FERNANDO ANDRECIOLI

MODELAGEM DA COXINIZAÇÃO DE MOTORES PARA APLICAÇÕES
AUTOMOTIVAS

São Paulo
2018

FERNANDO ANDRECIOLI

MODELAGEM DA COXINIZAÇÃO DE MOTORES PARA APLICAÇÕES
AUTOMOTIVAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências.

São Paulo
2018

59

Janus

Universidade de São Paulo

ATA DE DEFESA

Aluno: 3152 - 3271691 - 2 / Página 1 de 1

Ata de defesa pública de Dissertação do(a) Senhor(a) Fernando Andreoli no Programa: Engenharia Mecânica, do(a) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Aos 16 dias do mês de abril de 2018, no(a) realizou-se a Defesa da Dissertação do(a) Senhor(a) Fernando Andreoli, apresentada para a obtenção do título de Mestre intitulada:

"Modelagem da coxinzagem de motores para aplicações automotivas"

Após declarada aberta a sessão, o(a) Sr(a) Presidente passa a palavra ao candidato para exposição e a seguir aos examinadores para as devidas arguições que se desenvolvem nos termos regimentais. Em seguida, a Comissão Julgadora proclama o resultado:

Nome dos Participantes da Banca	Função	Sigla da CPG	Resultado
Demetrio Cornilios Zachariadis	Presidente	EP - USP	<u>APROVADO</u>
Marcelo Becker	Titular	EESC - USP	<u>APROVADO</u>
Franco Giuseppe Dedini	Titular	UNICAMP - Externo	<u>APROVADO</u>

Resultado Final: APROVADO

Parecer da Comissão Julgadora *

Eu, Elias Alves de Almeida _____, lavrei a presente ata, que assino juntamente com os(as) Senhores(as). São Paulo, aos 16 dias do mês de abril de 2018.

Marcelo Becker

Franco Giuseppe Dedini

Demetrio Cornilios Zachariadis
Presidente da Comissão Julgadora

* Obs: Se o candidato for reprovado por algum dos membros, o preenchimento do parecer é obrigatório.

A defesa foi homologada pela Comissão de Pós-Graduação em _____ e, portanto, o(a) aluno(a) faz jus ao título de Mestre em Ciências obtido no Programa Engenharia Mecânica - Área de concentração: Engenharia de Controle e Automação Mecânica.

Presidente da Comissão de Pós-Graduação

FERNANDO ANDRECIOLI

MODELAGEM DA COXINIZAÇÃO DE MOTORES PARA APLICAÇÕES
AUTOMOTIVAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Demetrio C.
Zachariadis

São Paulo
2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Andrecioli, Fernando

Modelagem da coxinzização de motores para aplicações automotivas / F. Andrecioli -- versão corr. -- São Paulo, 2018.

116 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Sistemas de coxinzização 2.Vibrações mecânicas 3.Modelos dinâmicos 4.Motores automotivos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Demetrio C. Zachariadis pela orientação e constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Aos amigos Hugo Watanuki, Roberto Pereira Ramos, Yuri Ribeiro Silva e a todos que colaboraram direta ou indiretamente na execução desse trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar sistemas de coxinação, também conhecidos como sistemas de isolamento, desenvolvidos para motores automotivos juntamente com os modelos analíticos para calcular o comportamento dinâmico do motor suspenso, complementados por análises numéricas com o emprego do método dos elementos finitos e estudos experimentais.

Estudos para verificar o efeito dos parâmetros de projeto do sistema de coxinação na resposta modal do motor isolado foram realizados utilizando os modelos analíticos desenvolvidos. Foi possível identificar como a variação de tais parâmetros interfere na resposta modal do motor suspenso.

Os resultados fornecidos por tais modelos analíticos auxiliaram na compreensão do comportamento modal do sistema, mostrando que são ferramentas úteis para auxiliar o projeto de sistemas de isolamento de motores, especialmente em estágios iniciais do projeto, onde os parâmetros do veículo ainda estão por ser determinados e protótipos ainda não estão disponíveis.

Palavras-chave: motor, coxim, vibração, isolamento.

ABSTRACT

The aim of this work is to study engine mount systems (isolation systems) developed for automotive engines along with the analytical models to calculate the dynamic behavior of the isolated engine, complemented by numerical analysis using the finite element method and experimental analysis.

Studies to verify the effect that the isolation system design parameters have on the modal response of the isolated engine were performed using the analytical models developed. It was possible to identify how the variation of such parameters affects the modal response of the isolated engine.

The results provided by such analytical models aided in understanding the modal behavior of the system, showing that they are useful tools to assist in the design of engine isolation systems, especially in the early stages of design, where vehicle parameters are still to be determined and prototypes are not yet available.

Keywords: engine, mount, vibration, isolation.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Resumos das forças de desbalanceamento para configurações multi-cilindros	58
Tabela 2:	Parâmetros adotados para solução modal.....	74
Tabela 3:	Resultados modais – Modelos: Elem. Finitos, 12 e 6 GDL.	75
Tabela 4:	Energia Cinética calculada com modelo de 12 GDL.	76
Tabela 5:	Parâmetros adotados para cálculos dos esforços desbalanceadores..	80
Tabela 6:	Forças desbalanceadoras	81
Tabela 7:	Lista de equipamentos utilizados na análise experimental.....	85
Tabela 8:	Localização dos acelerômetros utilizados no ensaio - Motor	86
Tabela 9:	Coordenadas dos acelerômetros localizados no motor (Sistema de coordenadas SAE J670).	86
Tabela 10:	Localização dos acelerômetros utilizados no ensaio - Carroceria.....	87
Tabela 11:	Coordenadas dos acelerômetros localizados na carroceria (Sistema de coordenadas SAE J670).	87
Tabela 12:	Frequências naturais obtidas com a análise modal experimental.	90
Tabela 13:	Comparativo dos resultados do modelo de 6 GDL com os resultados experimentais.....	92
Tabela 14:	Comparativo dos resultados do modelo de 12 GDL com os resultados experimentais.....	93
Tabela 15:	Comparativo dos resultados do modelo FEM com os resultados experimentais.....	93
Tabela 16:	Resumo das diferenças entre os resultados dos modelos e experimentais em (Hz) para os modos do motor.....	94
Tabela 17:	Resumo das combinações geradas para o estudo de variação das rigidezes dos coxins.....	95
Tabela 18:	Resultados modais (Hz) obtidos com as diferentes combinações de rigidezes dos coxins	96
Tabela 19:	Resumo dos valores mínimos, máximos e diferenças (Máximo – Mínimo) encontrados para os modos [Hz].....	97
Tabela 20:	Energia Cinética calculada para as combinações n.º 4 e n.º14.....	97
Tabela 21:	Efeito dos sub-sistemas escapamento e semi-eixos nos modos do motor [Hz].....	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Sistema de isolamento <i>Floating Power</i> . Material promocional distribuído pela montadora para divulgação da nova tecnologia aplicada no modelo "Imperial". É explícito no material a patente registrada pelo fabricante.....	19
Figura 2:	Definição dos sistemas de coordenadas de um motor. Adaptado de (SCHIMITT e LEINGANG, 1975).....	26
Figura 3:	Curva de resposta em frequência de um sistema dinâmico com 1 grau de liberdade. Adaptade de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999).....	27
Figura 4:	Rigidez dinâmica ideal de um coxim. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)	28
Figura 5:	Modelo mecânico de um coxim clastomérico. Adaptado de (SWANSON, 1993)	29
Figura 6:	Rigidez dinâmica de um coxim elastomérico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)	29
Figura 7:	Coxim hidráulico com orifício simples. Adaptado de (FLOWER, 1985)	31
Figura 8:	Coxim hidráulico com pista de inércia. Adaptado de (SWANSON, 1993)	32
Figura 9:	Coxim hidráulico com pista de inércia e desacoplador. Adaptado de (SWANSON, 1993)	33
Figura 10:	Curva de rigidez característica de um coxim hidráulico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999).	34
Figura 11:	Modelo mecânico de um coxim hidráulico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)	34
Figura 12:	Efeito da área da pista de inércia na rigidez dinâmica de um coxim hidráulico. Adaptado de (LEE, CHOI e HONG, 1994).	35
Figura 13:	Efeito da área da pista de inércia no amortecimento de um coxim hidráulico. Adaptado de (LEE, CHOI e HONG, 1994).	35
Figura 14:	Efeito da folga da membrana na rigidez dinâmica do coxim hidráulico. Adaptado de (CORCORAN e TICKS, 1984).	36

Figura 15:	Esquema de posicionamento dos coxins para uma instalação longitudinal. Adaptado de (TIMPNER, 1965).....	39
Figura 16:	Relação da posição da linha elástica e constantes de mola. Adaptado de (CREDE, 1951)	40
Figura 17:	Linha de torque neutro. Adaptado de (TIMPNER, 1965).....	41
Figura 18:	Esquema de posicionamento dos isoladores numa instalação transversal.....	43
Figura 19:	Posicionamento dos modos do motor transversal sugerido por (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979).....	44
Figura 20:	Sistema de coordenadas do modelo de corpo rígido do motor com seis graus de liberdade. Adaptado de (GECK e PATTON, 1984)	45
Figura 21:	Mecanismo pistão, biela-manivela.	49
Figura 22:	Esforços resultantes gerados pelos componentes internos do motor. .	50
Figura 23:	Curva de pressão de combustão em função da posição angular da árvore de manivelas para um motor qualquer. Fonte: (SELIM, 2010) ..	50
Figura 24:	Sistema biela-manivela de 1 grau de liberdade com mancais rígidos..	51
Figura 25:	Sistema biela-manivela com centro de translação do pistão deslocado.	53
Figura 26:	Massa concentrada equivalente representando a massa da manivela m_c	54
Figura 27:	Localização do centro de gravidade da biela.	55
Figura 28:	Contrapeso adicionado para balancear massa rotativa.	56
Figura 29:	Exemplo de árvore de manivelas de um motor quatro cilindros com sequência de ângulos $0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$	57
Figura 30:	Diagrama de esforços verticais de um motor quatro cilindros com sequência de ângulos $0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$	57
Figura 31:	Diagrama de forças para cálculo do momento em torno do CG do motor responsável pela arfagem.	58
Figura 32:	Diagrama de forças laterais para cálculo do momento no plano XY em torno do CG.....	60
Figura 33:	Distância do centro do pino ao centro de gravidade d_z	60
Figura 34:	Sistema de coordenadas definido pela norma SAE J670.	61

Figura 35:	Modelo com 6 GDL: motor suspenso foi representado por um corpo rígido e cada coxim representado por um conjunto de três molas lineares.....	62
Figura 36:	Modelo com 12 GDL: carroceria e motor foram representados por corpos rígidos. Cada coxim e conjunto pneu-suspensão foram representados por três molas lineares.	64
Figura 37:	Modelo de elementos finitos: motor representado por um corpo rígido e demais sistemas do veículo representados por corpos flexíveis.....	65
Figura 38:	Ilustração da localização da linha de torque neutro e linha elástica calculadas com base nos dados apresentados na Tabela 2.....	75
Figura 39:	Visualização dos modos do motor calculados com o modelo de 12DOF.	77
Figura 40:	Resposta do CG do motor para força harmônica unitária; a) força longitudinal; b) força vertical.....	79
Figura 41:	Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo X (SAE J670)	79
Figura 42:	Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo Y (SAE J670)	80
Figura 43:	Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo Z (SAE J670)	80
Figura 44:	Forças desbalanceadoras	81
Figura 45:	Diagrama de Campbell para as frequências de excitação de um motor quatro tempos com quatro cilindros em linha	82
Figura 46:	Resposta vibratória do centro de gravidade do motor	83
Figura 47:	Esquema de operação da bancada para análise modal do motor isolado.....	84
Figura 48:	Referencial inercial e posicionamento dos shakers.....	85
Figura 49:	Localização dos acelerômetros 11 e 12 (Esquerda) – Resposta vertical do acelerômetro 12 (Direita).....	87
Figura 50:	Localização dos acelerômetros da carroceria (Esquerda) – Resposta vertical do acelerômetro (Direita)	88
Figura 51:	Vista espacial dos acelerômetros utilizados no teste.	88
Figura 52:	Transdutor de força instalado entre o motor e o <i>shaker</i>	89

Figura 53:	Formas modais determinadas pela síntese das respostas dos acelerômetros.....	91
Figura 54:	Funções de resposta em frequência obtidas com o acelerômetro n.º12	91
Figura 55:	Resultados obtidos as combinações apresentadas na Tabela 19.....	98
Figura 56:	Efeito das rigidezes dos coxins no valor médio do modo de arfagem do motor.	98
Figura 57:	Comparativo da FRF obtida com o teste e com o modelo de 12 GDL.	100

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Letras Latinas

A	distância do coxim frontal ao centro de gravidade do motor	[m]
B	distância do coxim traseiro ao centro de gravidade do motor	[m]
C	matrix de amortecimento	[--]
c	constante de amortecimento	[N.m/s ²]
D	Energia Potencial Dissipativa	[J]
F	vetor de força	[--]
F _y	força no direção do eixo y	[N]
F _z	força no direção do eixo z	[N]
f	frequência	[Hz]
H	função de transferência	[--]
I _x	momento de inércia no eixo x	[kg.m ²]
I _y	momento de inércia no eixo y	[kg.m ²]
I _z	momento de inércia no eixo z	[kg.m ²]
I ₁	momento de inércia no eixo principal 1	[kg.m ²]
I ₂	momento de inércia no eixo principal 2	[kg.m ²]
I ₃	momento de inércia no eixo principal 3	[kg.m ²]
k	constante de rigidez elástica	[N.m]
K	matrix de rigidez	[--]
ℓ	comprimento da biela	[m]
M	matrix de massa	[--]
M _p	momento devido força de compressão	[N.m]
M _{xz}	Momento no plano definido pelos eixos x e z	[N.m]
M _{xy}	Momento no plano definido pelos eixos x e y	[N.m]
M _{yz}	Momento no plano definido pelos eixos y e z	[N.m]
m	massa	[kg]
P	força devido à pressão na câmara de combustão	[N]
r	comprimento da manivela	[m]
r ₁	distância do pneu ao centro de gravidade da carroceria	[m]
r ₂	distância do coxim ao centro de gravidade do motor	[m]
[r] ₁	distância do coxim ao centro de gravidade da carroceria	[m]

T	Energia Cinética	[J]
t	tempo	[s]
u	Deslocamento do centro de gravidade	[m]
V	Energia Potencial Elástica	[J]
x	deslocamento na direção do eixo x	[m]
$\dot{x}$	velocidade na direção do eixo x	[m/s]
$\ddot{x}$	aceleração na direção do eixo x	[m/s ²]
y	deslocamento na direção do eixo y	[m]
$\dot{y}$	velocidade na direção do eixo y	[m/s]
$\ddot{y}$	aceleração na direção do eixo y	[m/s ²]
z	deslocamento na direção do eixo z	[m]
$\dot{z}$	velocidade na direção do eixo z	[m/s]
$\ddot{z}$	aceleração na direção do eixo z	[m/s ²]

Letras Gregas

α	ângulo do eixo principal 1	[°]
β	ângulo do eixo principal 2	[°]
γ	ângulo do eixo principal 3	[°]
η	coordenadas modais	[--]
θ	posição angular do centro de gravidade do corpo rígido	[°]
λ	auto valor	[--]
ς	fator de amortecimento modal	[--]
ϕ	posição angular da biela	[°]
φ	ângulo de fase dos cilindros	[°]
ω	velocidade angular	[rad/s]
Φ	matriz dos auto-vetores	[--]

Siglas

GDL	Grau de Liberdade
FRF	Função de Resposta em Frequência
FEM	Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas é notória a importância que a área de ruídos e vibrações veiculares tem adquirido para os fabricantes automotores com o intuito de diferenciar seus produtos diante de um mercado diversificado e extremamente competitivo.

Um veículo automotor possui diversas fontes de ruídos e vibrações. Uma dessas fontes é o seu conjunto propulsor formado pelo motor e transmissão. Isolar de forma eficiente o conjunto propulsor é de fundamental importância para garantir um bom desempenho de ruído e vibrações.

Tendo em vista o processo de desenvolvimento de um veículo, bem como os diversos modelos para o cálculo do sistema de isolamento do motor, a disponibilidade de informação a respeito da estrutura veicular é um dos fatores preponderantes na escolha do modelo de cálculo a ser utilizado.

Modelos baseados apenas em corpos rígidos tem sua aplicação nos estágios preliminares do desenvolvimento do sistema de isolamento, momento esse em que ainda estão em discussão as características primordiais do veículo, tais como a distância entre eixos, o tamanho da bitola, a posição do condutor e a massa total do veículo, além de outras características.

Nessa etapa do projeto, geralmente não existe informação a respeito da estrutura do veículo, mas já está em discussão qual será o seu conjunto propulsor e como será seu sistema de isolamento. Dessa forma, um modelo de cálculo simplificado é de grande utilidade, pois requer para os cálculos e análises do sistema de isolamento um nível de informação menos detalhado acerca da estrutura do veículo, menor tempo de preparação e pré-processamento e menor tempo para resolução.

Com o desenvolvimento do projeto, a construção de modelos mais complexos que utilizam o Método de Elementos Finitos se torna possível. A aplicação de elementos finitos nos modelos de cálculo do sistema de isolamento amplia o horizonte de estudo do sistema, incorporando elementos existentes na estrutura do veículo, que a priori são desprezados nos modelos de corpo rígido devido sua natureza simplificada.

Diante dessa situação, o presente trabalho tem como proposta o desenvolvimento de modelos para o cálculo do sistema de isolamento de motores para a aplicação automotiva com o intuito de serem aplicados nas diversas etapas de desenvolvimento do veículo.

Duas abordagens foram adotadas neste trabalho, sendo que a primeira baseou-se na utilização de corpos rígidos para representar o motor e a estrutura do veículo e a segunda

baseou-se no método dos elementos finitos onde o motor foi considerado como um corpo rígido e a estrutura do veículo como um corpo flexível.

O modelo simplificado, baseado na dinâmica de corpos rígidos, foi elaborado para estudar o efeito que propriedades elásticas dos coxins exercem nos modos de corpo rígido do motor suspenso. O modelo baseado no método dos elementos finitos foi elaborado para estudar a influência que os modos da carroceria e que alguns sub-sistemas do veículo exercem nos modos de corpo rígido do motor suspenso. Os resultados obtidos com ambos modelos foram comparados com resultados experimentais obtidos em laboratório.

1.1 MOTIVAÇÃO

A grande diversificação que a indústria automotiva brasileira vem percebendo nas últimas décadas tem demonstrado quão competitivo o mercado automobilístico brasileiro tem se tornado. Como reflexo de um processo global, os fabricantes de veículos automotores buscam cada vez mais diferenciais para seus produtos.

O aumento e a diversificação da indústria automobilística, somado a um processo de melhoria do poder aquisitivo da população brasileira, tem causado uma mudança no perfil dos consumidores de veículos automotores no Brasil, os quais cada vez mais prezam por mais itens de conforto, segurança, entretenimento, desempenho e eficiência.

Com base nesse cenário, oferecer produtos com um maior nível de conforto e menor nível de ruído torna-se um grande diferencial de mercado. Por essa razão, buscando diferenciar seus produtos, a área de ruídos e vibrações veiculares, que é conhecida na indústria automotiva pela sigla NVH, *Noise, Vibration and Harshness*, tem sido bastante explorada nas últimas décadas pelos fabricantes.

Um veículo automotor é uma máquina complexa, na qual diversos sistemas podem atuar como fontes de ruído e vibrações. Dentre essas fontes, o conjunto propulsor pode ser considerado como uma das principais fontes de ruído e vibrações do veículo. Apresentar um conjunto propulsor devidamente isolado da carroceria resulta em um veículo com baixos níveis de ruído e vibrações percebidos pelo condutor e seus ocupantes, razão pela qual o sistema de isolamento do conjunto propulsor tem um papel importante no desempenho de conforto e ruído veicular.

Definir o sistema de isolamento do motor no início do projeto é de fundamental importância, porém a insuficiência de informação a respeito da geometria da estrutura é um fator limitante para a elaboração de modelos complexos baseados em elementos finitos, e por essa razão, um modelo de cálculo simplificado se torna uma opção capaz de fornecer

resultados aproximados que são de extrema utilidade para garantir um bom desenvolvimento do projeto.

1.2 MÉTODOS

O presente trabalho teve como proposta o desenvolvimento de modelos para o cálculo das características de um sistema de isolamento do motor de um veículo, as quais são entendidas como as propriedades elásticas dos isoladores e sua posição espacial.

As características citadas acima são dependentes das propriedades inerciais do conjunto propulsor e dos esforços oscilatórios por ele gerados em uma dada condição de operação do motor, bem como das características dinâmicas da suspensão e das características inerciais do veículo.

Considerando todos esses fatores, o resultado desejado é obter um sistema de isolamento que permita um nível de vibração transmitida para a carroceria do veículo de acordo com os níveis estabelecidos pelo projeto e com as restrições construtivas dos coxins, bem como o máximo “envelope” permitido para o conjunto propulsor.

Uma revisão bibliográfica foi elaborada para compreender o estado da arte dos sistemas de isolamento aplicados em veículos automotivos. Os diversos tipos de formas construtivas para o sistema de isolamento e para os coxins foram explorados e apresentados neste trabalho.

O estudo do mecanismo biela-manivela presente no motor de combustão interna foi realizado, as forças geradas pelo funcionamento do motor foram identificadas e as expressões matemáticas que descrevem tais forças foram estabelecidas em função das propriedades construtivas do motor e sua velocidade de operação.

O estudo dos modos naturais de vibração do motor isolado foi apresentado como um fator importante para o projeto de um sistema de isolamento por influenciarem nos níveis de isolamento do sistema, principalmente na faixa de frequência onde os modos naturais residem.

A adoção de um modelo de 12 Graus de Liberdade (GDL) para equacionar o problema permitiu representar o comportamento dinâmico do sistema físico estudado de forma simplificada. A estrutura do veículo e o conjunto propulsor foram representados por dois corpos rígidos, cada corpo com seis graus de liberdade .

Para a utilização do modelo de 12 GDL, assumiu-se que os corpos não possuem modos naturais de vibração na faixa de frequência de estudo do problema. Tal consideração é razoável para o motor por se tratar de uma parte compacta e rígida, porém a carroceria do

veículo certamente apresentará modos naturais de vibração próximos da faixa de frequência dos modos de corpo rígido do motor.

O efeito da aproximação da estrutura do veículo por um corpo rígido foi estudado através da elaboração de um modelo de elementos finitos. Nesse modelo, o corpo rígido que antes representava a estrutura do veículo foi substituído por um corpo flexível e os efeitos da interação entre os modos naturais da carroceria e os modos de corpo rígido do motor foram considerados. Alguns sub-sistemas do veículo, tais como suspensão, escapamento e semi-eixos foram consideradas no modelo de elementos finitos e os efeitos que tais sub-sistemas exerceram nos modos do motor foram identificados.

Os resultados modais obtidos com os modelos desenvolvidos foram comparados entre si e com resultados experimentais obtidos em laboratório. Os modelos desenvolvidos foram aplicados em estudos para avaliar a robustez do sistema de isolamento e o efeito de sub-sistemas nos modos de corpo rígido do motor.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O sistema de isolamento do motor tem a função primária de conectar e sustentar o conjunto motor mais transmissão na estrutura do veículo. Os primeiros veículos automotores possuíam sistemas de apoio rígido. Não havia nenhum tipo de isolamento entre o motor e a estrutura do veículo. Todas as vibrações oriundas do funcionamento do motor eram transmitidas integralmente para a estrutura do veículo e consequentemente para seus ocupantes o que gerava muito desconforto para os usuários e eventualmente reclamações para os fabricantes.

Os primeiros registros de patentes para a tecnologia de isolamento do motor com o intuito de atenuar ruídos e vibrações datam da década de 1920. Os primeiros sistemas de isolamento com aplicação na indústria automotiva surgiram no início da década de 1930 aplicados pela montadora Chrysler (SAVELL, 2014), introduzido pela montadora americana no modelo “Imperial” de 1932. O sistema na época denominado pela montadora como *Floating Power* consistia em suspender o motor através de isoladores de borracha ou coxins, reduzindo as vibrações transmitidas para a carroceria do veículo. Esses isoladores em geral eram dois, posicionados ao longo de uma linha que passava pelo centro de inércia do motor. Em adição, molas eram posicionadas transversalmente para limitar a rotação do motor quando o mesmo fosse solicitado. Um exemplo desse sistema pode ser visto na Figura 1.

Figura 1: Sistema de isolamento *Floating Power*. Material promocional distribuído pela montadora para divulgação da nova tecnologia aplicada no modelo "Imperial". É explícito no material a patente registrada pelo fabricante.

As primeiras publicações que pode-se encontrar a respeito do assunto datam da década de 1930. Em (HARTOG, 1956), inicialmente publicado em 1934, pode-se encontrar vasta

informação a respeito de vibrações de motores e conceitos para atenuação dessas vibrações. Muita literatura a respeito do assunto pode também ser encontrada em congressos automotivos e periódicos internacionais que falam sobre ruídos e vibrações. No presente trabalho buscou-se organizar as informações obtidas de maneira cronológica para se estabelecer a linha evolutiva dessa tecnologia.

2.1 LINHA DO TEMPO

A partir da década de 1950, intensificam-se as publicações relacionadas à questão do isolamento das vibrações geradas pelo motor. MORISH (1958) publicou um artigo falando sobre a influência que o sistema de isolamento do motor possui sobre o comportamento vibratório do veículo. Comenta sobre a importância da posição dos coxins para melhorar o isolamento do sistema. Até então, os veículos em sua maioria eram montados com motores na posição longitudinal e com tração traseira. Era possível perceber a grande tendência dos fabricantes em posicionar os coxins no centro de oscilação do motor, em inglês *center of percussion*. Aborda também a importância da rigidez local do ponto de montagem do coxim para permitir melhor isolamento e dos efeitos que o aumento demasiado do amortecimento pode causar na transmissão do ruído.

Na década seguinte, STEPP (1960) comentou em seu artigo sobre a abordagem empírica empregada no projeto de coxins pelos fabricantes e dos avanços obtidos com experimentos capazes de representar a vibração experimentada pelo carro na pista em laboratório. Desenvolveu um modelo de corpo rígido com seis graus de liberdade e utilizou métodos computacionais para resolver o problema de autovalor-autovetor. Tais cálculos tornam-se possíveis com o uso de computadores e foram realizados para determinar configurações de coxins que transformassem o motor num absorvedor dinâmico capaz de atenuar a resposta da suspensão do veículo. Era sabido na época que tal feito melhorava o desempenho vibratório do veículo.

Em 1965, TIMPNER relatou em seu artigo recomendações gerais para o projeto de sistemas de isolamento de motores longitudinais. Seu trabalho estabeleceu alguns fundamentos do sistema de isolamento do motor tais como a “Linha Neutra de Torque” ou NTA (*Neutral Torque Axis*) e o acoplamento dos modos de corpo rígido do motor ou “Separação Modal”. TIMPNER ainda propôs em seu trabalho que a linha elástica definida pela posição dos coxins deveria ser coincidente com a Linha Neutra de Torque e que o modo vertical do motor deveria estar desacoplado do modo de arfagem do motor ou *pitch*. A centralização da linha elástica dos coxins com a linha neutra de torque também é conhecida

como método da focalização (JEONG e SINGH, 2000). Um trabalho similar foi elaborado por SCHIMITT e LEINGANG em 1975, que também explorou a solução modal de um sistema de seis graus de liberdade para determinar a resposta vibratória do motor dadas as forças vibratórias por ele geradas.

Até o final da década de 1970, os veículos eram em sua maioria montados com motores na posição longitudinal e dotados de tração traseira. Veículos com motores transversais e tração dianteira já eram uma realidade aplicada há muitos anos, e com a crise do petróleo, as montadoras buscaram a melhorar a eficiência de seus produtos. O projeto de veículos mais leves, compactos e com motores mais eficientes se torna a tônica da década de 80. A aplicação de motores transversais foi um facilitador da compactação explorada pelos fabricantes para reduzir a massa de seus produtos.

JOHNSON e SUBHEDAR, em 1979, propuseram um método analítico para otimizar a rigidez dos coxins do sistema de apoio de um motor transversal. Também estabeleceram alguns fundamentos como a igual distribuição das forças que sustentam o motor pelos coxins. Para isolar a estrutura das vibrações, estabeleceram que os valores de rigidez deveriam ser os mais baixos possíveis e propuseram o seguinte a respeito dos modos do motor: a frequência natural do modo vertical deveria ser a mais baixa possível, respeitando-se os limites de resistência à ruptura e a vida útil do coxim, a frequência do modo de arfagem e guinada do motor deveria ser pelo menos $\sqrt{2}$ vezes menor que frequência explosão dos cilindros para a velocidade de marcha lenta, a frequência do modo de rolagem do motor deveria ser a mais alta possível para desacoplar dos modos de suspensão do veículo, os modos lateral e longitudinal tão logo estejam separados dos outros modos, deveriam ter as frequências o mais alto possível para minimizar a movimentação do motor.

JOHNSON e SUBHEDAR ainda concluíram que se o tensor principal de inércia não está alinhado com as direções do carro e o centro elástico não está coincidente com a linha neutra de torque, então todos os modos de corpo rígido do motor estão de certa forma acoplados. Por fim, estabeleceram um método de otimização com o objetivo de determinar frequências naturais adequadas para certos modos e comprovar devida separação modal por eles proposta, apresentaram uma fórmula para o cálculo da energia cinética e determinaram o modo predominante pela fração de energia cinética presente no modo.

BERNARD e STARKEY (1983) publicaram um trabalho de otimização similar ao exposto por JOHNSON e SUBHEDAR (1979), utilizando um modelo de seis graus de liberdade, através da posição e separação modal, buscaram otimizar a resposta vibratória de um motor diesel. Nesse mesmo ano, RADCLIFFE, PICKLEMAN e SPIEKERMANN

publicaram um artigo sobre os fundamentos para um sistema de isolamento de motores transversais. Seu trabalho é similar ao exposto por JOHNSON e SUBHEDAR (1979) e propôs uma técnica analítica de predição da vibração transmitida pelos coxins para uma instalação do tipo transversal. O método proposto pelos autores consistiu em determinar os esforços dos coxins do motor através de um modelo de corpo rígido com seis graus de liberdade, suspenso pelos coxins que são representados por molas lineares.

Ainda na década de 1980, muitos trabalhos (BERNUCHON, 1984; CORCORAN e TICKS, 1984; CLARK, 1985; FLOWER, 1985; USHIJIMA, TAKANO e KOJIMA, 1988) dissertam a respeito de coxins hidráulicos. Apesar da tecnologia aplicada em coxins hidráulicos ser conhecida desde a década de 1960, sua aplicação se intensificou na década de 1980 devido às dificuldades de se isolar motores transversais de tração dianteira. BERNUCHON em 1984 descreveu o princípio de funcionamento de um coxim hidráulico. A adição de duas câmaras cheias de água ou óleo que se comunicam através de um orifício adiciona um efeito de ressonância e amortecimento em uma determinada frequência que vai depender dos parâmetros construtivos do coxim e que podem ser ajustados apropriadamente.

Esse tipo de coxim é capaz de fornecer elevada rigidez e amortecimento para uma elevada amplitude de deslocamento em uma faixa de frequência ajustável, geralmente ajustada para as faixas de frequências da suspensão do veículo, usualmente entre 8Hz-14Hz, onde é desejável um elevado nível de rigidez e amortecimento para minimizar as vibrações do motor causadas pelas imperfeições da pista de rodagem. Ao mesmo tempo, esse coxim é capaz de oferecer menor rigidez e amortecimento para faixas de frequências maiores e com menores amplitudes de vibração, geralmente acima de 20Hz, onde menor rigidez e amortecimento favorecem o isolamento das vibrações.

Uma outra tecnologia que também teve sua exploração intensificada no final da década de 1980 foram os coxins semiativos e ativos. SHOURESHI e GRAF (1986) publicaram um estudo realizado com coxins semiativos. O coxim semiativo explorado pelos autores foi obtido pela aplicação de um coxim hidráulico com um atuador para controlar o fluxo de fluido pelo orifício de comunicação das câmaras do coxim, alterando as características de amortecimento e rigidez do mesmo, e assim permitindo ao coxim operar com dois níveis de resposta, que os autores denominaram de modos *soft* e *hard* referindo-se ao nível de rigidez e amortecimento oferecido pelo coxim.

USHIJIMA, TAKANO e TAKESHI (1988) publicaram um artigo relativo a coxins hidráulicos preenchidos por um material capaz de ter sua viscosidade alterada quando submetido a um campo elétrico. Tal material é conhecido como “fluido eletro-reológico” e é

obtido através da adição de partículas sensíveis a um campo eletromagnético. Tais partículas ficam dispersas no fluido e quando o mesmo é submetido a um campo eletromagnético, essas partículas se orientam alterando a viscosidade do fluido. O sistema de amortecimento analisado pelos autores teve a capacidade de operar em dois estágios, um com elevado amortecimento e outro com baixo amortecimento.

O trabalho apresentado pelo autor é bastante similar ao trabalho de SHOURESHI e GRAF (1986), porém a utilização de fluido eletro-reológico permitiu uma resposta mais rápida do sistema quando comparado com o sistema que utiliza o atuador hidráulico. Na década seguinte, MORISHITA e MITSUI (1992) utilizaram um controlador eletrônico para controlar coxins adaptativos. Um sistema de controle em rede neural adaptativo foi avaliado para um sistema de 1 grau de liberdade. Resultados de simulação mostraram que o sistema de controle pode funcionar para um sistema com diversas frequências naturais, como o motor suspenso em funcionamento e também para entradas oriundas da pista de rodagem.

O trabalho apresentado por USHIJIMA e KUMAKAWA (1993) introduziu o uso de materiais piezoelétricos em coxins. Atuadores piezoelétricos possuem rápido tempo de resposta, porém para deslocamentos geralmente pequenos. Para compensar essa característica, o atuador requer um mecanismo amplificador de sua resposta. O sistema escolhido para aplicar o coxim foi um veículo com motor a combustão 4 cilindros. O foco do trabalho era minimizar a ordem dominante em marcha lenta. No mesmo ano (SWANSON, 1993) avalia diferentes configurações de coxins ativos, atuadores, controladores e sensores e verifica a melhoria no desempenho proporcionada pelos coxins ativos comparados a coxins convencionais.

Coxins ativos foram considerados a próxima geração dos coxins de motor de acordo com YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI (1999), mas apesar da performance superior comprovada, coxins ativos possuem desvantagens em relação aos coxins passivos, tais como seu elevado custo, difícil manutenção e a complexidade de seu sistema, limitando sua aplicação na indústria automotiva.

Em geral, muito esforço é aplicado na otimização dos coxins de motores uma vez que sistemas de isolamento otimizados são capazes de fornecer excelente performance com custo aceitável se comparados com sistemas de isolamento ativos. Trabalhos de otimização do sistema de isolamento podem ser encontrados na literatura a partir do final da década de 1970. Um total de 9 artigos foram encontrados na literatura falando sobre otimização de coxins para sistema de isolamento dentre os quais (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; BERNARD e STARKEY, 1983; GECK e PATTON, 1984; WISE e REID, 1984; BRETL, 1993; ARAI,

KUBOZUKA e GRAY, 1993) propuseram a otimização das posições e dos valores de rigidezes dos coxins para um modelo matemático simplificado do motor suspenso pelos isoladores, sendo que o objetivo dessa otimização foi obter posição (ver Figura 19) e separação modal adequada para os modos do motor.

Os trabalhos de SUGINO e ABE (1986) e SETO, SAWATARI, *et al.* (1991) buscaram otimizar parâmetros de projeto do coxim hidráulico para um sistema de isolamento do motor. Ambos determinaram as equações que descrevem as características do coxim hidráulico e buscaram otimizar os parâmetros dessas equações de forma a obter melhor resposta do sistema de isolamento simplificado do motor. Ambos adotaram um modelo de corpo rígido do motor e utilizaram a resposta do modelo do coxim hidráulico para determinar a força exercida pelo coxim na carroceria do veículo e buscaram otimizar a resposta vibratória da região de interesse do carro.

Apesar de serem sistemas empregados com sucesso na indústria automotiva por várias décadas, o sistema de apoio do motor ainda requer constante melhoria de seu desempenho. (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999; JEONG e SINGH, 2000; BERNUCHON, 1984; FORD, 1985; CLARK, 1985; RIVIN, 1985; SWANSON, 1993; CORCORAN e TICKS, 1984; USHIJIMA e KUMAKAWA, 1993; WISE e REID, 1984) citaram em seus trabalhos que tal melhoria é devida a dois fatores: o primeiro fator é a crescente demanda por veículos com menores níveis de vibrações e ruídos. O segundo fator é a tendência de construir veículos mais leves com motores mais eficientes e com maior potência. Essa redução na massa dos veículos e o aumento da potência dos motores introduz efeitos indesejados no comportamento vibratório do veículo.

Dessa forma, mesmo sendo uma tecnologia já explorada por quase um século, o sistema de apoio do motor ainda impõe desafios aos fabricantes automotivos na busca por veículos mais eficientes, silenciosos e confortáveis.

2.2 REQUISITOS FUNCIONAIS DO PROJETO DO SISTEMA DE ISOLAMENTO

Segundo (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999; STEPP, 1960; MORISH, 1958; TIMPNER, 1965; SCHIMITT e LEINGANG, 1975; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; WISE e REID, 1984; RIVIN, 1985) o requisito principal do sistema de isolamento é suportar a massa do conjunto motor e transmissão. Além de suportar o conjunto motor e transmissão, o sistema de apoio tem a função de suportar as forças dinâmicas de impacto devido a operação do veículo e de atenuar as forças dinâmicas oscilatórias devido ao desbalanço dos componentes do motor.

As forças dinâmicas de impacto são de caráter transitório. Variam de acordo com as manobras impostas pelo condutor do veículo e também de acordo com as irregularidades da superfície onde o veículo se desloca. Além de transitórias, tais forças são aleatórias e requerem uma abordagem estatística para seu estudo. O presente trabalho não tem como escopo estudar a resposta do sistema de apoio do motor para uma entrada de força do tipo aleatória, mas é oportuno ressaltar que a resposta do sistema de apoio para esse tipo de esforço é fundamental para garantir um bom desempenho do veículo.

De acordo com (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999; SELIM, 2010; SCHIMITT e LEINGANG, 1975; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; GECK e PATTON, 1984), as forças dinâmicas oscilatórias podem ser divididas em dois tipos. O primeiro tipo são as forças que ocorrem pelo aumento da pressão dentro da câmara de combustão devido à queima da mistura ar combustível, simplesmente chamadas de “forças de combustão”; o segundo tipo corresponde as forças relacionadas com o movimento das massas dos elementos do sistema “pistão, biela e manivela”, chamadas de forças inerciais. Devido ao caráter cíclico de funcionamento do motor de combustão interna, essas forças podem ser determinadas analiticamente.

É demonstrado por (HARTOG, 1956) que a pressão gerada na câmara de combustão de um motor de combustão interna resulta apenas em torque em torno do eixo de rotação da árvore de manivelas. Como essa variação de pressão ocorre em pulsos, o torque resultante também possui essa característica. Definindo um sistema de coordenadas conforme ilustrado na Figura 2 para um motor de combustão interna, tem-se como eixo X o eixo longitudinal definido pelo centro de rotação da árvore de manivelas, como eixo Z o eixo vertical e o eixo Y como sendo o eixo lateral perpendicular aos eixos longitudinal e vertical. Com base nesse sistema, pode-se concluir que o esforço gerado pelo funcionamento do motor no eixo longitudinal é nulo, e que na direção lateral e vertical tem-se o surgimento de forças devidos às inércias das peças em movimento. Em torno dos eixos vertical e lateral surgem torques devido às forças inerciais e finalmente em torno do eixo longitudinal surgem torques devido às forças inerciais e à variação de pressão nos cilindros.

Figura 2: Definição dos sistemas de coordenadas de um motor. Adaptado de (SCHIMITT e LEINGANG, 1975)

De acordo com (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999), a frequência das forças oscilatórias está relacionada com a velocidade de rotação do motor e depende do número de cilindros que o motor possui. Conforme apresentado por (SCHIMITT e LEINGANG, 1975), considerando-se um motor de tempos de explosão C , (onde C é 2 para motores com ciclo de dois tempos e 4 para motores com ciclo de 4 tempos) e com n cilindros, tem-se que a frequência em Hz dos pulsos de pressão em função da velocidade de rotação do motor em rpm é definida por:

$$f = \frac{2 \cdot n}{C} \times \frac{\text{rpm}}{60} \quad (2.1)$$

Por ser a frequência dos pulsos de pressão, é também a frequência de excitação do torque oscilatório em torno do eixo longitudinal. Por exemplo, considerando-se um motor de quatro cilindros operando com uma velocidade de rotação de 600-6000rpm tem-se que a frequência dos pulsos de pressão varia de 20-200Hz. Dessa forma, o sistema de suspensão do motor ideal deve ser capaz de isolar a carroceria do veículo de tais forças oscilatórias geradas pelo funcionamento do motor para uma ampla faixa de frequência.

Segundo (SCHIMITT e LEINGANG, 1975), além da função de suportar a massa do motor e isolar a estrutura do veículo das vibrações geradas pelo seu funcionamento, o sistema de isolamento deve ser capaz de resistir ao torque gerado pelo motor limitando a movimentação do motor para evitar contato com outros componentes. Deve também ser capaz de acomodar a movimentação da estrutura. Em geral, a estrutura do veículo é complacente a esforços torcionais que podem causar deslocamentos significativos na base dos

coxins. Os coxins devem ser capazes de absorver esses deslocamentos para evitar danos ao motor que poderiam impedir seu funcionamento.

O ambiente ao qual o coxim é exposto é bastante agressivo. Ele pode ser exposto a vários tipos de contaminantes, como óleos, graxas, combustível, vapores, poeira, lama entre outros. Dessa forma ele deve ser capaz de resistir a esse ambiente sem ter suas características elásticas e dissipativas alteradas. Por fim, o coxim deve ter uma vida útil compatível com a vida útil do veículo e que seja aceitável pelos consumidores desse produto.

2.3 TIPOS DE COXINS

Pode-se dividir os tipos de coxins encontrados na revisão bibliográfica em três grupos. Todos eles têm como base o uso de componentes elástoméricos. O uso de borracha com o intuito de isolamento de vibração em máquinas data de 1930, ano em que se tem o registro da primeira patente para esse tipo de aplicação. No caso de isolamento de motores, características contrastantes são necessárias para se obter um bom isolamento, conforme será comentado em seguida.

Figura 3: Curva de resposta em frequência de um sistema dinâmico com 1 grau de liberdade. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)

A curva de transmissibilidade de força de um sistema dinâmico de 1 grau de liberdade é mostrada na Figura 3. Para uma relação de frequências maior que $\sqrt{2}$, a força de entrada no sistema é sempre atenuada, e quanto menor o coeficiente de amortecimento, menor será a

força transmitida. Com base nessa característica, o projeto de um coxim de motor deve buscar frequências naturais $\sqrt{2}$ vezes menor que a mínima frequência de funcionamento do motor. Além disso, deve-se buscar o menor fator de amortecimento possível. Dessa forma, as forças oscilatórias geradas pelo funcionamento do motor requerem coxins mais complacentes e com menor fator de amortecimento.

Por outro lado, segundo (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999) coxins com constante elástica muito baixa podem ter problemas com respostas transitórias geradas por forças dinâmicas de impacto uma vez que os deslocamentos do motor podem ser elevados, resultando em danos aos seus componentes. Esses tipos de forças são gerados por súbitas acelerações e desacelerações do motor, frenagens e pistas irregulares. Para esse tipo de excitação, é desejável elevada rigidez e amortecimento para limitar a amplitude de movimento do motor.

Logo a curva de rigidez de um coxim ideal pode ser representada conforme mostrado na Figura 4, o que sugere que a rigidez do coxim deve ser dependente da frequência de excitação.

Figura 4: Rigidez dinâmica ideal de um coxim. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)

2.3.1 Cxim Elastomérico

Segundo (SCHIMITT e LEINGANG, 1975), por serem capazes de atender os requisitos necessários para a aplicação automotiva, materiais elastoméricos se tornaram um padrão para sistemas de isolamento de motores. Coxins elastoméricos são em geral compactos, de baixo custo e livres de manutenção. Podem ser facilmente projetados para se

obter as constantes elásticas necessárias para uma determinada aplicação, são compactos e duráveis.

Segundo (SWANSON, 1993), o modelo matemático de um coxim elastomérico é ilustrado na Figura 5. Também conhecido como modelo de Voigt, ele consiste de uma mola e um amortecedor montados numa disposição paralela.

Figura 5: Modelo mecânico de um coxim elastomérico. Adaptado de (SWANSON, 1993)

Segundo o mesmo autor, coxins elastoméricos são capazes de fornecer rigidez dinâmica conforme ilustrado na Figura 6. A constante elástica ou rigidez do coxim aumenta conforme aumenta a frequência de excitação devido ao amortecimento presente no coxim.

Figura 6: Rigidez dinâmica de um coxim elastomérico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)

Como concluem (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999), baseado nessa característica de rigidez, é possível inferir que o coxim elastomérico é capaz de fornecer um compromisso entre isolamento da vibração e deslocamento estático. A busca por veículos mais leves, menores e com menor velocidade de marcha lenta que se iniciou no final de década de 1970 colocou um limite na aplicação dos coxins elastoméricos e novos conceitos e tecnologias foram introduzidos no sistema de isolamento de motores.

2.3.2 Cxim Hidráulico Passivo

Em 1962, Richard Rasmussen patenteou o primeiro coxim hidráulico com o intuito de aumentar o amortecimento do coxim. Segundo (MARJORAM, 1962), existem duas razões para o aumento da popularidade dos coxins hidráulicos. A primeira já foi citada anteriormente e está relacionada com a tendência de veículos mais leves, menores e com velocidades de marcha lenta mais baixas. A segunda razão, é que os coxins hidráulicos se tornaram elementos altamente ajustáveis o que facilita o projeto e o desenvolvimento de sistemas de isolamento.

Vários trabalhos como (BERNUCHON, 1984; CORCORAN e TICKS, 1984; FLOWER, 1985; KADOMATSU, 1989) demonstram a considerável melhora que o coxim hidráulico é capaz de fornecer para o sistema de isolamento quando comparado com coxins elastoméricos, principalmente para o isolamento de forças de baixas frequências ou das forças de impacto provenientes das manobras do veículo. Essa melhora reflete no conforto de rodagem do veículo. Outra melhora constatada pelo uso de coxins hidráulicos é a redução do nível de ruído percebido no interior do veículo.

Pode ser verificado na literatura através dos trabalhos de (CORCORAN e TICKS, 1984; FLOWER, 1985), que existem variações construtivas dos coxins hidráulicos que permitem diferentes características de resposta para o coxim. As três características construtivas mais comuns dos coxins hidráulicos são: coxim com orifício simples, o coxim com pista de inércia e o coxim com pista de inércia e desacoplador.

Figura 7: Coxim hidráulico com orifício simples. Adaptado de (FLOWER, 1985)

A Figura 7 ilustra o coxim hidráulico com orifício simples. O funcionamento e modelo matemático desse tipo de coxim pode ser encontrado no trabalho de (FLOWER, 1985). Nesse conceito construtivo, um diafragma separa as duas câmaras presentes no coxim, que se comunicam apenas por um orifício localizado no diafragma. Ambas as câmaras estão conectadas ao diafragma. Em adição, a câmara superior está conectada ao elemento elástico primário e a câmara inferior está conectada ao elemento elástico secundário. O elemento elástico primário tem duas funções. A função principal de suportar as cargas estáticas e dinâmicas. Em outras palavras, a função principal do elemento elástico primário é a mesma função desempenhada pelo coxim elastomérico. A segunda função do elemento elástico primário, é bombear o fluido da câmara superior pelo orifício. O elemento elástico secundário é altamente elástico e tem a função de acumular o líquido bombeado pelo elemento elástico primário que passou pelo orifício presente no diafragma.

Figura 8: Coxim hidráulico com pista de inércia. Adaptado de (SWANSON, 1993)

A Figura 8 ilustra o coxim hidráulico com pista de inércia. O funcionamento e modelo matemático desse tipo de coxim também pode ser encontrado no trabalho de (FLOWER, 1985). Esse conceito é bastante similar ao coxim com orifício simples. A diferença reside no fato de que no coxim com pista de inércia, o orifício presente no diafragma é substituído por um tubo, geralmente disposto no formato de um anel. Essa alteração representa a adição de uma massa de fluido que fica confinada no tubo. A adição de uma massa conectada por molas, representadas pelos elementos elásticos superior e inferior introduz um efeito importante na resposta dinâmica do coxim. Segundo (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999), todos os tipos de coxim hidráulico mantem a característica de elevado amortecimento em baixa frequência, porém o coxim com pista de inércia tem o efeito de amortecimento aumentado quando comparado com o coxim com orifício simples apenas. Ambos podem ter a frequência de pico de amortecimento ajustada para absorver o carregamento de impacto, porém a rigidez dinâmica tanto do coxim com orifício simples quanto do coxim com pista de inércia é maior se comparada à rigidez do coxim elastomérico o que pode degradar o desempenho de isolamento em frequências mais altas.

Figura 9: Coxim hidráulico com pista de inércia e desacoplador. Adaptado de (SWANSON, 1993)

Por essa razão introduziu-se o coxim hidráulico com desacoplador, conforme ilustrado na Figura 9. Segundo (FLOWER, 1985), o desacoplador é uma válvula de comunicação adicionada entre as câmaras. O desacoplador tem o fluxo de fluido controlado por pistão flutuante. Quando a amplitude de deslocamento do fluido é elevada, o pistão interrompe a passagem de fluido pela válvula e o fluxo se dá pela pista de inércia. Nessa condição, a resposta do coxim é similar ao de um coxim com pista de inércia. Quando a amplitude de deslocamento do coxim é pequena, o pistão libera o fluxo pela válvula e a movimentação de fluido pela pista de inércia é praticamente nula, fazendo com que o coxim passe a funcionar de maneira similar a um coxim elastomérico.

Essa característica torna a rigidez e amortecimento do coxim hidráulico com desacoplador dependente da amplitude da vibração imposta ao coxim e permite que o mesmo tenha um desempenho similar ao de um coxim elastomérico para vibrações de pequenas amplitudes e como um coxim hidráulico com orifício simples, provendo elevado amortecimento para excitações de impacto. O coxim hidráulico com desacoplador possui as características de desempenho que são desejadas para o projeto de sistemas de isolamento e por isso são utilizados em muitos veículos.

A curva característica de rigidez de um coxim hidráulico em função da frequência pode ser vista na Figura 10.

Figura 10: Curva de rigidez característica de um coxim hidráulico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999).

Muitos autores buscaram modelar o coxim hidráulico como um modelo dinâmico de 1 grau de liberdade, tais como (BERNUCHON, 1984; CLARK, 1985; CORCORAN e TICKS, 1984; LEE, CHOI e HONG, 1994; ROYSTON e SINGH, 1995; SETO, SAWATARI, *et al.*, 1991), porém a análise mais detalhada do coxim hidráulico requer a consideração da massa do fluido e logo uma abordagem com vários graus de liberdade tais como (CLARK, 1985; LEE, CHOI e HONG, 1994; ROYSTON e SINGH, 1995; SETO, SAWATARI, *et al.*, 1991). Na Figura 11, (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999) ilustra o modelo mecânico típico de um coxim hidráulico. É possível perceber pela ilustração que o modelo mecânico do coxim hidráulico é baseado no modelo utilizado para o coxim elastomérico com a adição de uma massa m , representando a massa do fluido do coxim hidráulico e uma rigidez k_2 representando a rigidez das câmaras que contém o fluido.

Figura 11: Modelo mecânico de um coxim hidráulico. Adaptado de (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999)

Os efeitos da pista de inércia no desempenho do coxim hidráulico foram estudados por (LEE, CHOI e HONG, 1994) e os parâmetros investigados foram o diâmetro e comprimento da pista de inércia. O aumento da área da pista de inércia aumenta a amplitude e frequência da rigidez e amortecimento de pico do coxim conforme ilustrado nas Figura 12 e Figura 13.

Figura 12: Efeito da área da pista de inércia na rigidez dinâmica de um coxim hidráulico. Adaptado de (LEE, CHOI e HONG, 1994).

Figura 13: Efeito da área da pista de inércia no amortecimento de um coxim hidráulico. Adaptado de (LEE, CHOI e HONG, 1994).

Os efeitos do desacoplador foram estudados por (CORCORAN e TICKS, 1984). Em seu trabalho, um estudo dos efeitos da folga da membrana que separa o fluído existente no coxim. O aumento da folga torna o desempenho do coxim hidráulico similar ao de um coxim elastomérico. A diminuição dessa folga aumenta a rigidez e o amortecimento oferecido pelo coxim, conforme mostrado na Figura 14.

Figura 14: Efeito da folga da membrana na rigidez dinâmica do coxim hidráulico. Adaptado de (CORCORAN e TICKS, 1984).

2.3.3 Coxim Semi-ativo e Ativo

Mesmo com o melhor desempenho demonstrado pelo coxim hidráulico, (USHIJIMA, TAKANO e KOJIMA, 1988) mencionam em seu trabalho que o coxim hidráulico com desacoplador apresenta bom desempenho para entradas vibratórias senoidais simples, com apenas uma frequência dominante, porém para entradas complexas com diversas frequências vibratórias, o projeto desses sistemas requer uma solução de compromisso onde o sistema é ajustado para resolver um problema de vibração particular.

O controle de vibração ativo, ou semi-ativo, também denominado por (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999) como adaptativo, é uma técnica que tem sido aplicada no projeto de sistemas de isolamento com o intuito de resolver os aspectos limitantes presentes nos sistemas convencionais. Segundo (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999), no sistema semi-ativo, um ou mais parâmetros são controlados para ajustar a resposta dinâmica do sistema. A ideia básica é dissipar a energia vibratória através da mudança dos parâmetros dinâmicos do coxim, como por exemplo, o seu amortecimento. O controle do sistema semi-ativo é aberto e problemas de instabilidades não surgem, pois a energia vibratória está sendo dissipada.

Um típico sistema de controle semi-ativo é apresentado por (SHOURESHI e GRAF, 1986), que relata em seu trabalho exemplos de sistemas de controle para rigidez e amortecimento de coxins. O coxim apresentado em seu trabalho é baseado em um coxim hidráulico que possui um sangrador. A frequência de ressonância do coxim é controlada pela alteração da rigidez de mola do coxim através da alteração da pressão interna do fluido, e o

amortecimento através das restrições oferecidas pelos orifícios. Fluidos eletro-reológicos, que também tiveram suas características exploradas para aplicações de coxins, como descrito nos trabalhos de (USHIJIMA, TAKANO e TAKESHI, 1988; LPETEK, GOUDIE e BOYLE, 1988; USHIJIMA, TAKANO e KOJIMA, 1988; MORISHITA e MITSUI, 1992; USHIJIMA e KUMAKAWA, 1993; SWANSON, 1993), contribuíram bastante para esse conceito de coxim semi-ativos, por apresentarem rápida mudança de sua viscosidade quando submetidos a um campo elétrico. Coxins semi-ativos são empregados na solução de problemas de baixas frequências pelas características dissipativas que são requeridas para a solução desse problema.

Nos sistemas ativos, forças de controle são geradas por atuadores ativamente controlados para suprimir a transmissão das forças vibratórias impostas ao sistema, o que equivale a dizer que energia deve ser fornecida para anular a energia vibratória transmitida ao coxim. Um coxim ativo típico consiste de um coxim passivo (elastomérico ou hidráulico), um atuador, um sensor e um controlador, em geral eletrônico conforme exposto por (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999).

O atuador provê a força dinâmica e deve ter tempo de resposta compatível com o tempo do sinal do controlador. O sensor pode ser um acelerômetro ou sensor de força e é responsável por fornecer o sinal ao controlador, que irá ajustar a amplitude e fase do sinal do atuador, com o objetivo de minimizar a resposta do sensor. Um exemplo de sistema de controle de vibrações ativo é apresentado por (HAGINO, FURUISHI, *et al.*, 1986). Em seu estudo, um atuador eletromagnético é responsável por gerar as forças dinâmicas contrárias às forças vibratórias. Nesse exemplo o atuador está separado dos coxins o que não representa uma condição tão efetiva quanto um sistema onde o atuador e coxim estão unidos.

No trabalho apresentado por (MULLER, WELTIN, *et al.*, 1994), os autores propõem um coxim ativo baseado num coxim hidráulico combinado com um atuador eletromagnético para isolar vibrações em alta frequência. No início da década de 1990, coxins ativos foram desenvolvidos com atuadores piezoelétricos (USHIJIMA e KUMAKAWA, 1993). Coxins ativos podem ter elevada rigidez em frequências mais baixas e podem ser ajustados para terem baixa rigidez em faixas de frequências mais elevadas fornecendo melhor isolamento, o que permite motores com maiores níveis de vibração (SWANSON, 1993).

Coxins ativos requerem sensores e unidades controladoras, logo se comparado com coxins passivos, resultam em maior massa e custo para o veículo, além de terem confiabilidade reduzida conforme relatado por (RIVIN, 1985). Coxins ativos foram considerados a próxima geração de coxins no trabalho de (SWANSON, 1993). Essa

afirmação foi feita no início da década de 1990, porém coxins passivos ainda dominam as aplicações automotivas atualmente.

2.4 PROJETO DE COXINS

Como já abordado anteriormente, uma das funções do sistema de isolamento do motor é de atenuar as forças oscilatórias geradas pelo motor. Para tal, o conjunto propulsor é montado sobre isoladores ou coxins, que em sua maioria são confeccionados de material elastomérico e atuam como molas capazes de absorver parte da vibração oriunda do motor.

Em geral, o projeto de sistemas de isolamento se resume em determinar a quantidade de isoladores ou coxins, suas posições e características elásticas. Essas variáveis dependem do tipo de instalação do motor, de suas características inerciais e dinâmicas, e das particularidades que ambiente onde o motor está sendo instalado oferece ao projeto. A combinação desses fatores são os elementos que determinarão as características vibratórias do sistema e como essas vibrações serão transmitidas à estrutura do veículo. O custo do sistema também é um fator muito importante a ser considerado.

2.4.1 Regras Gerais

Percebeu-se na bibliografia pesquisada que diversos autores utilizaram em seus trabalhos métodos ou diretrizes para projetar o sistema de isolamento. Os trabalhos de (MORISH, 1958; HARTOG, 1956; TIMPNER, 1965) propuseram que os coxins deveriam estar localizados no centro de percursão do motor para minimizar os esforços transmitidos ao motor pelos coxins. Baseado no trabalho de (CREDE, 1951), TIMPNER propões que o eixo elástico do sistema de isolamento deveria ser coincidente com a linha de torque neutro. Tal proposta também foi utilizada nos trabalhos de (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN, 1983; BERNUCHON, 1984; GECK e PATTON, 1984; ARAI, KUBOZUKA e GRAY, 1993). A busca pela separação modal também foi encontrada nos trabalhos de (TIMPNER, 1965; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN, 1983; BERNUCHON, 1984; GECK e PATTON, 1984; ARAI, KUBOZUKA e GRAY, 1993).

A forma como o motor é instalado no veículo determina a aplicação dessas regras. A seguir é apresentado duas formas típicas de instalação do motor no veículo.

2.4.1.1 Motor Longitudinal

A Figura 15 ilustra um exemplo de posicionamento dos coxins para uma instalação longitudinal. O coxim instalado na frente do motor é chamado de coxim frontal ou coxim do

motor. O coxim instalado na transmissão é chamado de coxim traseiro ou coxim da transmissão.

Figura 15: Esquema de posicionamento dos coxins para uma instalação longitudinal. Adaptado de (TIMPNER, 1965)

Os primeiros estudos a respeito desse método de instalação, sugeriram que a posição ideal de instalação dos coxins seria no centro de percussão, do termo em inglês *center of percussion* conforme exposto por (MORISH, 1958; HARTOG, 1956; TIMPNER, 1965).

Segundo (TIMPNER, 1965), um corpo rígido livre no espaço quando submetido a uma força oscilatória aplicada fora do centro de gravidade, apresentará translação e rotação. O centro ao redor do qual o corpo oscila é chamado de centro de percussão da particular força e localização.

Considerando que centros de percussão são recíprocos, TIMPNER, (1965) propôs que o coxim dianteiro seja localizado no centro de percussão do coxim traseiro para minimizar as forças de reação nos coxins, quando perturbações são aplicadas nos mesmos, propondo a seguinte expressão:

$$A \cdot B = \frac{I_y}{m} \quad (2.2)$$

onde A e B representam a distância dos coxins em relação ao centro de gravidade do motor (ver Figura 15), I_y o momento de inércia em torno do eixo principal e m a massa do conjunto motor e transmissão.

Antes de abordar uma segunda prática de projeto também relatada por (TIMPNER, 1965), é necessário definir-se o significado de linha de torque neutro e linha elástica.

Conforme apresentado por (TIMPNER, 1965) e baseado no trabalho de (CREDE, 1951). O autor afirma que para um corpo suspenso por molas, se uma força é aplicada ao longo de seu eixo elástico, apenas translação ocorre como resultante da força aplicada. Da mesma forma, se um momento é aplicado em torno desse eixo, o corpo apenas rotaciona. Essa característica é também conhecida por desacoplamento da linha elástica ou método da focalização.

Segundo (CREDE, 1951), a posição do eixo elástico depende da localização, orientação e rigidez das molas que suportam o corpo. Três casos para o posicionamento da linha elástica considerando diferentes orientações e rigidez dos suportes elásticos foram explorados por TIMPNER em 1965, e os resultados desses estudos estão ilustrados na Figura 16. Seus estudos são baseados no trabalho de CREDE, de 1951, que determina para um corpo suspenso por duas molas, a relação das coordenadas do centro elástico com as constantes das molas que sustentam o corpo.

Figura 16: Relação da posição da linha elástica e constantes de mola. Adaptado de (CREDE, 1951)

Para as relações expressas na Figura 16, P e Q representam os eixos principais dos coxins e k_p e k_q respectivamente as rigidezes das molas nessas direções para o caso 1 e caso 2. Para o caso 3, P_1 e P_2 representam os eixos principais dos coxins e k_{p1} e k_{p2} respectivamente as rigidezes das molas nessas direções.

Se um torque oscilante é aplicado em um corpo em torno de um eixo paralelo a um dos eixos principais, o corpo oscila em torno desse eixo principal, mas se o torque aplicado não é paralelo a um dos eixos principais, então o movimento se decompõe nas três direções

principais. O movimento resultante se dá em torno de um eixo que é denominado linha de torque neutro. Em relação à linha de torque neutro, sua posição depende das magnitudes dos eixos principais de inércia e de suas localizações relativas ao eixo de manivelas do motor.

Na Figura 17 é possível visualizar um exemplo de linha de torque neutro.

Figura 17: Linha de torque neutro. Adaptado de (TIMPNER, 1965)

Uma característica da linha de torque neutro é que ela sempre passa pelo centro de gravidade do corpo. Segundo (TIMPNER, 1965), os cossenos diretores que definem a linha de torque neutro, para um torque exercido em torno da árvore de manivelas, podem ser calculados através das expressões:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \frac{I_1 \cos \alpha_2}{I_2 \cos \alpha_1} + \cos \alpha_3 \frac{I_1 \cos \alpha_3}{I_3 \cos \alpha_1} \quad (2.3)$$

$$\cos \beta = \cos \beta_1 + \cos \beta_2 \frac{I_1 \cos \alpha_2}{I_2 \cos \alpha_1} + \cos \beta_3 \frac{I_1 \cos \alpha_3}{I_3 \cos \alpha_1} \quad (2.4)$$

$$\cos \gamma = \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 \frac{I_1 \cos \alpha_2}{I_2 \cos \alpha_1} + \cos \gamma_3 \frac{I_1 \cos \alpha_3}{I_3 \cos \alpha_1} \quad (2.5)$$

Onde $\cos \alpha_i$, $\cos \beta_i$ e $\cos \gamma_i$ são os cossenos diretores dos eixos principais de inércia relativos aos eixos do sistema de coordenadas x,y,z respectivamente, sendo x o eixo coincidente ao eixo de rotação da árvore de manivelas e z o eixo vertical e perpendicular ao eixo x.

Uma vez abordados os conceitos de linha de torque neutro e linha elástica, a segunda prática de projeto relatada por TIMPNER (1965), é que o eixo elástico do sistema de isolamento seja coincidente com a linha neutra de torque. Uma vez que ambas as linhas se tornam coincidentes, para um torque exercido na árvore de manivelas, o motor rotaciona apenas em torno da linha elástica minimizando os esforços exercidos nos coxins. Outros autores como (BRACH, 1997; HARRIS, 1995) também consideram o posicionamento do eixo elástico sobre a linha de torque neutra como o ponto de partida para o projeto de sistemas de isolamento, porém no trabalho publicado por KIM em 1991, o autor afirma que o desacoplamento de um motor real é sempre parcial quando o corpo é assimétrico e as posições dos coxins são arbitrárias.

Outra prática buscada no projeto de sistemas de isolamento é a separação modal. Nos trabalhos de (TIMPNER, 1965; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; GECK e PATTON, 1984; RIVIN, 1985) é possível identificar esse tipo de prática. Também é conhecido como “desacoplamento modal”, ou “modo puro”. Um corpo rígido no espaço possui seis modos naturais de vibrar. Quando um carregamento oscilatório é aplicado em uma determinada direção desse corpo, é esperado que a resposta ocorra na mesma direção do carregamento.

Porém, existem casos em que a resposta não ocorre apenas na direção do carregamento. Isso acontece quando os modos de corpo rígido não são puros ou estão acoplados. O acoplamento dos modos de corpo rígido aumenta o nível de esforços presentes no coxim por adicionar forças nas direções onde o modo apresenta o acoplamento. Por essa razão os projetistas buscam alcançar o maior nível de desacoplamento dos modos do motor suspenso.

Segundo (TIMPNER, 1965), o requisito para se obter a separação modal ideal é tornar o centro elástico dos coxins coincidentes com o centro de gravidade motor. Para uma suspensão com um único isolador, a posição ideal fatalmente será dentro do corpo, mas para uma aplicação em motores, a disposição e o número de isoladores permite direcionar o centro elástico do corpo conforme já apresentado na Figura 16.

Ainda no trabalho apresentado por TIMPNER (1965), é possível encontrar uma proposição analítica para garantir o desacoplamento do modo vertical com o modo de arfagem. O autor sugere tornar o produto das constantes elásticas dos isoladores frontais com a distância ao centro de gravidade, igual ao produto similar do isolador traseiro.

2.4.1.2 Motor transversal – Sistema pendular

Como já mencionado anteriormente, motores com instalação transversal se popularizaram no final da década de 1970 devido à busca por veículos mais eficientes. Os isoladores recebem nomes conforme sua posição. O isolador localizado logo acima da transmissão do veículo é denominado de isolador ou coxim da transmissão. O coxim oposto ao coxim da transmissão é denominado coxim do motor por estar montado junto ao bloco do motor. Ambos têm a função de suportar o conjunto do motor. Os demais coxins são denominados coxins restritores de torque por terem a função apenas de restringir o movimento do motor devido torque por ele exercido. Essa denominação é baseada na nomenclatura adotada pelas montadoras e fornecedores dos isoladores.

As instalações mais comuns possuem apenas um coxim restritor de torque, geralmente localizado na porção traseira do motor, porém algumas aplicações requerem um coxim restritor adicional geralmente localizado na porção dianteira do motor. A disposição dos coxins explicada acima é ilustrada na Figura 18.

Figura 18: Esquema de posicionamento dos isoladores numa instalação transversal

Esse conceito é muito semelhante ao *Floating Power*, porém devido ao motor estar paralelo com o eixo que movimenta as rodas, o efeito de rolagem, devido à reação ao torque, é muito mais pronunciado e tal fato torna a tarefa de isolamento desse sistema mais complexa conforme citado no trabalho de (GECK e PATTON, 1984).

As práticas de desacoplamento da linha de torque neutro e da separação modal também são aplicadas no sistema transversal, de acordo com (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN, 1983; BERNUCHON, 1984; GECK e PATTON, 1984; ARAI, KUBOZUKA e GRAY, 1993).

JOHNSON e SUBHEDAR (1979), sugeriram para o projeto de motores transversais um posicionamento para os modos do motor conforme apresentado na Figura 19.

Figura 19: Posicionamento dos modos do motor transversal sugerido por (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979).

2.4.2 Modelos

O modelo de corpo rígido com seis graus de liberdade foi utilizado pelos autores SCHIMITT e LEINGANG (1975), JOHNSON e SUBHEDAR (1979), BERNARD e STARKEY (1983), RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN (1983), GECK e PATTON (1984), FORD (1985), OKUMA *et al.* (1989), ARAI, KUBOZUKA e GRAY (1993), SURESH, SHANKAR e BOKIL (1994), KIM, JHO e YIM (1994) em seus trabalhos.

É apresentado na Figura 20 o sistema de orientação utilizado no modelo matemático para um motor disposto transversalmente.

Figura 20: Sistema de coordenadas do modelo de corpo rígido do motor com seis graus de liberdade.
Adaptado de (GECK e PATTON, 1984)

O trabalho de (RIVIN, 1985) explora um modelo com doze graus de liberdade. Nesse modelo, a carroceria do veículo também é considerada um corpo rígido suspenso por molas que representam os pneus e a suspensão do veículo. O motor também está suspenso por molas, porém tais molas estão conectadas à carroceria ao invés de estarem conectadas a um referencial fixo. Em nenhum trabalho foi encontrado uma comparação direta entre os resultados obtidos com tais modelos.

Para o modelo com n graus de liberdade, sua caracterização se dá pela determinação das n equações de movimento representadas de forma matricial a seguir:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2.6)$$

onde $\{\ddot{X}\}$, $\{\dot{X}\}$, $\{X\}$ são respectivamente os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do centro de gravidade do motor, $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é a matriz de amortecimento viscoso, $[K]$ é a matriz de rigidez e $\{F\}$ é o vetor de força e momentos.

As posições dos isoladores, as constantes elásticas e de amortecimento são incluídas nas matrizes $[K]$ e $[C]$, e dessa forma é possível determinar a influência da posição, orientação, constantes elásticas e de amortecimento na resposta do sistema. O modelo matemático proposto neste trabalho será descrito com maiores detalhes na seção 4 dessa dissertação.

2.4.3 Otimização

Segundo (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999), a função objetivo é o ponto fundamental da otimização do sistema de isolamento. Os trabalhos de (ARAI, KUBOZUKA e GRAY, 1993; BERNARD e STARKEY, 1983; GECK e PATTON, 1984; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979) buscam otimizar a separação dos modos bem como a posição de modos críticos e o modo de rolagem lateral no caso do motor transversal. A separação modal apresentada na Figura 19 proposta no trabalho de (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979) é resultado de seus estudos relativos à otimização dos modos de um motor transversal de quatro cilindros. Em seu modelo, é proposto que a frequência do modo vertical, rolagem lateral e rolagem vertical do motor sejam as menores possíveis, para favorecer o isolamento das excitações causadas pelo torque do motor quando em funcionamento.

GECK e PATTON (1984), propuseram em seu trabalho, também de otimização de um motor transversal, ao contrário de (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979), que a frequência do modo vertical do motor fosse a mais alta possível para favorecer o isolamento das excitações de impacto causadas pelas entradas que o tipo de solo em que o veículo está se movimentando lhe proporciona.

Conforme citado por (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999) em seu trabalho, esses dois exemplos demonstram que os objetivos de isolamento do torque e de isolamento do impacto são conflitantes, conforme já fora citado anteriormente, e que consequentemente a seleção dos modos de um motor suspenso por isoladores elastoméricos é um compromisso resultante das características privilegiadas na função objetivo a ser otimizada.

O trabalho publicado por (BERNARD e STARKEY, 1983) buscou otimizar o sistema de isolamento com funções objetivos que afastam os modos naturais da faixa de frequência de interesse, com base no fato de que a resposta de sistemas dinâmicos próximos de suas frequências naturais são elevadas impondo maiores deslocamentos nos coxins, maiores forças e menor isolamento. Alguns trabalhos, como o de (SWANSON, 1993) buscaram minimizar a força transmitida pelo coxim na busca de um sistema otimizado. Essas duas funções objetivos, separação modal e isolamento foram as mais encontradas na literatura pesquisada.

Uma vez determinada a função objetivo, (YU, NAGANATHAN e DUKKIPATI, 1999) destacaram duas formas de limitar a busca das variáveis de design durante o processo de otimização. A primeira delas através do estabelecimento de limites, inferior e superior, para as variáveis de otimização. Num sistema de isolamento, limites são muito comuns. A localização e orientação dos coxins sempre são limitadas pelo espaço disponível no

compartimento do motor. A segunda forma de restrição das variáveis de otimização é estabelecer restrições indiretas, como selecionar valores específicos para as frequências de certos modos do motor. Dada a não linearidade imposta por esses tipos de restrições, os métodos de otimização utilizados são em sua maioria não lineares, para garantir melhores resultados.

A maioria dos trabalhos de otimização pesquisados são limitados à otimização de coxins elastoméricos linearizados, com exceção do trabalho de (SURESH, SHANKAR e BOKIL , 1994) que buscou a otimização de coxins hidráulicos, considerando propriedades de amortecimento dependentes da frequência. As não linearidades da constante de rigidez não foram exploradas pelos autores.

3 FORÇAS

As forças impostas ao sistema de isolamento podem ser classificadas em forças externas, causadas pelo movimento do veículo e decorrentes da excitação que a pista impõe no veículo, e forças internas, geradas pelo conjunto propulsor. As forças internas podem ser decompostas em dois grupos, sendo o primeiro grupo, o das forças geradas pela reação do motor ao torque que o mesmo está entregando ao veículo, para uma determinada condição de uso.

Em geral, essas forças são de caráter transitório, dependem do tipo de manobra que o usuário está impondo e geralmente possuem grande amplitude, causando grande movimentação nos coxins, o que acaba por determinar sua vida útil.

O segundo grupo de forças internas são de caráter oscilatório, dependem da dinâmica dos componentes internos do motor, tais como os pistões, as bielas e a árvore de manivelas, e geralmente possuem pequena amplitude, servindo apenas como fonte de ruídos e vibrações.

O intuito desse trabalho é determinar um sistema de isolamento com foco nas forças oscilatórias para uma condições estacionária desconsiderando a porção decorrente da pista.

3.1 O SISTEMA BIELA E MANIVELA

Por ser a principal fonte de esforços dinâmicos que surgem em um motor de combustão interna, entender e determinar as forças atuantes nesse tipo de mecanismo é fundamental para o desenvolvimento adequado de um sistema de isolamento do motor. O mecanismo biela-manivela é utilizado há muitos anos pela indústria e diversos são os estudos a respeito desse mecanismo. O presente trabalho baseou equacionamento de todas as forças apresentadas a seguir na teoria apresentada por (HARTOG, 1956; SHIGLEY, 2003; SELIM, 2010).

O mecanismo biela-manivela é responsável por transformar movimento linear alternativo em movimento rotativo. No caso de um motor a combustão interna, a adição de um pistão ao extremo da biela permite converter a energia liberada pela combustão em movimento rotativo na árvore de manivela (SELIM, 2010). A Figura 21 ilustra o mecanismo biela-manivela com um pistão na extremidade da biela.

Figura 21: Mecanismo pistão, biela-manivela.

Segundo HARTOG (1956), as vibrações geradas pelo sistema biela-manivela são causadas pelas acelerações periódicas das peças em movimento. Analisando a cinemática do sistema biela-manivela posicionado na direção vertical, tem-se que o pistão experimenta aceleração alternada na direção vertical, que está associada à força de combustão responsável por movimentar o pistão para baixo.

Assumindo-se que o movimento na direção longitudinal (paralela ao eixo de rotação da árvore de manivelas) é desprezível, tem-se que a biela e a manivela experimentam apenas acelerações laterais e verticais, e logo as forças resultantes do movimento do sistema biela-manivela pertencem a um plano.

Numa configuração multi-cilindros, a resultante das forças presentes nos planos dos cilindros pode gerar momentos em outros planos do motor. Definindo-se um sistema de coordenadas para um motor de combustão interna conforme ilustrado na Figura 22, tem-se que os esforços resultantes gerados pelo funcionamento do motor são duas forças e três momentos.

O momento atuante no plano YZ é responsável pela rolagem¹ do motor (rotação ao redor de X), o momento atuante no plano XZ é responsável pela arfagem² (rotação ao redor de Y) e o momento atuante no plano XY é responsável pela guinada³ (rotação ao redor de Z).

¹ Nomenclatura em inglês: “*roll*”

² Nomenclatura em inglês: “*pitch*”

³ Nomenclatura em inglês: “*yaw*”

Figura 22: Esforços resultantes gerados pelos componentes internos do motor.

3.2 FORÇAS PRESENTES NO MECANISMO BIELA-MANIVELA

3.2.1 Forças provenientes da combustão

Segundo SELIM (2010), a força causada pela combustão possui a maior contribuição em magnitude para o sistema biela-manivela. Essa força é proveniente da queima da mistura ar-combustível, que causa uma variação de pressão dentro da câmara de combustão do motor. A pressão de combustão é uma variável temporal e depende da posição angular da árvore de manivelas ωt , onde ω representa a velocidade angular. A Figura 23, extraída de (SELIM, 2010), ilustra um exemplo de curva de pressão em função do ângulo da árvore de manivelas.

Figura 23: Curva de pressão de combustão em função da posição angular da árvore de manivelas para um motor qualquer. Fonte: (SELIM, 2010)

No sistema biela-manivela, a força de combustão é responsável por gerar apenas momento em torno do eixo de rotação da árvore de manivelas (HARTOG, 1956). Considerando-se o sistema pistão, biela e manivela, conforme ilustrado na Figura 24, dada a força P devido à pressão na câmara de combustão e a posição vertical do cilindro z em relação ao ponto O , o momento experimentado pelo bloco do motor em torno da árvore de manivelas é dado por:

$$M_P = P \tan \phi z \quad (3.1).$$

A árvore de manivelas experimenta o mesmo momento, porém em sentido contrário. O diagrama apresentado na Figura 24 ilustra as forças atuantes no sistema, sendo ℓ o comprimento da biela, r o comprimento da manivela, y o braço de alavanca do momento M_P e ϕ a posição angular da biela.

Figura 24: Sistema biela-manivela de 1 grau de liberdade com mancais rígidos

3.2.2 Forças inerciais

As forças inerciais estão relacionadas com as acelerações que os componentes internos do motor experimentam devido as suas massas. Organizando os componentes internos do motor pelo tipo de movimento que experimentam, tem-se o pistão exercendo um movimento alternativo, a manivela exercendo um movimento rotativo e a biela exercendo um movimento

elíptico. É comum referir-se aos componentes que exercem movimento alternativo como “massas reciprocativas”.

Considerando-se o sistema biela-manivela ilustrado na Figura 24 e um referencial solidário a carcaça do motor, o pistão realiza um movimento alternativo de translação no eixo z . A aceleração do pistão depende apenas da posição angular da árvore de manivelas ωt e pode ser determinada conforme a equação abaixo.

$$z = r \cdot \cos \omega t + \ell \cdot \cos \phi \quad (3.2)$$

Com base na geometria do mecanismo, é possível estabelecer uma relação entre os ângulos ωt e ϕ e substituir na Eq. (3.2).

$$z = r \cdot \cos \omega t + \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \omega t} \quad (3.3)$$

Segundo HARTOG (1956), devido às características construtivas dos motores, a relação (r/ℓ) entre o comprimento da biela e o comprimento da manivela é próxima da razão 1:4, logo o radical possui a forma $\sqrt{1 - \delta}$, onde $\delta \ll 1$. Expandindo-se o radical em uma série de potências, considerando-se apenas o primeiro termo e utilizando-se algumas identidades trigonométricas, é possível aproximar a Eq. (3.3) para:

$$z \approx \ell + r \left[1 + \cos \omega t + \frac{r}{4\ell} \cos 2\omega t \right] - \left(r + \frac{r^2}{4\ell} \right) \quad (3.4)$$

com erro menor que 0,05%.

Diferenciando-se o deslocamento do pistão é possível obter a sua velocidade e aceleração.

$$\dot{z} \approx r\omega \left[\sin \omega t + \frac{r}{2\ell} \sin 2\omega t \right] \quad (3.5)$$

$$\ddot{z} \approx r\omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r}{\ell} \cos 2\omega t \right] \quad (3.6)$$

Conforme denominado por (HARTOG, 1956), o termo “primário” varia com a mesma frequência da árvore de manivelas e o termo “secundário” varia com o dobro dessa frequência.

Alguns motores possuem a linha de translação do pistão deslocada do centro de giro da árvore de manivelas e a Figura 25 ilustra esse tipo de construção. Essa excentricidade é aplicada no projeto com o intuito de aumentar a relação de alavanca da biela e reduzir o atrito entre o pistão e o cilindro durante a fase de explosão do ciclo, o que melhora a eficiência termodinâmica do motor. O valor de deslocamento ou excentricidade pode chegar a até 20% do comprimento do curso do pistão (SHIN, CUSENZA e SHI, 2004).

SELIM (2010), apresenta em seu trabalho a posição vertical do pistão para esse tipo de construção. No presente trabalho, a excentricidade do pistão foi desprezada para efeito do cálculo dos esforços gerados pelo sistema biela manivela.

Figura 25: Sistema biela-manivela com centro de translação do pistão deslocado.

O cálculo da força inercial exercida pela manivela foi simplificado para o caso de uma massa concentrada equivalente m_c , representando a massa da manivela. Nesse processo o raio de giro da massa equivalente foi aumentado, e para manter o mesmo efeito da força inercial atuante no centro de gravidade, a massa equivalente foi reduzida na proporção inversa à distância do centro de giro.

Figura 26: Massa concentrada equivalente representando a massa da manivela m_c .

O deslocamento vertical da massa equivalente da manivela m_c foi obtido diretamente da Eq. (3.2):

$$z_c = r(1 - \cos \omega t) \quad (3.7)$$

As componentes verticais da velocidade e aceleração são:

$$\dot{z}_c = r\omega \sin \omega t \quad (3.8)$$

$$\ddot{z}_c = r\omega^2 \cos \omega t \quad (3.9)$$

De forma análoga, as componentes horizontais são:

$$y_c = -r \sin \omega t \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_c = -r\omega \cos \omega t \quad (3.11)$$

$$\ddot{y}_c = r\omega^2 \sin \omega t \quad (3.12)$$

A biela possui um movimento complexo, a extremidade conectada ao pistão exerce um movimento de translação, já a outra extremidade, conectada à manivela, um movimento de rotação. Os demais pontos da biela, por sua vez, exercem um movimento elíptico.

Muitos autores, tais como (MENDES, 2003), (SELIM, 2010) e (SNYMAN, 1995), utilizam uma abordagem simplificada, que não compromete a precisão dos resultados finais, assumindo que a porção de massa da biela alocada entre as extremidades é pequena se comparada com as massas das extremidades conforme já citado por (HARTOG, 1956).

Tal abordagem consiste em dividir a massa da biela em duas partes, uma localizada no pino do pistão e a outra localizada na manivela. A distribuição é feita com base na relação das distâncias entre o pino do pistão e o pino da manivela em relação ao centro de gravidade da biela, conforme ilustrado na Figura 27.

Figura 27: Localização do centro de gravidade da biela.

Considerando os parâmetros ilustrados na Figura 27, a massa da biela concentrada nas extremidades pode ser calculada pelas expressões a seguir.

$$m_{b,A} = m_b \frac{\ell_b}{\ell} \quad (\text{Massa da biela concentrada no pino da manivela}) \quad (3.13)$$

$$m_{b,B} = m_b \frac{\ell_a}{\ell} \quad (\text{Massa da biela concentrada no pino do pistão}) \quad (3.14)$$

Dividir a massa da biela em duas partes permite agrupar as massas do sistema em dois grupos, os quais são definidos pelo tipo de movimento que executam. As massas executando movimento de translação são denotadas por massas reciprocativas m_{rec} , e as massas executando movimento de rotação são denotadas por massas rotativas m_{rot} . Considerando m_p como sendo a massa do pistão, as massas reciprocativas e rotativas são:

$$m_{\text{rec}} = m_p + m_{b,B} \quad (3.15)$$

$$m_{\text{rot}} = m_c + m_{b,A} \quad (3.16)$$

Utilizando as equações (3.6), (3.9), (3.12), (3.13) e (3.14) é possível determinar a força vertical e horizontal total de um cilindro:

$$F_Z = (m_{\text{rec}} + m_{\text{rot}})r\omega^2 \cos \omega t + m_{\text{rec}} \frac{r^2}{\ell} \omega^2 \cos 2\omega t \quad (3.17)$$

$$F_Y = m_{\text{rot}}r\omega^2 \sin \omega t \quad (3.18)$$

As forças de desbalanceamento laterais dadas pela Eq. (3.18) são eliminadas adicionando contrapesos à manivela. A adição de contrapesos pode até mesmo tornar negativa a massa rotativa do mecanismo (massa do contrapeso é maior que a massa da manivela).

A Figura 28 ilustra o contrapeso presente em uma manivela.

Figura 28: Contrapeso adicionado para balancear massa rotativa.

As massas reciprocativas, entretanto, não podem ser balanceadas por contrapesos. Sendo assim, a força de desbalanceamento vertical dada pela Eq. (3.17) está sempre presente no mecanismo biela-manivela e por essa razão é dito que o motor monocilíndrico é naturalmente desbalanceado.

3.3 Forças atuantes no motor

Os esforços são condicionados ao número de cilindros que o motor possui e ao tipo de ciclo que o motor executa (ciclo de dois ou quatro tempos).

A Figura 29 ilustra a árvore de manivelas de um motor com quatro cilindros, que foi adotado neste trabalho para o cálculo dos esforços. Os ângulos dos cilindros 2 e 3 estão defasados de 180° em relação aos ângulos dos cilindros 1 e 4.

Figura 29: Exemplo de árvore de manivelas de um motor quatro cilindros com sequência de ângulos $0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$

Considerando ainda que os cilindros são igualmente distribuídos ao longo da árvore de manivelas, que todos possuem a mesma massa e que a massa rotativa é devidamente balanceada, é válido o seguinte diagrama de forças verticais, definidas pela Eq. (3.17).

Figura 30: Diagrama de esforços verticais de um motor quatro cilindros com sequência de ângulos $0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$.

Pelo diagrama acima, a resultante vertical das forças é proveniente das componentes secundárias e é igual a:

$$F_z = 4m_{\text{rec}} \frac{r^2}{\ell} \omega^2 \cos 2\omega t \quad (3.21).$$

As forças verticais ainda são responsáveis por gerar o momento responsável pela arfagem. O momento de tais forças depende do polo adotado, o qual, para o presente trabalho, é o “CG” do motor. O diagrama de esforços é apresentado na figura a seguir.

Figura 31: Diagrama de forças para cálculo do momento em torno do CG do motor responsável pela arfagem.

Para os esforços primários, o momento resultante em torno do CG é nulo, enquanto que para os esforços secundários, o momento resultante é:

$$M_{XZ} = 2(3d_x - 2x_{CG})m_{rec} \frac{r^2}{\ell} \omega^2 \cos 2\omega t \quad (3.22).$$

Dessa forma, a configuração quatro cilindros em linha com sequência $0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$ é balanceada para esforços primários (forças verticais e momentos) e desbalanceada para esforços secundários.

Procedendo de maneira similar para outras configurações de cilindros, é possível estabelecer o quadro resumo abaixo:

Tabela 1: Resumos das forças de desbalanceamento para configurações multi-cilindros

N.º de cilindros	Sequência de ângulos	Força Vertical		Momento	
		Primária	Secundária	Primário	Secundário
3	$0^\circ - 120^\circ - 240^\circ$	Balanceado	Balanceado	Desbalanceado	Desbalanceado
4	$0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$	Balanceado	Desbalanceado	Balanceado	Desbalanceado
6	$0^\circ - 120^\circ - 240^\circ - 240^\circ - 120^\circ - 0^\circ$	Balanceado	Balanceado	Balanceado	Balanceado

Através da adição de balanceadores dinâmicos, é possível reduzir ou até mesmo neutralizar o desbalanceamento causado pelas massas reciprocativas. No trabalho de (SELIM,

2010) é descrito um balanceador dinâmico composto por duas massas idênticas rotacionando em sentidos diferentes.

Para os estudos realizados neste trabalho, foi considerada a configuração sem balanceador dinâmico.

Assumir que a massa rotativa é devidamente balanceada implica que a componente lateral das forças dos cilindros dada pela Eq. (3.18) é nula.

Dessa forma não existem forças laterais inerciais para serem calculadas, entretanto, forças laterais ainda estão presentes no motor devido à força de combustão, conforme mostrado no diagrama de forças da Figura 24.

As forças laterais dependem diretamente da posição da árvore de manivelas. Considerando que todos os cilindros explodem com a mesma intensidade e mantem a mesma curva de pressão, a força lateral é dada por:

$$F_Y = \sum_{i=1}^4 P(\omega t + \varphi_i) \tan \left[\sin^{-1} \left(\frac{r}{\ell} \sin \omega t + \varphi_i \right) \right] \quad (3.23),$$

onde $P(\omega t + \varphi_i)$ é a força devido a pressão no cilindro e φ_i é o ângulo de fase definido pela sequência de ignição.

Supondo uma sequência de ignição “1-3-4-2”, ou seja, o cilindro 3 tem a curva de pressão defasada de 180° em relação ao cilindro 1; o cilindro 4 defasada de 360° e o cilindro 2 defasada de 540° , os ângulos de fase φ_i são:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0^\circ \\ \varphi_2 &= 540^\circ \\ \varphi_3 &= 180^\circ \\ \varphi_4 &= 360^\circ. \end{aligned}$$

O momento em torno do centro de gravidade presente no plano XY responsável pela guinada é:

$$M_{XY} = \sum_{i=1}^4 d_{Xi} P(\omega t + \varphi_i) \tan \left[\sin^{-1} \left(\frac{r}{\ell} \sin \omega t + \varphi_i \right) \right] \quad (3.24),$$

onde d_{Xi} é a distância do centro do cilindro em relação ao centro de gravidade do motor.

Conforme ilustrado na Figura 32, as distâncias d_i são:

$$d_{xi} = (4 - i)d - x_{CG} \quad (3.25).$$

Figura 32: Diagrama de forças laterais para cálculo do momento no plano XY em torno do CG.

O momento em torno do centro de gravidade presente no plano YZ responsável pela rolagem é causado também pelas forças laterais. Partindo das Eq. (3.2) e Eq. (3.23), o momento em torno do centro de gravidade do motor é:

$$M_{YZ} = \sum_{i=1}^4 d_{zi} P(\omega t + \varphi_i) \tan \left[\sin^{-1} \left(\frac{r}{\ell} \sin \omega t + \varphi_i \right) \right] \quad (3.26),$$

onde d_{zi} é distância do centro do pino do pistão ao centro de gravidade conforme ilustrado na Figura 33.

$$d_{zi} = z_i - z_{CG} \quad (3.27)$$

Figura 33: Distância do centro do pino ao centro de gravidade d_z

4 MODELOS PARA O CÁLCULO DO SISTEMA DE ISOLAMENTO

A maioria dos modelos analíticos utilizados para estudar o sistema de isolamento do motor possui 6 graus de liberdade (SCHIMITT e LEINGANG, 1975), (JOHNSON e SUBHEDAR, 1979) e (GECK e PATTON, 1984). RIVIN (1985) utilizou um modelo com 12 graus de liberdade para otimizar os coxins de um determinado sistema de isolamento.

No trabalho de (WISE e REID, 1984) um modelo com 16 graus de liberdade foi desenvolvido para estudar vibrações em caminhões leves. Esse modelo foi capaz de prever a vibração do motor, cabine e chassis do veículo em operação.

Nos trabalhos de (BRETL, 1993) e (LEE, YIM e KIM, 1995) foi empregado o método de elementos finitos para adicionar flexibilidade à estrutura de suporte do motor e assim estudar os efeitos dos modos da estrutura nos modos do motor. Tais trabalhos mostraram que os modos da estrutura com baixa frequência tem efeito considerável nos modos do motor.

Com base nos trabalhos de (SCHIMITT e LEINGANG, 1975; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; GECK e PATTON, 1984; WISE e REID, 1984; RIVIN, 1985; BRETL, 1993; LEE, YIM e KIM, 1995), os três modelos encontrados com maior frequência nas referências foram replicados nesse trabalho e utilizados para calcular os modos de corpo rígido do motor suspenso.

O sistema de coordenadas definido pela norma SAE J670 foi considerado na elaboração dos modelos. A origem do sistema é definida no CG do veículo e os eixos estão orientados conforme a seguinte figura.

Figura 34: Sistema de coordenadas definido pela norma SAE J670.

Para o desenvolvimento do modelo de 6 graus de liberdade ou “6 GDL”, considerou-se apenas o conjunto motor e transmissão suspenso pelos coxins, os quais foram conectados a

um referencial fixo. A flexibilidade do motor foi desconsiderada, assumindo-se que o mesmo se comporta como um corpo rígido.

No modelo de 6 GDL, o conjunto motor e transmissão é livre para transladar e rotacionar em todas as direções do espaço, ou seja, pode transladar nos eixos longitudinal, lateral e vertical, e rotacionar em torno dos mesmos eixos.

Muitos autores, tais como (SCHIMITT e LEINGANG, 1975; JOHNSON e SUBHEDAR, 1979; GECK e PATTON, 1984), adotaram esse modelo por considerarem que os deslocamentos da porção passiva dos coxins (porção fixada na estrutura do veículo) são desprezíveis se comparados com a porção ativa dos mesmos (porção fixada no motor).

Tal consideração implica na hipótese de que o motor foi totalmente isolado da carroceria ou seja, as vibrações são totalmente absorvidas pelos coxins. Tal hipótese permite simplificar as equações de movimento do sistema.

As rigidezes do coxim foram representadas por um conjunto de três molas lineares, sendo uma mola para cada direção do sistema de coordenadas, desprezando-se as rigidezes torsionais do coxim.

A Figura 35 ilustra a descrição do modelo de 6 GDL citada anteriormente.

Figura 35: Modelo com 6 GDL: motor suspenso foi representado por um corpo rígido e cada coxim representado por um conjunto de três molas lineares.

Para o desenvolvimento do modelo de 12 graus de liberdade ou “12 GDL”, considerou-se o conjunto motor e transmissão suspenso pelos coxins, os quais foram conectados à estrutura do veículo. A flexibilidade do motor e da estrutura do veículo foram desconsideradas, assumindo-se que os mesmos se comportam como corpos rígidos.

No modelo de 12 GDL, tanto o conjunto motor e transmissão quanto a estrutura do veículo são livres para transladar e rotacionar em todas as direções do espaço, ou seja, podem transladar nos eixos longitudinal, lateral e vertical, e rotacionar em torno dos mesmos eixos.

As rigidezes do coxim foram representadas da mesma forma descrita para o modelo de 6 GDL. Também de maneira similar à utilizada para os coxins, adotou-se três molas lineares para representar cada conjunto de pneu mais suspensão do veículo, sendo uma mola para cada direção do sistema de coordenadas.

A representação dos pneus e suspensão por molas lineares pode trazer algumas implicações para os modos de corpo rígido do veículo e por isso a definição das constantes das molas deve ser criteriosa. Em geral o veículo possui modos vertical e *pitch* acoplados com frequências naturais em torno de 1~2Hz (BARBOSA, 2011).

A Figura 36 ilustra o modelo de 12 GDL desenvolvido neste trabalho. O corpo rígido 1 representa a estrutura do veículo e o corpo rígido 2 representa o conjunto motor e transmissão.

Figura 36: Modelo com 12 GDL: carroceria e motor foram representados por corpos rígidos. Cada coxim e conjunto pneu-suspensão foram representados por três molas lineares.

A consideração da estrutura do veículo no modelo de 12 GDL, aumenta a complexidade das equações de movimento, porém permite descartar a hipótese de que o motor está totalmente isolado assumida no modelo de 6 GDL.

Com base nos trabalhos de (BRETL, 1993) e (LEE, YIM e KIM, 1995), foi desenvolvido um modelo onde conjunto motor e transmissão foi representado por um corpo rígido e a estrutura do veículo por um corpo flexível. O método dos elementos finitos foi utilizado para discretizar a estrutura do veículo, e por essa razão foi denominado nesse trabalho por “modelo de elementos finitos”. As rigidezes do coxim no modelo de elemento finitos foram representadas da mesma forma descrita para os modelos de 6 e 12 GDL.

O modelo de elementos finitos possui inúmeros graus de liberdade e permitiu incluir no cálculo do sistema de isolamento as interações que os modos da estrutura do veículo podem trazer para o motor suspenso.

Além da estrutura do veículo, outros sub-sistemas tais como pneu, suspensão, escapamento, semieixos, sistema de direção, bancos e etc, também foram discretizados utilizando o método dos elementos finitos e incorporados no modelo de elementos finitos, adicionando um maior nível de detalhamento do veículo e permitindo explorar os efeitos que outros subsistemas do carro exercem nos modos do motor.

A **Figura 37** ilustra o modelo de elementos finitos elaborado nesse trabalho. O mesmo foi elaborado utilizando o código NASTRAN, e teve a análise modal do sistema de isolamento baseado no método Lanczos.

Figura 37: Modelo de elementos finitos: motor representado por um corpo rígido e demais sistemas do veículo representados por corpos flexíveis.

Um comparativo das resultados modais do conjunto motor e transmissão foi realizado obtidos com os três modelos desenvolvidos nesse trabalho foi realizado. Considerando-se que o tempo empregado na elaboração e solução do modelo de elementos finitos é maior que o tempo empregado elaboração e solução dos modelos de 6 e 12GDL, estabelecer um comparativo entre os resultados dos modelos é conveniente pois permite-se estabelecer um balanço de tempo versus precisão na hora de escolher o modelo a ser empregado no cálculo do sistema de isolamento.

4.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DOS MODELOS DE 6 E 12 GDL

No trabalho de (BARBOSA, 2011), as equações de movimento de um modelo de corpos rígidos com 4 graus de liberdade foram obtidas utilizando o método de Lagrange tal como descrito por (MEIROVITCH, 2001). Em seu trabalho, o autor estabeleceu as funções de energia cinética, potencial e dissipativas com base nos graus de liberdade de cada corpo rígido e nos elementos de conexão entre os corpos.

Em seguida, o autor substituiu as derivadas parciais das funções de energia na expressão de Lagrange dada pela Eq. (4.1) para obter o sistema de equações diferenciais que define o movimento dos corpos.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.1)$$

Baseado no trabalho de (BARBOSA, 2011), as equações de movimento dos modelos de 6 e 12 GDL foram obtidas empregando o método de Lagrange. Para tal, admitiu-se que o sistema vibra nas vizinhanças da configuração de equilíbrio.

As funções de energia cinética, potencial e dissipativa do modelo de 6 GDL foram derivadas das funções de energia do modelo de 12 GDL eliminando-se o corpo rígido que representa a estrutura do veículo. Por essa razão, apenas as funções de energia do modelo de 12 GDL são apresentadas a seguir.

$$T_{x,y,z} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{u}_{1x,y,z}^2 + I_{1x,y,z} \dot{\theta}_{1x,y,z}^2 + m_2 \dot{u}_{2x,y,z}^2 + I_{2x,y,z} \dot{\theta}_{2x,y,z}^2) \quad (4.2)$$

$$V_x = \frac{1}{2} \sum k_{Sx,i} (u_{1x} + r_{1y,i} \theta_{1z} - r_{1z,i} \theta_{1y})^2 + \frac{1}{2} \sum k_{Ex,j} (u_{2x} - u_{1x} + r_{2y,j} \theta_{2z} - [r_{2y,j}]_1 \theta_{1z} - r_{2z,j} \theta_{2y} + [r_{2z,j}]_1 \theta_{1y})^2 \quad (4.3)$$

$$V_y = \frac{1}{2} \sum k_{Sy,i} (u_{1y} + r_{1z,i} \theta_{1x} - r_{1x,i} \theta_{1z})^2 + \frac{1}{2} \sum k_{Ey,j} (u_{2y} - u_{1y} + r_{2z,j} \theta_{2x} - [r_{2z,j}]_1 \theta_{1x} - r_{2x,j} \theta_{2z} + [r_{2x,j}]_1 \theta_{1z})^2 \quad (4.4)$$

$$V_z = \frac{1}{2} \sum k_{Sz,i} (u_{1z} + r_{1y,i} \theta_{1x} - r_{1x,i} \theta_{1y})^2 + \frac{1}{2} \sum k_{Ez,j} (u_{2z} - u_{1z} + r_{2y,j} \theta_{2x} - [r_{2y,j}]_1 \theta_{1x} - r_{2x,j} \theta_{2y} + [r_{2x,j}]_1 \theta_{1y})^2 \quad (4.5)$$

$$D_x = \frac{1}{2} \sum c_{Sx,i} (\dot{u}_{1x} + r_{1y,i} \dot{\theta}_{1z} - r_{1z,i} \dot{\theta}_{1y})^2 + \frac{1}{2} \sum c_{Ex,j} (\dot{u}_{2x} - \dot{u}_{1x} + r_{2y,j} \dot{\theta}_{2z} - [r_{2y,j}]_1 \dot{\theta}_{1z} - r_{2z,j} \dot{\theta}_{2y} + [r_{2z,j}]_1 \dot{\theta}_{1y})^2 \quad (4.6)$$

$$D_y = \frac{1}{2} \sum c_{Sy,i} (\dot{u}_{1y} + r_{1z,i} \dot{\theta}_{1x} - r_{1x,i} \dot{\theta}_{1z})^2 + \frac{1}{2} \sum c_{Ey,j} (\dot{u}_{2y} - \dot{u}_{1y} + r_{2z,j} \dot{\theta}_{2x} - [r_{2z,j}]_1 \dot{\theta}_{1x} - r_{2x,j} \dot{\theta}_{2z} + [r_{2x,j}]_1 \dot{\theta}_{1z})^2 \quad (4.7)$$

$$D_z = \frac{1}{2} \sum c_{Sz,i} (\dot{u}_{1z} + r_{1y,i} \dot{\theta}_{1x} - r_{1x,i} \dot{\theta}_{1y})^2 + \frac{1}{2} \sum c_{Ez,j} (\dot{u}_{2z} - \dot{u}_{1z} + r_{2y,j} \dot{\theta}_{2x} - [r_{2y,j}]_1 \dot{\theta}_{1x} - r_{2x,j} \dot{\theta}_{2y} + [r_{2x,j}]_1 \dot{\theta}_{1y})^2 \quad (4.8)$$

Os índices 1 e 2 indicam o corpo rígido ao qual o vetor está relacionado. O índice 1 está relacionado ao corpo rígido 1 e o índice 2 está relacionado ao corpo rígido 2. Os índices x, y e z são relacionados ao sistema de coordenadas Cartesiano. A variável k representa a constante de mola e a variável c representa a constante de amortecimento viscoso linear equivalente. Os índices S e i representam a suspensão e sua respectiva posição, o índice E e j representam o coxim do motor e sua respectiva posição. O vetor $\vec{u}$ descreve os deslocamentos do centro de gravidade do corpo e o vetor $\vec{\theta}$ as respectivas rotações. O vetor $\vec{r}$ descreve as posições dos pneus relativas ao centro de gravidade do veículo quando apresentado com o índice 1, e a posição dos coxins do motor em relação ao centro de gravidade do motor, quando apresentado com o índice 2. O vetor $[\vec{r}]_1$ representa a posição dos coxins do motor em relação ao centro de gravidade da estrutura do veículo. As variáveis m e I representam as propriedades de massa e inércia dos corpos respectivamente. As variáveis T, V e D representam as funções de energia cinética, potencial e dissipativa respectivamente.

Substituindo as derivadas parciais das funções de energia na expressão de Lagrange dada pela Eq. (4.1) obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais escrito na forma matricial:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (4.9).$$

Os vetores $X(t)$ e $F(t)$ representam os vetores deslocamento e força respectivamente, dados por:

$$X = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.10),$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.11).$$

A matriz $[M]_{12 \times 12}$ simétrica representa a matriz de massa do sistema e possui a seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{1xx} & I_{1xy} & I_{1xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{1xy} & I_{1yy} & I_{1yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{1xz} & I_{1yz} & I_{1zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2xx} & I_{2xy} & I_{2xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2xy} & I_{2yy} & I_{2yz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2xz} & I_{2yz} & I_{2zz} \end{bmatrix} \quad (4.12).$$

As matrizes $[K]_{12 \times 12}$ e $[C]_{12 \times 12}$ também são simétricas e representam a matrizes de rigidez e amortecimento e podem ser escritas da seguinte forma para simplificação da apresentação dos dados:

$$K = \begin{bmatrix} K1 & K2 \\ K2^T & K4 \end{bmatrix} \quad (4.13),$$

$$C = \begin{bmatrix} C1 & C2 \\ C2^T & C4 \end{bmatrix} \quad (4.14).$$

As matrizes $[K1]_{6 \times 6}$, $[K2]_{6 \times 6}$, $[K4]_{6 \times 6}$, $[C1]_{6 \times 6}$, $[C2]_{6 \times 6}$ e $[C4]_{6 \times 6}$ são simétricas e possuem a forma descrita a seguir:

$$K1 = K11 + K12 \quad (4.15),$$

$$C1 = C11 + C12 \quad (4.16),$$

onde as matrizes K11, K12, C11 e C12 são:

$$K11 = \begin{bmatrix} \Sigma k_{Tx,i} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma k_{Tx,i}r_{1z,i} & \Sigma k_{Tx,i}r_{1y,i} \\ & \Sigma k_{Ty,i} & 0 & \Sigma k_{Ty,i}r_{1z,i} & 0 & -\Sigma k_{Ty,i}r_{1x,i} \\ & & \Sigma k_{Sz,i} & \Sigma k_{Sz,i}r_{1y,i} & -\Sigma k_{Sz,i}r_{1x,i} & 0 \\ & & & \Sigma k_{Sy,i}r_{1z,i}^2 + \Sigma k_{Sz,i}r_{1y,i}^2 & -\Sigma k_{Sz,i}r_{1x,i}r_{1y,i} & -\Sigma k_{Sy,i}r_{1x,i}r_{1z,i} \\ & & & & \Sigma k_{Sx,i}r_{1z,i}^2 + \Sigma k_{Sz,i}r_{1x,i}^2 & -\Sigma k_{Sx,i}r_{1y,i}r_{1z,i} \\ & & & & & \Sigma k_{Sx,i}r_{1y,i}^2 + \Sigma k_{Sy,i}r_{1x,i}^2 \end{bmatrix} \quad (4.17),$$

$$K12 = \begin{bmatrix} \Sigma k_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma k_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 & \Sigma k_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1 \\ & \Sigma k_{Ey,j} & 0 & \Sigma k_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 & 0 & -\Sigma k_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1 \\ & & \Sigma k_{Ez,j} & \Sigma k_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 & -\Sigma k_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1 & 0 \\ & & & \Sigma k_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1^2 + \Sigma k_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1^2 & -\Sigma k_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1[r_{2y,j}]_1 & -\Sigma k_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1[r_{2z,j}]_1 \\ & & & & \Sigma k_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1^2 + \Sigma k_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1^2 & -\Sigma k_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1[r_{2z,j}]_1 \\ & & & & & \Sigma k_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1^2 + \Sigma k_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.18),$$

$$C11 = \begin{bmatrix} \Sigma c_{Tx,i} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma c_{Tx,i}r_{1z,i} & \Sigma c_{Tx,i}r_{1y,i} \\ & \Sigma c_{Ty,i} & 0 & \Sigma c_{Ty,i}r_{1z,i} & 0 & -\Sigma c_{Ty,i}r_{1x,i} \\ & & \Sigma c_{Sz,i} & \Sigma c_{Sz,i}r_{1y,i} & -\Sigma c_{Sz,i}r_{1x,i} & 0 \\ & & & \Sigma c_{Sy,i}r_{1z,i}^2 + \Sigma c_{Sz,i}r_{1y,i}^2 & -\Sigma c_{Sz,i}r_{1x,i}r_{1y,i} & -\Sigma c_{Sy,i}r_{1x,i}r_{1z,i} \\ & & & & \Sigma c_{Sx,i}r_{1z,i}^2 + \Sigma c_{Sz,i}r_{1x,i}^2 & -\Sigma c_{Sx,i}r_{1y,i}r_{1z,i} \\ & & & & & \Sigma c_{Sx,i}r_{1y,i}^2 + \Sigma c_{Sy,i}r_{1x,i}^2 \end{bmatrix} \quad (4.19),$$

$$C12 = \begin{bmatrix} \Sigma c_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma c_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 & \Sigma c_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1 \\ & \Sigma c_{Ey,j} & 0 & \Sigma c_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 & 0 & -\Sigma c_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1 \\ & & \Sigma c_{Ez,j} & \Sigma c_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 & -\Sigma c_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1 & 0 \\ & & & \Sigma c_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1^2 + \Sigma c_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1^2 & -\Sigma c_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1[r_{2y,j}]_1 & -\Sigma c_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1[r_{2z,j}]_1 \\ & & & & \Sigma c_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1^2 + \Sigma c_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1^2 & -\Sigma c_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1[r_{2z,j}]_1 \\ & & & & & \Sigma c_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1^2 + \Sigma c_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.20),$$

$$K2 = \begin{bmatrix} -\Sigma k_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & \Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j} & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j} \\ & -\Sigma k_{Ey,j} & 0 & -\Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j} \\ & & -\Sigma k_{Ez,j} & \Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j} & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ & & & -\Sigma k_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2z,j} - \Sigma k_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2y,j} & \Sigma k_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2x,j} & \Sigma k_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2x,j} \\ & & & & -\Sigma k_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2z,j} - \Sigma k_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1 r_{2x,j} & \Sigma k_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2y,j} \\ & & & & & -\Sigma k_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2y,j} - \Sigma k_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1 r_{2x,j} \end{bmatrix} \quad (4.21),$$

$$C2 = \begin{bmatrix} -\Sigma c_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & \Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j} & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j} \\ & -\Sigma c_{Ey,j} & 0 & -\Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j} \\ & & -\Sigma c_{Ez,j} & \Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j} & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ & & & -\Sigma c_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2z,j} - \Sigma c_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2y,j} & \Sigma c_{Ez,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2x,j} & \Sigma c_{Ey,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2x,j} \\ & & & & -\Sigma c_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2z,j} - \Sigma c_{Ez,j}[r_{2x,j}]_1 r_{2x,j} & \Sigma c_{Ex,j}[r_{2z,j}]_1 r_{2y,j} \\ & & & & & -\Sigma c_{Ex,j}[r_{2y,j}]_1 r_{2y,j} - \Sigma c_{Ey,j}[r_{2x,j}]_1 r_{2x,j} \end{bmatrix} \quad (4.22),$$

$$K4 = \begin{bmatrix} \Sigma k_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j} & \Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j} \\ & \Sigma k_{Ey,j} & 0 & \Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & -\Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j} \\ & & \Sigma k_{Ez,j} & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ & & & \Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j}^2 & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & -\Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} \\ & & & & \Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j}^2 + \Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j}^2 & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} \\ & & & & & \Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j}^2 \end{bmatrix} \quad (4.23),$$

$$C4 = \begin{bmatrix} \Sigma c_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j} & \Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j} \\ & \Sigma c_{Ey,j} & 0 & \Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & -\Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j} \\ & & \Sigma c_{Ez,j} & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ & & & \Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j}^2 & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & -\Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} \\ & & & & \Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j}^2 + \Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j}^2 & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} \\ & & & & & \Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j}^2 \end{bmatrix} \quad (4.24).$$

Nota-se que as matrizes K2 e C2 tem a mesma forma das matrizes K4 e C4. Segundo (LIU, 2008, p. 5) as matrizes K2 e C2 representam a influência do acoplamento entre os corpos. É possível perceber essa influência através da presença dos termos $[r_{2x,j}]_1$, $[r_{2y,j}]_1$ e $[r_{2z,j}]_1$ substituindo os respectivos termos $r_{2x,j}$, $r_{2y,j}$ e $r_{2z,j}$ presentes na matriz K4 e C4.

Procedendo de maneira similar, é possível determinar as equações de movimento do modelo de 6 graus de liberdade. Os vetores e matrizes podem ser reduzidos para o seguinte:

$$X = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$K = \begin{bmatrix} \Sigma k_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j} & \Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j} \\ 0 & \Sigma k_{Ey,j} & 0 & \Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j} \\ 0 & 0 & \Sigma k_{Ez,j} & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ 0 & \Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j} & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma k_{Ez,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma k_{Ey,j}r_{2z,j}^2 & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & -\Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} \\ -\Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j} & -\Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & \Sigma k_{Ex,j}r_{2z,j}^2 + \Sigma k_{Ez,j}r_{2x,j}^2 & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} \\ \Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j} & \Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j} & 0 & -\Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} & -\Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} & \Sigma k_{Ex,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma k_{Ey,j}r_{2x,j}^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$C = \begin{bmatrix} \Sigma c_{Ex,j} & 0 & 0 & 0 & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j} & \Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j} \\ 0 & \Sigma c_{Ey,j} & 0 & \Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j} \\ 0 & 0 & \Sigma c_{Ez,j} & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j} & 0 \\ 0 & \Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j} & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j} & \Sigma c_{Ez,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma c_{Ey,j}r_{2z,j}^2 & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & -\Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} \\ -\Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j} & 0 & \Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j} & -\Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j}r_{2y,j} & \Sigma c_{Ex,j}r_{2z,j}^2 + \Sigma c_{Ez,j}r_{2x,j}^2 & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} \\ \Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j} & \Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j} & 0 & -\Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j}r_{2z,j} & -\Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j}r_{2z,j} & \Sigma c_{Ex,j}r_{2y,j}^2 + \Sigma c_{Ey,j}r_{2x,j}^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.2 ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

A seguir é apresentada a teoria de análise modal utilizada nesse trabalho que foi baseada no trabalho de (VAROTO, 2016). As frequências naturais não amortecidas do motor isolado foram obtidas pela análise de vibrações livres não amortecidas das equações de

movimento dos modelos. Nessa condição, admitiu-se que a solução da Eq. (4.9) é do tipo $X(t) = Ae^{i\omega t}$ e logo a equação diferencial possui solução apenas se:

$$\frac{K}{M} - \lambda I = 0 \quad (4.30),$$

onde I é a matriz identidade e $\lambda = \omega^2$, sendo ω^2 a frequência natural não amortecida do sistema.

Resolvendo o problema de autovalor-autovetor, descrito pela Eq. (4.30), determinou-se as frequências naturais e formas modais não amortecidas dos modelos. As frequências naturais foram obtidas calculando-se as raízes do polinômio característico abaixo:

$$\det\left(\frac{K}{M} - \lambda I\right) = 0 \quad (4.31).$$

4.3 RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE

No trabalho de (RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN, 1983), um modelo de 6 GDL foi utilizado para calcular a resposta vibratória do motor e as respectivas reações dos coxins considerando as forças desbalanceadoras e pulsos de torque do motor para uma condição de operação em regime permanente. Os autores utilizaram as formas modais do motor isolado para desacoplar as equações de movimento e determinar a resposta vibratória do motor. Os resultados obtidos com o modelo foram comparados com resultados experimentais, que mostraram diferença máxima de 15.6% nos valores das frequências naturais do motor isolado.

Com base no trabalho de (RADCLIFFE, PICKLEMANN e SPIEKERMANN, 1983), o modelo de 12 GDL desenvolvido nesse trabalho foi utilizado para calcular a resposta vibratória do motor considerando as forças desbalanceadoras e pulsos de torque em regime permanente conforme descrito na seção 3 deste trabalho. As formas modais obtidas conforme descrito no seção 4.2 foram utilizadas para desacoplar as Eq. (4.9) do modelo de 12 GDL.

Para determinar resposta forçada no domínio da frequência, admitiu-se que a força de excitação pode ser escrita na forma harmônica abaixo:

$$F(t) = \{P(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (4.32).$$

A solução da Eq. (4.9) é obtida transformando-se as coordenadas físicas $X(t)$ para coordenadas modais $\eta(\omega)$ assumindo que:

$$X = [\Phi]\{\eta(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (4.33),$$

onde $[\Phi]$ é a matriz formada pelos auto-vetores obtidos com a solução da Eq. (4.30).

Substituindo a Eq. (4.33) na Eq. (4.9), obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [C][\Phi]\{\dot{\eta}\} + [K][\Phi]\{\eta\} = \{P\}e^{i\omega t} \quad (4.34).$$

Multiplicando a Eq. (4.34) por $[\Phi]^T$ e assumindo-se que a matriz de amortecimento é proporcional as matrizes de massa $[M]$ e rigidez $[K]$, pode-se aplicar a propriedade da ortogonalidade da matriz dos autos-vetores, e, dessa forma, obter as equações de movimento desacopladas definidas em termos das coordenadas modais η_r , onde r representa o r -ésimo modo de vibrar do sistema:

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = p_re^{i\omega t} \quad (4.35),$$

onde:

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \quad (4.36),$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (4.37),$$

$$p_r = \frac{1}{m_r} \{\Phi\}_r^T \{P\} \quad (4.38).$$

Os termos definidos pelas Eq. (4.36), (4.37) e (4.38) são conhecidos respectivamente como fator de amortecimento modal, frequência natural não amortecida e força de excitação modal.

A solução da Eq. (4.35) pode ser expressa como:

$$\eta_r(t) = Q_r e^{i\omega t} \quad (4.39).$$

Substituindo-se a Eq. (4.39) na Eq. (4.35), obtém-se a amplitude modal associada ao r -ésimo modo de vibrar do sistema:

$$Q_r = \frac{p_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega} \quad (4.40),$$

e a solução nas coordenadas físicas é obtida pela Eq. (4.33).

4.4 APLICAÇÃO DOS MODELOS

4.4.1 Solução Frequências Naturais não amortecidas

Para a resolução da Eq. (4.9) desenvolvida para os modelos de 6 GDL e de 12 GDL, foi implementado um algoritmo utilizando-se o software comercial Matlab® e suas rotinas internas para resolução do problema de autovalor-autovetor definido pela Eq. (4.30). O código desenvolvido nesse trabalho se encontra no apêndice A.

Para o cálculo das frequências naturais não amortecidas, os valores de massa, inércia e rigidezes empregados nos modelos de 6 e 12 GDL utilizados nesse trabalho foram adotados e buscaram reproduzir o comportamento modal de um carro de passageiro médio com tração dianteira e motor transversal de quatro cilindros. Os valores de massa, inércia e rigidezes serão denominados parâmetros dos modelos e podem ser vistos na Tabela 2

Tabela 2: Parâmetros adotados para solução modal.

Parâmetro	Veículo	Motor
Massa (kg)	602,3	151,3
Inércia J_{XX} (kg.m ²)	226,3	10,5
Inércia J_{YY} (kg.m ²)	700,8	4,9
Inércia J_{ZZ} (kg.m ²)	788,6	9,0
Inércia J_{XY} (kg.m ²)	17,1	0,5
Inércia J_{XZ} (kg.m ²)	15,1	0,2
Inércia J_{YZ} (kg.m ²)	0,1	1,7
CG x; y; z (m)	0,0; 0,0; 0,0	1,3; 0,0; 0,2
Pneu / Coxim #1 Posição x; y; z (m)	1,1; -0,8; 0,4	1,3; -0,4; 0,0
Pneu / Coxim #2 Posição x; y; z (m)	1,1; 0,8; 0,4	1,4; 0,5; 0,1
Pneu / Coxim #3 Posição x; y; z (m)	-1,3; -0,8; 0,4	1,0; 0,0; 0,5
Pneu / Coxim #4 Posição x; y; z (m)	-1,3; -0,8; 0,4	NA
Pneu / Coxim #1 Rigidez x; y; z (10 ³ N/m)	65,0; 120,0; 200,0	237,0; 95,0; 203,0
Pneu / Coxim #2 Rigidez x; y; z (10 ³ N/m)	65,0; 120,0; 200,0	168,0; 168,0; 155,0
Pneu / Coxim #3 Rigidez x; y; z (10 ³ N/m)	65,0; 120,0; 200,0	136,0; 30,0; 30,0
Pneu / Coxim #4 Rigidez x; y; z (10 ³ N/m)	65,0; 120,0; 200,0	NA

Considerando os conceitos apresentados na sessão 2.4.1, a linha de torque neutro e linha elástica foram calculadas com base nos dados apresentados na Tabela 2 e uma ilustração gráfica é apresentada na Figura 38.

Figura 38: Ilustração da localização da linha de torque neutro e linha elástica calculadas com base nos dados apresentados na Tabela 2.

Os resultados obtidos com os modelos são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Resultados modais – Modelos: Elem. Finitos, 12 e 6 Graus de Liberdade.

Forma Modal	FEM Freq. [Hz]	12 DOF Freq. [Hz]	%	6 DOF Freq. [Hz]	%
Veículo Longitudinal	2,6	2,9	12,1%	N/A	
Veículo Lateral	2,7	3,4	27,2%	N/A	
Veículo Vertical	2,6	4,4	68,0%	N/A	
Veículo Rolagem	5,9	7,5	27,3%	N/A	
Veículo Arfagem	4,2	6,6	58,1%	N/A	
Veículo Guinada	3,9	5,0	27,6%	N/A	
Motor Longitudinal	9,3	11,6	25,1%	8,4	-8,9%
Motor Lateral	8,5	9,7	14,1%	6,8	-20,2%
Motor Vertical	10,0	11,1	11,1%	8,0	-19,6%
Motor Rolagem	14,5	15,0	3,7%	14,6	0,7%
Motor Arfagem	12,2	9,0	-26,2%	10,8	-11,5%
Motor Guindada	18,2	17,2	-5,7%	17,0	-6,3%

A descrição dos modos foi atribuída com base na energia cinética do corpo para o modo associado, conforme descrito pelo manual do usuário do MD/MSC Nastran 2010 - *Dynamic Analysis User's Guide*. De acordo com o manual, a energia cinética do corpo é útil para quantificar a participação do grau de liberdade na movimentação do modo, e é calculada da seguinte forma:

$$T_i = \Phi_i \otimes [M\Phi_i] \quad (4.41),$$

onde Φ_i representa o i -ésimo autovetor normalizado pela massa, e $\otimes$ representa a multiplicação matricial realizada elemento por elemento.

O valor da frequência do modo e a coordenada com maior energia cinética determinam a denominação do modo. A Tabela 4 apresenta as energias cinéticas, calculadas com o modelo de 12 GDL, utilizadas na atribuição dos modos apresentados na Tabela 3.

Tabela 4: Energia Cinética calculada com modelo de 12 GDL.

Coordenada	Energia Cinética em %											
	17,2Hz	15,0Hz	11,6Hz	11,1Hz	9,6Hz	9,0Hz	7,3Hz	6,6Hz	2,9Hz	3,4Hz	5,0Hz	4,4Hz
u_{1x}	0,3	0,0	13,6	1,0	0,0	8,5	0,1	0,0	75,9	0,1	0,0	0,4
u_{1y}	0,0	0,4	0,0	0,0	19,2	0,2	0,1	0,1	0,0	46,5	33,5	0,0
u_{1z}	0,0	0,1	2,1	14,4	0,1	2,4	1,4	46,6	0,1	0,0	0,0	32,7
θ_{1x}	0,0	5,6	0,0	1,6	24,6	0,8	58,5	0,9	0,0	2,0	5,8	0,0
θ_{1y}	0,0	0,2	7,3	32,8	0,1	0,6	0,0	44,8	0,7	0,0	0,2	13,3
θ_{1z}	1,3	0,9	0,4	0,1	20,5	0,5	18,9	0,2	0,0	9,2	47,9	0,1
u_{2x}	1,0	0,0	43,6	4,8	0,1	24,6	0,1	2,1	22,6	0,0	0,0	0,8
u_{2y}	0,1	2,0	0,0	0,0	32,7	0,2	11,8	0,0	0,0	42,0	11,1	0,1
u_{2z}	0,0	0,2	5,5	34,8	0,1	3,0	0,3	3,2	0,6	0,0	0,1	52,2
θ_{2x}	0,1	89,1	0,4	0,7	0,0	0,4	8,5	0,0	0,0	0,0	0,7	0,0
θ_{2y}	10,9	1,5	20,8	7,9	1,2	55,5	0,0	1,9	0,0	0,0	0,0	0,2
θ_{2z}	86,3	0,0	6,2	1,8	1,3	3,3	0,3	0,1	0,0	0,1	0,7	0,0

Além de auxiliar na denominação do modo, a energia cinética facilita a identificação dos acoplamentos modais. Os resultados apresentados na Tabela 4 evidenciam tais acoplamentos e de maneira qualitativa, indicam o grau de acoplamento dos modos, como por exemplo o modo de arfagem da carroceria com 6.6Hz altamente acoplado com o modo vertical da carroceria pois ambos possuem níveis similares de energia cinética. Um outro exemplo, o modo vertical do motor com 11.6Hz ligeiramente acoplado com o modo de arfagem do motor e vice-versa.

Para facilitar a visualização e entendimento dos modos obtidos com os modelos, foi esquematizada a forma modal para cada modo vibratório do motor na figura a seguir, obtidos com o modelo de 12 GDL.

Modo Longitudinal: 11.6Hz	Modo Lateral: 9.7Hz

Modo Vertical: 11.1Hz	Modo Arfagem: 9.0Hz

Modo Rolagem: 15.0Hz	Modo Guinada: 17.2Hz

Figura 39: Visualização dos modos do motor calculados com o modelo de 12 GDL.

Os resultados presentes na Tabela 3 mostraram que os valores de frequências obtidos com modelo de 6 GDL são menores que os valores obtidos com o modelo de 12 GDL. As maiores diferenças foram encontradas para os modos translacionais, sendo que a maior delas foi de 30% para o modo lateral.

Intuitivamente, o resultado oposto era esperado pelo fato de o corpo estar suspenso por um referencial rígido no modelo de 6 GDL, porém a adição de um segundo corpo suspenso no modelo de 12 GDL cria o efeito similar ao de um absorvedor dinâmico. A análise do polinômio característico definido pela Eq. (4.31) auxilia o entendimento desse fato.

Adota-se um corpo rígido de massa m_2 suspenso por uma mola de constante elástica k_E conectada à um referencial inercial rígido, que é livre para transladar em uma única direção. A frequência natural não amortecida desse corpo é dada por:

$$\lambda_{1\text{DOF}} = \sqrt{\frac{k_E}{m_2}} \quad (4.42).$$

Supõe-se agora que o corpo suspenso pela mesma mola é montado sobre um referencial móvel de massa m_1 suspenso por uma mola de constante elástica k_s . O referencial móvel é livre para transladar em apenas uma direção. O sistema final possui dois graus de liberdade e os valores das frequências naturais são dados por:

$$\lambda_{2DOF}^2 = \frac{(k_s m_2 + k_s m_1 + k_E m_1)}{2 m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{(k_s m_2 + k_s m_1 + k_E m_1)^2}{4 (m_1 m_2)^2} - \frac{k_s k_E}{m_1 m_2}}. \quad (4.43).$$

Para o veículo típico considerado nesse trabalho, a relação de massa é de 0,25 e a relação entre rigidez vertical equivalente é de aproximadamente 4,0. Substituindo esses valores na Eq. (4.43) e comparando com a Eq. (4.42), tem-se a relação entre as frequências de aproximadamente 1,3, representando um aumento de 30% devido ao acréscimo do grau de liberdade do modelo adotado para o cálculo.

4.4.2 Solução Forçada

Para o cálculo da solução forçada foi elaborado um algoritmo utilizando o *software* Matlab® e suas rotinas internas para calcular a resposta do motor isolado dada uma determinada força de excitação.

Determinar a função de resposta em frequência do sistema para uma excitação unitária, assim como a energia cinética mostrada na Tabela 4, também é uma forma de compreender o grau de acoplamento dos modos do motor e o reflexo desse acoplamento na amplitude da resposta vibratória.

Para manter as equações de movimentos desacopladas, um amortecimento modal de 5%, constante para todos os modos e conforme definido pela Eq. (4.36), foi considerado na solução do modelo.

Uma força unitária harmônica agindo no centro de gravidade do motor foi utilizada como fonte excitadora e obteve-se as funções de resposta em frequência conforme mostradas na Figura 40.

Como demonstrado no item 3.3, não existe forças agindo ao longo da árvore de manivelas, razão pela qual é conveniente determinar as respostas em frequência apenas para os carregamentos longitudinal e vertical, considerando o sistema de coordenadas estabelecido.

Figura 40: Resposta do CG do motor para força harmônica unitária; a) força longitudinal; b) força vertical

A curva de resposta em frequência longitudinal do CG do motor revelou um certo grau de acoplamento do modo longitudinal com o modo de arfagem. Observou-se que as maiores amplitudes da resposta se deram justamente na proximidade das frequências desses modos, no caso 11,6Hz para o modo longitudinal e 9,0Hz para o modo de arfagem.

Outra informação bastante relevante é a resposta em frequência do CG do motor para um torque harmônico unitário. As Figura 41, Figura 42 e Figura 43 ilustram essa resposta para torques unitários em torno do CG nas direções X, Y e Z.

Figura 41: Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo X (SAE J670)

Figura 42: Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo Y (SAE J670)

Figura 43: Resposta do CG do motor para um torque harmônico unitário em torno do eixo Z (SAE J670)

A resposta vibratória do motor quando as forças de desbalanceamento estão agindo no mesmo foi calculada, e, para tanto, adotou-se como força de excitação a força de desbalanceamento vertical F_z e o respectivo momento responsável pela arfagem M_{xz} , considerando-se os seguintes parâmetros para esse cálculo.

Tabela 5: Parâmetros adotados para cálculos dos esforços desbalanceadores.

Parâmetro	Motor 4 Cilindros em Linha
r (mm)	36,70
ℓ (mm)	137,3
m_{rec} (kg)	0,380
d_x (mm)	86
x_{CG} (mm)	70
Ângulos da árvore de manivelas	$0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 0^\circ$

As Eq. (3.21) e (3.22) foram empregadas no cálculo da força vertical e do momento de arfagem, tendo sido obtido os valores mostrados na Tabela 6 e ilustrados na Figura 44.

Tabela 6: Forças desbalanceadoras

Frequência	Força	Momento
[rpm]	Vertical [N]	XZ [N.m]
650	138,2	8,2
700	160,3	9,5
800	209,3	12,4
900	264,9	15,6
1000	327,0	19,3
1200	470,9	27,8
1600	837,2	49,4
2000	1307,9	77,2

Figura 44: Forças desbalanceadoras

Para facilitar a identificação das possíveis ressonâncias em função da velocidade de funcionamento do motor, o Diagrama de Campbell é apresentado na Figura 45. No diagrama foram apresentadas as ordens do comando de válvulas (Ordem 0,5), da árvore de manivelas (Ordem 1,0) e das forças de combustão (Ordem 2,0), para um motor de quatro tempos com quatro cilindros em linha. As ordens auxiliam na análise das frequências de máquinas rotativas facilitando a identificação da contribuição de componentes internos na resposta total do motor.

Figura 45: Diagrama de Campbell para as frequências de excitação de um motor quatro tempos com quatro cilindros em linha

Considerando que a mínima velocidade de funcionamento do motor acontece em torno de 700rpm, nota-se que as forças desbalanceadoras devido a combustão do motor (Ordem 2,0) não serão capazes de excitar os modos de corpo rígido do motor. As forças de desbalanceamento devidas ao comando de válvulas (Ordem 0,5) em geral são pequenas de forma que apenas as forças de desbalanceamento relacionadas à árvore de manivelas (Ordem 1,0) podem causar ressonâncias significativas para a resposta do motor, lembrando que essa análise não considera forças aleatórias presentes no funcionamento do motor.

Considerando os esforços da Tabela 6 e as funções de resposta em frequência FRF do motor isolado é possível determinar as acelerações experimentadas pelo sistema, conforme mostrado na Figura 46 a seguir.

Figura 46: Resposta vibratória do centro de gravidade do motor

Os dados apresentados na figura acima mostraram que a força vertical gera maiores níveis de aceleração que o momento XZ, numa ordem de grandeza de aproximadamente 10 vezes, bem como permitiram identificar a influência dos modos longitudinal, com 11,6Hz, e vertical, com 11,1Hz, ambos amplificando os níveis de vibração para a velocidade de rotação de 690rpm. É interessante ressaltar que a velocidade de 690rpm é próxima do ponto onde a curva dos esforços de Ordem 1,0 intercepta a curva do modo vertical do motor conforme apresentado no Diagrama de Campbell anteriormente (Figura 45).

5 EXPERIMENTOS

Os resultados obtidos com os modelos gerados nesse trabalho foram comparados com resultados experimentais obtidos em laboratório, que consistiram em uma análise dos modos de vibrar de um motor suspenso por coxins. Uma descrição detalhada do experimento executado será apresentada a seguir.

5.1 BANCADA DE TESTE

A bancada de teste consistiu nos seguintes equipamentos: acelerômetros triaxiais, *shaker*, transdutor de força e um sistema de aquisição. Um esquema da bancada de teste utilizada para a análise modal experimental é mostrado na figura abaixo.

Figura 47: Esquema de operação da bancada para análise modal do motor isolado

A Tabela 7 descreve os equipamentos utilizados para a análise experimental.

Tabela 7: Lista de equipamentos utilizados na análise experimental

Equipamento	Modelo / Tipo	Função
Acelerômetro	B&K Piezoelétrico 4524	Realizar a leitura de aceleração x, y e z do corpo em movimento.
Acelerômetro	B&K Piezoelétrico 4529	
Calibrador Acel.	Brüel & Kjaer	Realizar a calibração dos acelerômetros.
Transdutor de Força	PCB 288D01	Realizar a leitura de força aplicada para excitar o motor.
Amplificador	MB 500VI	Amplificar o sinal de força vindo do transdutor
Shaker	MB	Aplicar força excitadora no motor.
Software de dados	Scadas III (LMS)	Realizar aquisição e tratamento de dados

Para efetuar o teste, o veículo foi colocado sobre uma base inercial utilizado para minimizar os efeitos vibratórios de estruturas externas. Duas fontes excitadoras do tipo *shaker* foram posicionadas sob o compartimento do motor do veículo. A Figura 48 ilustra a base inercial e o posicionamento dos *shakers*.

Figura 48: Referencial inercial e posicionamento dos *shakers*.

No total foram utilizados quinze acelerômetros para caracterizar a movimentação do motor e da estrutura do veículo. Doze acelerômetros foram utilizados para determinar a movimentação do motor, e tais elementos foram posicionados em diferentes pontos de forma a capturar sem ambiguidade a movimentação do mesmo quando excitado.

Para facilitar a identificação de cada acelerômetro, criou-se a Tabela 8 onde constam informações sobre sua localização. As coordenadas espaciais x, y e z são apresentadas na Tabela 9, e foram utilizadas para o cálculo dos autovetores. O sistema de referência é estabelecido pela SAE J670 mostrado na Figura 34.

Tabela 8: Localização dos acelerômetros utilizados no ensaio - motor

Acelerômetro n°	Longitudinal¹	Horizontal²	Vertical³
1	Meio	Esquerdo	Inferior
2	Meio	Direito	Inferior
3	Meio	Esquerdo	Superior
4	Meio	Direito	Superior
5	Frente	Esquerdo	Inferior
6	Frente	Direito	Inferior
7	Frente	Esquerdo	Superior
8	Frente	Direito	Superior
9	Atrás	Esquerdo	Superior
10	Atrás	Direito	Superior
11	Atrás	Direito	Inferior
12	Atrás	Esquerdo	Inferior

(1) Posição Longitudinal: Convenciona-se “frente” a parte oposta ao volante, “meio” a parte onde está o volante e “atrás” a parte da transmissão.

(2) Posição Horizontal: Com um observador olhando para o volante, convenciona-se o lado “esquerdo” e “direito”.

(3) Posição Vertical: Convenciona-se “superior” a porção próxima ao comando de válvulas e “inferior” a porção próxima ao reservatório de óleo.

Tabela 9: Coordenadas dos acelerômetros localizados no motor (Sistema de coordenadas SAE J670).

Acelerômetro	x[m]	y[m]	z[m]
1	1,435	-0,049	-0,090
2	1,258	-0,049	-0,108
3	1,423	-0,067	-0,360
4	1,297	-0,067	-0,360
5	1,416	0,310	-0,058
6	1,247	0,310	-0,081
7	1,252	0,303	-0,360
8	1,387	0,304	-0,359
9	1,375	-0,217	-0,218
10	1,275	-0,217	-0,206
11	1,298	-0,216	-0,104
12	1,364	-0,216	-0,101

A Figura 49 ilustra a posição dos acelerômetros 11 e 12, localizados na parte inferior da caixa de transmissão do motor. Na mesma figura à direita, é mostrado a resposta em frequência do acelerômetro n.º 12.

Figura 49: Localização dos acelerômetros 11 e 12 (Esquerda) – Resposta vertical do acelerômetro 12 (Direita)

Três acelerômetros foram colocados na carroceria do veículo para capturar a movimentação da estrutura, e foram convenientemente posicionados próximos aos coxins para melhor caracterizar a base da estrutura que suporta o motor e minimizar a influência de modos de outros sistemas do veículo.

De maneira similar, os acelerômetros posicionados na estrutura do veículo foram identificados conforme a Tabela 10, sendo as respectivas coordenadas apresentadas na Tabela 11, e o sistema de referência definido pela norma SAE J670.

Tabela 10: Localização dos acelerômetros utilizados no ensaio - Carroceria

Acelerômetro n°	Posição
1	Coxim Esquerdo
2	Coxim Direito
3	Coxim Restritor de Torque

Tabela 11: Coordenadas dos acelerômetros localizados na carroceria (Sistema de coordenadas SAE J670).

Acelerômetro	x[m]	y[m]	z[m]
1	1,396	-0,351	-0,284
2	1,423	0,449	-0,164
3	0,976	0,019	-0,024

A Figura 50 ilustra a localização do acelerômetro n.º 1, o qual está posicionado próximo ao coxim esquerdo do motor, e sua respectiva resposta em frequência.

Figura 50: Localização dos acelerômetros da carroceria (Esquerda) – Resposta vertical do acelerômetro (Direita)

A Figura 51 apresenta uma visualização espacial das posições dos acelerômetros citados nas Tabela 8 e Tabela 10.

Figura 51: Vista espacial dos acelerômetros utilizados no teste.

Os acelerômetros capturam a resposta $U(\omega)$ do sistema enquanto o transdutor, colocado entre o *shaker* e o motor, gera o sinal de força $F(\omega)$ aplicada no motor. Ambos os sinais são enviados simultaneamente para o sistema de aquisição de dados conectado ao computador. A Figura 52 ilustra a instalação do transdutor de força entre o motor e o *shaker*.

Figura 52: Transdutor de força instalado entre o motor e o *shaker*

Os sinais obtidos com o transdutor em conjunto com os sinais dos acelerômetros permitem a caracterização das funções de transferência do sistema. Tais funções podem ser escritas na forma matricial apresentada a seguir:

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \cdots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.1),$$

e são definidas abaixo:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{U_i}{F_j}(\omega) \quad (5.2).$$

O termo $U_i(\omega)$ representa a resposta do i -ésimo acelerômetro e o termo $F_j(\omega)$ a j -ésima força medida pelo transdutor de força.

As FRFs da diagonal principal ($i=j$) são denominadas de “FRF de ponto”, pois a excitação e a resposta são referentes ao mesmo ponto. As FRFs fora da diagonal principal ($i \neq j$) são denominadas de “FRF de transferência”, pois a excitação e a resposta estão em pontos distintos. Para as FRFs de transferência vale o princípio da reciprocidade.

As funções de transferência foram utilizadas para estimar os parâmetros modais do sistema em estudo. O método utilizado para estimar os parâmetros modais é conhecido por Método PolyMAX, desenvolvido pela empresa belga LMS, atualmente subsidiária do grupo SIEMENS e fornecedora do sistema de aquisição utilizado nas medições.

O método consiste em interpolar a matriz de FRFs $[H(\omega)]$ obtida com as respostas dos acelerômetros através de polinômios. Os coeficientes dos polinômios são determinados utilizando o método dos mínimos quadrados.

A partir dos coeficientes, é possível determinar os fatores de participação modal ou coordenadas modais, conforme apresentado no item 4.4, e os respectivos autovalores e autovetores. No trabalho publicado por (BART PEETERS, 2004), uma explicação do método PolyMAX e um estudo comparativo com outros dois métodos foram apresentados.

Os resultados obtidos com o experimento são mostrados na tabela abaixo.

Tabela 12: Frequências naturais obtidas com a análise modal experimental.

Forma Modal	Freq. [Hz]
Veículo - Longitudinal	2,9
Veículo - Lateral	3,3
Veículo - Vertical	4,4
Veículo - Rolagem	7,7
Veículo - Arfagem	5,7
Veículo - Guinada	4,8
Motor - Longitudinal	12,1
Motor - Lateral	10,9
Motor - Vertical	10,0
Motor - Rolagem	13,1
Motor - Arfagem	14,8
Motor - Guindada	19,0

A interpretação e classificação dos modos foram feitas com base na forma modal obtida com o método PolyMAX. A Figura 53 ilustra os modos obtidos pela síntese das respostas dos acelerômetros. As linhas escuras indicam a posição não deformada dos pontos, ao passo que as linhas coloridas indicam a posição deformada.

Figura 53: Formas modais determinadas pela síntese das respostas dos acelerômetros.

Nos casos em que os modos se apresentam acoplados, a classificação baseada apenas na forma modal pode ser difícil e conduzir a uma má interpretação da forma. Nesses casos, além da análise das formas, é necessário recorrer a análise das curvas de resposta em frequência dos acelerômetros. A Figura 54 apresenta as respostas em frequência obtidas com o acelerômetro n.º 12.

Figura 54: Funções de resposta em frequência obtidas com o acelerômetro n.º12

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos com os modelos analíticos foram comparados com os resultados obtidos experimentalmente. Os comparativos são apresentados a seguir e para facilitar o entendimento e visualização dos dados, os mesmos foram divididos por tipo de modelo.

Tabela 13: Comparativo dos resultados do modelo de 6GDL com os resultados experimentais

Forma Modal		Freq. do Experimento [Hz]	Freq. do Modelo 6 GDL [Hz]	Diferença [Hz]	Diferença [%]
Motor	Longitudinal (X)	12,1	8,4	-3,7	-30%
	Lateral (Y)	10,9	6,8	-4,1	-38%
	Vertical (Z)	10,0	8,0	-2,0	-20%
	Rolagem (YZ)	13,1	14,6	1,5	10%
	Arfagem (XZ)	14,8	10,8	-4,0	-27%
	Guinada (XY)	19,0	17,0	-2,0	-10%

A maior diferença de frequência encontrada para o modelo de 6 GDL se deu no modo lateral, com um desvio de -4,1Hz (-38% em relação ao valor obtido com o teste e o sinal negativo significa que o valor predito é menor que o valor testado), e a menor diferença foi para os modos de rolagem, com 1,5Hz (10%) e guinada, com -2,0Hz (10%).

A Tabela 14 apresenta os resultados fornecidos pelo modelo de 12 GDL. Como o modelo adicionou a dinâmica da carroceria do veículo, foi possível estabelecer uma comparação para os modos da carroceria. É importante ressaltar que o foco do modelo desenvolvido é prever os modos do motor e por isso maior ênfase é dada para tais resultados.

A maior diferença encontrada foi para o modo de arfagem, com desvio de 5,8Hz (39%) e a menor diferença foi para o modo longitudinal, com desvio de -0,5Hz (-4%). Apesar de o máximo desvio obtido com o modelo de 12 GDL (39%) ser maior que o máximo desvio obtido com o modelo de 6 GDL (38%), o modelo de 12 GDL apresentou em geral, resultados mais próximos dos resultados obtidos com o teste.

Calculando uma média para as diferenças obtidas, o modelo com 12 GDL tem média de 14% contra uma média de 22% do modelo com 6 GDL.

Tabela 14: Comparativo dos resultados do modelo de 12 GDL com os resultados experimentais

	Forma Modal	Freq. do Experimento [Hz]	Freq. do Modelo 12 GDL [Hz]	Diferença [Hz]	Diferença [%]
Carroceria	Longitudinal (X)	2,9	2,9	0,0	0%
	Lateral (Y)	3,3	3,4	0,1	3%
	Vertical (Z)	4,3	4,4	0,1	2%
	Rolagem (YZ)	7,6	7,5	-0,1	-1%
	Arfagem (XZ)	5,7	6,6	0,9	14%
	Guinada (XY)	4,8	5,0	0,2	4%
Motor	Longitudinal (X)	12,1	11,6	-0,5	-4%
	Lateral (Y)	10,9	9,7	-1,3	-12%
	Vertical (Z)	10,0	11,1	1,1	10%
	Rolagem (YZ)	13,1	15,0	1,9	13%
	Arfagem (XZ)	14,8	9,0	-5,8	-39%
	Guinada (XY)	19,0	17,2	-1,8	-10%

A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos. A maior diferença foi encontrada no modo longitudinal, com um desvio de -2,8Hz (-23%) e a menor diferença no modo vertical com desvio nulo. Nota-se que a diferença dos resultados obtidos para os modos da carroceria do veículo para os resultados experimentais é menor no modelo de 12 GDL com relação ao modelo de elemento finitos.

Tabela 15: Comparativo dos resultados do modelo FEM com os resultados experimentais.

	Forma Modal	Freq. do Experimento [Hz]	Freq. do Modelo FEM [Hz]	Diferença [Hz]	Diferença [%]
Carroceria	Longitudinal (X)	2,9	2,6	-0,3	-10%
	Lateral (Y)	3,3	2,7	-0,6	-18%
	Vertical (Z)	4,3	2,6	-1,7	-39,5%
	Rolagem (YZ)	7,6	5,9	-1,7	-22%
	Arfagem (XZ)	5,7	4,2	-1,5	26%
	Guinada (XY)	4,8	3,9	-0,9	19%
Motor	Longitudinal (X)	12,1	9,3	-2,8	-23%
	Lateral (Y)	10,9	8,5	-2,4	-19%
	Vertical (Z)	10,0	10,0	0,0	0%
	Rolagem (YZ)	13,1	14,5	1,4	11%
	Arfagem (XZ)	14,8	12,2	-2,6	-17,5%
	Guinada (XY)	19,0	18,2	-0,8	-4%

Um resumo das diferenças entre os resultados dos modelos e os resultados experimentais é apresentado na tabela abaixo. O modelo de elementos finitos apresentou diferenças consistentes para os modos longitudinal, lateral e de arfagem. O modelo de 12DOF apresentou diferenças consistentes para os modos translacionais, porém forneceu a maior diferença entre todos os modelos para o modo de arfagem. O modelo de 6DOF em geral apresentou consistentemente as maiores diferenças entre todos os modelos.

Tabela 16: Resumo das diferenças entre os resultados dos modelos e experimentais em (Hz) para os modos do motor.

Modo	6 GDL	12 GDL	FEM
Longitudinal	-3,7	-0,5	-2,8
Lateral	-4,2	-1,3	-2,5
Vertical	-2,0	1,1	0,0
Rolagem	1,5	1,9	1,4
Arfagem	-4,0	-5,8	-2,6
Guinada	-1,9	-1,8	-0,8

Em geral, as frequências dos modos calculadas pelos modelos foram inferiores aos dos valores obtidos com o teste.

Dos seis modos de corpo rígido possíveis, para o modelo de 6 GDL, cinco modos ficaram abaixo dos resultados fornecidos pelo teste. Para os modelos de 12 GDL e FEM, quatro modos ficaram abaixo dos valores obtidos com o teste.

A frequência do modo de rolagem fornecida pelos modelos foi maior que o valor encontrado no teste, enquanto que as frequências dos modos longitudinal, lateral, arfagem e guinada foram menores que os valores encontrados no teste.

Segundo (RADCLIFFE, PICKLEMAN e SPIEKERMANN, 1983), é sabido que uma série de elementos conectados ao motor que influenciam na rigidez final do motor isolado não foram considerados nos modelos, o que poderia explicar as diferenças encontradas. Além disso, incertezas (variações) intrínsecas do processo construtivo do veículo causam variações nos parâmetros que foram considerados nos modelos (massas/inércias; posições geométricas; rigidezes), e também podem influenciar os resultados obtidos com o teste.

Levando em consideração os fatores citados acima, dois estudos foram realizados para melhor compreensão dos resultados fornecidos pelos modelos.

No primeiro estudo, o modelo de 12 GDL foi utilizado para compreender os efeitos da variação das características elásticas dos coxins nos modos naturais do motor. Nesse estudo,

os parâmetros de massa/inércia e posições geométricas foram mantidos constantes, enquanto os valores de rigidez dos coxins foram variados.

Foi assumido que a variação de rigidez é oriunda da variação da dureza do elastômero utilizado na construção do coxim, e, conseqüentemente, a razão entre as direções das rigidezes foi mantida (k_x/k_z e k_y/k_z são constantes).

Essa hipótese permitiu considerar cada coxim como uma variável independente, tendo sido assumido que cada coxim admite três níveis de rigidez distintos. Sendo assim, o total de combinações para esse estudo é de vinte e sete. Uma tabela com o resumo das combinações é apresentada a seguir.

Tabela 17: Resumo das combinações geradas para o estudo de variação das rigidezes dos coxins.

N.º da Combinação	Rigidez - Coxim Direito [N/mm]			Rigidez Coxim Esquerdo [N/mm]			Rigidez Coxim Restritor Torque [N/mm]		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
#1	284	114	244	202	202	186	136	30	30
#2	237	95	203	134	134	124	136	30	30
#3	237	95	203	168	168	155	136	30	30
#4	190	76	162	134	134	124	109	24	24
#5	190	76	162	134	134	124	136	30	30
#6	237	95	203	134	134	124	163	36	36
#7	190	76	162	168	168	155	109	24	24
#8	284	114	244	168	168	155	136	30	30
#9	190	76	162	134	134	124	163	36	36
#10	237	95	203	202	202	186	136	30	30
#11	237	95	203	134	134	124	109	24	24
#12	237	95	203	202	202	186	109	24	24
#13	237	95	203	202	202	186	163	36	36
#14	284	114	244	202	202	186	163	36	36
#15	237	95	203	168	168	155	163	36	36
#16	284	114	244	168	168	155	163	36	36
#17	284	114	244	134	134	124	109	24	24
#18	284	114	244	134	134	124	136	30	30
#19	190	76	162	168	168	155	136	30	30
#20	190	76	162	202	202	186	136	30	30
#21	190	76	162	202	202	186	109	24	24
#22	284	114	244	202	202	186	109	24	24
#23	190	76	162	168	168	155	163	36	36
#24	190	76	162	202	202	186	163	36	36
#25	237	95	203	168	168	155	109	24	24
#26	284	114	244	134	134	124	163	36	36
#27	284	114	244	168	168	155	109	24	24

Nota-se portanto que a combinação n.º 4 tem todos os coxins com o valor mínimo de rigidez, ao passo que a combinação n.º 14 tem todos os coxins com o valor máximo de rigidez. A combinação n.º 3, por sua vez, apresenta os valores conforme apresentado na Tabela 2.

Para cada combinação foram calculados os modos naturais de corpo rígido do motor utilizando o modelo de 12 GDL desenvolvido. Os modos foram identificados e os resultados são apresentados na Tabela 18. Um resumo dos valores mínimos e máximos encontrados para cada modo é apresentado na Tabela 20

Tabela 18: Resultados modais (Hz) obtidos com as diferentes combinações de rigidezes dos coxins

N.º da Combinação	Longitudinal (X)	Lateral (Y)	Vertical (Z)	Rolagem (YZ)	Arfagem (XZ)	Guinada (XY)
1	12,9	10,2	11,9	16,4	9,6	19,2
2	9,6	9,3	10,7	14,1	11,7	16,3
3	11,6	9,7	11,1	15,0	9,0	17,2
4	10,7	9,0	10,1	13,4	8,6	15,8
5	9,5	9,1	10,1	13,5	10,9	15,9
6	10,3	9,4	10,7	14,1	11,9	16,4
7	10,9	9,4	10,3	14,5	8,7	17,2
8	12,7	9,9	11,6	15,5	9,6	17,9
9	10,0	9,2	10,4	13,5	11,1	16,2
10	12,0	10,0	10,6	16,0	9,6	18,9
11	11,5	9,2	10,6	14,0	8,6	16,1
12	11,9	9,9	11,2	16,0	8,7	18,8
13	10,5	10,1	11,3	16,0	12,2	19,1
14	10,6	10,2	11,9	16,4	13,0	19,3
15	10,4	9,7	11,1	15,0	12,1	17,8
16	10,5	9,9	11,6	15,5	12,8	18,1
17	12,2	9,4	11,0	14,7	8,6	16,5
18	12,4	9,4	11,0	14,6	9,6	16,7
19	11,0	9,4	10,3	14,6	9,6	17,4
20	11,1	9,8	10,4	15,6	9,6	18,8
21	11,0	9,7	10,4	16,4	8,7	18,6
22	12,8	10,1	11,9	16,4	8,7	19,0
23	10,2	9,5	10,5	14,6	11,2	17,6
24	10,3	9,9	11,3	15,7	10,6	18,9
25	11,8	9,6	11,0	15,0	8,7	17,5
26	10,3	9,5	11,1	14,8	12,6	16,8
27	12,6	9,8	11,5	15,5	8,7	17,7

Tabela 19: Resumo dos valores mínimos, máximos e diferenças (Máximo – Mínimo) encontrados para os modos [Hz].

Modo	Mínimo [Hz]	Máximo [Hz]	Diferença [Hz]
Longitudinal	9,5	12,9	3,4
Lateral	9,0	10,2	1,2
Vertical	10,1	11,9	1,8
Rolagem	13,4	16,4	3,0
Arfagem	8,6	13,0	4,4
Guinada	15,8	19,3	3,5

Uma análise detalhada dos resultados apresentados na Tabela 18, mostrou que o modo longitudinal não teve seu valor mínimo e máximo correspondente as combinações n.º 4 e n.º 14 respectivamente. Esse fato pode ser melhor compreendido analisando os valores de energia cinética obtidos para as respectivas combinações.

A Tabela 20 apresenta os valores de energia cinética calculados para os modos longitudinal e de arfagem do motor, considerando as combinações n.º 4 e n.º 14 respectivamente.

Para ambas combinações (n.º 4 e n.º14), os valores de energia cinética calculados para as direções longitudinal (X) e de arfagem (XZ) são muito próximos, tornando difícil a classificação do modo.

Tabela 20: Energia Cinética calculada para as combinações n.º 4 e n.º14.

Direção	Energia Cinética Combinação N.º 4		Energia Cinética Combinação N.º 14	
	Modo Longitudinal 10.7 Hz	Modo de Arfagem 8.6Hz	Modo Longitudinal 13.0Hz	Modo de Arfagem 10.6Hz
Longitudinal (X)	29,2	35,4	32,8	32,7
Lateral (Y)	0,0	0,2	0,1	7,4
Vertical (Z)	8,1	2,9	4,0	0,9
Rolagem (YZ)	0,7	0,1	0,9	0,0
Arfagem (XZ)	29,7	39,0	36,9	34,4
Guinada (XY)	8,9	2,5	10,6	3,1

Os resultados apresentados na Tabela 19 e Tabela 20, mostraram que o modo lateral apresentou a menor variação, com 1,2Hz, enquanto que o modo de arfagem apresentou a maior variação, com 4,4Hz.

A Figura 55 apresenta um gráfico da dispersão dos resultados, tendo sido possível perceber que, para o modo de arfagem, os valores aparentam estar divididos em grupos, conforme indicado na própria figura.

Figura 55: Resultados obtidos as combinações apresentadas na Tabela 18

Calculando as médias das frequências encontradas para os diversos níveis de rigidezes estabelecidos no estudo, é possível construir o gráfico apresentado na Figura 56, que indica a grande influência do coxim restritor de torque no modo de arfagem.

Figura 56: Efeito das rigidezes dos coxins no valor médio do modo de arfagem do motor.

Considerando a bibliografia pesquisada e a literatura técnica consagrada, não se encontrou resultados demonstrando tamanha influência do coxim restritor de torque nos modos de corpo rígido de um motor transversal suspenso.

Esse fato indica que subsistemas, como os semi-eixos e o escapamento, por estarem conectados ao motor e próximos da região do coxim restritor de torque, também podem ter considerável influência no modo de arfagem, o que levou ao segundo estudo realizado neste trabalho.

Neste estudo, o modelo de elementos finitos foi utilizado para compreender os efeitos que os sub-sistemas citados acima trouxeram para os modos do motor.

Três configurações diferentes foram avaliadas, sendo que a primeira teve o escapamento removido do modelo, a segunda teve os semi-eixos removidos e a terceira teve ambos sub-sistemas removidos. Os resultados obtidos são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 21: Efeito dos sub-sistemas escapamento e semi-eixos nos modos do motor [Hz]

Modo do Motor [Hz]	FEM	FEM s/ Escapamento	FEM s/ Semi-eixos	FEM s/ Escapamento & Semi-eixos
Longitudinal	9,3	9,2	9,1	8,9
Lateral	8,5	8,4	8,4	8,3
Vertical	10,0	10,0	10,0	10,0
Rolagem	14,5	14,5	15,0	15,0
Arfagem	12,2	12,1	10,1	11,0
Guinada	18,2	18,2	18,3	18,3

O estudo mostrou que os semi-eixos tem uma influência considerável no modo de arfagem do motor, uma vez que a frequência desse modo foi reduzida em 2,1Hz quando esse sub-sistema foi removido do modelo.

A contribuição do escapamento foi de apenas 0,1Hz, bem menor se comparada com a contribuição dos semi-eixos. Quando ambos sub-sistemas foram removidos do modelo, o efeito nos modos longitudinais e laterais coincidiram com a soma dos efeitos individuais. O modo de arfagem, no entanto, não seguiu a mesma tendência, uma vez que a respectiva frequência natural teve seu valor aumentado.

É importante ressaltar que a remoção de um sub-sistema implica em mudanças na rigidez e massa do sistema final, e para o caso da frequência natural, a relação entre esses dois fatores determinará se haverá aumento ou redução do valor da frequência.

Foi realizado um comparativo da resposta em frequência obtida com os acelerômetros do experimento e a resposta obtida com o modelo de 12 GDL, cujo resultado é apresentado na Figura 57. Para a resposta do modelo, diferentes valores de amortecimento modal foram considerados para fornecer melhor compreensão sobre o efeito do amortecimento nos resultados do modelo.

Observando a curva obtida com o acelerômetro, o primeiro pico de frequência representa o modo vertical da carroceria com 4,3Hz, os dois picos seguintes representam os modos de guinada e arfagem da carroceria com 4,8Hz and 5,7Hz, sendo que o pico relativo ao modo vertical do motor aparece com 10Hz. Nas curvas obtidas com o modelo, o primeiro pico representando o modo vertical da carroceria com 4,4Hz possui amplitude próxima à obtida com o teste para o fator de amortecimento modal de 5%. Ainda é possível perceber um pico com 6,6Hz relativo ao modo de arfagem e o pico relativo ao modo vertical do motor com 11,1Hz. Como já apresentado nos resultados modais, a frequência obtida com o modelo ficou 1,1Hz (11%) acima do valor fornecido pelo teste.

É importante ressaltar que os modelos consideraram um amortecimento modal constante para toda faixa de frequência calculada e que para a faixa de frequência onde se encontram os modos relativos à carroceria do veículo, um amortecimento modal de 5% se mostrou mais apropriado, enquanto que para a faixa de frequência onde se encontra o modo do motor, um amortecimento de 10% se mostrou mais apropriado.

Figura 57: Comparativo da FRF obtida com o teste e com o modelo de 12 GDL.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Foram apresentados modelos analíticos para calcular os modos de corpo rígido do motor isolado, complementados por análises numéricas com o emprego do método dos elementos finitos e estudos experimentais.

Os resultados fornecidos por tais modelos analíticos auxiliaram na compreensão do comportamento modal do sistema, mostrando que são ferramentas úteis para auxiliar o projeto de sistemas de isolamento de motores, especialmente em estágios iniciais do projeto, onde os parâmetros do veículo ainda estão por ser determinados e protótipos ainda não estão disponíveis.

Os graus de liberdade dos modelos foram explorados e ficou demonstrado que o aumento da complexidade dos modelos melhorou a correlação com os resultados experimentais.

O modelo de corpo rígido com 6GDL apresentou um desvio médio absoluto para os resultados obtidos com o teste experimental de 23% (10% min. e 38% max.), sendo o maior desvio médio encontrado entre os modelos.

O modelo de corpo rígido com 12GDL apresentou pequeno desvio para o teste nos resultados dos modos translacionais, porém o desvio encontrado para o modo de arfagem foi o maior dentre todos os modelos. O desvio médio absoluto obtido com o modelo de 12GDL foi de 15% (4% min. e 39% max.), que por sua vez, foi melhor que o valor médio encontrado para o modelo de 6GDL.

Por fim, o modelo de elementos finitos apresentou resultados consistentes com os experimentais e o desvio médio absoluto foi de 13% (0% min. & 23% max.), o menor desvio médio encontrado.

Análises de sensibilidade mostraram que variações de $\pm 20\%$ nos valores de rigidez dos coxins afetaram significativamente as frequências e os modos de corpo rígido do motor, causando mudanças de até 44% (4,0Hz) na frequência do modo de arfagem, sendo o coxim restritor de torque o elemento com maior influência nos resultados; sobre tal fato, destaca-se que este comportamento não foi encontrado na bibliografia pesquisada nem tampouco na literatura técnica consolidada relativa ao assunto.

Considerando que os modelos de 6GDL e 12GDL são utilizados em estágios iniciais do projeto do sistema de isolamento, onde o nível de informações a respeito projeto ainda é limitado e que a sensibilidade do modelo às mudanças nos valores de rigidez é considerável, os resultados obtidos com os modelos são encorajadores.

Averiguou-se também a possível influência de subsistemas, como os semi-eixos e o escapamento. Os semi-eixos mostraram uma contribuição considerável para o modo de arfagem do motor, causando uma redução de 17% (2,1Hz) na sua frequência quando removidos do modelo de elementos finitos. Já a contribuição do escapamento foi pouco significativa (0.1Hz).

Além da análise de vibrações livres, o modelo de 12 GDL proposto também foi empregado no cálculo da resposta em frequência à excitação proveniente do motor. Os resultados obtidos, quando comparados com os experimentais, permitem “calibrar” os valores dos amortecimentos modais que devem ser adotados nas análises de sensibilidade feitas para identificar tendências no comportamento dinâmico do sistema.

A continuidade do estudo prevê o emprego das ferramentas aqui desenvolvidas e validadas para a realização de análises sistemáticas de vibrações do motor. Nessas análises, diversos parâmetros, como as propriedades e o arranjo dos coxins, serão variados de modo a explorar todas as suas possíveis combinações. A interpretação criteriosa dos resultados poderá colaborar para o estabelecimento de diretrizes de projeto, reduzindo assim o tempo de desenvolvimento dos sistemas de coxinização.

REFERÊNCIAS

- ARAI, T.; KUBOZUKA, T.; GRAY, S. D. Development of an Engine Mount Optimization Method Using Modal Parameters. **SAE Technical Paper Series**, Dearborn, 1993.
- BARBETTI, M. R. S. **Estudo comparativo entre coxim hidráulico e coxim elastomérico, aplicados ao sistema de apoio do motor automotivo**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2005.
- BARBOSA, R. S. Vehicle dynamic response due to pavement roughness. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, p. 302-307, 2011.
- BART PEETERS, P. G. H. V. D. A. B. C. P. V. J. L. Automotive and aerospace applications of the PolyMAX modal parameter estimation method. **Proceedings of IMAC**, v. 22, p. 26-29, 2004.
- BERNARD, J. E.; STARKEY, J. M. Engine Mount Optimization. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1983.
- BERNUCHON, M. A New Generation of Engine Mounts. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1984. 1-10.
- BRACH, R. M. Automotive powerplant isolation strategies. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1997.
- BRETL, J. Optimization of Engine Mounting Systems to Minimize Vehicle Vibration. **SAE Technical Paper Series**, Traverse City, 1993.
- CLARK, M. Hydraulic Engine Mount Isolation. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1985. 12.
- CORCORAN, P. E.; TICKS, G.-H. Hydraulic Engine Mounts Characteristics. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1984. 8.
- CREDE, C. E. **Vibration and Shock Isolation**. New York: John Wiley & Sons, 1951.
- FLOWER, W. C. Understanding Hydraulic Mounts for Improved Vehicle Noise, Vibratio and Ride Qualities. **SAE Technical Paper Series**, Traverse City, 1985.
- FORD, D. M. An Analysis and Aplication of a Decoupled Engine Mount System for Idle Isolation. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1985. 10.
- GECK, P. E.; PATTON, R. D. Front wheel drive Engine mount optimization. **SAE Technical Paper Series**, 1984. 12.
- HAGINO, Y. et al. Active Control for Body Vibration of F. W. D. Car. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1986.
- HARRIS, C. M. **Shock and Vibration Handbook**. 3rd. ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

- HARTOG, J. P. D. **Mechanical Vibrations**. New York: McGraw Hill, 1956.
- HU, J.-F.; SINGH, R. Improved torque roll axis decoupling axiom for a powertrain mounting system in the presence of a compliant base. **Journal of Sound and Vibration**, v. 331, p. 1498–1518, 2012.
- JEONG, T.; SINGH, R. Analytical Methods fo Decoupling the Automotive Engine Torque Roll Axis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 1, p. 85-114, 2000.
- JOHNSON, S. R.; SUBHEDAR, J. W. Computer Optimization of Engine Mounting System. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1979. 8.
- KADOMATSU, K. Hydraulic engine mount for shock isolation at acceleration on the FWD cars. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1989.
- KIM, B. J. **Three dimensional vibration isolation using elastic axes**. Michigan State University. Lansing. 1991.
- KIM, J.-H.; JHO, S.-G.; YIM, H. J. Influence of Chassis Flexibility on Dynamic Behavior of Engine Mount Systems. **SAE Technical Paper Series**, Seattle, 1994.
- LEE, J. M.; YIM, H. J.; KIM, J.-H. Flexible Chassis Effects on Dynamic Response of Engine Mount Systems. **Society of Automotive Engineers Technical Paper Series**, 1995.
- LEE, K. H.; CHOI, Y. T.; HONG, S. P. Performance Design of Hydraulic Mount for Low Frequency Engine Vibration and Noise Control. **SAE Technical Paper Series**, Milwaukee, 1994.
- LIU, Y. Constructing Equations of Motion for A Vehicle Rigid Body. **2008 SAE International**, Detroit, MI, USA, 14-17 April 2008. 9.
- LPETEK, N. K.; GOUDIE , R. J.; BOYLE, F. P. Actively Controlled Damping in Electrorheological Fluid-Filled Engine Mounts. **SAE Technical Paper Series**, Dearborn, 1988.
- MARJORAM, R. H. Pressurized Hydraulic Mounts for Improved Isolation of Vehicle Cabs. **SAE Technical Paper Series**, Chicago, 1985.
- MARJORAM, R. R. Pressurized hydraulic mounts for improved isolation of vehicle cabs. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1962.
- MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. Long Grove,: Waveland Press, Inc, 2001.
- MENDES, A. S. E. A. Dimensionamento estrutural da árvore de manivelas de um motor diesel de alta potência. **SAE Technical Paper Series**, São Paulo, 2003. ISSN 2003-01-3530.
- MORISH, L. M. The Effect of Engine Mounting on Car Shake. **SAE Technical Paper Series**, 1958. 5.

- MORISHITA, S.; MITSUI, J. An Electronically Controlled Engine Mount Using Electro-Rheological Fluid. **SAE Technical Paper Series**, San Francisco, 1992.
- MULLER, M. et al. The Effect of Engine Mounts on the Noise and Vibration Behavior of Vehicles. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1994.
- OKUMA, M. et al. Application of a New Experimental Identification Method Body. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1989.
- PIEZZOTRONICS, P. Automotive Modal Analysis. **PCB Piezotronics**, 2016. Acesso em: 02 Março 2016.
- PLM, S. Siemens PLM Software. **http://www.plm.automation.siemens.com/**, 2016. Acesso em: 03 Março 2016.
- RADCLIFFE, C. J.; PICKLEMANN, M. N.; SPIEKERMANN, C. E. Simulation of Engine Idle Shake Vibration. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1983.
- RIVIN, E. I. Passive Engine Mounts - Some Directions for Further Development. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1985. 12.
- ROYSTON, T. J.; SINGH, R. Periodic Response of Nonlinear Engine Mounting Systems. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1995.
- SAVELL, L. Legal and Legal Humor Articles and Music, 2014. Disponível em: <<http://www.lawrencesavell.com/publications/carsandparts/cp.htm>>. Acesso em: 19 Dezembro 2014.
- SCHIMITT, R. V.; LEINGANG, C. J. Design of Elastomeric Vibration Isolation Mounting Systems for Internal Combustion Engines. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1975. 13.
- SELIM, A. B. **Influência das Forças de Inércia e do Balanceador de Massas na Dinâmica do Motor de Combustão Interna**. Campinas: UNICAMP, 2010.
- SETO, K. et al. Optimum Design Method for Hydraulic Engine Mounts. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1991.
- SHIN, S.; CUSENZA, A.; SHI, F. Offset Crankshaft Effects on SI Engine Combustion and Friction Performance. **SAE Technical Paper**, Detroit, January 2004.
- SHOURESHI, R.; GRAF, P. L. Adaptive Hydraulic Engine Mounts. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1986.
- SNYMAN, J. A. E. A. Vibration isolation of a mounted engine through optimization. **Mechanical Machine Theory**, v. 30, p. 109-118, 1995. ISSN 1.
- STEPP, E. A Computer Technique for Designing Engine Mounts to Control Shake. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1960. 13.

- SUGINO, M.; ABE, E. Optimum Application for Hydroelastic Engine Mount. **SAE Technical Paper Series**, Dearborn, 1986.
- SURESH, N.; SHANKAR, S.; BOKIL, V. Development of Idealistic Hydromount Characteristics to Minimize Engine Induced Vibrations Using Unconstrained Minimization. **SAE Technical Paper Series**, Milwaukee, 1994.
- SWANSON, D. A. Active Engine Mount for Vehicles. **SAE Technical Paper Series**, Milwaukee, 1993. 11.
- TIMPNER, F. F. Design Considerations in Engine Mounting. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1965. 6.
- USHIJIMA, T.; KUMAKAWA, S. Active Engine Mount with Piezo-Actuator for Vibration Control. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1993. 10.
- USHIJIMA, T.; TAKANO, K.; TAKESHI, N. Rheological Characteristics of ER Fluids and Their Application to Anti-Vibration Devices with Control Mechanism for Automobiles. **SAE Technical Paper Series**, Dearborn, 1988.
- USHIJIMA, T.; TAKANO, K.; KOJIMA, H. High Performance Hydraulic Mount for Improving Vehicle Noise and Vibration. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1988.
- VAROTO, P. S. Laboratório de Dinâmica. **Página da disciplina SEM5766 - Análise Modal de Estruturas**, 2016. Disponível em: <http://www2.eesc.usp.br/labdin/varoto/sem5766_varoto_2016.htm>. Acesso em: 03 March 2017.
- WISE, K. A.; REID, R. E. Modeling and Identification of a Light Truck Engine Mounting System for ride quality optimization. **SAE Technical Paper Series**, Detroit, 1984.
- YU, Y.; NAGANATHAN, N. G.; DUKKIPATI, R. V. A literature review of automotive vehicle engine mounting systems. **Machine and Mechanism Theory**, v. 36, n. 1, p. 123-142, 1999.

APÊNDICE A

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%                                CÁLCULO DOS AUTOVALORES-AUTOVETORES
%                                MODELO DE 12 GRAUS DE LIBERDADE
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%     ESSE MÓDULO CONSTROI A MATRIZ DE MASSA, RIGIDES E AMORTECIMENTO
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
% Definindo variáveis

% Propriedades inerciais do motor
Emass = 151.28;           % massa do motor [kg]
EIxx = 10.5073;           % inércia do motor [kg.m^2]
EIyy = 4.966;             % inércia do motor [kg.m^2]
EIzz = 8.996;             % inércia do motor [kg.m^2]
EIxy = 0.5073;           % inércia do motor [kg.m^2]
EIxz = 0.2249;           % inércia do motor [kg.m^2]
EIyz = 1.696;            % inércia do motor [kg.m^2]

% Propriedades inerciais da carroceria
Bmass = 602.342;          % massa da carroceria [kg]
BIxx = 226.314;           % inércia da carroceria [kg.m^2]
BIyy = 700.784;           % inércia da carroceria [kg.m^2]
BIzz = 788.637;           % inércia da carroceria [kg.m^2]
BIxy = 17.089;           % inércia da carroceria [kg.m^2]
BIxz = 15.144;           % inércia da carroceria [kg.m^2]
BIyz = 0.1308;           % inércia da carroceria [kg.m^2]

% Centro de gravidade do motor em [mm]

ECGx = -1306.531;
ECGy = -62.825;
ECGz = -210.353;
ECG = [ECGx ECGy ECGz];

% Centro de gravidade da carroceria [mm]
BCGx = 0.0;
BCGy = 0.0;
BCGz = 0.0;
BCG = [BCGx BCGy BCGz];

% Posição dos coxins definidas no sistema global em [mm]
EP1=[-1287.300 -442.500 -71.326];
EP2=[-1372.950 490.680 -29.090];
EP3=[-871.230 -23.200 -470.220];

% Posição dos coxins definidas em relação ao CG do motor [m]
EP=[EP1-ECG; EP2-ECG; EP3-ECG]/1000;

% Posição dos coxins definidas em relação ao CG da carroceria [m]
EP_B=[EP1-BCG; EP2-BCG; EP3-BCG]/1000;

% Posição dos pneus no sistema global em [mm]

```

```

BP1=[-1136.694 -777.111 -371.119];
BP2=[-1136.694 815.249 -371.119];
BP3=[1390.906 -744.691 -384.003];
BP4=[1390.906 782.829 -384.003];

% Posição dos pneus em relação ao CG da carroceria em [m]
BP=[BP1-BCG; BP2-BCG; BP3-BCG; BP4-BCG]/1000;

% Rigidezes dos coxins do motor em [N/mm]
EK1=[237.0 95.0 203.0]; %RH
EK2=[168.0 168.0 155.0]; %LH
EK3=[136.0 30.0 30.0]; %TR
EK=[EK1; EK2; EK3]*1000.0; % [N/m]

% Rigidezes da suspensão + pneu em N/mm
BK1=[65.0 120.0 200.0];
BK2=[65.0 120.0 200.0];
BK3=[65.0 120.0 200.0];
BK4=[65.0 120.0 200.0];
BK=[BK1; BK2; BK3; BK4]*1000.0; % [N/m]

% Engine Mass Matrix Definition
M=[Bmass 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 Bmass 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 Bmass 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 BIxx BIxy BIxz 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 BIxy BIyy BIyz 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 BIxz BIyz Bizz 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Emass 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Emass 0.0 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Emass 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 EIdx EIdy EIdz;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 EIdy EIdy EIdy;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 EIdz EIdz EIdz];

%-----
% Iniciando construção da matriz de rigidez
%
% Matriz Q4 (mesma do modelo de 6DOF)
% Termos da diagonal principal
%SumKix
a11=EK(1,1)+EK(2,1)+EK(3,1);

%SumKiy
a22=EK(1,2)+EK(2,2)+EK(3,2);

%SumKiz
a33=EK(1,3)+EK(2,3)+EK(3,3);

%SumKiyZiZi+SumKizYiYi
a44=EK(1,3)*(EP(1,2)^2)+EK(2,3)*(EP(2,2)^2)+EK(3,3)*(EP(3,2)^2) ...
    +EK(1,2)*(EP(1,3)^2)+EK(2,2)*(EP(2,3)^2)+EK(3,2)*(EP(3,3)^2);

%SumKixZiZi+SumKizXiXi
a55=EK(1,1)*(EP(1,3)^2)+EK(2,1)*(EP(2,3)^2)+EK(3,1)*(EP(3,3)^2) ...
    +EK(1,3)*(EP(1,1)^2)+EK(2,3)*(EP(2,1)^2)+EK(3,3)*(EP(3,1)^2);

%SumKixYiYi+SumKiyXiXi
a66=EK(1,2)*(EP(1,1)^2)+EK(2,2)*(EP(2,1)^2)+EK(3,2)*(EP(3,1)^2) ...
    +EK(1,1)*(EP(1,2)^2)+EK(2,1)*(EP(2,2)^2)+EK(3,1)*(EP(3,2)^2);
%
```

```

% Termos fora da diagonal principal
%SumKixZi
a15=-EK(1,1)*EP(1,3)-EK(2,1)*EP(2,3)-EK(3,1)*EP(3,3);
a51=-EK(1,1)*EP(1,3)-EK(2,1)*EP(2,3)-EK(3,1)*EP(3,3);

%SumKixYi
a16=EK(1,1)*EP(1,2)+EK(2,1)*EP(2,2)+EK(3,1)*EP(3,2);
a61=EK(1,1)*EP(1,2)+EK(2,1)*EP(2,2)+EK(3,1)*EP(3,2);

%SumKiyZi
a24=EK(1,2)*EP(1,3)+EK(2,2)*EP(2,3)+EK(3,2)*EP(3,3);
a42=EK(1,2)*EP(1,3)+EK(2,2)*EP(2,3)+EK(3,2)*EP(3,3);

%SumKiyXi
a26=-EK(1,2)*EP(1,1)-EK(2,2)*EP(2,1)-EK(3,2)*EP(3,1);
a62=-EK(1,2)*EP(1,1)-EK(2,2)*EP(2,1)-EK(3,2)*EP(3,1);

%SumKizYi
a34=-EK(1,3)*EP(1,2)-EK(2,3)*EP(2,2)-EK(3,3)*EP(3,2);
a43=-EK(1,3)*EP(1,2)-EK(2,3)*EP(2,2)-EK(3,3)*EP(3,2);

%SumKizXi
a35=EK(1,3)*EP(1,1)+EK(2,3)*EP(2,1)+EK(3,3)*EP(3,1);
a53=EK(1,3)*EP(1,1)+EK(2,3)*EP(2,1)+EK(3,3)*EP(3,1);

%SumKizXiYi
a45=-EK(1,3)*EP(1,1)*EP(1,2)-EK(2,3)*EP(2,1)*EP(2,2)-...
      EK(3,3)*EP(3,1)*EP(3,2);

%SumKiyXiZi
a46=-EK(1,2)*EP(1,1)*EP(1,3)-EK(2,2)*EP(2,1)*EP(2,3)-...
      EK(3,2)*EP(3,1)*EP(3,3);

%SumKixYiZi
a56=-EK(1,1)*EP(1,2)*EP(1,3)-EK(2,1)*EP(2,2)*EP(2,3)-...
      EK(3,1)*EP(3,2)*EP(3,3);

Q4 = [a11    0.0    0.0    0.0    a15    a16;
      0.0    a22    0.0    a24    0.0    a26;
      0.0    0.0    a33    a34    a35    0.0;
      0.0    a42    a43    a44    a45    a46;
      a51    0.0    a53    a45    a55    a56;
      a61    a62    0.0    a46    a56    a66];

%
%
% Matrizes Q2
% Termos da diagonal principal
%SumKix
d11=EK(1,1)+EK(2,1)+EK(3,1);

%SumKiy
d22=EK(1,2)+EK(2,2)+EK(3,2);

%SumKiz
d33=EK(1,3)+EK(2,3)+EK(3,3);

%SumKiyZiZi+SumKizYiYi
d44=EK(1,3)*EP(1,2)*EP_B(1,2)+EK(2,3)*EP(2,2)*EP_B(2,2)+EK(3,3)*EP(3,2)*EP_
B(3,2) ...

```

```

+EK(1,2)*EP(1,3)*EP_B(1,3)+EK(2,2)*EP(2,3)*EP_B(2,3)+EK(3,2)*EP(3,3)*EP_B(3,3);

%SumKixZiZi+SumKizXiXi
d55=EK(1,1)*EP(1,3)*EP_B(1,3)+EK(2,1)*EP(2,3)*EP_B(2,3)+EK(3,1)*EP(3,3)*EP_B(3,3) ...

+EK(1,3)*EP(1,1)*EP_B(1,1)+EK(2,3)*EP(2,1)*EP_B(2,1)+EK(3,3)*EP(3,1)*EP_B(3,1);

%SumKixYiYi+SumKiyXiXi
d66=EK(1,2)*EP(1,1)*EP_B(1,1)+EK(2,2)*EP(2,1)*EP_B(2,1)+EK(3,2)*EP(3,1)*EP_B(3,1) ...

+EK(1,1)*EP(1,2)*EP_B(1,2)+EK(2,1)*EP(2,2)*EP_B(2,2)+EK(3,1)*EP(3,2)*EP_B(3,2);
%
% Termos fora da diagonal principal
%SumKixZi
d15=-EK(1,1)*EP(1,3)-EK(2,1)*EP(2,3)-EK(3,1)*EP(3,3);
d51=-EK(1,1)*EP_B(1,3)-EK(2,1)*EP_B(2,3)-EK(3,1)*EP_B(3,3);

%SumKixYi
d16=EK(1,1)*EP(1,2)+EK(2,1)*EP(2,2)+EK(3,1)*EP(3,2);
d61=EK(1,1)*EP_B(1,2)+EK(2,1)*EP_B(2,2)+EK(3,1)*EP_B(3,2);

%SumKiyZi
d24=EK(1,2)*EP(1,3)+EK(2,2)*EP(2,3)+EK(3,2)*EP(3,3);
d42=EK(1,2)*EP_B(1,3)+EK(2,2)*EP_B(2,3)+EK(3,2)*EP_B(3,3);

%SumKiyXi
d26=-EK(1,2)*EP(1,1)-EK(2,2)*EP(2,1)-EK(3,2)*EP(3,1);
d62=-EK(1,2)*EP_B(1,1)-EK(2,2)*EP_B(2,1)-EK(3,2)*EP_B(3,1);

%SumKizYi
d34=-EK(1,3)*EP(1,2)-EK(2,3)*EP(2,2)-EK(3,3)*EP(3,2);
d43=-EK(1,3)*EP_B(1,2)-EK(2,3)*EP_B(2,2)-EK(3,3)*EP_B(3,2);

%SumKizXi
d35=EK(1,3)*EP(1,1)+EK(2,3)*EP(2,1)+EK(3,3)*EP(3,1);
d53=EK(1,3)*EP_B(1,1)+EK(2,3)*EP_B(2,1)+EK(3,3)*EP_B(3,1);

%SumKizXiYi
d45=-EK(1,3)*EP(1,1)*EP_B(1,2)-EK(2,3)*EP(2,1)*EP_B(2,2)-...
      EK(3,3)*EP(3,1)*EP_B(3,2);

d54=-EK(1,3)*EP(1,2)*EP_B(1,1)-EK(2,3)*EP(2,2)*EP_B(2,1)-...
      EK(3,3)*EP(3,2)*EP_B(3,1);

%SumKiyXiZi
d46=-EK(1,2)*EP(1,1)*EP_B(1,3)-EK(2,2)*EP(2,1)*EP_B(2,3)-...
      EK(3,2)*EP(3,1)*EP_B(3,3);

d64=-EK(1,2)*EP(1,3)*EP_B(1,1)-EK(2,2)*EP(2,3)*EP_B(2,1)-...
      EK(3,2)*EP(3,3)*EP_B(3,1);

%SumKixYiZi
d56=-EK(1,1)*EP(1,2)*EP_B(1,3)-EK(2,1)*EP(2,2)*EP_B(2,3)-...

```

```

EK(3,1)*EP(3,2)*EP_B(3,3);

d65=-EK(1,1)*EP(1,3)*EP_B(1,2)-EK(2,1)*EP(2,3)*EP_B(2,2)-...
EK(3,1)*EP(3,3)*EP_B(3,2);

Q2 = [d11    0.0    0.0    0.0    d15    d16;
      0.0    d22    0.0    d24    0.0    d26;
      0.0    0.0    d33    d34    d35    0.0;
      0.0    d42    d43    d44    d45    d46;
      d51    0.0    d53    d54    d55    d56;
      d61    d62    0.0    d64    d65    d66];

%
% Matriz Q1
%
% Matriz Q11
% Termos da diagonal principal
%SumKix
b11=BK(1,1)+BK(2,1)+BK(3,1)+BK(4,1);

%SumKiy
b22=BK(1,2)+BK(2,2)+BK(3,2)+BK(4,2);

%SumKiz
b33=BK(1,3)+BK(2,3)+BK(3,3)+BK(4,3);

%SumKiyZiZi+SumKizYiYi
b44=BK(1,3)*(BP(1,2)^2)+BK(2,3)*(BP(2,2)^2)+BK(3,3)*(BP(3,2)^2)+BK(4,3)*(BP(4,2)^2) ...

+BK(1,2)*(BP(1,3)^2)+BK(2,2)*(BP(2,3)^2)+BK(3,2)*(BP(3,3)^2)+BK(4,2)*(BP(4,3)^2);

%SumKixZiZi+SumKizXiXi
b55=BK(1,1)*(BP(1,3)^2)+BK(2,1)*(BP(2,3)^2)+BK(3,1)*(BP(3,3)^2)+BK(4,1)*(BP(4,3)^2) ...

+BK(1,3)*(BP(1,1)^2)+BK(2,3)*(BP(2,1)^2)+BK(3,3)*(BP(3,1)^2)+BK(4,3)*(BP(4,1)^2);

%SumKixYiYi+SumKiyXiXi
b66=BK(1,2)*(BP(1,1)^2)+BK(2,2)*(BP(2,1)^2)+BK(3,2)*(BP(3,1)^2)+BK(4,2)*(BP(4,1)^2) ...

+BK(1,1)*(BP(1,2)^2)+BK(2,1)*(BP(2,2)^2)+BK(3,1)*(BP(3,2)^2)+BK(4,1)*(BP(4,2)^2);

%
% Termos fora da diagonal principal
%SumKixZi
b15=-BK(1,1)*BP(1,3)-BK(2,1)*BP(2,3)-BK(3,1)*BP(3,3)-BK(4,1)*BP(4,3);
b51=-BK(1,1)*BP(1,3)-BK(2,1)*BP(2,3)-BK(3,1)*BP(3,3)-BK(4,1)*BP(4,3);

%SumKixYi
b16=BK(1,1)*BP(1,2)+BK(2,1)*BP(2,2)+BK(3,1)*BP(3,2)+BK(4,1)*BP(4,2);
b61=BK(1,1)*BP(1,2)+BK(2,1)*BP(2,2)+BK(3,1)*BP(3,2)+BK(4,1)*BP(4,2);

%SumKiyZi
b24=BK(1,2)*BP(1,3)+BK(2,2)*BP(2,3)+BK(3,2)*BP(3,3)+BK(4,2)*BP(4,3);
b42=BK(1,2)*BP(1,3)+BK(2,2)*BP(2,3)+BK(3,2)*BP(3,3)+BK(4,2)*BP(4,3);

```



```

%SumKiyXi
b26=-BK(1,2)*BP(1,1)-BK(2,2)*BP(2,1)-BK(3,2)*BP(3,1)-BK(4,2)*BP(4,1);
b62=-BK(1,2)*BP(1,1)-BK(2,2)*BP(2,1)-BK(3,2)*BP(3,1)-BK(4,2)*BP(4,1);

%SumKizYi
b34=-BK(1,3)*BP(1,2)-BK(2,3)*BP(2,2)-BK(3,3)*BP(3,2)-BK(4,3)*BP(4,2);
b43=-BK(1,3)*BP(1,2)-BK(2,3)*BP(2,2)-BK(3,3)*BP(3,2)-BK(4,3)*BP(4,2);

%SumKizXi
b35=BK(1,3)*BP(1,1)+BK(2,3)*BP(2,1)+BK(3,3)*BP(3,1)+BK(4,3)*BP(4,1);
b53=BK(1,3)*BP(1,1)+BK(2,3)*BP(2,1)+BK(3,3)*BP(3,1)+BK(4,3)*BP(4,1);

%SumKizXiYi
b45=-BK(1,3)*BP(1,1)*BP(1,2)-BK(2,3)*BP(2,1)*BP(2,2)-...
      BK(3,3)*BP(3,1)*BP(3,2)-BK(4,3)*BP(4,1)*BP(4,2);

%SumKiyXiZi
b46=-BK(1,2)*BP(1,1)*BP(1,3)-BK(2,2)*BP(2,1)*BP(2,3)-...
      BK(3,2)*BP(3,1)*BP(3,3)-BK(4,2)*BP(4,1)*BP(4,3);

%SumKixYiZi
b56=-BK(1,1)*BP(1,2)*BP(1,3)-BK(2,1)*BP(2,2)*BP(2,3)-...
      BK(3,1)*BP(3,2)*BP(3,3)-BK(4,1)*BP(4,2)*BP(4,3);

Q11 = [b11    0.0    0.0    0.0    b15    b16;
        0.0    b22    0.0    b24    0.0    b26;
        0.0    0.0    b33    b34    b35    0.0;
        0.0    b42    b43    b44    b45    b46;
        b51    0.0    b53    b45    b55    b56;
        b61    b62    0.0    b46    b56    b66];

%
% Matriz Q12
% Termos da diagonal principal
%SumKix
c11=EK(1,1)+EK(2,1)+EK(3,1);

%SumKiy
c22=EK(1,2)+EK(2,2)+EK(3,2);

%SumKiz
c33=EK(1,3)+EK(2,3)+EK(3,3);

%SumKiyZiZi+SumKizYiYi
c44=EK(1,3)*(EP_B(1,2)^2)+EK(2,3)*(EP_B(2,2)^2)+EK(3,3)*(EP_B(3,2)^2) ...
      +EK(1,2)*(EP_B(1,3)^2)+EK(2,2)*(EP_B(2,3)^2)+EK(3,2)*(EP_B(3,3)^2);

%SumKixZiZi+SumKizXiXi
c55=EK(1,1)*(EP_B(1,3)^2)+EK(2,1)*(EP_B(2,3)^2)+EK(3,1)*(EP_B(3,3)^2) ...
      +EK(1,3)*(EP_B(1,1)^2)+EK(2,3)*(EP_B(2,1)^2)+EK(3,3)*(EP_B(3,1)^2);

%SumKixYiYi+SumKiyXiXi
c66=EK(1,2)*(EP_B(1,1)^2)+EK(2,2)*(EP_B(2,1)^2)+EK(3,2)*(EP_B(3,1)^2) ...
      +EK(1,1)*(EP_B(1,2)^2)+EK(2,1)*(EP_B(2,2)^2)+EK(3,1)*(EP_B(3,2)^2);

%
% Termos fora da diagonal principal
%SumKixZi
c15=-EK(1,1)*EP_B(1,3)-EK(2,1)*EP_B(2,3)-EK(3,1)*EP_B(3,3);
c51=-EK(1,1)*EP_B(1,3)-EK(2,1)*EP_B(2,3)-EK(3,1)*EP_B(3,3);

```

```

%SumKixYi
c16=EK(1,1)*EP_B(1,2)+EK(2,1)*EP_B(2,2)+EK(3,1)*EP_B(3,2);
c61=EK(1,1)*EP_B(1,2)+EK(2,1)*EP_B(2,2)+EK(3,1)*EP_B(3,2);

%SumKiyZi
c24=EK(1,2)*EP_B(1,3)+EK(2,2)*EP_B(2,3)+EK(3,2)*EP_B(3,3);
c42=EK(1,2)*EP_B(1,3)+EK(2,2)*EP_B(2,3)+EK(3,2)*EP_B(3,3);

%SumKiyXi
c26=-EK(1,2)*EP_B(1,1)-EK(2,2)*EP_B(2,1)-EK(3,2)*EP_B(3,1);
c62=-EK(1,2)*EP_B(1,1)-EK(2,2)*EP_B(2,1)-EK(3,2)*EP_B(3,1);

%SumKizYi
c34=-EK(1,3)*EP_B(1,2)-EK(2,3)*EP_B(2,2)-EK(3,3)*EP_B(3,2);
c43=-EK(1,3)*EP_B(1,2)-EK(2,3)*EP_B(2,2)-EK(3,3)*EP_B(3,2);

%SumKizXi
c35=EK(1,3)*EP_B(1,1)+EK(2,3)*EP_B(2,1)+EK(3,3)*EP_B(3,1);
c53=EK(1,3)*EP_B(1,1)+EK(2,3)*EP_B(2,1)+EK(3,3)*EP_B(3,1);

%SumKizXiYi
c45=-EK(1,3)*EP_B(1,1)*EP_B(1,2)-EK(2,3)*EP_B(2,1)*EP_B(2,2)-...
      EK(3,3)*EP_B(3,1)*EP_B(3,2);

%SumKiyXiZi
c46=-EK(1,2)*EP_B(1,1)*EP_B(1,3)-EK(2,2)*EP_B(2,1)*EP_B(2,3)-...
      EK(3,2)*EP_B(3,1)*EP_B(3,3);

%SumKixYiZi
c56=-EK(1,1)*EP_B(1,2)*EP_B(1,3)-EK(2,1)*EP_B(2,2)*EP_B(2,3)-...
      EK(3,1)*EP_B(3,2)*EP_B(3,3);

Q12 = [c11    0.0    0.0    0.0    c15    c16;
        0.0    c22    0.0    c24    0.0    c26;
        0.0    0.0    c33    c34    c35    0.0;
        0.0    c42    c43    c44    c45    c46;
        c51    0.0    c53    c45    c55    c56;
        c61    c62    0.0    c46    c56    c66];

Q1 = Q11+Q12;
%
% Matriz de rigidez final
K=[Q1 -Q2;-Q2' Q4];
%-----

% Invertendo matriz de massa e resolvendo problema de autovalor-autovetor
M_1 = M^-1;
A = M_1*K;
[V,D,flag] = eig(A);

% Convertendo autovalores para Hz
for i=1:12
    Freq(i) = sqrt(D(i,i))/(2.0*pi); % [Hz]
end

% Normalizando autovetores pelo valor de massa
V1 = V(:,1);
V2 = V(:,2);
V3 = V(:,3);

```

```

V4  = V(:,4);
V5  = V(:,5);
V6  = V(:,6);
V7  = V(:,7);
V8  = V(:,8);
V9  = V(:,9);
V10 = V(:,10);
V11 = V(:,11);
V12 = V(:,12);

n_m1 = sqrt(V1'*M*V1);
n_m2 = sqrt(V2'*M*V2);
n_m3 = sqrt(V3'*M*V3);
n_m4 = sqrt(V4'*M*V4);
n_m5 = sqrt(V5'*M*V5);
n_m6 = sqrt(V6'*M*V6);
n_m7 = sqrt(V7'*M*V7);
n_m8 = sqrt(V8'*M*V8);
n_m9 = sqrt(V9'*M*V9);
n_m10 = sqrt(V10'*M*V10);
n_m11 = sqrt(V11'*M*V11);
n_m12 = sqrt(V12'*M*V12);

N_V1 = V1/n_m1;
N_V2 = V2/n_m2;
N_V3 = V3/n_m3;
N_V4 = V4/n_m4;
N_V5 = V5/n_m5;
N_V6 = V6/n_m6;
N_V7 = V7/n_m7;
N_V8 = V8/n_m8;
N_V9 = V9/n_m9;
N_V10 = V10/n_m10;
N_V11 = V11/n_m11;
N_V12 = V12/n_m12;

N_V = [N_V1 N_V2 N_V3 N_V4 N_V5 N_V6 N_V7 N_V8 N_V9 N_V10 N_V11 N_V12 ];

% Calculando energia cinética
ECm1 = N_V1.*(M*N_V1);
ECm2 = N_V2.*(M*N_V2);
ECm3 = N_V3.*(M*N_V3);
ECm4 = N_V4.*(M*N_V4);
ECm5 = N_V5.*(M*N_V5);
ECm6 = N_V6.*(M*N_V6);
ECm7 = N_V7.*(M*N_V7);
ECm8 = N_V8.*(M*N_V8);
ECm9 = N_V9.*(M*N_V9);
ECm10 = N_V10.*(M*N_V10);
ECm11 = N_V11.*(M*N_V11);
ECm12 = N_V12.*(M*N_V12);

ECm = 100*[ECm1 ECm2 ECm3 ECm4 ECm5 ECm6 ECm7 ECm8 ECm9 ECm10 ECm11 ECm12];

```

APÊNDICE B

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%                                CÁLCULO DA FRF DO SISTEMA
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

F = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0];

% definindo variáveis

% frequencia inicial [Hz]
wi = 1.0;

% frequencia final [Hz]
wf = 30.0;

% incremento de frequencia [Hz]
dw = 0.25;

% fator de amortecimento estrutural
G = 0.1;

% definindo vetor de frequencia [Hz]
V_f = (wi:dw:wf);

% definindo vetor de frequencia [rad/s]
w = 2*pi*V_f;

% matriz de massa modal
M_M = V'*M*V;

% matriz de rigidez modal
K_M = V'*K*V;

% determinando frequencias modais
for i=1:12
    wr(i) = sqrt(K_M(i,i)/M_M(i,i));
end

% determinando amortecimento modal
for i=1:12
    qr(i) = G/2;
end

% determinando forças modais
F_M_aux = V'*F;

for i=1:12

    ur(i) = F_M_aux(i)/M_M(i,i);

end

% Determinando fatores de participação modal Qr

```

```

for i=1:12
    Qr(i,1) = ur(i)/(wr(i)^2-w(1)^2+1i*2*qr(i)*wr(i)*w(1));
end

X = V*Qr(:,1);

for j=2:(wf-wi)/dw+1
    for i=1:12
        Qr(i,j) = ur(i)/(wr(i)^2-w(j)^2+1i*2*qr(i)*wr(i)*w(j));
    end
    % determinando coordenadas físicas
    X = [X V*Qr(:,j)];
end

% calculando acelerações
for i=1:12
    for j=1:(wf-wi)/dw+1
        A(i,j) = w(j)^2*X(i,j);
    end
end

```