José Eduardo Soubhia Natali

Modelagem da Minimização do Processamento na Comunicação

**São Paulo
2009**

José Eduardo Soubhia Natali

Modelagem da Minimização do Processamento na Comunicação

Dissertação apresentada ao Instituto de
Biociências da Universidade de São Paulo,
para a obtenção de Título de Mestre em
Ciências, na Área de Fisiologia.

Orientador: José Guilherme Chauí-
Berlinck

São Paulo
2009

Natali, José E. S.

Modelagem da Minimização do Processamento na Comunicação

100 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Biociências da Universidade de São Paulo. Departamento de Fisiologia.

1. Processamento
2. Comunicação
3. Geração de Entropia

I. Universidade de São Paulo. Instituto de Biociências. Departamento de Fisiologia.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Nome

Prof. Dr.
Nome

Prof. Dr.
José Guilherme Chauí-Berlinck

Aos Desertores da Escada

Epígrafe

They should've sent a poet.

Ellie Arroway

Those who play for applause. That's all they get.

Ellis Marsalis, Jr.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer àqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço ao ZéGui por ser um grande exemplo em tudo que faz, principalmente na fascinante tarefa de entender o mundo ao seu redor.

Ao pessoal do laboratório de fisiologia teórica, por tudo o que aprendi durante a minha vivência aqui e por tornarem um ambiente de trabalho tão interessante e divertido.

Ao pessoal do departamento, pela importante e constante interação.

Aos meus amigos (novos e velhos) por serem os grandes pilares da minha vida.

Ao pessoal do 2001N e agregados, por serem minha maior motivação para acreditar na vida científica e por tornarem as discussões pós-aula sempre muito melhores que as aulas.

Ao pessoal do ABERTO por tudo que já discutimos e pelo que ainda vamos discutir.

Ao Nelas pela ajuda com o $\text{\LaTeX}$

Também agradeço à minha mãe e ao meu pai pelo apoio completo e incondicional.

Ao meu irmão, por sempre estar um passo à frente e assim me incentivar a correr.

Ao Mé e a Neusa por, junto com a minha mãe, terem me ajudado a perceber que a Biologia é o meu lugar.

À Carol por ser minha maior companheira e parceira em todos os momentos dessa vida.

À Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

A comunicação entre indivíduos da mesma espécie está presente em todos os táxons conhecidos. Tendo por foco organismos que possuem sistemas nervosos, dado que existe uma capacidade limitada para processar todos os sinais vindos do ambiente, é interessante supor que, ao longo da evolução, exista uma tendência à minimização do processamento associado com a comunicação de modo a liberar atenção para outros eventos. Como tal minimização pode ser associada a uma diminuição da energia gasta com o processo, podemos levantar a hipótese de que existe, também, uma tendência à minimização de geração de entropia (σ), já que esta está diretamente associada com a potência dissipada durante potenciais de ação. O objetivo do presente estudo é testar a hipótese descrita acima.

Para tanto, consideramos os organismos envolvidos na comunicação como osciladores descritos por equações diferenciais, e “comunicação” foi definida pelo acoplamento de tais osciladores. Em um modelo inicial, a frequência e a fase foram as variáveis de estado, enquanto que, num segundo modelo, foram acrescentadas mais duas variáveis associadas à volição de emitir sinais. A geração de entropia é dada pelo produto do fluxo (i.e., frequência) pela diferença de potencial (parâmetro de forçamento do oscilador). O cálculo de σ foi realizado para os dois modelos, comparando as situações de osciladores de parâmetros idênticos com aquelas de parâmetros diferentes.

Para ambos os modelos, os resultados obtidos indicam que osciladores idênticos minimizam a geração de entropia em relação a sistemas de osciladores com diferentes parâmetros. Tratando, então, os sistemas de osciladores idênticos, analisamos as regiões dos valores de parâmetros que permitem uma maior minimização de σ . Isto ocorre, no modelo inicial, quando o parâmetro de acoplamento de frequência tende a zero ou infinito. Já no modelo final, σ é minimizada quando os parâmetros associados com a

referência interna dos osciladores são bem maiores que as constantes de acoplamento de frequência.

Podemos concluir que a melhor estratégia, em termos evolutivos, para minimizar a geração de entropia numa troca continuada de sinais é manter uma alta semelhança (intraespecífica) entre os animais que se comunicam num dado ambiente.

Abstract

Communication between individuals of the same species is present in all known taxa. Focusing in organisms that have nervous system, since there is a limited capacity to process all the environmental input, it is interesting to assume an evolutionary trend to minimize the information processing associated with communication in order to redirect attention to other events. As such a minimization may be associated with a reduction in the amount of energy spent in the process, we may put forward the hypothesis that there is, also, a trend to minimize entropy generation (σ), since this is directly associated with power dissipation during action potentials. The objective of this study is to test the above described hypothesis.

To this end, we considered the organisms involved in the communication as oscillators described by differential equations, and “communication” was defined as the coupling between oscillators. In an initial model, the frequency and the phase were the state variables, whereas in a second model we added two more variables associated with the volition to emit signals. Entropy generation is calculated through the product of the flux (i.e., frequency) by a potential difference (a forcing parameter). Computations of σ were performed for both models, and we compared the conditions of identical with those of non-identical parameters of the oscillators.

In both models, the results obtained indicate that identical oscillators are those that minimize entropy generation in relation to systems of non-identical oscillators. Within the context of systems of identical oscillators, we analyzed the regions of the parameters that allow for a further minimization of σ . In the first model, such a minimization occurs when the parameter of frequency coupling tends either to zero or to infinite. In the second model, σ attains minimal values when the parameters associated with internal references of the oscillators are significantly higher than those associated with frequency

coupling.

We are lead to the conclusion that the best strategy, in evolutionary terms, to minimize the entropy generation in a long-lasting exchange of signals is to keep a high similarity (intra-specific) between the animals that communicate in a given environment.

Sumário

Lista de Figuras	3
1 Introdução	7
1.1 Pano de Fundo Biológico, um contexto sobre a comunicação	7
1.2 Análises Matemáticas	9
1.2.1 Entropia Termodinâmica	10
1.2.2 Geração de Entropia	13
1.2.3 Entropia e Processamento	15
1.2.4 Entropia Informacional	15
1.2.5 Sistemas dinâmicos	16
1.3 Hipótese Evolutiva	17
1.4 Objetivo	17
2 Modelo	18
2.1 Panorama Geral	18
2.2 Contexto específico de modelagem	19
2.2.1 Modelo inicial	19
2.2.2 Modelo final	22
2.3 Análise dos dados	25
2.3.1 Geração de entropia (σ)	26

2.3.2	Caracterização de séries temporais	28
2.3.3	Entropia informacional	30
3	Resultados	31
3.1	Modelo Inicial	31
3.1.1	Oscilador isolado	31
3.1.2	Dois osciladores com acoplamento	32
3.1.3	Três osciladores	38
3.2	Modelo final	43
3.2.1	Oscilador isolado	43
3.2.2	Osciladores iguais	43
3.2.3	Dois osciladores diferentes	44
3.3	Minimização da geração de entropia (σ)	50
3.3.1	Modelo Inicial	50
3.3.2	Modelo Final	62
3.4	Simulação com dez osciladores	69
3.5	Relação com a Entropia Informacional	78
4	Discussão	81
4.1	Modelo com osciladores	81
4.2	Minimização da geração de entropia	83
4.2.1	Resultados em comum	83
4.2.2	Modelo inicial	86
4.2.3	Modelo final	88
4.3	Estudo dos 10 osciladores com perturbações	89
4.4	Relação com a Entropia Informacional	91
	Referências Bibliográficas	93

Lista de Figuras

1.1	Dois gases com temperaturas diferentes	13
2.1	Esquema da via de processamento	19
2.2	passeio de Lévy	29
3.1	Ponto de equilíbrio da fase em função de B_i e K_i acoplados	33
3.2	Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados - estável	34
3.3	Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados - instável	34
3.4	Estudo analítico e numérico de um sistema de dois osciladores acoplados evidenciando fases diferentes	35
3.5	Ponto de equilíbrio das frequências, de dois osciladores acoplados, variando os valores de C_i e C_j	36
3.6	Estudo analítico e numérico de um sistema de dois osciladores acoplados variando o parâmetro C	37
3.7	Estudo analítico e numérico de um sistema de dois osciladores acoplados variando o parâmetro A	37
3.8	Exemplo de sinais emitidos por dois osciladores com frequências diferentes	38
3.9	Simulação numérica de um sistema de três osciladores acoplados - estável	41

3.10 Simulação numérica de um sistema de três osciladores acoplados - instável	41
3.11 Simulação numérica de um sistema de três osciladores acoplados com fases e frequências diferentes	42
3.12 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - instável	46
3.13 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - estável	47
3.14 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - efeito no B	47
3.15 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - efeito do K_2	48
3.16 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - efeito do K_2 e K_4	49
3.17 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - efeito do K_{2_i}	49
3.18 Simulação numérica de um sistema de dois osciladores acoplados - efeito do ω_0	50
3.19 Geração de entropia de dois osciladores iguais, e dois diferentes com a alteração do parâmetro de acoplamento de frequência	54
3.20 Geração de entropia de dois osciladores iguais, e dois diferentes com a alteração do parâmetro de acoplamento de frequência - tendendo a zero .	55
3.21 Geração de entropia de dois osciladores iguais, e dois diferentes com a alteração do parâmetro de acoplamento de frequência - tendendo ao infinito	56
3.22 Geração de entropia de três osciladores iguais, e três diferentes com a alteração do parâmetro de acoplamento de frequência	60
3.23 Geração de entropia, de dois osciladores iguais, em relação ao parâmetro E .	60
3.24 Variação geração de entropia de dois osciladores iguais, e dois diferentes com a alteração dos parâmetros K_1 e K_3	66

3.25	Varição geração de entropia de dois osciladores iguais com a alteração dos parâmetros K_1 e K_3	67
3.26	Geração de entropia de dois osciladores iguais com a variação dos parâmetros K_1 e K_3	68
3.27	Evolução da fase e frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos, na presença de entrada externa	70
3.28	Evolução da fase e frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos, na presença de entrada externa	71
3.29	Passeio de Lévy usado como perturbação externa.	73
3.30	Evolução da fase e frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos, na presença de entrada externa com distribuição de Lévy.	74
3.31	Evolução da frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos, na presença de ruído branco no parâmetro C	75
3.32	Evolução da frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos, na presença de ruído branco no parâmetro A	76
3.33	Valor constante dividido por ruído com distribuição gaussiana.	77
3.34	Relação entre a geração de entropia obtida e a vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador igual - modelo inicial.	78
3.35	Relação entre a geração de entropia obtida e vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador em duas simulações	79
3.36	Relação entre a geração de entropia obtida e a vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador igual - modelo final.	80

4.1	Distribuição de Lévy observada em séries temporais dos intervalos de tempo entre vocalizações dos indivíduos de <i>Hypsiboas pardalis</i>	90
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Pano de Fundo Biológico, um contexto sobre a comunicação

A comunicação entre indivíduos de uma mesma espécie é observada ao longo de todos os táxons conhecidos. Ela está presente desde a comunicação bioquímica entre organismos unicelulares até complexas redes em insetos eusociais ou mamíferos. Ubíqua, sua utilização se dá dentro dos mais diversos contextos, desde a simples sinalização de presença até os processos culturais humanos. Assim, por exemplo, em anfíbios e muitos outros vertebrados, a comunicação sonora (por vocalização) está relacionada com o comportamento sexual. Nesse caso, o principal objetivo do sinal vocal é que o receptor identifique sexo, estado reprodutivo e até mesmo a espécie do emissor. Os sinais podem, ainda, estar relacionados à territorialidade e à competição intra-sexual, portanto, ainda relacionados a um contexto reprodutivo ([Wilczynski e Chu, 2001](#)).

Tendo em vista, para fins didáticos, o exemplo da comunicação vocal entre anuros, percebe-se que este evento tem, portanto, uma grande importância evolutiva, diretamente ligada à manutenção da linhagem reprodutiva. Outro fator importante está associado ao metabolismo dessas espécies: o canto dos sapos é uma das atividades com o maior gasto

energético entre vertebrados ectotérmicos ([Prestwich et al., 1989](#); [Wells e Taigen, 1989](#)). Isso poderia nos levar a assumir que o gasto energético seria o principal fator moldando as estratégias de vocalização desses indivíduos ([Schwartz et al., 1995](#)). Porém, em uma análise mais aprofundada, podemos perceber que os fatores associados à evolução da vocalização são ainda mais complexos.

Estudos mostram que, além do estado reprodutivo (aí incluso o perfil hormonal), influências externas podem afetar o comportamento de vocalização ([Herman, 1992](#); [Jorgensen, 1992](#)), sendo que parte dessas influências provém de sinais sonoros de indivíduos da mesma espécie ([Brozka e Obert, 1980](#); [Wells, 1988](#)). Outros estudos mostram, ainda, que machos ajustam o tempo e o número do canto em resposta à vocalização de outros machos (e.g. [Wells e Schwartz, 1984](#)). Supõe-se que essas variáveis do canto, assim como o tempo que os machos ficam cantando em coro, são os fatores principais que determinam o sucesso de acasalamento (e.g. [Murphy, 1994](#)).

Podemos observar, então, que a comunicação sonora dos anuros tende a ser influenciada pelo ambiente sonoro que os cerca, principalmente por indivíduos da mesma espécie ([Gerhardt e Schwartz, 2001](#)).

Esse contexto biológico procura mostrar alguns aspectos da comunicação sonora em um sistema biológico. Entretanto, temos ainda, que um estudo sobre a comunicação sonora entre anuros deve levar em conta, obrigatoriamente, o sistema nervoso central (SNC), já que este é a interface ativa entre o animal e o ambiente. Essa interface é dada através dos órgãos sensoriais que permitem ao organismo monitorar o mundo externo e seu estado interno ([Wilczynski, 1992](#)). Cabe ao SNC integrar a informação que chega ao animal e a usar para selecionar e guiar as respostas comportamentais em decorrência da informação processada.

Dessa maneira, essa conceituação sobre a comunicação pode ser expandida para um contexto mais amplo no qual os sistemas envolvidos podem ser generalizados para componentes que recebem e enviam sinais (sistemas emissor/receptor). Assim, esses sistemas

podem ser equivalentes a um anuro, a outro organismo que faça comunicação ou, simplesmente, ao SNC, de forma que conclusões futuras possam ser extrapoladas.

Em relação ao SNC, temos que este pode ser tratado como composto por módulos funcionais e não unidades com estruturas físicas correspondentes ou identificáveis isoladamente (Philipson, 2002). Dessa forma, podemos estudar o processamento cerebral através da relação entre esses módulos (e.g. sensor, memória e controlador, que serão explicitados na sessão 2.1), sendo possível evidenciarmos, por exemplo, padrões evolutivos (e.g. uma possível tendência a minimização do processamento). O processamento de sinais aferentes ao sistema nervoso central é, no entanto, um tanto desconhecido. Concebe-se que o sistema tenha que lidar seletivamente com toda a miríade de estímulos que o adentram por unidade de tempo (Laberg, 1997), e que, portanto, módulos de pré-processamento devem operar (Laberg, 1997).

Nesse sentido, a atenção seletiva é um fenômeno relevante, e como esse fenômeno ocorre ainda é objeto de estudos (Laberg, 1997). Sabe-se que a atenção seletiva está relacionada a um processamento preferencial de alguns aspectos da percepção sensorial (Posner et al., 1980; Eriksen e James, 1986), sendo que essa preferência está associada ao contexto no qual o animal está inserido. Tal diversificação serve para mostrar, uma vez mais, a complexidade do sistema nervoso central, mesmo quando lidando com apenas um dos componentes sensoriais, no caso, a audição.

1.2 Análises Matemáticas

Vários órgãos sensoriais têm sido alvo da modelagem matemática devido à grande gama de fatores envolvidos no processamento de informações daí oriundas. De fato, sugere-se, muitas vezes, que a modelagem se faça necessária para permitir uma abordagem empírica consistente e direcionada a fenômenos relevantes nesses sistemas tão intrincados, (Casti e Karlqvist, 1986; Brown e Rothery, 1993; Murray, 1993; Keener e Sneyd, 1998; Khoo, 2000;

[Hoppenstadt e Peskin, 2002](#)). Assim, a retina e o processamento de imagens ([Schofield e Georgeson, 1999](#)), o bulbo olfativo e o reconhecimento de odores ([Wagner et al., 2006](#)), o controle motor ([Ostry e Feldman, 2003](#)), etc. são exemplos de sistemas que têm se beneficiado da abordagem teórica do ferramental matemático. Outras contribuições da análise matemática, associadas com o fundo teórico necessário para o desenvolvimento desse estudo, serão descritas a seguir.

1.2.1 Entropia Termodinâmica

A entropia está relacionada à segunda lei da termodinâmica. Sadi Carnot notou que o trabalho mecânico em ciclos dependia da existência da transferência de uma propriedade de um recipiente quente para um recipiente frio, e que a diferença entre temperaturas propiciava o aumento do rendimento de máquinas térmicas ([Brush, 1976, 1983](#)). Mais ainda, ele notou que era inevitável a perda de parte do fluxo da propriedade, a qual deixava de ser aproveitada como energia mecânica. Essas observações formam a base da irreversibilidade de processos de transferência de energia e irão, mais tarde, configurar a segunda lei.

A entropia termodinâmica foi concebida por Thompson e Classius ([Brush, 1976, 1983](#)). Para Classius, a entropia (S) era uma medida da capacidade de mudança de um sistema, sendo então, muitas vezes associada à incapacidade de um sistema retornar a um estado anterior.

Dessa maneira, temos que a medida de entropia dá informações sobre a reversibilidade espontânea de um processo já que, em sistemas isolados, processos adiabáticos reversíveis levam a uma conservação da entropia enquanto que, em processos irreversíveis, ela aumenta ([Callen, 1960](#)) até a situação de máxima entropia, o que caracteriza o equilíbrio termodinâmico. Em sistemas não isolados, temos que a variação total de entropia (ΔS) está relacionada a pequenas variações de calor (δQ) divididas pela temperatura (T): $\Delta S = \int \delta Q/T$. A entropia pode ser interpretada, estatisticamente, em uma

análise via Boltzmann, envolvendo macroestados e microestados ([Brush, 1976, 1983](#)). Os macroestados são variáveis macroscópicas de um sistema (por exemplo, pressão ou temperatura de um gás), enquanto os microestados estão relacionados com características que compõem o macroestado (por exemplo, a energia cinética das moléculas do gás). Existem então, diversas possibilidades de conformações (microestados), com probabilidades associadas a elas, que podem ser associadas a um dado macroestado. Desta forma, o macroestado seria dado pelas conformações médias dos microestados ([Layzer, 1988](#)). Boltzmann demonstrou que a entropia de Classius pode ser escrita relacionando os modos (quantidades) W que microestados geram um dado estado macroscópico. Nessa visão estatística, quanto maior a quantidade de microestados acessíveis numa configuração de um macroestado, maior a probabilidade de o sistema transitar entre eles e, conseqüentemente, maior a entropia:

$$S = k_b \ln(W) \quad (1.1)$$

Sendo k_b a constante de Boltzmann, a qual normaliza a relação de estados com a entropia. A entropia pode, então, ser medida termodinamicamente, associada a fluxos de calor ou energia; ou estatisticamente, como um valor proporcional às probabilidades associadas aos microestados acessíveis ao sistema ([Brooks et al., 1984](#)). É importante ressaltar que, no estado de equilíbrio termodinâmico, essas duas maneiras são intercambiáveis e, em sua essência, representam o mesmo fenômeno ([Kozliak, 2004](#)).

Acredita-se que segunda lei da termodinâmica tem grande importância biológica por ser a única lei da física que indica, macroscopicamente e para uma ampla gama de condições iniciais (mas não todas), um sentido no tempo, de forma que, para alguns autores, a evolução biológica é uma consequência direta dessa lei ([Monteiro e Piqueira, 2000](#)). Porém, essa relação carece de demonstração teórica ([Wehrl, 1978](#)) e, inclusive conforme discutido por ([Mackey, 1992](#)), podemos ter um aumento de desorganização sem

o aumento de entropia. Concomitantemente, a relação entre a termodinâmica e evolução biológica trás uma grande contradição. Temos, pelo lado termodinâmico, que a segunda lei nos leva a crer que os sistemas tendem a situação de máxima entropia, refletida por uma grande desorganização, por outro lado a evolução biológica nos mostra diversos seres vivos altamente organizados ([Schrödinger, 1977](#)). A solução desse imbróglio está no fato que os seres vivos conseguem manter uma organização interna (i.e. uma entropia baixa e pouco variável) às custas de aumentar a entropia do ambiente ([Nicolis e Prigogine, 1977](#); [Schrödinger, 1977](#)).

Sobre essas considerações, é importante fazer uma ressalva: o aumento da entropia leva a uma desordem estatística (associada aos micro e macroestados) e não necessariamente a uma desordem estrutural ([Wicken, 1979](#)). Podemos então, para evitar confusões, afirmar que os seres vivos mantêm uma entropia interna baixa às custas de aumentar a entropia externa. [Schrödinger \(1977\)](#) afirma, ainda, que essa manutenção da entropia interna somente é possível devido aos fluxos de energia e matéria fundamentais à sobrevivência dos sistemas biológicos. Essa última frase traz à tona um ponto importante: a vida (associada a uma baixa entropia interna) só é possível devido a esses fluxos de energia (sujeitos as leis da termodinâmica).

Com isso em mente, [Schneider e Key \(1994\)](#) propõem que a vida seja uma manifestação da segunda lei da termodinâmica. Segundo os autores, os serem vivos só existem devido à diferença de energia entre o Sol e a Terra, diferença essa que propicia um fluxo (de energia) que pode ser aproveitado pelos seres vivos sendo, posteriormente, dissipado para o entorno. A importância do papel dissipativo dos seres vivos já havia sido reconhecida antes por [Wicken \(1978\)](#), sendo por ele colocada com um dos fatores fundamentais para a organização existente nesses sistemas.

Pelos motivos citados acima, podemos observar que existe uma forte relação entre a vida e a termodinâmica que, sempre que possível, deve ser levada em conta. Essa relação pode ser observada em estudos que focam desde aspectos bioquímicos (e.g. [Stutervant,](#)

1977; Matthews et al., 1987) até ecossistemas (e.g. Schneider e Key, 1994; Kay, 2000).

1.2.2 Geração de Entropia

O cálculo da entropia termodinâmica, como visto na seção anterior, se refere à variação total de entropia (ΔS). Se estivermos interessados em saber como a entropia varia (dS), temos que calcular a soma das partes reversíveis e irreversíveis do processo, conforme:

$$dS = \frac{\delta Q}{T_{\text{rev}}} + \sigma \quad (1.2)$$

Sendo que, o primeiro termo da parte da direita da equação, representa as reversibilidades do processo, enquanto o segundo termo se refere à geração de entropia (σ) e está associado às irreversibilidades do processo estudado (Van Wylen et al., 2003).

O conceito de σ pode ser melhor ilustrado se imaginarmos uma caixa com dois gases, a temperaturas diferentes, inicialmente totalmente separados em sub-compartimentos (Figura 1.1). Se removermos a divisão entre eles, temos que, à medida que se misturam (um processo irreversível), $\sigma > 0$ e conseqüentemente temos um aumento da entropia total do sistema.

Figura 1.1: Situação com dois gases com temperaturas diferentes (representados por círculos de cores diferentes) em uma caixa. Na conformação (A) os gases estão completamente divididos, enquanto na (B) eles estão misturados. A transição de (A) para (B) acarreta em um aumento da geração de entropia.

Uma consequência desse aumento é a diminuição da energia livre no sistema, e, portanto, há uma diminuição da capacidade de realização de trabalho útil ([Bejan, 2002](#)). Mais uma vez podemos entender isso melhor se voltarmos ao exemplo da caixa. Na situação em que as bolinhas estão perfeitamente divididas, temos um sistema que pode realizar trabalho, o que pode ser facilmente observado caso coloquemos um pistão entre as duas partes da câmara. Nessa conformação, o lado mais quente “empurrará” o pistão em direção ao lado mais frio. Porém, se deixarmos as bolinhas se misturarem, de forma que a temperatura se torne homogênea (não havendo mais uma diferença espacial de energia), cada vez mais a capacidade de realizar trabalho será reduzida e isso está associado a $\sigma > 0$.

A geração de entropia em um processo próximo ao equilíbrio termodinâmico, onde há uma relação linear entre fluxos e diferenças de potenciais, é dada pelo produto da diferença de potencial instalada e o fluxo obtido ([Glansdorff e Prigogine, 1971](#)). No caso do nosso exemplo, a diferença de potencial pode ser entendida como a diferença entre as concentrações de moléculas com diferentes energias cinéticas nos dois compartimentos. Essa diferença proporciona o fluxo (no caso, o movimento moléculas levando a uma situação homogênea) que, como já vimos, está associado ao aumento de S .

Podemos perceber que a definição de geração de entropia utilizada aqui está intimamente relacionada com os fluxos de energia descritos na seção anterior. Embora [Schneider e Key \(1994\)](#) não mencionem σ , podemos facilmente interpretar que o aumento de entropia no ambiente está associado com uma geração de entropia alta no ambiente (por exemplo, a dissipação de energia via calor) para preservar a baixa entropia interna. Da mesma maneira, o fluxo de energia entre o Sol e a Terra é um processo irreversível associado com $\sigma > 0$. Nos dois casos, o estudo de σ se faz necessário pois estamos estudando processos fora do equilíbrio termodinâmico.

1.2.3 Entropia e Processamento

Conforme descrito na seção 1.2.1 (segundo a visão de Boltzmann), uma maior entropia está associada a uma maior quantidade de microestados nos quais o sistema pode transitar. Dessa forma, podemos assumir que é necessária uma maior quantidade de processamento por parte do sistema nervoso central para lidar com uma quantidade maior de possibilidades. Nesse contexto, como sabemos que a geração de entropia está relacionada a um aumento da entropia e à destruição de “energia útil” em um sistema (Bejan, 2002), nosso estudo nos permite recolocar que tal medida está relacionada à perda de “processamento útil”.

Em um panorama mais específico, podemos considerar que σ está associado a energia dissipada durante potenciais de ação (e.g. efeito joule associado com a resistência dos neurônios), o que diminuiria a capacidade de realizar trabalho das células envolvidas nesse processo. Por essa abordagem temos que o fluxo associado com σ é o próprio potencial de ação e que o processamento pode ser definido como a energia gasta na comunicação.

Podemos adotar, então, que é interessante minimizar a perda de “processamento útil”, reduzindo assim perdas energéticas para poder realocar essa energia em outras vias de processamento (i.e., atenção) para outros eventos (e.g., um predador). Essa abordagem é interessante por dois motivos. Em primeiro lugar, por usar uma importante base conceitual (termodinâmica) para melhor entendermos uma das facetas da manutenção de uma entropia interna baixa em sistemas biológicos; e em segundo lugar, por permitir uma quantificação do processamento através do cálculo da geração de entropia.

1.2.4 Entropia Informacional

Segundo a Teoria da Informação (Shannon, 1948; Shannon e Weaver, 1949), a quantidade de informação em uma mensagem está associada à surpresa causada por seu conteúdo. Uma mensagem que traz pouco conteúdo novo possui uma quantidade baixa de informação; assim como uma mensagem de conteúdo novo é muito informativa. Dentro dessa

Teoria, a quantidade de informação h_i pode ser medida pelo logaritmo do inverso da probabilidade p_i de uma mensagem i ocorrer: $h_i = \log(1/p_i) = -\log(p_i)$. Com isso, temos que quanto maior a probabilidade de uma mensagem menor será a informação que ela carrega. Shannon chamou H , $H = \sum(p_i \cdot h_i)$, de entropia informacional, que nada mais é que uma forma de calcular a incerteza associada a mensagens.

1.2.5 Sistemas dinâmicos

Um sistema é um conjunto de componentes agrupados por relações de interação e interdependência, de forma a existirem relações de causa e efeito nos processos envolvendo os seus componentes (Monteiro, 2006). Um sistema é considerado dinâmico quando as grandezas de seus componentes variam no tempo, sendo um dos objetivos de seu estudo é o de prever para onde o sistema está indo (Monteiro, 2006). O estudo matemático de sistemas dinâmicos é dado pelo estudo de equações diferenciais (Monteiro, 2006). Os sistemas dinâmicos têm sido amplamente utilizados em estudos biológicos, desde níveis moleculares (e.g. Wolkenhauer et al., 2005) até o de comunidades (e.g. Oliva e Sallum, 1996), passando por estudos no nível do indivíduo e seus sistemas orgânicos componentes (e.g. Chaui-Berlinck et al., 2002a,b, 2004a,b, 2005).

Mais especificamente, os sistemas dinâmicos podem ser utilizados em sistemas biológicos na forma de redes de neurônios artificiais. Essas redes são modelos teóricos utilizados para entendermos o funcionamento e as estruturas do sistema nervoso biológico. As redes de neurônios modelam o sistema de forma definida com parâmetros explícitos, de forma que possam ser realizadas análises quantitativas (Silva, 2005). Assim como em outros sistemas dinâmicos, a rede de neurônios é um sistema no qual o novo estado é função de estados anteriores (Monteiro, 2006).

1.3 Hipótese Evolutiva

Nossa hipótese evolutiva, associada ao comportamento vocal dos anuros, consiste na existência de uma tendência evolutiva à minimização da geração de entropia termodinâmica no sistema nervoso através da diminuição das probabilidades de microestados possíveis. Essa redução, por sua vez, estaria associada a uma diminuição do processamento associado com a comunicação, e pode ser acessada através do cálculo da geração de entropia dos sistemas envolvidos na comunicação.

1.4 Objetivo

Testar, por meio de redes de neurônios modeladas via sistemas dinâmicos, a hipótese formulada acerca da diminuição do processamento de informação na comunicação.

Capítulo 2

Modelo

2.1 Panorama Geral

O processamento de informação na comunicação foi estudado a partir da relação entre sistemas “receptor/emissor” hipotéticos. Para tanto, esses sistemas (equivalente ao anuro) foram definidos como sendo capazes de receber sinais (análogos aos sinais sonoros no sistema biológico), processá-los e devolver uma resposta.

Foram utilizados os seguintes módulos funcionais (não necessariamente associados a unidades físicas) e a interação entre eles (Figura 2.1): temos uma **entrada**, que é o sinal externo, essa entrada chega a um **sensor** (que decodifica o sinal), o sinal decodificado é comparado com uma informação do sistema (**referência**). Com base na entrada e na referência, o sinal é modulado pelo controlador, que envia um **sinal de saída** o qual retorna ao ambiente.

A partir desse cenário, os sistemas foram construídos com o uso de equações diferenciais (conforme descrito na seção 2.2 abaixo), e, para este estudo, consideramos que a comunicação ocorre entre dois ou mais sub-sistemas.

Figura 2.1: Esquema da via de processamento hipotético de um sinal (sonoro, potencialmente), conforme modelada no estudo.

2.2 Contexto específico de modelagem

Neste estudo, o sistema receptor/transmissor é definido como um oscilador, e o estudo da comunicação se dá pela relação entre dois ou mais desses sistemas. O estudo foi realizado independentemente a partir de dois modelos descritos a seguir.

2.2.1 Modelo inicial

Temos, em nosso modelo inicial, que um oscilador i possui, como variáveis de estado, uma frequência de oscilação (aqui tratada como velocidade num círculo), ω_i , e uma diferença de fases, ϕ_i . Essa diferença é definida como a relação entre a fase atual do oscilador e uma fase intrínseca, na qual ele permanece na ausência de interações. Assim, quando citamos a fase de um oscilador, estamos nos referindo a essa diferença de fases. No modelo, cada oscilador isolado possui, ainda, um forçamento próprio, A_i , um amortecimento de frequência, C_i , e um amortecimento de fase, B_i . Dessa forma o sistema é descrito por:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{A_i}{C_i} \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i - C_i\omega_i - B_i\phi_i \end{cases} \quad (2.1)$$

Para o estudo de dois osciladores em comunicação, incluímos um acoplamento de fase (K_i) e um acoplamento de velocidade (E_i). Assim, temos um sistema com dois osciladores (i e j) acoplados, descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{A_i}{C_i} - E_i\omega_j \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i - C_i\omega_i - B_i\phi_i + K_i\phi_j \\ \frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j - \frac{A_j}{C_j} - E_j\omega_i \\ \frac{d\omega_j}{dt} = A_j - C_j\omega_j - B_j\phi_j + K_j\phi_i \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Os dois últimos termos da equação diferencial da fase do oscilador (no caso, para o oscilador i) podem ser reescritos como:

$$K_i\left(\phi_j - \frac{B_i}{K_i}\phi_i\right)$$

Desta maneira, fica explícito que o acoplamento de fases está associado a uma diferença entre as fases dos dois osciladores. Temos, ainda, que no caso particular $K_i = B_i$, a taxa de acoplamento de fase se torna, simplesmente, um ganho linear associado a essa diferença.

Os resultados gerados com o modelo de dois osciladores foram comparados com um modelo com três osciladores para evidenciar se os padrões obtidos podem ser generalizados para um número maior de sub-sistemas em comunicação. Para tanto, foi incluído um terceiro oscilador, n . Além disso, os acoplamentos de cada oscilador passaram a depender da média das fases e frequências dos outros dois osciladores, como descrito no seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{A_i}{C_i} - E_i \frac{\omega_j + \omega_n}{2} \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i - C_i \omega_i - B_i \phi_i + K_i \frac{\phi_j + \phi_n}{2} \\ \frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j - \frac{A_j}{C_j} - E_j \frac{\omega_i + \omega_n}{2} \\ \frac{d\omega_j}{dt} = A_j - C_j \omega_j - B_j \phi_j + K_j \frac{\phi_i + \phi_n}{2} \\ \frac{d\phi_n}{dt} = \omega_n - \frac{A_n}{C_n} - E_n \frac{\omega_i + \omega_j}{2} \\ \frac{d\omega_n}{dt} = A_n - C_n \omega_n - B_n \phi_n + K_n \frac{\phi_i + \phi_j}{2} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Para o cálculo da geração de entropia ($\sigma = dS/dt$, a ser melhor explicado na próxima seção) os dois modelos citados acima foram comparados com um modelo generalizado que considerava o acoplamento entre N osciladores iguais, conforme descrito a seguir para um dos osciladores envolvidos na comunicação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_m}{dt} = \omega_m - \frac{A_m}{C_m} - \frac{E_m}{N-1} \sum_{1, i \neq m}^{N-1} \omega_i \\ \frac{d\omega_m}{dt} = A_m - C_m \omega_m - B_m \phi_m + \frac{K_m}{N-1} \sum_{1, i \neq m}^{N-1} \phi_i \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Uma vez realizada essa comparação de σ entre modelos com valores de parâmetros diferentes e iguais, o modelo que minimizou a geração de entropia foi utilizado para estudar como nosso sistema se comporta perante perturbações. Para tanto, foi simulada a comunicação entre 10 osciladores com a adição de perturbações internas e externas.

Para entendermos o efeito de uma perturbação externa, foi colocado um ruído am-

biental (distribuição gaussiana ou de Lévy), externo aos osciladores. Esse procedimento correspondeu a somar um termo $R(t)$ (ruído) nas nossas equações diferenciais dos 10 osciladores envolvidos na simulação, da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_m}{dt} = \omega_m - \frac{A_m}{C_m} - \frac{E_m}{10-1} \left(R(t) + \sum_{1, i \neq m}^{N-1} \omega_i \right) \\ \frac{d\omega_m}{dt} = A_m - C_m \omega_m - B_m \phi_m + \frac{K_m}{10-1} \left(R(t) + \sum_{1, i \neq m}^{N-1} \phi_i \right) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Para o estudo de como perturbações nas referências internas dos osciladores (i.e., parâmetros que definem a frequência intrínseca de cada oscilador) afetam a comunicação, foi somado ruído branco (média = 0 e variância = 1) em parâmetros das equações diferenciais de um dos osciladores envolvidos na simulação com 10 osciladores. Considerando, por exemplo, a perturbação no parâmetro C , as equações diferenciais do oscilador em questão ficam da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_m}{dt} = \omega_m - \frac{A_m}{C_m + R(t)} - \frac{E_m}{10-1} \sum_{1, i \neq m}^N \omega_i \\ \frac{d\omega_m}{dt} = A_m - (C_m + R(t)) \omega_m - B_m \phi_m + \frac{K_m}{10-1} \sum_{1, i \neq m}^N \phi_i \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.2.2 Modelo final

O modelo final difere dos anteriores (descritos pelas equações 2.1 , 2.2 , 2.3 e 2.4) por ter embutido a volição de emitir sinais por parte dos sistemas envolvidos na comunicação. Esta é uma melhoria interessante pois no modelo inicial não havia uma clara distinção, para o animal, entre emitir muitos sinais ou nenhum. Dada a importância evolutiva da comunicação (descrita na seção 1.1), propomos um novo modelo no qual o desejo de um animal emitir sinais depende de sua própria frequência e da presença de sinais de outros

animais. Foi colocado ainda, que as equações diferenciais passam a depender dos senos das fases de forma que, uma vez que nossa frequência é definida como velocidade em um círculo, a fase também fique limitada a um círculo.

Nesse caso, um oscilador i continua possuindo, como variáveis de estado, uma frequência de oscilação, ω_i , e uma diferença de fases, ϕ_i . Porém, agora, o termo A , associado à vontade dos sistemas comunicantes emitirem sinais, passa a ser uma nova variável de estado. Ainda foi acrescentada o termo B , uma variável de estado análoga ao A , porém associada à fase. Assim, nossas equações diferenciais para um oscilador i podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_i}{dt} = \frac{A_i}{C_i} - \omega_i \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i + B_i - C_i\omega_i \\ \frac{dA_i}{dt} = K_{1_i}(\omega_{0_i} - \omega_i) \\ \frac{dB_i}{dt} = K_{2_i}\text{sen}(\phi_i) - m_i B_i \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Sendo que o parâmetro ω_{0_i} é a referência interna de frequência (i.e. frequência natural do oscilador), o parâmetro K_{1_i} , por sua vez, promedia a comparação dessa referência com a frequência do próprio oscilador. O parâmetro C_i é um amortecimento associado com a frequência, o parâmetro m_i é um amortecimento associado a variável de estado B , a qual, por sua vez, está associada com a fase do oscilador pelo parâmetro K_{2_i} .

Quando adicionamos outros osciladores, as variáveis de estado A e B passam a depender, respectivamente, das médias da frequência e da fase dos outros osciladores envolvidos na comunicação. Dessa maneira, nosso sistema de equações diferenciais com N osciladores passa a ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_i}{dt} = \frac{A_i}{C_i} - \omega_i \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i + B_i - C_i\omega_i \\ \frac{dA_i}{dt} = K_{1_i}(\omega_{0_i} - \omega_i) + K_{3_i} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \omega_j}{N-1} \\ \frac{dB_i}{dt} = K_{2_i} \text{sen}(\phi_i) - K_{4_i} \text{sen}\left(\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \phi_j}{N-1}\right) - m_i B_i \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Se considerarmos que os N osciladores envolvidos na comunicação são iguais, ficamos com o seguinte sistema de equações diferenciais para cada um dos osciladores envolvidos na equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi}{dt} = \frac{A}{C} - \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = A + B - C\omega \\ \frac{dA}{dt} = K_1(\omega_0 - \omega) + K_3\omega \\ \frac{dB}{dt} = K_2 \text{sen}(\phi) - K_4 \text{sen}(\phi) - mB \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Podemos considerar, ainda, uma outra formulação do modelo, agora com apenas dois osciladores diferentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_i}{dt} = \frac{A_i}{C_i} - \omega_i \\ \frac{d\omega_i}{dt} = A_i + B_i - C_i\omega_i \\ \frac{dA_i}{dt} = K_{1_i}(\omega_{0_i} - \omega_i) + K_{3_i}\omega_j \\ \frac{dB_i}{dt} = K_{2_i}\sin(\phi_i) - K_{4_i}\sin(\phi_j) - m_iB_i \\ \frac{d\phi_j}{dt} = \frac{A_j}{C_j} - \omega_j \\ \frac{d\omega_j}{dt} = A_j + B_j - C_j\omega_j \\ \frac{dA_j}{dt} = K_{1_j}(\omega_{0_j} - \omega_j) + K_{3_j}\omega_i \\ \frac{dB_j}{dt} = K_{2_j}\sin(\phi_j) - K_{4_j}\sin(\phi_i) - m_jB_j \end{array} \right. \quad (2.10)$$

2.3 Análise dos dados

Os modelos, inicial e final, foram analisados através da obtenção de pontos de equilíbrio (P.E.) e estabilidade. A estabilidade foi obtida analiticamente para o modelo inicial com um (equação 2.1) ou dois osciladores (equação 2.2) e para o modelo final com um oscilador (equação 2.7). Para os demais casos (equações 2.3 e 2.10), dada a complexidade dos sistemas, a estabilidade foi *estimada* a partir de simulações numéricas em Simulink/Matlab 7.0 (The MathWorks Inc., Natick, MA, E.U.A.). É importante ressaltar que as condições de estabilidade para sistemas com osciladores diferentes podem ser extrapoladas para os sistemas com equações iguais, já que os primeiros são uma versão mais geral dos segundos.

Para os casos (inicial e final) com dois osciladores ainda foram estudadas, em maior detalhe, como variações nos parâmetros do sistema alteram o ponto de equilíbrio.

2.3.1 Geração de entropia (σ)

Além da análise de estabilidade e ponto de equilíbrio, o estudo propõe um cálculo de geração de entropia. Como já dito, a geração de entropia num sistema é dada pelo produto da diferença de potencial instalada e o fluxo obtido (Glansdorff e Prigogine, 1971), corrigido pela temperatura na qual ocorre o processo (entretanto, ver texto mais abaixo). Assim, o presente estudo considera a generalização desse cálculo através do produto da frequência ω (representando o fluxo obtido) pelo termo A (representado a diferença de potencial instalada no sistema para gerar o fluxo). É importante ressaltar que estamos considerando condições de temperatura constante e fixa entre todas as situações. Portanto, no cálculo de σ , não levamos em conta o termo T^{-1} no produto fluxo $\cdot$ diferença de potencial. Além disso, o cálculo está sendo feito no P.E. dessa maneira utilizamos a geração de entropia será representada como $\hat{\sigma}^*$.

Modelo inicial

No modelo inicial, o caso geral da geração de entropia, $\hat{\sigma}$, para o i -ésimo elemento no grupo (de N osciladores) é, então, dado por:

$$\hat{\sigma}_i^* = \omega_i^* \left(A_i + \frac{\sum_{j,j \neq i}^N E_{ij} A_j}{N - 1} \right) \quad (2.11)$$

O termo no somatório inclui os demais forçamentos presentes promediados pelas respectivas constantes de acoplamento; N é o total de elementos (osciladores) presentes.

Assim, para o caso de um único oscilador, temos:

$$\hat{\sigma}_i^* = \omega_i^* A_i \quad (2.12)$$

Para dois osciladores:

$$\hat{\sigma}_i^* = \omega_i^*(A_i + E_i A_j) \quad (2.13)$$

No caso em que todos os osciladores são iguais ficamos com:

$$\hat{\sigma}^* = \omega^* \left(A + \frac{\sum_{j=1}^{N-1} E A_j}{N-1} \right) = \omega^*(A + EA) \quad (2.14)$$

Modelo final

Para o modelo final, a geração de entropia para um oscilador i é dada por:

$$\hat{\sigma}_i^* = \omega_i^* A_i^* \quad (2.15)$$

Essa formulação difere da equação (2.11) por levar em conta apenas o efeito do termo A do próprio oscilador no cálculo de sua geração de entropia. O cálculo foi realizado dessa maneira pois o termo A (agora uma variável de estado) já depende da presença de outros osciladores.

Minimização da geração de entropia

A geração de entropia dos modelos (tanto para o modelo final quanto para o inicial) com osciladores diferentes foi comparada com o modelo que possui osciladores idênticos para verificar qual situação minimiza σ . Essa comparação foi feita explorando os limites das funções e através de variações numéricas dos parâmetros.

Coefficiente de eficiência de fluxo ($c^{\omega\sigma}$)

Quando se fez necessário, a geração de entropia obtida dentro dos diferentes modelos foi comparada usando o coeficiente de eficiência de fluxo ($c^{\omega\sigma}$) proposto por [Chaui-Berlinck](#)

(2006). Esse coeficiente nos permite medir a eficiência de ganho de fluxo pela alteração de um parâmetro genérico P , e é dado por:

$$c^{\omega\sigma} = \left(\frac{\omega}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \right)_{\partial P} \quad (2.16)$$

Essa medida é necessária porque, pela equação (2.11), existe uma correlação positiva entre o fluxo e σ . Dessa maneira, é importante quantificar quanto σ aumenta, proporcionalmente a um aumento de fluxo (ou diminui, dada a redução do fluxo). Com isso em mente, temos que a melhor eficiência está associada a baixos valores de $c^{\omega\sigma}$, já que esses indicam um baixo aumento de σ proporcionalmente a um aumento de fluxo, ou uma alta redução da geração de entropia proporcionalmente a uma redução no fluxo.

2.3.2 Caracterização de séries temporais

As séries temporais provenientes de 10 osciladores (representantes do modelo inicial), envolvidos no estudo sobre perturbações internas e externas (equações 2.5 e 2.6, respectivamente), foram analisadas para observarmos se estas podem ser caracterizadas como distribuições de Lévy (Figura 2.2) ou distribuição Gaussiana (à qual nos referiremos por ruído branco). O passeio de Levy é uma forma de passeio aleatório caracterizado por um agrupamento de passos curtos, intercalados (ou conectados) por passos maiores entre eles (Sims et al., 2007), sendo que a sua identificação foi realizada a partir do cálculo usado por Sims et al. (2007). Para isso, os dados em questão são transformados em um histograma com os intervalos de classe crescendo exponencialmente. É realizada, então, uma regressão linear entre o logaritmo das frequências relativas do histograma e o logaritmo dos intervalos de classe. O coeficiente angular da reta de regressão equivale a $1 - \mu$, sendo que para distribuições de Lévy temos $1 \leq \mu \leq 3$.

Por sua vez, o ruído branco é uma distribuição aleatória que segue uma função de densidade de probabilidade de uma distribuição Gaussiana. Sua identificação foi possível

Figura 2.2: Tamanho de passos associados com uma distribuição de Lévy.

comparando a Análise de Potência Espectral (APE) e a vApEn (Entropia Aproximada Volumétrica) das séries temporais obtidas com valores de referências. A APE é obtida com Transformadas Rápidas de Fourier das séries temporais e a regressão linear entre as frequências e potências obtidas nos dá o coeficiente angular (β) dessa relação. Se o valor desse coeficiente for próximo de zero temos que o sinal se comporta como ruído branco, no caso de $-0.5 > \beta > -2$ temos que a série pode ser caracterizada como um ruído $\frac{1}{f}$. Por último, temos que $\beta < -2$ sugere um padrão de movimento browniano.

A vApEn é uma ferramenta proposta por Santos et al. (2009) que mede a variabilidade de séries temporais. A variabilidade dos sinais oriundos de nossos modelos foi calculada em blocos de 100 pontos, devido a alta demanda computacional do método, e as médias desses blocos foram comparadas com os valores de referência obtidas por Santos et al. (2009). Dessa maneira, se a vApEn obtida apresentar valores próximos de 1100 temos que a nossa série temporal se comporta como um ruído branco com distribuição normal, valores próximos de 1000 caracterizam um ruído branco uniformemente distribuído. Quando analisamos senos, temos que valores próximos de 200 indicam uma organização característica de um seno, por outro lado a soma de dois senos resulta em valores próximos a 400, enquanto a soma de 3 senos apresentam uma vApEn de 500, por último um valor de médio 600 indica que o sinal pode ser caracterizado como uma soma

de 4 senos.

2.3.3 Entropia informacional

Além dessas análises do sistema dinâmico como tal, as séries temporais geradas pelos sinais trocados entre os osciladores (tanto para o modelo inicial quanto para o final) foram estudadas a fim de observarmos se existe uma diminuição da entropia informacional desses sinais associada à minimização da geração de entropia no oscilador. A entropia informacional nas séries pode ser quantificada através de algoritmos baseados na Teoria da Informação, algoritmos estes que procuram quantificar a variabilidade das séries. No presente estudo, foi utilizada a vApEn (Entropia Aproximada Volumétrica) conforme descrito por [Santos et al. \(2009\)](#).

Essa análise foi realizada acoplando dois osciladores e calculando-se a vApEn das frequências emitidas, por um dos osciladores, em intervalos de 100 pontos. Concomitantemente, para o mesmo oscilador, foi calculada a média de σ para o intervalo de 100 pontos correspondente, de forma que temos σ para cada vApEn obtida. Com isso em mãos, foi realizada uma regressão linear por mínimos quadrados entre σ e os valores de vApEn obtidos, para obtermos a inclinação da reta de regressão e o erro associado. A relação entre essas duas medidas é considerada significativa se a inclinação da reta obtida dado o erro associado não cruzar o valor zero.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Modelo Inicial

3.1.1 Oscilador isolado

O ponto de equilíbrio (P.E.) de um único oscilador i é dado por:

$$\phi_i^* = 0 \tag{3.1}$$

$$\omega_i^* = \frac{A_i}{C_i} \tag{3.2}$$

Assim, o ponto de equilíbrio na ausência de interações tem a fase igual à fase intrínseca e frequência igual a $\frac{A_i}{C_i}$. Essa frequência será referida como frequência ou velocidade natural do oscilador. Esse ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável (ou seja, o oscilador tende a sua fase intrínseca e a sua velocidade natural) quando os parâmetros B_i e C_i são positivos, o que é uma premissa do nosso modelo, dado que todos os nossos parâmetros são positivos.

3.1.2 Dois osciladores com acoplamento

No caso de dois osciladores entre os quais há os acoplamentos de fase (parâmetro K) e frequência (parâmetro E) como descritos no sistema (2.2), o ponto de equilíbrio é dado por:

$$\omega_i^* = \frac{E_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j} + \frac{A_i}{C_i - C_i E_i E_j} \quad (3.3)$$

$$\omega_j^* = \frac{E_j A_i}{C_i - C_i E_i E_j} + \frac{A_j}{C_j - C_j E_i E_j} \quad (3.4)$$

$$\phi_i^* = \frac{A_i B_j - A_j K_i - \frac{C_i E_i A_j B_j}{C_j - C_j E_i E_j} - \frac{A_i B_j - A_j K_i}{1 - E_i E_j} - \frac{C_j E_j A_i K_i}{C_i - C_i E_i E_j}}{B_i B_j - K_i K_j} \quad (3.5)$$

$$\phi_j^* = \frac{A_j B_i - A_i K_j - \frac{C_j E_j A_i B_i}{C_i - C_i E_i E_j} - \frac{A_j B_i - A_i K_j}{1 - E_i E_j} - \frac{C_i E_i A_j K_j}{C_j - C_j E_i E_j}}{B_i B_j - K_i K_j} \quad (3.6)$$

Esse ponto de equilíbrio é assintoticamente estável em duas condições:

$$E_i E_j > 1 \implies K_i K_j > B_i B_j$$

1) Quando $E_i E_j > 1$, o sistema é estável se $K_i K_j > B_i B_j$. Em outras palavras, para que o P.E. seja assintoticamente estável, se as constantes de acoplamento de frequência têm produto maior que 1, então o acoplamento de fase (dado pelas constantes K) tem que ser maior que o amortecimento associado com a fase (dado pelas constantes B).

$$E_i E_j < 1 \implies B_i B_j > K_i K_j$$

2) Quando $E_i E_j < 1$, o sistema é assintoticamente estável se $B_i B_j > K_i K_j$. Em outras palavras se o acoplamento de frequências for menor que 1, então o amortecimento associado com a fase (dado pelas constantes B) tem que ser maior que o acoplamento de fase (dado pelas constantes K).

Considerando que a estabilidade do P.E. é altamente dependente das constantes B_s e K_s , esses parâmetros foram estudados para evidenciar como afetam o valor das fases no ponto de equilíbrio (note que essas constantes não fazem parte das equações do valor das frequências, equações (3.3) e (3.4)). A Figura 3.1 ilustra o valor da fase do oscilador i em função das constantes B_i e K_i . Resultados similares são obtidos quando a comparação é feita entre $B_i \times K_j$, $B_j \times K_i$ e $B_j \times K_j$. É possível observar que esse valor não é definido na região $B_i B_j = K_i K_j$ (ver equações (3.5) e (3.6)), e que, ao redor dessa região, tende ao infinito positivo ou negativo.

Figura 3.1: Ponto de equilíbrio da fase ϕ_i num sistema com dois osciladores (i e j) acoplados, em função de valores dos parâmetros B_i (constante de amortecimento de fase) e K_i (constante de acoplamento de fase). Os parâmetros E_i e E_j (constantes de acoplamentos de frequência) valem 1.1; demais parâmetros = 1. O triângulo vermelho delimita a região onde $K_i K_j > B_i B_j$ e, portanto, o sistema é estável.

As Figuras 3.2 e 3.3 ilustram a evolução temporal do sistema (2.2) sob diferentes parâmetros. Para combinações de parâmetros na região estável, tanto a fase quanto a frequência tendem para valores fixos (3.2), enquanto na região instável estas tendem ao infinito negativo e positivo, respectivamente (3.3).

À primeira vista, os dois osciladores operam, aparentemente, com um mesmo valor de fase no P.E.. Porém, em uma análise mais detalhada (Figura 3.4 -A), é possível verificar que, apesar das fases variarem juntas, elas não se sobrepõem. O resultado analítico também pode ser observado na simulação numérica (Figura 3.4 -B).

Figura 3.2: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados. (A) Evolução da fase i e j (sobrepostas) para: K_i e $K_j = 2$; E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1. (B) Evolução da frequência i e j (sobrepostas) para: K_i e $K_j = 2$; E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1.

Figura 3.3: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados. (A) Evolução da fase i e j (sobrepostas) para: K_i e $K_j = 0,5$; E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1. (B) Evolução da frequência i e j (sobrepostas) para: K_i e $K_j = 0,5$; E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1.

Figura 3.4: Estudo analítico (A) e numérico (B) de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados. (A) Valor das fases ϕ_i e ϕ_j no P.E. com diferentes valores para B_i (de 0.1 a 4) e K_i (de 6.1 a 10). E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1. (B) Evolução das fases, com $K_i = 10$; E_i e $E_j = 1.1$; demais parâmetros = 1 (linha vermelha = oscilador j ; linha azul = oscilador i).

É importante e interessante, ainda, verificar se a frequência também é afetada pela mudança de parâmetros. Para tanto, foi estudado como os parâmetros C_i e C_j afetam os valores de frequência no ponto de equilíbrio (Figura 3.5).

Quando fixamos um certo valor do parâmetro C_i e aumentamos o C_j (ou vice-versa), o valor das frequências tende a zero. Dessa forma, quando os parâmetros C_i e/ou C_j possuem valores altos, o ponto de equilíbrio tende a ter frequências zero, conforme esperado pelo próprio efeito do amortecimento.

Novamente, uma análise mais minuciosa dos valores de frequências no P.E. do sistema revela que, no geral, os valores das frequências são diferentes entre si, não só quando variamos o parâmetro C (Figura 3.6), mas, também, quando modificamos o parâmetro A (Figura 3.7).

A importância dos parâmetros C (amortecimento da frequência) e A (forçamento) para a frequência é esperada, já que o termo $\frac{A}{C}$ representa a frequência natural de cada indivíduo. Assim, quando essa razão diverge de um oscilador para o outro, eles tendem a atingir o P.E. em valores diferentes de ω . A Figura 3.8 ilustra, de modo esquemático,

Figura 3.5: Ponto de equilíbrio das frequências, de dois osciladores (i e j) acoplados, com valores de C_i e C_j (amortecimento de frequência) variando de 0.1 a 10. E_i , E_j , K_i e K_j valem 1.1; demais parâmetros = 1. Cores próximas do vermelho indicam, dentro da escala do gráfico, valores de ω^* mais altos, enquanto cores próximas do azul indicam valores de ω^* mais baixos. Ver texto para detalhes.

uma possível interação entre dois indivíduos emitindo sinais em frequências diferentes, porém interagindo.

Figura 3.6: Estudo analítico (A) e numérico (B) de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados. (A) Ponto de equilíbrio das frequências com diferentes valores de C_i e C_j (de 6.1 a 10). E_i , E_j , K_i e K_j valem 1.1; demais parâmetros = 1. (B) Evolução das frequências com $C_i = 10$, $C_j = 7$. E_i , E_j , K_i e K_j valem 1.1; demais parâmetros = 1 (linha vermelha = oscilador j ; linha azul = oscilador i).

Figura 3.7: Estudo analítico (A) e numérico (B) de um sistema de dois osciladores (i e j) acoplados. (A) Ponto de equilíbrio das frequências com diferentes valores de A_i e A_j (de 0.1 a 10). E_i , E_j , K_i e K_j valem 1.1; demais parâmetros = 1. (B) Evolução das frequências com $A_i = 10$, $A_j = 7$. E_i , E_j , K_i e K_j valem 1.1; demais parâmetros = 1 (linha vermelha = oscilador j ; linha azul = oscilador i).

Figura 3.8: Sinais emitidos por dois osciladores, com frequências diferentes, ao longo do tempo.

3.1.3 Três osciladores

O ponto de equilíbrio para a situação com três osciladores é dado por:

$$\omega_i^* = \left(\frac{A_i}{C_i} + \frac{2E_i A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_j E_n} + \frac{2E_i A_j + E_i E_n A_j}{4C_j - C_n E_j E_n} \right) \left(\frac{4 - E_n E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.7)$$

$$\omega_j^* = \left(\frac{A_j}{C_j} + \frac{2E_j A_i + E_j E_n A_i}{4C_i - C_i E_i E_n} + \frac{2E_j A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_i E_n} \right) \left(\frac{4 - E_i E_n}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.8)$$

$$\omega_n^* = \left(\frac{A_n}{C_n} + \frac{2E_n A_i + E_n E_j A_i}{4C_i - C_i E_i E_j} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\phi_i^* = & \left((A_i - C_i \left(\frac{A_i}{C_i} + \frac{2E_i A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_j E_n} + \frac{2E_i A_j + E_i E_n A_j}{4C_j - C_n E_j E_n} \right) \right. \\
& \left(\frac{4 - E_n E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right)) (4B_n B_j - K_j K_n) \\
& + K_i (A_j B_n + A_n B_j - (2C_j B_n + K_n C_j) \left(\frac{A_j}{C_j} + \frac{2E_j A_i + E_j E_n A_i}{4C_i - C_i E_i E_n} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) - (2C_n B_j + K_j C_n) \\
& \left(\frac{A_n}{C_n} + \frac{2E_n A_i + E_n E_j A_i}{4C_i - C_i E_i E_j} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) + K_j A_n + K_n A_j) \\
& \left. \left(\frac{1}{4B_i B_n B_j - B_i K_n K_j - B_j K_n K_i - B_n K_i K_j - K_i K_j K_n} \right) \right) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_j^* = & \left((A_j - C_j \left(\frac{A_j}{C_j} + \frac{2E_j A_i + E_j E_n A_i}{4C_i - C_i E_i E_n} + \frac{2E_j A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_i E_n} \right) \right. \\
& \left(\frac{4 - E_n E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right)) (4B_i B_n - K_i K_n) \\
& + K_j (A_i B_n + A_n B_i - (2C_i B_n + K_n C_i) \left(\frac{A_i}{C_i} + \frac{2E_i A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_i E_n} + \frac{2E_i A_j + E_i E_n A_j}{4C_j - C_n E_j E_n} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) - (2C_n B_i + K_i C_n) \\
& \left(\frac{A_n}{C_n} + \frac{2E_n A_i + E_n E_j A_i}{4C_i - C_i E_i E_j} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) + K_i A_n + K_n A_i) \\
& \left. \left(\frac{1}{4B_i B_n B_j - B_i K_n K_j - B_j K_n K_i - B_n K_i K_j - K_i K_j K_n} \right) \right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_n^* = & \left((A_n - C_n \left(\frac{A_n}{C_n} + \frac{2E_n A_i + E_n E_j A_i}{4C_i - C_i E_i E_j} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{4 - E_n E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \right) (4B_i B_j - K_i K_j) \\
& + K_n (A_i B_j + A_j B_i - (2C_i B_j + K_j C_i) \left(\frac{A_i}{C_i} + \frac{2E_i A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_j E_n} + \frac{2E_i A_j + E_i E_n A_j}{4C_j - C_n E_j E_n} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) - (2C_j B_i + K_i C_j) \\
& \left(\frac{A_j}{C_j} + \frac{2E_j A_i + E_j E_n A_i}{4C_i - C_i E_i E_n} + \frac{2E_j A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_i E_n} \right) \\
& \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) + K_i A_j + K_j A_i) \\
& \left(\frac{1}{4B_i B_n B_j - B_i K_n K_j - B_j K_n K_i - B_n K_i K_j - K_i K_j K_n} \right) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

A simulação numérica de três osciladores acoplados permitiu *estimar* a seguinte condição de estabilidade para o sistema:

$$E_i E_j E_n > 1 \implies K_i K_j K_n > B_i B_j B_n$$

Mais uma vez, para que o P.E. seja assintoticamente estável, se as constantes de acoplamento têm produto maior que 1, então o acoplamento de fase (dado pelas constantes K) tem que ser maior que o amortecimento associado com a fase (dado pelas constantes B).

$$E_i E_j E_n < 1 \implies B_i B_j B_n > K_i K_j K_n$$

Da mesma maneira que o observado no sistema com dois osciladores, se as constantes de acoplamento de frequências tem produto menor que 1, então o amortecimento associado com a fase (dado pelas constantes B) tem que ser maior que o acoplamento de fase (dado pelas constantes K).

Essas relações podem ser evidenciadas através de simulações, com parâmetros que obedeçam cada uma das situações (Figuras 3.9 e 3.10).

Figura 3.9: Simulação numérica de um sistema de três osciladores (i , j e n) acoplados. (A) Evolução das fases de i , j e n (sobrepostas) para: K_i , K_j e $K_n = 2$; E_i , E_j e $E_n = 1.1$; demais parâmetros = 1. (B) Evolução das frequências de i , j e n (sobrepostas) para: K_i , K_j e $K_n = 2$; E_i , E_j e $E_n = 1.1$; demais parâmetros = 1.

Figura 3.10: Simulação numérica de um sistema de três osciladores (i , j e n) acoplados. (A) Evolução das fases de i , j e n (sobrepostas) para: K_i , K_j e $K_n = 0.5$; E_i , E_j e $E_n = 1.1$; demais parâmetros = 1. (B) Evolução das frequências de i , j e n (sobrepostas) para: K_i , K_j e $K_n = 0.5$; E_i , E_j e $E_n = 1.1$; demais parâmetros = 1.

Através da simulação numérica também foi possível obter comportamentos distintos. Modificando o valor de A (forçamento da frequência), obtivemos os três osciladores acoplados operando não somente em fases diferentes como, também, em frequências distintas (Figura 3.11). Resultados semelhantes, porém em menor escala de valores, foram obtidos quando o parâmetro C foi alterado.

Figura 3.11: Simulação numérica de um sistema de três osciladores (i , j e n) acoplados com $A_i = 100$, $A_j = 50$ e $A_n = 1$; K_i , K_j e $K_n = 2$; E_i , E_j e $E_n = 1.1$; demais parâmetros = 1. A linha azul representa o oscilador i , a linha vermelha o oscilador j e a linha verde o n . (A) Evolução das fases de i , j e n (sobrepostas). (B) Evolução das frequências de i , j e n (sobrepostas).

Essa parte do estudo teve como objetivo o melhor conhecimento do nosso sistema de comunicação inicial baseado em osciladores. O próximo passo é realizar o mesmo procedimento de análise para o modelo final.

3.2 Modelo final

3.2.1 Oscilador isolado

O ponto de equilíbrio obtido para o modelo com um oscilador (2.7) é:

$$\omega_i^* = \omega_{0_i} \quad (3.13)$$

$$\phi_i^* = 0 \quad (3.14)$$

$$A_i^* = C_i \omega_{0_i} \quad (3.15)$$

$$B_i^* = 0 \quad (3.16)$$

Temos, então, que o valor da frequência no ponto de equilíbrio é igual à frequência natural do oscilador (ω_{0_i}) enquanto o valor da fase no P.E. (que indica a diferença entre a fase do oscilador e aquela que ele gostaria de estar) vale zero. Esses dois resultados são esperados para um oscilador na ausência de interações. Temos também que $A_i^* = C_i \omega_{0_i}$ e B_i^* vale zero, o que indica, respectivamente, que a vontade de emitir sinias está associada à frequência natural, e que o oscilador está na sua fase natural.

O ponto de equilíbrio obtido é globalmente assintoticamente estável quando respeitadas as seguintes condições:

$$C_i^2 m_i + K_{1_i} C_i + C_i m_i^2 > 1$$

$$C_i^2 m_i + K_{1_i} C_i + C_i m_i^2 > K_{2_i} \left(3 + \frac{m_i}{C_i} - \frac{C_i^2}{K_{1_i}} - \frac{C_i}{K_{1_i}} + \frac{K_{2_i}}{m K_{1_i}} \right)$$

3.2.2 Osciladores iguais

O P.E. para o sistema com N osciladores iguais, descrito acima, é:

$$\omega^* = \omega_0 \left(\frac{K_1}{K_1 - K_3} \right) \quad (3.17)$$

$$A^* = C\omega_0 \left(\frac{K_1}{K_1 - K_3} \right) \quad (3.18)$$

$$B^* = 0 \quad (3.19)$$

O valor da fase no ponto de equilíbrio é dado por:

$$\text{sen}(\phi^*) = \frac{K_4}{K_2} \text{sen}(\phi^*) \quad (3.20)$$

Essa equação indica que se tivermos a razão $\frac{K_4}{K_2} = 1$, o valor da fase no P.E. ficará indeterminado. Essa situação ocorrerá se tivermos $K_4 = K_2$, o que implica que, em nossas equações, a fase de outros osciladores tem o mesmo peso da fase do próprio oscilador. Por outro lado, se $\frac{K_4}{K_2} \neq 1$, temos a solução trivial, ou seja $\phi^* = 0$. Dessa maneira não consideraremos, para nossas futuras análises, a situação específica onde o valor da fase no P.E. é indeterminado e examinaremos apenas as situações em que $\phi^* = 0$.

3.2.3 Dois osciladores diferentes

O P.E. para o sistema com dois osciladores diferentes é:

$$\omega_i^* = \left(\omega_{0_i} + \frac{K_{3_i}}{K_{1_i}} \omega_{0_j} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) \quad (3.21)$$

$$\omega_j^* = \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}} \omega_{0_i} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) \quad (3.22)$$

$$A_i^* = C_i \left(\omega_{0_i} + \frac{K_{3_i}}{K_{1_i}} \omega_{0_j} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) \quad (3.23)$$

$$A_j^* = C_j \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}} \omega_{0_i} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) \quad (3.24)$$

$$B_i^* = 0 \quad (3.25)$$

$$B_j^* = 0 \quad (3.26)$$

Os valores das fases no P.E. podem ser obtidos partindo de:

$$K_{2_i} \sin(\phi_i^*) = K_{4_i} \sin(\phi_j^*)$$

$$K_{2_j} \sin(\phi_j^*) = K_{4_j} \sin(\phi_i^*)$$

Temos então que:

$$\sin(\phi_i^*) = \frac{K_{4_i}}{K_{2_i}} \sin(\phi_j^*) \quad (3.27)$$

$$\sin(\phi_j^*) = \frac{K_{4_j}}{K_{2_j}} \sin(\phi_i^*) \quad (3.28)$$

E, assim, chegamos em:

$$\sin(\phi_j^*) = \frac{K_{4_i} K_{4_j}}{K_{2_i} K_{2_j}} \sin(\phi_j^*) \quad (3.29)$$

$$\sin(\phi_i^*) = \frac{K_{4_i} K_{4_j}}{K_{2_i} K_{2_j}} \sin(\phi_i^*) \quad (3.30)$$

Temos então que, de maneira semelhante ao observado para o modelos com osciladores iguais (equação 3.20), quando a razão $\frac{K_{4_i} K_{4_j}}{K_{2_i} K_{2_j}} = 1$ as fases ficam indetermináveis. Porém se evitarmos essa situação específica e consideramos que $\frac{K_{4_i} K_{4_j}}{K_{2_i} K_{2_j}} \neq 1$, temos mais uma vez a solução trivial, na qual $\phi_i^* = 0$ e $\phi_j^* = 0$. Dessa maneira consideraremos que $\phi_i^* = 0$ e $\phi_j^* = 0$, ou seja, os dois osciladores, em respeito a fase, se comportarão como osciladores isolados.

A estabilidade do ponto de equilíbrio do modelo com dois osciladores não pode ser

obtida analiticamente, porém em simulações numéricas foi possível *estimar* que os P.E. obtidos são localmente estáveis se:

$$K_{1_i} K_{1_j} > K_{3_i} K_{3_j} \quad (3.31)$$

Podemos então observar, numericamente, que quando não respeitamos a condição acima (i.e. o ponto de equilíbrio é instável) as frequências tendem ao infinito (Figura 3.12 - (a)) enquanto as fases ficam estáveis (Figura 3.12 - (b)), porém quando respeitamos a mesma condição (i.e. o P.E. é estável), tanto a frequência (Figura 3.13 - (a)) quanto a fase tendem, aparentemente (como será melhor explicado a seguir), a um ciclo limite (Figura 3.13 - (b)).

(a) Evolução das fases

(b) Evolução das frequências

Figura 3.12: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados. (a) Evolução da fase i e j (sobrepostas) para todos os parâmetros = 1. (b) Evolução da frequência i e j (sobrepostas) para todos os parâmetros = 1.

Os ciclos limites observados são consequências de oscilações na variável de estado B (Figura 3.14). Essas oscilações surgem porque baixos valores dos parâmetros m ou C não conseguem extinguir o parâmetro B rapidamente o suficiente para que este atinja o

seu P.E. (lembrando que $B^* = 0$, conforme as equações (3.25) e (3.26)).

Figura 3.13: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$; demais parâmetros = 1. (a) Evolução da fase i e j (sobrepostas). (b) Evolução da frequência i e j (sobrepostas).

Figura 3.14: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados. Evolução do B_i e B_j (sobrepostas) para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$ e demais parâmetros = 1.

Essas padrões do parâmetro B fazem com que surjam comportamentos inesperados nas simulações, como, por exemplo, quando alteramos os parâmetros K_2 e K_4 , temos que osciladores idênticos passam a ter frequências e fases não sobrepostos (Figura 3.15)

ou ainda que o P.E. da fase se torna instável (Figura 3.16).

Figura 3.15: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$; K_{2_i} e $K_{2_j} = 5$ e demais parâmetros $= 1$. (a) Evolução da fase i (linha azul) e j (linha vermelha). (b) Evolução da frequência i (linha azul) e j (linha vermelha).

Dessa forma podemos estabelecer que, no nosso modelo, os parâmetros m ou C devem ser grandes o suficiente para fazer com que o B atinja seu P.E.. Dessa maneira, se essa condição for obedecida, a variável de estado B irá a zero (Figura 3.17 - (c)) e conseqüentemente, quando respeitamos a condição de estabilidade (inequação 3.31), tanto a fase (Figura 3.17 - (a)) quanto a frequência (Figura 3.17 - (b)) vão assintoticamente para o P.E.

Por último, temos que alterações em ω_0 (referência interna de frequência) apenas deslocam o ponto de equilíbrio (Figura 3.18).

Uma vez que entendemos melhor os nossos sistemas de comunicação baseados em osciladores, podemos agora, com essas informações em mãos, partir para nossas próximas análises.

Figura 3.16: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$; K_{2_i} e $K_{2_j} = 17$, K_{4_i} e $K_{4_j} = 18$ e demais parâmetros = 1. (a) Evolução da fase i e j (sobrepostas). (b) Evolução da frequência i e j (sobrepostas).

Figura 3.17: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$; K_{2_i} e $K_{2_j} = 11$, K_{4_i} , K_{4_j} , m_i , $m_j = 10$ e demais parâmetros = 1. (a) Evolução da fase i e j (sobrepostas). (b) Evolução da frequência i e j (sobrepostas). (c) Evolução do B_i e B_j (sobrepostas).

Figura 3.18: Simulação numérica de um sistema de dois osciladores (i e j , descritos pelas equações (2.10)) acoplados para: K_{1_i} e $K_{1_j} = 2$; m_i e $m_j = 5$; ω_{0_i} e $\omega_{0_j} = 5$ e demais parâmetros = 1. (a) Evolução da fase i e j (sobrepostas). (b) Evolução da frequência i e j (sobrepostas).

3.3 Minimização da geração de entropia (σ)

3.3.1 Modelo Inicial

A partir da definição aqui proposta como da geração de entropia no sistema (equação (2.11)), temos que o valor do σ para um oscilador i isolado é dado por:

$$\hat{\sigma}_i^* = \omega_i^* A_i = \frac{A_i}{C_i} * A_i = \frac{A_i^2}{C_i} \quad (3.32)$$

A partir da equação (2.13), o cálculo da geração de entropia para dois osciladores é dado, para o oscilador i , por:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_i^* &= \omega_i^*(A_i + E_i A_j) \\
&= (A_i + E_i A_j) * \left(\frac{E_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j} + \frac{A_i}{C_i - C_i E_i E_j} \right) \\
&= \frac{E_i^2 A_j^2 + E_i A_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j} + \frac{A_i^2 + E_i A_i A_j}{C_i - C_i E_i E_j}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

E, de forma análoga, para o oscilador j :

$$\hat{\sigma}_j^* = \frac{E_j^2 A_i^2 + E_j A_i A_j}{C_i - C_i E_i E_j} + \frac{A_j^2 + E_j A_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j} \tag{3.34}$$

Em uma primeira análise, a partir das equações do σ para um ou dois osciladores, podemos observar que:

- Nos dois casos, quando a diferença de potencial vale zero, a geração de entropia também vale zero, como necessário.
- No caso com dois osciladores, se o acoplamento de frequência de um oscilador (por exemplo, E_i para o oscilador i) tende a zero, a geração de entropia nesse oscilador tende a ser igual à geração de entropia na ausência de um segundo oscilador. No entanto, a geração de entropia do outro oscilador tende a $\frac{E_j^2 A_i^2 + E_j A_i A_j}{C_i} + \frac{A_j^2 + E_j A_i A_j}{C_j}$; sendo, então, maior ou igual à geração de entropia do oscilador isolado.
- Se o acoplamento (e.g., parâmetro E_i) tende ao infinito, a geração de entropia do oscilador também tende ao infinito, enquanto, no outro, tende a zero. Este é o único caso em que, variando-se apenas um parâmetro, é possível ter uma geração de entropia menor em um dos osciladores em relação à geração deste isolado.

Uma outra análise importante é a do caso no qual os dois osciladores envolvidos são idênticos (i.e., têm os mesmos parâmetros). Tal caso representa um extremo na troca de informações entre dois indivíduos da mesma espécie. A partir da equação (2.14) temos:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^* &= \omega^*(A + EA) \\
&= \frac{E^2 A^2 + EA^2}{C - CE^2} + \frac{A^2 + EA^2}{C - CE^2} \\
&= \frac{A^2 (1 + E)^2}{C (1 - E^2)} \\
&= \frac{A^2 (1 + E)}{C (1 - E)}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Podemos então comparar a equação (3.35), representando $\hat{\sigma}$, com as (3.33) e (3.34), representando $\hat{\sigma}_i$ e $\hat{\sigma}_j$ respectivamente, para assim tentar concluir qual das duas situações minimiza a geração de entropia. Nesse primeiro momento vamos fazer isso explorando os limites dos parâmetros das equações. Dessa maneira, se nos focarmos, por exemplo, no parâmetro C (item 1 abaixo) nosso objetivo é verificar como $\hat{\sigma}$ é afetada por variações no parâmetro C , e como $\hat{\sigma}_i$ e $\hat{\sigma}_j$ são influenciadas por alterações no parâmetro C_i (i.e. como o parâmetro afeta o próprio oscilador e o outro oscilador envolvido na comunicação).

1. Temos, então, que se $C_i/C \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\
\hat{\sigma}_i &\rightarrow \frac{E_i^2 A_j^2 + E_i A_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j} \\
\hat{\sigma}_j &\rightarrow \frac{A_j^2 + E_j A_i A_j}{C_j - C_j E_i E_j}
\end{aligned}$$

2. Se $C_i/C \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \infty$$

3. Para $A_i/A \rightarrow \infty$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \infty$$

4. Para $A_i/A \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow 0$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \frac{E_i^2 A_j^2}{C_j - C_j E_i E_j}$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \frac{A_j^2}{C_j - C_j E_i E_j}$$

5. Se $E_i/E \rightarrow \infty$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow A^2/C$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow 0$$

6. Se $E_i/E \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow A^2/C$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow A_i^2/C_i$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \frac{E_j^2 A_i^2 + E_j A_i A_j}{C_i} + \frac{A_j^2 + E_j A_i A_j}{C_j}$$

Com estes resultados podemos observar que o único caso em que a geração de entropia (σ) é menor no caso de dois osciladores diferentes ocorre quando o parâmetro E_i tende

ao infinito. Nesse caso, $\hat{\sigma}$ é zero para o oscilador j ao custo de tender ao infinito para o oscilador i . Esta é, potencialmente, uma situação altamente desvantajosa para o segundo oscilador, sendo, provavelmente, evitada por este. Outro fator importante é que a geração de entropia do sistema como um todo também tende ao infinito. Dessa forma, por esses resultados, a situação com dois osciladores iguais seria a que minimiza σ .

Nos dois casos citados (osciladores iguais ou diferentes), é possível observar uma singularidade quando variamos o parâmetro de acoplamento de frequência (E). No caso com dois osciladores iguais, quando o parâmetro E tende a 1, σ tende ao infinito. Por outro lado, no caso com dois osciladores diferentes, esse mesmo comportamento ocorre quando $E_i \cdot E_j = 1$, ou seja, dependendo desses valores, a singularidade pode aparecer deslocada, surgindo, assim, regiões em que a situação com dois osciladores diferentes possui uma geração de entropia menor que a situação com dois osciladores iguais (Figura 3.19), independentemente dos demais parâmetros do sistema.

Figura 3.19: Geração de entropia de dois osciladores iguais (linha azul), e dois diferentes (i , linha vermelha, e j , linha verde), com a alteração do parâmetro E (no primeiro caso) e E_i (no segundo). É possível observar que a geração de entropia tende ao infinito em valores diferentes dos parâmetros E e E_i (ver texto para maiores detalhes).

No entanto, fora dessa singularidade, a situação com dois osciladores iguais minimiza a geração de entropia como pode ser visto nas regiões próximas de zero (Figura 3.20) e tendendo ao infinito (Figura 3.21).

Figura 3.20: Geração de entropia de dois osciladores iguais (linha azul), e dois diferentes (i e j – linhas vermelha e verde, respectivamente), com a alteração do parâmetro E (no primeiro caso) e E_i (no segundo). Note que em valores tendendo ao zero a geração de entropia é menor no caso dos dois osciladores iguais.

Dado que, por hipótese (ver Introdução – item 1.3), não interessa aos animais ficar na região em que a geração de entropia tende ao infinito, nosso estudo levará em conta apenas as combinações de parâmetros que mantêm o sistema afastado desse resultado. Isso posto, podemos estabelecer que, para dois osciladores, a situação com menor geração de entropia é aquela na qual os osciladores são iguais entre si.

Podemos agora, realizar a mesma análise para três osciladores para tentar evidenciar se os padrões obtidos podem ser generalizados para um número maior de sistemas de comunicação.

Figura 3.21: Geração de entropia de dois osciladores iguais (linha azul), e dois diferentes (i e j – linhas vermelha e verde, respectivamente), com a alteração do parâmetro E (no primeiro caso) e E_i (no segundo). Note que, para altos valores do parâmetro E , a menor geração de entropia obtida está associada ao oscilador j . Em seguida, com valor um pouco maior, temos σ dos dois osciladores iguais. Por último, tendendo ao infinito, temos σ do oscilador i . Assim, apesar do menor σ ser do oscilador j , o sistemas com dois osciladores iguais minimiza a geração de entropia.

A geração de entropia de n osciladores iguais continua a ser dada pela equação (3.35):

$$\hat{\sigma}^* = \frac{A^2 (1 + E)}{C (1 - E)}$$

Porém, σ para três osciladores (i , j e n) passa a ser dada por:

$$\hat{\sigma}_i^* = \left(\frac{A_i}{C_i} + \frac{2E_i A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_j E_n} + \frac{2E_i A_j + E_i E_n A_j}{4C_j - C_n E_j E_n} \right) \left(\frac{4 - E_n E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \left(A_i + E_i \left(\frac{A_j + A_n}{2} \right) \right) \quad (3.36)$$

$$\hat{\sigma}_j^* = \left(\frac{A_j}{C_j} + \frac{2E_j A_i + E_j E_n A_i}{4C_i - C_i E_i E_n} + \frac{2E_j A_n + E_i E_j A_n}{4C_n - C_n E_i E_n} \right) \left(\frac{4 - E_i E_n}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \left(A_j + E_j \left(\frac{A_i + A_n}{2} \right) \right) \quad (3.37)$$

$$\hat{\sigma}_n^* = \left(\frac{A_n}{C_n} + \frac{2E_n A_i + E_n E_j A_i}{4C_i - C_i E_i E_j} + \frac{2E_n A_j + E_n E_i A_j}{4C_j - C_j E_i E_j} \right) \left(\frac{4 - E_i E_j}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \left(A_n + E_n \left(\frac{A_i + A_j}{2} \right) \right) \quad (3.38)$$

Podemos, então, da mesma maneira feita para dois osciladores, comparar as equações (3.36), (3.37) e (3.38) com o resultado apresentado em (3.35), explorando os limites dos parâmetros das equações. Porém, dada a dificuldade de se lidar com o grande número de parâmetros envolvidos nessas equações, consideraremos que os parâmetros que não estão sob o foco da nossa análise são iguais para os três osciladores (e.g., no caso (1) e (2) abaixo, todos os parâmetros, com exceção do C , são iguais para todos osciladores). Além disso, será observado o efeito dos parâmetros associados ao oscilador “ i ” no oscilador “ i ” e nos outros osciladores envolvidos na comunicação, os quais serão representados pelo oscilador j , já que, pela simetria do modelo, os mesmos efeitos são esperados para o oscilador “ j ” e “ n ” (i.e. o oscilador i interpreta da mesma maneira sinais provenientes qualquer um dos outros osciladores envolvidos na comunicação).

1. Temos, então, que se $C_i/C \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \left(\frac{2EA + E^2 A}{C_n} + \frac{2EA + E^2 A}{C_j} \right) \left(\frac{A + EA}{4 - 3E^2 - E^3} \right) \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \left(\frac{A}{C_j} + \frac{2EA + E^2 A}{4C_n - C_n E^2} \right) \left(\frac{(A + EA)(4 - E^2)}{4 - 3E^2 - E^3} \right) \end{aligned}$$

2. Se $C_i/C \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \infty$$

3. Para $A_i/A \rightarrow \infty$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \infty$$

4. Para $A_i/A \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow 0$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \left(\frac{2EA_n + E^2A_n + 2EA_j + E^2A_j}{C(4 - 3E^2 - E^3)} \right) \left(E \left(\frac{A_j + A_n}{2} \right) \right)$$

$$\hat{\sigma}_j \Rightarrow \left(\frac{A_j}{C} + \frac{2EA_n + E^2A_n}{4C - CE^2} \right) \left(\frac{4 - E^2}{4 - 3E^2 - E^3} \right) \left(A_j + \left(\frac{EA_n}{2} \right) \right)$$

5. Se $E_i/E \rightarrow \infty$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow A^2/C$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow \infty$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \infty$$

6. Se $E_i/E \rightarrow 0$, temos que:

$$\hat{\sigma} \rightarrow A^2/C$$

$$\hat{\sigma}_i \rightarrow A_i^2/C_i$$

$$\hat{\sigma}_j \rightarrow \left(\frac{A^2}{C} \right) \left(\frac{(4 + 4E_j + E_jE_n)(1 + E_j)}{4 - E_nE_j} \right)$$

Mais uma vez, podemos evidenciar que a geração de entropia é minimizada quando temos três osciladores iguais. Porém, a mesma singularidade observada anteriormente

também ocorre nesse caso. Se nos focarmos nas alterações do parâmetro “ E ” (e consideramos os outros como iguais entre os dois osciladores) chegamos às seguintes equações:

$$\hat{\sigma}_i^* = \frac{A^2}{C} \left(\frac{(4 - E_n E_j + 4E_i + E_i E_j + E_i E_n)(1 + E_i)}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.39)$$

$$\hat{\sigma}_j^* = \frac{A^2}{C} \left(\frac{(4 - E_i E_n + 4E_j + E_j E_n + E_i E_j)(1 + E_j)}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.40)$$

$$\hat{\sigma}_n^* = \frac{A^2}{C} \left(\frac{(4 - E_i E_j + 4E_n + E_n E_j + E_n E_i)(1 + E_n)}{4 - E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j} \right) \quad (3.41)$$

Assim, é possível observar que os pontos da singularidade surgem em regiões diferentes. No caso de com dois osciladores iguais, temos a singularidade continua a aparecer quando $E = 1$. Porém nesse novo caso, a singularidade surge quando $E_n E_j - E_i E_n - E_i E_j - E_i E_n E_j = 4$ (Figura 3.22).

Podemos mais uma vez estabelecer, dado que não interessa aos animais ficar na região em que a geração de entropia tende ao infinito, que a situação com menor geração de entropia é aquela na qual os osciladores são iguais entre si, e ainda, que esta é uma condição geral que aparentemente não depende do número de osciladores.

Para, então, aprofundarmos nosso estudo, nessa próxima fase (apenas considerando o sistema com osciladores iguais) enfatizaremos como o parâmetro E afeta o sistema. Além de ter uma grande importância biológica (já que ele define se os animais estão, ou não, se comunicando), esse foi o parâmetro que apresentou uma maior variedade de resultados na nossa comparação entre modelos compostos por osciladores iguais e diferentes.

Com isso em mente, é possível (a partir da equação (3.35)) observar que quando o parâmetro E tende a zero ou ao infinito, a geração de entropia tende a ser igual à geração

de entropia de um oscilador na ausência de interações, ou seja: $\hat{\sigma}^* = \frac{A^2}{C}$. Por outro lado, quando o parâmetro E tende a 1, a geração de entropia tende a mais ou menos infinito (Figura 3.23).

Figura 3.22: Geração de entropia de três osciladores iguais, e três diferentes (i , j e n), com a alteração do parâmetro E (no primeiro caso) e E_i (no segundo). É possível observar que o σ dos três osciladores iguais (linha azul) tende ao infinito em um valor do parâmetro E diferente dos osciladores com parâmetros distintos (linhas vermelha, verde e amarela).

Figura 3.23: Geração de entropia, de dois osciladores iguais, em relação ao parâmetro E .

Podemos separar a geração de entropia nos três seguintes casos:

1. Quando o parâmetro E tende a 1: como dito a geração de entropia tende ao infinito

(positivo ou negativo).

2. Indo para a situação com valores do parâmetro E maiores que 1, ou seja, quando as frequências dos outros osciladores têm um peso maior que a do próprio oscilador, temos que a geração de entropia tende a $\frac{A^2}{C}$ (igual a σ de um oscilador isolado). Por outro lado as frequências dos osciladores tendem a zero. Nessa situação os osciladores envolvidos tenderiam a não emitir nenhum sinal.
3. No caso em que o parâmetro E é menor que 1 (i.e., a sua própria frequência tem um peso maior que a dos outros osciladores) temos que σ tende, novamente, a $\frac{A^2}{C}$. Além disso, a frequência tende a ser igual à natural, que o oscilador “gostaria de estar”.

Temos que, para a situação em que todos os osciladores são iguais, a geração de entropia é minimizada nesses dois últimos casos (sendo igual à geração de entropia no caso com um oscilador só).

Coeficiente de Eficiência de Fluxo ($c^{\omega\sigma}$)

Para tentar entender melhor as diferenças entre esses dois casos ((2) e (3) citados acima, com o parâmetro E tendendo respectivamente ao infinito ou a zero), dado mudanças em um parâmetro, foi calculado o coeficiente $c^{\omega\sigma}$ para o parâmetro E . Para evitar futuras confusões envolvendo os sinais (associados ao sentido do fluxo), esse cálculo considerou o quadrado da frequência e de geração de entropia.

Temos então que o coeficiente de eficiência de fluxo para o parâmetro E vale:

$$c^{\omega\sigma} = \frac{2}{1 + E} \quad (3.42)$$

Como a eficiência no controle de fluxo (ou seja, uma menor mudança na geração de entropia dada uma mudança no fluxo) aumenta quanto menor for $c^{\omega\sigma}$, temos que a maior

eficiência ocorrerá quando tivermos valores altos e decrescentes do parâmetro E . Ou seja, quando diminuimos o valor do parâmetro E (a partir de um valor alto de E) aumentamos o fluxo, porém aumentamos proporcionalmente menos a geração de entropia. Isso faz com que seja mais interessante mexer nesse parâmetro quanto maior ele for.

3.3.2 Modelo Final

Temos então (a partir das equações (3.13) e (3.15)) para um único oscilador:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^* &= \omega_i^* A_i^* \\ &= \omega_{0_i} C_i \omega_{0_i} \\ &= \omega_{0_i}^2 C_i\end{aligned}\tag{3.43}$$

A partir das equações (3.21) e (3.23), temos a seguinte σ para um oscilador i presente em uma situação com dois osciladores:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^* &= \omega_i^* A_i^* \\ &= \left(\omega_{0_i} + \frac{K_{3_i}}{K_{1_i}} \omega_{0_j} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) C_i \left(\omega_{0_i} + \frac{K_{3_i}}{K_{1_i}} \omega_{0_j} \right) \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right) \\ &= \left(\omega_{0_i} + \frac{K_{3_i}}{K_{1_i}} \omega_{0_j} \right)^2 \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right)^2 C_i\end{aligned}\tag{3.44}$$

Da mesma maneira, temos para o oscilador j :

$$\hat{\sigma}_j^* = \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}} \omega_{0_i} \right)^2 \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right)^2 C_j\tag{3.45}$$

Para uma situação em que os osciladores são idênticos (a partir da equação (3.17)), temos a seguinte geração de entropia:

$$\hat{\sigma}^* = \omega_0 \left(\frac{K_1}{K_1 - K_3} \right)^2 C_i \omega_0^2 \quad (3.46)$$

Assim, comparando essas equações (3.44, 3.45 e 3.46) podemos tentar observar qual situação minimiza a geração de entropia. Isso foi feito explorando como σ se comporta com alterações nos parâmetros. Da mesma maneira realizada anteriormente, se nos focarmos, por exemplo, no parâmetro K_1 (item 1 abaixo) nosso objetivo é verificar como o $\hat{\sigma}$ é afetado por variações no parâmetro K_1 , e como $\hat{\sigma}_i$ e $\hat{\sigma}_j$ são influenciados por alterações no parâmetro K_{1_i} (i.e. como o parâmetro afeta o próprio oscilador e o outro oscilador envolvido na comunicação).

1. Temos, então, que se $K_{1_i}/K_1 \rightarrow \infty$, então:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &\rightarrow \omega_0^2 C \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \omega_{0_i}^2 C_i \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j} \omega_{0_i}}{K_{1_i}} \right)^2 C_j \end{aligned}$$

2. Se $K_{1_i}/K_1 \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \frac{\omega_{0_j}^2 K_{1_j}^2 C_i}{K_{3_j}^2} \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

3. Para $K_{3_i}/K_3 \rightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \frac{\omega_{0_j}^2 K_{1_j}^2 C_i}{K_{3_j}^2} \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow 0\end{aligned}$$

4. Para $K_{3_i}/K_3 \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow \omega_0^2 C \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \omega_{0_i}^2 C_i \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j} \omega_{0_i}}{K_{1_i}} \right)^2 C_j\end{aligned}$$

5. Se $\omega_{0_i}/\omega_0 \rightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow \infty \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \infty \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

6. Se $\omega_{0_i}/\omega_0 \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \frac{K_{3_i}^2 \omega_{0_j}^2 K_{1_j}^2 C_i}{(K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j})^2} \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \frac{\omega_{0_j}^2 K_{1_i}^2 K_{1_j}^2 C_j}{(K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j})^2}\end{aligned}$$

7. Se $C_i/C \rightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow \infty \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow \infty \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}} \omega_{0_i} \right)^2 \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right)^2 C_j\end{aligned}$$

8. Se $C_i/C \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_i &\rightarrow 0 \\ \hat{\sigma}_j &\rightarrow \left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}} \omega_{0_i} \right)^2 \left(\frac{K_{1_i} K_{1_j}}{K_{1_i} K_{1_j} - K_{3_i} K_{3_j}} \right)^2 C_j\end{aligned}$$

Podemos inicialmente observar que σ obtido para $K_{1_i}/K_1 \rightarrow \infty$ é exatamente igual ao obtido quando $K_{3_i}/K_3 \rightarrow 0$, assim como o obtido para $K_{1_i}/K_1 \rightarrow \infty$ é igual ao obtido quando $K_{3_i}/K_3 \rightarrow 0$. Isso indica que o processamento de um oscilador que é fortemente dependente de suas referências internas é o mesmo de um oscilador cujo acoplamento, com outros, tende a zero. Da mesma maneira, o processamento de um oscilador que negligencia suas referências internas é igual ao processamento de um oscilador que possui um acoplamento alto com outros osciladores.

Se compararmos os resultados acima com os obtidos para um oscilador isolado (equação 3.43) podemos observar que, da mesma maneira que para o modelo inicial, a interação com outros osciladores implica em maior σ . Isso apenas não é observado quando $K_{1_i}/K_1 \rightarrow 0$ ou $K_{3_i}/K_3 \rightarrow \infty$, porém temos que essas duas situações não respeitam as condições de estabilidade do modelo (inequação 3.31).

Comparando a geração de entropia obtida podemos concluir que, da mesma maneira que observado para o modelo inicial (descrito pelas equações (2.4)), a situação com

osciladores iguais minimiza σ do sistema (ou seja de $\sigma_i + \sigma_j$). Lembrando que no caso em que $C_i/C \rightarrow \infty$, temos que σ_j tende a $\left(\omega_{0_j} + \frac{K_{3_j}}{K_{1_j}}\omega_{0_i}\right)^2 \left(\frac{K_{1_i}K_{1_j}}{K_{1_i}K_{1_j} - K_{3_i}K_{3_j}}\right)^2 C_j$, mas como σ_i tende ao infinito, a geração de entropia do sistema tende ao infinito.

É importante ressaltar que a geração de entropia tende ao infinito quando tivermos $K_{1_i}K_{1_j} - K_{3_i}K_{3_j} = 0$, para o modelo com osciladores diferentes, ou quando tivermos $K_1 - K_3 = 0$ no modelo com osciladores iguais. Dessa maneira, essa singularidade pode ocorrer deslocada de um modelo para outro quando variamos os parâmetros K_1 (Figura 3.24 - (a)) ou K_3 (Figura 3.24 - (b)). Esse mesmo comportamento ocorre no modelo inicial (descrito pelas equações (2.4)), e da mesma maneira que feito anteriormente, não consideraremos essa região em nossas comparações (já que não existe interesse dos osciladores em permanecer em uma região na qual σ tende ao infinito).

(a) Variação de σ em função de K_{1_i}/K_1 (b) Variação de σ em função de K_{3_i}/K_3

Figura 3.24: Variação geração de entropia de dois osciladores iguais (linha verde, descritos pelas equações (3.17), e dois diferentes (i , linha azul, e j , linha vermelha, descritos pelas equações (2.10)). (a) Variação geração de entropia com a alteração do parâmetro K_{1_i} (para o caso com osciladores diferentes) e K_1 (para o caso com osciladores iguais), com $K_{3_j} = 3$, $C_i = 2$, $\omega_{0_j} = 2$ (parâmetros escolhidos aleatoriamente para evitar a sobreposição) e demais parâmetros iguais a um. É possível observar que a geração de entropia tende ao infinito em valores diferentes de K_{1_i} e K_1 (ver texto para maiores detalhes). (b) Variação geração de entropia com a alteração do parâmetro K_{3_i} (para o caso com osciladores diferentes) e K_3 (para o caso com osciladores iguais), com $K_{1_j} = 4$, $\omega_{0_j} = 2$ (parâmetros escolhidos aleatoriamente para evitar a sobreposição) e demais parâmetros iguais a um. É possível observar que a geração de entropia tende ao infinito em valores diferentes de K_{3_i} e K_3 (ver texto para maiores detalhes).

Assim, dentro da situação com osciladores iguais (que minimiza σ), temos que é interessante manter um alto K_1 (Figura 3.25 - (b)) ou um baixo K_3 (Figura 3.25 - (d)), já que essa situação mantém a geração de entropia (vide item 1 e 4 da comparação acima) e a frequência próximas às de um oscilador isolado.

Figura 3.25: Variação geração de entropia de dois osciladores iguais. (b) Variação geração de entropia com a alteração do parâmetro K_1 , com $K_3 = 10$, demais parâmetros iguais a um. (d) Variação geração de entropia com a alteração do parâmetro K_3 , com $K_{1j} = 10$ e demais parâmetros iguais a um.

Temos ainda, devido ao comportamento assintótico (i.e. à medida que aumentamos o valor dos parâmetros K_1 e K_3 , $\hat{\sigma}$ tende assintoticamente ao seu valor mínimo) observado na Figura 3.25, que quanto mais longe estivermos da singularidade (que ocorre quando $K_1 = K_3$) mais próximo σ estará do platô em que ela é minimizada. Dessa maneira, podemos observar que a relação entre os valores dos parâmetro K_1 e K_3 fazem com que o sistema esteja, ou não, em tal platô (Figura 3.26). Como só nos interessa as regiões onde a condição de estabilidade é respeitada (inequação 3.31, i.e. só considerando as regiões onde $K_1 > K_3$), temos então que $K_1 \gg K_3$ é suficiente garantir que o sistema estará com σ minimizado, e, dessa maneira, a comunicação (i.e. acoplamento) não precisa ser desprezada (i.e. $K_3 = 0$.)

Por último, dado as semelhanças entre o ponto de equilíbrio da frequência (equação

(3.17)) e a geração de entropia (equação 3.46), é importante observar que essas duas variáveis caminham juntas, ou seja uma alta frequência implica em uma alta σ e vice-versa. Isso faz com que a análise do coeficiente de eficiência de fluxo ($c^{\omega\sigma}$) seja trivial, já que temos $c^{\omega\sigma} = 2$ para todos os parâmetros envolvidos no modelo (tanto para o modelo com osciladores diferentes quanto para o com osciladores iguais).

Figura 3.26: Geração de entropia de dois osciladores iguais. (a) Geração de entropia com a alteração do parâmetro K_1 , com $K_3 = 1$, demais parâmetros iguais a um. (b) Geração de entropia com a alteração do parâmetro K_1 , com $K_3 = 10$, demais parâmetros iguais a um. (c) Geração de entropia com a alteração do parâmetro K_3 , com $K_1 = 1$, demais parâmetros iguais a um. (d) Geração de entropia com a alteração do parâmetro K_3 , com $K_1 = 10$, demais parâmetros iguais a um

3.4 Simulação com dez osciladores

Uma vez que nossos resultados apontam que sistemas com todos os osciladores iguais são os que minimizam a geração de entropia, o objetivo nessa etapa é estender os resultados obtidos com o modelo inicial e, na medida do possível, procurar confrontá-los com dados biológicos obtidos experimentalmente. Assim, utilizamos simulações numéricas com dez osciladores (do modelo inicial) idênticos acoplados, tanto na ausência quanto na presença de perturbações externas e nos parâmetros (ver equações (2.4) a (2.6), sendo $N = 10$). Para uma melhor clareza dos resultados, só serão expostos as séries temporais de 2 dos 10 osciladores (mais especificamente, mas sem nenhuma razão particular, os osciladores 1 e 7 das simulações) envolvidos na comunicação, sendo que os osciladores não apresentados tiveram comportamentos idênticos ao segundo oscilador apresentado (o oscilador 7). Em todas as simulações realizadas nessa seção foram utilizados os seguintes parâmetros, escolhidos arbitrariamente (apenas respeitando as condições de estabilidade): $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $K = 0.9$ e $E = 0.9$, porém resultados semelhantes foram obtidos quando outros valores dos parâmetros foram utilizados.

No modelo com 10 osciladores iguais, na ausência de perturbações, temos que, após um transiente inicial, o sistema vai para o ponto de equilíbrio representado pelas fases e frequências naturais de cada um dos osciladores. Como exemplo, isso pode ser visto na evolução temporal de 2 dos 10 osciladores que participaram das simulações feitas (Figura 3.27).

Quando incluímos ruído branco (média = 0 e variância = 5) externo aos osciladores, foi possível observar que a presença dessa perturbação faz com que os osciladores variem de maneira semelhante ao ruído adicionado ao redor do ponto de equilíbrio, porém em uma escala bem menor, como pode ser visto na Figura 3.28, sendo que todos osciladores continuam com frequências iguais entre si.

(a) Evolução das fases

(b) Evolução das frequências

Figura 3.27: Evolução da fase (a) e frequência (b), no tempo, de dois osciladores (1 e 7 – com linhas sobrepostas) presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos acoplados.

Figura 3.28: Evolução da fase (a) e frequência (b), no tempo, de dois osciladores (1 e 7 – com linhas sobrepostas) presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos acoplados, na presença de entrada externa com distribuição gaussiana (ruído branco) com média=0 e variância=5. Em destaque temos uma ampliação do sinal, ressaltando sua semelhança com um ruído branco.

Quando comparamos os sinais obtidos dos osciladores com os valores de referência temos que, pelo método da APE (Análise de Potência Espectral), as fases dos osciladores se comportam como um movimento browniano ($\beta = -3.06$) enquanto as frequências têm características de um ruído $\frac{1}{f}$ ($\beta = -1.61$). Quando utilizamos a ferramenta vApEn, temos que as fases dos osciladores possuem uma variabilidade próximas as de um sinal constituído por quatro senos somados (média=623.57 desvio padrão=144.67). Por outro lado, as frequências obtidas possuem variabilidades ainda menores, com valores próximos aos obtidos para dois ou três senos somados (média=406.37 desvio padrão=110.4).

Esse resultado não era esperado pois, dada a linearidade do modelo, os sinais emitidos deveriam incorporar as perturbações impostas ao modelo (conforme visualmente obtido na Figura 3.28). Porém, para realizarmos as análises acima (envolvendo comparações entre diferentes sinais), foi necessário impor um método de integração com passo fixo, o que descaracterizou os sinais analisados, de forma que esses resultados aqui obtidos são, até o momento, inconclusivos. Podemos, no entanto, afirmar que o sistema é bastante insensível a perturbações uma vez que os osciladores continuam emitindo sinais em valores próximos ao ponto de equilíbrio sem a entrada externa.

Quando colocamos ruído com distribuição de Lévy (Figura 3.29) no lugar do ruído branco, os resultados obtidos (Figura 3.30) mostram que o sinal também foi incorporado aos osciladores (i.e. obtém-se um passeio de Lévy com a média no P.E. sem entrada). Conforme o cálculo de Sims et al. (2007), podemos verificar que os sinais obtidos são realmente passeios de Lévy, já que todos os valores de μ obtidos se encontram entre 1 e 3 (mínimo = 1.49 e máximo = 1.99). Esses resultados nos permitem inferir que sinais externos são parcialmente incorporados (já que existem modificações na sua estrutura, vide acima) ao que todos os osciladores estão fazendo.

Quando somamos ruído branco ao parâmetro C , para assim entendermos o efeito de perturbações nas referências internas do sistema, temos que as frequências de todos osciladores envolvidos na comunicação (com ou sem ruído no seu parâmetro C) passam

a ter um padrão semelhante a um passeio de Lévy (Figura 3.31).

Figura 3.29: Passeio de Lévy usado como perturbação externa.

Mais uma vez, utilizando o cálculo de Sims et al. (2007), temos que todos os valores de μ se encontram entre 1 e 3 (mínimo = 1.53 e máximo = 2.26), sendo possível concluir que os sinais obtidos são realmente passeios de Lévy. O mesmo padrão foi obtido quando analisamos as fases.

Por outro lado, quando adicionamos o ruído branco no termo de forçamento A , a frequência e a fase obtidas comportam-se, aparentemente, como ruído branco, tendo o ponto de equilíbrio como média (Figura 3.32). Da mesma maneira observada anteriormente, apesar da semelhança visual, o sinal obtido não pode ser caracterizado como um ruído branco com distribuição gaussiana, já que pela APE tanto as fases como as frequências são caracterizadas como um ruído $\frac{1}{f}$ (sendo que para o oscilador no qual foi feita a perturbação temos $\beta_{\text{fase}} = -0.97$ e $\beta_{\text{frequência}} = -1.17$, enquanto para os outros osciladores temos $\beta_{\text{fase}} = -0.99$ e $\beta_{\text{frequência}} = -1.16$).

Quando utilizamos a vApEn, tanto as fases quanto as frequências possuem variabilidades próximas a um ruído branco com distribuição uniforme (sendo que para o oscilador no qual foi feita a perturbação temos que a vApEn das fases possui média = 1001 e desvio padrão=83 e a vApEn das frequências apresentou média=927 e desvio padrão=91, de maneira semelhante temos que a vApEn da fase dos outros osciladores possui mé-

dia=1002 e desvio padrão=80 e a das frequências apresenta média=930 e desvio padrão = 76). Mais uma vez esses resultados não são totalmente claros devido às mesmas dificuldades descritas para a situação com perturbações externas. Finalmente, quando a perturbação foi feita na própria frequência natural (i.e., a razão $\frac{A}{C}$), os resultados obtidos foram semelhantes aos obtidos com a perturbação no parâmetro A .

(a) Evolução das fases

(b) Evolução das frequências

Figura 3.30: Evolução da fase (a) e frequência (b), no tempo, de dois osciladores (1 e 7 - com linhas sobrepostas) presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos acoplados, na presença de entrada externa com distribuição de Lévy.

(a) Evolução da frequência no oscilador 1

(b) Evolução da frequência no oscilador 7

Figura 3.31: Evolução da frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos acoplados, na presença de ruído branco no parâmetro C do oscilador 1. (a) Oscilador 1; (b) Oscilador 7.

(a) Evolução da frequência no oscilador 1

(b) Evolução da frequência no oscilador 7

Figura 3.32: Evolução da frequência de dois osciladores presentes em uma simulação que continha 10 osciladores idênticos acoplados, na presença de ruído branco no parâmetro A do oscilador 1. (a) Oscilador 1; (b) Oscilador 7.

Isso mostra que o passeio de Lévy obtido é um caso particular que ocorre apenas quando perturbamos o parâmetro C . Sabemos, também, que o sinal emitido é muito dependente das entradas no sistema (i.e. perturbações), como pode ser visto quando somamos ruído branco no parâmetro A ou quando impusemos perturbações externas (ruído branco e Lévy). Assim, podemos justificar o passeio de Lévy que surge na frequência e na fase do oscilador como uma consequência de um passeio de Lévy dentro do sistema. Por sua vez, esse passeio surge porque, em nossas equações diferenciais, dividimos uma constante, parâmetro A , por ruído branco, $C + R(t)$ – ver equações (2.4) a (2.6), o que, apesar de não ser a forma padrão de se criar uma distribuição de Lévy, nós dá algo com as mesmas características (Figura 3.33). Isso só ocorre pois o denominador da razão descrita acima pode atingir valores próximos a zero, fazendo com que surjam valores muito altos, ao acaso.

Figura 3.33: Valor constante (2) dividido por ruído com distribuição gaussiana.

Dessa maneira temos que o passeio de Lévy obtido é um caso bem particular do sistema com 10 osciladores e, assim, só é capaz de, potencialmente, possuir alguma relevância devido a comparações com resultados empíricos, como será discutido mais adiante.

Esses resultados não foram repetidos para o modelo final pois as justificativas dos

resultados obtidos com o modelo inicial (i.e. linearidade e efeito de termos $A/C + R(t)$) estão presentes nos dois modelos.

3.5 Relação com a Entropia Informacional

No modelo inicial, ao compararmos σ com os valores de vApEn obtidos para os mesmos intervalos (durante uma simulação envolvendo dois osciladores) temos que não existe uma relação entre as duas medidas (Figura 3.34 - regressão linear com inclinação de $0,0009 \pm 1.663$).

Figura 3.34: Relação entre a geração de entropia obtida e a vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador igual (ambos referentes ao modelo inicial).

Um caso mais extremo pode ser observado quando multiplicamos por 10 o forçamento interno de um dos osciladores. Nessa nova configuração (em comparação com a anterior), temos um grande aumento de σ com associado à manutenção dos valores anteriores de vApEn (Figura 3.35).

Figura 3.35: Relação entre a geração de entropia obtida e vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador (ambos referentes ao modelo inicial) em duas simulações. Na simulação envolvendo os pontos localizados na parte superior da figura, o forçamento interno foi dez vezes maior que o utilizado na simulação envolvendo os pontos localizados na porção inferior da figura. Note que, para um mesmo valor de geração de entropia, temos uma ampla variação de valores de vApEn.

Quando realizamos a mesma comparação no modelo final temos o mesmo resultado, ou seja, não existe uma relação entre as duas medidas (Figura 3.36 - regressão linear com inclinação de -0.0042 ± 8.6308)

Figura 3.36: Relação entre a geração de entropia obtida e a vApEn dos sinais emitidos por um oscilador quando acoplado com um outro oscilador igual (ambos referentes ao modelo final).

Esses resultados indicam que o processamento (i.e. geração de entropia) dos nossos sistemas de comunicação não está associado à variabilidade dos sinais emitidos.

Capítulo 4

Discussão

4.1 Modelo com osciladores

O uso de osciladores para o estudo da comunicação (não necessariamente sonora) é bem difundido na biologia. Alguns exemplos dos benefícios dessa abordagem podem ser encontrados em estudos envolvendo a comunicação celular ([Ishimatsu et al., 2007](#)), a comunicação entre salpas ([Anderson e Bone, 1980](#)), comunicação luminosa entre vaga-lumes ([Buck, 1988](#)) e até entre mamíferos ([Fitch et al., 2002](#)). Temos ainda que a regulação dessas formas de sinalização está, provavelmente, associada a um oscilador neural ([Greenfield, 1994](#)). Para os casos nos quais existe uma modelagem formalmente explicitada no estudo, podemos destacar o modelo de Kuramoto (para revisão e aplicações biológicas conferir [Acebrón et al., 2005](#)), que, com origens no modelo de Winfree ([Strogatz, 2000](#), para maiores informações sobre o modelo vide [Winfree \(1967\)](#)), se diferencia do nosso principalmente por levar em conta apenas o acoplamento entre as fases e não considerar, em sua concepção original, a frequência como uma variável de estado. [Buck \(1988\)](#) e [Greenfield \(1994\)](#), apesar de não utilizarem modelagem matemática, colocam que a sincronização na comunicação entre vaga-lumes e anuros, respectivamente, também é dada por ajustes de fase.

Essas diferenças tornam nossos dois modelos mais gerais, pois consideramos que o acoplamento se dá tanto pela frequência quanto pela fase. Essa diferença nos permite pressupor que, ao contrário do modelo de Kuramoto, os animais envolvidos na comunicação possuem memória, já que o estado do sistema não é definido apenas pela diferença entre os instantes em que os sinais são emitidos (i.e. diferença de fases), mas também pela relação entre os sinais emitidos com os sinais anteriores (i.e. diferença de frequências).

Temos também, que o modelo de Kuramoto tem como principal objetivo estudar o fenômeno da sincronização (ou seja, modelos de sistemas que evoluam para uma situação na qual os osciladores estejam na mesma fase e frequência - ver [Strogatz \(2000\)](#); [Acebrón et al. \(2005\)](#)), de forma que o acoplamento por fase é suficiente para atingir esse propósito. Por outro lado, o modelo aqui proposto procurar simular a comunicação, sendo, dessa maneira, interessante a obtenção de comportamentos não síncronos esperados nessa forma de interação entre sistemas biológicos. Entre tais comportamentos, podemos citar que, ao analisarmos o caso com dois osciladores descritos pelo modelo inicial, é possível observar dois indivíduos trocando informação (e.g., comunicação vocal) na mesma frequência de emissão de eventos, porém em fases diferentes. Isso significa que a interação ocorreria como um diálogo, em que um dos indivíduos “fala” e o outro “responde”. Essa comunicação alternada, em sua forma mais característica com fases totalmente opostas, já foi observado em algumas espécies de artrópodes e anuros ([Greenfield, 1994](#)) e foi originalmente estudada por Huygen em sua clássica observação da sincronização, com fases opostas, em pendulos utilizados para navegação marítima ([Bennett et al., 2002](#); [Monteiro, 2006](#)).

Um resultado ainda mais interessante, para os dois modelos, é a possibilidade de termos dois sistemas (indivíduos) se comunicando em frequências diferentes (como ilustrado na Figura 3.8) e, ainda assim, interagindo (i.e., um afeta o comportamento do outro). Essa interação pode ser evidenciada pelo fato de que as frequências no P.E. são diferentes das frequências naturais individuais. Por sua vez, essas diferenças nas frequências natu-

rais de cada oscilador podem ser interpretadas como a interação entre espécies diferentes ou indivíduos com comportamentos diferentes.

Por último, temos que o modelo inicial com três osciladores apresentou, ao modificarmos os parâmetros equivalentes, os mesmos comportamentos descritos anteriormente para o modelo inicial de dois osciladores (i.e., osciladores com diferenças nas fases e frequências de emissão de sinais). Assim, podemos supor que os padrões obtidos são um tipo geral e podem ser extrapoladas para casos com um número arbitrário de indivíduos.

4.2 Minimização da geração de entropia

4.2.1 Resultados em comum

Sabendo o comportamento do nosso sistema, podemos passar ao estudo da minimização da geração de entropia para o sistema com um ou dois osciladores. Quando implementamos este cálculo, temos, para o caso de osciladores com parâmetros diferentes, que, para um sistema de comunicação (aqui entendido como o modelo apresentado na Figura 2.1), a relação com um outro sistema leva a um aumento da geração de entropia e, portanto, do processamento. Esse aumento de processamento pode ser explicado pelo fato do “sistema de comunicação” precisar lidar, agora, com sinais novos.

Por outro lado, a possibilidade de um oscilador ter a sua geração de entropia diminuída depende da presença de um segundo oscilador com σ muito alto, ou seja, a alternativa para um organismo ter seu processamento reduzido (em relação à situação em que ele está isolado) é as custas de um alto processamento de um outro organismo com o qual ele está interagindo. No modelo inicial isso é possível quando o segundo oscilador possui uma constante de acoplamento de fase extremamente alta frente à do primeiro. Isso implica que o processamento somente é minimizado quando o sinal que o indivíduo recebe é muito dependente daquele que ele mesmo emite. Podemos imaginar que esse alto grau de correlação tornaria um alto processamento desnecessário. Já no modelo final, a geração

de entropia menor em um dos osciladores (em relação ao caso com osciladores iguais) ocorre quando o amortecimento de frequência do primeiro oscilador tende ao infinito. Nessa situação, o segundo oscilador é indiferente ao alto valor do amortecimento, porém, esse mesmo parâmetro faz com que o processamento do primeiro oscilador também tenda ao infinito. Note que, no entanto, apesar de um dos indivíduos ter a geração de entropia reduzida, o outro a tem muito aumentada. Logo, o sistema, como um todo, passa a operar com elevada produção de entropia.

Quando levamos em conta a geração de entropia de todos os osciladores envolvidos na comunicação, podemos chegar à primeira grande conclusão do presente estudo: em nossos modelos, *a situação com osciladores iguais é a que minimiza a geração de entropia (i.e., o processamento)*, ou seja, se comunicar em diferentes fases e frequências (conforme exemplificado na Figura 3.8) é uma estratégia energeticamente mais custosa. Isso implica que é mais interessante, evolutivamente, manter uma baixa variabilidade intraespecífica entre os animais que emitam sinais em um mesmo ambiente. Dessa maneira, a baixa variabilidade implica que, para minimizar o processamento, é esperado que os animais procurem emitir sinais na companhia de outros semelhantes ou de forma isolada. Outra alternativa é a existência de um acoplamento seletivo, ou seja, os animais selecionariam preferencialmente sinais oriundos de animais com características semelhantes (potencialmente da mesma espécie), negligenciando, assim, o resto. Essa seleção pode ser encontrada em estudos com anuros, nos quais sabemos que existe uma predisposição anatômico/fisiológica de sensibilidade aos sons emitidos por indivíduos da mesma espécie (Gerhardt e Schwartz, 2001). Um exemplo mais característico é o caso do anuro *Amolops tormotus*; essa espécie possui adaptações anatômicas que permitem a comunicação em ultra-som, diminuindo muito a interação com animais de outras espécies (Feng, 2008). Dessa forma, nosso estudo permite supor que essas adaptações estão relacionadas a uma minimização da geração de entropia (i.e. processamento) na comunicação. Da mesma maneira, temos que a sincronia completa (fase e frequência) observada em algumas espé-

cies de anuros (Wells, 1977) e vagalumes (Strogatz e Stewart, 1985; Buck, 1988; Moiseff e Copeland, 2000), também pode ser justificada pela minimização de σ (vide Buck, 1988; Greenfield e Roizen, 1993; Greenfield, 1994, para outras possíveis justificativas para a comunicação em unísono).

É importante ressaltar que, embora a situação que minimize a geração de entropia seja com osciladores iguais, não esperamos que todos os animais envolvidos nesses processos tenham que necessariamente ser idênticos. Dessa maneira, se levarmos em conta que a geração de entropia é uma função do conjunto P dos parâmetros dos sistemas envolvidos na comunicação, $\sigma = F(P)$, podemos considerar que:

$$\lim_{P \rightarrow P_{\text{iguais}}} F(P) = \sigma_{\text{mínimo}} \quad (4.1)$$

Assim, temos que quanto mais semelhantes os indivíduos forem menor será o seu processamento. A demonstração do limite exposto acima permitiria generalizar o papel da potência dissipada nos processos de comunicação, porém acreditamos ser um trabalho a ser realizado no futuro.

Por último, se voltarmos ao contexto termodinâmico de inserção do presente trabalho, temos que, apesar de o nosso estudo demonstrar que a minimização da geração de entropia parece fazer sentido em um contexto biológico, quando o comparamos com outros trabalhos envolvendo o estudo da vida a partir de teorias termodinâmicas, ficamos numa aparente contradição. Como visto na Introdução (Capítulo 1), diversos estudos ressaltam a importância de fluxos de energia (inevitavelmente associados à geração de entropia) para a existência da vida (e.g. Schrödinger, 1977; Kay, 2000). Sabe-se, ainda, que ecossistemas em estágio avançados de sucessão ecológica possuem uma geração de entropia maior, o que permite a eles aproveitarem melhor os gradientes de energia presentes no ambiente (Schneider e Key, 1994; Kay, 2000). Temos, também, a informação de que células e ecossistemas, sob estresse, passam a gerar menos entropia (Toussaint e

[Schneider, 1998](#)). Essa contradição envolvendo σ pode ser explicada a partir do ponto de vista que nosso estudo não procura afirmar que a minimização de σ é a melhor estratégia para o ser vivo, mas sim propor um caminho distinto.

A partir dos nossos resultados, podemos inferir que a relação entre geração de entropia e processamento é válida (i.e., a situação que minimiza a geração de entropia está associada a comportamentos biológicos que minimizam o processamento), podemos então sugerir que a realocação de recursos associados ao processamento (i.e., atenção, vide [Laberg, 1997](#)) também ocorre quando nos focamos na geração de entropia. Assim, podemos propor uma nova posição, na qual a situação interessante é manter uma geração de entropia baixa em um processo, permitindo, assim, que esse σ seja realocada em algum outro processo de maior interesse num dado momento.

4.2.2 Modelo inicial

Quando nos focamos no caso em que os osciladores são idênticos, podemos observar, no cálculo de geração de entropia, que para um acoplamento de frequência muito alto ou muito baixo, ambos possuem uma geração de entropia igual à situação com um oscilador isolado. Porém, quando a constante de acoplamento tende a um, a geração de entropia tende ao infinito. O que torna interessante analisar tal situação é que, neste caso, as frequências dos dois indivíduos passam a ter o mesmo peso nas equações diferenciais das fases. Isso faz com que surja uma singularidade associada ao fato das velocidades angulares ω_i e ω_j se anularem (conforme pode ser observado na equação (2.4)), e, conseqüentemente, a fase do oscilador não mais depender da frequência de nenhum dos osciladores, acarretando em um grande aumento na geração de entropia, o que, dentro da nossa interpretação, está associado a um aumento do processamento.

Nesse sentido temos que, evolutivamente, se um indivíduo procura minimizar sua geração de entropia no sistema nervoso, supostamente para liberar recursos de processamento, então isso irá ocorrer quando os indivíduos tiverem constantes de acoplamento

de frequência (parâmetro E) muito baixas ou muito altas.

Essas duas situações podem ser separadas se levarmos em conta o cálculo de $c^{\omega\sigma}$. Segundo esse coeficiente, temos que a situação em que a melhor eficiência no controle de fluxo ocorre é para valores altos e decrescentes de E . É importante lembrar que um valor muito alto de E não é interessante em um contexto biológico, uma vez que quando E tende ao infinito, a frequência com que os sinais são emitidos tende a zero (ver equação (3.3)). Porém, podemos imaginar que esta seria uma estratégia interessante para um animal isolado, já que estaria “prestando bastante atenção” (alto acoplamento) em eventuais sinais externos que possam surgir. Dessa maneira, assim que algum fosse efetivamente detectado, qualquer redução no grau de atenção (associado à possibilidade de direcionar essa atenção) estaria associada a um alto aumento do fluxo (emissões de sinais) proporcionalmente ao aumento de σ . A partir do momento que existe uma interação com algum outro sistema de comunicação, a melhor estratégia parece ser evitar a região de instabilidade e manter valores de E baixos, o que mantém o oscilador mais próximo de sua frequência natural.

Esse comportamento pode ser observado em algumas espécies de gafanhotos e anuros, nas quais a audição (associada ao parâmetro E) é reduzida durante a vocalização (Greenfield, 1994). Esse fenômeno pode ocorrer por diversos motivos. Discute-se que em gafanhotos ele está relacionado à dispositivos periféricos associados à vibração do ar e à atividade motora (Hedwig, 1990) e ao desligamento dos interneurônios da via auditiva (Wolf e von Helversen, 1986), por outro lado, em anuros, o mesmo fenômeno está associado com dispositivos mecânicos do tímpano (Narins, 1992). Em todos os casos ele é justificado por evitar uma interferência entre os sinais enviados e recebidos, o que, segundo nossa interpretação dos resultados, está associado a um aumento de processamento.

É importante lembrar que nos casos citados acima (com exceção da situação com $E \rightarrow \infty$, por razões óbvias), dada a semelhança entre os indivíduos, todos emitem si-

nais com mesmas frequência e fase (i.e., a diferença de fase entre os osciladores é zero), independentemente do acoplamento. Assim, o presente estudo também revela uma sutileza de interpretação experimental, não levada em conta habitualmente: *o fato de uma população emitir sinais em sincronia não implica, necessariamente, que os indivíduos estejam acoplados; pode significar, simplesmente, que os organismos estejam procurando minimizar a geração de entropia particular de cada um.* [Buck \(1988\)](#) já havia salientado a importância de haver uma clara distinção entre a sincronia de sinais e eventos isolados que ocorrem simultaneamente. O autor, no entanto, define que os eventos são sincronizados por estímulos externos, enquanto, no nosso modelo, a única relação entre eles é filogenética (i.e. semelhança de parâmetros). Temos então, que a fisiologia subjacente a comportamentos populacionais demanda uma atenção muito maior para uma boa distinção experimental de resultados. Nosso estudo levanta, ainda, a importância de analisarmos emissão de sinais na presença e na ausência de interações, para assim, caso existam diferenças, podermos concluir que existe a comunicação.

4.2.3 Modelo final

Analisando os resultados obtidos com o modelo final, temos que as suas principais propriedades dependem da relação entre K_1 e K_3 , ou seja, as constantes de acoplamento com suas referências internas e com outros osciladores, respectivamente, já que desde a estabilidade do modelo até a condição que minimiza a geração de entropia estão associadas à relação entre esses dois parâmetros. Isso é interessante pois, no modelo inicial com osciladores iguais, a minimização da geração de entropia exigia um acoplamento muito baixo ou muito alto (o que implica em uma baixa emissão de sons), já no modelo final, σ pode ser minimizada se respeitarmos $K_1 \gg K_3$, ou seja, uma situação que permite a comunicação e emissão de sinais.

Essa relação ainda nos permite inferir que uma população de indivíduos que emite sinais em uníssono (e.g algumas espécies de anuros ([Wells, 1977](#)) e vagalumes ([Strogatz](#)

e Stewart, 1985; Buck, 1988; Moiseff e Copeland, 2000)) valoriza mais as suas referências internas do que os sinais de outros indivíduos. Assim, diferentemente do esperado (conf. Strogatz e Stewart, 1985), essa sincronia surge não por um alto acoplamento, mas sim devido a uma alta semelhança entre as características (parâmetros) dos sistemas envolvidos na comunicação, lembrando que esta semelhança minimiza o processamento na comunicação (conforme visto na seção 4.2.1). Essa população estaria, então, mais próxima do limite apresentado na equação (4.1) do que outras populações que emitem sons não sincronizados.

Temos ainda que, ao analisarmos o P.E., condição de estabilidade e a geração de entropia (seção 3.2), os parâmetros associados a frequência são mais relevantes do que os associados com a fase. Isso mostra que uma parte da comunicação tem sido negligenciada em estudos empíricos que se focam apenas no efeito e no acoplamento de fases (e.g. Buck, 1988; Greenfield, 1994, discutido na seção 4.2.1)

Por último, temos a relação entre σ e a frequência de emissão de sinais observada no modelo novo corrobora a relação entre processamento e geração de entropia (vide sessão 1.2.3), já que um maior número de potenciais de ação (associados com σ) são necessários para uma maior frequência de emissão de sinais (e.g. para estimular a musculatura associada com essa emissão).

4.3 Estudo dos 10 osciladores com perturbações

Em relação ao estudo de influências externas nos sistemas de comunicação, podemos interpretar que, como todos os osciladores continuam emitindo sinais juntos, essa é uma maneira de incorporar sinais externos e ainda se manter na situação de minimização da geração de entropia (que, como vimos anteriormente, acontece quando todos os osciladores são iguais).

Em relação às perturbações internas, temos que este é um fenômeno relevante, uma

vez que o mecanismo controlador da emissão de sinais em anuros já foi descrito como um oscilador com ruído (Moore et al., 1989). Dessa maneira, quando analisamos a presença de um ruído no parâmetro C (i.e. uma das referências interna do oscilador), as frequências obtidas passam a variar como uma distribuição de Lévy. Apesar de esse resultado ser bem particular dentro dos dados obtidos em nossas simulações, ele reflete o resultado obtido por Rodrigues (2009) em um estudo sobre a comunicação de anuros. Nesse estudo, o autor procura, através do estudo da organização das séries temporais referentes à comunicação, observar uma possível diminuição da entropia de Shannon nos sinais sonoros de comunicação, o que estaria associado a uma redução no processamento por parte do sistema nervoso. Para tanto, o autor utilizou, como sistemas-modelo, três espécies de anuros, *Scinax perpusillus* e *Hypsiboas faber* e *Hypsiboas pardalis*. Dessa maneira Rodrigues (2009) verificou que as séries temporais analisadas são altamente variáveis, com os intervalos entre vocalizações sendo descritos por distribuições de Lévy (Figura 4.1). Dessa forma, esse resultado experimental, em princípio inesperado, pode ser (potencialmente) justificado por presença de um ruído nas referências internas, porém maiores e mais profundos estudos são necessários para comprovar essa relação.

Figura 4.1: Séries temporais dos intervalos de tempo entre vocalizações dos indivíduos de *Hypsiboas pardalis*. As abscissas representam o intervalo de tempo e as ordenadas o tempo de silêncio ou o intervalo entre vocalizações. Note a semelhança com as distribuições de Lévy expostas na seção 3.4. Retirado de Rodrigues (2009).

A vantagem da emissão de sinais com uma variabilidade alta pode estar associada

à necessidade dos animais evitarem uma sobreposição (e assim interferência) de sinais, como sugerido para a comunicação sonora de anuros ([Wells, 1977](#)) ou para sinais elétricos em peixes ([Capurro e Malta, 2004](#)). Outra possibilidade, associada à comunicação de mamíferos, é que um sinal com essas características possa facilitar a identificação de indivíduos ([Fitch et al., 2002](#)). Os autores deste trabalho ressaltam a importância de tal comportamento estar associado a um baixo processamento. Interessantemente, isso é o que, efetivamente, acontece em nosso modelo.

Essas novas descobertas tornam clara a importância de termos o intercâmbio de informações entre estudos teóricos e experimentais, para assim, de posse de resultados complementares, podermos chegar a conclusões mais concretas sobre os sistemas biológicos.

4.4 Relação com a Entropia Informacional

Nosso estudo procurou observar a existência, para o modelo abordado, da relação entre a geração de entropia termodinâmica (σ) e a informacional. Sabemos, de antemão, que essas duas entropias são em sua essência, conceitos distintos ([Wicken, 1987](#)), porém partimos do pressuposto que uma poderia influenciar a outra, de forma que uma maior variabilidade dos sinais emitidos pelos osciladores estivesse associada a uma maior σ . Essa abordagem é interessante dentro do nosso sistema pois é na Biologia que a informação e a termodinâmica se encontram ([Wicken, 1987](#)). No entanto, ao analisarmos nossos resultados, não encontramos uma correlação entre geração de entropia e variabilidade da série temporal oriunda dos osciladores do modelo.

Essa diferença pode ser melhor entendida se observarmos a distinção colocada por [Wicken \(1979, 1987\)](#) entre essas duas medidas. Segundo tal autor, enquanto a entropia termodinâmica reflete a ordem (estatística), a informacional está associada à complexidade. Podemos, ainda, definir que a complexidade está relacionada às características de

um sinal, como heterogeneidade e periodicidade (associados com as probabilidades de uma mensagem, segundo a visão de Shannon). Por outro lado, a ordem está associada às configurações de um sistema (relacionado à quantidade de microestados acessíveis).

Em nosso sistema temos, então, que o processamento está intimamente relacionado com a ordem do oscilador, o que, em última instância, é dada pelos seus parâmetros. Isso torna a complexidade dos sinais emitidos irrelevante para o animal, desde que a ordem interna seja mantida (e.g. um sinal complexo pode estar associado a um processamento baixo, caso seja o que o animal “tenha a intenção de produzir” – i.e., o valor de fase e frequência naturais do oscilador isolado). Dessa maneira, apesar de esperarmos que uma maior variabilidade dos sinais emitidos pelos osciladores estivesse associada a uma maior σ , temos que a geração de entropia está relacionada apenas às características do animal (i.e., aos parâmetros do oscilador isolado). Com isso em mente, o presente estudo permite sugerir que o caminho para estudos empíricos do processamento de sinais em organismos deva ser orientado pelas características do animal, e não pelos sinais emitidos por ele.

Referências Bibliográficas

- Acebrón, J. A., Bonilha, L. L., Vicente, C. J. P., e Ritort, F. (2005). The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77:137–185.
- Anderson, P. V. A. e Bone, Q. (1980). Communication between individuals in salp chains. *Proc. R. Soc. Lond. B.*, 210:559–574.
- Bejan, A. (2002). Fundamentals of exergy analysis, entropy generation minimization, and the generation of flow architecture. *International Journal of Energy Research*, 26:545–565.
- Bennett, M., Schatz, M. F., Rockwood, H., e Wiesenfeld, K. (2002). Huygens’s clocks. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 458:563–579.
- Brooks, D. R., Leblond, P. H., e Cumming, D. D. (1984). Information and entropy in a simple evolution mode. *Journal of Theoretical Biology*, 109:77–93.
- Brown, D. e Rothery, P. (1993). *Models in Biology: Mathematics, Statistics and Computing*. John Wiley & Sons.
- Brozka, J. e Obert, W. H. J. (1980). Acoustic signals influencing the hormone production of the testes in the grass frog. *Journal of Comparative Physiology*, 140:25–29.

- Brush, S. G. (1976). *The kind of motion we call heat.*, volume 2. Elsevier Science Publishers.
- Brush, S. G. (1983). *Statistical Physics and the Atomic Theory of Matter*. Princeton University Press.
- Buck, J. (1988). Synchronous flashing of fireflies ii. *Q. Rev. Biol.*, 63:263–281.
- Callen, H. B. (1960). *Thermodynamics*. John Wiley & Sons.
- Capurro, A. e Malta, C. P. (2004). Noise autocorrelation and jamming avoidance performance in pulse type electric fish. *Bulletin of Mathematical Biology*, 66:885–905.
- Casti, J. L. e Karlqvist, A. (1986). *Complexity, Language, and Life: Mathematical Approaches*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- Chaui-Berlinck, J. G. (2006). *Controle metabólico frente a variações na temperatura corpórea*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, SP.
- Chaui-Berlinck, J. G., Barbuto, J. A. M., e Monteiro, L. H. A. (2004a). Conditions for pathogen elimination by immune systems. *Theory in Biosciences*, 123:195 – 208.
- Chaui-Berlinck, J. G., Bicudo, J. E. P. W., Monteiro, L. H. A., e Navas, C. A. (2002a). Oscillatory pattern in oxygen consumption of hummingbirds. *Journal of Thermal Biology*, 27:371 – 379.
- Chaui-Berlinck, J. G., Monteiro, L. H. A., Navas, C. A., e Bicudo, J. E. P. W. (2002b). Temperature effects on energy metabolism: a dynamical system analysis. *Proceedings Of The Royal Society Of London Series B Biological Sciences*, 269:15 – 19.
- Chaui-Berlinck, J. G., Navas, C. A., Monteiro, L. H. A., e Bicudo, J. E. P. W. (2004b). Temperature effects on a whole metabolic reaction cannot be inferred from its components. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 271:1415 – 1419.

- Chaui-Berlinck, J. G., Navas, C. A., Monteiro, L. H. A., e Bicudo, J. E. P. W. (2005). Control of metabolic rate is a hidden variable in allometric scaling of homeotherms. *Journal of Experimental Biology*, 208:1709 – 1716.
- Eriksen, C. W. e James, J. D. S. (1986). Visual attention within and around the field of focal attention: a zoom lens model. *Perception & Psychophysics*, 40(4):225–240.
- Feng, A. S. . P. M. N. (2008). Ultrasonic communication in concave-eared torrent frogs (amolops tormotus). *J. Comp. Physiol. A.*, 194:159–167.
- Fitch, W. T., Neubauer, J., e Herzel, H. (2002). Calls out of chaos: the adaptive significance of nonlinear phenomena in mammalian vocal production. *Animal Behaviour*, 63:407–418.
- Gerhardt, H. e Schwartz, J. (2001). *Auditory tuning and frequency preferences in anurans*, capítulo 7, pgs. 73–85. Smithsonian Books.
- Glansdorff, P. e Prigogine, I. (1971). *Structure Stabilité et Fluctuations*. Masson et Cie.
- Greenfield, M. D. (1994). Cooperation and conflict in the evolution of signal interactions. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 25:97–126.
- Greenfield, M. D. e Roizen, I. (1993). Katydid synchronous chorusing is an evolutionarily stable outcome of female choice. *Nature*, 364:618 – 620.
- Hedwig, B. (1990). Modulation of auditory responsiveness in stridulating grasshoppers. *Journal of Comparative Physiology A: Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 197(6):847–856.
- Herman, C. A. (1992). *Endocrinology*, pgs. 40–54. University of Chicago Press.
- Hoppenstadt, F. C. e Peskin, C. S. (2002). *Modeling and Simulation in Medicine and Life Sciences*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 2^a edition.

- Ishimatsu, K., Horikawa, K., e Takeda, H. (2007). Coupling cellular oscillators: A mechanism that maintains synchrony against developmental noise in the segmentation clock. *Developmental Dynamics*, 236:1416–1421.
- Jorgensen, C. B. (1992). *Growth and reproduction*, pgs. 439–466. University of Chicago Press.
- Kay, J. (2000). *Ecosystems as self-organizing holarchic open systems: narratives and the second law of thermodynamics*, pgs. 135–160. CRC-Press, Lewis Publishers.
- Keener, J. e Sneyd, J. (1998). *Mathematical Physiology*. Springer-Verlag New York.
- Khoo, M. C. K. (2000). *Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation*. IEEE Press Series in Biomedical Engineering.
- Kozliak, E. I. (2004). Introduction of entropy via the boltzmann distribution in undergraduate physical chemistry: A molecular approach. *Journal of Chemical Education*, 81:1595–1596.
- Laberg, D. (1997). *Computational and Anatomical Models of Selective Attention in Object Identification*, capítulo 41, pgs. 649–663. The MIT Press.
- Layzer, D. (1988). *Growth of order in the universe*, capítulo 2, pgs. 23–39. MIT Press.
- Mackey, M. C. (1992). *Time's Arrow - The origins of thermodynamic behavior*. Dover Publications, INC, Mineola, New York.
- Matthews, B. W., Nicholson, H., e Becktel, W. J. (1987). Enhanced protein thermostability from site-directed mutations that decrease the entropy of unfolding. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 84:6663–6667.
- Moiseff, A. e Copeland, J. (2000). A new type of synchronized flashing in a north american firefly. *Journal of Insect Behavior*, 13(4):597–612.

- Monteiro, L. e Piqueira, J. (2000). *O que orienta a evolução biológica?*, pgs. 1–25. M.E.Q. Coleção CLE30, Campinas.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo., 2^a edition.
- Moore, S. W., Lewis, E. R., Narins, P. M., e Lopez, P. T. (1989). The call-timing algorithm of the white-lipped frog, *Leptodactylus albilabris*. *Journal of Comparative Physiology A: Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 164(3):309–319.
- Murphy, C. (1994). Chorus tenure of male barking treefrogs, *Hyla gratiosa*. *Animal behaviour*, 48:763–777.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, 2^a edition.
- Narins, P. M. (1992). Reduction of tympanic membrane displacement during vocalization of the arboreal frog, *Eleutherodactylus coqui*. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(6):3551–3557.
- Nicolis, G. e Prigogine, I. (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. John Wiley & Sons.
- Oliva, W. M. e Sallum, E. M. (1996). Periodic dynamic systems for infected hosts and mosquitoes. *Revista de Saúde Pública*, 3:218–223.
- Ostry, D. J. e Feldman, A. G. (2003). A critical evaluation of the force control hypothesis in motor control. *Experimental Brain Research*, 3:275–88.
- Philipson, L. (2002). Functional modules of the brain. *Journal of Theoretical Biology*, 215:109–119.
- Posner, M. I., Snyder, C. R. R., e Davidson, B. J. (1980). Attention and the detection of signal. *Journal of Experimental Psychology: General*, 109(2):160–174.

- Prestwich, K., Brugger, K., e Topping, M. (1989). Energy and communication in three species of hylid frogs: Power input, power output and efficiency. *Journal of Experimental Biology*, 144:53–80.
- Rodrigues, V. H. (2009). *Aspectos da transmissão e processamento de informação em canto de anuros*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Santos, B. T., Martins, R. A., Natali, J. E. S., Rodrigues, V. H., Marques, F. S., e Chauí-Berlinck, J. G. (2009). Consistency in approximate entropy given by a volumetric estimate. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42:322–334.
- Schneider, E. D. e Key, J. J. (1994). Life as a manifestation of the second law of thermodynamics. *Mathematical and Computer Modeling*, 19:25–48.
- Schofield, A. J. e Georgeson, M. A. (1999). Sensitivity of modulation of luminance and contrast in visual white noise: separate mechanisms with similar behaviour. *Vision Research*, 39:2697–2716.
- Schrödinger, E. (1977). *O que é vida? O aspecto físico da célula viva seguido de Mente e matéria e Fragmentos autobiográficos*. Fundação Editora da Unesp, São Paulo.
- Schwartz, J., Ressel, S. J., e Bevier, C. (1995). Carbohydrate and calling: Depletion of muscle glycogen and the chorusing dynamics of the neotropical treefrog *Hyla microcephala*. *Behavior Ecology and Sociobiology*, 37:125–135.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27:379–423, 623–656.
- Shannon, C. E. e Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press.
- Silva, C. F. (2005). Análise do processamento de estímulos sensoriais em simulação de vida artificial. Master's thesis, Universidade de São Paulo, SP.

- Sims, D. W., Righton, D., e Pitchford, J. W. (2007). Minimizing errors in identifying lévy flight behaviour of organisms. *J. of Animal Ecology*, 76:222–229.
- Strogatz, S. e Stewart, I. (1985). Coupled oscillators and biological synchronization. *Sci. Am.*, 6:102–109.
- Strogatz, S. H. (2000). From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143:1–20.
- Stutervant, J. M. (1977). Enhanced protein thermostability from site-directed mutations that decrease the entropy of unfolding. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 74:2236–2240.
- Toussaint, O. e Schneider, E. D. (1998). The thermodynamics and evolution of complexity in biological systems. *Comparative Biochemistry and Physiology Part A*, 120:3 – 9.
- Van Wylen, G. J., Sonntag, R. E., e Borgnakke, C. (2003). *Fundamentos da Termodinâmica*. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- Wagner, M., Sudhoff, H., Zamelczyk-Pajewska, M., Kosmider, J., e Linder, R. (2006). A computer-based approach to assess the perception of composite odour intensity: a step towards automated olfactometry calibration. *Physiological Measures*, 1:1–12.
- Wehrl, A. (1978). General properties of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 50:221–260.
- Wells, K. D. (1977). The social behaviour of anuran amphibians. *Animal Behaviour*, 25:666–693.
- Wells, K. D. (1988). *The effect of social interactions on anuran vocal behavior*, pgs. 433–454. John Wiley, New York.
- Wells, K. D. e Schwartz, J. (1984). Vocal communication in a neotropical treefrog, *Hyla ebraccata*: Advertisement calls. *Animal Behaviour*, 32:405–420.

- Wells, K. D. e Taigen, T. (1989). Calling energetics of a neotropical treefrog, *Hyla microcephala*. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 25:13–22.
- Wicken, J. S. (1978). Information transformations in molecular evolution. *J. Theor. Biol.*, 72:191–204.
- Wicken, J. S. (1979). The generation of complexity in evolution: A thermodynamic and informational-theoretical discussion. *J. Theor. Biol.*, 77:349–365.
- Wicken, J. S. (1987). Entropy and information: Suggestions for common language. *Philosophy of Science*, 54:176–193.
- Wilczynski, W. (1992). *The nervous system*, pg. 646. The University of Chicago Press, Chicago and London.
- Wilczynski, W. e Chu, J. (2001). *Acoustic Communication, Endocrine Control, and Neurochemical Systems of the Brain*, pgs. 23–35. Smithsonian Books, Washington D.C.
- Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16:15–42.
- Wolf, H. e von Helversen, O. (1986). Switching-off' of an auditory interneuron during stridulation in the acridid grasshopper *Chorthippus biguttulus* L. *Journal of Comparative Physiology A: Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 158(6):861–871.
- Wolkenhauer, O., Ullah, M., Wellsteadand, P., e Cho, K. (2005). The dynamic systems approach to control and regulation of intracellular networks. *FEBS letters*, 579:1846–1853.