UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**ESTRUTURA MAGNÉTICA DE TOKAMAKS
COM CORRENTES HELICOIDAIS INTERNAS**

SBI-IFUSP

Valdir Okano

*Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.*

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mutsuko Yamamoto Kucinski

Co-orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Comissão Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Mutsuko Yamamoto Kucinski (IFUSP)

Prof. Dr. Edson Del Bosco (INPE)

Prof. Dr. Gerson Otto Ludwig (INPE)

Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell (UFRGS)

Prof. Dr. Ricardo M. O. Galvão (IFUSP)

São Paulo

1995

Iberê Luiz Caldas

Prof. Iberê Luiz Caldas

Presidente da Comissão de Pós-Graduação

530.44
041p
D
C.1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Okano, Valdir

**"Perturbações helicoidais internas em Tokamaks com
razão de aspecto grande e pequena. São Paulo, 1995.**

**Dissertação (Doutoramento) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada.**

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Profa. Dra. Mutsuko Yamamoto Kucinski.

**Unitermos: 1. Superfícies Magnéticas; 2. Perturbações
Helicoidais; 3. Tokamaks; 4. Mapa de Poincaré.**

USP/IF/SBI - 39/95

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Método da média	6
2.1 Equação da linha de força	6
2.2 Superfícies magnéticas médias	7
3 Sistemas de coordenadas	9
3.1 Coordenadas toroidais	9
3.2 Coordenadas polares locais	10
3.3 Coordenadas polares toroidais	11
4 Equilíbrio toroidal – razão de aspecto grande	14
4.1 Equilíbrio MHD ideal	14
4.2 Equação do equilíbrio em coordenadas polares toroidais	16
4.3 Determinação de Ψ	18
5 Campo helicoidal perturbativo – razão de aspecto grande	20
5.1 Potencial escalar magnético Φ	20
5.2 Campo magnético	23
6 Tokamak de razão de aspecto grande	26
6.1 Método da média	26
6.2 Integração numérica	31
7 Tokamak de razão de aspecto pequena	40
7.1 Sistema de coordenadas	40
7.2 Superfícies magnéticas de equilíbrio	42
7.3 Campo helicoidal perturbativo	46

7.4 Superfícies magnéticas médias e resultados numéricos	47
8 Conclusões e comentários finais	54
A Desenvolvimento do método da média	56
B Coeficientes do potencial escalar magnético Φ	61

Lista de Figuras

3.1	Superfícies coordenadas do sistema toroidal convencional.	10
3.2	Superfícies coordenadas do sistema polar local.	11
3.3	Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal.	13
6.1	Perturbação sobre a superfície (2,1). Intensidade da perturbação de 1,0%. Razão de aspecto grande.	34
6.2	Perturbação sobre a superfície (2,1). Intensidade da perturbação de 1,5%. Razão de aspecto grande.	35
6.3	Perturbação sobre a superfície (2,1). Intensidade da perturbação de 2,0%. Razão de aspecto grande.	36
6.4	Perturbação sobre a superfície (3,1). Intensidade da perturbação de 0,3%. Razão de aspecto grande.	37
6.5	Perturbação sobre a superfície (3,1). Intensidade da perturbação de 0,5%. Razão de aspecto grande.	38
6.6	Perturbação sobre a superfície (3,1). Intensidade da perturbação de 1,0%. Razão de aspecto grande.	39
7.1	Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal generalizado. Secção transversal $\varphi = \text{constante}$	41
7.2	Componentes de Fourier Ψ_0 , Ψ_1 e Ψ_2	45
7.3	Perfil do fator de segurança.	46
7.4	Perturbação sobre a superfície (2,1). Parâmetro do alongamento igual a 0,08. Razão de aspecto pequena	49
7.5	Perturbação sobre a superfície (2,1). Parâmetro do alongamento igual a 0,12. Razão de aspecto pequena.	50
7.6	Perturbação sobre a superfície (2,1). Parâmetro do alongamento igual a 0,17. Razão de aspecto pequena.	51
7.7	Perturbação sobre a superfície (2,1). Parâmetro do alongamento igual a 0,08. Plano do mapeamento $\varphi = \pi$	52
7.8	Perturbação sobre a superfície (2,1). Parâmetro do alongamento igual a 0,17. Plano do mapeamento $\varphi = \pi$	53

Agradecimentos

Fazer um agradecimento em uma tese não é uma tarefa fácil pois sempre podemos esquecer alguém. Entre as várias pessoas que tornaram este trabalho possível, gostaria de mencionar:

Profa. Mutsuko Yamamoto Kucinski — pela sua orientação e seu apoio em todas as etapas deste trabalho. Seus comentários sempre foram de grande valia.

Prof. Iberê Luiz Caldas — pela sua colaboração neste trabalho.

Aos amigos Pascoal, Vagner e Hamilton — pela amizade e pelas discussões sobre a nossa formação como físicos.

Aos amigos da UFPR: Neide, Ivo e Michelle.

Este trabalho foi parcialmente financiado por FAPESP e CAPES.

Resumo

Estudamos o efeito de correntes helicoidais internas resultantes de modos *tearing* sobre a estrutura magnética de plasmas toroidais em equilíbrio. Estas correntes são consideradas sobre uma superfície magnética racional e ao longo das linhas do campo magnético de equilíbrio. Sobre as superfícies racionais surgem ilhas magnéticas devido ao campo perturbativo. As ilhas magnéticas são visualizadas por dois métodos: pelo mapa de Poincaré das linhas do campo magnético e pela superfície magnética aproximada calculada por um método da média. Este método da média foi desenvolvido para determinar a estrutura das superfícies magnéticas de um sistema cuja simetria é destruída por uma pequena perturbação. Consideramos dois tipos de tokamaks: tokamak de razão de aspecto grande e tokamak de razão de aspecto pequena.

Abstract

We study the effect of helical currents on the magnetic structure of toroidal plasmas in equilibrium. These currents are considered on a rational magnetic surface along unperturbed magnetic field lines. The symmetry is broken by the helical perturbation and magnetic islands arise at every rational surface. The structure of magnetic island is obtained by two methods: numerical integration of magnetic field lines and an averaging method. This averaging method has been developed to determine the magnetic structure of a system with symmetry broken by small perturbations. Two kinds of tokamaks are considered: large aspect ratio tokamak and small aspect ratio tokamak.

Capítulo 1

Introdução

Neste século foi descoberto que se dois átomos leves se fundirem resultando em outro mais pesado teremos liberação de energia. Esta forma de produção de energia ocorre no interior do Sol onde átomos de hidrogênio se fundem produzindo hélio. Se conseguirmos reproduzir a fusão nuclear entre átomos de hidrogênio na Terra, teremos uma fonte inesgotável de energia pois o hidrogênio é abundante.

O maior obstáculo para se conseguir a fusão nuclear está no fato de que os núcleos reagentes possuem a mesma carga elétrica. Isto faz com que exista repulsão entre os núcleos devido à força de Coulomb. Uma maneira de sobrepujar a força repulsiva é fornecer suficiente energia cinética aos átomos de modo que estes ultrapassem a barreira Coulombiana e forças nucleares comecem a atuar entre os núcleos fazendo com que haja fusão. Como exemplo prático citamos o caso do hidrogênio: para que ocorra a fusão dos átomos de hidrogênio precisamos aquecer o gás a uma temperatura de aproximadamente 10^8 K. Nesta temperatura praticamente todos os átomos estão ionizados formando um plasma.

Para um reator de fusão gerar mais energia que a consumida é necessário que o plasma seja mantido a uma temperatura extremamente alta por um tempo suficientemente longo para que ocorram várias reações de fusão. O critério de Lawson estabelece que o produto da densidade do plasma n com o tempo de confinamento τ deve exceder um valor crítico para que o reator de fusão seja economicamente viável, isto é, produza mais energia que a consumida. Em uma reação típica de Deutério-Trítio, o critério de Lawson estabelece que $n\tau > 10^{20} \text{ s m}^{-3}$ para uma temperatura do plasma $T = 10 \text{ keV}$.

Existem basicamente duas maneiras de se alcançar o critério de Lawson:

1. Confinar um plasma de baixa densidade ($n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$) por um tempo $\tau \sim 1\text{s}$ por meio de campos magnéticos intensos. Este tipo de confinamento é denominado de confinamento magnético.
2. Comprimir o plasma a densidades extremamente altas ($n \sim 10^{31} \text{ m}^{-3}$) por um tempo suficiente para que o critério de Lawson seja satisfeito antes que o plasma se expanda. A compressão do plasma, acima mencionada, é obtida por meio de lasers.

Nesta tese nos restringimos ao confinamento magnético, mais especificamente ao tokamak.

O tokamak é um dos mais promissores sistemas de confinamento de plasma. Sua concepção surgiu na ex-União Soviética. Neste dispositivo, a câmara onde o plasma fica confinado é toroidal de modo a reduzir as perdas pelas extremidades que ocorrem em sistemas com geometria linear (por ex. θ -pinch e espelhos magnéticos).

Os campos magnéticos que confinam o plasma são basicamente o campo magnético toroidal e o campo magnético poloidal. O campo magnético toroidal é produzido por bobinas poloidais colocadas ao redor do toróide e o campo magnético poloidal é produzido pela corrente toroidal induzida no plasma. A soma dos dois campos magnéticos resulta em um campo helicoidal dentro do tokamak. As linhas do campo magnético definem superfícies no plasma. Estas superfícies são denominadas de superfícies magnéticas. Sobre uma superfície magnética, o campo magnético B satisfaz $B \times dr = 0$.

A existência de superfícies magnéticas fechadas é uma condição importante para um bom confinamento. Isto se deve ao fato de que as partículas carregadas se movem preferencialmente ao longo das linhas do campo magnético. Se as linhas do campo não formam uma superfície magnética podemos ter a difusão das partículas para fora do plasma e a conseqüente perda de confinamento. Nos sistemas que apresentam uma simetria, mostra-se que existem superfícies magnéticas (EDENSTRASSER, 1980b).

Embora exista uma grande quantidade de dados de vários tokamaks com características bem distintas, não existe uma compreensão exata dos vários fenômenos envolvidos no confinamento do plasma. Por exemplo, observa-se que o plasma não permanece estável por muito tempo: surgem instabilidades que provocam a perda de energia ou então a destruição total da coluna de plasma.

Um parâmetro muito importante no estudo das instabilidades do plasma em tokamaks é o fator de segurança q . Este fator nos dá uma idéia da helicidade das linhas de força do campo magnético que confina o plasma. Se o fator de segurança for um número racional, isto é, se $q = m/n$, a linha de força se fecha sobre si mesma após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. As superfícies magnéticas onde o fator de segurança é um número racional são denominadas de superfícies racionais. Muitas das instabilidades que surgem nos tokamaks estão associadas a estas superfícies.

Entre os principais objetivos na pesquisa de fusão termonuclear está o de compreender os fenômenos envolvidos nas instabilidades e encontrar meios de controlá-las (MORRIS, 1992; HEGNA e BHATTACHARJEE, 1991). Entre as instabilidades que surgem nos tokamaks podemos citar (WESSON, 1978; MORRIS, 1992):

- *Instabilidade de dobra (kink)* — estas instabilidades se caracterizam por deformarem toda a superfície externa da coluna de plasma. Esta instabilidade ocorre quando o fator de segurança q é um número racional ($1/1, 2/1, 3/1 \dots$) fora da coluna de plasma, isto é, no vácuo. Se o fator de segurança na superfície do plasma é maior que 1 não há esta instabilidade (limite de Kruskal-Shafranov) (NISHIKAWA e WAKATANI, 1990).
- *Instabilidade vertical* — esta instabilidade é a responsável pela movimentação da coluna de plasma na direção vertical. O plasma não fica em uma posição fixa dentro da câmara. Muitas vezes ocorre a perda de confinamento quando a coluna de plasma toca o vaso da câmara. A maneira de se controlar esta instabilidade é monitorar

a posição da coluna de plasma durante a descarga e aplicar um campo magnético externo que faça a coluna de plasma voltar à sua posição inicial (MORRIS, 1992).

- *Instabilidades dente de serra* — esta instabilidade foi primeiramente observada por VON GOELER *et al.* (VON GOELER *et al.*, 1974). Inicialmente ocorre um aumento gradual na temperatura dos elétrons na região central do plasma (dentro de um raio $r < r_s$) e depois uma queda abrupta da temperatura. Fora desta região observa-se o fenômeno oposto, isto é, há um aumento abrupto da temperatura e posteriormente uma diminuição gradual. Um modelo simples para explicar esta instabilidade foi proposto por KADOMTSEV (KADOMTSEV, 1975). O modelo considera que o fator de segurança na região central do plasma fica menor que 1 surgindo, então, a instabilidade MHD de modo $m = 1$, $n = 1$. Esta instabilidade cresce provocando uma abrupta reconexão das linhas de força e um transporte das partículas da região central para fora.
- *Instabilidade de ruptura* — esta é a instabilidade mais perigosa que acontece no plasma. Ela provoca a perda completa de confinamento em um curto intervalo de tempo, da ordem de milissegundos. A perda de confinamento provoca uma grande tensão mecânica e um aquecimento das paredes da câmara. Nesta instabilidade ocorre uma redistribuição da densidade de corrente dentro do plasma e parte do plasma é expulso para fora da coluna. Este processo é interpretado como sendo uma seqüência de reconexões das linhas do campo magnético causadas pelos modos *tearing* dentro do plasma (PULSATOR TEAM, 1985).

Neste trabalho pretendemos analisar a influência de perturbações helicoidais no campo magnético interno ao plasma. As perturbações helicoidais são produzidas por correntes que fluem ao longo da linha do campo magnético de uma superfície racional ($q = m/n$). Estas perturbações destroem a estrutura de superfícies magnéticas devido à quebra de simetria do plasma toroidal. Surgem ilhas magnéticas ao redor das superfícies racionais. Dependendo da intensidade da perturbação, as linhas do campo magnético apresentam um comportamento caótico em torno das ilhas magnéticas. Esta região caótica surge quando as ilhas de diferentes superfícies racionais se tocam.

Das experiências com correntes helicoidais enroladas sobre a câmara toroidal, surgiu a idéia de que a ruptura poderia ser causada pelas ilhas magnéticas que surgem sobre as superfícies racionais. A forma com que a ruptura induzida pela corrente helicoidal externa evolui é muito semelhante à da instabilidade de ruptura (KARGER *et al.*, 1975; PULSATOR TEAM, 1985).

Nos trabalhos já publicados sobre o efeito de perturbações helicoidais internas ao plasma, tem-se basicamente duas abordagens:

1. Considera-se que existe uma corrente helicoidal sobre uma superfície magnética racional (m, n). Estas correntes são usadas para simular modos *tearing* no plasma. O modelo para descrever o plasma é cilíndrico. O efeito toroidal é introduzido somente na componente B_z do campo magnético. Não se considera a evolução temporal da perturbação (FINN, 1975).

2. Analisa-se a evolução temporal dos modos *tearing* na geometria toroidal a partir da teoria MHD resistiva. Este conjunto de equações é resolvido numericamente. (CARRERAS *et al.*, 1981).

O nosso modelo difere da abordagem de CARRERAS *et al.* pois não consideramos a evolução temporal dos modos da perturbação. Com relação ao trabalho de FINN a diferença maior está no fato de que usamos um sistema de coordenadas intrinsecamente toroidal para descrever o equilíbrio. Outra diferença é que a corrente flui ao longo das linhas do campo magnético de uma superfície racional. Nós obtemos analiticamente a função de fluxo que descreve, de forma aproximada, a separatriz das ilhas magnéticas.

Para determinarmos as ilhas magnéticas geradas pelas perturbações helicoidais consideramos que o campo magnético resultante é a soma do campo magnético de equilíbrio e do campo helicoidal perturbativo. Não consideramos a resposta do plasma no campo de equilíbrio. Usamos dois métodos para visualizar as ilhas magnéticas:

1. *Mapa de Poincaré* — Construímos o mapa de Poincaré das linhas do campo magnético resultante. Este mapa é formado pelos pontos onde a linha de força cruza uma secção reta do toróide. Os pontos de intersecção da linha de campo com o plano do mapeamento são obtidos pela integração numérica da equação da linha de campo ($B \times dr$).
2. *Método da Média* — O método da média permite que se obtenha analiticamente a estrutura magnética de um sistema com simetria destruída por uma pequena perturbação. Este método foi desenvolvido por KUCINSKI *et al.* (KUCINSKI *et al.*, 1992).

Neste trabalho consideramos dois tipos de tokamaks: tokamaks de razão de aspecto grande e tokamaks de razão de aspecto pequena. A razão de aspecto é definida como a razão entre o raio maior e a semilargura da coluna do plasma no plano equatorial. O interesse em tokamaks de pequena razão de aspecto é a aparente inexistência de instabilidade de ruptura (SYKES, 1992; SYKES *et al.*, 1993).

Outras características dos tokamaks de razão de aspecto pequena são:

- Alongamento natural na direção Z (eixo de rotação do toróide). Este alongamento depende do perfil da densidade de corrente do plasma (SYKES, 1992; GALVÃO *et al.*, 1993). Cálculos mostram que este alongamento favorece a estabilidade com relação a deslocamentos verticais da coluna de plasma (KALMYKOV, 1992).
- Corrente de plasma alta e forte paramagnetismo (PENG e STRICKLER, 1986). O paramagnetismo alto implica que o campo magnético toroidal é reforçado pela presença do plasma.
- Fator de segurança alto na borda do plasma ($6 < q(a) < 20$) e alto *shear*. O *shear* é a variação do fator de segurança com a posição radial r ao centro do plasma (dq/dr). Estes dois fatores podem ser umas das causas da maior estabilidade deste tipo de tokamak contra instabilidades de ruptura (SYKES *et al.*, 1993).

A sequência adotada neste trabalho é: no capítulo 2 apresentamos o método da média. Neste capítulo discutimos as exigências que as coordenadas devem satisfazer para que o método da média possa ser usado. No capítulo 3 apresentamos alguns sistemas de coordenadas toroidais que poderiam ser usados na descrição de plasma toroidais e a razão pela qual foi escolhido o sistema de coordenadas polares toroidais e não outro. No capítulo 4 calculamos a função de fluxo Ψ que satisfaz a equação de Grad-Shafranov para um tokamak de razão de aspecto grande. A função Ψ é usada para determinar a superfície magnética e o campo de equilíbrio. No capítulo 5 calculamos o campo gerado pelas correntes helicoidais perturbativas que fluem ao longo de uma linha de campo de uma superfície magnética racional. No capítulo 6 integramos numericamente a equação da linha de força do campo magnético e comparamos com o resultado obtido pelo método da média. Nos cálculos numéricos consideram-se os parâmetros do TBR-1. No capítulo 7 analisamos o caso de tokamaks de razão de aspecto pequena. Os parâmetros, neste caso, são os projetados para o TBR-E. O projeto da construção do tokamak TBR-E não será executado por falta de verbas. O TBR-E seria um típico tokamak de baixa razão de aspecto.

Capítulo 2

Método da média

Uma maneira de analisar a influência de correntes helicoidais sobre o plasma em equilíbrio é ver como as superfícies magnéticas se alteram na presença das correntes helicoidais. As superfícies magnéticas podem ser visualizadas no mapa de Poincaré das linhas do campo magnético. O mapa de Poincaré é feito pelos pontos onde as linhas do campo cruzam um plano transversal ao toróide. Estes pontos são determinados pela integração numérica da equação das linhas do campo magnético. Uma das dificuldades neste procedimento é o tempo computacional para se obter um mapa.

O método da média permite visualizar as superfícies magnéticas deformadas pela corrente helicoidal sem a necessidade de integrar numericamente as linhas do campo magnético. Este método foi desenvolvido por KUCINSKI *et al.* (KUCINSKI *et al.* 1992).

2.1 Equação da linha de força

Em uma linha de força, o campo magnético deve satisfazer a equação

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{r} = 0. \quad (2.1)$$

Isto significa que o campo magnético $\mathbf{B}$ é tangente à linha de força.

Para analisarmos a influência das correntes helicoidais internas ao plasma com simetria toroidal, consideramos que o campo magnético total $\mathbf{B}$ é a superposição linear do campo magnético do plasma em equilíbrio $\mathbf{B}_0$ com o campo magnético perturbativo $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}.$$

Esta hipótese implica que a equação (2.1) é escrita, em termos de coordenadas curvilíneas generalizadas x^1 , x^2 e x^3 , como

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{B_0^1 + b^1}{B_0^3 + b^3} \quad \text{e} \quad \frac{dx^2}{dx^3} = \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3}. \quad (2.2)$$

B^i são as componentes contravariantes do campo magnético $\mathbf{B}$.

O método da média desenvolvido por KUCINSKI *et al.* é aplicável a qualquer sistema de equações diferenciais que tenha a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dx^3} &= \varepsilon f^1(x^1, x^2, x^3), \\ \frac{dx^2}{dx^3} &= F^2(x^1, x^3) + \varepsilon f^2(x^1, x^2, x^3),\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde ε é o parâmetro da perturbação e a coordenada x^3 tem periodicidade L .

Para reduzirmos o sistema de equações (2.2) ao sistema de equações (2.3) escolhemos as coordenadas generalizadas (x^1, x^2, x^3) da seguinte forma:

x^1 – coordenada de fluxo magnético do campo não perturbado. Seu significado é de coordenada radial.

x^2 – coordenada ignorável para o plasma em equilíbrio.

x^3 – outra coordenada relevante para descrever o equilíbrio.

Esta escolha de coordenadas faz com que o campo magnético de equilíbrio satisfaça

$$\frac{\partial B_0^i}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad B_0^1 = 0,$$

e

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^2} = 0,$$

onde g^{ij} são as componentes contravariantes da métrica.

A condição $B_0^1 = 0$ segue imediatamente da escolha de x^1 pois $B_0 \cdot \nabla \Psi = 0$.

A escolha das coordenadas acima reduz os termos da equação (2.3) a

$$\varepsilon f^1 = \frac{b^1}{B_0^3} \left(1 + \frac{b^3}{B_0^3} \right)^{-1};\tag{2.4}$$

$$F^2 = \frac{B_0^2}{B_0^3};\tag{2.5}$$

$$\varepsilon f^2 \simeq \frac{b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{b^3}{B_0^3}.\tag{2.6}$$

2.2 Superfícies magnéticas médias

Pelo método da média, a solução do sistema de equações (2.3) é escrita, em termos das coordenadas médias $\overline{x^1}$ e $\overline{x^2}$, como (KUCINSKI *et al.* 1992):

$$\begin{aligned}x^1 &= \overline{x^1} + \delta x^1(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3), \\ x^2 &= \overline{x^2} + \delta x^2(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3) + \delta x^2(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3).\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde δx^i são correções de segunda ordem em ε e $\overline{x^1}, \overline{x^2}$ satisfazem

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{x^1}}{dx^3} &= \overline{\varepsilon f^1(\overline{x^1}, \overline{x^2} + \overline{x^2}, x^3)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{d\overline{x^2}}{dx^3} &= \overline{F^2(\overline{x^1}, x^3)} + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

O termo $\overline{x^2}$ é dado por:

$$\overline{x^2} = \widehat{F^2}(\overline{x^1}, x^3).$$

As operações $\widehat{}$ e $\widetilde{}$ sobre as funções F^2 e f^1 são definidas por:

$$\begin{aligned}\overline{f}(\overline{x^1}, \overline{x^2}) &\equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3) dx^3, \\ \widetilde{P}(f) &\equiv \widetilde{f}(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3) = f - \overline{f}, \\ \widehat{P}(f) &\equiv \widehat{f}(\overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3) = \widehat{P} \left(\int_0^{x^3} \widetilde{f} dx^3 \right).\end{aligned}$$

Deve ficar claro que as operações $\widetilde{}$, $\widehat{}$ e $\overline{}$ são efetuadas somente sobre as funções F^2 e f^1 e não sobre as coordenadas. A barra sobre as coordenadas x^1 e x^2 serve para lembrar que estas são obtidas por um processo de média.

A superfície magnética média, em aproximação de primeira ordem, é dada em termos da função (ver apêndice A)

$$\Psi_H(\overline{x^1}, \overline{x^2}) \equiv \Psi_H^0(\overline{x^1}) - \int_c^{\overline{x^2} + \widehat{F^2}} \sqrt{g} b^1(\overline{x^1}, x^2, x^3) dx^2, \quad (2.8)$$

onde

$$\Psi_H^0(\overline{x^1}) = \int_0^{\overline{x^1}} \sqrt{g} B_0^2(\overline{x^1}, x^3) d\overline{x^1}. \quad (2.9)$$

e c é uma constante que satisfaz

$$\sqrt{g} b^2(\overline{x^1}, c, x^3) = 0.$$

A função $\Psi_H(\overline{x^1}, \overline{x^2})$ tem o significado de fluxo magnético através da superfície $\overline{x^2} = \text{constante}$, limitada pelo eixo magnético e a superfície magnética $\overline{x^1}$. Cada superfície magnética é definida por $\Psi_H(\overline{x^1}, \overline{x^2}) = \text{constante}$.

Capítulo 3

Sistemas de coordenadas

A simetria de um problema físico é um fator preponderante na escolha de um sistema de coordenadas.

Em muitos trabalhos usa-se o sistema de coordenadas polar local para descrever o plasma (por exemplo SHAFRANOV, 1963; GREENE *et al.*, 1971; YOSHIKAWA, 1974; DE MENNA, 1977; CLEMENTE, 1982). Este sistema de coordenadas é adequado quando o plasma toroidal tem grande razão de aspecto, isto é,

$$\frac{\text{Raio maior do toróide}}{\text{Raio menor do toróide}} \gg 1.$$

Nós usamos, neste trabalho, um novo sistema de coordenadas (sistema polar toroidal) que descreve melhor os plasmas toroidais quando a aproximação de grande razão de aspecto não é satisfatória. Neste capítulo mostramos o sistema convencional de coordenadas toroidais, o sistema de coordenadas polares locais e o nosso sistema polar toroidal. Todas as coordenadas são definidas em termos das coordenadas cilíndricas R , φ e Z . O eixo Z é coincidente com o eixo de rotação do toróide.

3.1 Coordenadas toroidais

As coordenadas toroidais ξ , ω e φ são definidas em relação às coordenadas cilíndricas R e Z como:

$$\begin{aligned} R &= \frac{R'_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} , \\ Z &= \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde R'_0 é uma constante com significado de raio maior.

As superfícies coordenadas são (MORSE e FESHBACH, 1953):

$\xi = \xi_0$ constante. São superfícies toroidais de raio menor $a = R'_0 / \sinh \xi_0$ e raio maior $R_0 = R'_0 \coth \xi_0$. Os toróides não são concêntricos pois o raio maior depende da constante ξ_0 ; para cada toróide temos um centro diferente.

Figura 3.1: Superfícies coordenadas do sistema toroidal convencional. Secção transversal $\varphi = \text{constante}$.

$\omega = \omega_0$ constante. São superfícies esféricas de raio $R'_0 / \sin \omega_0$ com centro sobre o eixo Z na posição $Z = R'_0 \cot \omega_0$. Todas as esferas passam pela circunferência $Z = 0$, $R = R'_0$ que corresponde ao toróide limite $\xi \rightarrow \infty$.

$\varphi = \varphi_0$ constante. São semi-planos que contém o eixo Z .

Na figura (3.1) temos um esquema das superfícies coordenadas do sistema toroidal convencional.

Um inconveniente no uso deste sistema de coordenadas é que a coordenada ξ não tem um significado geométrico claro.

3.2 Coordenadas polares locais

As coordenadas polares locais ρ , θ e φ são definidas em relação às coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned} R &= R_0 - \rho \cos \theta, \\ Z &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Figura 3.2: Superfícies coordenadas do sistema polar local. Secção transversal $\varphi = \text{constante}$.

Isto é equivalente a considerar o raio maior do toróide R_0 como sendo o centro do sistema de coordenadas. Na figura (3.2) temos o esquema das superfícies coordenadas deste sistema de coordenadas.

As superfícies $\rho = \rho_0 \text{ constante}$ representam toróides concêntricos com centro em R_0 . É importante ressaltar que ρ deve ser menor que R_0 para que o sistema defina univocamente um ponto.

Este sistema de coordenadas é conveniente para descrever plasmas com razão de aspecto grande (curvatura do toróide desprezível) porque nesta aproximação ($\rho/R_0 \ll 1$), o sistema se aproxima do sistema polar cilíndrico convencional.

Os efeitos toroidais são importantes quando se estuda o fenômeno de ressonância no plasma toroidal. Este efeito ficará mais claro no capítulo 6.

3.3 Coordenadas polares toroidais

A idéia que originou este sistema de coordenadas foi obtida das coordenadas toroidais convencionais ξ , ω e φ .

Nas coordenadas toroidais os fatores de métrica são:

$$\begin{aligned} h_\xi &= \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}, \\ h_\omega &= \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}, \\ h_\varphi &= \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \sinh \xi. \end{aligned}$$

O termo $R'_0/(\cosh \xi - \cos \omega)$ aparece em todos os fatores de métrica e tem a dimensão de comprimento.

Definimos

$$\begin{aligned} \rho_t &\equiv \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}, \\ \theta_t &\equiv \pi - \omega. \end{aligned}$$

Estas coordenadas estão relacionadas com as coordenadas polares locais (eq. 3.2) por:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho \left[1 - \frac{\rho}{R'_0} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{2R'_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \sin \theta_t &= \sin \theta \left[1 - \frac{\rho}{R'_0} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{2R'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

A demonstração se faz considerando que R'_0 e R_0 são coincidentes nas equações (3.1) e (3.2).

É claro da relação acima que $\rho_t \rightarrow \rho$ e $\theta_t \rightarrow \theta$ no limite de $\rho/R'_0 \ll 1$. Na figura (3.3) temos as superfícies coordenadas ρ_t e θ_t . Podemos notar que, se a razão de aspecto é pequena ($R'_0/\rho \simeq 1$), as superfícies coordenadas ρ_t apresentam uma deformação acentuada em relação a uma superfície toroidal circular.

Escolhemos este sistema de coordenadas (polar toroidal) por causa das suas características:

- É um sistema de coordenadas intrinsecamente toroidal.
- É um sistema de interpretação geométrica simples.

Usaremos, quando conveniente, a nomenclatura x^1 , x^2 e x^3 para designarmos coordenadas curvilíneas generalizadas; e^i e e_i para os vetores de base contravariante e covariante, respectivamente; g^{ij} para as componentes contravariantes da métrica do sistema curvilíneo.

Figura 3.3: Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal. O valor de s no gráfico representa a razão ρ_t/R'_0 .

Capítulo 4

Equilíbrio toroidal – razão de aspecto grande

Perturbações helicoidais sobre um plasma em equilíbrio alteram as superfícies magnéticas. Dependendo da intensidade da perturbação formam-se ilhas magnéticas ao redor de superfícies onde as linhas do campo magnético se fecham após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal (PULSATOR TEAM, 1985; KARGER *et al.*, 1975; OKANO, 1990). As superfícies magnéticas que apresentam estas características são conhecidas como superfícies magnéticas racionais.

Se as ilhas magnéticas sobre as diferentes superfícies racionais se tocam, aparecem regiões onde as linhas do campo magnético tem um comportamento caótico. A região caótica pode provocar uma perda no confinamento do plasma pois uma partícula carregada se move preferencialmente ao longo de uma linha de força.

Os modos *tearing* podem ser simulados por correntes helicoidais que fluem internamente ao plasma sobre uma superfície magnética racional. Para calcular o efeito destas correntes helicoidais sobre o plasma em equilíbrio consideramos que o campo magnético resultante é a superposição linear do campo magnético de equilíbrio B_0 e do campo magnético helicoidal perturbativo b . Não é considerada a resposta do plasma às correntes helicoidais.

Nossa primeira etapa é, então, obter o campo magnético do equilíbrio toroidal e o campo das correntes helicoidais para depois analisarmos os efeitos da superposição.

4.1 Equilíbrio MHD ideal

O sistema *plasma + campo magnético* é complexo pois as partículas carregadas que compõem o mesmo se movem sob a ação dos campos aplicados e, por sua vez, geram campos eletromagnéticos que modificam o campo aplicado.

Adotamos a teoria MHD (magnetoidrodinâmica) de um único fluido para descrever o plasma na presença de campos magnéticos. A teoria MHD assume que o plasma é descrito em termos de um fluido condutor com as variáveis hidrodinâmicas usuais – densidade ρ , velocidade v e pressão P (JACKSON, 1983).

Nós consideramos, neste trabalho, que o plasma não é resistivo, isto é, usamos as equações MHD *ideal* para descrever o plasma (NISHIKAWA e WAKATANI, 1990):

- equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.1)$$

- equação da lei da força

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (4.2)$$

onde foram desprezadas as forças viscosas e gravitacional.

Desprezando a corrente de deslocamento e a resistividade, os campos eletromagnéticos no fluido são descritos por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

No caso de se ter um confinamento estacionário, isto é, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ as equações (4.1-3) se reduzem a:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P. \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Da equação (4.4) é fácil ver que $\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0$. Isto significa que no equilíbrio, as linhas de força do campo magnético estão sobre uma superfície isobárica ($P = \text{constante}$). Analogamente, da equação (4.5) concluímos que $\mathbf{J} \cdot \nabla P = 0$, isto é, as linhas de corrente também estão sobre uma superfície de $P = \text{constante}$.

O sistema de equações (4.4-6) admite uma solução se o plasma tiver uma simetria (EDENSTRASSER, 1980a; KUCINSKI e CALDAS, 1990), isto é, se o plasma em equilíbrio tiver uma coordenada ignorável. Existem somente 3 classes de soluções simétricas possíveis para o sistema de equações (4.4-6): sistema com simetria axial, translacional e helicoidal (EDENSTRASSER, 1980b). Não existe prova conclusiva sobre a existência de soluções para o caso tridimensional não simétrico (EDENSTRASSER, 1980a; NISHIKAWA, 1990).

A solução do sistema (4.4-6) é escrita em termos da função de fluxo poloidal Ψ que satisfaz a equação de Grad-Shafranov. Se usarmos x^1 , x^2 e x^3 como coordenadas generalizadas, a equação de Grad-Shafranov é escrita como (KUCINSKI e CALDAS, 1990):

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 g_{33} P' - \mu_0^2 I I' + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right], \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta^* \Psi &\equiv g_{33} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{g_{33}} \right), \\ P' &\equiv \frac{dP}{d\Psi}, \\ I' &\equiv \frac{dI}{d\Psi}.\end{aligned}$$

P e I são a pressão cinética do plasma e o fluxo poloidal da densidade de corrente, respectivamente.

Nesta equação, a coordenada ignorável é x^3 . Isto significa que as grandezas físicas P , B e J independem de x^3 e o coeficiente métrico g_{ij} satisfaz $\partial g_{ij}/\partial x^3 = 0$. Uma expressão semelhante à (4.7) foi obtida por EDENSTRASSER (EDENSTRASSER, 1980a).

O campo magnético B e a densidade de corrente J são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}B &= \frac{e_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi + B_3 \frac{e_3}{g_{33}}, \\ J &= \frac{e_3}{g_{33}} \times \nabla I + J_3 \frac{e_3}{g_{33}},\end{aligned}$$

onde e_i é a base covariante ($e_i = \partial r / \partial x^i$).

Um dos grandes problemas em se resolver a equação de Grad-Shafranov é o desconhecimento da dependência $P(\Psi)$ e $I(\Psi)$. Para se saber esta dependência precisamos conhecer a solução, mas só obteremos a solução se conhecermos P e I . Em geral são escolhidas algumas funções $P(\Psi)$ e $I(\Psi)$ que concordem com o que é observado experimentalmente.

4.2 Equação do equilíbrio em coordenadas polares toroidais

Adotando x^1 , x^2 e x^3 como:

$$\begin{aligned}x^1 &\equiv \rho_t = \frac{R'_0}{\cosh \xi - \cos \omega}, \\ x^2 &\equiv \theta_t = \pi - \omega, \\ x^3 &\equiv \varphi,\end{aligned}$$

temos como base contravariante e^i ($e^i = \nabla x^i$):

$$\begin{aligned}e^1 &= \nabla \rho_t = -\rho_t \frac{\sinh \xi}{R'_0} e_\xi + \rho_t \frac{\sin \theta_t}{R'_0} e_{\theta_t}, \\ e^2 &= \nabla \theta_t = \frac{e_{\theta_t}}{\rho_t}, \\ e^3 &= \nabla \varphi = \frac{e_\varphi}{\rho_t \sinh \xi}.\end{aligned}$$

Os elementos contravariantes da matriz de métrica g^{ij} são ($g^{ij} = e^i \cdot e^j$):

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t, \\ g^{12} &= \frac{\sin \theta_t}{R'_0}, \\ g^{13} &= 0, \\ g^{22} &= \frac{1}{\rho_t^2}, \\ g^{23} &= 0, \\ g^{33} &= \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

onde

$$R = R'_0 \left(1 - \frac{2\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t - \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

A raiz quadrada do determinante da métrica é:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &\equiv (e^1 \cdot e^2 \times e^3)^{-1}, \\ \sqrt{g} &= R'_0 \rho_t. \end{aligned}$$

Com a métrica calculada podemos escrever a equação de Grad-Shafranov (eq. 4.7) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left(\rho_t \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t^2} &= \mu_0 J_{30}(\Psi) + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} \left(2 \frac{\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t + \frac{\rho_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t \right) \\ &+ \frac{\rho_t \cos \theta_t}{R'_0} \left(2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho_t^2} + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t} \right) + \frac{\rho_t \sin \theta_t}{R'_0} \left(\frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} - \frac{2}{\rho_t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t \partial \rho_t} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\mu_0 J_{30}(\Psi) = -\mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{1}{2} \mu_0^2 I^2 \right).$$

As componentes do campo magnético de equilíbrio são dadas por

$$B_0^1 = B_0 \cdot \nabla \rho_t = -\frac{1}{R'_0 \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t}, \quad (4.10)$$

$$B_0^2 = B_0 \cdot \nabla \theta_t = \frac{1}{R'_0 \rho_t} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_t}, \quad (4.11)$$

e o campo toroidal por

$$B_{03} = R B_\varphi = -\mu_0 I. \quad (4.12)$$

4.3 Determinação de Ψ

Em geral a equação para Ψ é não linear e não existe um método geral de resolução.

A equação de Grad-Shafranov deve ser resolvida de forma autoconsistente pois a equação depende de duas funções $P(\Psi)$ e $I(\Psi)$ que por sua vez dependem da solução.

Nós construímos um procedimento para determinar Ψ por aproximações sucessivas (KUCINSKI *et al.*, 1990) semelhante ao de YOSHIKAWA (YOSHIKAWA, 1974). O método de YOSHIKAWA utiliza as coordenadas polares locais.

No limite de grande razão de aspecto ($R'_0/\rho_t \rightarrow \infty$), a equação (4.9) se reduz a

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \left(\rho_t \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho_t} \right) + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_{30}(\Psi_0(\rho_t, \theta_t)).$$

A função $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$ é a solução de ordem zero em (ρ_t/R'_0) da equação de Grad-Shafranov. Esta equação é idêntica à equação do equilíbrio cilíndrico: se conhecemos uma solução cilíndrica temos uma solução para a função $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$ pois equações idênticas com condições de contorno idênticas possuem a mesma solução. Embora a função $\Psi_0(\rho_t, \theta_t)$ seja idêntica à solução cilíndrica, seu significado é diferente pois ρ_t e θ_t são coordenadas com características toroidais.

Para determinarmos Ψ escrevemos esta função como soma da solução de ordem zero mais uma correção $\delta\Psi$

$$\Psi(\rho_t, \theta_t) = \Psi_0(\rho_t) + \delta\Psi(\rho_t, \theta_t).$$

Admitimos também que Ψ_0 é independente de θ_t , isto é, $\Psi_0(\rho_t)$ satisfaz

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{d}{d\rho_t} \left(\rho_t \frac{d\Psi_0(\rho_t)}{d\rho_t} \right) = \mu_0 J_{30}(\Psi_0(\rho_t)). \quad (4.13)$$

Se a correção $\delta\Psi$ for pequena, podemos escrever os termos de densidade de corrente J e de pressão P na equação (4.9) como:

$$\begin{aligned} J_{30}(\Psi) &\simeq J_{30}(\Psi_0) + \left[\frac{dJ_{30}}{d\Psi_0}(\Psi_0) \right] \delta\Psi, \\ \frac{dP}{d\Psi}(\Psi) &\simeq \frac{dP}{d\Psi_0}(\Psi_0) + \left[\frac{d^2P}{d\Psi_0^2}(\Psi_0) \right] \delta\Psi. \end{aligned}$$

Os perfis da pressão e da densidade de corrente estão relacionados na aproximação cilíndrica por

$$-R'_0{}^2 \frac{dP}{d\Psi_0}(\Psi_0) = \beta_p J_{30}(\Psi_0),$$

onde β_p é a razão entre a pressão cinética média e a pressão magnética na superfície do plasma devido ao campo poloidal.

Com as aproximações acima mencionadas, a solução para Ψ resulta em

$$\Psi(\rho_t, \theta_t) = \Psi_0(\rho_t) + \Psi'_0(\rho_t) \cos \theta_t \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho, \quad (4.14)$$

onde

$$\Lambda(\rho_t) = -1 + \beta_p + \frac{1}{\rho_t^2 \Psi_0'^2} \int_0^{\rho_t} \rho \Psi_0'^2 d\rho.$$

Para $\rho_t = a$, Λ é o fator de assimetria do campo poloidal.

Nesta solução, termos da ordem de $(\rho_t/R_0')^2$ foram desprezados.

Fica claro das equações (4.13) e (4.14) que, se conhecemos um perfil da densidade de corrente $J_{30}(\rho_t)$, podemos determinar a função de fluxo Ψ .

Neste trabalho, o perfil da densidade de corrente é uma função com um máximo no centro do plasma e nulo na borda:

$$J_{30}(\rho_t) = \frac{I_p R_0'}{\pi a^2} (\gamma + 1) \left[1 - \frac{\rho_t^2}{a^2} \right]^\gamma,$$

onde

$$\begin{aligned} I_p &= \text{corrente de plasma,} \\ a &= \text{raio menor do plasma,} \\ \gamma &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Com esta escolha de perfil, as componentes do campo magnético de equilíbrio B_0 são dadas por (eqs. 4.10-12):

$$B_0^1 = \frac{\Psi_0'(\rho_t)}{R_0' \rho_t} \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R_0'} \Lambda(\rho) d\rho \sin \theta_t, \quad (4.15)$$

$$B_0^2 = \frac{1}{R_0' \rho_t} \left[\Psi_0'(\rho_t) \left(1 - \frac{\rho_t}{R_0'} \Lambda(\rho_t) \cos \theta_t \right) + \Psi_0''(\rho_t) \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R_0'} \Lambda(\rho) d\rho \cos \theta_t \right], \quad (4.16)$$

$$B_0^3 = -\frac{\mu_0 I}{R^2}, \quad (4.17)$$

onde

$$\Psi_0'(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_p R_0'}{2\pi \rho_t} \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right].$$

$$I \simeq -\frac{I_e}{2\pi}.$$

I_e é a corrente que produz o campo toroidal externo.

Capítulo 5

Campo helicoidal perturbativo – razão de aspecto grande

O efeito de um campo helicoidal externo sobre o tokamak é a formação de ilhas magnéticas ao redor de superfícies onde o fator de segurança q é um número racional (superfícies racionais). O tamanho das ilhas magnéticas depende da intensidade dos modos helicoidais (m, n) que compõem a perturbação. Portanto, é importante conhecer os diferentes modos helicoidais (m, n) da perturbação.

Basicamente existem 3 maneiras de se determinar o campo magnético de uma distribuição de corrente:

1. Calcular o campo magnético B pela integração direta da lei de Biot-Savart (SY, 1981).
2. Calcular o potencial vetor A e depois B ($B = \nabla \times A$) (MIRIN *et al.*, 1976).
3. Calcular o potencial escalar magnético Φ e depois B ($B = \nabla \Phi$) (KUCINSKI e CALDAS, 1987; KUCINSKI, 1992).

Neste trabalho as correntes perturbativas fluem ao longo das linhas do campo magnético sobre uma superfície magnética racional de seção reta não circular. Para calcularmos o campo magnético produzido por tais correntes usamos a abordagem do potencial escalar magnético.

No potencial escalar magnético calculado por KUCINSKI (KUCINSKI, 1992) considera-se uma distribuição helicoidal de corrente sobre uma superfície toroidal não circular. Este é o potencial usado, neste trabalho, para calcular o campo magnético perturbativo b .

5.1 Potencial escalar magnético Φ

No trabalho de KUCINSKI (KUCINSKI, 1992) são usados dois sistemas de coordenadas: coordenadas toroidais convencionais (ξ, ω, φ) e um sistema não ortogonal genérico (x^1, x^2, x^3) . O sistema de coordenada toroidal é usado para escrever o potencial escalar magnético Φ que satisfaz a equação de Laplace. Nas coordenadas toroidais convencionais,

a equação de Laplace é separável. O sistema não ortogonal é usado para especificar as condições de contorno sobre o campo magnético.

A superfície toroidal não circular é definida por $x^1 = \text{constante}$. A coordenada x^1 está relacionada com as coordenadas toroidais convencionais ξ e ω por uma relação da forma:

$$\eta = \bar{\eta}(x^1) + \tilde{\eta}(x^1) \cos \theta_t, \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \cosh \xi, \\ \theta_t &= \pi - \omega. \end{aligned}$$

Se $\tilde{\eta}(x^1) = 0$, $x^1 = \text{constante}$ representa uma superfície toroidal circular ($\xi = \text{constante}$).

A corrente helicoidal que flui ao longo de uma linha do campo magnético sobre a superfície x^1 é descrita em termos do fator de segurança local q definido por

$$q \equiv \frac{d\varphi}{d\theta_t} = \frac{B_0 \cdot \nabla \varphi}{B_0 \cdot \nabla \theta_t},$$

onde B_0 é o campo magnético de equilíbrio do plasma. O fator de segurança nos dá uma noção do quão rápido a linha de campo gira no ângulo poloidal θ_t para um dado deslocamento angular φ . Em tokamaks com secção reta quase circular podemos escrever

$$q \simeq \bar{q}(x^1) + \tilde{q}(x^1) \cos \theta_t. \quad (5.2)$$

Para plasmas com formas arbitrárias, as equações (5.1) e (5.2) devem ser substituídas por séries de Fourier.

Sobre uma superfície racional (m, n), as linhas de força se fecham após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. Nestas superfícies, a equação (5.2), se reduz a

$$\frac{d\varphi}{d\theta_t} = \frac{m}{n} + \tilde{q}(x_0^1) \cos \theta_t, \quad (5.3)$$

onde $x^1 = x_0^1$ define a superfície magnética racional.

Da relação (5.3), podemos definir uma coordenada helicoidal x^2 como

$$x^2 \equiv m\theta_t - n\varphi + n\tilde{q}(x_0^1) \sin \theta_t.$$

$x^2 = \text{constante}$ representa uma linha do campo magnético B_0 ao longo do qual flui a corrente.

A terceira coordenada relevante para se determinar o potencial escalar magnético Φ é o ângulo poloidal θ_t ($x^3 \equiv \theta_t$).

Uma corrente que flui ao longo de uma linha de campo sobre uma superfície racional é representada pela densidade de corrente J como:

$$J = \frac{I_h}{\sqrt{g}} \delta(x^1 - x_0^1) \delta(x^2 - x_0^2) e_3.$$

onde I_h é a corrente que passa pela linha de campo.

Neste caso, as condições de contorno são escritas como:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right] &= -\frac{\mu_0 I_h}{\pi} e^{ix^2} \frac{g^{12}}{g^{11}}, \\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right] &= \frac{\mu_0 I_h}{\pi} e^{ix^2}, \\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right] &= 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

onde g^{ij} são os coeficientes métricos e os colchetes representam a descontinuidade nas componentes do campo magnético interno e externo à superfície de corrente.

O potencial escalar magnético, calculado da equação de Laplace, é dado por (KUCINSKI, 1992):

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \bar{\eta}_0^{-1/2} (\eta + \cos\theta_t)^{1/2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{|\nu|} C_\nu Z_\nu(\eta) e^{i(\nu\theta_t - n\tilde{\eta} \sin\theta_t)} e^{ix^2}, \quad (5.5)$$

onde $\bar{\eta}_0$ é o valor de $\bar{\eta}$ na superfície racional x_0^1 e $\varepsilon^{|\nu|} C_\nu$ são constantes obtidas das condições de contorno (5.4) (ver apêndice B).

A função $Z_\nu(\eta)$ é

$$Z_\nu(\eta) = \begin{cases} Q_{m+\nu-1/2}^n(\eta) & \text{na região interna à corrente,} \\ P_{m+\nu-1/2}^n(\eta) & \text{na região externa à corrente,} \end{cases}$$

onde P e Q são as funções de Legendre.

Em aproximação de primeira ordem, os potenciais interno Φ^i e externo Φ^e à corrente são escritos como:

$$\Phi^{i,e} \simeq \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \left(\frac{\eta + \cos\theta_t}{\bar{\eta}_0} \right)^{1/2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} M_\nu^{i,e} \frac{Z_\nu(\eta)}{Z_\nu(\bar{\eta}_0)} \sin[(m+\nu)\theta_t - n\varphi],$$

onde

$$\begin{aligned}M_0^e &= \frac{J_0}{2}, & M_0^i &= -\frac{J_0}{2}, \\ M_1^e &= \frac{J_1}{2} - \frac{m}{4} \frac{\tilde{\eta}}{\bar{\eta}} J_0 - \frac{m}{m+1} \frac{1}{8\bar{\eta}} J_0, \\ M_{-1}^e &= -\frac{J_1}{2} - \frac{m}{4} \frac{\tilde{\eta}}{\bar{\eta}} J_0 - \frac{m-2}{m-1} \frac{1}{8\bar{\eta}} J_0, \\ M_1^i &= -\frac{J_1}{2} - \frac{m}{4} \frac{\tilde{\eta}}{\bar{\eta}} J_0 + \frac{m+2}{m+1} \frac{1}{8\bar{\eta}} J_0, \\ M_{-1}^i &= \frac{J_1}{2} - \frac{m}{4} \frac{\tilde{\eta}}{\bar{\eta}} J_0 + \frac{m}{m-1} \frac{1}{8\bar{\eta}} J_0.\end{aligned}$$

Todas as quantidades $M_\nu^{i,e}$ são calculadas na superfície de descontinuidade e $J_k \equiv J_k(n\tilde{\eta})$ são funções de Bessel de ordem k .

5.2 Campo magnético

Como foi dito anteriormente, o campo magnético é calculado a partir do potencial escalar magnético Φ ($\mathbf{b} = \nabla\Phi$). Em coordenadas generalizadas x^1 , x^2 e x^3 temos:

$$\mathbf{b} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2} \mathbf{e}^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^3} \mathbf{e}^3.$$

A escolha das coordenadas generalizadas é muito importante para a análise da superposição do campo helicoidal perturbativo com o campo magnético de equilíbrio usando o método da média. No método da média (capítulo 2), uma das coordenadas é a função de fluxo Ψ .

A posição de uma superfície magnética de um tokamak de grande razão de aspecto pode ser descrita aproximadamente por uma coordenada ρ_0 definida por

$$\Psi(\rho_t, \theta_t) = \Psi(\rho_t = \rho_0, \theta_t = \pi/2)$$

Devido à equação (4.14)

$$\Psi_0(\rho_0) \simeq \Psi_0(\rho_t) + U(\rho_t) \cos \theta_t, \quad (5.6)$$

onde

$$U(\rho_t) = \Psi'_0(\rho_t) \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho.$$

A coordenada ρ_0 representa o valor médio de ρ_t na superfície magnética.

Para podermos trabalhar com a coordenada ρ_0 precisamos escrevê-la explicitamente como uma função conhecida. Se escrevermos

$$\rho_t = \rho_0 + \delta\rho_0, \quad (5.7)$$

e substituimos esta relação em (5.6) temos

$$\delta\rho_0 \simeq - \int_{\rho_0}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \simeq - \int_{\rho_t}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho. \quad (5.8)$$

Ou seja a coordenada ρ_0 é muito próxima de ρ_t e coincide com a mesma no caso de grande razão de aspecto.

Adotamos ρ_0 como coordenada de fluxo. As outras duas coordenadas relevantes para calcularmos as componentes do campo perturbativo são: uma coordenada helicoidal e uma coordenada poloidal. Escrevendo as coordenadas explicitamente temos:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv \rho_0, \\ x^2 &\equiv u = m\theta_t - n\varphi, \\ x^3 &\equiv \theta_t. \end{aligned}$$

A base contravariante $\mathbf{e}^i$ deste sistema de coordenadas é:

$$\begin{aligned}
e^1 &\simeq \left(1 - \frac{\rho_0}{R'_0} \Lambda(\rho_0) \cos \theta_t\right) \left[-\left(1 - \frac{\rho_0}{R'_0} \cos \theta_t\right) e_\xi + \frac{\rho_0}{R'_0} \sin \theta_t e_{\theta_t}\right] \\
&\quad + \frac{\delta \rho_0}{\rho_0} \sin \theta_t e_{\theta_t}, \\
e^2 &\simeq \frac{m}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho_0}{\rho_0} \cos \theta_t\right) e_{\theta_t} - \frac{n}{R'_0} \left(1 + \frac{\rho_0}{R'_0} \cos \theta_t\right) e_\varphi, \\
e^3 &\simeq \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta \rho_0}{\rho_0} \cos \theta_t\right) e_{\theta_t}.
\end{aligned}$$

$\sqrt{g}$ é igual a

$$\sqrt{g} = \frac{R'_0 \rho_0}{n} \left[1 + \left(\frac{\rho_0}{R'_0} \Lambda(\rho_0) + \frac{\delta \rho_0}{\rho_0}\right) \cos \theta_t\right].$$

Calculando as componentes contravariantes do campo perturbativo em termos de ρ_0 , u e θ_t temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} b^{1i,c} &= -\frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} M_\nu^{i,c} \left(\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0}\right)^{\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}} \sin[u + \nu \theta_t] \\
&\quad + \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu^{i,c}}{2} \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0}\right)^{\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}} \left[\frac{\delta \rho_0}{\rho_0} \left(\left(\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}\right)^2 + (m + \nu)\right)\right. \\
&\quad \left.+ \frac{\rho_0}{R'_0} \left(\alpha^{i,c} \left(\alpha^{i,c} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}\right) + (m + \nu)\right)\right] \sin[u + (\nu + 1)\theta_t] \\
&\quad + \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu^{i,c}}{2} \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0}\right)^{\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}} \left[\frac{\delta \rho_0}{\rho_0} \left(\left(\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}\right)^2 - (m + \nu)\right)\right. \\
&\quad \left.+ \frac{\rho_0}{R'_0} \left(\alpha^{i,c} \left(\alpha^{i,c} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\alpha^{i,c} + \frac{1}{2}\right) - (m + \nu)\right)\right] \sin[u + (\nu - 1)\theta_t], \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} b^{3i,c} &= \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu^{i,c}}{\rho^{m,n}} \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0}\right)^{\alpha^{i,c} + \frac{3}{2}} (m + \nu) \cos[u + \nu \theta_t] \\
&\quad + \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu^{i,c}}{2\rho^{m,n}} \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0}\right)^{\alpha^{i,c} + \frac{3}{2}} \left[\frac{\rho_0}{R'_0} \left(-\frac{1}{2} - (m + \nu)(\alpha^{i,c} - \Lambda(\rho_0))\right)\right. \\
&\quad \left.- (m + \nu)\left(\alpha^{i,c} + \frac{3}{2}\right) \frac{\delta \rho_0}{\rho_0}\right] \cos[u + (\nu - 1)\theta_t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \frac{R'_0}{n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu^{i,e}}{2\rho^{m,n}} \left(\frac{\rho^{m,n}}{\rho_0} \right)^{\alpha^{i,e} + \frac{3}{2}} \left[\frac{\rho_0}{R'_0} \left(\frac{1}{2} - (m + \nu)(\alpha^{i,e} - \Lambda(\rho_0)) \right) \right. \\
& \quad \left. - (m + \nu)(\alpha^{i,e} + \frac{3}{2}) \frac{\delta\rho_0}{\rho_0} \right] \cos[u + (\nu + 1)\theta_i] , \tag{5.10}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{g}b^2 \simeq m\sqrt{g}b^3.$$

Nestas expressões

$$\begin{aligned}
\alpha^i & \equiv -(m + \nu + 1/2) , \\
\alpha^e & \equiv m + \nu - 1/2 , \\
\rho^{m,n} & \equiv \text{coordenada radial da perturbação } (m, n) .
\end{aligned}$$

Os índices i e e representam componentes internas e externas, respectivamente.

Capítulo 6

Tokamak de razão de aspecto grande

O efeito das correntes helicoidais sobre as superfícies magnéticas de equilíbrio deve ser mais acentuado onde q é um número racional. Ao redor destas superfícies surgem ilhas magnéticas devido à quebra de simetria do campo de equilíbrio pela corrente perturbativa.

Denominamos de ilha magnética principal às ilhas que surgem ao redor da superfície cuja helicidade (m, n) coincide com a da corrente perturbativa; as ilhas magnéticas secundárias ou satélites são as ilhas que surgem ao redor das outras superfícies racionais cujas helicidades são $m \pm 1, m \pm 2 \dots$

Usaremos dois métodos para verificar a influência das correntes helicoidais sobre o plasma em equilíbrio. O método da média e a integração numérica das linhas do campo magnético.

6.1 Método da média

Para usarmos o método da média escolhemos as mesmas coordenadas do cálculo do campo perturbativo (capítulo 5):

$$\begin{aligned}x^1 &= \rho_0, \\x^2 &= m\theta_t - n\varphi, \\x^3 &= \theta_t.\end{aligned}\tag{6.1}$$

A coordenada ρ_0 define aproximadamente uma superfície magnética, x^2 é uma coordenada helicoidal e x^3 , uma coordenada poloidal. O equilíbrio do plasma só depende de ρ_0 e θ_t , o que está de acordo com as exigências da seção 2.1.

Neste sistema de coordenadas, podemos escrever as componentes do campo magnético de equilíbrio como (eqs. 4.16–17):

$$B_0 \cdot \nabla \theta_t \simeq \frac{\Psi'_0(\rho_0)}{R'_0 \rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{R'_0} \Lambda(\rho_0) - \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \right) \cos \theta_t \right], \tag{6.2}$$

$$B_0 \cdot \nabla \varphi \simeq \frac{\mu_0 I_c}{2\pi R'_0} \left(1 + 2 \frac{\rho_0}{R'_0} \cos \theta_t \right). \quad (6.3)$$

Foi considerado, nestas equações, que (eqs. 4.8 e 5.7)

$$(R)^2 \simeq R_0'^2 \left(1 - 2 \frac{\rho_t}{R'_0} \cos \theta_t \right),$$

$$\rho_t \simeq \rho_0 - \int_{\rho_0}^a \frac{\rho}{R'_0} \Lambda(\rho) d\rho \cos \theta_t.$$

Para determinarmos a função que descreve as superfícies magnéticas médias Ψ_H precisamos calcular primeiramente o termo $\widehat{F}^2$ da equação (2.8). Da equação (2.5), o termo F^2 é dado por

$$F^2 = \frac{B_0 \cdot \nabla x^2}{B_0 \cdot \nabla x^3} = m - n \frac{B_0 \cdot \nabla \varphi}{B_0 \cdot \nabla \theta_t}. \quad (6.4)$$

Introduzindo o fator de segurança q

$$q = \frac{d\varphi}{d\theta_t} = \frac{B_0 \cdot \nabla \varphi}{B_0 \cdot \nabla \theta_t},$$

a equação (6.4) fica escrita como:

$$F^2 = m - nq.$$

Usando as equações (6.2) e (6.3), a expressão para F^2 se reduz a

$$F^2 = m - n\bar{q} - \tilde{q} \cos \theta_t,$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{\mu_0 I_c}{2\pi \Psi_0'(\rho_0)} \frac{\rho_0}{R'_0}, \\ \tilde{q} &= \bar{q} \frac{a}{R'_0} \left(\frac{\rho_0}{a} (2 + \Lambda(\rho_0)) - \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho_0}^a \frac{\rho}{a} \Lambda(\rho) d\rho \right). \end{aligned}$$

Aplicando as operações $\overline{}$, $\widetilde{}$ e $\widehat{}$ temos:

$$\begin{aligned} \overline{F^2} &= m - n\bar{q}, \\ \widetilde{F^2} &= -n\tilde{q} \cos \theta_t, \\ \widehat{F^2} &= -n\tilde{q} \sin \theta_t. \end{aligned} \quad (6.5)$$

O próximo passo para obter Ψ_H é determinar a superfície magnética média não perturbada Ψ_H^0 (eq. 2.9).

Em torno da superfície racional $\tilde{q}(\rho^{m,n}) = m/n$, a função de fluxo médio Ψ_H^0 tem um máximo, isto é, $\Psi_H^{0'}(\rho^{m,n}) = 0$. Vamos demonstrar esta afirmação.

Da equação (2.9) temos que

$$\Psi_H^{0'}(\bar{\rho}_0) = \sqrt{\bar{q} B_0^2},$$

ou seja,

$$\Psi_H^0{}'(\bar{\rho}_0) = \sqrt{g} B_0 \cdot \nabla \theta_t(m - nq).$$

Usando a equação (6.2) temos

$$\Psi_H^0{}'(\bar{\rho}_0) = \Psi_0'(\frac{m}{n} - \bar{q}).$$

Se $\bar{q} = m/n$ então $\Psi_H^0{}' = 0$.

Ao redor da superfície racional $\rho^{m,n}$ a função $\Psi_H^0(\bar{\rho}_0)$ é, então, aproximada por:

$$\Psi_H^0 \simeq -\frac{1}{2} (\Psi_0' \bar{q}')_{\rho^{m,n}} (\Delta \bar{\rho}_0)^2 + \text{constante},$$

onde

$$\Delta \bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0 - \rho^{m,n}.$$

Para finalizarmos o cálculo de Ψ_H precisamos somente obter a integral da equação (2.8) que envolve a componente do campo perturbativo b^1 .

No capítulo 5, foi obtida a componente b^1 do campo perturbativo como uma série. Os primeiros harmônicos são escritos como (eq. 5.9):

$$\sqrt{g} b^1 \simeq b_{m,n}^1 \sin u + b_{m+1,n}^1 \sin(u + \theta_t) + b_{m-1,n}^1 \sin(u - \theta_t). \quad (6.6)$$

Neste campo considera-se que a corrente flui ao longo de uma linha de força da superfície racional $\bar{q}(\rho^{m,n}) = m/n$.

Das equações (6.5) e (6.6) temos:

$$\begin{aligned} & \int_c^{\sqrt{x^2 + \bar{F}^2}} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2 \\ &= \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu,n}^1 \int_c^{\sqrt{x^2 + \bar{F}^2}} \sin(x^2 + \nu \theta_t) dx^2, \\ &= - \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu,n}^1 \cos(\bar{x}^2 - n\bar{q} \sin \theta_t + \nu \theta_t). \end{aligned}$$

Falta agora tirar a média na coordenada θ_t . Esta média é facilmente calculada se usamos o resultado

$$e^{iz \sin \theta_t} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(z) e^{il\theta_t},$$

onde $J_l(z)$ são funções de Bessel de ordem l . Temos então

$$\int_c^{\sqrt{x^2 + \bar{F}^2}} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2 = - \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu,n}^1 \cos(\bar{x}^2) J_\nu(n\bar{q}).$$

Tendo todos os termos calculados podemos escrever a função que descreve a superfície magnética média na vizinhança da ressonância (m, n) como:

$$\Psi_H \simeq -\frac{1}{2}(\Psi'_0 \bar{q}')_{\rho^{m,n}} (\Delta \bar{\rho}_0)^2 + \delta \Psi_H \cos(\bar{x}^2), \quad (6.7)$$

onde

$$\delta \Psi_H = \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu, n}^1 J_\nu(n\tilde{q}) \Big|_{\rho^{m,n}}.$$

Essa equação é semelhante à Hamiltoniana de um pêndulo não linear (Sagdeev et al., 1988).

Uma superfície magnética é dada por

$$\Psi_H(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{constant} \epsilon,$$

que pode ser reduzida a

$$\frac{\Delta \bar{\rho}_0}{\rho^{m,n}} \simeq \pm \frac{W}{K} \left(1 - K^2 \sin^2 \frac{\bar{x}^2}{2} \right)^{1/2}.$$

onde K é uma constante positiva e $\delta \Psi_H \geq 0$.

A constante W é dada por

$$W = \left(\frac{4|\delta \Psi_H|}{n\bar{q}' \Psi'_0 \bar{\rho}_0^2} \right)^{1/2} \Big|_{\rho^{m,n}}.$$

Se $\delta \Psi_H < 0$

$$\frac{\Delta \bar{\rho}_0}{\rho^{m,n}} \simeq \pm \frac{W}{K} \left(1 - K^2 \cos^2 \frac{\bar{x}^2}{2} \right)^{1/2}.$$

Se $K = 1$, temos a separatriz da ilha magnética principal. Para $K > 1$ temos as superfícies internas à separatriz e para $K < 1$, as superfícies externas.

Em aproximação de primeira ordem as coordenadas $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$ são (eq. 2.7):

$$\bar{\rho}_0 = \rho_0,$$

$$\bar{x}^2 = x^2 - \widehat{F}^2 = m\theta_t - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_t.$$

A separatriz da ilha magnética principal é, portanto, escrita como:

$$\frac{\rho_0 - \rho^{m,n}}{\rho^{m,n}} = \pm W \cos \left[\frac{1}{2}(m\theta_t - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_t) \right], \quad (6.8)$$

se $\delta \Psi_H \geq 0$. Se $\delta \Psi_H < 0$ basta trocar a função *cosseno* pela função *seno* na expressão anterior.

Para calcularmos as outras ilhas magnéticas devemos fazer uma alteração na escolha da coordenada x^2 . Para obter a separatriz da ilha satélite na superfície $\bar{q} = (m + \Delta m)/n$ escolhemos x^2 como

$$x^2 = (m + \Delta m)\theta_t - n\varphi.$$

Seguindo o mesmo procedimento que para o caso da ilha principal obtemos a função de fluxo médio não perturbado Ψ_H^0 como

$$\Psi_H^0 \simeq -\frac{1}{2} (\Psi_0' \bar{q}')_{\rho^{m+\Delta m, n}} (\Delta \bar{\rho}_0)^2 + \text{constante},$$

onde

$$\Delta \bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0 - \rho^{m+\Delta m, n}.$$

Deve-se notar que a posição da ressonância da ilha satélite é $\rho^{m+\Delta m, n}$.

A integral da equação (2.8) é escrita como

$$\begin{aligned} & \int_c^{\bar{x}^2 + \bar{F}^2} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2 \\ &= \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu, n}^1 \int_c^{\bar{x}^2 + \bar{F}^2} \sin(x^2 + (\nu - \Delta m)\theta_t) dx^2, \\ &= - \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu, n}^1 \cos(\bar{x}^2 - n\tilde{q} \sin \theta_t + (\nu - \Delta m)\theta_t), \end{aligned}$$

Tirando a média na coordenada θ_t esta expressão fica

$$\overline{\int_c^{\bar{x}^2 + \bar{F}^2} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2} = - \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu, n}^1 \cos(\bar{x}^2) J_{\nu-\Delta m}(n\tilde{q}).$$

A separatriz da ilha magnética secundária na superfície $\rho^{m+\Delta m, n}$ será

$$\frac{\rho_0 - \rho^{m+\Delta m, n}}{\rho^{m+\Delta m, n}} = \pm W \cos \left[\frac{1}{2} ((m + \Delta m)\theta_t - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_t) \right], \quad (6.9)$$

onde

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{4|\delta\Psi_H|}{n\tilde{q}' \Psi_0' \bar{\rho}_0^2} \right)^{1/2} \bigg|_{\rho^{m+\Delta m, n}}, \\ \delta\Psi_H &= \sum_{\nu=-1}^{+1} b_{m+\nu, n}^1 J_{\nu-\Delta m}(n\tilde{q}) \bigg|_{\rho^{m+\Delta m, n}}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

e $\delta\Psi_H \geq 0$.

Se $\delta\Psi_H < 0$ temos a função *seno* ao invés de *coseno*.

Alguns resultados importantes podem ser obtidos da superfície média calculada:

- Se tivermos apenas um modo helicoidal no campo perturbativo, isto é, se ν só tiver o valor 0, temos a formação de ilhas magnéticas ao redor de todas as superfícies magnéticas racionais. Este acoplamento de modos aparece naturalmente no método da média e é devido à curvatura toroidal.
- A nossa teoria prevê que se houver apenas um modo helicoidal na perturbação e o plasma for cilíndrico, temos somente a formação da ilha magnética principal. Este resultado pode ser facilmente visto da eq. (6.10) pois $\tilde{q} = 0$ no caso cilíndrico e $J_{-\Delta m}(n\tilde{q}) = 0$ para qualquer $\Delta m \neq 0$.
- A largura da ilha magnética aumenta com a raiz quadrada da intensidade da perturbação, que no nosso caso é a intensidade da corrente helicoidal.
- A largura da ilha magnética é inversamente proporcional à raiz quadrada do "shear" da linha de força, isto é, $\tilde{q}'$. Esta dependência está de acordo com a obtida por FERNANDES *et al.* (FERNANDES *et al.*, 1988), que usou o modelo cilíndrico com correção toroidal apenas no campo toroidal.

Na próxima seção é feita a comparação direta da superfície média aqui obtida com a integração numérica das linhas de força.

6.2 Integração numérica

A comparação entre o método da média e a integração numérica das linhas de força é feita por meio do mapa de Poincaré. O mapa de Poincaré é construído a partir dos pontos onde a linha de força cruza o plano $\varphi = \varphi_0$. Para obtermos os pontos onde a linha de força cruza o plano precisamos acompanhar a linha sobre uma superfície magnética. Isto é possível fazendo a integração numérica da equação $B \times dr = 0$.

Se usarmos as mesmas coordenadas do método da média

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho_0, \\ x^2 &\equiv u = m\theta_t - n\varphi, \\ x^3 &= \theta_t. \end{aligned}$$

a equação $B \times dr = 0$ se reduz ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\rho_0}{d\theta_t} = \frac{b^1}{B_0^3 + b^3}. \quad (6.11)$$

$$\frac{du}{d\theta_t} = \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3}. \quad (6.12)$$

Como o mapa de Poincaré é feito no plano $\varphi = \text{constante}$ temos que reescrever este sistema de equações considerando φ como coordenada independente.

Com esta idéia, a equação (6.11) é reescrita como

$$\frac{d\rho_0}{d\varphi} = \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} \frac{d\theta_t}{d\varphi}. \quad (6.13)$$

Se usamos a definição da coordenada u , a equação (6.12) fica reescrita como

$$\frac{du}{d\theta_t} = m - n \frac{d\varphi}{d\theta_t} \simeq \frac{B_0^2}{B_0^3} + \frac{b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{b^3}{B_0^3}. \quad (6.14)$$

Usando as definições

$$B_0^2 = B_0 \cdot \nabla u \quad \text{e} \quad B_0^3 = B_0 \cdot \nabla \theta_t.$$

é fácil mostrar que a equação (6.13) pode ser simplificada para

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{b^3}{B_0^3} \right)^{-1}. \quad (6.15)$$

onde q é o fator de segurança.

O sistema de equações que determina uma linha de força fica, portanto, escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{d\varphi} &= \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} \frac{d\theta_t}{d\varphi}, \\ \frac{d\theta_t}{d\varphi} &= \frac{1}{q} \left(1 - \frac{b^3}{B_0^3} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

As componentes do campo perturbativo b^1 e b^3 são dadas pelas equações (5.9) e (5.10) do capítulo 5.

Para integrarmos numericamente o sistema (6.16) precisamos de uma condição inicial ρ_0^i e θ_t^i . Este par de coordenadas é o primeiro ponto do mapa de Poincaré, os pontos consecutivos são obtidos sempre que

$$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi$$

onde n é um inteiro positivo.

No IFUSP existe uma biblioteca de rotinas numéricas que integram sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A rotina por nós escolhida é a DIVPAG que faz parte do IMSL. Esta rotina usa o método de Adams-Moulton para a integração numérica.

O método de Adams-Moulton é um método de múltiplos passos com um esquema de predição-correção, isto é, cada ponto é calculado usando os pontos anteriores. O ponto final é obtido fazendo-se um refinamento do ponto calculado na predição por um processo iterativo. Esquematicamente o método corresponde a

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= f(y_{i-n}, y_{i-n+1}, \dots, y_{i-1}, y_i; x_i) \end{aligned} \right\} \text{predição do ponto } x_{i+1} \text{ e } y_{i+1}.$$

$$y_{i+1}^{(j+1)} = g(y_{i+1}^{(j)}) \left. \right\} \text{refinamento do ponto } y_{i+1}.$$

Outros métodos de integração são encontrados no livro de STOER e BURLIRSCH (STOER e BURLIRSCH, 1980).

Nas figuras a seguir temos os resultados numéricos obtidos usando os parâmetros do TBR-1

$$\begin{aligned} I_p &= 9.600 \text{ A} , \\ a &= 0,08 \text{ m} , \\ R_0 &= 0,30 \text{ m} . \\ \gamma &= 3 , \\ B_T &= 0,4 \text{ T} . \end{aligned}$$

A intensidade da perturbação ϵ é considerada como sendo

$$\epsilon = \frac{b_{\rho_i}}{B_{\theta_i}} ,$$

ou seja,

$$I_h = \epsilon \frac{2\pi\rho_0\Psi'_0}{\mu_0 J_0(n\bar{q})mR'_0} .$$

Discussão dos resultados:

- A concordância entre o método da média e a integração numérica é perfeita.
- Existe uma assimetria acentuada no tamanho das ilhas magnéticas. As ilhas são menores na parte mais próxima ao eixo de rotação do tokamak. Esta assimetria não é obtida pelo modelo cilíndrico com uma correção toroidal somente no campo B_T (FERNANDES *et al.*, 1988). Este modelo prevê ilhas magnéticas de mesmo tamanho.
- O tamanho das ilhas magnéticas aumenta com a intensidade da perturbação. Para uma perturbação da ordem de 1%, as ilhas magnéticas já se tocam, provocando um aumento da região caótica ao redor da separatriz.
- O tempo computacional para se obter um mapa de Poincaré foi da ordem de 30 min.. Pelo método da média o tempo é da ordem de 15 seg.. Isto mostra que o método da média produz resultados excelentes em um tempo muito menor.

Figura 6.1: Estrutura magnética devido a uma perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1) para o TBR-1. Os círculos pequenos são obtidos pela integração numérica e a linha contínua pelo método da média. A intensidade da perturbação neste caso é de 1.0%. O plano do mapeamento é $\varphi = \pi$.

Figura 6.2: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1). A intensidade da perturbação é de 1,5%.

Figura 6.3: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1). A intensidade da perturbação é de 2,0%. É interessante notar nesta figura que as ilhas magnéticas se tocam primeiro na região de campo magnético toroidal mais baixo e a região caótica é mais intensa onde as ilhas magnéticas ainda não se tocaram.

Figura 6.4: Estrutura magnética devido a uma perturbação helicoidal sobre a superfície racional (3,1) para o TBR-1. A intensidade da perturbação neste caso é de 0,3%. O plano do mapeamento é $\varphi = \pi$.

Figura 6.3: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (3.1). A intensidade da perturbação é de 0.5%.

Figura 6.6: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (3,1). A intensidade da perturbação é de 1.0%.

Capítulo 7

Tokamak de razão de aspecto pequena

Os tokamaks de razão de aspecto pequena apresentam um alongamento natural na direção vertical do toróide (PENG e STRICKLER, 1986; KALMYKOV, 1992; GALVÃO *et al.*, 1993). Para estudarmos o efeito de perturbações helicoidais sobre este tipo de tokamak é preciso escolher outro sistema de coordenadas pois o que foi usado no caso de razão de aspecto grande não serve. As superfícies coordenadas de ρ_t apresentam um achatamento na direção Z como pode ser visto na figura (3.3).

Neste capítulo faremos um estudo análogo ao que foi feito para tokamaks de grande razão de aspecto usando outro sistema de coordenadas. Este novo sistema de coordenadas apresenta o alongamento desejado.

7.1 Sistema de coordenadas

Para descrever superfícies toroidais alongadas generalizaremos o sistema polar toroidal. Definimos as novas coordenadas como

$$\begin{aligned}x^1 &\equiv r = \rho_t(1 + e \cos 2\theta_t) \\x^2 &= \theta_t \\x^3 &= \varphi\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde e é um parâmetro que determina o alongamento das superfícies toroidais. Se $e = 0$, o sistema de coordenadas coincide com o polar toroidal. A coordenada r tem um significado de coordenada radial semelhante ao de ρ_t .

Na figura (7.1) temos as superfícies coordenadas deste sistema.

Neste sistema de coordenadas, a base contravariante é dada por:

$$\begin{aligned}e^1 &= \nabla r = -\frac{r \sinh \xi}{R'_0} e_\xi + \left(f' + \frac{r \sin \theta_t}{R'_0}\right) e_{\theta_t}, \\e^2 &= \nabla \theta_t = \frac{f}{r} e_{\theta_t},\end{aligned}$$

Figura 7.1: Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal generalizado para $e = 0,16$.

$$\mathbf{e}^3 = \nabla \varphi = \frac{f}{r \sinh \xi} \mathbf{e}_\varphi.$$

onde

$$f(\theta_t) \equiv 1 + e \cos 2\theta_t,$$

$$f' = \frac{df}{d\theta_t}.$$

Os coeficientes métricos contravariantes g^{ij} são escritos como:

$$g^{11} = f^2 + f'^2 + 2 \frac{r}{R_0'} (f' \sin \theta_t - f \cos \theta_t),$$

$$g^{12} = \frac{f}{r} \left(f' + \frac{r \sin \theta_t}{R_0'} \right),$$

$$g^{13} = 0,$$

$$g^{22} = \frac{f^2}{r^2},$$

$$g^{23} = 0,$$

$$g^{33} = \frac{1}{R_0'^2 H}.$$

onde

$$H \equiv 1 - 2 \frac{r}{R_0' f} \cos \theta_t - \left(\frac{r}{R_0' f} \right)^2 \sin^2 \theta_t.$$

A raiz quadrada do determinante da métrica é

$$\sqrt{g} = \frac{rR'_0}{f^2}.$$

7.2 Superfícies magnéticas de equilíbrio

Escrevendo a equação de Grad-Shafranov (eq. 4.7) explicitamente em termos de x^1 , x^2 e x^3 temos:

$$\begin{aligned} & g^{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^{12}} + g^{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^{22}} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^1 \partial x^2} + A_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + A_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \\ &= \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right] - \mu_0 g_{33} \frac{dP}{d\Psi} - \mu_0^2 I \frac{dI}{d\Psi}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} g^{11} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} g^{12} \right) \right], \\ A_2 &= \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} g^{12} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} g^{22} \right) \right]. \end{aligned}$$

P é a pressão cinética do plasma.

I é o fluxo da corrente poloidal.

Esta equação pode ser simplificada se usamos os coeficientes métricos g^{ij} .

$$\begin{aligned} & g^{11} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_t^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta_t} + A_1 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_t} \\ &= -\mu_0 g_{33} \frac{dP}{d\Psi} - \mu_0^2 I \frac{dI}{d\Psi}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{r} \left[(f f'' + f^2) + \frac{r}{R'_0} (f' \sin \theta_t - f \cos \theta_t) \right], \\ A_2 &= -\frac{f \sin \theta_t}{R'_0 r}. \end{aligned}$$

Para determinarmos Ψ supomos válida a expansão em série de Fourier da forma:

$$\Psi(r, \theta_t) \simeq \Psi_0(r) + \Psi_1(r) \cos \theta_t + \Psi_2(r) \cos 2\theta_t. \quad (7.3)$$

Admitimos também que os termos da expansão satisfazem a seguinte ordenação

$$|\Psi_0| \gg |\Psi_1| \gg |\Psi_2|.$$

A superfície do plasma é definida por $r = a$. A condição de contorno sobre Ψ fica

$$\Psi(r = a, \theta_t) = \Psi_0(a) = \text{constante}.$$

Se substituirmos a equação (7.3) na equação (7.2) obtemos equações diferenciais acopladas que envolvem Ψ_0 , Ψ_1 e Ψ_2 . A maneira para desacoplar estas equações é desprezar termos de segunda ordem no inverso da razão de aspecto em cada uma das equações acopladas e considerar que o perfil de pressão satisfaz

$$-R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi_0} = \beta_p J_{30}(\Psi_0).$$

Com estas aproximações, obtemos as equações para Ψ_0 , Ψ_1 e Ψ_2 :

$$\frac{d^2\Psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} = \mu_0 J_{30}(\Psi_0). \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \Psi_1 - \mu_0 \frac{dJ_{30}(\Psi_0)}{d\Psi_0} \Psi_1 = \\ - \frac{1}{R_0'} \frac{d\Psi_0}{dr} + 2\mu_0 \frac{r}{R_0'} (1 - \beta_p) J_{30}(\Psi_0). \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_2}{dr} - \frac{4}{r^2} \Psi_2 - \mu_0 \frac{dJ_{30}(\Psi_0)}{d\Psi_0} \Psi_2 \\ = \mu_0 J_{30}(\Psi_0) \left[-2e + \frac{r^2}{R_0'^2} \left(2 - \frac{3}{2} \beta_p \right) \right] + \mu_0 (1 - \beta_p) \Psi_1 \frac{r}{R_0'} \frac{dJ_{30}(\Psi_0)}{d\Psi_0} \\ + \frac{\mu_0}{2} \Psi_1^2 \frac{d^2 J_{30}(\Psi_0)}{d\Psi_0^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} \left(4e - \frac{r^2}{R_0'^2} \right) + \frac{3}{2} \frac{r}{R_0'} \left(-\frac{1}{r} \frac{d\Psi_1}{dr} + \frac{1}{r^2} \Psi_1 \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Este conjunto de equações pode ser resolvido da seguinte maneira:

1. Primeiro determina-se Ψ_0 da equação (7.4).
2. Com a solução Ψ_0 , determina-se Ψ_1 da equação (7.5).
3. Finalmente, com Ψ_0 e Ψ_1 , calculamos Ψ_2 da equação (7.6).

A solução Ψ_0 é idêntica a uma solução cilíndrica. Este método já foi discutido no capítulo 4.

Para determinarmos Ψ_0 , escolhemos o perfil da densidade de corrente como:

$$J_{30}(\Psi_0(r)) = J_{30}(r) = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^\gamma.$$

Esta função tem máximo no centro e é nula nas bordas do plasma. A solução Ψ_0 será, então,

$$\Psi_0(r) = \frac{\mu_0 j_0 a^2}{4(\gamma + 1)} \int_y^1 \frac{1 - y^{\gamma+1}}{1 - y} dy ,$$

onde

$$y \equiv 1 - \frac{r^2}{a^2} ,$$

conforme visto no capítulo 4.

A determinação de Ψ_1 e Ψ_2 é feita numericamente com o uso da solução homogênea. As equações (7.5) e (7.6) são escritas genericamente como:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + a_0(x)y = A(x) . \quad (7.7)$$

Escrevemos a solução $y(x)$ desta equação como:

$$y(x) = y_h(x)f(x) .$$

onde $y_h(x)$ é a solução da equação homogênea associada à (7.7), que pode ser determinada. Substituindo $y(x)$ na equação (7.7) encontramos a equação para $f(x)$

$$y_h f'' + \left(2y_h' + \frac{y_h}{x} \right) f' = A(x) ,$$

A solução pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \int_d^x \frac{1}{zy_h^2} dz \int_c^z ty_h A(t) dt ,$$

onde d e c são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno.

A solução da equação (7.7) que satisfaz a condição

$$\begin{aligned} y(0) &= \text{finito} . \\ y(a) &= 0 . \end{aligned} \quad (7.8)$$

é dada por

$$y(x) = y_h(x) \int_a^x \frac{dz}{zy_h^2} \int_0^z ty_h A(t) dt . \quad (7.9)$$

A exigência (7.8) vem do fato que $\Psi_{1,2}(0)$ deve ser finito e que $\Psi_{1,2}(a) = 0$.

Da equação (7.9), concluímos que a solução $y(x)$ fica completamente definida se conhecermos a solução homogênea. A solução da equação homogênea é calculada numericamente se tivermos uma condição inicial para $y_h(x)$ e $y_h'(x)$.

Expandindo em série de Frobenius em torno de $x = 0$ temos a condição inicial procurada.

$$\begin{aligned} \Psi_{1,h}(r) &\simeq r \left[1 - \frac{\gamma}{2(1+e)} \frac{r^2}{a^2} + \frac{\gamma}{12(1+e)} \left(\gamma - 2 + \frac{\gamma}{1+e} \right) \frac{r^4}{a^4} + \dots \right] , \\ \Psi_{2,h}(r) &\simeq r^2 \left[1 - \frac{\gamma}{3} \frac{r^2}{a^2} + \frac{\gamma(5\gamma-6)}{48} \frac{r^4}{a^4} + \dots \right] . \end{aligned}$$

Figura 7.2: Componentes de Fourier Ψ_0 , Ψ_1 e Ψ_2 para os parâmetros projetados do TBR-E.

Na figura (7.2) temos os cálculos feitos para os parâmetros projetados do TBR-E que seria construído no IFUSP. Os parâmetros projetados são

Raio maior	= 0.48 m .
Razão de aspecto	= 2.0 .
Corrente de plasma	= 75 kA .
Campo toroidal do vácuo	= 0.48 T .
Paramagnetismo	= 3% .

As constantes do equilíbrio seriam $\epsilon = 0.17$ e $\gamma = 2$.

Da figura notamos que Ψ_0 é o termo dominante na região mais externa ao plasma. Próximo ao centro isto não é verdade. Como as superfícies magnéticas racionais (2,1) e (3,1) ficam na região mais externa ao plasma, usaremos somente este termo para descrever o equilíbrio. É importante ressaltar que nossos resultados serão mais qualitativos que quantitativos pois termos de segunda ordem no inverso da razão de aspecto estão sendo desprezados. No caso de razão de aspecto pequena estes termos devem ser importantes.

Com a aproximação de ordem zero, as superfícies magnéticas são dadas por $r = \text{constante}$.

O fator de segurança q , deste equilíbrio, apresenta uma dependência com relação ao alongamento da coluna de plasma, como pode ser visto na figura (7.3). Esta dependência está de acordo com o que é observado experimentalmente (SYKES *et al.*, 1993).

Figura 7.3: Perfil do fator de segurança q para os parâmetros projetados do TBR-E.

7.3 Campo helicoidal perturbativo

Neste capítulo, consideramos que a corrente perturbativa está sobre uma superfície magnética racional (m, n) dada por $x_0^1 = r^{m,n} = \text{constante}$. Devido a definição do sistema de coordenadas (eq. 7.1), a equação (5.1) não é mais válida e deve ser substituída por

$$\eta(r) = \bar{\eta}(r) + \tilde{\eta}(r) + \tilde{\tilde{\eta}}(r) \cos 2\theta_t,$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(r) &= \frac{R'_0}{r}, \\ \tilde{\eta}(r) &= -1, \\ \tilde{\tilde{\eta}}(r) &= \frac{R'_0 e}{r}. \end{aligned}$$

e r é a coordenada de superfície.

Esta mudança faz com que as constantes $\epsilon^{|\nu|} C_\nu$ tenham que ser recalculadas das condições de contorno. Os cálculos e resultados estão no apêndice B. A expressão do potencial escalar magnético continua sendo da forma (5.5).

Para calcularmos as componentes do campo magnético perturbativo usamos como coordenadas

$$x^1 = r$$

$$\begin{aligned}x^2 &= u = m\theta_t - n\varphi \\x^3 &= \theta_t\end{aligned}$$

As componentes b^1 e b^3 de ordem zero em ε são

$$\sqrt{g}b^1 \simeq -\frac{\mu_0 I_h R'_0}{2n\pi} \left(\frac{r^{m,n}}{r}\right)^{1/2} C_0 \left[Z_0(\bar{\eta}) + 2\frac{R'_0}{r} Z'_0(\bar{\eta}) \right] \sin(u + \theta_t), \quad (7.10)$$

$$\sqrt{g}b^3 \simeq -\frac{\mu_0 I_h R'_0}{n\pi} \left(\frac{r^{m,n}}{r}\right)^{1/2} C_0 m Z_0(\bar{\eta}) \sin(u + \theta_t), \quad (7.11)$$

onde

$$\sqrt{g} \simeq \frac{R'_0 r}{n}.$$

7.4 Superfícies magnéticas médias e resultados numéricos

No método da média, a componente b^1 do campo perturbativo é a mais importante pois é ela a responsável pelo surgimento da estrutura de ilhas magnéticas ao redor das superfícies racionais. A componente $B^1_0 = 0$ pela escolha do sistema de coordenadas.

Para determinarmos a superfície magnética média no tokamak de pequena razão de aspecto consideramos apenas o modo helicoidal principal (m, n) da componente b^1 do campo helicoidal perturbativo. Este único modo gera toda a estrutura de ilhas magnéticas nas superfícies racionais pois a descrição do plasma é intrinsicamente toroidal.

O modo helicoidal principal da componente b^1 é dada por

$$\sqrt{g}b^{1\,i,e} \simeq b^{1\,i,e}_{m,n} \sin u.$$

onde os índices i e e indicam *interno* e *externo* em relação à superfície de corrente, respectivamente. O coeficiente $b^{1\,i,e}_{m,n}$ é

$$b^{1\,i,e}_{m,n} = -\frac{\mu_0 I_h R'_0}{2n\pi} \left(\frac{r^{m,n}}{r}\right)^{1/2} C_0^{i,e} \left[Z_0^{i,e}(\bar{\eta}) + 2\frac{R'_0}{r} Z_0^{'\,i,e}(\bar{\eta}) \right].$$

$$Z_0^i = Q_{m-1/2}^n \quad \text{e} \quad Z_0^e = P_{m-1/2}^n.$$

Seguindo o mesmo procedimento do caso de razão de aspecto grande, mostra-se que a função de fluxo média em torno da superfície racional (m, n) é dada por

$$\Psi_H \simeq -\frac{1}{2} (\Psi'_0 \bar{q}')_{r,m,n} (\Delta \bar{r})^2 + \delta \Psi_H \cos(\bar{x}^2),$$

onde

$$\delta \Psi_H = b^{1\,i}_{m,n} J_0(n\bar{q}) \Big|_{r,m,n},$$

$$\Delta \bar{r} = \bar{r} - r^{m,n}.$$

A superfície magnética é definida pela condição $\Psi_H = \text{constante}$.

A separatriz da ilha magnética principal resulta em

$$\frac{r - r^{m,n}}{r^{m,n}} = \pm W \cos \left[\frac{1}{2} (m\theta_l - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_l) \right] ,$$

se $\delta\Psi_H \geq 0$.

O coeficiente W , que mede a semilargura da ilha, é dado por:

$$W = \left(\frac{4|\delta\Psi_H|}{n\tilde{q}'\Psi_0'\tilde{r}^2} \right)^{1/2} \Big|_{r^{m,n}} .$$

No caso das ilhas satélites o termo da perturbação é dado por

$$\delta\Psi_H = b_{m,n}^{1,i} J_{\Delta m}(n\tilde{q}) \Big|_{r^{m+\Delta m,n}} .$$

A separatriz das ilhas satélites, neste caso, é

$$\frac{r - r^{m+\Delta m,n}}{r^{m+\Delta m,n}} = \pm W \cos \left[\frac{1}{2} ((m + \Delta m)\theta_l - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_l) \right] ,$$

se $\delta\Psi_H \geq 0$ e a semilargura:

$$W = \left(\frac{4|\delta\Psi_H|}{n\tilde{q}'\Psi_0'\tilde{r}^2} \right)^{1/2} \Big|_{r^{m+\Delta m,n}} .$$

Se $\delta\Psi_H < 0$, substituímos *cosseno* por *seno*.

A seguir temos as figuras onde são comparados o método da média com a integração numérica da linha de campo. Foram usados os parâmetros projetados para o TBR-E, que representa um tokamak típico de razão de aspecto pequena. Nestas figuras os parâmetros do equilíbrio e da perturbação são mantidos fixos; só há a variação do alongamento.

Um resultado muito importante que tiramos dos mapas é que a *região caótica* em torno das ilhas magnéticas *diminui* à medida que *aumentamos o alongamento*. Existe um aumento na distância entre as separatrizes com o alongamento. Isto pode ser um indicio de que tokamaks de secção reta alongada são mais estáveis com relação as instabilidades provocadas por perturbações helicoidais.

Figura 7.4: Estrutura magnética devido a uma perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2.1) para os parâmetros projetados do TBR-E. Os círculos pequenos são obtidos pela integração numérica e a linha contínua pelo método da média. A intensidade da perturbação neste caso é de 2,0% e o alongamento $\epsilon = 0,08$. O plano do mapeamento é $\varphi = 0$.

Figura 7.5: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1). O parâmetro do alongamento é 0.12.

Figura 7.6: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2.1). O parâmetro do alongamento é 0.17.

Figura 7.7: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1). O parâmetro do alongamento é 0.08. Plano do mapeamento $\varphi = \pi$.

Figura 7.8: Perturbação helicoidal sobre a superfície racional (2,1). O parâmetro do alongamento é 0.17. Plano do mapeamento $\varphi = \pi$.

Capítulo 8

Conclusões e comentários finais

Nosso objetivo, neste trabalho, foi analisar a influência de perturbações helicoidais em tokamaks. Estas perturbações helicoidais são resultantes de correntes superficiais que fluem sobre uma superfície magnética racional e ao longo de uma linha de campo. O modelo considerado para descrever o plasma e o campo perturbativo é intrinsecamente toroidal. Não é usada a correção toroidal somente sobre o campo magnético toroidal calculado do modelo cilíndrico.

Usamos duas formas para verificar a influência das correntes citadas: construção do mapa de Poincaré sobre uma seção reta do tokamak e o método da média. O método da média permite que seja obtida a estrutura magnética de plasmas perturbados por pequenas oscilações. Foram considerados nesta análise dois tipos de tokamaks: tokamaks de razão de aspecto grande e tokamaks de razão de aspecto pequena. Os principais resultados a serem destacados são:

- As perturbações helicoidais internas produzem a formação de ilhas magnéticas sobre várias superfícies racionais do plasma. Estas cadeias de ilhas surgem devido ao acoplamento dos modos em plasmas toroidais. Este acoplamento se faz pelo termo oscilante do fator de segurança $\tilde{q}$. Não existe acoplamento de modos se o plasma for cilíndrico, isto é, se o termo $\tilde{q} = 0$.
- O acordo entre o método da média e o mapa de Poincaré obtido numericamente é perfeito enquanto não existir a superposição das ilhas magnéticas. A grande vantagem do método da média é o tempo extremamente reduzido para se obter a estrutura das ilhas magnéticas.
- Em plasmas toroidais, as ilhas magnéticas sobre a mesma superfície racional não possuem o mesmo tamanho como ocorre em plasmas cilíndricos. As ilhas magnéticas são menores na região de campo toroidal mais intenso. Este efeito é previsto pelo método da média, apesar de se fazer uma média na coordenada poloidal.
- Se a intensidade da perturbação aumentar, a região caótica ao redor das ilhas magnéticas cresce. Isto se deve ao fato de que as ilhas magnéticas de diferentes superfícies racionais se tocam. Esta região caótica pode ser uma das responsáveis

pela ruptura que ocorre nos plasma toroidais. Nosso modelo prevê que o modo (2,1) é mais destrutivo que o modo (3,1) pois as ilhas geradas por este modo são maiores na região mais interna do plasma.

- Em tokamaks de razão de aspecto pequena, existe uma diminuição da região caótica em torno das ilhas magnéticas com o aumento do alongamento na direção Z . Esta diminuição na região caótica deve melhorar o confinamento do plasma.

Apesar da nossa descrição do equilíbrio toroidal de razão de aspecto pequena ser limitada, podemos ver claramente, dos mapas, que o alongamento das superfícies tem um efeito estabilizante sobre as perturbações helicoidais. Este resultado é muito importante pois vem confirmar que tokamaks alongados com razão de aspecto pequena devem ser mais estáveis com relação às rupturas (SYKES *et al.*, 1993).

Nosso modelo prevê o mesmo comportamento do fator de segurança que é observado experimentalmente (figura 7.3). Nota-se que o *shear* é mais acentuado para plasmas alongados. O efeito do *shear* é considerado por SYKES *et al.* como sendo um dos responsáveis pela maior estabilidade dos tokamaks de razão de aspecto pequena.

O estudo de tokamaks de razão de aspecto grande já foi publicado no *Plasma Phys. Contr. Fusion* 34, 1067 (1992). Devemos publicar os resultado de tokamaks com razão de aspecto pequena.

Uma possível continuação deste trabalho é a extensão dos nossos resultados para tokamaks com razão de aspecto menor que 2. Para que isto possa ser feito, é necessário desenvolver melhor a parte do equilíbrio toroidal.

Apêndice A

Desenvolvimento do método da média

Este apêndice se baseia no capítulo 3 da tese de doutoramento de Luiz H. A. Monteiro (MONTEIRO, 1995) apresentada ao Instituto de Física da USP.

Em um sistema simétrico de confinamento existem superfícies magnéticas que confinam as partículas que compõem o plasma. Estas superfícies magnéticas são descritas por uma função $\Psi(x^1, x^2) = \text{constante}$. Se a simetria é quebrada por uma pequena perturbação, as linhas de campo ainda podem formar superfícies magnéticas *aproximadas* em algumas regiões.

Quando um sistema integrável sofre uma pequena perturbação de magnitude ϵ , as quantidades que eram constantes do movimento começam a evoluir lentamente. Através de um método de média, pode-se escrever as equações que governam a evolução das grandezas que variam lentamente. A idéia básica neste método é separar o movimento perturbado em dois: um de evolução lenta e outro de oscilação rápida. A média é tomada sobre a variável angular que oscila rapidamente. Este método leva diretamente ao cálculo de invariantes adiabáticos, que são os invariantes aproximados do movimento perturbado.

Baseando-se nestes princípios, N. N. Bogolyubov e colaboradores como Y. A. Mitropolsky e N. Krylov propuseram procedimentos analíticos para resolver sistemas de equações diferenciais que não derivam necessariamente de uma hamiltoniana ou, se derivam, não são necessariamente escritos em termos de variáveis canônicas.

Seja o seguinte sistema de n equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dx^k}{d\tau} = f^k(x^i, \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, k, \dots, n),$$

onde f^k é função das n variáveis x^i e é periódica em τ com período L .

O método da média consiste em se substituir o sistema de equações que contém a evolução rápida do movimento — que aparece na dependência de f^k com a variável τ — por um sistema de equações médias. O ponto crucial deste método é a mudança de

coordenadas $x^k \rightarrow \bar{x}^k$ que possibilita eliminar, com um dado grau de precisão, as fases rápidas das equações originais, e assim separar o movimento rápido do lento.

O método da média desenvolvido por Bogolyubov foi aplicado por A. I. Morozov e L. S. Solov'ev com o objetivo de investigar a morfologia de campos magnéticos de sistemas não-simétricos, *sem* integrar diretamente as equações das linhas de campo $B \times d\tau = 0$. Eles determinaram analiticamente uma função de superfície magnética aproximada $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ correspondente ao seguinte campo magnético B :

$$B(x^1, x^2, x^3) = b^1 e_1 + b^2 e_2 + (B_0^3 + b^3) e_3,$$

onde $B_0 = B_0^3(x^1, x^2) e_3$ é o campo simétrico *longitudinal* e $b(x^1, x^2, x^3)$ é um pequeno campo que destrói esta simetria.

As equações diferenciais que descrevem a trajetória das linhas de B são:

$$\frac{dx^k}{dx^3} = \frac{B^k}{B^3} = \frac{b^k}{B_0^3 + b^3} \quad (k = 1, 2).$$

Desprezando termos da ordem de $(b/B_0)^3$ ou menores, estas equações são reescritas como:

$$\frac{dx^k}{dx^3} \simeq \frac{b^k}{B_0^3} \left(1 - \frac{b^3}{B_0^3} \right) \equiv f^k(x^i, x^3) \quad (i, k = 1, 2). \quad (\text{A.1})$$

Se as funções f^k são periódicas em x^3 , então, pode-se aplicar um método de média para solucionar este sistema de equações.

Foi adotada a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}^i) &\equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(\bar{x}^i, x^3) dx^3, \\ \tilde{P}(f) &\equiv \tilde{f}(\bar{x}^i, x^3) = f - \bar{f}, \\ \hat{P} &\equiv \hat{f}(\bar{x}^i, x^3) = \bar{P} \left(\int_0^{x^3} \tilde{f} dx^3 \right) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde as operações de média $\bar{}$ e integração $\sim$ em x^3 são feitas mantendo-se $\bar{x}^i$ constantes; e L é o período da coordenada x^3 . A expressão (A.2) estabelece que qualquer função $f(x^1, x^2, x^3)$ pode ser escrita como a soma de um termo que independe de x^3 (neste caso $\bar{f}$) com um termo que varia com x^3 (neste caso $\tilde{f}$).

Pelo método da média de Bogolyubov, as soluções aproximadas do sistema de equações (A.1) são dadas por:

$$x^k = \bar{x}^k + \hat{f}^k(\bar{x}^i, x^3) + \dots \quad (i, k = 1, 2), \quad (\text{A.3})$$

onde as coordenadas médias $\bar{x}^k$ satisfazem as seguintes equações:

$$\frac{d\bar{x}^k}{dx^3} = \bar{f}^k + \frac{\partial \bar{f}^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{f}^i + \dots \quad (i, k = 1, 2). \quad (\text{A.4})$$

Substituindo as funções f^k definidas em (A.1) nas equações médias (A.4) e levando em conta que $\nabla \cdot B = 0$, obtém-se:

$$\frac{dx^1}{dx^3} \simeq \frac{1}{\sqrt{g}B_0^3} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2}, \quad (A.5)$$

$$\frac{dx^2}{dx^3} \simeq \frac{-1}{\sqrt{g}B_0^3} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1}.$$

sendo a função de superfície $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ definida como (MOROZOV e SOLOV'EV, 1966):

$$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \equiv \bar{\Psi}^0 - \frac{\sqrt{g}}{B_0^3} \hat{b}^1 \bar{b}^2, \quad (A.6)$$

onde $\bar{\Psi}^0$ é a função de fluxo do campo não perturbado.

As equações (A.5) implicam que Ψ satisfaz a:

$$\nabla \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \cdot d\bar{r} \simeq 0, \quad (A.7)$$

onde $d\bar{r}$ representa um deslocamento paralelo às linhas médias do campo B . Portanto, a função $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ descreve as superfícies magnéticas médias de B . Considerando as correções periódicas em x^3 , o comportamento *real* (aproximado) destas linhas é dado pela expressão (A.3):

$$x^k \simeq \bar{x}^k + \frac{\hat{b}^k}{B_0^3} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{B_0}\right)^2 \quad (i, k = 1, 2).$$

Assim, as superfícies definidas por:

$$\Psi\left(x^1 - \frac{\hat{b}^1}{B_0^3}, x^2 - \frac{\hat{b}^2}{B_0^3}\right) \simeq \text{constante},$$

contém as linhas de $\hat{b}$, com uma precisão da ordem de $(b/B_0)^2$.

Com este procedimento, MOROZOV e SOLOV'EV (MOROZOV e SOLOV'EV, 1966) obtiveram uma função de superfície magnética aproximada sem a integração direta da equação $B \times dr = 0$. Na determinação da expressão (A.6), eles assumiram que o campo simétrico era puramente *longitudinal* ($B_0 = B_0^3 e_3$). Tal restrição limita muito a utilidade prática desta expressão.

O método da média desenvolvido por KUCINSKI *et al.* (KUCINSKI *et al.*, 1992) fornece uma expressão analítica para a função Ψ para o caso do campo simétrico não ser somente *longitudinal*.

Na aplicação do método da média desenvolvido por KUCINSKI *et al.*, a escolha das coordenadas é fundamental. Dependendo da escolha, alguns detalhes da estrutura magnética podem desaparecer no processo de média. Se tomarmos x^1 como uma quantidade de superfície magnética do campo não-perturbado B_0 , x^2 como a coordenada ignorável e x^3 como sendo a outra coordenada relevante ao sistema temos:

$$B_0^1 = B_0 \cdot \nabla x^1 = 0,$$

$$\frac{\partial B_0^i}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^2} = 0 \quad ,$$

onde g^{ij} são as componentes contravariantes do tensor métrico. A simetria do equilíbrio é destruída pela dependência de b com x^2 . Note que $B_0^1 = 0$ decorre da escolha das coordenadas e não de uma restrição ao campo B_0 . Assim, o sistema de equações a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dx^3} &= \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} \quad , \\ \frac{dx^2}{dx^3} &= \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3} \quad . \end{aligned} \tag{A.8}$$

No método da média, as equações originais para x^1 e x^2 são substituídas por equações média em termos de $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$. A escolha destas coordenadas médias não é única.

Adota-se (KUCINSKI *et al.*):

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv \bar{x}^1 + \delta x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) \quad , \\ x^2 &\equiv \bar{x}^2 + \tilde{x}^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) + \delta x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) \quad . \end{aligned}$$

Em princípio, $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$ podem ser soluções de qualquer sistema autônomo de duas equações diferenciais de primeira ordem; e $\tilde{x}^2$ pode ser escolhido arbitrariamente. A idéia de KUCINSKI *et al.* foi de construir um método de perturbação onde a solução de primeira-ordem ($\delta x^i = 0$) do sistema de equações (A.8) contivesse as principais características da estrutura magnética. δx^i são as correções de segunda-ordem.

A escolha para $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$ e Ψ são:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^1}{dx^3} &= \frac{\bar{b}^1}{B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3} \right)^{-1} \quad , \\ \tilde{x}^2 &= \frac{B_0^2}{B_0^3} \quad , \\ \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) &= \int_0^{\bar{x}^1} \sqrt{g} B_0^2(\bar{x}^1, x^3) d\bar{x}^1 - \int_c^{\bar{x}^2 + \tilde{x}^2} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2 \quad , \end{aligned} \tag{A.9}$$

onde c é uma constante que satisfaz à condição:

$$\sqrt{g} b^2(\bar{x}^1, c, x^3) = 0 \quad .$$

Pode-se mostrar que a função Ψ definida por (A.9) obedece às equações:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^1}{dx^3} &= \frac{-1}{\sqrt{g} B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3} \right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^2} \quad , \\ \frac{d\bar{x}^2}{dx^3} &\simeq \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3} \right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^1} \quad . \end{aligned}$$

o que implica na expressão (A.7):

$$\nabla \Psi(\overline{x^1}, \overline{x^2}) \cdot d\overline{\mathbf{r}} \simeq 0 .$$

Portanto, as superfícies definidas por

$$\Psi(x^1, x^2 - \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}) \simeq \textit{constante} ,$$

representa uma superfície magnética aproximada para o campo total $\mathbf{B}$.

Apêndice B

Coeficientes do potencial escalar magnético Φ

A condição de contorno é usada para calcular os coeficientes do potencial escalar magnético Φ . Supomos que a corrente está sobre a superfície $x_0^1 = \text{constante}$. Do capítulo 5 temos que as condições de contorno são escritas como (eq. 5.4):

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right] &= -\frac{\mu_0 I_h}{\pi} \epsilon^{ix^2} \frac{g^{12}}{g^{11}}, \\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right] &= \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \epsilon^{ix^2}, \\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right] &= 0.\end{aligned}$$

Da relação

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right] = \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \epsilon^{ix^2},$$

obtemos a primeira condição sobre $\epsilon^{|\nu|} C_\nu$.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\epsilon^{|\nu|} C_\nu Z_\nu(\eta) \right] \epsilon^{i\nu\theta_t} = \bar{\eta}_0^{1/2} (\eta + \cos\theta_t)^{-1/2} \epsilon^{in\tilde{q}\sin\theta_t},$$

onde $\bar{\eta}_0 = \bar{\eta}(x_0^1)$.

O lado direito desta equação pode ser expandido em série de Fourier resultando em

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\epsilon^{|\nu|} C_\nu Z_\nu(\eta) \right] \epsilon^{i\nu\theta_t} = \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \epsilon^{|S|} A_S \epsilon^{iS\theta_t},$$

onde

$$\epsilon^{|S|} A_S = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\tilde{q}\sin\theta_t - S\theta_t)^{1/2}}{1 + \epsilon \cos 2\theta_t} d\theta_t.$$

A relação

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right] = -\frac{\mu_0 f_h}{\pi} e^{ix^2} \frac{g^{12}}{g^{11}},$$

resulta em

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\varepsilon^{|\nu|} C_\nu Z'_\nu(\eta) \right] e^{i\nu\theta_t} &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}_0^{1/2} (\eta + \cos \theta_t)^{-3/2} e^{in\tilde{q} \sin \theta_t} \\ &\quad - i \bar{\eta}_0^{1/2} (\eta + \cos \theta_t)^{-1/2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^1} \right)^{-1} \frac{g^{12}}{g^{11}} e^{in\tilde{q} \sin \theta_t}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

O termo

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x^1} \right)^{-1} \frac{g^{12}}{g^{11}}$$

é calculado da definição de x^1 e x^2 .

$$\eta = \cosh \xi = \bar{\eta}(x^1) + \tilde{\eta}(x^1) \cos \theta_t + \tilde{\tilde{\eta}}(x^1) \cos 2\theta_t. \quad (\text{B.2})$$

$$x^2 = m\theta_t - n\varphi + n\tilde{q} \sin \theta_t. \quad (\text{B.3})$$

Da relação (B.2) e (B.3) mostra-se que a base $e^i = \nabla x^i$ é escrita como:

$$\begin{aligned} e^1 &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^1} \right)^{-1} \left[\sinh \xi \nabla \xi + \tilde{\eta} \sin \theta_t \nabla \theta_t + 2\tilde{\tilde{\eta}} \sin 2\theta_t \nabla \theta_t \right], \\ e^2 &= (m + n + \tilde{q} \cos \theta_t) \nabla \theta_t - n \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Portanto temos

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x^1} \right)^{-1} \frac{g^{12}}{g^{11}} = \frac{(m + n\tilde{q} \cos \theta_t)(\tilde{\eta} \sin \theta_t + 2\tilde{\tilde{\eta}} \sin 2\theta_t)}{-1 + (\bar{\eta} + \tilde{\eta} \cos \theta_t + \tilde{\tilde{\eta}} \cos 2\theta_t)^2 + (\tilde{\eta} \sin \theta_t + 2\tilde{\tilde{\eta}} \sin 2\theta_t)^2}.$$

Expandindo a equação (B.1) em série de Fourier, temos que

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\varepsilon^{|\nu|} C_\nu Z'_\nu(\eta) \right] e^{i\nu\theta_t} = \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \left(\varepsilon^{|S|} B_S^1 + \varepsilon^{|S|} B_S^2 \right) e^{iS\theta_t}.$$

Os coeficientes de Fourier $\varepsilon^{|S|} B_S^1$ e $\varepsilon^{|S|} B_S^2$ são dados por

$$\varepsilon^{|S|} B_S^1 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\tilde{q} \sin \theta_t - S\theta_t)}{(1 + e \cos 2\theta_t)^{3/2}} d\theta_t,$$

$$\varepsilon^{|S|} B_S^2 = \frac{R'_0}{2\pi}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{(m + n\tilde{q} \cos \theta_t)(\tilde{\eta} \sin \theta_t + 2\tilde{\tilde{\eta}} \sin 2\theta_t) \sin(n\tilde{q} \sin \theta_t - S\theta_t)}{(1 + e \cos 2\theta_t)^{1/2} [-1 + (\bar{\eta} + \tilde{\eta} \cos \theta_t + \tilde{\tilde{\eta}} \cos 2\theta_t)^2 + (\tilde{\eta} \sin \theta_t + 2\tilde{\tilde{\eta}} \sin 2\theta_t)^2]} d\theta_t.$$

As constantes $\varepsilon^{|\nu|}C_\nu$ satisfazem, portanto, o sistema de equações

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\varepsilon^{|\nu|} C_\nu Z_\nu(\eta) \right] e^{i\nu\theta_t} &= \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{|S|} A_S e^{iS\theta_t} , \\ \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left[\varepsilon^{|\nu|} C_\nu Z'_\nu(\eta) \right] e^{i\nu\theta_t} &= \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{|S|} B_S e^{iS\theta_t} ,\end{aligned}$$

onde $B_S = B_S^1 + B_S^2$.

Este sistema tem solução, em aproximação de ordem zero em ε , como

$$\begin{aligned}C_S^t &= \left(A_S - B_S \frac{Q}{\bar{\eta}_0 Q'} \right) \frac{P Q'}{P Q' - P' Q} \frac{1}{P} , \\ C_S^i &= \left(A_S - B_S \frac{P}{\bar{\eta}_0 P'} \right) \frac{P' Q}{P Q' - P' Q} \frac{1}{Q} ,\end{aligned}$$

onde P e Q são as funções de Legendre,

$$\begin{aligned}P &\equiv P_{m+S-1/2}^m(\bar{\eta}) , \\ Q &\equiv Q_{m+S-1/2}^m(\bar{\eta}) .\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

- CARRERAS B., HICKS H. R. e LEE D. K. (1981) *Physics Fluids* 24, 66.
- CLEMENTE R. A. (1982) *Physics Fluids* 25, 518.
- EDENSTRASSER J. W. (1980a) *J. Plasma Phys.* 24, 299.
- EDENSTRASSER J. W. (1980b) *J. Plasma Phys.* 24, 515.
- FERNANDES A. S., HELLER M. V. A. P. e CALDAS I. L. (1988) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 30, 1203.
- FINN J. M. (1975) *Nucl. Fusion* 15, 845.
- GALVÃO R. M. O., KALMYKOV S. G., ROBERTO M. e DE SÁ W. P. (1993) *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion* 15, 219.
- GREENE J. M., JOHNSON J. L. e WEIMER K. E. (1971) *Physics Fluids* 14, 671.
- HEGNA C. C. e BHATTACHARJEE A. (1991) *Physics Fluids B* 8, 2285.
- JACKSON J. D. (Ed.) (1983) *Eletrodinâmica Clássica*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro (pág. 362).
- KADOMTSEV B. B. (1975) *Sov. J. Plasma Phys.* 1, 389.
- KALMYKOV S. G. (1992) *Sov. J. Plasma Phys.* 18, 685.
- KARGER F., WOBIG H., CORTI S., GERNHARDT J., KLÜBER O., LISITANO G., MCCORMICK K., MEISEL D. e SESNIC S. (1975) *6th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1974 (Tokyo) Vienna, IAEA Vol. 1, p. 207.
- KUCINSKI M. Y., CALDAS I. L. (1987) *Zeitschrift für Naturforschung* 42a, 1124.
- KUCINSKI M. Y., CALDAS I. L. (1990) MHD Equilibrium equation in symmetric systems. Report IFUSP/P-817.
- KUCINSKI M. Y., CALDAS I. L., MONTEIRO L. H. A. e OKANO V. (1990) *J. Plasma Phys.* 44, 303.
- KUCINSKI M. Y., CALDAS I. L., MONTEIRO L. H. A. e OKANO V. (1992) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 34, 1067.
- KUCINSKI M. Y. (1992) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 34, 513.
- DE MENNA L. (1977) *Nucl. Fusion* 17, 455.
- MIRIN A. A., UMAN M. F., MARTMAN C. W. e KILLEEN J. (1976) Lawrence Livermore Laboratory Report UCRL-52069.

- MONTEIRO L. H. A. (1995) Ilhas Magnéticas Secundárias em “Reversed-Field-Pinches”, Tese de doutoramento apresentada ao IFUSP.
- MOROZOV A. I. e SOLOV’EV L. S. (1966) *The Structure of Magnetic Fields*, Reviews of Plasma Physics 2, 1.
- MORRIS A. W. (1992) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 34, 1871.
- MORSE P. M. e FESHBACH H. (Ed.) (1953) *Methods of Theoretical Physics*, Part 2. McGraw-Hill, Tokio.
- NISHIKAWA K. e WAKATANI M. (Ed.) (1990) *Plasma Physics — Basic Theory with Fusion Applications*, Springer-Verlag, Germany.
- OKANO V. (1990) Campos Ressonantes Helicoidais em Tokamaks. Tese de mestrado apresentada no IFUSP.
- PENG Y.-K. M., STRICKLER D. J. (1986) *Nucl. Fusion* 26, 769.
- PULSATOR TEAM (1985) *Nucl. Fusion* 25, 1059.
- SHAFRANOV V. D. (1963) *Soviet J. Atomic Energy* 13, 1149.
- STOER J., BULIRSCH R. (1980) *Introduction to Numerical Analysis*, Spring-Verlag, N. Y.
- SY W. N.-C. (1981) *J. Phys. A: Math. Gen.* 14, 2095.
- SYKES A. (1992) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 34, 1925.
- SYKES A., CONNOR J. W., DUCK R., GIBSON K., GOODALL D. H. J., GRYAZNEVICH M., HENDER T. C., HUGILL J., ROBINSON D. C., TURNER M. F., VALOVIC M., WALSH M. e WILSON H. R. (1993) *Plasma Phys. Contr. Fusion* 35, 1051.
- VON GOELER S., STODIEK W. e SAUTHOFF N. (1974) *Phys. Rev. Lett.* 33, 1201.
- WESSON J. A. (1978) *Nucl. Fusion* 18, 87.
- YOSHIKAWA S. (1974) *Physics Fluids* 17, 178.