, 37 (1986); J. Phys.: Condens. Matter **9**, 3089 (1997); Europhys. Lett. **1 (10)**, 481 (1986) .
- [44] A. J. Leggett, Contemp. Phys. **25**, 583 (1984).
- [45] A. J. Leggett e A. Garg, Phys. Rev. Lett. **54**, 857 (1985).
- [46] A. J. Leggett, Japanese Journal of Applied Physics, **26, Supplement 26-3**, 1986 (1987).
- [47] C. D. Tesche, Ann. New York Acad. Sci., **480**, 36 (1986).
- [48] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics Vol. III* (Addison-Wesley, Reading, Mass 1965).
- [49] L. M. Sander e H. B. Shore, *Phys. Rev.* **B3**, 1472 (1971).
- [50] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett **46**, 211 (1981).
- [51] D. M. Brink, M. C. Nemes and D. Vautherin, *Annals of Physics* **147**, 171 (1983).
- [52] U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- [53] N. V. Van Kampen, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd. **26**, No. 15 (1951).
- [54] M. S. Hussein, M. P. Pato e A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **C51**, 846 (1995).
- [55] Howard Carmichael, *Lecture Notes in Physics -An Open Systems Approach to Quantum Optics m18*, 26 (1991).
- [56] William H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* Eds. John Wiley and Sons, Inc, 343 (1973) .
- [57] W. Peier, Physica **57**, 565 (1971).
- [58] C. R. Willis e R. H. Picard, *Phys. Rev.* **A9**, 1343 (1974).
- [59] P. Ullerma, Ohysica **32**, 27, 56, 74, 90 (1966).
- [60] A. O. Caldeira, *Notas de Física IFGW: Alguns Aspectos da Dinâmica Quântica de uma Partícula Browniana*, (Unicamp 1994)
- [61] M. Rosenau da Costa, A. O. Caldeira, S. Dutra e H. Westfahl Jr., *Phys. Rev.* **A61**, 2107 (2000).
- [62] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, (John Wiley et Sons, 1992).

- [63] H. Dekker, *Phys. Rep.* **80**, 1 (1981).
- [64] G. Mahler e W. A. Weberruss, *Quantum Networks- Dynamics of Open Nanostructure*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995).
- [65] W. D. José, M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, *Physica A*, No Prelo; W. D. José, *Tese de Doutorado do IFUSP: Dissipação e Decoerência na Dinâmica de Sistemas Lineares Acoplados*, (USP 1998).
- [66] M. P. E. de França Santos, *Tese de Mestrado da UFRJ: Dinâmica das Propriedades Estatísticas de Campos Eletromagnéticos Emergentes de Cavidades*, (UFRJ 1997).
- [67] J. P. Paz, S. Habib e W. H. Zurek, *Phys. Rev.* **D47**, 488 (1993).
- [68] A. N. Salgueiro, *Tese de Mestrado do IFUSP: Dinâmica Efetiva de Subsistemas Quânticos: A Decoerência de Superposições Mesoscópicas*, (IFUSP, 1997).
- [69] K. M. Fonseca Romero, M. C. Nemes, J. G. Peixoto de Faria, A. N. Salgueiro e A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev.* **A58**, 3205 (1998).
- [70] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore e H. Thomas, *Phys. Rev.* **A6**, 2211 (1972).
- [71] R. Gilmore, *J. of Math. Phys.* **15**, 2090 (1974).
- [72] R. Gilmore, *Lie Grupos, Lie Algebra and Some of Their Applications*, (Jonh Wiley et Sons, 1974).
- [73] W. Witschel, *Int. J. of Quan. Chem.* **20**, 1233.
- [74] H. E. Borges, *Tese de Doutorado da UFMG: Mecânica Estatística Quântica de Sistemas Abertos Markovianos: Uma Abordagem por Álgebra de Lie*, (UFMG 1996).
- [75] A. Zeilinger, *Physics World*, **Março**, 35 (1998); W. Tittel, G. Ribordy e N. Gisin, *Physics World*, **Março**, 41 (1998) ; D. Deutsch e A. Ekert, *Physics World*, **Março**, 47 (1998) e referências lá encontradas.
- [76] W. Tittel, G. Ribordy e N. Gisin, *Physics World*, **Março**, 41 (1998) e referências lá encontradas.
- [77] D. Deutsch e A. Ekert, *Physics World*, **Março**, 47 (1998) e referências lá
- [78] P.W. Shor, *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Theory of Computer Science*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA), 124 (1994).
- [79] M. C. de Oliveira, M. H. Y. Moussa e S. S. Mizrahi, *Phys. Rev.* **A61**, 3809 (2000).
- [80] L. Davidovich, M. Brune, J.M. Raimond and S.Haroche, *Phys. Rev.* **A53**, 1295 (1996).
- [81] J.A. Jones and M. Mosca, *J. Chem. Phys.* **109**, 1648 (1998).

- [82] I.L. Chuang, L.M.K. Vandersypen, X. Zhou, D.W. Leung and S. Lloyd, *Nature* **393**, 6681 (1998).
- [83] M. C. de Oliveira e W. J. Munro, *Phys. Rev.* **A61**, 2309 (2000).
- [84] S. Haroche, *Il. Nuovo Cimento* **110B**, 545 (1995).
- [85] S. Haroche, *Cavity QED - Selected Papers of the Cavity Quantum Elettrodynamics Group at ENS - Vol. I e Vol II*.
- [86] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4737 (1999).
- [87] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, S. J. D. Phoenix, *Phys. Rev.* **A45**, 5193 (1992).
- [88] J. I. Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza e H. Borges, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 207 (1996).
- [89] L. E. Ballentine, *Intl. J. Theor. Phys.* **27**, 211 (1988); M. Cini, *Nuovo Cimento*, **73B**, 27 (1983).
- [90] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer-Verlag Berlin 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press 1981).
- [91] B. Misra e E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).
- [92] L. A. Khal'fin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 1371 (1957); *Sov. Phys.-JETP* **6**, 1053 (1958).
- [93] C. B. Chiu, B. Misra e E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.* **D16**, 520 (1977).
- [94] C. M. Caves e G. J. Milburn, *Phys. Rev.* **A36**, 5543 (1987).
- [95] G. J. Milburn, *J. Opt. Soc. Am.* **B5 (6)**, 1317 (1988).
- [96] C. Kiefer e E. Joos, quant-ph/9803052.
- [97] R. J. Cook, *Phys. Scr.* **T21**, 49 (1988).
- [98] W. H. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger e D. J. Wineland, *Phys. Rev.* **A41**, 2295 (1990).
- [99] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, H. Rauch, *Phys. Lett.* **A199**, 27 (1995).
- [100] S. Pascazio e M. Namiki, *Phys. Rev.* **A50**, 4582 (1994).
- [101] H. Fearn e W. E. Lamb Jr., *Phys. Rev.* **A46**, 1199 (1992).
- [102] A. Venugopalan e R. Ghosh, *Phys. Lett.* **A204**, 11 (1995).
- [103] L. E. Ballentine, *Found. Phys.* **20**, 1329 (1987).
- [104] C. R. Willis e R. H. Picard, *Phys. Rev.* **A9**, 1343 (1974).
- [105] J. Rau e B. Müller, *Phys. Rep.* **272**, 62 (1996).