RODRIGO PROVASI CORREIA

Contribuição ao Projeto de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis:
Ferramentas de *CAD* e Modelo de Macro Elementos

São Paulo

2013

RODRIGO PROVASI CORREIA

**Contribuição ao Projeto de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis:
Ferramentas de *CAD* e Modelo de Macro Elementos**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

São Paulo

2013

RODRIGO PROVASI CORREIA

**Contribuição ao Projeto de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis:
Ferramentas de *CAD* e Modelo de Macro Elementos**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. de Controle e
Automação Mecâ-
nica

Orientador: Prof. Dr. Clóvis de Arruda
Martins

São Paulo

2013

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de janeiro de 2013.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Correia, Rodrigo Provasi

**Contribuição ao projeto de cabos umbilicais e tubos flexíveis: ferramentas de CAD e modelo de macro elementos / R.P. Correia. -- ed.rev. -- São Paulo, 2013.
287 p.**

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

**1. Estruturas offshore 2. Modelo de estruturas oceânicas
3. Mecânica dos sólidos 4. Método dos elementos finitos 5. CAD
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

Dedico este trabalho à minha mãe Isabel.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins pela orientação e pelas discussões durante esses anos do trabalho.

A todos os colegas do laboratório NDF (Núcleo de Dinâmica e Fluidos) pela colaboração e pelo incentivo em todos os momentos.

Ao Alfredo Gay Neto pelas discussões e troca de ideias, especialmente durante a confecção do modelo.

Ao Christiano Odir Meirelles pela valiosa ajuda no desenvolvimento do *software*.

Aos amigos que sempre estiveram presentes durante esses anos, sempre apoiando, seja direta ou indiretamente no trabalho.

A todos os demais que, de alguma forma, colaboraram para que esse trabalho fosse concluído.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro durante o trabalho com a bolsa de Doutorado Direto (processo 2006/06281-8).

“As dificuldades como as montanhas, aplainam-se quando
avançamos por elas.”

Émile Zola

RESUMO

A Engenharia *Offshore* está sempre em evolução, motivada pela busca de novos poços de petróleo, o que acarreta em maiores lâminas d'água e demanda novas tecnologias que tornem o processo viável. Neste contexto, não apenas novos tipos de plataformas são desenvolvidas, mas também novos tipos de tubos flexíveis e cabos umbilicais. A maior dificuldade de gerar esses novos tipos de cabos é determinar a sua viabilidade. Tubos flexíveis e cabos umbilicais são de difícil modelagem, devido à interação entre as camadas, além de difícil concepção, dada a grande variedade de componentes e o grande número de configurações possíveis. O processo de concepção desses cabos é baseado nas funções que os elementos que os compõem têm de cumprir, levando aos tipos de componente que serão utilizados. O processo consiste em definir as funções que o cabo deverá executar e selecionar os elementos que o irão compor. Esse processo deve levar em conta as características estruturais e respeitar restrições definidas no projeto.

Com o objetivo de tornar o processo de concepção desses cabos menos laboriosa, propõe-se neste trabalho uma ferramenta computacional do tipo *CAD* (do inglês *Computer Aided Design*), bem como um modelo de mecânica interna para tratar da interação entre as camadas.

A ferramenta *CAD* aqui proposta difere das demais por facilitar em muito a definição do cabo e de suas funções. Ela inclui ainda ferramentas de verificação da configuração final através de um modelo *3D*. Ela permite ao usuário criar uma configuração totalmente nova a partir de uma biblioteca de elementos previamente definido. O *software* ainda oferece a visualização tridimensional, que facilita a verificação de certos erros de projeto intrínsecos a esses tipos de cabo bem como a visualização de resultados advindos do modelo. Outra possibilidade que o *CAD* traz é a utilização de seus módulos bi e tridimensional como pré e pós processadores de outros modelos, não somente o proposto aqui. Isso aumenta em muito as possibilidades de utilização.

Propõe-se um modelo de elementos finitos com elementos feitos sob medida, denominados aqui como macro-elementos. Nessa modelagem, os elementos são descritos com mais detalhes, procurando levar em conta as características dos elementos físicos que pretendem representar, minimizando o número de elementos necessários para descrever

o problema como um todo. Com esse tipo de abordagem, pretende-se utilizar todas as potencialidades dos modelos numéricos, como por exemplo o abrandamento de certas hipóteses, com as do modelo analítico, incorporando características do elemento físico no modelo matemático. Nesse trabalho propõe-se elementos cilíndricos para capas e tubos equivalentes, elementos de tendão e elementos de ligação e contato.

Palavras-chave: *Cabo Umbilical, Tubo Flexível, Elementos Finitos, Ferramenta CAD, Modelagem de Cabos*

ABSTRACT

The offshore industry is in constant evolution due to the need of reaching new oil fields in increasingly water depths. In this scenario, not only new types of platforms are being designed, but also new types of flexible pipes and new umbilical cable configurations. The greatest difficulty to generate a new concept for a riser is to determine if it is viable or not. Flexible pipes and umbilical cables are complicated to model, due to the interactions between their layers, and to design, due to the great variety of components and possible arrangements. The design of those elements is based on the functions they are intended to perform, leading to the elements that will be selected. The process consists on defining the cable features and selecting the elements that will compose it. The process should take into account the desired structural characteristics and must respect constraints defined in the project.

Aiming to turn the conception of these cables into a less laborious process, this work proposes Computer Aided Design (*CAD*) software, as well an internal mechanic model to deal with the layer interaction.

The *CAD* tool proposed in this work differs from the others by making the cable definition and functions easier. It also includes tools for verification of the cable using a *3D* model. It makes possible to the user to create a totally new configuration based on a predefined component library. The software also has a tri-dimensional visualization module, which makes the verification of certain errors attached to the project of such cables, as well enables the visualization of results from the model. Another possibility that the *CAD* offers is the use of the two and three-dimensional modules as pre- and post processors for other models, not only the one proposed here. This greatly increases its usage possibilities.

It is also proposed a finite element model with custom-made elements, called here macro-elements. In this modeling, the elements are described with more details, taking into account the characteristics of the targeted physical elements, minimizing the number of the necessary elements to describe the problem as a whole. With this kind of approach, one intends to utilize all the potentialities from both numerical models, such as the relaxation of certain hypothesis, and analytical models, bundling into the

mathematical model the physical characteristics of the element. It is proposed in this work cylindrical elements for sheaths and equivalent tubes, tendon elements and contact and connection elements.

Keywords: *Umbilical Cable, Flexible Pipe, Finite Element, CAD Tool, Cable Modeling*

LISTA DE FIGURAS

Figura - 1.1	Distribuição das reservas mundiais provadas de petróleo, em bilhões de barris. Fonte: AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO (2010).	34
Figura - 1.2	Diagrama esquemático das camadas do campo de Tupi. Fonte: Petrobras (2010).	35
Figura - 1.3	Evolução da profundidade para os campos em exploração pela Petrobras no Brasil. Fonte: Petrobras (2010)	36
Figura - 1.4	Diagrama esquemático de diversos tipos de plataforma. Fonte: Miller-McCune Magazine (2010)	37
Figura - 1.5	Foto do Anasuria, o maior <i>FPSO</i> construído a partir de um petroleiro. Fonte: Ship Technology (2010)	38
Figura - 1.6	Exemplo de plataforma do tipo semi-submersível. Fonte: Estaleiro Atlântico Sul (2010)	39
Figura - 1.7	Exemplo de configurações de cabos umbilicais. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007)	40
Figura - 1.8	Exemplo da estrutura da seção transversal de um cabo umbilical de controle. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007)	40
Figura - 1.9	Maquete computacional de um tubo flexível exibindo detalhes das camadas que o compõe feito pelo Tanque Numérico da Escola Politécnica da USP.	41
Figura - 1.10	Diagrama esquemático do processo de <i>design</i> de um cabo umbilical ou tubo flexível	43
Figura - 2.1	Perfil típico de uma carcaça intertravada. Fonte: API Standards (2006).	48
Figura - 2.2	Dobramento de uma carcaça intertravada. Fonte: CRUZ (1996).	49
Figura - 2.3	Representação esquemática do ângulo de assentamento α . Seu valor é medido sempre tendo como referência o eixo central do tubo.	50
Figura - 2.4	Dois esquemas tridimensionais de camadas zeta. Fonte: CRUZ (1996).	51

Figura - 2.5	Perfis típicos da armadura de pressão. Fonte: API Standards (2006).	51
Figura - 2.6	Seção transversal de um cabo eletro-hidráulico para sistemas multiple- xados. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	56
Figura - 2.7	Seção transversal de um cabo umbilical de controle eletro-hidráulico. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	56
Figura - 2.8	Seção transversal de um cabo umbilical de injeção química. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	57
Figura - 2.9	Seção transversal de um cabo umbilical de produção. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	57
Figura - 2.10	Seção transversal de um cabo umbilical de alimentação. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	58
Figura - 2.11	Modelo tridimensional de um STU. Fonte: O'Brien (2007).	59
Figura - 2.12	Primeiro exemplo de seção transversal de um cabo do tipo <i>STU</i> . Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	60
Figura - 2.13	Segundo exemplo de seção transversal de um cabo do tipo <i>STU</i> . Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	60
Figura - 2.14	Terceiro exemplo de seção transversal de um cabo do tipo <i>STU</i> . Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).	60
Figura - 3.1	Diagrama esquemático da curva de momento de flexão versus curvatura. Fonte: WITZ e TAN (1992b).	68
Figura - 3.2	Possíveis configurações de um cabo. Fonte: RAMOS JR. e PESCE (2004).	73
Figura - 3.3	Metodologia para <i>design</i> de um cabo. (Extraído de KNAPP, LE e CRUICKSHANK (1991)).	80
Figura - 3.4	Elemento de viga de 8 graus de liberdade. (Extraído de SAEVIK (1993)).	81
Figura - 4.1	(a) Um exemplo de configuração de riser (b) Um exemplo de discreti- zação do riser do item (a) através do Método dos Elementos Finitos (esquemático). Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).	97
Figura - 4.2	Malha bidimensional (Exemplo de uma placa com um orifício central)	98
Figura - 4.3	Malha Tridimensional (Exemplo de um vaso de pressão)	98

Figura - 4.4 Exemplo de numeração global (a) e numeração local (b). Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).	99
Figura - 4.5 Sistema de coordenadas empregado.	105
Figura - 4.6 Elemento infinitesimal cilíndrico.	105
Figura - 4.7 Plano (seção radial do tubo) modelado como um elemento planar considerando o raio médio (R_m), espessura e altura do cilindro.	109
Figura - 4.8 Áreas infinitesimais de um elemento cilíndrico.	122
Figura - 4.9 Elemento helicoidal esquemático e sistema de coordenadas local associado.	125
Figura - 4.10 Relação entre os sistemas de coordenadas.	136
Figura - 4.11 Elemento de ligação “Bridge”.	137
Figura - 4.12 Esquema de dois corpos em configuração pré-contato.	140
Figura - 4.13 Exemplo dos efeitos da discretização do contato: (a) pouco discretizada; (b) corretamente discretizada.	141
Figura - 4.14 <i>Compliance Law</i> para o contato normal: (a) comportamento ideal; (b) comportamento usando uma <i>Compliance Law</i> ; (c) comportamento usando o método das penalidades.	142
Figura - 4.15 Diferença entre <i>sticking</i> e <i>sliding</i> . A primeira figura é a configuração inicial, seguida pelo caso de <i>sticking</i> e o de <i>sliding</i>	142
Figura - 4.16 <i>Compliance Law</i> para o contato tangencial: (a) comportamento ideal usando a Lei de Coulomb; (b) comportamento usando o método das penalidades. f_{tan} indica a força tangencial, enquanto gap_{tan} o <i>gap</i> tangencial.	143
Figura - 4.17 Esforços atuantes numa seção qualquer do tubo.	153
Figura - 4.18 Deslocamentos resultantes da aplicação de forças numa seção qualquer do tubo (considerando movimento de corpo rígido).	154
Figura - 4.19 Forma da seção transversal considerando deslocamento modulado pelo primeiro termo da série de Fourier.	156
Figura - 4.20 Convergência do deslocamento radial da superfície superior externa do cilindro usando ANSYS.	163
Figura - 4.21 Variação radial (valor absoluto).	164

Figura - 4.22 Variação circunferencial (valor absoluto).	164
Figura - 4.23 Variação axial (valor absoluto).	165
Figura - 4.24 Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>ANSYS</i>).	166
Figura - 4.25 Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	166
Figura - 4.26 Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>ANSYS</i>).	167
Figura - 4.27 Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	167
Figura - 4.28 Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>ANSYS</i>).	168
Figura - 4.29 Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	168
Figura - 4.30 Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>ANSYS</i>).	171
Figura - 4.31 Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	171
Figura - 4.32 Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>ANSYS</i>).	172
Figura - 4.33 Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	172
Figura - 4.34 Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>ANSYS</i>).	173
Figura - 4.35 Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (<i>CAD</i> com Macro Elementos).	173
Figura - 4.36 Comparação entre os deslocamentos e convergência de malha do modelo proposto.	176
Figura - 4.37 Comparação entre as diferentes ordens da série de Fourier no raio externo	

da capa plástica e $z = 429,6mm$	181
Figura - 4.38 Comparação entre os diferentes parâmetros de penalidade. Deslocamento no raio externo da capa plástica e $z = 429,6mm$	182
Figura - 4.39 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS no raio externo da capa plástica e $z = 429,6mm$	183
Figura - 4.40 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.	186
Figura - 4.41 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.	186
Figura - 4.42 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.	187
Figura - 4.43 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.	188
Figura - 4.44 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.	188
Figura - 4.45 Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.	189
Figura - 4.46 Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.	190
Figura - 4.47 Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.	190
Figura - 4.48 Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.	191
Figura - 4.49 Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento radial em função da coordenada circunferencial da capa para $z = 150mm$	194
Figura - 4.50 Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento circunferencial em função da coordenada circunferencial da capa para $z = 150mm$	195
Figura - 4.51 Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento axial	

em função da coordenada circunferencial da capa para extremidade superior.	195
Figura - 5.1 Estereoscopia por cores utilizando WPF. <i>Fonte: Petzold (2007).</i>	207
Figura - 5.2 Elementos de um diagrama de fluxo de dados (<i>DFD</i>).	210
Figura - 5.3 Diagrama de fluxo de dados nível 0.	211
Figura - 5.4 Diagrama de fluxo de dados nível 1.	211
Figura - 5.5 Diagrama de fluxo de dados nível 0 do módulo bidimensional.	212
Figura - 5.6 Diagrama de fluxo de dados nível 1 do módulo bidimensional.	212
Figura - 5.7 Diagrama de fluxo de dados nível 2 do módulo bidimensional. <i>Graphic User Interface.</i>	213
Figura - 5.8 Diagrama de fluxo de dados nível 2 do módulo bidimensional. <i>Presenter.</i>	214
Figura - 5.9 Legenda para os diagramas de fluxo do módulo tridimensional.	215
Figura - 5.10 Diagrama de fluxo de dados nível 0.	215
Figura - 5.11 Diagrama de fluxo de dados nível 1.	215
Figura - 5.12 Diagrama de fluxo de dados nível 2 (Unidade de Processamento Gráfico).	216
Figura - 5.13 Diagrama de fluxo de dados nível 2 (Interface Gráfica).	217
Figura - 5.14 Diagrama esquemático do Caso de Uso.	218
Figura - 5.15 Representação de um ator em um caso de uso.	218
Figura - 5.16 Exemplo de diagrama de caso de uso.	219
Figura - 5.17 Diagrama de casos de uso.	221
Figura - 5.18 Diagrama de casos de uso.	222
Figura - 5.19 Elementos mais utilizados nos diagramas de classe.	223
Figura - 5.20 Diagrama de Dependências de Bibliotecas.	224
Figura - 5.21 Estrutura de dados do Programa.	225
Figura - 5.22 Base de dados <i>Storage</i>	226
Figura - 5.23 Base de dados <i>Structure</i>	227
Figura - 5.24 Primeira possível estrutura de dados.	228
Figura - 5.25 Estrutura de dados base.	229

Figura - 5.26 Detalhamento da estrutura de dados.	230
Figura - 5.27 Janela inicial do programa com caso vazio criado.	231
Figura - 5.28 Adicionando materiais ao projeto.	232
Figura - 5.29 Adicionando componentes ao projeto.	233
Figura - 5.30 Projeto com instâncias dos componentes já arranjadas.	234
Figura - 5.31 Visão tridimensional do cabo projetado.	234
Figura - 5.32 Exemplo de capa plástica gerada por revolução.	235
Figura - 5.33 Exemplo de armadura helicoidal gerada por arrasto.	236
Figura - 5.34 Exemplo de mangueiras geradas por arrasto.	237
Figura - 5.35 Exemplo de perfil da carcaça intertravada.	237
Figura - 5.36 Exemplo de carcaça intertravada.	238
Figura - 5.37 Exemplo de seção transversal de um cabo obtida usando o módulo bidi- mensional.	239
Figura - 5.38 Exemplo de cabo eletro-hidráulico com elementos básicos.	240
Figura - 5.39 Diálogo de configuração de iluminação.	241
Figura - 5.40 <i>ComboBox</i> para a escolha da textura.	242
Figura - 5.41 Exemplo de tubo flexível com utilização de texturas.	243
Figura - 5.42 As duas imagens do cabo eletro hidráulico visto em modo de realidade virtual por frequência (Cada foto é a vista de um olho).	243
Figura - 5.43 Cabo eletro hidráulico visto em modo de realidade virtual por cores.	244
Figura - 5.44 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Desloca- mento radial.	245
Figura - 5.45 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Desloca- mento circunferencial.	245
Figura - 5.46 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Desloca- mento axial.	246
Figura - 5.47 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 0% do deslocamento total.	246
Figura - 5.48 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 50% do deslocamento total.	247

Figura - 5.49 Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 100% do deslocamento total.	247
Figura - A.1 Barra na configuração inicial com eixo fixo ($OXYZ$) e na configuração deformada (indicada pelo índice 1).	258
Figura - A.2 Sistemas de eixos fixo, de Flexão ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) e triedro de Frénet ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$). ..	259
Figura - A.3 Detalhe da barra com eixos coordenados.	259
Figura - A.4 Sistema de forças atuante em um elemento infinitesimal.	261
Figura - A.5 Triedro de Frénet (em vermelho) e eixos de Darboux-Ribeaucourt (em azul) sobre um paralelo de uma esfera.	264

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Incógnitas do problema (Modificada de RAMOS JR. (2001)).	75
Tabela 3.2	Conjunto de equações do problema. (Modificada de RAMOS JR. (2001)).	76
Tabela 3.3	Casos de Contato (Modificada de NAWROCKI e MICHEL (2000)).	90
Tabela 4.1	Conexão entre os graus de liberdade locais e globais. Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).	99
Tabela 4.2	Propriedades do material isotrópico empregado.	160
Tabela 4.3	Propriedades do tubo.	161
Tabela 4.4	Amplitude do deslocamento da superfície superior (Caso de pressão constante).	161
Tabela 4.5	Amplitude do deslocamento da superfície superior (Caso de tração).	162
Tabela 4.6	Propriedades do tubo empregado no segundo teste.	162
Tabela 4.7	Propriedades do material ortotrópico.	169
Tabela 4.8	Amplitude de deslocamento da superfície superior do cilindro medidos no raio externo, extremidade superior. (Caso de pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo com material ortotrópico).	170
Tabela 4.9	Casos a serem estudados (hélice).	174
Tabela 4.10	Propriedades geométricas e de material da hélice.	175
Tabela 4.11	Comparação entre os deslocamentos radiais (extremidade superior da hélice).	177
Tabela 4.12	Comparação entre os deslocamentos circunferenciais (extremidade superior da hélice).	178
Tabela 4.13	Comparação entre os deslocamentos axiais (extremidade superior da hélice).	178
Tabela 4.14	Comparação entre as rotações radiais (extremidade superior da hélice).	179
Tabela 4.15	Comparação entre as rotações circunferenciais (extremidade superior da hélice).	179

Tabela 4.16 Comparação entre as rotações axiais (extremidade superior da hélice).	180
Tabela 4.17 Dados da capa plástica para o caso de contato.	184
Tabela 4.18 Dados da hélice para o caso de contato.	185
Tabela 4.19 Dados do algoritmo de contato.	185
Tabela 4.20 Dados da capa plástica para a formulação de forças.	192
Tabela 4.21 Resultados para aplicação de força de tração de $100N$ na extremidade superior da capa cilíndrica.	193
Tabela 4.22 Resultados para aplicação de momento de torção de $10kN \cdot mm$ na extremidade superior da capa cilíndrica.	193
Tabela 5.1 Comparação entre bibliotecas gráficas.	208

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo de assentamento da hélice
$\gamma_{r\theta}$	Distorção no plano $r\theta$
γ_{rz}	Distorção no plano rz
$\gamma_{\theta z}$	Distorção no plano θz
δr	Variação radial
$\delta \theta$	Variação circunferencial
δz	Variação axial
δX	Variação da grandeza X
ε	Penalidade
ε_r	Deformação na direção radial
ε_θ	Deformação na direção circunferencial
ε_z	Deformação na direção axial
θ	Posição circunferencial
κ	Curvatura
$\boldsymbol{\kappa}$	Vetor curvatura
$\nu_{r\theta}$	Coefficiente de Poisson no plano $r\theta$
ν_{rz}	Coefficiente de Poisson no plano rz
$\nu_{\theta z}$	Coefficiente de Poisson no plano θz
σ_r	Tensão normal na direção radial
σ_θ	Tensão normal na direção circunferencial
σ_z	Tensão normal na direção axial
τ	Tortuosidade
$\tau_{r\theta}$	Tensão de cisalhamento no plano $r\theta$
τ_{rz}	Tensão de cisalhamento no plano rz

$\tau_{\theta z}$	Tensão de cisalhamento no plano θz
φ_x	Rotação ao redor do eixo x
φ_y	Rotação ao redor do eixo y
φ_z	Rotação ao redor do eixo z
ψ_x	Rotação ao redor do eixo x da seção
ψ_y	Rotação ao redor do eixo y da seção
ψ_z	Rotação ao redor do eixo z da seção
ω_x	Deformação angular associada a direção x
ω_y	Deformação angular associada a direção y
ω_z	Deformação angular associada a direção z
Δ	Deslocamentos da seção
Δ_r	Deslocamento radial da seção
Δ_θ	Deslocamento circunferencial da seção
Δ_z	Deslocamento axial da seção
Λ_0	Matriz associada ao termo zero da série de Fourier, tal que $\Lambda_0 = \mathbb{C}_0 + \mathbb{S}_0$
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$	Versores tangenciais
$\mathbf{d}_n$	Deslocamento nodal de um elemento
$\mathbf{f}_{sup}$	Esforços de superfície
$\mathbf{f}_T$	Esforço de atrito
$\mathbf{f}_{volume}$	Esforços de volume
g_N	<i>Gap</i> Normal
$\mathbf{g}_T$	<i>Gap</i> tangencial
g_{T1}, g_{T2}	Componentes do <i>gap</i> tangencial nas direções tangenciais
k	Rigidez
n	n -ésimo termo da série de Fourier
$\mathbf{n}$	Versor normal
$\mathbf{n}_T$	Versor da direção do atrito

n_{T1}, n_{T2}	Componentes do versor da direção do atrito
p_N	Pressão normal
$\mathbf{q}$	Vetor de constantes
s	Variável associada à abscissa curvilínea
t	Espessura
$\mathbf{t}$	Vetor de esforço tangencial
u	Deslocamento na direção radial
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$	Vetores deslocamento dos pontos 1 e 2
u_i^j	Notação compacta para o j -ésimo termo da série de Fourier no nó i
$\bar{u}_n$	Componente do deslocamento radial associada ao cosseno do n -ésimo termo da série de Fourier.
$\bar{\bar{u}}_n$	Componente do deslocamento radial associada ao seno do n -ésimo termo da série de Fourier.
$\mathbf{u}_{nodal}$	Vetor de deslocamento nodais
u_x	Deslocamento na direção x
u_y	Deslocamento na direção y
u_z	Deslocamento na direção z
v	Deslocamento na direção circunferencial
$\bar{v}_n$	Componente do deslocamento circunferencial associada ao seno do n -ésimo termo da série de Fourier.
$\bar{\bar{v}}_n$	Componente do deslocamento circunferencial associada ao cosseno do n -ésimo termo da série de Fourier.
w	Deslocamento na direção axial
$\bar{w}_n$	Componente do deslocamento axial associada ao cosseno do n -ésimo termo da série de Fourier.
$\bar{\bar{w}}_n$	Componente do deslocamento axial associada ao seno do n -ésimo termo da série de Fourier.
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$	Pontos 1 e 2

A	Área
$\mathbf{C}_{mat}$	Matriz de flexibilidade de material
$\mathbb{C}_i$	Matriz associada aos i -ésimos termos com barra da série de Fourier
$\mathbf{D}$	Matriz de relação entre os esforços nodais da seção com os esforços aplicados na seção
$\mathbf{E}$	Matriz de rigidez de material
E	Módulo de elasticidade
E_r	Módulo de elasticidade na direção radial
E_θ	Módulo de elasticidade na direção circunferencial
E_z	Módulo de elasticidade na direção axial
$\mathbf{F}$	Vetor de esforços
$\mathbf{F}_A$	Vetor de esforços nodais
$\mathbf{F}_A^l$	Vetor de esforços nodais
$\mathbf{F}_A^k$	Vetor de esforços nos nós da seção
$\mathbf{F}_B$	Vetor de reações nodais
F_r	Força na direção radial
F_θ	Força na direção circunferencial
F_z	Força na direção axial
$\mathbf{F}_{section}$	Esforços externos aplicados na seção
$F_{r,sec}$	Força radial aplicada na seção
$F_{\theta,sec}$	Força circunferencial aplicada na seção
$F_{z,sec}$	Força axial aplicada na seção
$G_{r\theta}$	Módulo de cisalhamento no plano $r\theta$
G_{rz}	Módulo de cisalhamento no plano rz
$G_{\theta z}$	Módulo de cisalhamento no plano θz
$\mathbf{H}$	Matriz de relação esforços - deformação
$\mathbf{I}$	Matriz identidade

I_x	Momento de inércia na direção x
I_y	Momento de inércia na direção y
J	Momento de inércia na direção z
K	Matriz de rigidez
K_{AA}	Porção da matriz de rigidez ligada aos graus de liberdade livres
K_{AA}^{ll}	Porção da matriz de rigidez ligada aos graus de liberdade livres quando levado em conta graus de liberdade associados à seção
K_{AA}^{lk}	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade livres e da seção
K_{AA}^{kk}	Porção da matriz de rigidez ligada aos graus de liberdade da seção
K_{AB}	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade livres e fixos
K_{AB}^l	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade livres e da fixos quando levado em conta graus de liberdade associados à seção
K_{AB}^k	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade fixos e da seção
K_{BA}	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade fixos e livres
K_{BA}^l	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade da seção e livres
K_{BA}^k	Porção da matriz de rigidez ligada à interação dos graus de liberdade da seção e fixos
K_{BB}	Porção da matriz de rigidez ligada aos graus de liberdade fixos
L	Comprimento
M_r	Momento na direção radial
M_θ	Momento na direção circunferencial
M_z	Momento na direção axial
$M_{x,sec}$	Momento ao redor do eixo x aplicado na seção
$M_{y,sec}$	Momento ao redor do eixo y aplicado na seção

$M_{z,sec}$	Momento ao redor do eixo z aplicado na seção
N_i	Funções de forma de um elemento retangular, $i = 1, \dots, 4$
$\mathbf{Q}$	Vetor variação
$\mathbf{R}$	Esforços equivalentes
$\mathbf{R}_i$	Esforços nodais
R_m	Raio médio
$\mathbf{S}_i$	Matriz associada aos i -ésimos termos com duas barras da série de Fourier
U	Energia de deformação
W	Trabalho dos esforços
$\mathbf{X}$	Vetor deslocamento
$\mathbf{X}_A$	Vetor de deslocamentos livres
$\mathbf{X}_A^l$	Vetor de deslocamentos nodais livres
$\mathbf{X}_A^k$	Vetor de deslocamentos nodais da seção
$\mathbf{X}_B$	Vetor de deslocamentos impostos
$\mathbf{Y}$	Matriz de relação entre os deslocamentos nodais da seção com os deslocamentos de corpo rígido na seção
$, i$	Derivação da variável em relação a coordenada i
dS	Diferencial de área
$dr, d\theta, dz$	Diferencial de variáveis associadas às direções r, θ, z , respectivamente
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Versores do sistema de coordenadas cartesiano
$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$	Versores do sistema do triedro de Frénet
$\vec{t}, \vec{N}, \vec{B}$	Versores do sistema de Darboux-Ribaucourt
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$	Versores do sistema de coordenadas cilíndrico
r, θ, z	Variáveis do sistema de coordenadas cilíndrico
x, y, z	Variáveis do sistema de coordenadas cartesiano

SUMÁRIO

1	Introdução.....	33
1.1	Motivação e objetivos	44
1.2	Estrutura do Trabalho	45
2	Descrição dos Componentes de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis	47
2.1	Componentes de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis	48
2.1.1	Carcaça Intertravada	48
2.1.2	Camadas Plásticas	49
2.1.3	Camada Circunferencial de Pressão.....	50
2.1.4	Armaduras de Tração Helicoidal	52
2.1.5	Fitas	52
2.1.6	<i>Fillers</i>	53
2.1.7	Núcleo Elétrico	53
2.1.8	Mangueiras Hidráulicas	54
2.1.9	Núcleo Eletro-hidráulico	54
2.2	Arranjos de Cabos Umbilicais	55
2.2.1	Cabo Umbilical Eletro-Hidráulico para Sistemas Multiplexados.....	55
2.2.2	Cabo Umbilical de Controle Eletro-hidráulico	56
2.2.3	Cabo Umbilical de Controle de Injeção Química.....	57
2.2.4	Cabo Umbilical de Produção em Poço	57
2.2.5	Cabo Umbilical de Alimentação.....	58
2.2.6	<i>Steel Tube Umbilical (STU)</i>	58

2.3	Conclusão	61
3	Revisão Bibliográfica	63
3.1	Introdução	63
3.2	Abordagem Analítica	64
3.3	Abordagem Numérica	78
3.4	Considerações e escolha do tipo de modelagem à ser feita	87
3.5	Revisão específica	88
4	Macro Elementos Finitos para Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis	95
4.1	Introdução	95
4.2	Método dos Elementos Finitos	96
4.2.1	Método dos Elementos Finitos Linear	96
4.2.2	Método dos Elementos Finitos Não-linear	101
4.3	Macro Elementos Finitos	102
4.3.1	Elemento Cilíndrico de Parede Espessa	104
4.3.2	Elemento Tridimensional para Helicóides	125
4.3.3	Elemento de Ligação “ <i>Bridge</i> ”	137
4.3.4	Elemento de Contato	140
4.3.4.1	Contato considerando <i>sticking</i>	144
4.3.4.2	Contato considerando <i>sliding</i>	146
4.3.5	Elemento de Contato com Série de Fourier	148
4.3.5.1	Contato considerando <i>sticking</i>	150
4.3.5.2	Contato considerando <i>sliding</i>	151
4.3.6	Formulação de Forças	152
4.3.6.1	Cálculo das matrizes para o nó que utiliza série de Fourier	156
4.3.6.2	Cálculo das matrizes para o nó simples	158

4.4	Testes e Validações	160
4.4.1	Elemento Cilíndrico de Parede Espessa	160
4.4.1.1	Caso de Pressão Interna Constante	161
4.4.1.2	Tração na superfície superior	161
4.4.1.3	Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Ângulo	162
4.4.1.4	Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Dobro do Ângulo	165
4.4.1.5	Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Dobro do Ângulo Utilizando Material Ortotrópico	169
4.4.2	Elemento Tridimensional para Helicóides	174
4.4.3	Elemento de Ligação “ <i>Bridge</i> ”	180
4.4.4	Elemento de Contato com Série de Fourier	184
4.4.5	Formulação de forças	192
5	Descrição da ferramenta do tipo <i>CAD</i>	197
5.1	Etapas de Projeto	197
5.2	Requisitos	198
5.2.1	<i>OpenGL</i>	204
5.2.2	<i>Windows Presentation Foundation</i>	205
5.2.3	<i>XNA</i>	207
5.2.4	Comparação entre as bibliotecas gráficas	208
5.3	Especificação.....	210
5.3.1	Diagramas de Fluxo de Dados	210
5.3.1.1	Módulo Bidimensional	211
5.3.1.2	Módulo Tridimensional	214
5.3.2	Casos de Uso	218
5.3.2.1	Casos de Uso - Módulo Bidimensional	220

5.3.2.2	Casos de Uso - Módulo Tridimensional	222
5.3.3	Diagramas de Classe	222
5.4	Descrição da Ferramenta	228
5.4.1	Estrutura de dados	228
	<i>Estrutura de duas listas ligadas</i>	228
	<i>Estrutura do tipo Repositório - Instâncias</i>	229
5.4.2	Exemplo de aplicação do Módulo Bidimensional	231
5.4.3	Exemplos de componentes no Módulo Tridimensional	235
5.4.4	Exemplo de aplicação do Módulo Tridimensional	239
5.4.4.1	Efeitos de Iluminação	241
5.4.4.2	Efeitos de textura	242
5.4.4.3	Estereoscopia	243
5.4.4.4	Visualização de resultados	244
6	Conclusão	249
6.1	Trabalhos Futuros	251
	Referências	253
 Apêndice A – Equações de Equilíbrio e Sistemas de Coordenadas de Vigas Helicoidais		
		257
A.1	Introdução	257
A.2	Descrição dos Eixos Principais e Suas Relações	258
A.3	Equações de Equilíbrio	261
A.4	Eixos de Darboux-Ribaucourt	263
 Apêndice B – Casos de Uso - Módulo Bidimensional		
		267
 Apêndice C – Casos de Uso - Módulo Tridimensional		
		281

1 INTRODUÇÃO

A busca por conhecimento é intrínseca ao ser humano, sendo um grande motivador de avanços em diversos campos. Essa busca faz com que novas tecnologias substituam as existentes, melhorando rendimentos, diminuindo custos e tornando os sistemas mais eficientes. Desde o século passado, a procura por um dos maiores propulsores do desenvolvimento, os combustíveis, sofreu um notório esforço no tangente à busca de novas reservas de petróleo e potenciais novas fontes.

Apesar de o petróleo ter um impacto ambiental maior quando comparado com outras tecnologias, esse se tornou base para diversos processos (desde a utilização como combustíveis até a utilização como plástico e asfalto). Isso, aliado ao fato de que o petróleo é uma fonte não renovável faz com que pesquisas em outras tecnologias (como a utilização de eletricidade, energia eólica, biomassa, entre outros) seja intensificada. Concomitantemente às novas pesquisas continua a busca por novas jazidas. No entanto, as reservas de fácil acesso ou estão esgotadas ou estão próximo disso. As jazidas que possuem dificuldades de acesso e/ou extração mostram-se como únicas opções e para que delas se possa extrair, novas tecnologias são necessárias.

Para expor esse cenário, lança-se mão de dados estatísticos. Segundo relatório da AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO (2010), em anuário referente ao ano de 2008, as reservas mundiais de petróleo são estimadas em 1,3 trilhões de barris, crescendo 0,2% em relação a 2007. Essas reservas estão espalhadas pelo mundo como pode ser visto na figura 1.1., sendo o Oriente Médio o detentor de cerca de 60% delas.

Figura 1.1: Distribuição das reservas mundiais provadas de petróleo, em bilhões de barris. Fonte: AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO (2010).

Segundo o mesmo relatório, o Brasil possui reservas contabilizadas em 20,9 bilhões barris de petróleo, onde as reservas comprovadas contabilizam 12,8 bilhões de barris. Os campos da bacia de Santos, como por exemplo Tupi, Libra, entre outros, apresentam uma característica que motiva diversos trabalhos na área: a camada de pré-sal.

A camada de pré-sal refere-se a um intervalo de rochas que existem sob a camada de sal que compõem a estrutura do solo marinho, como pode ser visto na figura 1.2. A Petrobrás estima que no campo de Tupi possam ser recuperados entre 5 e 8 bilhões de barris de óleo equivalente (óleo mais gás).

Figura 1.2: Diagrama esquemático das camadas do campo de Tupi. Fonte: Petrobras (2010).

Os poços responsáveis pela produção de petróleo mundial encontram-se, em grande maioria (90,9% do total) em terra. Apesar disso, os poços marítimos respondem por 90% do total produzido. No Brasil, grande parte dos poços se encontram em águas profundas, sendo que a barreira de lâmina d'água foi sendo quebrada sucessivamente. A figura 1.3 exemplifica esse aumento de acordo com o campo de exploração.

Para a exploração desses poços são necessários diversos equipamentos e estruturas: plataformas, elementos de ligação (sejam para extração, controle ou ancoragem) e equipamentos de controle do poço (como por exemplo, a árvore de natal).

Figura 1.3: Evolução da profundidade para os campos em exploração pela Petrobras no Brasil. Fonte: Petrobras (2010)

A plataforma é uma das mais importantes estruturas empregadas na exploração de petróleo. Esta pode ser de vários tipos, que variam de acordo com a profundidade em que o poço se encontra e com as condições ambientais às quais é submetida. Um esquema com diversos tipos de plataformas pode ser visto na figura 1.4.

A seguir, descrevem-se brevemente os tipos de plataforma:

- **Plataforma Fixa (*Fixed Platform*):** As plataformas fixas são estruturas modulares de aço instaladas sobre jaquetas, que são presas com estacas no fundo do mar. Esse tipo de plataforma é a primeira da esquerda para a direita na figura 1.4.
- **Plataforma 'Compliantes' (*Compliant Tower*):** a segunda plataforma da esquerda para a direita na figura 1.4. Esse tipo também é fixada no fundo do mar, mas consegue responder melhor aos carregamentos marinhos dada sua flexibilidade.
- **TLP (*Tension Leg Platform*):** As TLPs são plataformas flutuantes que estão presas por tirantes ao fundo do mar, que permanecem tracionados, mantendo a posição da mesma.

Figura 1.4: Diagrama esquemático de diversos tipos de plataforma. Fonte: Miller-McCune Magazine (2010)

- **SPAR:** As plataformas desse tipo não se encontram rigidamente ligadas ao solo (como as fixas e auto eleváveis ou mesmo ligadas por tirantes como as *TLPs*), sendo ligadas ao fundo do mar por linhas de ancoragem. Tal fato possibilita a movimentação de acordo com o carregamento ambiental. As *SPARs* possuem um casco em forma de cilindro que facilita a utilização de *risers* rígidos ao invés de flexíveis, pois diminuem as amplitudes de tração dinâmica sobre eles. Para evitar problemas relacionados a movimentos e vibrações induzidas por vórtices, supressores (conhecidos como *strakes*) são instalados.
- **FPS (*Floating Production System*):** plataformas desse tipo são, como as *SPARs*, ancoradas ao fundo do mar e possuem certa liberdade de movimentação. O tipo mais utilizado de FPS no Brasil é a FPSO.

- **FPSO (*Floating Production, Storage and Offload*):** são plataformas do tipo *FPS*. Antigamente, eram navios petroleiros de casco único reformados mas, atualmente, são projetadas com esse *design*. Esse tipo de sistema possui grandes vantagens na capacidade de armazenamento de óleo. Por serem mais suscetíveis aos carregamentos marítimos (principalmente as ondas), podem ser montadas em configurações do tipo *turret*. Essa configuração consiste em um eixo vertical instalado na proa do navio ao qual todos os *risers*, cabos umbilicais e linhas de amarração são fixados e permite ao navio se alinhar com a resultante dos carregamentos marinhos, diminuindo assim a influência das ondas no seu movimento. Um exemplo de *FPSO* é visto na figura 1.5.

Figura 1.5: Foto do Anasuria, o maior *FPSO* construído a partir de um petroleiro. Fonte: Ship Technology (2010)

- **Plataformas Semi-submersíveis (*Semi-Sub Plataforma*):** possuem sistemas de flutuação denominados *pontoons* que se comunicam através de pilares com o restante da plataforma. Tal configuração permite que o convés dessa plataforma se encontre bem acima do nível do mar. Esses sistemas de flutuação permitem o controle do peso, por bombeamento de lastro, e com isso conseguem, caso necessário, mudar a altura em que a plataforma se encontra. Esse tipo de estrutura é um pouco mais complacente com os carregamentos que as plataformas expostas anteriormente, apresentando pequenas amplitudes de movimento vertical, apesar de estar ancorada ao fundo do mar. Uma plataforma semi-submersível pode ser vista na figura 1.6.

Figura 1.6: Exemplo de plataforma do tipo semi-submersível. Fonte: Estaleiro Atlantico Sul (2010)

Outros elementos também são importantes na exploração *offshore*, dentre eles, os elementos de ligação, que podem ser tubos (flexíveis ou rígidos), cabos umbilicais e linhas de ancoragem.

As linhas de ancoragem ligam a plataforma ao fundo do mar e visam mantê-la numa determinada região, isto é, permitem que ela apresente algum movimento (para poder responder a carregamentos, como no caso das *FPSOs*) dentro de uma margem pré-determinada.

Cabos umbilicais são elementos que têm a finalidade de interligar uma unidade flutuante a um poço submerso, executando diversas funções, dentre as quais: controle elétrico e/ou hidráulico, transmissão de sinais elétricos e/ou óticos, transmissão de energia elétrica para bombeamento submerso ou injeção de fluidos no poço. A figura 1.7 apresenta exemplos de configurações de cabos umbilicais e a figura 1.8 uma representação esquemática de uma seção transversal típica.

Figura 1.7: Exemplo de configurações de cabos umbilicais. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007)

Figura 1.8: Exemplo da estrutura da seção transversal de um cabo umbilical de controle. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007)

Tubos, assim como cabos umbilicais, interligam a unidade flutuante ao poço produtor, porém têm como finalidade levar petróleo e gás do poço para a plataforma, injetar fluidos para melhorar a produtividade do poço (como por exemplo, a injeção de gás retirado do próprio poço, processo esse conhecido como *Gas Lift*), levar o óleo até refinarias ou estações de armazenamento (esses denominados de exportação), além de executar funções de perfuração, entre outras. Para cada uma das funções descritas, existem tipos específicos. Esses tubos são denominados *risers* quando se encontram suspensos e *flowlines* quando estão apoiados sobre o solo.

Os tubos de produção são ditos rígidos quando formados por um único tubo metálico e flexíveis quando compostos de diversas camadas (que, como em cabos umbilicais, servem para tarefas específicas). A figura 1.9 mostra um esquema virtual de um tubo flexível.

Figura 1.9: Maquete computacional de um tubo flexível exibindo detalhes das camadas que o compõe feito pelo Tanque Numérico da Escola Politécnica da USP.

A diversidade de plataformas e elementos de ligação deve-se às distintas condições de exploração. Plataformas são indicadas para diferentes profundidades, enquanto cabos são projetados de acordo com a função e com os carregamentos que deverão suportar. Ainda assim, a escolha da plataforma e dos cabos é feita de forma conjunta. Por exemplo, para grandes movimentos da plataforma, tubos flexíveis são mais indicados, dada sua capacidade de melhor responder a carregamentos de flexão quando comparados a tubos rígidos.

Encontrar soluções para campos em águas cada vez mais profundas é um grande desafio na área da engenharia e tem motivado diversos estudos, tanto de ferramentas quanto de modelos. Uma necessidade da indústria é a criação de ferramentas que auxiliem o processo de desenvolvimento desses cabos de acordo com sua função. Tubos flexíveis e cabos umbilicais demandam um estudo complexo do ponto de vista de projeto, em especial os últimos. Eles devem satisfazer não só requisitos de funcionalidade, mas também devem atender a outros critérios como peso máximo, peso mínimo e valores de rigidez. Ressalta-se ainda que outros aspectos são levados em conta no projeto que estão atrelados à capacidade fabril como por exemplo o número máximo dos componentes na seção e o posicionamentos deles; o comprimento do tramo máximo; o transporte do cabo; entre outros.

A figura 1.10 mostra, esquematicamente, o processo de projeto de um cabo umbilical. Os passos mostram a complexidade do projeto e o número de iterações no processo, uma vez que, caso alguma especificação não seja atendida, o processo precisa retornar e medidas para evitar o problema devem ser tomadas. Por exemplo: deseja-se um cabo que possua um peso máximo, mínimo e que execute determinadas funções. Define-se o arranjo dos elementos e os elementos estruturais necessários. Calculam-se as propriedades. Caso o peso não esteja de acordo com o de projeto, os componentes devem ser revistos e um novo arranjo deve ser gerado. Isso segue até que todos os requisitos sejam atendidos. Esses requisitos podem ser, além das funcionalidades, propriedades, a presença ou ausência de determinados componentes, tensões e deslocamentos máximos estáticos, amplitudes de tensões e deslocamentos dinâmicos, entre outros.

A dificuldade intrínseca desse processo leva à procura de ferramentas que auxiliem o projeto. Atualmente, o cabo é projetado utilizando uma ferramenta de *CAD* convencional e, uma vez aprovados os arranjos e elementos estruturais, as análises são conduzidas utilizando programas específicos. Algo que evitasse essa duplicidade (definição do arranjo e descrição do mesmo para a simulação) já se mostraria como um grande avanço. Uma ferramenta que proponha uma solução completa, englobando o *design* e a avaliação de resultados não está atualmente disponível e seria de grande valia para os profissionais da área. Apesar de ser uma solução mais robusta, a grande variedade de modelos dificulta a criação de uma solução unificada. Se a solução proposta permitir a comunicação e o tratamento de dados entre o aplicativo e os modelos existentes, a sua eficácia será muito maior.

Figura 1.10: Diagrama esquemático do processo de *design* de um cabo umbilical ou tubo flexível

O presente trabalho busca desenvolver esse sistema: uma ferramenta que possibilite uma integração maior das etapas, aumentando a produtividade e minimizando o retrabalho é de grande valia no processo de *design* dessas estruturas. Para compor esse programa, algumas necessidades foram levantadas:

- Uma ferramenta que permita a entrada de dados relativos ao cabo, seus componentes, materiais e arranjos, de maneira simples.
- Uma interligação com um modelo que permita o cálculo das propriedades (como peso, rigidez axial e rigidez flexional, entre outras).
- Um modelo que calcule o comportamento do cabo sob diversos carregamentos e que permita a determinação das propriedades anteriormente citadas.
- Uma ferramenta que permita a análise desses resultados.

Com essas necessidades em mente, propôs-se o presente trabalho, que não busca somente um modelo ou uma ferramenta de *CAD*, mas sim uma solução integrada, que abranja todos os módulos e que se apresente diante do projetista como uma ferramenta que aumente sua produtividade, facilite a criação de configurações variadas e, ao mesmo tempo, gere resultados robustos para validar essas configurações.

1.1 Motivação e objetivos

O que foi apresentado na seção anterior deixa claro o atual panorama da engenharia *offshore* no que diz respeito à busca de ferramentas que auxiliem nos processos cada vez mais complexos envolvidos na exploração de petróleo. O projeto dos cabos umbilicais e tubos flexíveis é uma dessas tarefas e sua execução não é trivial. Aqui encontra-se a motivação do trabalho: tornar essa tarefa um pouco menos árdua para o projetista, provendo uma ferramenta que auxilie no processo de concepção e verificação do cabo por ele criado.

Essa ferramenta não pode ser composta apenas por uma ferramenta gráfica, pois não permite uma avaliação do projeto como um todo; também não pode ser apenas um modelo, pois acarreta em apenas mais trabalho ao projetista, uma vez que além do projeto ser executado em uma ferramenta separada, deverá ainda gerar uma entrada correspondente para esse modelo. Isso demonstra que uma parte não deve existir sem a outra se o que se pretende é facilitar o projeto.

O objetivo do trabalho pode então ser definido como criar uma ferramenta e um modelo que tornem o trabalho de projetar cabos umbilicais e tubos flexíveis mais simples. Isso se traduz numa ferramenta de *CAD* direcionada ao problema, com elementos próprios, facilitando sua inclusão e customização. Deseja-se também meios de visualizar o cabo completo, tridimensionalmente, bem como verificar resultados de simulações; e um modelo, que seja suficiente para auxiliar na fase de projeto do cabo, tendo como principais subprodutos os módulos de rigidez e pesos. Uma outra característica desejável é a possibilidade de utilização da ferramenta como interface de modelos já existentes, seja gerando a entrada para estes, seja pós processando os resultados obtidos.

Procurou-se abranger as duas vertentes neste trabalho, mostrando toda a base de conhecimento necessária ou redirecionando o leitor quando adequado. Para esclarecer os pontos abrangidos nesse texto, a estrutura exibida a seguir foi definida.

1.2 Estrutura do Trabalho

O texto encontra-se dividido em seis capítulos e um apêndice, que cobrem todos os aspectos do trabalho. O primeiro capítulo consiste nesta introdução que busca deixar claro o contexto no qual o trabalho se situa, seus objetivos e a metodologia, bem como tratar de aspectos comuns ao projeto.

O capítulo 2 descreve os elementos componentes de cabos umbilicais e tubos flexíveis. O seu conhecimento permite que modelos matemáticos possam ser desenvolvidos levando em conta a física e as características dos elementos e que interfaces de entrada de dados úteis sejam criadas

Os capítulos 3 e 4 focam o problema da mecânica interna de tubos flexíveis e cabos umbilicais e a modelagens para a sua solução. Eles englobam os fundamentos necessários para o entendimento do problema a ser resolvido, bem como a solução proposta.

O capítulo 3 traz a revisão bibliográfica sobre a modelagem de cabos umbilicais e tubos flexíveis, cobrindo também modelos que sirvam para a representação de cada elemento do cabo, como, por exemplo, representações unidimensionais de vigas curvas, já que são uma possível forma de se tratar cada uma das hélices que compõem uma camada de armadura. Estuda-se ainda o contato, que participa de forma fundamental na interação entre camadas. No decorrer dessa revisão, apreende-se que o problema se encontra atualmente sem uma solução fechada, principalmente no tangente ao cálculo das propriedades equivalentes de flexão. Apesar de existirem modelos que preveem bem o comportamento dos tubos e cabos sob a ação de carregamentos axissimétricos, poucos o fazem quando os carregamentos não são desse tipo ou ainda quando a sua estrutura não apresenta uma axissimetria.

O capítulo 4 exhibe o modelo proposto, deixando claros os prós e contras da abordagem escolhida. Esse capítulo descreve em detalhes a formulação completa do modelo e exhibe também os resultados de testes com os elementos, fazendo comparações quando possível.

No capítulo 5 o *software* proposto é apresentado, exibindo o projeto da ferramenta do tipo CAD (acrônimo para *Computer Aided Design*). O processo de concepção de uma ferramenta de tal porte passa por uma fase extensa de projeto, que busca deixar claros os objetivos e funcionalidades almejados no produto, gerando uma ampla documentação. Documentação é uma palavra chave no processo de confecção de uma ferramenta de qualidade, sendo apresentada na forma de diagramas, relatórios, manuais ou ainda como

comentários em código. Tal fase de projeto se mostra necessária e de extrema importância. O foco desse texto não é exibir as metodologias nem a codificação propriamente dita, mas sim exibir o resultado final, bem como dar uma ligeira noção do processo empregado. Nesse capítulo, ainda, ressalta-se a importância da descrição de uma base de dados adequada ao problema e a solução de engenharia encontrada para essa estrutura. Mostra-se como o compromisso com a flexibilidade é obtido, bem como todas as etapas do projeto de um cabo.

Sobre o produto propriamente dito, exibe-se os módulos bi- e tridimensional. O primeiro é focado na geração da seção transversal. Já o segundo é responsável pela visualização do cabo em três dimensões, permitindo que possíveis erros de projeto não detectáveis na visualização bidimensional sejam encontrados. Por exemplo, elementos iguais que apresentem ângulos de assentamento diferentes ou ainda elementos diferentes com mesmo ângulo de assentamento podem se sobrepor, mesmo que na vista bidimensional isso não ocorra. Esse módulo também é integrado ao modelo numérico, permitindo a visualização de campos de deslocamento e tensões (seja no cabo completo, seja em parte dele, utilizando cortes e ocultando camadas). Ressalta-se que apesar desse ter sido planejado para trabalhar como um todo, cada um dos módulos pode ser visto separadamente e podem ser utilizados em conjunto com outros, desde que interfaces adequadas sejam escritas.

O capítulo 6 traz as conclusões do presente trabalho, bem como uma descrição de trabalhos futuros.

E por fim, apresenta-se o apêndice A, que exibe as equações de equilíbrio e sistema de coordenadas utilizados em elementos tridimensionais helicoidais, que facilitam a compreensão do leitor quando da formulação do modelo.

2 DESCRIÇÃO DOS COMPONENTES DE CABOS UMBILICAIS E TUBOS FLEXÍVEIS

Esse capítulo descreve os componentes comumente presentes nos cabos umbilicais e tubos flexíveis. Apesar da semelhança construtiva entre ambos, tubos flexíveis menor variações de arranjos. Os tubos flexíveis variam na presença ou não de uma barreira de pressão, por exemplo, ao passo que cabos umbilicais possuem diversos componentes (como mangueiras elétricas, hidráulicas, ópticas) que estão presentes de acordo com a funcionalidade desejada. Essa variedade de arranjos é o que torna a modelagem de cabos umbilicais mais complexas.

Para melhor compreender como esses cabos funcionam, é necessário conhecer os elementos que porventura os componham.

O primeiro tópico desse capítulo trata de algum desses componentes, pois existem uma grande gama de componentes e procurou-se mostrar aqui os que são mais usuais. Componentes incluem carcaças intertravadas, camadas plásticas, camadas circunferenciais de pressão, armaduras de tração, fitas, *fillers*, núcleo elétrico, mangueiras hidráulicas, tubos, veias de potencia, fibras óticas, mangueiras reforçadas, entre outros. Eles podem ser encontrados em ambos os cabos, salvo quando explícito o tipo de cabo em que pode ser encontrado. Para cada um deles, são descritas suas funções, características e dados necessários para a modelagem matemática e para a modelagem geométrica, que serve de entrada para a construção computacional bi e tridimensional desses elementos. O segundo tópico foca na diversidade de cabos umbilicais encontrada, mostrando alguns tipos de arranjos, já que o arranjo de um tubo é sempre de camadas concêntricas, podendo ter armaduras de tração simples ou dupla, ser bonded ou unbonded, ter ou não carcaça intertravada, serem isolados ou não, ter *liner* simples ou duplo, entre outras modificações.

2.1 Componentes de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis

2.1.1 Carcaça Intertravada

A carcaça intertravada é, em geral, a camada mais interna quando se trata de tubos flexíveis e está presente nos cabos umbilicais nas mangueiras HCR. Sua função é evitar o colapso do tubo, resistindo tanto a pressões externas quanto a pressões de estrangulamento provocada pelas armaduras helicoidais quando tracionadas. Essa camada apresenta um perfil peculiar, em geral no formato de fitas enroladas em forma de S, como pode ser visto na figura 2.1 e na figura 2.2 e por isso, não garante a estanqueidade do tubo. Em geral, são confeccionadas em aço inoxidável, o que evita possíveis danos causados pelo fluido transportado pelo tubo.

Para se modelar matematicamente o comportamento estrutural dessa camada são necessárias as propriedades do material, bem como as características do perfil - tanto da seção transversal quanto longitudinal - além do raio médio, da espessura da camada e do ângulo de enrolamento do perfil (na figura 2.3 é o ângulo α). Quanto à modelagem geométrica, também são necessárias as características do material (como cor e textura que o representem). A “largura” do S é a projeção da coroa circular formada por essa camada, que deve ser ponderada pela inclinação, ao passo que o “comprimento” deve ser usado para dar a noção de profundidade à representação tridimensional do cabo.

Carcasa Profile

Figura 2.1: Perfil típico de uma carcaça intertravada. Fonte: API Standards (2006).

Figura 2.2: Dobramento de uma carcaça intertravada. Fonte: CRUZ (1996).

2.1.2 Camadas Plásticas

As camadas plásticas possuem funções diversas de acordo com seu posicionamento no cabo. Quando essas são internas, têm como função garantir a estanqueidade do tubo, já que a carcaça intertravada não o faz, além de garantir o posicionamento de componentes. Quando são externas, devem manter o confinamento dos tendões das armaduras helicoidais. Os materiais geralmente empregados na confecção das camadas plásticas são polímeros como o polietileno de alta densidade, polietileno de baixa densidade, PVDF (sigla em inglês de Polyvinylidene fluoride ou Fluoreto de polivinilideno) e alguns tipos de *nylon*.

Para a modelagem estrutural matemática das camadas plásticas são necessários os dados do material que as compõem, bem como o raio e a espessura da camada. Para a modelagem geométrica necessita-se ainda da cor e textura do material, o que proporciona maior realismo no processo de visualização.

Figura 2.3: Representação esquemática do ângulo de assentamento α . Seu valor é medido sempre tendo como referência o eixo central do tubo.

2.1.3 Camada Circunferencial de Pressão

A camada circunferencial de pressão ou armadura de pressão, tem como finalidade dar suporte às demais camadas, bem como resistir a grandes pressões internas. Podem não estar presentes caso as pressões internas envolvidas sejam baixas o suficiente para que possam ser resistidas apenas pelas armaduras de tração helicoidais. A camada circunferencial de pressão em geral possui um baixo ângulo de assentamento (por volta de 89° medidos em relação ao eixo central do tubo) e, ao contrário da camada intertravada, essa camada não possui um único tipo de perfil. Na figura 2.4 vê-se um esquema tridimensional de dois deles e na figura 2.5, são exibidas algumas possíveis formas que podem assumir. Em geral, emprega-se na sua confecção aços de baixo teor de carbono.

Para a modelagem estrutural matemática dessa camada são necessários os dados relativos ao material, bem como as características do perfil, além do raio médio, a espessura da camada e o ângulo de assentamento.

Quanto à modelagem geométrica, são necessárias as características do material (como cor e textura) e descrição detalhada do perfil, para que, como no caso da carcaça intertravada, possa-se obter um modelo com características visuais que propiciem o grau de realismo desejado. Como nesse caso o perfil é variável, o mesmo deve ser fornecido previamente.

Figura 2.4: Dois esquemas tridimensionais de camadas zeta. Fonte: CRUZ (1996).

Pressure Armor Profiles

A) Z-shape

B) C-shape

C) T shape 1

D) T shape 2

Figura 2.5: Perfis típicos da armadura de pressão. Fonte: API Standards (2006).

2.1.4 Armaduras de Tração Helicoidal

As armaduras de tração helicoidais têm como função dar suporte às camadas adjacentes e fornecer resistência axial ao tubo, para que esse consiga lidar com os carregamentos impostos. Em geral, são encontradas em pares, enroladas em forma de helicoides de sentidos opostos. Essas têm como características serem compostas por um número definido de tendões, cuja seção transversal pode ser de forma diversa, como por exemplo, circular ou quadrangular, e pelo ângulo de assentamento da hélice. Em geral essas são feitas de aço.

Para modelá-las estruturalmente são necessárias as propriedades do material que as compõem, a geometria dos tendões (como a medida dos lados em seções retangulares e o raio em seções circulares), bem como o número dos mesmo, o ângulo de enrolamento da hélice e a espessura e raio médio da camada. A modelagem geométrica necessita ainda, além das características do material, a distribuição dos tendões no cabo, isto é, o espaçamento e alinhamento relativo (normalmente considera-se que os tendões encontram-se igualmente espaçados).

2.1.5 Fitas

Existem, basicamente, dois tipos de fitas empregadas em tubos flexíveis e cabos umbilicais: as fitas anti-fricção e as fitas de reforço.

As primeiras têm como função minimizar o atrito entre camadas adjacentes, evitando o desgaste das camadas em contato. Essas são usualmente empregadas no contato de duas camadas metálicas, especialmente entre o par de armaduras helicoidais. Normalmente são levadas em conta na modelagem matemática como uma modificação no coeficiente de atrito entre as camadas, não apresentando função estrutural.

Já as fitas de reforço são utilizadas para aumentar a rigidez radial da estrutura, prevenindo a instabilização das armaduras (fenômeno conhecido como gaiola de pássaro ou *bird-caging* em inglês), por exemplo. Ao contrário das fitas anti-fricção, essas apresentam função estrutural, aumentando a resistência radial a cargas de pressão interna do cabo.

Para a modelagem geométrica de ambas são necessários os dados do material, como textura e cor, além da espessura da camada e o ângulo de enrolamento.

2.1.6 *Fillers*

Os elementos conhecidos como *fillers* têm como principal função manter os elementos posicionados quando há um espaço interno não utilizado, como por exemplo, numa camada com mangueiras onde há “vazios” entre as mesmas, o que levaria a um desarranjo estrutural. *Fillers* são, em sua maioria, compostos de materiais poliméricos. Estes podem ser modelados matematicamente como molas que atuam em todas as direções, como se aplicassem forças para manter os elementos devidamente posicionados. Para a modelagem geométrica, necessita-se da região ocupada pelos *fillers*, no caso de preencherem a camada ou da região de cobertura, quando esses recobrem parte da camada ou ainda do diâmetro, no caso de estes serem elementos cilíndricos (como bastões poliméricos).

2.1.7 Núcleo Elétrico

O núcleo elétrico é composto de cabos elétricos os quais fornecem energia aos equipamentos submersos, além das funções de comando, estando presente apenas nos cabos umbilicais. São compostos por um ou mais fios elétricos. Normalmente são envolvidas por uma camada de armadura helicoidal de menor dimensão, que resiste a esforços de tração.

A modelagem matemática necessita dos dados dos materiais componentes, bem como do arranjo dos fios. A modelagem geométrica pode ter um maior nível de detalhamento, se desejado, sendo possível reproduzir o arranjo dos fios, como um trançado com angulação constante, recobertos por uma camada plástica (isolante) e dispostos como determinado na configuração, além de serem circundados por um *filler*. Caso se deseje modelá-lo de maneira simplificada, descreve-se o núcleo como um cilindro único ou mesmo como um conjunto de cilindros (representando cada um dos elementos). Há a necessidade do ângulo de enrolamento dos fios, para que a visualização tridimensional torne-se mais fiel à realidade.

2.1.8 Mangueiras Hidráulicas

As mangueiras hidráulicas são responsáveis pelo comando dos equipamentos submersos, sendo encontradas apenas nos cabos umbilicais. Podem ter função estrutural, quando compostas de materiais metálicos ou quando armadas.

Para a modelagem matemática das mangueiras são necessárias as propriedades do material, bem como as dimensões - raio e espessura - das mesmas. A modelagem geométrica necessita da característica do material, como cor e textura. Outro dado necessário é o ângulo de enrolamento.

2.1.9 Núcleo Eletro-hidráulico

Algumas vezes o núcleo elétrico e as mangueiras encontram-se associados no cabo umbilical, sendo muitas vezes tratado como um único componente, o qual denomina-se núcleo eletro-hidráulico. Muitas vezes esse é modelado como tubo equivalente, enquanto que na modelagem individual, o núcleo elétrico e as mangueiras hidráulicas são separados e tratados como os demais elementos componentes do cabo.

Para a modelagem geométrica, pode-se tratá-lo como um conjunto de mangueiras e cabos elétricos, que podem ser descritos conforme dito anteriormente, mas ainda são necessários o ângulo de enrolamento das mangueiras e dos fios, bem como o ângulo relativo entre esses elementos. Devem também ser fornecidos os dados relativos à camada externa ao núcleo, que possui uma modelagem geométrica feita da mesma forma que a das camadas plásticas.

2.2 Arranjos de Cabos Umbilicais

Uma vez que os componentes usuais de cabos umbilicais e tubos flexíveis foram vistos, cabe uma pequena discussão sobre os arranjos. Como dito no capítulo introdutório, cabos umbilicais possuem configurações diversas, que dependem das funções e restrições a que o cabo está sujeito. Todos os elementos exibidos devem ser levados em conta na hora do projeto de uma ferramenta, visto que são os mais comumente empregados. Na representação geométrica todos serão considerados, ao passo que na modelagem matemática, apenas os que possuem alguma função estrutural serão levados em conta. De qualquer maneira, é importante conhecer-se os componentes e, para exemplificar, algumas configurações existentes serão exibidas.

A seguir são mostradas algumas das várias configurações de cabos umbilicais usados na indústria, bem como sua descrição e sua seção transversal. É dado um destaque especial a uma nova família de cabos, os denominados *STU* (acrônimo de *Steel Tube Umbilical*) que procuram reduzir o peso fazendo com que parte ou todo o esforço axial recaia sobre as mangueiras metálicas (eliminando assim parte ou toda a armadura helicoidal). Existem cabos que devem toda sua resistência axial às mangueiras metálicas, mas isso não é necessariamente regra, sendo que armaduras podem estar presentes, respondendo por parte dos carregamentos. Todos os cabos são desenvolvidos e testados para suportar condições ambientais severas em águas profundas de mais de 1000 metros de lâmina d'água tanto em aplicações estáticas quanto em dinâmicas, como ressaltado em Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.1 Cabo Umbilical Eletro-Hidráulico para Sistemas Multiplexados

Esses cabos têm como componentes mangueiras de alta pressão para controle hidráulico, controle elétrico e cabos de controle.

Como principal característica, as mangueiras hidráulicas são feitas de *nylon* extrudado, reforçadas com poliuretano. Como pode ser visto na seção transversal desse cabo, exibido na figura 2.6, ele possui um segundo par de armaduras, o que garante uma maior rigidez axial.

Figura 2.6: Seção transversal de um cabo eletro-hidráulico para sistemas multiplexados. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.2 Cabo Umbilical de Controle Eletro-hidráulico

Esses cabos são bem semelhantes ao cabo anteriormente exibido, mas apresenta uma armadura extra, em torno do núcleo elétrico, ao invés de um segundo par de armaduras. Observa-se que a distribuição dos componentes também é alterada, como pode ser visto na figura 2.7.

Figura 2.7: Seção transversal de um cabo umbilical de controle eletro-hidráulico. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.3 Cabo Umbilical de Controle de Injeção Química

Esses cabos possuem características semelhantes aos dois anteriores, como o núcleo elétrico e as mangueiras de alta pressão, possuindo mangueiras de alta pressão para a injeção química e de etanol, como pode ser visto na figura 2.8.

Figura 2.8: Seção transversal de um cabo umbilical de injeção química. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.4 Cabo Umbilical de Produção em Poço

Esses cabos são bem semelhantes aos cabos anteriormente exibidos, porém com uma maior resistência estrutural, uma vez que são planejados para trabalhar em profundidades superiores a 2.000 metros. A seguir, na figura 2.9, visualiza-se a seção transversal destes cabos.

Figura 2.9: Seção transversal de um cabo umbilical de produção. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.5 Cabo Umbilical de Alimentação

Esses cabos são utilizados na indústria naval para distribuir a alimentação e comunicação, em duas vias, entre unidades de produção e em sistemas de bombeamento submerso. Percebe-se na figura 2.10 que os cabos elétricos são mais robustos, além da presença de um cabo óptico.

Figura 2.10: Seção transversal de um cabo umbilical de alimentação. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.2.6 Steel Tube Umbilical (STU)

Esses cabos possuem uma grande diferença quando comparado aos demais cabos umbilicais: parte da resistência axial é conferida às mangueiras metálicas. A armadura helicoidal é o elemento que garante a resistência axial do cabo nos casos anteriormente vistos. No caso dos *STUs* essa pode ou não estar presente. Quando não está, essa função é exercida pelas diversas mangueiras fabricadas em aço inox. A armadura, quando presente, dividirá a carga com estas. A figura 2.11 mostra como esse cabo se apresenta, sendo que esse modelo tridimensional permite uma melhor visualização dos elementos em conjunto.

Figura 2.11: Modelo tridimensional de um STU. Fonte: O'Brien (2007).

Já na figuras 2.12 a 2.14, podem ser observadas as seções transversais presentes em Prysmian Cables And Systems (2007). Segundo esse último, os *STUs* são desenvolvidos para trabalhar nas condições ambientais mais severas e em águas ultra-profundas, com profundidade superior a 3.000 metros. Ressaltam que os tubos são feitos de aço inox, que previnem que o fluido permeie o cabo. Além disso, o aço inox previne a corrosão devido a alta pressão e temperatura. Uma característica desses cabos é que, por possuírem menores diâmetros (já que normalmente não possuem armadura de tração) os carretéis permitem que maiores trechos de cabo sejam utilizados. Isso aliado a técnicas de soldagem a laser, fazem com que sejam ideais para aplicações em águas ultraprofundas.

Figura 2.12: Primeiro exemplo de seção transversal de um cabo do tipo *STU*. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

Figura 2.13: Segundo exemplo de seção transversal de um cabo do tipo *STU*. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

Figura 2.14: Terceiro exemplo de seção transversal de um cabo do tipo *STU*. Fonte: Prysmian Cables And Systems (2007).

2.3 Conclusão

Esse capítulo mostra os detalhes construtivos do objeto de estudo deste trabalho. Essa parte exemplifica a complexidade do problema com que se pretende lidar. A grande variedade de materiais e funções implicam em grande diversidade de arranjos e em grande dificuldade tanto de projeto quanto de modelagem. O desafio imposto por essas estruturas é que motiva este trabalho, seja na definição de um modelo matemático capaz de lidar com essa variedade de configurações, seja na parte de projeto, que possui diversas restrições e demanda grande esforço do projetista.

Apesar de apenas algumas poucas configurações serem exibidas nesse texto, várias outras existem e as possibilidades de diferentes configurações são enormes. Logo, uma ferramenta que facilite esse processo é de fundamental importância para melhorar a produtividade e facilitar o projeto e análise de cabos umbilicais e tubos flexíveis. Nas partes seguintes desse trabalho discorre-se sobre tais vertentes.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Introdução

Nesse capítulo serão exibidas as possíveis maneiras de se modelar o problema de cabos umbilicais e tubos flexíveis, através da revisão bibliográfica dos principais textos do assunto.

Existem várias maneiras de fazer essa modelagem. Pode-se dividir as abordagens em dois grandes grupos: analítico e numérico. Cada um deles apresenta vantagens e desvantagens, sendo empregados de acordo com os propósitos desejados. Em geral, a modelagem analítica carrega mais hipóteses, porém a adoção dessas hipóteses torna possível obter a solução do problema com menor esforço computacional. Durante o decorrer do texto, procurar-se-á deixar claras quais as hipóteses feitas e quais são as possíveis considerações não explicitadas pelos autores.

Já a modelagem numérica pode ser dividida novamente em dois grupos: um que utiliza modelos proprietários e outra que se utiliza de programas de elementos finitos comerciais. O primeiro subgrupo tem como foco a criação de elementos feitos sob medida para o problema, procurando incluir o máximo de características do mesmo. O segundo tenta reproduzir a resposta estrutural de um cabo completo. Ambos carregam menos hipóteses quando comparados a modelos analíticos, porém deve-se atentar ao custo computacional associado.

Todos as vantagens e desvantagens de cada modelo, as hipóteses envolvidas e os resultados obtidos serão discutidos nos próximos itens. Uma vez concluída a revisão, pondera-se sobre a melhor abordagem, considerando todos os possíveis fatores, para a proposta dessa tese.

Uma vez definida a abordagem, uma revisão específica foi feita para auxiliar no desenvolvimento do problema. Tal revisão também é exibida neste capítulo.

3.2 Abordagem Analítica

A abordagem analítica é muito empregada no estudo de cabos umbilicais e tubo flexíveis por resultar em sistemas de equações que podem ser resolvidos facilmente com o auxílio de um computador. Apesar de o problema resultante ser de fácil resolução, a obtenção desse sistema não o é, sendo necessária uma grande gama de hipóteses para que a modelagem torne-se factível. O principal desafio nessa modelagem são os elementos dispostos em forma helicoidal, bem como a diversidade de elementos em configurações de cabos umbilicais.

Em geral, os elementos estruturais são divididos em dois grupos: os elementos dito helicoidais, que são modelados como barras unidimensionais - nessa categoria encontram-se apenas os tendões que compõem as armaduras helicoidais ou ainda mangueiras e cabos elétricos; e os elementos “de capa plástica”, que modelam não só camadas plásticas (internas e externas), mas também elementos que têm natureza helicoidal (como carcaças intertravadas e barreiras de pressão) mas que são consideradas através de “cilindros equivalentes”, tendo suas propriedades adequadas às de um cilindro de mesmas dimensões, com módulos de rigidez equivalentes.

As barras curvas, usadas para descrever os elementos helicoidais, foram descritas inicialmente por Clebsch e por Kirchhoff, mas as equações que regem seu comportamento ficaram mais conhecidas como “Equações de Love”, após seu clássico livro (ver LOVE (1944)), que descreve toda a formulação para a obtenção desse conjunto de equações de equilíbrio. Para melhor compreensão de como essas equações foram desenvolvidas, foi feito um estudo com o intuito de esclarecer os procedimentos para a obtenção dessas equações que pode ser visto no apêndice A. A modelagem proposta por Love tem muitas hipóteses, dentre elas:

- Seções planas permanecerem planas.
- Os materiais são elásticos lineares.
- São consideradas apenas pequenas deformações.

Como pode-se ver nos artigos exibidos a seguir, os autores utilizam-se extensivamente das equações de Love para descrever o comportamento de elementos helicoidais no cabo. Esses artigos estão exibidos de maneira cronológica para permitir que se acompanhe a evolução do raciocínio e o tratamento do problema.

KNAPP (1979) escreveu um dos primeiros artigos a tratar sobre o comportamento de cabos com armadura, descrevendo o processo para a obtenção de um sistema de equações para cabos com armadura considerando tração e torção. O autor deixa claro as hipóteses por ele adotadas, que são:

- As equações são válidas para elementos de cabo retos.
- A geometria da deformação de um tendão helicoidal pode ser descrita pelo seu eixo central, ou seja, o diâmetro do fio é pequeno comparado com o passo da hélice.
- A hipótese de Navier é válida.
- Os fios de uma camada helicoidal são igualmente espaçados ao redor da circunferência do cabo.
- Os fios e o núcleo são homogêneos, isotrópicos e lineares elásticos.
- A redução de diâmetro dos tendões devida ao contato entre fios é desprezada.
- As deduções são feitas para fios de seção circular.
- As deformações são consideradas pequenas.

Assim, usando como variáveis os graus de liberdade para a translação e rotação das extremidades do cabo, o autor equaciona a deformação axial e a deformação à torção adimensionalizadas, relacionando assim os deslocamentos com as deformações. Em seguida, o autor equaciona o equilíbrio. O modelo incorpora ainda os efeitos do núcleo, que é dividido em duas partes: uma rígida e outra compressível (sendo possível alterar os parâmetros para obter um núcleo completamente rígido ou completamente compressível).

O autor então lineariza as equações obtidas e monta assim uma matriz de rigidez que relaciona os esforços com os deslocamentos. Por fim, ele realiza alguns testes comparativos e conclui que os resultados estão em excelente acordo com o modelo linear.

O artigo de OWEN et al. (1992), trata de alguns aspectos da mecânica interna de cabos marinhos, cabos umbilicais e tubos flexíveis. Nele, os autores descrevem um método para determinar a deformação em carcaça intertravadas e em cabos umbilicais, utilizando-se de alguns outros resultados por eles obtidos. Os autores não deixam claras nem a forma de obtenção, nem as hipóteses necessárias para uma reprodução dos cálculos, sendo então um artigo mais descritivo. Por fim os autores concluem que obtiveram bons resultados, mas que há muito mais a ser feito e estudado na área.

Também em 1992, Witz e Tan apresentaram dois artigos na revista *Marine Structures* tratando do comportamento de cabos umbilicais, tubos flexíveis e cabos marinhos seguindo a mesma metodologia, ambos utilizando o mesmo conjunto de hipóteses e casos de comparação. WITZ e TAN (1992a) tratam do comportamento do cabo quando submetido aos carregamentos axissimétricos de tração e torção combinados. Nesse artigo, os autores não deixam claras as hipóteses adotadas, mas percebe-se que eles utilizam-se da teoria da elasticidade clássica, considerando os materiais elásticos e isotrópicos, sob pequenas deformações. É considerado ainda que seções planas permanecem planas após a deformação (hipótese de Navier). O estudo dos autores busca determinar as equações de equilíbrio para camadas plásticas cilíndricas e para camadas helicoidais. Para camadas cilíndricas fica implícito - mas é de fácil verificação, dada as fórmulas por eles utilizadas - que os autores consideraram essas camadas como sendo tubos de parede fina com carregamento constante ao redor do perímetro (os autores definem uma pressão interna e outra externa e as consideram constantes). Da mesma forma, os autores buscam um conjunto de equações de equilíbrio para as camadas helicoidais. Nota-se, nesse caso, que a forma helicoidal do elemento (cujo ângulo de assentamento é considerado constante, outra hipótese feita implicitamente) leva a um conjunto de equações não lineares. Por fim, os autores assumem um cabo com n camadas, sendo m camadas plásticas, e definem uma metodologia, que utiliza as diferenças de pressões, as variações de raio e espessura e o equilíbrio global para determinar a configuração final do cabo. Por fim, os autores comparam os resultados por eles obtidos com resultados experimentais e mostram boa conformidade entre experimento e teoria. Um ponto a ser observado aqui é que o artigo contém alguns erros de digitação e possui algumas fórmulas que tornam duvidosa a aplicação do mesmo.

No outro artigo, WITZ e TAN (1992b) também não deixam claras as hipóteses utilizadas na concepção dos modelos, mas, pelo que se apreende, as hipóteses são as mesmas para ambos os artigos. Na discussão inicial, os autores apontam que o gráfico momento de flexão vs. curvatura exibe uma histerese, sendo a energia dissipada devida ao atrito entre as camadas.

A contribuição da camada helicoidal é dada através das somas das contribuições de cada um dos helicoides e os autores aqui consideram que a contribuição desses é idêntica, ou seja, basta multiplicar a contribuição de cada fio pelo número de fios. No equacionamento do elemento helicoidal, os autores consideram que o mesmo sofre flexão com raio de curvatura constante. Após várias manipulações algébricas, eles chegam a valores para a curvatura (nas direções normal, tangencial e binormal) e para a deforma-

ção axial. De posse dessas informações, os autores calculam a energia de deformação e determinam assim uma equação para o momento de flexão. Dessa maneira, os autores, com base nas hipóteses ressaltadas anteriormente, chegam à descrição da hélice antes do escorregamento.

Os autores passam então para uma discussão sobre os tipos de restrições possíveis em um cabo composto de várias camadas: a primeira é estrutural, que só pode ser vencida comprometendo a integridade do cabo e a segunda é a dada pelo atrito, que pode ser vencida desde que a deflexão seja tal que leve ao escorregamento entre as camadas. Ainda sobre essa restrição os autores admitem que se o fio possuir seção quadrada haverá apenas escorregamento entre as camadas (levando a uma distribuição uniforme de deformação no tendão), mas se a seção for circular, o tendão pode escorregar no outro sentido, sofrendo torção.

Para cada caso os autores consideram as regiões de maior curvatura, chegando a valores de curvatura crítica tanto para o escorregamento axial quanto para o escorregamento devido à torção. Uma hipótese feita pelos autores é de que o escorregamento, em fio de seção circular, ocorre simultaneamente em ambas as direções quando a curvatura crítica é atingida. Essa curvatura crítica então é a mínima entre essas duas curvaturas. A nova energia de deformação pode ser calculada e assim uma nova expressão para o momento de flexão (pós escorregamento) é obtida. E por fim os autores descrevem os casos extremos (viga reta e hélice com ângulo de assentamento próximo de 90°). Em seguida, os autores consideram a contribuição de camadas cilíndricas. O diagrama esquemático que mostra a histerese do cabo é exibido na figura 3.1.

Figura 3.1: Diagrama esquemático da curva de momento de flexão versus curvatura. Fonte: WITZ e TAN (1992b).

Para a obtenção dessa curva foram considerados que, quando ocorra descarregamento, a restrição dada pelo atrito à reversão da deformação é idêntica quando do carregamento e que o atrito e a pressão de contato entre a armadura helicoidal e o substrato são assumidos como constantes durante o processo de carga e descarga. Em virtude dessas hipóteses é possível determinar-se o valor da curvatura crítica durante a descarga: $\kappa'_{cr} = \kappa_0 - \kappa_{cr}$. Por fim, os autores realizam ensaios e verificam a validade do modelo analítico.

Os autores ressaltam em suas conclusões que os modelos representam bem a segunda região (quando ocorre o escorregamento total), uma vez que a curvatura crítica é muito baixa e de difícil medição. Cabe aqui comentar que as hipóteses feitas pelos autores simplificam o problema de tal forma que ele seja tratável analiticamente, mas, hipóteses como a de que o atrito se comporta igualmente quando se reverte o carregamento e de que as pressões de contato são as mesmas podem ser questionadas. Ainda assim, o artigo traz alguma luz sobre o comportamento de cabos compostos de várias camadas submetidos à flexão.

No ano seguinte, TAN e WITZ (1993) tratam, em outro artigo, do comportamento à torção e flexão combinadas de uma única barra elástica sujeita a momentos terminais. Nesse artigo, os autores fazem uma abordagem baseada nas equações de Love para descrever o equilíbrio de uma viga sujeita ao carregamento imposto. Ficam implíci-

tas, novamente, as hipóteses por eles adotadas, mas são basicamente as hipóteses adotadas por Love. São considerados que a viga possui seção circular, que o limite de escoamento é suficientemente alto e que o material é elástico, linear e isotrópico. Durante o desenvolvimento cita-se que se pode considerar equação constitutiva do momento (o produto entre a rigidez flexional da viga e a curvatura). Os autores determinam o vetor posição e o vetor tangente dos pontos finais da viga, bem como a expressão da curvatura. Durante o decorrer do trabalho, são feitas algumas hipóteses sobre o sistema de coordenadas, mas percebe-se que isso não interfere na análise, uma vez que se pode arbitrar um sistema de coordenadas como o descrito e, através de uma mudança de base, levar essas grandezas ao sistema desejado. Após uma adimensionalização das variáveis do problema e uma grande manipulação algébrica, os autores obtêm as relações para a configuração deformada da viga, que ficam em função das condições de contorno e do carregamento aplicado.

Os autores consideram que a viga não sofre nenhuma restrição cinemática e, com isso, resta apenas aplicar as condições devidas aos carregamentos. Eles, então, passam a discutir a forma como os carregamentos são fornecidos (já que, dependendo de como é feita essa descrição, o processo torna-se mais, ou menos, complicado). Por fim, estudam os casos extremos (somente momento de torção ou só momento de flexão) e traçam gráficos para descrever a configuração da viga no caso dos carregamentos combinados.

As conclusões observadas pelos autores são que, quando há torção, a configuração fica tridimensional e que a solução é única se forem fornecidos a magnitude do momento de torção atuante nos extremos e duas componentes do momento de flexão ou as magnitudes dos momentos de flexão e de torção e uma das duas componentes do momento de flexão. Apesar de existir um possível erro na equação (7a), a formulação é consistente e não influencia a análise final.

WITZ e TAN (1995) publicaram um artigo no qual estudam o comportamento de um cabo marinho e um cabo umbilical sob flexão cíclica. O trabalho se inicia modelando o cabo após a aplicação da flexão, da tensão atuante devida à mesma e da distensão axial do cabo. Mais uma vez, os autores não deixam claras as hipóteses utilizadas, mas pode-se deduzi-las, das equações utilizadas. Fica claro que os autores utilizam-se das hipóteses de pequenas deformações, comportamento elástico linear e também que o estado de tensões é uniaxial. Os autores retomam a teoria do artigo que descreve o comportamento dos cabos sob carregamentos flexionais (WITZ e TAN (1992b)), em que afirmam que após uma curvatura crítica, os efeitos da tensão axial se extinguem, restando apenas os efeitos das tensões de flexão.

Para validar os resultados por eles obtidos, os autores fazem comparações com ensaios e concluem que obtiveram bons resultados. Eles puderam verificar que a influência da tensão devida ao alongamento axial torna-se muito pequena na tensão total, uma vez que a tensão de flexão é dominante, mostrando assim que a hipótese por eles adotada é condizente.

FÉRET, LEROY e ESTRIER (1995) escreveram um artigo no qual trataram do cálculo de tensões e do escorregamento em camadas de armaduras em tubos flexíveis, considerando a interação entre as camadas. Como nos artigos de Witz e Tan, os autores não deixam claras as hipóteses, mas é possível deduzir algumas delas, sendo as principais as hipóteses de Navier e a elasticidade linear, considerando pequenas deformações. Outra hipótese por eles adotada é que a hélice assume a forma da geodésica de um toróide. Um aspecto a ser ressaltado sobre esse artigo é que nele os autores trabalham com todas as equações nos eixos de Darboux-Ribeaucourt, usando as relações equivalentes às de Serret-Frénet e, com base nessas, determinam as expressões de variação de curvatura nas direções normal e binormal (Uma explicação sobre esse sistema de coordenadas pode ser visto no apêndice A).

Os autores, para a determinação das tensões, definem o escorregamento na direção normal e binormal à linha central do tendão, descrevendo em seguida as equações de atrito. O passo seguinte é a determinação do equilíbrio estático das forças seguida da resolução do problema. Inicialmente os autores consideram não ocorrer deformação axial induzida pelo atrito e conseguem resolver o problema com as equações restantes, utilizando métodos numéricos. Com base na solução, determinam as forças de atrito atuantes e as tensões. Por fim, os autores comparam seu modelo com outros resultados teóricos e com experimentos e concluem percebendo que o modelo obtém bons resultados.

Um artigo muito importante e interessante para a área foi publicado por WITZ (1996), no qual é conduzido um estudo de caso sobre a análise da seção transversal de um tubo flexível. Nesse artigo, diversas instituições e empresas foram convidadas a participar (cerca de 70), mas apenas 10 efetivamente o fizeram. Para cada um dos participantes, foram fornecidos os dados necessários e foram solicitados os cálculos das seguintes curvas:

- Curva de tração versus alongamento axial e ângulo de torção versus alongamento axial para o caso das extremidades livres para girar.
- Curva de tração versus alongamento axial e ângulo de torção versus alongamento axial para o caso das extremidades impedidas de girar.
- Momento de torção no sentido horário e no sentido anti-horário versus ângulo de torção e força axial versus ângulo de torção com as extremidades livres para se mover na direção axial.
- Momento de torção no sentido horário e no sentido anti-horário versus ângulo de torção e força axial versus ângulo de torção com as extremidades impedidas de se mover na direção axial.
- Momento de flexão versus curvatura para pressões internas de 0 e 300 bar.

Cada uma das instituições participantes utilizou seus modelos e *software*, sem conhecer o desenvolvimento das demais. Foi feito ainda um experimento com uma amostra e todos os resultados foram comparados. Observou-se que os resultados obtidos não foram concordantes, principalmente no que tange ao levantamento da última curva (a do momento fletor versus curvatura), sendo que dos 10 participantes apenas 6 conseguiram obter resultados e os valores entre os participantes variam em ordens de grandeza.

Esse artigo mostra-se de grande utilidade e permite notar que muito deve ser feito na área de mecânica estrutural interna, uma vez que as instituições participantes são reconhecidamente importantes e famosas por suas contribuições e, ainda assim, não foram capazes de chegar em valores concordantes. Apesar deste estudo ter sido conduzido há 15 anos atrás, ainda é válido e demonstra o grande desafio em encontrar uma solução para o problema da rigidez flexional.

OUT e MORGEN (1997) apresentam um artigo sobre o escorregamento de reforços helicoidais sobre cilindros curvados. Mais uma vez as hipóteses estão implícitas, mas são as observadas na maioria dos artigos: propriedades elásticas lineares, pequenas deformações e hipótese de Navier. Outra hipótese considerada é que a hélice deformada está sobre a geodésica do toroide.

Os autores inicialmente determinam uma expressão para o comprimento da curva sobre o toroide e, utilizando uma formulação Lagrangeana, minimizam o seu valor. Após uma linearização e uma expansão em série de Taylor, eles chegam uma expressão analítica simplificada para o comprimento. A seguir, um comprimento s_0 é determinado tanto na configuração inicial (helicóide) quanto na configuração final e comparando os ângulos no qual esses valores ocorrem em cada configuração, eles determinam o vetor escorregamento. A partir desses cálculos, são discutidas a influência do ângulo de assentamento no escorregamento (sendo que o escorregamento decresce de uma maneira quase exponencial, tendendo ao infinito quando o ângulo é nulo e a zero quando esse é 90°). Para finalizar essa discussão, os autores determinam o ângulo entre os tendões de cada camada e exibem as expressões tanto para ângulos de assentamento destrógiro quanto levógiro.

Outro aspecto abordado no artigo é a variação de curvatura da helicóide. Os autores, após um grande trabalho algébrico, chegam a expressões de primeira ordem da curvatura para a geodésica e com isso podem avaliar a sua variação. Por fim, os autores comentam os resultados e dizem que tais expressões devem ser levadas em conta quando do cálculo da fadiga dos tendões.

LEROY e ESTRIER (2001) apresentaram um artigo para o cálculo das tensões e o escorregamento de camadas de tendões helicoidais em tubos flexíveis submetidos à flexão dinâmica. Também nesse artigo os autores não deixam claras as hipóteses, mas é possível deduzir algumas delas, sendo as principais as hipóteses de Navier, a elasticidade linear, considerando pequenas deformações e que a deformada da helicóide é a geodésica sobre o toroide. Um aspecto interessante a ser visto é que tanto nesse artigo como no outro artigo de FÉRET, LEROY e ESTRIER (1995), os autores trabalham com todas as equações nos eixos de Darboux-Ribeaucourt.

Os autores descrevem o escorregamento sofrido pelos tendões de cada camada em função dos escorregamentos nas direções normal e binormal (que por sua vez são funções das variações de curvatura) e também descrevem as expressões para as forças de atrito e as velocidades de escorregamento associadas, sendo essa a principal diferença entre esse artigo e o artigo de FÉRET, LEROY e ESTRIER (1995). Por fim, os autores determinam as equações de equilíbrio e assumem as equações constitutivas como as clássicas equações da elasticidade linear. Segundo os autores, a resolução do problema não linear se dá usando diferenças finitas. Os autores concluem o artigo fazendo exemplos teóricos e por fim, uma comparação com um tubo típico, obtendo bons resultados comparados a modelos analíticos.

Os textos de RAMOS JR. (2001) e RAMOS JR. e PESCE (2004) mostram um modelo que se propõe a resolver o problema de cabos umbilicais e tubos flexíveis submetidos a carregamentos combinados. Os autores ainda propõem um segundo modelo para a análise de instabilidade global de linhas. No primeiro texto, o autor faz uma extensa revisão bibliográfica, mostrando o estado da arte do cálculo da mecânica interna de tubos flexíveis e cabos umbilicais, não só do ponto de vista analítico mas também do ponto de vista numérico.

O modelo é apresentado a partir de quatro configurações geométricas distintas. A primeira configuração é a configuração descarregada, na qual as camadas estão repousando umas sobre as outras, sem a existência de vazios entre as camadas. Nessa configuração considera-se que o eixo axial é o mesmo do tubo reto. A segunda configuração é quando da aplicação dos carregamentos axissimétricos. A terceira configuração é derivada da segunda configuração, quando da aplicação de carregamentos de flexão, porém não ocorrendo o escorregamento das camadas (chamado de *no-slip*) e a quarta e última configuração é quando ocorre escorregamento total das camadas (chamado de modelo *full-slip*), como pode ser visto na figura 3.2.

Figura 3.2: Possíveis configurações de um cabo. Fonte: RAMOS JR. e PESCE (2004).

RAMOS JR. (2001) procura deixar bem claras as hipóteses por ele utilizadas, que são:

- Todas as seções transversais e todas as camadas possuem a mesma torção por unidade de comprimento do tubo e o mesmo alongamento.
- Na configuração inicial Σ_1 (não-deformada) do tubo não há folgas iniciais entre quaisquer camadas adjacentes.
- Não há contato entre tendões adjacentes de uma mesma camada helicoidal.
- Todos os materiais são homogêneos, isotrópicos e têm comportamento elástico linear.
- Todas as deformações são bastante pequenas, se comparadas à unidade (há linearidade geométrica).
- A ovalização do tubo devida às cargas aplicadas pode ser desprezada.
- Admite-se que as variações de espessura e de raio médio das camadas sejam uniformes para cada camada considerada.
- Para os tendões das camadas helicoidais, admite-se que uma das direções principais de flexão da seção transversal seja sempre ortogonal à superfície sobre a qual o tendão se assenta (que é a superfície de contato formada pelas camadas adjacentes).
- Não há escorregamento relativo entre as camadas adjacentes devido à aplicação de esforços de flexão ao tubo, caso seja a terceira configuração, ou há escorregamento total, caso seja a quarta configuração a ser considerada.

Assim estabelecidas as configurações e as hipóteses, o autor busca descrever o processo de obtenção das equações constitutivas, de compatibilidade e equilíbrio, chegando assim a um sistema para a solução do problema. O cabo em questão possui n camadas helicoidais de armadura e m camadas plásticas, sendo o número de incógnitas do problema dado na tabela 3.1, contabilizando o total de variáveis para uma configuração.

Tabela 3.1: Incógnitas do problema (Modificada de RAMOS JR. (2001)).

<i>Incógnitas</i>	<i>Símbolo Empregado</i>	<i>Número de Incógnitas</i>
Pressão ou <i>gap</i> na camada i	$p_{c,i}$ (ou g_i)	$n + m - 1$
Força axial na camada i	F_i	$n + m$
Momento de torção na camada i	$M_{t,i}$	$n + m$
Momento de flexão na camada i	$M_{b,i}$	$n + m$
Variação do raio na camada i	ΔR_i	$n + m$
Variação da espessura na camada i	Δt_i	$n + m$
Variação do ângulo de assentamento	$\Delta \alpha$	n
Elongamento por unidade de comprimento	$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$	1
Variação angular por unidade de comprimento	$\left(\frac{\Delta \phi}{L}\right)$	1
Curvatura do cabo	K	1
<i>Total</i>	$7n + 6m + 2$	

Para a resolução do sistema proposto são necessárias $7n + 6m + 2$ equações, advindas da formulação anteriormente descrita. A tabela 3.2 exibe uma descrição de quantas equações cada tipo de camada fornece.

Um ponto a ser ressaltado é que, na quarta configuração (*full-slip*), considera-se que os tendões partem da terceira configuração e assentam-se sobre a geodésica do cilindro. Para tal cálculo, utilizam-se os eixos de Darboux-Ribeaucourt.

O autor alcança bons resultados quando comparados com a teoria e também com o estudo de caso feito por WITZ (1996), observando também discrepâncias quando da incorporação dos efeitos flexionais. A principal contribuição do autor é um modelo que permite a avaliação do tubo sob a ação de carregamentos combinados, até então não estudados.

Tabela 3.2: Conjunto de equações do problema. (Modificada de RAMOS JR. (2001)).

<i>Relações entre as variáveis</i>	<i>Aplica-se a:</i>	<i>Número de equações</i>
$\Delta R_i, \Delta R_{i+1}, \Delta t_i, \Delta t_{i+1}, g_i$	todas as camadas, menos a última	$n + m - 1$
$F_i, \frac{\Delta L}{L}, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$M_{t,i}, \frac{\Delta \phi}{L}$	camadas plásticas	m
$M_{b,i}, K$	camadas plásticas	m
$\Delta R_i, \frac{\Delta L}{L}, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$\Delta t_i, \frac{\Delta L}{L}, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas plásticas	m
$F_i, \frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta \phi}{L}, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$M_{t,i}, \Delta \alpha, \Delta R_i, \frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta \phi}{L}$	camadas helicoidais	n
$M_{b,i}, K$	camadas helicoidais	n
$p_{c,i-1}, p_{c,i}, \frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta \phi}{L}, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$\Delta t_i, \frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta \phi}{L}, \Delta R_i, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	camadas helicoidais	n
$\Delta \alpha, \frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta \phi}{L}, \Delta R_i$	camadas helicoidais	n
$F_i, M_{t,i}, M_{b,i}$	equilíbrio global	3
Total		$7n + 6m + 2$

CUSTÓDIO e VAZ (2002) propõem um modelo para o estudo de cabos umbilicais e tubos flexíveis com várias camadas, submetidas a carregamentos axissimétricos aplicados monotonicamente. Nesse artigo os autores deixam bem claras as hipóteses por eles adotadas e comentam que, em geral, essas são as hipóteses adotadas pelos diversos autores da área. São elas:

- As camadas homogêneas são longas e consideradas como sendo cilindros uniformes.
- Os tendões são hélices perfeitamente cilíndricas.
- Os tendões estão igualmente espaçados.
- Há muitos tendões presentes numa camada de armadura e, por isso, as forças que eles exercem nas camadas adjacentes podem ser substituídas por pressões uniformes.
- A estrutura é reta.
- Não há forças de campo (como por exemplo, o peso próprio da estrutura).
- Os efeitos de borda devem ser desprezados (princípio de Saint Venant).
- Os pontos de qualquer camada possuem o mesmo alongamento axial e o mesmo giro de torção.
- Todos os tendões estão sujeitos ao mesmo estado de tensões.
- Os tendões mantêm a forma helicoidal quando deformados.
- O ângulo formado entre o eixo de inércia principal da seção transversal e o vetor que liga o centro do tubo com o centro dessa seção é constante.
- Não há sobre-penetração ou *gap* estendido.
- Os efeitos de cisalhamento e atrito interno são desprezados, pois os tendões são esbeltos o suficiente para que o movimento dos pontos materiais seja governado apenas pelo alongamento na direção tangente e não pela mudança de curvatura.
- Os materiais possuem comportamento elástico-linear.
- As mudanças do raio e dos ângulos de assentamento da armadura são pequenas.
- Os tendões ou nunca se tocam lateralmente ou estão sempre em contato.
- Não há vazios entre as camadas ou cabos e o núcleo.

- As camadas homogêneas são finas e atuam como transmissores de pressão.
- O núcleo responde linearmente a carregamentos axissimétricos.
- Tanto carregamento quanto resposta não são dependentes do tempo.

Os autores descrevem a modelagem de cada camada e o modelo como um todo, que compatibiliza os deslocamentos de cada camada. O modelo obtido é bem similar ao descrito por RAMOS JR. (2001). Uma vez descrito o modelo, os autores descrevem o algoritmo implementado (um modelo de Newton-Raphson, considerando a matriz Jacobiana por diferenças finitas), bem como algumas hipóteses sobre os módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson a serem utilizados nas análises (a discussão feita gira em torno do módulo secante equivalente).

Por fim, os autores comparam os resultados obtidos com o modelo por eles desenvolvido com os de um ensaio por eles efetuado. Eles também comparam os resultados com o cabo do estudo de caso feito por WITZ (1996). Os resultados observados mostraram-se bons.

Para finalizar a revisão de modelos analíticos, tece-se aqui alguns comentários. Primeiramente, a abordagem analítica é extremamente útil para que se possam entender um pouco melhor os fenômenos envolvidos. O custo desse entendimento é o fato de serem necessárias muitas hipóteses simplificadoras e, ainda assim, o problema a ser resolvido é bastante complexo. Durante os anos, observou-se uma preocupação dos autores em, não só entender o comportamento de cada componente desse tipo de tubos, mas também a interação entre eles, a maneira como os esforços se distribuem e o papel desempenhado pelo atrito. Muitas dessas perguntas ainda estão sem resposta e, para encontrar algumas delas, modelos numéricos foram desenvolvidos, como mostrados na próxima seção.

3.3 Abordagem Numérica

A abordagem numérica é uma alternativa à complexa modelagem analítica, uma vez que a primeira é baseada no método dos elementos finitos. O método dos elementos finitos segue a filosofia conhecida como *divide and conquer*, que procura dividir o problema em problemas menores de resolução menos complexa, como pode ser visto em uma das referências clássicas da área: *Finite Element Procedures* de BATHE (1995). Usualmente, para o problema dos cabos umbilicais e tubos flexíveis os elementos são bi- ou tridimensionais (dependendo do caso a ser tratado) mas, mesmo o problema sendo bidimensional, estes

apresentam alto custo computacional. Os grandes problemas encontrados em modelagens tridimensionais desses cabos são principalmente a dificuldade e o tempo de convergência em função das não-linearidades presentes (como, por exemplo, o contato entre os elementos).

Nessa seção, serão discutidos artigos referentes à modelagem utilizando métodos numéricos e apontando aspectos interessantes e hipóteses adotadas. Aqui também será feita uma descrição dos artigos em ordem cronológica, facilitando assim, a compreensão de como o tratamento numérico do problema evoluiu.

KNAPP, LE e CRUICKSHANK (1991) apresentam um artigo no qual propõem uma metodologia para o *design* de cabos umbilicais. Os autores descrevem uma metodologia para criar uma versão preliminar do cabo e para finalizar uma modelagem em elementos finitos que leva em conta não apenas carregamentos axissimétricos.

O processo descrito pelos autores é exibido na figura 3.3.

O processo consiste em fazer um desenho preliminar e com auxílio de tabelas e gráficos determinar a seção transversal e as propriedades do tubo e executar uma análise global com esses parâmetros. Uma vez concluída essa etapa, parte-se para o *CAD* do cabo e por fim o teste de protótipo. Na parte de *CAD*, os autores propõem um modelo de macro elementos finitos que está mais claro em um artigo dedicado ao assunto feito por LE e KNAPP (1994).

Os autores apresentam um exemplo e utilizam toda a metodologia por eles proposta para o *design* do cabo, mostrando se tratar de uma metodologia simples que permite uma primeira iteração.

SAEVIK (1993) escreveu um artigo que utiliza o método dos elementos finitos para determinar as tensões e o escorregamento nos tendões de armaduras de risers flexíveis. Nesse artigo, ele propõe um modelo de viga capaz de considerar gradientes de curvatura. Para tal, ele utiliza a formulação tensorial das tensões e deformações (usando o tensor de Green e o tensor das tensões de Cauchy) adotando grandes deslocamentos e pequenas deformações. O modelo por ele proposto leva em conta as restrições cinemáticas e despreza os movimentos de corpo rígido (chegando, assim, a um elemento de oito graus de liberdade, como esquematizado na figura 3.4).

A seguir, o autor descreve o procedimento para a obtenção dos esforços atuantes e das molas por ele utilizadas para simular a interação entre os tendões e entre tendão e cilindro. O método empregado para a resolução é incremental, aplicando a força em

Figura 3.3: Metodologia para *design* de um cabo. (Extraído de KNAPP, LE e CRUICKSHANK (1991)).

passos e calculado a nova posição da estrutura ao final de cada passo. Essa configuração serve de entrada para o passo seguinte. O cálculo em cada passo é feito resolvendo-se o sistema de equações usando o método de Newton-Raphson.

O autor conclui o trabalho fazendo uma comparação com o caso teórico (hélice sob curvatura constante e sem atrito), obtendo resultados muito semelhantes, exceto uma pequena variação na torção. Além disso, comparações experimentais foram feitas, sendo observada boa concordância com resultados obtidos.

HARTE e MCNAMARA (1993) publicaram um artigo com procedimentos para a análise de tensões em seções transversais de tubos flexíveis. Os autores procuram estender uma formulação já existente substituindo os tubos (que anteriormente eram modelados como tubos de parede fina) por tubos de parede espessa. Para tal, as seguintes hipóteses são consideradas:

Figura 3.4: Elemento de viga de 8 graus de liberdade. (Extraído de SAEVIK (1993)).

- Material elástico-linear.
- Deformações lineares.
- O tubo é inicialmente reto.
- Seções planas permanecem planas após o carregamento e não há afastamento entre camadas.
- Tendões respondem apenas na direção axial.
- A ovalização é ignorada.

Com isso, os autores descrevem o procedimento para a obtenção de um modelo para o tubo cilíndrico de parede espessa, sobrepondo os efeitos dos carregamentos e, em seguida, descrevem brevemente os demais elementos e a forma que aparecem na matriz global. Eles comentam que no vetor de carregamentos aparecem pressões de contato, desconhecidas a priori e, por isso, o processo é iterativo.

Os autores fazem testes comparativos para o elemento cilíndrico com a formulação anterior e com um *software* comercial de elementos finitos (cabe aqui dizer que o tubo em análise possuía uma relação entre diâmetro e espessura da ordem de 10, ou seja, no limite da validade das hipóteses de tubo de parede fina), utilizando elementos sólidos de 8 nós, obtendo resultados mais próximos aos do *software*. Por fim, os autores comparam um caso de um cabo composto por três camadas (uma camada cilíndrica, uma camada de armadura e outra camada cilíndrica) observando novamente bons resultados.

LE e KNAPP (1994) publicam um artigo ,expandindo o artigo de KNAPP, LE e CRUICKSHANK (1991), que trata de um modelo para cabos que estão sob carregamentos não simétricos. Os autores procuram deixar claras as hipóteses por eles adotadas logo no início do artigo, sendo elas:

- Os componentes considerados possuem seção circular.
- A análise é bidimensional, sendo somente consideradas deformações radiais e circunferenciais.
- Os materiais são isotrópicos ou ortotrópicos linear-elásticos.
- A hipótese de Navier que diz que seções planas permanecem planas é válida.
- São consideradas apenas pequenas deformações.
- A solução é baseada em uma deformação axial constante em toda a seção transversal do cabo.
- Todos os componentes estão sob contato compressivo com os componentes adjacentes, ou seja, não há separação dos elementos.

Os autores exibem então a modelagem por eles feita e implementada, que consiste no uso de elementos circulares cujos graus de liberdade são os pontos de contato. As funções que descrevem os deslocamentos nas direções radial e circunferencial são séries de Fourier na variável angular, cujas amplitudes são funções do raio.

Para a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez, os autores utilizam-se do método das penalidades e terminam comentando a forma de unificar todos os elementos na matriz de rigidez global. Os autores simplesmente dizem que o processo para a obtenção dos esforços equivalentes nodais é feito em outro lugar, não o descrevendo. Por fim, eles comparam seu modelo com um caso experimental e concluem que obtiveram bons resultados.

McIVER (1995) propôs em seu artigo um método para a modelagem detalhada dos componentes e análise do comportamento geral de *risers* flexíveis. Em seu trabalho, McIver procura descrever toda a estrutura, dividindo-a em camadas homogêneas, as quais ele modela como tubos de paredes espessas, e camadas com elementos helicoidais. O autor dá um grande enfoque nos elementos helicoidais e exhibe a modelagem completa da geometria. O carregamento sobre esses elementos é parcialmente detalhado, referenciando outros artigos que exibem essa em detalhes.

A seguir o autor utiliza o princípio dos trabalhos virtuais para obter as matrizes de rigidez do elemento e descreve de maneira simplificada o processo para os elementos homogêneos. Ele faz algumas comparações e conclui o trabalho comentando que o modelo consegue prever bem o comportamento quando o cabo está submetido à flexão, mas que os resultados são fortemente dependentes do valor adotado para o coeficiente de atrito, além de observar que os graus de liberdade são fortemente acoplados. Cabe aqui notar que o autor não deixa muito claro as hipóteses por ele adotadas e também que se trata de um artigo extremamente complexo do ponto de vista de modelagem, sendo de difícil compreensão, mesmo aos experimentados no assunto.

SAEVIK e BRUASETH (2005) publicam um artigo que traz um modelo para o cálculo de tensões e deformações de cabos umbilicais submetidos a carregamentos axis-simétricos. Nesse artigo, os autores explicitam as hipóteses por eles utilizadas de uma maneira indireta. Retomam as hipóteses listadas por CUSTÓDIO e VAZ (2002) e dizem as que não se aplicam ao caso, que são:

- Não são utilizadas as teorias lineares e os materiais não são necessariamente isotrópicos.
- Os vazios e contatos podem existir mesmo que sejam entre os arames de uma mesma armadura helicoidal e os tendões não necessitam estar igualmente espaçados na camada.

Posto isso, os autores formulam três tipos de elementos:

- Elementos de viga para cabos elétricos e tendões, usado o desenvolvimento visto no artigo de SAEVIK (1993).
- Elementos do tipo casca, para modelar estruturas tubulares.
- Elementos do tipo de contato, que permitem a presença de vazios na estrutura.

Os elementos do tipo casca são exaustivamente descritos, assim como o procedimento para a incorporação dos vazios, finalizando com os modelos dos materiais e as relações constitutivas utilizadas. Os autores comparam seu modelo com o caso estudado por CUSTÓDIO e VAZ (2002) e também com diversos experimentos, obtendo bons resultados.

BAHTUI, BAHAI e ALFANO (2008) escrevem um artigo tratando de um modelo de elementos finitos para *risers* flexíveis sob torção. Nesse artigo, os autores buscam

descrever um cabo composto por duas camadas helicoidais de ângulos opostos e três camadas plásticas intercaladas com as camadas helicoidais. As hipóteses utilizadas para o modelo são:

- É permitido que haja separação das camadas (permite a formação de vazios, ou *gaps*).
- Os tendões são livres para girar ao redor de seu eixo.
- Contato com atrito é considerado, incluindo interação entre os tendões de uma mesma camada.
- A análise é não linear, pois leva em conta não-linearidades geométricas e atrito.
- Todas as seis componentes do tensor das tensões de Cauchy são consideradas.

Os autores também comentam que não há discussões sobre uma carcaça intertravada por essa não fazer parte do modelo. A seguir, os autores descrevem os locais dos quais os modelos foram extraídos e ressaltam que eles exigem algumas hipóteses extras, que são:

- Inexistência de vazios e não há ovalização.
- Um estado de deformação uniforme é assumido ao longo do comprimento para camadas isotrópicas.
- Para as camadas de armadura, a teoria de vigas de Euler-Bernoulli foi utilizada.

Assim, os autores comparam o modelo numérico feito em um *software* comercial (usando tanto uma formulação linear quanto uma não linear) com o modelo analítico, concluindo que o modelo apresentado apresenta bons resultados.

Cabe aqui comentar que esse artigo é um tanto quanto obscuro no que tange ao modelo (que os autores afirmam utilizar dois modelos conjuntamente, não deixando claro como é isso é feito ou como é calculado esse modelo "híbrido") e também não deixam claros os procedimentos para a modelagem no programa comercial, dificultando eventuais comparações.

Outro artigo dos autores (BAHTUI, ALFANO e BAHAI (2009)) traz uma modelagem analítica e uma numérica usando ABAQUS. Eles exibem o modelo e como essas camadas são modeladas no programa de elementos finitos, além da incorporação do atrito.

Nesse modelo, os autores utilizam elementos sólidos para a capa e para a carcaça (que foi tratada como um cilindro equivalente com propriedades ortotrópicas) e de casca para os demais. Os casos por eles estudados têm como carregamento pressão constante e momento fletor, sendo que para cada uma das três diferentes pressões empregadas, variam-se o momento entre os valores extremos dados. Como resultado dessas simulações, observa-se que o efeito da pressão é aumentar a histerese do momento. Ainda, o modelo analítico é descrito mas sem dar detalhes de hipóteses empregadas. Percebe-se que os autores dividem o problema em duas regiões: uma de não escorregamento (*no slip*) e outra de escorregamento total (*full slip*). Por fim, os resultados analíticos são comparados com os numéricos apresentando boa aderência.

Um conjunto de três artigos de autores da COPPE apresentados no *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE)* dos anos de 2009 e 2010 utilizam como base um mesmo modelo de elementos finitos para o cabo completo variando o carregamento aplicado e comparando com experimentos. No primeiro artigo (MERINO et al. (2009)), os autores estudam o efeito acoplado de tração e torção. Eles modelam as camadas poliméricas (tanto interna quanto externa) e fitas anti-desgaste utilizando elementos de casca isotrópicos. Os tendões das armaduras de tração são modelados com elementos de viga do tipo Euler-Bernoulli, que desprezam os efeitos da cortante. Por fim, o contato utilizado é do tipo *pinball*, na qual é definida uma região de contato ao redor do elemento. Levam ainda em conta a rigidez radial entre as camadas, que é feita utilizando pares de molas com rigidez equivalente à meia espessura da camada cilíndrica em questão e o atrito é considerado utilizando-se o modelo de *Coulomb*.

Apesar de deixarem claras as características da modelagem geométrica do cabo, os autores não o fazem no que diz respeito às condições de contorno, nem em relação aos procedimentos para o contato do tipo casca-viga, que normalmente apresenta grandes problemas de convergência. Ressalta-se ainda que o modelo de tubo equivalente leva em conta a espessura. Isso faz com que o resultado obtido seja mais conservativo. Quanto aos resultados desse primeiro artigo, observa-se que os autores obtiveram valores próximos aos obtidos experimentalmente, validando assim o modelo.

No segundo artigo, também de 2009 (SOUZA et al. (2009)), os autores utilizam o modelo descrito anteriormente para verificar o que ocorre quando alguns dos tendões do cabo estão rompidos. Para emular esse efeito, algum dos arames têm um elemento de viga removido. O caso por eles estudado têm 5 dos tendões rompidos e observa-se que há uma concentração de tensão nos tendões vizinhos, mas o efeito é restrito a estes.

No último dos artigos (MERINO et al. (2010)), o efeito da torção é estudado. Nesse, os resultados experimentais são comparados com um modelo analítico e o modelo numérico anteriormente descrito. Observa-se os efeitos da aplicação da torção em sentido horário e anti-horário (que modificam o módulo de rigidez de torção), além do efeito do atrito. Conclui-se o artigo observando que os resultados obtidos são bem próximos aos experimentais.

CORRE e PROBYN (2009) trazem um artigo que trata do efeito combinado de tração e flexão cíclica. Os autores modelam o tubo utilizando o *software* de elementos finitos ABAQUS. Nessa modelagem, tubos, cabos e *fillers* são modelados com elementos de viga. Já a capa externa é modelada com elementos de casca e as fitas usando elementos de membrana com propriedades ortotrópicas. As condições de contorno são aplicadas em um ponto central do cabo, uma vez que se impõe um acoplamento entre os nós da seção transversal ao ponto central do cabo. Esse tipo de acoplamento foi adotado nas duas extremidades. Nessas seções, são aplicados carregamentos de flexão e tração. Os autores estudaram os efeitos com dois valores de tração: 40 e 80 kN e uma variação cíclica de curvatura de ordem $0,03\ m^{-1}$. Os autores ressaltam que nesse modelo não é possível aplicar pressão interna por causa da modelagem de parte dos elementos como viga, já que não transmitem adequadamente a pressão. Usando vigas, o ganho computacional é muito grande, sendo que o número de graus de liberdade necessários cai de 1,5 milhão usando sólidos para 30 mil usando os elementos de viga. Das simulações conclui-se que o efeito da tração é aumentar a histerese causada pelo carregamento cíclico. Por fim, os resultados numéricos são comparados com experimentos obtendo boa aderência.

Já LEROY et al. (2010) procuram determinar as tensões nas camadas de armadura de tubos flexíveis. Para tal, os autores lançam mão de três modelos: um analítico denominado *Life6*, um modelo periódico denominado *3D Periodic* e um modelo tridimensional completo, o *3D Explicit*. Para cada um deles são exibidas as hipóteses utilizadas e condições de contorno. No primeiro modelo são assumidas curvaturas constantes, periodicidade da solução, variação de raio da armadura desprezível, linearidade, pequenos deslocamentos, entre outras, tornando-o bastante conservador.

O modelo periódico, apesar de menos conservador, utiliza-se da hipótese de periodicidade da solução para reduzir o tamanho da malha e, conseqüentemente, minimizar o esforço computacional. Nele, os tendões das armaduras são modelados utilizando elementos sólidos de primeira ordem com 8 nós. A parte interna usa elementos de casca, as camadas de reforço apresentam uma combinação de cascas e vigas e as camadas anti-

fricção com elementos sólidos de 8 nós. Também foi incluído contato. O modelo completo (*3D Explicit*) foi modelado com elementos sólidos, exceto as camadas anti-desgaste que foram modeladas com elementos de casca. Em todos os casos utilizaram-se como carregamentos pressão interna, forças axiais e momentos fletores. Observa-se que essa última simulação é bem custosa computacionalmente, tendo por volta de 2,5 milhões de elementos. Para complementar o estudo, os resultados obtidos são comparados entre si e com resultados experimentais, obtendo boa concordância. Como foi dito, os autores observaram que o primeiro modelo é deveras conservador quanto aos resultados e que se recomenda a utilização dos outros dois modelos para a comparação.

Para finalizar essa seção, tece-se alguns comentários sobre a abordagem numérica. Como visto, ela é fundamentada no método dos elementos finitos e isso representa um ganho principalmente quanto à possibilidade de uso e minimização das hipóteses necessárias. Independentemente se são utilizados modelos proprietários ou algum *software* comercial, apresenta-se um ganho na quantidade de informações que pode ser representada, principalmente quando comparados com as abordagens analíticas. A grande desvantagem nesse processo é a dificuldade de convergência e o alto custo computacional envolvido. Mesmo sabendo da constante evolução de *hardware* e *software*, que em tese minimizam os efeitos do custo computacional, os problemas de convergência ainda se mostram muito fortes. Em geral, as simulações que envolvem contato e atrito são extremamente lentas e apresentam grande instabilidade numérica, sendo sensíveis aos parâmetros de controle dos métodos. Faz ainda parte da pesquisa associadas às abordagens numéricas a melhoria dos métodos, sempre procurando saídas mais robustas e menos instáveis.

3.4 Considerações e escolha do tipo de modelagem à ser feita

Busca-se nessa seção definir a abordagem a ser seguida e o porquê dessa abordagem.

Num primeiro momento, a utilização de modelos analíticos foi considerada visando, com base em seu estudo, obter uma maneira de generalizá-los e incorporá-los à um *solver*, que permitisse o cálculo das tensões e das propriedades equivalentes de um cabo de seção qualquer, definidas por um usuário, através do *CAD* bidimensional. Porém, com um estudo mais aprofundado, percebeu-se que essa não necessariamente seria a alternativa mais viável. Passou-se então ao estudo dos modelos numéricos para que pudesse ser feita uma escolha adequada, através do estudo de diferentes formas de abordar o problema.

Durante o processo percebeu-se que a modelagem analítica é mais complexa, exige um grande conhecimento do fenômeno e das equações que o regem e resultam em sistemas complexos de serem lidados, mesmo considerando as diversas hipóteses adotadas, listadas na parte em que se trata de modelagem analítica, como muito bem explicitadas por CUSTÓDIO e VAZ (2002).

Ao mesmo tempo percebeu-se uma grande vantagem da modelagem numérica: a possibilidade de levar-se em conta carregamentos e geometrias diversas. O grande contraponto desta abordagem é que o que inicialmente estava previsto como generalização de um modelo passaria a ser um gerador de malhas sofisticado, permitindo ao usuário um mínimo nível de esforço e resultando em um arquivo pronto para ser executado por um pacote comercial de elementos finitos. Porém, uma das características desejadas do programa proposto como um todo não seria atendida: a de um projeto rápido, já que o usuário deveria aguardar um tempo razoável para que uma análise desse porte pudesse ser simulada (uma vez que existem grandes não linearidades envolvidas, como observado em BAHTUI, BAHAI e ALFANO (2008)).

Encontrou-se um meio termo entre as abordagens: uma abordagem híbrida, como pode ser visto em LE e KNAPP (1994) e SAEVIK e BRUASETH (2005). Nesses modelos, os autores modelam cada componente como um macro elemento, gerando uma matriz para cada elemento e conectando-os entre si. Esse modelo garante uma malha menor (já que parte da complexidade do problema é levada em conta na modelagem de cada elemento) e permite tratar casos não contemplados pela modelagem analítica.

Propôs-se então construir um modelo que seja tridimensional (ao contrário do proposto por LE e KNAPP (1994)) e que leve em conta carregamentos não simétricos (o que não ocorre com no modelo de SAEVIK e BRUASETH (2005)). A seção a seguir trata com mais detalhes a revisão necessária para a geração dos elementos específicos do problema e o capítulo 4 trata especificamente do modelo proposto.

3.5 Revisão específica

Nessa seção procura-se exibir referências relativas aos cabos umbilicais e tubos flexíveis buscando ferramentas e formas para a representação dos elementos comuns nesses cabos.

Para o caso da capa plástica e demais componentes que possam ser modelados como cilindros, procurou-se modelos que permitissem ao mesmo tempo carregamentos diversos, flexibilidade quanto ao material a ser empregado e, principalmente, diminuição

do custo computacional quanto à geração de malhas; isto é, um elemento que incluísse a complexidade do problema em sua formulação.

Nas referências clássicas sobre elementos finitos (como por exemplo, BATHE (1995)) encontram-se basicamente modelos que respondem a carregamentos axissimétricos, com material isotrópico elástico linear. Modelos que sejam mais complexos acabam sendo modelados como malhas tetraédricas ou elementos sólidos (paralelepípedos de 8 ou 20 nós). Já COOK et al. (2002) exhibe uma modelagem que permite o uso de carregamentos diversos (utilizando séries de Fourier) e materiais quaisquer. Essa abordagem mostrou-se ser o que se desejava para o elemento, porém o autor apenas deixa indicada a matriz, não a obtendo de maneira analítica. Nesse trabalho procurou-se adequar essa metodologia ao caso dos tubos estudados: um modelo que contemplasse elementos cilíndricos, com material ortotrópico (com as direções de ortotropia coincidentes com os eixos do sistema cilíndrico) e que permitisse qualquer tipo de carregamento. Prosseguiu-se na modelagem até a obtenção analítica da matriz de rigidez.

Para modelar os tendões das camadas de armaduras, procurou-se as possíveis formas de modelagem de elementos tridimensionais curvos. Um dos trabalhos que mais chama a atenção por ser o mais próximo do desejado é o trabalho de NAWROCKI e MICHEL (2000), que propõe a construção de um modelo de elementos finitos para a modelagem de cabos helicoidais com núcleo rígido. O modelo também propõe-se a resolver um feixe de arames helicoidal. Outra proposição do modelo é resolver o contato entre fios de camadas diferentes e também entre fio e núcleo. As hipóteses básicas para esse modelo são:

- Os arames têm seção circular
- Material linear, homogêneo e isotrópico
- Pequenos deslocamentos e deformações
- Seções planas permanecem planas após a deformação
- A seção transversal do fio não deforma sob carregamento.
- Não há contato entre os fios da mesma camada

Com base nessas hipóteses os autores prosseguem com a descrição das coordenadas e deslocamentos da helicoide e determinam o triedro de Frénet associado. Usando

hipóteses sobre o campo de deslocamentos e tensões, eles chegam à relação entre tensão e deformação que é necessária para o cálculo do trabalho virtual.

Em seguida, os autores tratam do contato dividindo os possíveis movimentos como mostrado na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Casos de Contato (Modificada de NAWROCKI e MICHEL (2000)).

<i>Caso</i>	<i>Movimentos Permitidos</i>
1	Nenhum
2	Pivotamento
3	Rolamento
4	Escorregamento
5	Rolamento + Pivotamento
6	Escorregamento + Pivotamento
7	Rolamento + Escorregamento
8	Rolamento + Escorregamento + Pivotamento

Para computar o efeito do contato, os autores utilizam multiplicadores de Lagrange na formulação variacional. Em seguida, eles passam para a formulação de um elemento finito, utilizando polinômios cúbicos de Lagrange para interpolar os deslocamentos. A matriz de rigidez é calculada numericamente, utilizando integração numérica com pontos de Gauss. O número de pontos utilizados foi obtido empiricamente, realizando testes. Em seguida os resultados mostram o efeito do contato por pivotamento no carregamento axial e do escorregamento na flexão. Em comparações com experimentos, o modelo mostra um bom desempenho.

Esse modelo é muito interessante principalmente por incorporar o contato, que é um dos fatores mais desafiantes na formulação numérica. O desempenho do modelo é bom frente aos resultados apresentados e mostra-se como um avanço em relação às formulações atuais.

Já Petrov e Gradin trazem uma formulao completa para um elemento finito curvo e torcido baseado na soluo exata para slidos tridimensionais e est dividido em

duas partes. No primeiro artigo (PETROV e GÉRADIN (1998a)), os autores demonstram os conceitos básicos de uma viga e a solução exata não linear. Eles formulam o elemento submetido a todos os carregamentos, considerando o empenamento da seção nas três direções. Com base na chamada solução inversa de Saint-Venant, os autores descrevem os campos de deslocamentos de uma viga. A formulação então consiste em encontrar o tensor das tensões e com isso descrever o trabalho virtual do elemento. Nesse primeiro artigo, os autores mostram a formulação para um elemento isotrópico e, para finalizar, algumas comparações com outros modelos e casos de convergência de malha, obtendo bons resultados.

No segundo trabalho, PETROV e GÉRADIN (1998b) tratam do problema adicionando anisotropia ao modelo, além de lidar com problemas avançados como, por exemplo, torção não homogênea. Eles mostram o que difere da formulação isotrópica e mostram resultados e comparações. Ambos os artigos mostram um intenso trabalho algébrico. Ainda assim, os trabalhos são excelentes referências no tratamento de problemas não-lineares de vigas.

Outra abordagem que se mostrou interessante foi a vista no trabalho de ZHU e MEGUID (2004), que exibe um elemento de viga curva tridimensional de três nós que evita o problema de valores incorretos quando flexão é considerada. Tal fenômeno, chamado de *locking* ocorre quando se despreza a deformação por cisalhamento. Os autores propõem uma abordagem na qual o acoplamento entre os deslocamentos axial e os demais é forte e, para evitar o *locking*, assumem que tanto a deformação axial quanto a deformação por torção são lineares no elemento. Com isso, obtém-se ainda um polinômio de interpolação dos deslocamentos de grau maior. O elemento é comparado com elementos convencionais de viga em caso de arcos planos e também em uma hélice de baixo ângulo de assentamento. Observa-se que a validade da teoria é para arcos que possuam baixa tortuosidade. Para estruturas com grande tortuosidade são necessários vários elementos para uma boa representação (já que cada elemento apresentará assim uma pequena tortuosidade), da mesma maneira que são necessários vários elementos de viga para representar bem um arco.

Ainda baseando-se na criação de elementos LEUNG e CHAN (1997) propõem uma abordagem na qual não negligenciam algumas matrizes desprezadas em outras formulações. Os autores as exibem, fazendo hipóteses sobre a seção transversal da viga (que permanece plana e não tem empenamento) e sobre as deformações (que são consideradas pequenas). Essa última consideração permite uma linearização de alguns termos, o

que facilita a obtenção da energia da viga. Os autores apresentam como exemplo alguns cálculos, mas não mostram como ficam os deslocamentos das configurações consideradas, deixando algumas dúvidas quanto ao real funcionamento dessa abordagem.

GIMENA, GIMENA e GONZAGA (2008) trazem uma abordagem analítica para o problema, baseado nas equações diferenciais de equilíbrio. Os autores exibem a formulação completa utilizando o triedro de Frénet e depois fazem as transformações de bases necessárias para fazer as equações recaírem no sistema cartesiano. Essa formulação é exibida em detalhes e de uma maneira simples e direta. Eles ainda exibem casos particulares da formulação (arco plano e viga reta) e mostram simulações e comparações com outros modelos e simulações numéricas usando elementos finitos. Esses resultados mostram que o modelo é adequado para resolver problemas de vigas no espaço com seção variável, para o qual foi desenvolvido.

Em outro artigo, GIMENA, GONZAGA e GIMENA (2008) mostram um método de solução para vigas curvas no espaço com seção variável utilizando-se do sistema de equações diferenciais de equilíbrio. Eles procuram deixá-las na forma de uma matriz de transferência, partindo para a solução desse conjunto de equações utilizando um método de marcha do tipo Runge-Kutta. Os autores terminam mostrando como obter uma matriz que relaciona dois pontos distintos do elemento estudado (identificados por I e II) e com isso conseguem montar um sistema do tipo $\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}$. Os autores exibem exemplos e comparam com outros da literatura, obtendo bons resultados.

SANDHU J. S. e DAVIES (1990) propõem um elemento tridimensional curvo e torcido utilizando uma abordagem co-rotacional. No decorrer da formulação, os autores enfatizam o fato da separação entre o modo de corpo rígido e os demais, e também enfatizam o algoritmo de solução utilizado: uma variação do método conhecido como *Arc-Length*: o método *Crisfield Arc-Length*. Esse tipo de método é recomendado em casos no qual há uma perda de rigidez no sistema, como por exemplo quando ocorre instabilidades ou problemas do tipo *snap-through*. Os autores comparam os resultados obtidos pelo modelo utilizando esse método de solução com outros autores e mostram a sua eficiência. Um ponto negativo do artigo é que apesar de descrever os processos para a obtenção dos deslocamentos, os polinômios de interpolação e as matrizes resultantes não são expostas, impedindo assim uma comparação mais imediata.

Outro tipo de abordagem que visa a criação de um elemento de viga é trazida por RATTANAWANGCHAROEN, BAI e SHAH (2004): eles propõem um elemento de parede espessa para vigas curvas. Esse elemento lembra um cilindro, sendo indicado apenas para

representações em que não há tortuosidade envolvida. Os autores exibem a formulação e um ponto interessante é que eles definem como variáveis independentes os deslocamentos e tensões, garantindo assim a continuidade radial das grandezas. Por fim, eles exibem resultados obtidos com o modelo e percebe-se que este funciona bem para representar os elementos propostos. Essa abordagem, apesar de interessante, não se mostra aplicável ao escopo desse trabalho, uma vez que a tortuosidade é fundamental no problema da hélice.

YU, FANG e MA (2002) trazem uma formulação analítica que leva em conta a torção da curva, bem como o empenamento da seção transversal. Tal formulação é demonstrada de maneira completa, facilitando assim sua reprodução e comparações. Os autores partem das soluções analíticas de equilíbrio e das equações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações (que podem ser vistas em LOVE (1944)) para chegar em uma equação diferencial para o cálculo do empenamento da seção. Eles mostram um exemplo utilizando o modelo (um arco no plano sujeito a um carregamento distribuído no plano perpendicular ao do arco) que exhibe bons resultados quando comparado a um *software* comercial de elementos finitos.

A formulação de LENCI e CLEMENTI (2009) traz uma viga como a descrita por YU, FANG e MA (2002), mas considerando variação da seção transversal ao longo do comprimento da viga e incluindo efeitos não lineares. Os autores exibem uma formulação bem completa e com muitos detalhes, exibindo as fórmulas para os deslocamentos, tensões e deformações que incluem algumas hipóteses sobre o empenamento da seção (além de hipóteses básicas como linearidade do material e pequenas deformações, por exemplo). Os autores trazem alguns exemplos e concluem com uma comparação do modelo apresentado com outro que utiliza elementos finitos, obtendo excelentes resultados, exceto quando há um deslocamento induzido, exibindo uma pequena variação.

Desses artigos observou-se que existem diversas maneiras de modelar um elemento helicoidal e alguns exemplos foram vistos. Uma das abordagens que se mostrou simples e eficiente foi a encontrada em ZHU e MEGUID (2004), que propõe um elemento de viga tridimensional que elimina o fenômeno de *locking* (o que costuma-se denominar *locking-free*). Foram feitos alguns testes com esse elemento e percebeu-se que a incorporação do efeito da tortuosidade no mesmo resultaria num elemento mais abrangente e que seria mais adequado ao problema proposto. Levar em conta a tortuosidade faz com que o elemento funcione bem para ângulos de assentamento variando de 0 a 90°, o que não ocorria no elemento de ZHU e MEGUID (2004).

Quanto ao contato, o artigo de NAWROCKI e MICHEL (2000), dá algumas

ideias iniciais para o seu tratamento. Ainda assim, uma abordagem que integre o elemento cilíndrico e o elemento de viga (proposta no capítulo 4) deve ser bem pensada. A principal preocupação é como fazer a ligação entre esses dois elementos e ainda incorporar efeitos de espaços (*gaps*) e atrito entre os elementos.

Para essa ligação divisou-se um elemento de ligação simples, que cria um novo nó simples ligado ao nó descrito via série de Fourier. Esse elemento é exibido no capítulo 4. Já para o contato buscou-se uma solução simples e de fácil execução, apesar da complexidade do fenômeno. A grande referência nesse assunto é o livro de WRIGGERS (2002). Nele são exibidas as mais diversas formas de se tratar o contato entre dois sólidos computacionalmente.

Para o presente problema, a solução mais adequada é a que trata do contato entre nós, que é a abordagem mais simples possível. Para tal, precisa-se definir os pares de contato. Assim, é possível tratar tanto a presença de espaços (*gaps*) quanto o atrito entre camadas.

Dessa maneira, têm-se todas as decisões quanto aos elementos a serem desenvolvidos bem como a maneira de tratá-los como um conjunto. O capítulo do modelo, que explica melhor cada um desses elementos, é exibido à seguir.

4 MACRO ELEMENTOS FINITOS PARA CABOS UMBILICAIS E TUBOS FLEXÍVEIS

4.1 Introdução

Nesse capítulo será tratado o modelo proposto para a solução do problema estrutural dos cabos umbilicais e tubos flexíveis. Como foi dito no Capítulo 3, os modelos atualmente disponíveis na literatura apresentam vantagens e desvantagens que devem ser levadas em conta quando de sua utilização. A abordagem analítica é extremamente vantajosa do ponto de vista de tempo computacional: uma vez feito um conjunto de hipóteses, o problema final consiste na solução de um ou mais sistemas lineares até a convergência do problema. Os grandes limitantes da abordagem analítica são o sistema de equações resultante, que se mostra extremamente complicado e a grande quantidade de hipóteses necessárias, que limita o escopo ao qual o modelo se aplica. Já a abordagem numérica é mais abrangente, pois necessita de um número menor de hipóteses, mas tem como contrapontos o grande número de elementos e de graus de liberdade necessários, a dificuldade na geração de malhas e o problema do contato entre superfícies, que dificulta em muito a convergência dos métodos.

A abordagem escolhida nesse trabalho é a da criação de um modelo tridimensional composto de macro elementos. Cada um deles é definido visando representar um componente presente em cabos umbilicais e tubos flexíveis. O processo consiste em criar uma malha desses elementos e resolver o sistema associado como no processo convencional de elementos finitos. O que torna essa abordagem diferente da abordagem numérica tradicional é o elemento em si.

O presente capítulo trata da descrição do modelo proposto e dos elementos que o compõem, sendo apresentados testes e validações utilizando programas comerciais. O primeiro desses elementos é o elemento cilíndrico de parede espessa. Um elemento com essas características serve para modelar componentes como capas plásticas e também elementos que possam ser tratados, em uma primeira abordagem, como cilindros equivalentes (como

barreiras de pressão e carcaças intertravadas), abordagem essa amplamente utilizada em diversos modelos analíticos e numéricos. O segundo elemento é um elemento de hélice que serve para modelar tendões de armaduras helicoidais. O terceiro elemento é dito de ligação, que une nós de diferentes tipos (sendo essa diferenciação explicada no decorrer desse capítulo) e o quarto elemento é de contato, que trata de não linearidades relacionada a vazios (*gaps*) e atrito.

Para explicar o modelo, o presente capítulo será dividido em três partes:

- A primeira parte traz uma visão geral do método dos elementos finitos linear clássico, mostrando os conceitos básicos. Essa parte também traz uma descrição de uma abordagem muito utilizada para problemas não lineares: a aproximação do problema por uma série de problemas lineares.
- A segunda parte traz uma descrição do modelo proposto e de seus elementos, procurando descrever o método de obtenção das equações, mostrando os passos necessários até a obtenção da matriz de rigidez de cada elemento.
- A terceira parte trata dos resultados e comparações com a abordagem de elementos finitos clássica.

4.2 Método dos Elementos Finitos

Esse tópico é uma introdução ao método dos elementos finitos. Aqui serão descritos o método dos elementos finitos linear e não-linear, no qual são utilizados uma série de problemas lineares para a solução do problema não linear.

4.2.1 Método dos Elementos Finitos Linear

O método dos elementos finitos linear consiste, de maneira resumida, em dividir um problema complexo em problemas de menor complexidade e depois, utilizando alguma maneira para unificar os problemas, obter a solução como um todo. Existem livros que tratam de maneira bastante extensiva e ampla o problema de elementos finitos, como por exemplo, BATHE (1995) e COOK et al. (2002). Uma descrição mais concisa é feita em GAY NETO e CORREIA (2006), cuja filosofia é a adotada aqui. Esse último trabalho é a monografia do autor, que trata de uma solução para a análise estática não-linear de cabos submersos. Esse trabalho engloba a modelagem de elementos finitos não linear, bem como módulos gráficos para pré e pós processamento.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) será descrito restringindo-se à análise estrutural (uma vez que o método pode ser aplicado para análises térmicas, eletromagnéticas, entre outras). Ele consiste nos seguintes passos:

1. Conhecendo a geometria do problema, construir uma malha. A geração da malha consiste em, a partir de um elemento finito definido, decompor a estrutura em um conjunto de nós e entre esses nós, elementos. Deve-se ressaltar que existem diversos tipos de elementos, sendo eles uni, bi ou tridimensionais, cada qual com suas características e número de nós próprios. Outro ponto a ser ressaltado é que a escolha do tipo de elemento (e consequente geração da malha) é fundamental e deve ser pautada na seguinte questão: o elemento (ou o conjunto deles) consegue representar o problema físico em questão? A figura 4.1 exhibe o exemplo aplicado à um cabo e a malha de elementos unidimensional gerada para essa configuração. A figura 4.2 exhibe uma malha bidimensional enquanto a Figura 4.3 exhibe uma malha tridimensional.

Figura 4.1: (a) Um exemplo de configuração de riser (b) Um exemplo de discretização do riser do item (a) através do Método dos Elementos Finitos (esquemático). Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).

2. Calcular a matriz de rigidez de cada um dos elementos e adequar o sistema de coordenada dos graus de liberdade do elemento para condizerem com o sistema de coordenadas global. Aqui deve-se lembrar que o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento é feito no sistema de coordenadas do elemento (local) e quando da composição da matriz global, é necessário que a matriz esteja escrita com os graus de liberdade alinhados com o sistema global.

Figura 4.2: Malha bidimensional (Exemplo de uma placa com um orifício central)

Figura 4.3: Malha Tridimensional (Exemplo de um vaso de pressão)

3. Montar a matriz de rigidez global, que contém as informações de rigidez de todos os elementos, sobrepondo as informações locais. Existe uma relação entre os graus de liberdade do elemento e os graus de liberdade do sistema global, sendo essa informação armazenada em uma matriz de conexão, que faz a ligação entre os graus de liberdade dos nós do elemento (numerados no sistema local) com os graus de liberdade globais (relacionando assim os números local e global de um nó). A figura 4.4 mostra um exemplo de uma treliça bidimensional, e a tabela 4.1 mostra a matriz de conexão dos elementos.

Figura 4.4: Exemplo de numeração global (a) e numeração local (b). Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).

Tabela 4.1: Conexão entre os graus de liberdade locais e globais. Fonte: GAY NETO e CORREIA (2006).

<i>Elemento</i>		(1)	(2)	(3)	(4)
<i>Global</i>	1	1	3	5	7
	2	2	4	6	8
	3	3	5	7	9
	4	4	6	8	10

4. Resolver o sistema linear que envolve a matriz de rigidez global calculada anteriormente e os esforços nodais (que são calculados a partir dos esforços globais) e com isso, determinar-se os deslocamentos nodais. Cabe aqui ressaltar que há um método para resolver esse sistema linear no qual o sistema é subdividido em graus de liberdade e fixos, sendo esse método chamado de condensação estática.

Nesse método, os esforços são divididos em esforços impostos e reações nodais, sendo os primeiros conhecidos e os outros não; da mesma forma, os deslocamentos são divididos em deslocamentos nodais livres e impostos sendo que quando há um esforço nodal atuando sobre a estrutura os deslocamentos são livres e quando há um deslocamento imposto a reação nodal é desconhecida. Assim, pode-se resolver o seguinte sistema:

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix}$$

onde:

$\mathbf{K}_{AA}$ é a parte da matriz $\mathbf{K}$ composta pelos coeficientes de influência de rigidez provenientes apenas da interação de graus de liberdade livres;

$\mathbf{K}_{BB}$ é a parte da matriz $\mathbf{K}$ composta pelos coeficientes de influência de rigidez provenientes apenas da interação de graus de liberdade fixos;

$\mathbf{K}_{AB}$ e $\mathbf{K}_{BA}$ são matrizes compostas por coeficientes de influência de rigidez provenientes da interação entre graus de liberdade livres e graus de liberdade fixos.

$\mathbf{X}_A$ é o vetor de deslocamentos livres;

$\mathbf{X}_B$ é o vetor de deslocamentos impostos;

$\mathbf{F}_A$ é o vetor de esforços nodais;

$\mathbf{F}_B$ é o vetor de reações nodais;

O sistema fica dado como:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{AA}\mathbf{X}_A + \mathbf{K}_{AB}\mathbf{X}_B = \mathbf{F}_A \\ \mathbf{K}_{BA}\mathbf{X}_A + \mathbf{K}_{BB}\mathbf{X}_B = \mathbf{F}_B \end{cases}$$

Ele é resolvido encontrando-se $\mathbf{X}_A$ através da primeira equação e então determinam-se as reações vinculares através da segunda equação (ou seja, obtém-se $\mathbf{F}_B$).

5. Uma vez conhecidos os deslocamentos e esforços, é possível determinar-se outras grandezas desejadas, como por exemplo, tensões.

4.2.2 Método dos Elementos Finitos Não-linear

Existem diversos tipos de não-linearidades presentes em todos os sistemas, sendo as mais comumente encontradas as não-linearidades de geometria, de material e de carregamento. Para o tratamento de cada uma, existem abordagens adequadas. Por exemplo, quando há não-linearidades geométricas é porque há grandes deslocamentos, grandes deformações ou restrições não-lineares, que ocasionam a mudança da matriz de rigidez do sistema.

Um método muito utilizado para a resolução dessa classe de problemas é o Método de Newton-Raphson, por apresentar convergência quadrática. Nesse método a análise consiste em resolver diversos problemas lineares e corrigir a cada passo o valor da rigidez, já que o carregamento aplicado não condiz com o carregamento suportado pela estrutura (uma vez que a mudança de geometria leva a uma nova rigidez). O procedimento a ser seguido pode ser descrito como:

- Aplica-se o carregamento utilizando uma matriz de rigidez com base na configuração inicial do problema.
- Determina-se o carregamento efetivamente suportado pela estrutura.
- Determina-se o desbalanceio de carregamento.
- Aplica-se esse carregamento (o que não foi efetivamente suportado pela estrutura) utilizando como configuração inicial a configuração deformada.
- Repete-se o procedimento até que o desbalanceio seja nulo (ou próximo de zero, respeitando-se uma tolerância).

O procedimento acima descrito apresenta bom desempenho quando o problema possui não linearidades geométricas e de material, sendo essa abordagem mais bem exemplificada em GAY NETO e CORREIA (2006), tratando especificamente de problemas de análise global de *risers*, utilizando elementos finitos unidimensionais. Quando há variações no carregamento, outras formas de abordagem devem ser pensadas. No caso da análise interna de cabos umbilicais e tubos flexíveis, a principal fonte de não linearidades é o contato entre camadas. Como nesse tipo de estrutura vazios (*gaps*) podem surgir, há uma não-linearidade de carregamento e de geometria. Uma camada pode estar em contato com a outra (e assim, transmitindo pressão e exerce esforços tangentes) ou pode ter um *gap* (e, conseqüentemente, não ter carregamentos atuantes entre essas camadas).

Em geral, o tratamento analítico adota a hipótese de que inicialmente não haja vazios e, encontrando pressões de contato negativas (ou seja, não havendo contato entre as superfícies), substitui essas por pressões nulas e define um espaço entre elas (baseada no valor do esforço). O processo iterativo termina quando não existem mais pressões negativas. Na abordagem numérica são inseridos pares de contatos entre as superfícies (e, conseqüentemente, entre os elementos que estão sobre essa superfície). O problema de contato é a principal dificuldade observada na abordagem numérica de cabos umbilicais e tubos flexíveis, já que complica em muito a convergência dos métodos.

4.3 Macro Elementos Finitos

Nesse tópico descreve-se o modelo. Como visto na revisão bibliográfica, a abordagem de uso de elementos talhados para aplicações específicas não é novo, porém propõe-se aqui um modelo que vise os tubos flexíveis e cabos umbilicais. Esses elementos são extensões de modelos já existentes ou ainda foram criados especialmente para esta aplicação. Tais detalhes serão tratados oportunamente na descrição de cada um deles.

Procura-se, então, deixar claro o que se almeja no modelo e o que efetivamente será obtido nesse trabalho. Pretende-se criar uma base sólida para a expansão desse modelo, bem como criar um conjunto mínimo de elementos que permita uma análise de um cabo umbilical ou de um tubo flexível, mesmo que de maneira simplificada. Essa solidez se mostra na preocupação com a possibilidade de inclusão de novos elementos e fenômenos, refletindo-se na filosofia que foi adotada. Tais preocupações resultam em um modelo robusto e confiável para projeto e análise desse tipo de estruturas.

As características desejadas para o modelo são:

- Capaz de lidar com vários tipos de carregamento, sendo tração, momento de flexão, momento de torção, forças cortantes e pressões (visando até distribuições de pressão não necessariamente uniforme).
- Modelo tridimensional (para um trecho de comprimento L , muito menor que o comprimento total do cabo e razoavelmente maior que o diâmetro da seção transversal).
- Permitir a existência de vazios (*gaps*) entre camadas.
- Permitir a inclusão de atrito entre as camadas.

Para tal foram pensados alguns elementos a serem desenvolvidos nesse projeto de pesquisa. Esses elementos são:

- Elemento cilíndrico de parede espessa: serve para a modelagem de capas plásticas, bem como, em uma abordagem inicial simplificada, carcaças intertravadas e camadas de barreira de pressão. Ele utiliza material ortotrópico, permitindo essa abordagem de camadas equivalentes.
- Elementos do tipo tendão: esses elementos apresentam geometria helicoidal e servem para modelar os tendões das armaduras de tração. Pretende-se deixar o perfil da seção genérico o suficiente para tratar da mesma forma tendões circulares e retangulares, bem como outros que possam, porventura, surgir.
- Elementos de contato: são elementos que procuram tratar a existência de vazios entre elementos e aplicação de pressões de contato (caso não haja vazios). Esse elemento será o responsável pela incorporação dos efeitos de atrito no modelo.
- Elementos do tipo núcleo: esses elementos seriam tratados como cilindros uniformes, com propriedades equivalentes e serviriam para modelagens mais simplificadas e verificação com modelos já existentes. Seria um caso particular do elemento cilíndrico de parede espessa com raio interno nulo e propriedades equivalentes.

Inicialmente, procurou-se tratar o elemento cilíndrico de parede espessa por aparentar ser o elemento mais simples de ser trabalhado. Na próxima etapa, passou-se então para a confecção do elemento helicoidal. No decorrer dessa modelagem verificou-se a necessidade de um elemento de ligação, para dar consistência às malhas. Esse elemento também é descrito nesse capítulo. Por fim, descreve-se o elemento de contato e apresentam-se testes e validações desses elementos.

4.3.1 Elemento Cilíndrico de Parede Espessa

O elemento cilíndrico de parede espessa consiste na expansão do modelo presente em COOK et al. (2002). Procura-se obter uma matriz de rigidez analítica, considerando que:

- O material que compõe o elemento é elástico e ortotrópico.
- Sendo u , v e w os deslocamentos na direção radial, circunferencial e axial respectivamente, esses podem ser expandidos utilizando séries de Fourier como:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sum_n \bar{u}_n \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{u}}_n \sin n\theta \\ v = \sum_n \bar{v}_n \sin n\theta - \sum_n \bar{\bar{v}}_n \cos n\theta \\ w = \sum_n \bar{w}_n \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{w}}_n \sin n\theta \end{array} \right. \quad (4.1)$$

- Os carregamentos considerados - forças e momentos nas direções radial, axial e circunferencial - também podem ser descritos utilizando séries de Fourier:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_r = \sum_n \bar{F}_r \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{F}}_r \sin n\theta \\ F_\theta = \sum_n \bar{F}_\theta \sin n\theta + \sum_n \bar{\bar{F}}_\theta \cos n\theta \\ F_z = \sum_n \bar{F}_z \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{F}}_z \sin n\theta \\ M_r = \sum_n \bar{M}_r \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{M}}_r \sin n\theta \\ M_\theta = \sum_n \bar{M}_\theta \sin n\theta + \sum_n \bar{\bar{M}}_\theta \cos n\theta \\ M_z = \sum_n \bar{M}_z \cos n\theta + \sum_n \bar{\bar{M}}_z \sin n\theta \end{array} \right. \quad (4.2)$$

- O sistema de coordenadas cilíndrico empregado tanto nos deslocamentos quanto esforços pode ser visto na figura 4.5.

Figura 4.5: Sistema de coordenadas empregado.

A expansão do elemento é a obtenção da matriz de rigidez do elemento analiticamente, que não é feita pelo COOK et al. (2002). Utiliza-se a hipótese de material ortotrópico e um procedimento de subdivisão matricial para facilitar os cálculos, obtendo assim uma forma analítica da matriz de rigidez. Para tal, as relações entre tensões, deformações e deslocamentos deve ser expressas. O primeiro passo é determinar o equilíbrio das tensões e para isso utiliza-se o elemento infinitesimal da figura 4.6. Após algumas manipulações algébricas e escrevendo o equilíbrio para as três direções, obtém-se o sistema de equações 4.3.

Figura 4.6: Elemento infinitesimal cilíndrico.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

onde σ_i é a tensão normal na direção i e τ_{ij} é a tensão de cisalhamento no plano i, j , com $ij = r, \theta, z$.

A seguir, calcula-se a relação entre deformações e deslocamentos. Usando o mesmo sistema de coordenadas cilíndricas, estas são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ε é a deformação na direção dada pelo subscrito, γ é o cisalhamento no plano dado pelos subscritos e u , v e w os deslocamentos nas direções radial, circunferencial e axial, respectivamente.

O conjunto de equações 4.4 pode ser reescrito na forma matricial $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{\partial}{r \partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{r \partial \theta} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Ainda, a relação entre tensões e deformações é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$$

com $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_\theta & \sigma_z & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} & \tau_{\theta z} \end{bmatrix}^T$.

Usando a hipótese de material linear ortotrópico, com os eixos principais coincidentes com as direções principais do elemento, a matriz de rigidez de material $\mathbf{E}$ é dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_\beta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para obter os termos da matriz 4.6, utiliza-se a inversa dessa, já que é de mais fácil obtenção. Assim:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}_{mat}^{-1} \quad (4.7)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{mat} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} & \frac{\nu_{rz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} & \frac{1}{E_\theta} & \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{rz}}{E_z} & \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{r\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{rz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{\theta z}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

sendo E_i o módulo de elasticidade na direção i , ν_{ij} o coeficiente de Poisson no plano ij e G_{ij} o módulo de cisalhamento no plano ij , com $i, j = r, \theta, z$. Percebe-se que $\mathbf{C}_{mat}$ é uma matriz simétrica e, por conseguinte, $\mathbf{E}$ também o é.

A análise a seguir é feita apenas para os termos com barra simples do conjunto de equações 4.1, uma vez que o procedimento para os termos de duas barras é idêntico. A única ressalva a ser feita é para o termo de ordem zero ($n = 0$), no qual apenas os termos relativos ao cosseno estão presentes e que fazem com que o grau de liberdade circunferencial deva ser desconsiderado para que não ocorra uma singularidade na matriz (já que tal singularidade caracteriza um movimento de corpo rígido). Deve-se ainda comentar que o sinal negativo no deslocamento circunferencial v (vide equação 4.1) torna

as matrizes de ordem diferente de zero idênticas para os termos de barra simples e dupla, como pode ser visto em COOK et al. (2002). Assim, para o n -ésimo deslocamento de barra simples, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \\ \bar{w}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_n \quad (4.9)$$

com:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 4$$

$$\bar{\mathbf{d}}_n = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1n} & \bar{v}_{1n} & \bar{w}_{1n} & \bar{u}_{2n} & \bar{v}_{2n} & \bar{w}_{2n} & \bar{u}_{3n} & \bar{v}_{3n} & \bar{w}_{3n} & \bar{u}_{4n} & \bar{v}_{4n} & \bar{w}_{4n} \end{bmatrix}^T$$

$$N_1 = \frac{\left(\frac{t}{2} - (r - R_m)\right) \left(\frac{L}{2} - z\right)}{tL} \quad N_3 = \frac{\left(\frac{t}{2} + (r - R_m)\right) \left(\frac{L}{2} + z\right)}{tL}$$

$$N_2 = \frac{\left(\frac{t}{2} + (r - R_m)\right) \left(\frac{L}{2} - z\right)}{tL} \quad N_4 = \frac{\left(\frac{t}{2} - (r - R_m)\right) \left(\frac{L}{2} + z\right)}{tL}$$

onde $\mathbf{d}$ é o vetor com os deslocamento nodais para a ordem indicada no subscrito, L é o comprimento, R_m é o raio médio, t é a espessura do cilindro e N_i , $i = 1, \dots, 4$ as funções de forma para um elemento paramétrico retangular. Essas dimensões, bem como os deslocamentos nodais são exibidos na figura 4.7.

Compondo as equações 4.1 e 4.9, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \\ \bar{w}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_1 & \bar{\mathbf{N}}_2 & \bar{\mathbf{N}}_3 & \bar{\mathbf{N}}_4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_n \quad (4.10)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \begin{bmatrix} N_i \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & N_i \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & N_i \cos n\theta \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 4$$

Figura 4.7: Plano (seção radial do tubo) modelado como um elemento planar considerando o raio médio (R_m), espessura e altura do cilindro.

Pode-se expressar as deformações em função dos deslocamentos nodais como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_1 & \cdots & \mathbf{N}_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \quad (4.11)$$

onde $\bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \bar{d}_0 & \bar{d}_1 & \cdots & \bar{d}_n \end{bmatrix}$ é o vetor de deslocamento nodais.

A operação linear $\boldsymbol{\partial} \mathbf{N}_i$ pode ser escrita como $\mathbf{B}_i$ e o potencial de energia pode ser expresso em termos dos deslocamentos nodais como:

$$U = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \bar{\mathbf{d}}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \right) \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{d}} \quad (4.12)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações e $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do elemento, com $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \int_V \bar{\mathbf{K}} dV$.

É possível obter a forma analítica da matriz de rigidez. Para tornar o processo simplificado, essa é dividida em sub-matrizes, como pode ser visto na equação 4.13.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} B_0^T E B_0 & \cdots & B_0^T E B_n \\ B_1^T E B_0 & \cdots & B_1^T E B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n^T E B_0 & \cdots & B_n^T E B_n \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Cada termo $B_m^T E B_n = \bar{k}_{mn}$ pode ser calculado como:

$$\bar{k}_{mn} = \begin{bmatrix} \dot{N}_{1m}^T E \dot{N}_{1n} & \cdots & \dot{N}_{1m}^T E \dot{N}_{4n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{N}_{4m}^T E \dot{N}_{1n} & \cdots & \dot{N}_{4m}^T E \dot{N}_{4n} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

com:

$$\dot{N}_{in} = \begin{bmatrix} N_{i,r} \cos n\theta & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} \cos n\theta & n \frac{N_i}{r} \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \cos n\theta \\ N_{i,z} \cos n\theta & 0 & N_{i,r} \cos n\theta \\ -n \frac{N_i}{r} \sin n\theta & \left(N_{i,r} - \frac{N_i}{r} \right) \sin n\theta & 0 \\ 0 & N_{i,z} \sin n\theta & -n \frac{N_i}{r} \sin n\theta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Para cada termo $\dot{N}_{im}^T E \dot{N}_{jn}$, pode-se escrever:

$$\dot{N}_{im} = \begin{bmatrix} \dot{N}_{im}^\alpha & \dot{N}_{im}^\beta \end{bmatrix}$$

E assim:

$$\dot{N}_{im}^T E \dot{N}_{jn} = \dot{N}_{im}^{\alpha T} E_\alpha \dot{N}_{jn}^\alpha + \dot{N}_{im}^{\beta T} E_\beta \dot{N}_{jn}^\beta \quad (4.16)$$

Cada termo da expressão pode ser avaliado separadamente. Para o primeiro termo, tem-se:

$$\dot{N}_{im}^{\alpha T} E_\alpha \dot{N}_{jn}^\alpha = \begin{bmatrix} \psi_{11}^\alpha & \psi_{12}^\alpha & \psi_{13}^\alpha \\ \psi_{21}^\alpha & \psi_{22}^\alpha & \psi_{23}^\alpha \\ \psi_{31}^\alpha & \psi_{32}^\alpha & \psi_{33}^\alpha \end{bmatrix} \cos m\theta \sin n\theta$$

Sendo que cada $\psi_{kl}^\alpha(k, l = 1, \dots, 3)$ é dado por:

$$\psi_{11}^\alpha = E_{11}N_{i,r}N_{j,r} + E_{12}\frac{N_i}{r}N_{j,r} + E_{12}N_{i,r}\frac{N_j}{r} + E_{22}\frac{N_iN_j}{r^2} \quad (4.17)$$

$$\psi_{12}^\alpha = nE_{12}N_{i,r}\frac{N_j}{r} + nE_{22}\frac{N_iN_j}{r^2} \quad (4.18)$$

$$\psi_{13}^\alpha = E_{13}N_{i,r}N_{j,r} + E_{23}\frac{N_i}{r}N_{j,z} \quad (4.19)$$

$$\psi_{21}^\alpha = mE_{21}\frac{N_i}{r}N_{j,r} + mE_{22}\frac{N_iN_j}{r^2} \quad (4.20)$$

$$\psi_{22}^\alpha = mnE_{22}\frac{N_iN_j}{r^2} \quad (4.21)$$

$$\psi_{23}^\alpha = mE_{23}\frac{N_i}{r}N_{j,r} \quad (4.22)$$

$$\psi_{31}^\alpha = E_{31}N_{i,z}N_{j,r} + E_{32}N_{i,z}\frac{N_j}{r} \quad (4.23)$$

$$\psi_{32}^\alpha = nE_{32}N_{i,z}\frac{N_j}{r} \quad (4.24)$$

$$\psi_{33}^\alpha = E_{33}N_{i,z}N_{j,z} \quad (4.25)$$

onde $N_{i,r}$ significa a diferenciação da função de forma com respeito à r e $N_{i,z}$ com respeito à z . Já para o segundo termo, não se obtém uma expressão na qual o produto dos cossenos aparece isolado. Pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{N}}_{im}^{\beta T} \mathbf{E}_{\beta} \dot{\mathbf{N}}_{jn}^{\beta} = \begin{bmatrix} \psi_{11}^{\beta} & \psi_{12}^{\beta} & \psi_{13}^{\beta} \\ \psi_{21}^{\beta} & \psi_{22}^{\beta} & \psi_{23}^{\beta} \\ \psi_{31}^{\beta} & \psi_{32}^{\beta} & \psi_{33}^{\beta} \end{bmatrix}$$

Sendo que cada $\psi_{kl}^{\beta}(k, l = 1, \dots, 3)$ é dado por:

$$\psi_{11}^{\beta} = mnE_{44} \frac{N_i N_j}{r^2} \sin m\theta \cos n\theta + E_{55} N_{i,z} N_{j,z} \cos m\theta \cos n\theta \quad (4.26)$$

$$\psi_{12}^{\beta} = -mE_{44} \frac{N_i}{r} \left(N_{j,r} - \frac{N_j}{r} \right) \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.27)$$

$$\psi_{13}^{\beta} = E_{55} N_{i,z} N_{j,r} \cos m\theta \cos n\theta \quad (4.28)$$

$$\psi_{21}^{\beta} = -nE_{44} \left(N_{i,r} - \frac{N_i}{r} \right) \frac{N_j}{r} \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.29)$$

$$\psi_{22}^{\beta} = \left[E_{44} \left(N_{i,r} - \frac{N_i}{r} \right) \left(N_{j,r} - \frac{N_j}{r} \right) + E_{66} N_{i,z} N_{j,z} \right] \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.30)$$

$$\psi_{23}^{\beta} = -nE_{66} N_{i,z} \frac{N_j}{r} \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.31)$$

$$\psi_{31}^{\beta} = E_{55} N_{i,r} N_{j,z} \cos m\theta \cos n\theta \quad (4.32)$$

$$\psi_{32}^{\beta} = -mE_{66} \frac{N_i}{r} N_{j,z} \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.33)$$

$$\psi_{33}^{\beta} = E_{55} N_{i,r} N_{j,r} \cos m\theta \cos n\theta + mnE_{66} \frac{N_i N_j}{r^2} \sin m\theta \sin n\theta \quad (4.34)$$

Para facilitar a manipulação, propõe-se a seguinte divisão das matrizes:

$$\dot{\mathbf{N}}_{im}^T \mathbf{E} \dot{\mathbf{N}}_{jn} = \mathbf{c}_{ij} \frac{\cos m\theta \cos n\theta}{r} + \mathbf{s}_{ij} \frac{\sin m\theta \sin n\theta}{r}$$

com $\mathbf{c}_{ij}$ dado por:

$$\mathbf{c}_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11}^{ij} & c_{12}^{ij} & c_{13}^{ij} \\ c_{21}^{ij} & c_{22}^{ij} & c_{23}^{ij} \\ c_{31}^{ij} & c_{32}^{ij} & c_{33}^{ij} \end{bmatrix}$$

E seus elementos dados por:

$$c_{11}^{ij} = E_{11}rN_{i,r}N_{j,r} + E_{12}rN_iN_{j,r} + E_{12}rN_{i,r}N_j + E_{22}\frac{N_iN_j}{r} + E_{55}rN_{i,z}N_{j,z} \quad (4.35)$$

$$c_{12}^{ij} = nE_{12}N_{i,r}N_j + nE_{22}\frac{N_iN_j}{r} \quad (4.36)$$

$$c_{13}^{ij} = E_{13}rN_{i,r}N_{j,z} + E_{23}N_iN_{j,z} + E_{55}rN_{i,z}N_{j,r} \quad (4.37)$$

$$c_{21}^{ij} = mE_{21}N_iN_{j,r} + mE_{22}\frac{N_iN_j}{r} \quad (4.38)$$

$$c_{22}^{ij} = mnE_{22}\frac{N_iN_j}{r} \quad (4.39)$$

$$c_{23}^{ij} = mE_{23}N_iN_{j,z} \quad (4.40)$$

$$c_{31}^{ij} = E_{31}rN_{i,z}N_{j,r} + E_{32}N_{i,z}N_j + E_{55}rN_{i,r}N_{j,z} \quad (4.41)$$

$$c_{32}^{ij} = nE_{32}N_{i,z}N_j \quad (4.42)$$

$$c_{33}^{ij} = E_{33}rN_{i,z}N_{j,z} + E_{55}rN_{i,r}N_{j,r} \quad (4.43)$$

A matriz $\mathbf{s}_{ij}$ é dada por:

$$\mathbf{s}_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11}^{ij} & s_{12}^{ij} & s_{13}^{ij} \\ s_{21}^{ij} & s_{22}^{ij} & s_{23}^{ij} \\ s_{31}^{ij} & s_{32}^{ij} & s_{33}^{ij} \end{bmatrix}$$

Com cada um dos elementos que a constituem dados por:

$$s_{11}^{ij} = mnE_{44} \frac{N_i N_j}{r} \quad (4.44)$$

$$s_{12}^{ij} = -mE_{44}N_iN_{j,r} + mE_{44} \frac{N_i N_j}{r} \quad (4.45)$$

$$s_{13}^{ij} = 0 \quad (4.46)$$

$$s_{21}^{ij} = -nE_{44}N_{i,r}N_j + nE_{44} \frac{N_i N_j}{r} \quad (4.47)$$

$$s_{22}^{ij} = E_{44} \left(rN_{i,r}N_{j,r} - N_{i,r}N_j - N_iN_{j,r} + \frac{N_i N_j}{r} \right) + E_{66}rN_{i,z}N_{j,z} \quad (4.48)$$

$$s_{23}^{ij} = -nE_{66}N_{i,z}N_j \quad (4.49)$$

$$s_{31}^{ij} = 0 \quad (4.50)$$

$$s_{32}^{ij} = -mE_{66}N_{i,z}N_j \quad (4.51)$$

$$s_{33}^{ij} = mnE_{66}\frac{N_iN_j}{r} \quad (4.52)$$

Com esse esquema de divisão, é possível escrever:

$$\mathbf{B}_m^T \mathbf{E} \mathbf{B}_n = \bar{\mathbf{k}}_{mn} = \mathbf{c}^{mn} \frac{\cos m\theta \cos n\theta}{r} + \mathbf{s}^{mn} \frac{\sin m\theta \sin n\theta}{r}$$

onde:

$$\mathbf{c}^{mn} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^{mn} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}$$

Lembrando da equação 4.12, pode-se escrever a matriz de rigidez dos termos de uma barra como:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \iiint \bar{\mathbf{K}} r dr d\theta dz$$

Pode-se escrever para cada elemento $\mathbf{k}_{mn}$ da matriz $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{k}_{mn} = \int \bar{\mathbf{k}}_{mn} dV = \iiint \mathbf{c}^{mn} \cos m\theta \cos n\theta r dr d\theta dz + \iiint \mathbf{s}^{mn} \sin m\theta \sin n\theta r dr d\theta dz$$

Deve-se notar que todos os elementos das matrizes são formados por produtos entre senos e cossenos de m e n . Lembrando que essas matrizes serão integradas com respeito à θ e de posse do seguinte conjunto de relações de ortogonalidade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n \text{ e para } m = n = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta = 0, \quad \text{para todo } m \text{ e } n. \quad (4.55)$$

Pode-se calcular cada elemento, chegando-se à:

$$\mathbf{k}_{mn} = \begin{cases} 2\pi \iiint \mathbf{c}^{mn} dr d\theta dz = 2\pi \mathbf{c}^{mn}, & \text{se } m = n = 0, \\ \pi \iiint (\mathbf{c}^{mn} + \mathbf{s}^{mn}) dr d\theta dz = \pi (\mathbf{c}^{mn} + \mathbf{s}^{mn}), & \text{se } m = n \neq 0, \\ \mathbf{0}, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Ou seja, a matriz fica diagonal em relação às ordens da série de Fourier. Os elementos $\mathbf{c}^{mn}$ são expressos por:

$$\mathbf{c}^{mn} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} & \mathbf{c}_{14} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{23} & \mathbf{c}_{24} \\ \mathbf{c}_{31} & \mathbf{c}_{32} & \mathbf{c}_{33} & \mathbf{c}_{34} \\ \mathbf{c}_{41} & \mathbf{c}_{42} & \mathbf{c}_{43} & \mathbf{c}_{44} \end{bmatrix}$$

com:

$$\mathbf{c}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11}^{ij} & \mathbf{c}_{12}^{ij} & \mathbf{c}_{13}^{ij} \\ \mathbf{c}_{21}^{ij} & \mathbf{c}_{22}^{ij} & \mathbf{c}_{23}^{ij} \\ \mathbf{c}_{31}^{ij} & \mathbf{c}_{32}^{ij} & \mathbf{c}_{33}^{ij} \end{bmatrix}$$

sendo cada um desses elementos dados por:

$$\mathbf{c}_{11}^{ij} = E_{11} r N r N r [i, j] + E_{21} N N r [i, j] + E_{22} N N u r [j, i] + E_{55} r N z N z [i, j] \quad (4.56)$$

$$\mathcal{C}_{12}^{ij} = nE_{12}NNr[j, i] + nE_{22}NNur[i, j] \quad (4.57)$$

$$\mathcal{C}_{13}^{ij} = E_{13}rNrNz[i, j] + E_{23}NNz[i, j] + E_{55}rNrNz[j, i] \quad (4.58)$$

$$\mathcal{C}_{21}^{ij} = mE_{21}NNr[i, j] + mE_{22}NNur[i, j] \quad (4.59)$$

$$\mathcal{C}_{22}^{ij} = mnE_{22}NNur[i, j] \quad (4.60)$$

$$\mathcal{C}_{23}^{ij} = mE_{23}NNz[i, j] \quad (4.61)$$

$$\mathcal{C}_{31}^{ij} = E_{31}rNrNz[i, j] + E_{32}NNz[j, i] + E_{55}rNrNz[i, j] \quad (4.62)$$

$$\mathcal{C}_{32}^{ij} = nE_{32}NNz[j, i] \quad (4.63)$$

$$\mathcal{C}_{33}^{ij} = E_{33}rNzNz[i, j] + E_{55}rNrNr[i, j] \quad (4.64)$$

e $\mathcal{S}_{ij}$ analogamente:

$$\mathcal{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11}^{ij} & \mathcal{S}_{12}^{ij} & \mathcal{S}_{13}^{ij} \\ \mathcal{S}_{21}^{ij} & \mathcal{S}_{22}^{ij} & \mathcal{S}_{23}^{ij} \\ \mathcal{S}_{31}^{ij} & \mathcal{S}_{32}^{ij} & \mathcal{S}_{33}^{ij} \end{bmatrix}$$

sendo cada componente:

$$\mathcal{S}_{11}^{ij} = mnE_{44}NNur[i, j] \quad (4.65)$$

$$\mathcal{S}_{12}^{ij} = -mE_{44}NNr[i, j] + mE_{44}NNur[i, j] \quad (4.66)$$

$$\mathcal{S}_{13}^{ij} = 0 \quad (4.67)$$

$$\mathcal{S}_{21}^{ij} = -nE_{44}NNr[j, i] + nE_{44}NNur[i, j] \quad (4.68)$$

$$\mathcal{S}_{22}^{ij} = E_{44}(rNrNr[i, j] - NNr[j, i] - NNr[i, j] + NNur[i, j]) + E_{66}rNzNz[i, j] \quad (4.69)$$

$$\mathcal{S}_{23}^{ij} = -nE_{66}NNz[j, i] \quad (4.70)$$

$$\mathcal{S}_{31}^{ij} = 0 \quad (4.71)$$

$$\mathcal{S}_{32}^{ij} = -mE_{66}NNz[i, j] \quad (4.72)$$

$$\mathcal{S}_{33}^{ij} = mnE_{66}NNur[i, j] \quad (4.73)$$

e as matrizes $rNrNr$, NNr , $NNur$, $rNzNz$, NNz e $rNrNz$ dadas por:

$$rNrNr = \frac{1}{6} \frac{LR_m}{t} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$NNr = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$NNur = \frac{L}{24t^2} \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 2\lambda_2 & 2\lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 2\lambda_3 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 2\lambda_2 & 2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$rNzNz = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \lambda_4 & 2\frac{tR_m}{L} & -2\frac{tR_m}{L} & -\lambda_4 \\ 2\frac{tR_m}{L} & \lambda_5 & -\lambda_5 & -2\frac{tR_m}{L} \\ -2\frac{tR_m}{L} & -\lambda_5 & \lambda_5 & 2\frac{tR_m}{L} \\ -\lambda_4 & -2\frac{tR_m}{L} & 2\frac{tR_m}{L} & 2\lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$NNz = \frac{t}{12} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$rNrNz = \begin{bmatrix} \lambda_6 & \lambda_7 & -\lambda_7 & -\lambda_6 \\ -\lambda_6 & -\lambda_7 & \lambda_7 & \lambda_6 \\ -\lambda_6 & -\lambda_7 & \lambda_7 & \lambda_6 \\ \lambda_6 & \lambda_7 & -\lambda_7 & -\lambda_6 \end{bmatrix}$$

onde λ_i ($i = 1, \dots, 7$) são:

$$\lambda_1 = -4t(R_m + t) + (2R_m + t)^2 (\ln(2R_m + t) - \ln(2R_m - t))$$

$$\lambda_2 = 4tR_m + (2R_m - t)(2R_m + t)(\ln(2R_m - t) - \ln(2R_m + t))$$

$$\lambda_3 = -4t(R_m - t) + (2R_m - t)^2 (\ln(2R_m + t) - \ln(2R_m - t))$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= \frac{t(4R_m - t)}{L} \\ \lambda_5 &= \frac{t(4R_m + t)}{L} \\ \lambda_6 &= \frac{1}{4}R_m - \frac{1}{24}t \\ \lambda_7 &= \frac{1}{4}R_m + \frac{1}{24}t\end{aligned}$$

Assim foi resolvido o problema para carregamentos simétricos. A matriz de rigidez considerando também os carregamentos não simétricos fica:

$$\mathbf{K}_{full} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{K}$ sendo a matriz de rigidez previamente obtida. A parte com uma barra é idêntica à com duas barras, como dito anteriormente. Os deslocamentos seguem a mesma forma, sendo:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\bar{\mathbf{d}}} \end{Bmatrix}$$

sendo $\bar{\mathbf{d}}$ a parcela dos deslocamentos com barra simples e $\bar{\bar{\mathbf{d}}}$ referentes à parte com barra dupla.

O particionamento de matrizes foi efetuado pensando na implementação computacional e na facilidade de verificação dos elementos. Uma vez efetuado o cálculo da matriz de rigidez, passou-se à formulação dos esforços atuantes. Lembrando que a energia total de deformação U é igual ao trabalho das forças pode-se escrever:

$$U = W = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{volume} dV + \sum_S^{nS} \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{f}_{sup} dS + \sum_{i=1}^{nN} \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_i$$

onde $\mathbf{u}$ representa deslocamento, $\mathbf{u}_S$ são os deslocamentos nas superfícies, $\mathbf{u}_i$ são os deslocamentos nodais, nS é o número de superfícies, nN é o número de nós, $\mathbf{f}_{volume}$ são as forças de volume, $\mathbf{f}_{sup}$ são as forças de superfície e $\mathbf{f}_i$ são as forças nodais.

Uma das possíveis maneiras de tratar as forças é fazendo a hipótese de que elas se distribuem seguindo a mesma regra que os deslocamentos, o que facilita em muito a formulação. Assim, as forças equivalentes podem ser escritas como:

$$\mathbf{R} = \int_V \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f}_{volume} dV + \sum_S^{nS} \int_S \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{f}_{sup} dS + \sum_{i=1}^{nN} \bar{\mathbf{N}}_i^T \mathbf{f}_i$$

Para o cálculo das forças nodais, basta somar a contribuição do nó adequado. Para o cálculo das forças volumétricas, considerando apenas uma força constante, obtém-se facilmente o valor da carga nodal equivalente. O cálculo das forças de superfície é mais complexo e, por isso, é exibido aqui em detalhes.

Assumindo que as forças de superfície possuam uma distribuição que siga as funções de forma (o procedimento para uma força variável de volume é idêntico e por isso não exibido aqui), pode-se escrever:

$$\mathbf{f}_{sup} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_0 & \bar{\mathbf{N}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix}$$

onde $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ são os termos da série de Fourier da força atuante na superfície. O índice indica qual termo da série a força está associada.

Assim, a resultante nodal fica:

$$\mathbf{R} = \sum_S^{nS} \int_S \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_0^T \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{N}}_n^T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_0 & \bar{\mathbf{N}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} dS \quad (4.74)$$

Efetuada a multiplicação das matrizes de 4.74 obtém-se:

$$\mathbf{R} = \sum_S^{nS} \int_S \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_0^T \bar{\mathbf{N}}_0 & \bar{\mathbf{N}}_0^T \bar{\mathbf{N}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_0^T \bar{\mathbf{N}}_n \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T \bar{\mathbf{N}}_0 & \bar{\mathbf{N}}_1^T \bar{\mathbf{N}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_1^T \bar{\mathbf{N}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{N}}_n^T \bar{\mathbf{N}}_0 & \bar{\mathbf{N}}_n^T \bar{\mathbf{N}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_n^T \bar{\mathbf{N}}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} dS \quad (4.75)$$

Lembrando que:

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^i & \mathbf{N}_2^i & \mathbf{N}_3^i & \mathbf{N}_4^i \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever:

$$\bar{N}_i^T \bar{N}_j = \begin{bmatrix} N_1^{iT} N_1^j & N_1^{iT} N_2^j & N_1^{iT} N_3^j & N_1^{iT} N_4^j \\ N_2^{iT} N_1^j & N_2^{iT} N_2^j & N_2^{iT} N_3^j & N_2^{iT} N_4^j \\ N_3^{iT} N_1^j & N_3^{iT} N_2^j & N_3^{iT} N_3^j & N_3^{iT} N_4^j \\ N_4^{iT} N_1^j & N_4^{iT} N_2^j & N_4^{iT} N_3^j & N_4^{iT} N_4^j \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

E cada elemento pode ser reescrito como:

$$N_k^{iT} N_l^j = N_k N_l \begin{bmatrix} \cos i\theta \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin i\theta \sin j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos i\theta \cos j\theta \end{bmatrix} = N_k N_l \mathbf{SC}_{ij}$$

Assim, a expressão 4.76 fica:

$$\bar{N}_i^T \bar{N}_j = \begin{bmatrix} N_1^2 \mathbf{SC}_{11} & N_1 N_2 \mathbf{SC}_{12} & N_1 N_3 \mathbf{SC}_{13} & N_1 N_4 \mathbf{SC}_{14} \\ N_2 N_1 \mathbf{SC}_{21} & N_2^2 \mathbf{SC}_{22} & N_2 N_3 \mathbf{SC}_{23} & N_2 N_4 \mathbf{SC}_{24} \\ N_3 N_1 \mathbf{SC}_{31} & N_3 N_2 \mathbf{SC}_{32} & N_3^2 \mathbf{SC}_{33} & N_3 N_4 \mathbf{SC}_{34} \\ N_4 N_1 \mathbf{SC}_{41} & N_4 N_2 \mathbf{SC}_{42} & N_4 N_3 \mathbf{SC}_{43} & N_4^2 \mathbf{SC}_{44} \end{bmatrix}$$

As possíveis áreas (infinitesimais) em que as forças de superfície podem atuar são exibidas na figura 4.8:

Figura 4.8: Áreas infinitesimais de um elemento cilíndrico.

Lembrando as relações de ortogonalidade 4.53, 4.54 e 4.55, pode-se já escrever uma versão simplificada das forças, como exibido na equação 4.77.

$$\mathbf{R} = \sum_S^{nS} \int_S \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_0^T \bar{\mathbf{N}}_0 \mathbf{P}_0 \\ \bar{\mathbf{N}}_1^T \bar{\mathbf{N}}_1 \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{N}}_n^T \bar{\mathbf{N}}_n \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} dS = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

sendo que a matrix $\mathbf{SC}_{ij}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{SC}_{ij} = \begin{cases} \pi \cdot \mathbf{I}_3, & \text{se } m = n = 0 \\ 2\pi \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

onde $\mathbf{I}_3$ é a matriz identidade de ordem 3.

Cada termo $\mathbf{R}_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) da expressão 4.77 pode ser escrito como:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} N_1^2 \mathbf{SC}_{11} & N_1 N_2 \mathbf{SC}_{12} & N_1 N_3 \mathbf{SC}_{13} & N_1 N_4 \mathbf{SC}_{14} \\ N_2 N_1 \mathbf{SC}_{21} & N_2^2 \mathbf{SC}_{22} & N_2 N_3 \mathbf{SC}_{23} & N_2 N_4 \mathbf{SC}_{24} \\ N_3 N_1 \mathbf{SC}_{31} & N_3 N_2 \mathbf{SC}_{32} & N_3^2 \mathbf{SC}_{33} & N_3 N_4 \mathbf{SC}_{34} \\ N_4 N_1 \mathbf{SC}_{41} & N_4 N_2 \mathbf{SC}_{42} & N_4 N_3 \mathbf{SC}_{43} & N_4^2 \mathbf{SC}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

com cada vetor $\mathbf{F}_\beta$ ($\beta = 1, \dots, 4$) sendo o vetor das componentes da força de superfície nas três direções (radial, circumferencial e axial). Combinando as equações 4.78 e 4.79, pode-se escrever:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_\alpha^1 \\ \mathbf{R}_\alpha^2 \\ \mathbf{R}_\alpha^3 \\ \mathbf{R}_\alpha^4 \end{Bmatrix} \text{ com } \mathbf{R}_\alpha^k = \pi \Lambda_\alpha \sum_{j=1}^4 \mathbf{F}_j \int N_k N_j \frac{dS}{d\theta} \quad (4.80)$$

onde:

$$\Lambda_{\alpha} = \begin{cases} \mathbf{I}_3, & \text{se } \alpha = 0 \\ 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (4.81)$$

Cada um dos termos $\mathbf{R}_{\alpha}$ mostra a contribuição de um esforço de um determinado termo nas componentes de deslocamento de um elemento.

4.3.2 Elemento Tridimensional para Helicóides

Esse elemento foi desenvolvido baseado na formulação exibida em ZHU e MEGUID (2004), mantendo a curvatura e acrescentando o efeito da tortuosidade à mesma. A tortuosidade dá uma medida de quanto a curva sai do plano, ao passo que a curvatura indica o quão curvo essa curva é. Tal acréscimo faz com que o elemento funcione para helicoides de diversos ângulos de assentamento, desde ângulo nulo (ou seja, uma viga reta) até ângulo 90° (arco no plano) com poucos elementos e apresentando excelentes resultados. A formulação completa do elemento é feita nessa seção.

Para integrar esse elemento com o cilíndrico exibido anteriormente é necessário escrever os deslocamentos no sistema cilíndrico. Nesse texto não apenas a matriz de rigidez é mostrada, mas também a matriz de rotação entre os sistemas (Frénet, utilizado no elemento, e cilíndrico). Uma nota a ser feita é quanto aos sistemas de coordenadas envolvidos. O sistema da seção transversal é coincidente com o de Frénet devido à escolha da orientação do sistema. E o sistema dos deslocamentos é o cilíndrico pelas razões descritas acima.

Considere-se um elemento como o exibido na figura 4.9.

Figura 4.9: Elemento helicoidal esquemático e sistema de coordenadas local associado.

Mantém-se a nomenclatura de ZHU e MEGUID (2004), onde $Z \equiv \vec{t}$, $Y \equiv \vec{b}$ e $X \equiv \vec{n}$ equivalem a nomenclatura tradicional do triedro de Frenét.

As relações de deformações-deslocamentos que levam em conta curvatura e tortuosidade, como vistas em LOVE (1944), são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z(s)}{\partial s} - \kappa u_x(s) \\
 \omega_x &= \frac{\partial \varphi_x(s)}{\partial s} - \tau \varphi_y(s) + \kappa \varphi_z(s) \\
 \omega_y &= \frac{\partial \varphi_y(s)}{\partial s} + \tau \varphi_x(s) \\
 \omega_z &= \frac{\partial \varphi_z(s)}{\partial s} - \kappa \varphi_x(s)
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

onde ε_z é a deformação axial, ω_x , ω_y e ω_z são as distorções angulares ao redor dos eixos x , y e z respectivamente; u_x é o deslocamento na direção x ; u_z é o deslocamento na direção z ; φ_x , φ_y e φ_z são os deslocamentos angulares ao redor dos eixos x , y e z ; τ é a tortuosidade inicial e κ é a curvatura inicial.

A curvatura e a tortuosidade iniciais são entradas do processo de cálculo. Já a curvatura e tortuosidade finais são obtidas através da variação angular, sendo calculadas quando o processo é concluído.

As hipóteses usadas no trabalho são as mesmas utilizadas por LOVE (1944): pequenos valores para deformações e deslocamentos, não há empenamento da seção transversal e o material é elástico e isotrópico. Para evitar o fenômeno de aumento indevido de rigidez devido às deformações por cisalhamento (conhecido por *shear locking*), admite-se que os valores ε_z e ω_z variam linearmente dentro do elemento.

Baseado nessas hipóteses, é possível escrever-se os campos de deslocamentos nas direções normal u_x e binormal u_y , utilizando a abscissa curvilínea s como variável, sendo:

$$\begin{aligned}
 u_x(s) &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 \\
 u_y(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + b_5 s^5
 \end{aligned}$$

Assumindo as hipóteses citadas, de posse do conjunto de equações 4.82 e sabendo

que:

$$\varphi_x = -\frac{\partial u_y}{\partial s} - \tau u_x \quad (4.83)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial u_x}{\partial s} - \tau u_y + \kappa u_z$$

é possível escrever os demais deslocamentos como:

$$u_z(s) = \int (\varepsilon_z + \kappa u_x) dS \longrightarrow u_z(s) = a_6 + a_7 s + a_8 s^2 + \frac{1}{3} \kappa a_2 s^3 + \frac{1}{4} \kappa a_3 s^4 + \frac{1}{5} \kappa a_4 s^5 + \frac{1}{6} \kappa a_5 s^6$$

$$\begin{aligned} \varphi_z(s) = \int \left(\omega_z - \kappa \frac{\partial u_y}{\partial s} - \kappa \tau u_x \right) dS \longrightarrow \varphi_z(s) = b_6 + b_7 s + b_8 s^2 + \\ \kappa \left(-\frac{1}{3} \tau a_2 - b_3 \right) s^3 + \kappa \left(-\frac{1}{4} \tau a_3 - b_4 \right) s^4 + \kappa \left(-\frac{1}{5} \tau a_4 - b_5 \right) s^5 - \frac{1}{6} \kappa \tau a_5 s^6 \end{aligned}$$

Os deslocamentos angulares φ_x e φ_y podem ser determinados em função dos outros deslocamentos, como visto nas equações 4.83:

$$\begin{aligned} \varphi_x = -\frac{\partial u_y}{\partial s} - \tau u_x \longrightarrow \varphi_x(s) = -b_1 - \tau a_0 + (-\tau a_1 - 2b_2) s + (-\tau a_2 - 3b_3) s^2 + \\ (-\tau a_3 - 4b_4) s^3 + (-5b_5 - \tau a_4) s^4 - \tau a_5 s^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_y = \frac{\partial u_x}{\partial s} - \tau u_y + \kappa u_z \longrightarrow \varphi_y(s) = \kappa a_6 + a_1 - \tau b_0 + (-\tau b_1 + \kappa a_7 + 2a_2) s + (\kappa a_8 + 3a_3 - \tau b_2) s^2 \\ + \left(-\tau b_3 + \frac{1}{3} \kappa^2 a_2 + 4a_4 \right) s^3 + \left(\frac{1}{4} \kappa^2 a_3 + 5a_5 - \tau b_4 \right) s^4 + \left(-\tau b_5 + \frac{1}{5} \kappa^2 a_4 \right) s^5 + \frac{1}{6} \kappa^2 a_5 s^6 \end{aligned}$$

Utilizando-se um elemento de três nós é possível encontrar todas as constantes necessárias ($\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_8 & b_0 & \cdots & b_8 \end{bmatrix}$). Escrevendo os deslocamentos nodais em um vetor $\mathbf{u}_{nodal}$, tem-se:

$$\mathbf{u}_{nodal}^T = \begin{bmatrix} u_{nodal}^1 & u_{nodal}^2 & u_{nodal}^3 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{u}_{nodal}^i$ ($i = 1, \dots, 3$):

$$\mathbf{u}_{nodal}^i = \begin{bmatrix} u_{xi} & u_{yi} & u_{zi} & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} \end{bmatrix}$$

É possível escrever uma relação entre os deslocamentos nodais e constantes de integração dadas no vetor $\mathbf{q}$ como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{u}_{nodal}$$

A matriz $\mathbf{C}$ é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{bmatrix}$$

com:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ -23\frac{1}{L^2} & -6\frac{\tau}{L} & 6\frac{\tau}{L} & 0 & -6\frac{1}{L} & 0 \\ 66\frac{1}{L^3} & 13\frac{\tau}{L^2} & -13\frac{\kappa}{L^2} & 0 & 13\frac{1}{L^2} & 0 \\ -68\frac{1}{L^4} & -12\frac{\tau}{L^3} & 12\frac{\tau}{L^3} & 0 & -12\frac{1}{L^3} & 0 \\ 24\frac{1}{L^5} & 4\frac{\tau}{L^4} & -4\frac{\tau}{L^4} & 0 & 4\frac{1}{L^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16\frac{1}{L^2} & -8\frac{\tau}{L} & 8\frac{\tau}{L} & 0 & -8\frac{1}{L} & 0 \\ -32\frac{1}{L^3} & 32\frac{\tau}{L^2} & -32\frac{\kappa}{L^2} & 0 & 32\frac{1}{L^2} & 0 \\ 16\frac{1}{L^4} & -40\frac{\tau}{L^3} & 40\frac{\kappa}{L^3} & 0 & -40\frac{1}{L^3} & 0 \\ 0 & 16\frac{\tau}{L^4} & -16\frac{\kappa}{L^4} & 0 & 16\frac{1}{L^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7\frac{1}{L^2} & -\frac{\tau}{L} & \frac{\kappa}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ -34\frac{1}{L^3} & 5\frac{\tau}{L^2} & -5\frac{\kappa}{L^2} & 0 & -5\frac{1}{L^2} & 0 \\ 52\frac{1}{L^4} & -8\frac{\tau}{L^2}8\frac{\kappa}{L^3} & 0 & -8\frac{1}{L^3} & 0 & 0 \\ -24\frac{1}{L^5} & 4\frac{\tau}{L^3} & -4\frac{\kappa}{L^4} & 0 & 4\frac{1}{L^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{47}{120}\kappa & -\frac{3}{80}\kappa L\tau & \frac{3(-80 + \kappa^2 L^2)}{80L} & 0 & -\frac{3}{80}\kappa L & 0 \\ \frac{3}{8}\frac{\kappa}{L} & \frac{25}{48}\kappa\tau & -\frac{-96 + 25\kappa^2 L^2}{48L^2} & 0 & \frac{25}{58}\kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6\frac{\tau}{L} & -\frac{23}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{15}\kappa & \frac{\kappa L\tau}{6} & \frac{24 - \kappa^2 L^2}{6L} & 0 & \frac{\kappa L}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa\tau}{6} & \frac{-24 + \kappa^2 L^2}{6L^2} & 0 & -\frac{\kappa}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8\frac{\tau}{L} & \frac{16}{L^2} & 0 & \frac{8}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{17}{120}\kappa & -\frac{1}{240}\kappa L\tau & \frac{-240 + \kappa^2 L^2}{240L} & 0 & -\frac{1}{240}\kappa L & 0 \\ -\frac{3}{8}\frac{\kappa}{L} & \frac{1}{48}\kappa\tau & \frac{96 - \kappa^2 L^2}{48L^2} & 0 & \frac{1}{48}\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tau}{L} & \frac{7}{L^2} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_7 = \begin{bmatrix} -13\frac{\tau}{L^2} & 66\frac{1}{L^3} & 0 & -13\frac{1}{L^2} & 0 & 0 \\ 12\frac{\tau}{L^3} & -68\frac{1}{L^4} & 0 & 12\frac{1}{L^3} & 0 & 0 \\ -4\frac{\tau}{L^4} & 24\frac{1}{L^5} & 0 & -4\frac{1}{L^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{73}{120}\kappa\tau & \frac{3\kappa(\tau^2 L^2 - 80)}{80L} & -\frac{3}{80}\kappa^2 L\tau & \kappa & \frac{3}{80}\kappa L\tau & -3\frac{1}{L} \\ -\frac{51}{8}\frac{\kappa\tau}{L} & -\frac{25\kappa(\tau^2 L^2 - 48)}{48L^2} & \frac{25}{48}\kappa^2\tau & -6\frac{\kappa}{L} & -\frac{25}{48}\kappa\tau & 2\frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_8 = & \begin{bmatrix} -32\frac{\tau}{L^2} & -32\frac{1}{L^3} & 0 & -32\frac{1}{L^2} & 0 & 0 \\ 40\frac{\tau}{L^3} & 16\frac{1}{L^4} & 0 & 40\frac{1}{L^3} & 0 & 0 \\ -16\frac{\tau}{L^4} & 0 & 0 & -16\frac{1}{L^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{15}\kappa\tau & -\frac{\kappa(\tau^2 L^2 - 24)}{6L} & \frac{1}{6}\kappa^2 L\tau & 0 & -\frac{1}{6}\kappa L\tau & -4\frac{1}{L} \\ -8\frac{\kappa\tau}{L} & \frac{\kappa(\tau^2 L^2 - 120)}{6L^2} & -\frac{1}{6}\kappa^2 \tau & -8\frac{\kappa}{L} & \frac{1}{6}\kappa\tau & -4\frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_9 = & \begin{bmatrix} -5\frac{\tau}{L^2} & -34\frac{1}{L^3} & 0 & -5\frac{1}{L^2} & 0 & 0 \\ 8\frac{\tau}{L^3} & 52\frac{1}{L^4} & 0 & 8\frac{1}{L^3} & 0 & 0 \\ -4\frac{\tau}{L^4} & -24\frac{1}{L^5} & 0 & -4\frac{1}{L^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{17}{120}\kappa\tau & \frac{\kappa(\tau^2 L^2 - 240)}{240L} & -\frac{1}{240}\kappa^2 L\tau & 0 & \frac{1}{240}\kappa^2 L\tau & -\frac{1}{L} \\ -\frac{5}{8}\frac{\kappa\tau}{L} & -\frac{\kappa(\tau^2 L^2 + 240)}{48L^2} & \frac{1}{48}\kappa^2 \tau & -\frac{\kappa}{L} & -\frac{1}{48}\kappa\tau & 2\frac{1}{L^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

É possível ainda exprimir os deslocamentos $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}$ em função dos deslocamentos nodais, através da expressão:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{u}_{nodal}$$

sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$ e com:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{3}s^3 & \frac{\kappa}{4}s^4 & \frac{\kappa}{5}s^5 & \frac{\kappa}{6}s^6 \\ -\tau & \tau s & \tau s^2 & \tau s^3 & \tau s^4 & \tau s^5 \\ 0 & 1 & 2s + \frac{\kappa^2}{3}s^3 & 3s^2 + \frac{\kappa^2}{4}s^4 & 4s^3 + \frac{\kappa^2}{5}s^5 & 5s^4 + \frac{\kappa^2}{6}s^6 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa\tau}{3}s^3 & -\frac{\kappa\tau}{4}s^4 & -\frac{\kappa\tau}{5}s^5 & -\frac{\kappa\tau}{6}s^6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 \\ 1 & s & s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2s \\ \kappa & \kappa s & \kappa s^2 & -\tau & -\tau s & -\tau s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & s^4 & s^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3s^2 & -4s^3 & -5s^4 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau s^3 & -\tau s^4 & -\tau s^5 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa s^3 & -\kappa s^4 & -\kappa s^5 & 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

Uma vez expressos os deslocamentos em função dos deslocamentos nodais, é possível obter a matriz de rigidez utilizando-se a expressão da energia, como feito para o elemento de capa plástica. A energia de deformação de uma viga, considerando que os eixos principais de flexão coincidam com as direções do triedro de Frenét associado e desconsiderando a energia devida ao cisalhamento (que não é considerada por ser muito menor quando comparada com as demais) é:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EA\varepsilon_z^2 + EI_x\omega_x^2 + EI_y\omega_y^2 + GJ\omega_z^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} ds$$

sendo L o comprimento do elemento medido na abscissa curvilínea, E é o módulo de elasticidade do material, G o módulo de cisalhamento, A é área da seção transversal, I_x , I_y e J os momentos de inércia da seção e:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_z & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix}$$

Sabe-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{u} = \partial \mathbf{A} \mathbf{q} = \partial \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{u}_{nodal} = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{u}_{nodal}$$

sendo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}$$

com:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} -\kappa & -\kappa s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau & -\frac{2}{3}\kappa^2\tau s^3 - 4\tau s & -\frac{1}{2}\kappa^2\tau s^4 - 6\tau s^2 & -\frac{2}{5}\kappa^2\tau s^5 - 8\tau s^3 \\ -\tau^2 & -\tau^2 s & (\tau^2 - \kappa^2)s^2 + 2 & (\tau^2 - \kappa^2)s^3 + 6s & (\tau^2 - \kappa^2)s^4 + 12s^2 \\ \kappa\tau & \kappa\tau s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\kappa^2\tau s^6 - 10\tau s^4 & -\kappa\tau & -\kappa\tau s & -\kappa\tau s^2 & \tau^2 & \tau^2 s & \tau^2 s^2 - 2 & (\tau^2 - \kappa^2)s^3 - 6s \\ (\tau^2 - \kappa^2)s^5 + 20s^3 & 0 & \kappa & 2\kappa s & 0 & -2\tau & -4\tau s & -6\tau s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 2\kappa s & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\tau^2 - \kappa^2)s^4 - 12s^2 & (\tau^2 - \kappa^2)s^5 - 20s^3 & \kappa & \kappa s & \kappa s^2 \\ -8\tau s^3 & -10\tau s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo a matriz de rigidez pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{C}$$

A matriz de rigidez $\mathbf{K}_{el}$ pode ser obtida com o uso de um manipulador simbólico. O resultado obtido é uma matriz extensa, que se traduz em aproximadamente 1200 linhas de código e, por isso, não será exibida aqui. A forma analítica dessa é desejada por reduzir o esforço computacional necessário.

O passo final é descrever as relações entre os sistemas (Frénet e cilíndrico). Como

ambos são fixos para um determinado ponto (eles variam com a posição do ponto, mas não com a análise, já que se consideram pequenos deslocamentos), apenas o ângulo de assentamento deve ser levado em conta para o procedimento de mudança de base. A relação entre os sistemas é exibido na figura 4.10 (a relação entre os eixos radial e normal não é exibida, mas essa é de que ambos possuem a mesma direção mas sentidos contrários).

Figura 4.10: Relação entre os sistemas de coordenadas.

onde α é o ângulo de assentamento da hélice. Assim, pode-se obter uma matriz de transformação entre os sistemas, dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Como a matriz de rigidez é uma matriz de ordem 18, a matriz de rigidez escrita em coordenadas cilíndricas $\mathbf{K}$ é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbb{T} \mathbf{K}_{el} \mathbb{T}^T$$

com:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Elemento de Ligação “Bridge”

O elemento do tipo “Bridge” foi pensado para fazer a ligação entre dois nós de tipos distintos. Cabe aqui dizer que existem dois tipos de nó atualmente na estrutura do modelo. O primeiro deles, presente no elemento cilíndrico de parede espessa, é dado por deslocamentos (u , v e w) descritos utilizando séries de Fourier (denominado daqui em diante com nó Fourier¹). Já o segundo, que pode ser visto no elemento tridimensional para helicoides, possui deslocamentos e rotações que não usam série de Fourier, sendo aqui denominado um nó simples (u , v , w , φ_r , φ_θ e φ_z), ambos no sistema cilíndrico. Um problema previsto é que a conexão entre elementos descritos de maneira distinta poderia ser complicada. Para facilitar esse procedimento, definiu-se um elemento que liga de maneira rígida (isto é, sem deslocamento relativo) um nó Fourier a um nó simples. Assim, a ligação entre os dois elementos diferentes passa a ser dada por um elemento entre o nó Fourier e o nó simples. Esquemáticamente, esse elemento de ligação é exibido na figura 4.11.

Figura 4.11: Elemento de ligação “Bridge”.

¹Nó Fourier: nó cujos deslocamentos são expressos através de uma série de Fourier na variável angular de um sistema cilíndrico reto.

O elemento liga dois nós cujas coordenadas são x_1 , descrito por séries de Fourier e x_2 , um nó simples. Na figura 4.11, observa-se o ponto $1'$, que nada mais é do que o nó 1 deslocado na direção circunferencial de $\Delta\theta$.

A condição que rege o elemento, que diz que o deslocamento relativo entre os pontos é nulo. pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{1'} = \mathbf{0} \quad (4.84)$$

Os vetores $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_{1'}$ são explicitados a seguir:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_r & u_\theta & u_z & \varphi_r & \varphi_\theta & \varphi_z \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{u}_{1'} = \begin{bmatrix} u_1^0 & v_1^0 & w_1^0 \end{bmatrix}^T + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \bar{u}_1^i & \bar{v}_1^i & \bar{w}_1^i \end{bmatrix}^T \mathbb{C}_i + \begin{bmatrix} \bar{\bar{u}}_1^i & \bar{\bar{v}}_1^i & \bar{\bar{w}}_1^i \end{bmatrix}^T \mathbb{S}_i$$

sendo $\bar{u}_1^i$ a componente do deslocamento 1 de ordem i , $\mathbb{C}_i$ e $\mathbb{S}_i$ dadas por:

$$\mathbb{C}_i = \begin{bmatrix} \cos i\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin i\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos i\Delta\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S}_i = \begin{bmatrix} \sin i\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\cos i\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin i\Delta\theta \end{bmatrix}$$

Assim, pode-se escrever essa restrição na forma $\mathbf{t}_{constraint} = \mathbf{C}\mathbf{U}$ como:

$$\mathbf{t}_{constraint} = \begin{bmatrix} -\Lambda_0 & -\mathbb{C}_1 & -\mathbb{S}_1 & -\mathbb{C}_2 & -\mathbb{S}_2 & \cdots & I \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \bar{u}_1^1 \\ \bar{\bar{u}}_1^1 \\ \bar{u}_1^2 \\ \bar{\bar{u}}_1^3 \\ \vdots \\ u_2 \end{array} \right\} = \mathbf{C}\mathbf{U} \quad (4.85)$$

onde $\Lambda_0 = \mathbb{C}_0 + \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos.

De posse da equação 4.85 e utilizando os métodos das penalidades (como pode ser visto em COOK et al. (2002)) é possível escrever a matriz de rigidez do elemento como:

$$\mathbf{K} = \varepsilon \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (4.86)$$

Substituindo $\mathbf{C}$ e realizando a álgebra necessária, chega-se a matriz de rigidez do elemento de ligação tipo "Bridge":

$$\mathbf{K} = \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_0 \Lambda_0 & \Lambda_0 \mathbb{C}_1 & \Lambda_0 \mathbb{S}_1 & \Lambda_0 \mathbb{C}_2 & \Lambda_0 \mathbb{S}_2 & \cdots & -\Lambda_0 \\ \mathbb{C}_1 \Lambda_0 & \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_1 \mathbb{S}_1 & \mathbb{C}_1 \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1 \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{C}_1 \\ \mathbb{S}_1 \Lambda_0 & \mathbb{S}_1 \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_1 \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_1 \mathbb{C}_2 & \mathbb{S}_1 \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{S}_1 \\ \mathbb{C}_2 \Lambda_0 & \mathbb{C}_2 \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2 \mathbb{S}_1 & \mathbb{C}_2 \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_2 \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{C}_2 \\ \mathbb{S}_2 \Lambda_0 & \mathbb{S}_2 \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_2 \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2 \mathbb{C}_2 & \mathbb{S}_2 \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{S}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Lambda_0 & -\mathbb{C}_1 & -\mathbb{S}_1 & -\mathbb{C}_2 & -\mathbb{S}_2 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

4.3.4 Elemento de Contato

O problema de contato entre dois sólidos deformáveis é extremamente complexo do ponto de vista da modelagem, já que ele depende de como as superfícies entram em contato, das asperezas e rugosidade dessas, entre outros fatores.

Sejam dois corpos A e B . Sejam também dois pontos, $\mathbf{x}_1$ pertencente à A e $\mathbf{x}_2$ pertencente à B , como visto na figura 4.12. Supondo que a menor distância entre os corpos seja dada pela reta que une $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, diz-se que o contato ocorre quando essa distância for nula.

Figura 4.12: Esquema de dois corpos em configuração pré-contato.

Essa figura ainda exhibe o sistema de eixos ortonormal local no contato: a direção normal à superfície $\mathbf{n}$ e as direções tangentes à superfície $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Observa-se também que são utilizadas duas superfícies: uma denominada *master* (mestre) e outra denominada *slave* (escrava). Normalmente isso é feito para facilitar a descrição de cada uma delas, já que a superfície *slave* deve ser escolhida de tal forma que possua o maior número de elementos entre as duas. Isso é necessário para que os contatos sejam corretamente detectados após as discretizações necessárias nos métodos matemáticos a serem empregados. A figura 4.13 mostra o problema com uma descrição ruim da superfície *slave*. Observa-se que poucos nós nessa superfície fazem com que o contato não seja corretamente identificado (Figura 4.13a), ao passo que uma discretização adequada evita esse problema (Figura 4.13b).

Figura 4.13: Exemplo dos efeitos da discretização do contato: (a) pouco discretizada; (b) corretamente discretizada.

Para este tipo de contato é define-se uma grandeza que mede a proximidade das superfícies. Essa função vazio (ou *gap*) normal é definida por:

$$g_N = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n} \quad (4.87)$$

onde $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são os pontos das superfícies *master* e *slave* da figura 4.12 e $\mathbf{n}$ a direção normal, como dito anteriormente. Quando o *gap* é nulo, há uma pressão de contato p_N entre as superfícies. Dessa forma pode-se definir uma única expressão que descreve a condição do contato:

$$g_N \cdot p_N = 0 \quad (4.88)$$

A figura 4.14(a) mostra o comportamento descrito pela equação 4.88. Porém a modelagem numérica é complicada dada a não-diferenciabilidade da curva. Para contornar tal problema, adotam-se leis que descrevam o comportamento de maneira mais suave (as chamadas *Compliance Laws*). O item (b) da figura 4.14 exhibe um exemplo que varia com uma potência do *gap* normal. Já o item (c) exhibe um comportamento de variação linear com o *gap*. Esse último é conhecido como o método das penalidades, no qual varia-se o parâmetro de proporcionalidade tornando o comportamento dessa lei o mais próximo do real quanto se queira. A desvantagem dessa abordagem é que um valor muito alto desse parâmetro pode comprometer a convergência. Deve-se ressaltar também que um valor muito pequeno também compromete o resultado, uma vez que faz com que a curva utilizada encontre-se longe do real comportamento do problema.

Figura 4.14: *Compliance Law* para o contato normal: (a) comportamento ideal; (b) comportamento usando uma *Compliance Law*; (c) comportamento usando o método das penalidades.

O contato anteriormente descrito é conhecido como contato normal. Há ainda que se tratar o caso do contato dito tangencial. Nesse deve ser considerada a presença do atrito e deve-se distinguir quando há movimento relativo entre as superfícies (*sliding*) ou quando esse não ocorre (*sticking*). A figura 4.15 exhibe esquematicamente essas duas situações.

Figura 4.15: Diferença entre *sticking* e *sliding*. A primeira figura é a configuração inicial, seguida pelo caso de *sticking* e o de *sliding*.

No problema tratado utiliza-se a lei de Coulomb para modelar o atrito, assumindo que o coeficiente de atrito é conhecido e não varia com nenhuma propriedade. No caso de *sticking*, o corpo simplesmente deforma e não há movimento relativo. Esse é o caso em que não se atingiu um patamar de força suficiente para vencer a força de atrito estática, não havendo assim um *gap* tangencial $\mathbf{g}_T = \mathbf{0}$. Para o caso de *sliding* há um movimento e pode-se definir uma nova função *gap* tangencial, utilizando os eixos $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ como:

$$\mathbf{g}_T = g_{T_1} \mathbf{a}_1 + g_{T_2} \mathbf{a}_2, \text{ com } g_{T_1} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_1 \text{ e } g_{T_2} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_2 \quad (4.89)$$

Da mesma maneira que no caso normal, uma *Compliance Law* deve ser empregada. Como citado, o modelo de atrito empregado é o de Coulomb, como pode ser visto na figura 4.16(a). Essa abordagem apresenta os mesmos problemas que o comportamento ideal do caso normal. Utilizando também o método das penalidades é possível contornar esse problema. A lei associada a esse método pode ser vista na figura 4.16(b).

Figura 4.16: *Compliance Law* para o contato tangencial: (a) comportamento ideal usando a Lei de Coulomb; (b) comportamento usando o método das penalidades. f_{tan} indica a força tangencial, enquanto gap_{tan} o *gap* tangencial.

O fato de incorporar uma *Compliance Law* que usa o método das penalidades faz com que se crie uma situação atípica na modelagem do contato. Considere inicialmente o contato normal. Na situação ideal, se há contato, o *gap* é nulo e a pressão aumenta infinitamente. Porém, quando utiliza-se os métodos das penalidades essa pressão varia linearmente com o *gap*, existindo então um produto $g_N \cdot p_N$ não nulo. Isso faz com que ambas situações de contato, *sticking* e *sliding*, que são normalmente independentes, devam ser consideradas ao mesmo tempo.

Divide-se a modelagem nos seguintes casos: contato normal e contato tangencial no caso de *sticking*; e contato normal e contato tangencial no caso de *sliding*. Porém, antes de considerar cada um dos casos individualmente, descreve-se a formulação da energia. Sabendo que os esforços presentes no contato são a pressão normal p_N e a tensão de cisalhamento $\mathbf{t} = t_{T_1} \mathbf{a}_1 + t_{T_2} \mathbf{a}_2$, o trabalho virtual dos esforços de contato pode ser escrito na forma:

$$\delta W_{contato} = \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{g}_T + p_N \delta g_N \quad (4.90)$$

Cabe ressaltar a hipótese relativa ao sistema de eixos empregado. A formulação será feita considerando o triedro $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ e $\mathbf{n}$ para manter a consistência com o livro texto no qual essa foi formulada (veja WIEGERS (2003)), porém dado que serão considerados pequenos deslocamentos no contato, pode-se assumi-los como sendo os versores radial ($\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{n}$), circunferencial ($\mathbf{e}_\theta \equiv \mathbf{a}_2$) e axial ($\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{a}_1$).

A seguir, prossegue-se para a obtenção das matrizes de contato para cada caso, já que algumas hipóteses devem ser feitas de acordo.

4.3.4.1 Contato considerando *sticking*

Para o caso de *sticking* a formulação prossegue considerando que ambos os esforços possam ser descritos utilizando o método das penalidades. Para tal, dois parâmetros ε_N e ε_T são definidos, deixando os esforços como descritos pelas equações 4.91 e 4.92.

$$p_N = \varepsilon_N g_N \quad (4.91)$$

$$\mathbf{t} = \varepsilon_T \mathbf{g}_T \quad (4.92)$$

Dessa forma, o trabalho virtual dos esforços 4.90 fica:

$$\delta W_{contato} = \varepsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N g_N \delta g_N \quad (4.93)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez de contato, é necessário que a variação do trabalho virtual seja nula. Assim:

$$\delta (\delta W_{contato}) = \varepsilon_T \delta \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N \delta g_N \delta g_N \quad (4.94)$$

Lembre-se que o produto escalar entre dois vetores pode ser escrito na forma de um produto matricial. Por exemplo, sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dois vetores. o produto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é igual à $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ou $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$, já que o produto escalar é um número real. Utilizando-se dessa forma, a equação 4.94 pode ser reescrita como:

$$\delta (\delta W_{contato}) = \varepsilon_T \delta \mathbf{g}_T^T \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N \delta g_N \delta g_N \quad (4.95)$$

Sabendo que $\delta \mathbf{g}_T = \delta g_{T_1} \mathbf{a}_1 + \delta g_{T_2} \mathbf{a}_2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta g_N &= (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}^T (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) = \mathbf{n}^T \delta \mathbf{x}_2 - \mathbf{n}^T \delta \mathbf{x}_1 \\
\delta g_{T_1} &= (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^T (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) = \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{x}_1 \\
\delta g_{T_2} &= (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2^T (\delta \mathbf{x}_2 - \delta \mathbf{x}_1) = \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{x}_1
\end{aligned} \tag{4.96}$$

onde $\delta \mathbf{x}_i$ indica a variação do deslocamento da coordenada x_i , $i = 1, 2$. Sabendo que $\delta \mathbf{x}_i = \delta \mathbf{u}_i$, pode-se reescrever 4.95 como:

$$\begin{aligned}
\delta (\delta W_{contato}) &= \varepsilon_N (\mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_1) + \varepsilon_T (\mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_1)^T \\
&\quad (\mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_1) + \varepsilon_T (\mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_1) \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Tal expressão pode ser posta na forma matricial:

$$\begin{aligned}
\delta (\delta W_{contato}) &= \varepsilon_T \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} + \\
&\quad \varepsilon_T \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} + \\
&\quad \varepsilon_N \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{n} \mathbf{n}^T & -\mathbf{n} \mathbf{n}^T \\ -\mathbf{n} \mathbf{n}^T & \mathbf{n} \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Como as superfícies de contatos estarão descritas utilizando o sistema cilíndrico e os deslocamentos envolvidos serão pequenos, por hipótese, pode-se adotar o mesmo sistema para os eixos do contato. Nesse caso, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$, $\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{e}_z$. Logo, a expressão 4.98 fica:

$$\delta (\delta W_{contato}) = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_N & 0 & 0 & -\varepsilon_N & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & 0 & 0 & -\varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T & 0 & 0 & -\varepsilon_T \\ -\varepsilon_N & 0 & 0 & \varepsilon_N & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_T & 0 & 0 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_T & 0 & 0 & \varepsilon_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{4.99}$$

Sabendo que $\delta (\delta W_{contato}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{sticking} \delta \mathbf{u}$, obtém-se assim a matriz de rigidez do contato tipo *sticking*:

$$\mathbf{K}_{sticking} = \begin{bmatrix} \varepsilon_N & 0 & 0 & -\varepsilon_N & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & 0 & 0 & -\varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T & 0 & 0 & -\varepsilon_T \\ -\varepsilon_N & 0 & 0 & \varepsilon_N & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_T & 0 & 0 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_T & 0 & 0 & \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

4.3.4.2 Contato considerando *sliding*

O caso de *sliding* ocorre quando a força tangencial atinge o valor crítico definido pela lei de Coulomb (que é o modelo de atrito empregado nessa formulação). Nesse caso, é necessário levar em conta o fato de que a direção $\mathbf{n}_T$ do atrito depende do histórico do movimento, ou seja, é necessário conhecer a evolução do contato para que esse possa ser levado em conta. Definindo essa direção como $\mathbf{n}_T = n_{T1}\mathbf{a}_1 + n_{T2}\mathbf{a}_2$, pode-se escrever a tensão de cisalhamento como:

$$\mathbf{t} = \|\mathbf{t}\|\mathbf{n}_T$$

Essa força tem norma $\|\mathbf{t}\| = \mu p_N$, com μ sendo o coeficiente de atrito entre as superfícies e p_N a norma da pressão de contato. De maneira semelhante à formulação considerando *sticking*, a variação do trabalho virtual tem que ser nula. Assim:

$$\begin{aligned} \delta(\delta W_{contato}) &= \delta(\mu p_N \mathbf{n}_T) \cdot \delta \mathbf{g}_T + \delta p_N \delta g_N \longrightarrow \\ \delta(\delta W_{contato}) &= \mu \delta p_N \mathbf{n}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \mu p_N \delta \mathbf{n}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N \delta g_N \delta g_N = c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned} \quad (4.100)$$

Dividiu-se a expressão acima em três termos para facilitar os cálculos. Repetindo o procedimento anterior, procura-se obter uma expressão similar à encontrada no caso de *sticking*: $\delta(\delta W_{contato}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{sliding} \delta \mathbf{u}$. O mais simples dos termos é c_3 , pois, fazendo a mesma hipótese sobre a pressão de contato feita anteriormente (a de que essa possa ser representada utilizando o método das penalidades), chega-se à:

$$c_3 = \varepsilon_N \delta \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \mathbf{n}\mathbf{n}^T & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ -\mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \quad (4.101)$$

Usando a mesma descrição para a variação da pressão, o termo c_1 pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu \delta p_N \mathbf{n}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T = \mu \delta p_N (n_{T_1} \mathbf{a}_1 + n_{T_2} \mathbf{a}_2) \cdot (g_{T_1} \mathbf{a}_1 + g_{T_2} \mathbf{a}_2) \\ c_1 &= \mu \delta p_N (n_{T_1} g_{T_1} + n_{T_2} g_{T_2}) = \mu \varepsilon_N \delta g_N (n_{T_1} g_{T_1} + n_{T_2} g_{T_2}) \\ c_1 &= \mu \varepsilon_N (\mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_1) [n_{T_1} (\mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_1) + n_{T_2} (\mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_1)] \end{aligned}$$

Após algumas manipulações, é possível reescrever c_1 como:

$$c_1 = \delta \mathbf{u}^T \left(\varepsilon_N \sum_{\alpha=1}^2 n_{t\alpha} \begin{Bmatrix} -\mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^T & \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \right) \delta \mathbf{u} \quad (4.102)$$

Já para o termo c_2 , é necessário calcular a variação da direção do atrito $\mathbf{n}_T$. A direção de atrito pode ser definida como:

$$\mathbf{n}_T = \frac{\mathbf{f}_T}{\|\mathbf{f}_T\|}$$

onde $\mathbf{f}_T$ é a força de atrito instantânea.

E sua variação fica:

$$\delta \mathbf{n}_T = \delta \left(\frac{\mathbf{f}_T}{\|\mathbf{f}_T\|} \right) = \frac{\delta \mathbf{f}_T \|\mathbf{f}_T\| + \mathbf{f}_T \delta \|\mathbf{f}_T\|}{\|\mathbf{f}_T\|^2}$$

Após algumas manipulações é possível escrever:

$$\delta \mathbf{n}_T = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n}_T \mathbf{n}_T^T}{\|\mathbf{f}_T\|} \delta \mathbf{f}_T$$

A variação do esforço de atrito ($\delta \mathbf{f}_T$) não é conhecido quando a direção varia, sendo que aqui cabe fazer uma hipótese sobre seu valor. Se esse for considerado quando ocorre o deslizamento, o seu valor é nulo; porém, considerando que essa variação ocorre na iminência do deslizamento, assume-se que a força de atrito seja dada por $\mathbf{f}_T = \varepsilon_T \mathbf{g}_T$. Assim:

$$\delta \mathbf{f}_T = \varepsilon_T \delta \mathbf{g}_T$$

Logo:

$$c_2 = \varepsilon_T (\mathbf{I} - \mathbf{n}_T \mathbf{n}_T^T) \delta \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T$$

Após algumas manipulações é possível chegar à formula que exhibe o valor de c_2 :

$$c_2 = \delta \mathbf{u}^T \left(\varepsilon_T \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (\delta_{\alpha\beta} - n_{T_\alpha} n_{T_\beta}) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \\ -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \end{bmatrix} \right) \delta \mathbf{u} \quad (4.103)$$

A partir das equações que dão os valores de c_1 (4.102), c_2 (4.103) e c_3 (4.101) é possível construir a matriz de rigidez do contato tipo *sliding*:

$$\mathbf{K}_{sliding} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\mu \varepsilon_N n_{T_\alpha} \mathbf{T}_\alpha \mathbf{C}^T + \varepsilon_T \sum_{\beta=1}^2 (\delta_{\alpha\beta} - n_{T_\alpha} n_{T_\beta}) \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\beta^T \right] + \varepsilon_N \mathbf{C} \mathbf{C}^T \quad (4.104)$$

com:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{Bmatrix} -\mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\alpha \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix}$$

4.3.5 Elemento de Contato com Série de Fourier

Observando os elementos do tipo “*bridge*” (seção 4.3.3) e o elemento de contato (seção 4.3.4), percebeu-se que utilizando ambos elementos para modelar o contato entre uma capa e uma hélice haveria um problema, pois seria necessário criar um elemento do tipo “*bridge*” em um nó auxiliar e em seguida ligar esse ao nó da hélice para levar em conta o contato. O problema que essa abordagem causa é a necessidade de utilizar dois tipos de penalidades diferentes para o mesmo nó, resultando em problemas de convergência. Como solução propõe-se o elemento descrito nessa seção.

A diferença entre esse elemento e o descrito na seção anterior é que já se considera que uma série de Fourier é utilizada para descrever os deslocamentos de um dos nós. O procedimento para a obtenção das matrizes é o mesmo do contato do item anterior, levando em conta os casos de *sticking* e *sliding*. Observa-se que o texto aqui será mais enxuto, uma vez que as hipóteses quanto as definições utilizadas aqui são as mesmas do caso anterior.

Iniciando a modelagem, considere-se dois nós como os da figura 4.12. Pode-se escrever os deslocamentos de cada nó como:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}^T \quad (4.105)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^0 + \sum_{i=1}^n [\mathbb{C}_i \bar{\mathbf{u}}_1^i + \mathbb{S}_i \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i]$$

sendo $\mathbf{u}_1^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 & v_1^0 & w_1^0 \end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{u}}_1^i = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^i & \bar{v}_1^i & \bar{w}_1^i \end{bmatrix}^T$, $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i = \begin{bmatrix} \bar{\bar{u}}_1^i & \bar{\bar{v}}_1^i & \bar{\bar{w}}_1^i \end{bmatrix}^T$, $\bar{u}_1^i$ a componente do deslocamento 1 de ordem i , $\mathbb{C}_i$ e $\mathbb{S}_i$ dadas por:

$$\mathbb{C}_i = \begin{bmatrix} \cos i\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin i\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos i\Delta\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S}_i = \begin{bmatrix} \sin i\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\cos i\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin i\Delta\theta \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que na seção anterior, define-se funções *gap* normal e tangencial:

$$g_N = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{g}_T = g_{T_1} \mathbf{a}_1 + g_{T_2} \mathbf{a}_2, \text{ com } g_{T_1} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_1 \text{ e } g_{T_2} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}_2$$

Lembrando que $\delta \mathbf{x}_i = \delta \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, pode-se escrever as variações das equações dadas em 4.106 como:

$$\delta g_N = \delta \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} - \delta \mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{n} - \sum [\mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i \cdot \mathbf{n} + \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i \cdot \mathbf{n}]$$

$$\delta g_{T_1} = \delta \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{a}_1 - \delta \mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{a}_1 - \sum [\mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i \cdot \mathbf{a}_1] \quad (4.107)$$

$$\delta g_{T_2} = \delta \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{a}_2 - \delta \mathbf{u}_1^0 \cdot \mathbf{a}_2 - \sum [\mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i \cdot \mathbf{a}_2]$$

Ou colocando na forma de produtos de matrizes e vetores:

$$\delta g_N = \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_1^0 - \sum [\mathbf{n}^T \mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i + \mathbf{n}^T \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i]$$

$$\delta g_{T_1} = \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{u}_1^0 - \sum [\mathbf{a}_1^T \mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i + \mathbf{a}_1^T \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i] \quad (4.108)$$

$$\delta g_{T_2} = \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{u}_1^0 - \sum [\mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_i \delta \bar{\mathbf{u}}_1^i + \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_i \delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_1^i]$$

De posse das equações 4.108, é possível escrever as matrizes de rigidez do contato para ambos os casos.

4.3.5.1 Contato considerando *sticking*

Para o caso de *sticking* a formulação utiliza as mesmas hipóteses do caso de *sticking* do contato usando nós simples, ou seja, ambos os esforços possam ser descritos utilizando o método das penalidades. Utiliza-se os mesmos dois parâmetros ε_N e ε_T definidos anteriormente.

Para a obtenção da matriz de rigidez de contato, a variação do trabalho virtual deve ser nula. Assim:

$$\delta(\delta W_{contato}) = \varepsilon_T \delta \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N \delta g_N \delta g_N \quad (4.109)$$

Após algumas manipulações algébricas, como as executadas em 4.98 e utilizando as expressões adequadas, é possível obter a matriz de rigidez do contato no caso de *sticking*:

$$\mathbf{K}_{sticking} = \varepsilon_N \mathbf{M}_n + \varepsilon_T \mathbf{M}_{a1} + \varepsilon_T \mathbf{M}_{a2}$$

com:

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{C}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{S}_1^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{C}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T & \mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{S}_2^T \mathbf{n}\mathbf{n}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{n}\mathbf{n}^T & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_1 & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_1 & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{C}_2 & -\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{n}\mathbf{n}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{C}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{S}_1^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{C}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & -\mathbf{S}_2^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_1 & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_1 & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{C}_2 & -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T \end{bmatrix}$$

$$M_{a2} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & \mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{C}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & \mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & \mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & -\mathbb{S}_2^T \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_1 & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_1 & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{C}_2 & -\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \mathbb{S}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix}$$

4.3.5.2 Contato considerando *sliding*

Nesse t3pico o problema 3 considerado quando h3 escorregamento. Como descrito no t3pico equivalente no elemento de contato, ap3s a for3a tangencial atingir um valor cr3tico definido pela lei de Coulomb, ocorre o escorregamento (*sliding*).

De forma an3loga, 3 poss3vel escrever o princ3pio dos trabalhos virtuais para o caso de *sliding* como:

$$\begin{aligned} \delta(\delta W_{contato}) &= \delta(\mu p_N \mathbf{n}_T) \cdot \delta \mathbf{g}_T + \delta p_N \delta g_N \longrightarrow \\ \delta(\delta W_{contato}) &= \mu \delta p_N \mathbf{n}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \mu p_N \delta \mathbf{n}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T + \varepsilon_N \delta g_N \delta g_N = c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Para o presente caso, pode-se calcular cada um dos termos como a seguir. Para o termo c_3 , tem-se:

$$c_3 = \delta \mathbf{u}^T \varepsilon_N \mathbf{M}_n \delta \mathbf{u} \quad (4.111)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ 3 o vetor da varia33o dos deslocamentos, englobando todas as ordens da s3rie de Fourier do n3 1.

O termo c_1 3 dado por:

$$c_1 = \delta \mathbf{u}^T \mu \varepsilon_N \sum_{\alpha=1}^2 n_{t\alpha} \mathbf{M}_{\alpha n} \delta \mathbf{u} \quad (4.112)$$

sendo:

$$M_{\alpha n} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{C}_1 & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \\ \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \\ \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{C}_1 & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \mathbb{S}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{n}^T \end{bmatrix}$$

Já para o termo c_2 , é necessário calcular a variação da direção de contato. Procedendo da mesma maneira que no tópico de *sliding* do contato simples, obtém-se:

$$c_2 = \delta \mathbf{u}^T \varepsilon_T \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (\delta_{\alpha\beta} - n_{T\alpha} n_{T\beta}) \mathbf{M}_{\alpha\beta} \delta \mathbf{u} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{C}_1 & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \\ \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbb{C}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \\ \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{C}_1 & \mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{S}_1 & \cdots & -\mathbb{S}_1^T \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{C}_1 & -\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \mathbb{S}_1 & \cdots & \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta^T \end{bmatrix}$$

Assim é possível escrever a matriz de rigidez para o caso de *sliding* como:

$$\mathbf{K}_{sliding} = \varepsilon_N \mathbf{M}_n + \mu \varepsilon_N \sum_{\alpha=1}^2 n_{t\alpha} \mathbf{M}_{\alpha n} + \varepsilon_T \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (\delta_{\alpha\beta} - n_{T\alpha} n_{T\beta}) \mathbf{M}_{\alpha\beta} \quad (4.114)$$

4.3.6 Formulação de Forças

Uma vez que todos os elementos básicos foram definidos, é possível proceder a análise de um tubo. Ressalta-se que o procedimento utilizando variados elementos funciona apenas considerando deslocamentos impostos, uma vez que a distribuição de esforços nas diversas camadas do tubo não é conhecida *a priori*. Por isso, uma formulação na qual, dados os esforços atuantes numa seção, o programa seja capaz de calcular como esse se distribuirá em cada camada e prosseguir com a análise é extremamente desejado. A formulação apresentada nessa seção busca justamente resolver esse problema.

Sabe-se que os esforços atuantes numa seção do tubo são dadas como na figura 4.17.

Figura 4.17: Esforços atuantes numa seção qualquer do tubo.

É possível escrever-se o vetor de esforços externos $\mathbf{F}_{section}$ como sendo:

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} F_{r,sec} & F_{\theta,sec} & F_{z,sec} & M_{x,sec} & M_{y,sec} & M_{z,sec} \end{bmatrix}^T \quad (4.115)$$

com $F_{i,sec}$ sendo as forças nas direções radial (r), circunferencial (θ) e axial (z) e $M_{i,sec}$ os momentos nas direções x , y e z . Os momentos são expressos em relação aos eixos cartesianos por ser mais usual.

Supondo que na seção em questão possua k nós, então k forças do vetor $\mathbf{F}_A$ de forças externas passam a ser desconhecidas. É possível relacionar os esforços da seção com as forças externas através da equação 4.116.

$$\mathbf{D}\mathbf{F}_A^k = \mathbf{F}_{section} \quad (4.116)$$

onde $\mathbf{F}_A^k$ é o vetor com as k forças externas que atuam na seção e passaram a ser desconhecidas e $\mathbf{D}$ é uma matriz retangular 6 linhas por k colunas que relaciona os esforços nodais com as forças externas.

O problema fica então indeterminado a não ser que se encontrem $k - 6$ novas equações. Para tal, assume-se a hipótese de que a seção permanece plana durante a deformação. Para a modelagem, assume-se que a seção é descrita pelas variáveis contidas no vetor Δ dado pela equação 4.117 e são exibidos na figura 4.18.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_r & \Delta_\theta & \Delta_z & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}^T \quad (4.117)$$

Figura 4.18: Deslocamentos resultantes da aplicação de forças numa seção qualquer do tubo (considerando movimento de corpo rígido).

com Δ_i sendo os deslocamentos nas direções radial (r), circunferencial (θ) e axial (z) e ψ_i nas rotações as direções x , y e z . Da mesma forma que os momentos, as rotações são expressas em relação aos eixos cartesianos por ser mais usual e para manter a coerência com a definição dos momentos.

Dessa forma acrescentou-se mais 6 variáveis ao problema, porém utilizando-se a hipótese de que a seção movimenta-se como um corpo rígido é possível escrever:

$$\mathbf{Y}\Delta = \mathbf{X}_A^k \quad (4.118)$$

onde $\mathbf{X}_A^k$ é o vetor com os k deslocamentos nodais da seção em questão e $\mathbf{Y}$ é uma matriz retangular de k linhas por 6 colunas que relaciona os deslocamentos da seção com os deslocamentos nodais.

Esse conjunto de equações torna novamente o problema passível de solução.

É possível reescrever-se o sistema de equações utilizando condensação estática e dividindo tanto $\mathbf{X}_A$ quanto $\mathbf{F}_A$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^{ll} & \mathbf{K}_{AA}^{lk} & \mathbf{K}_{AB}^l \\ \mathbf{K}_{AA}^{kl} & \mathbf{K}_{AA}^{kk} & \mathbf{K}_{AB}^k \\ \mathbf{K}_{BA}^l & \mathbf{K}_{BA}^k & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A^l \\ \mathbf{X}_A^k \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A^l \\ \mathbf{F}_A^k \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} \quad (4.119)$$

onde o termo l indica os termos dos deslocamentos livres e esforços aplicados conhecidos, k os termos dos esforços da seção e deslocamentos nodais associados à seção. As matrizes de rigidez $\mathbf{K}_{AA}$, $\mathbf{K}_{AB}$ e $\mathbf{K}_{BA}$ são particionadas de acordo.

Substituindo as equações 4.116 e 4.118 no sistema de equações 4.119 e rearranjando, é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} K_{AA}^{ll} & K_{AA}^{lk}Y & K_{AB}^l \\ DK_{AA}^{kl} & DK_{AA}^{kk}Y & DK_{AB}^k \\ K_{BA}^l & K_{BA}^kY & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A^l \\ \Delta \\ X_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A^l \\ F_{ext} \\ F_B \end{Bmatrix} \quad (4.120)$$

Pode-se então construir dois novos vetores $\bar{X}_A$ e $\bar{F}_A$:

$$\bar{X}_A = \begin{Bmatrix} X_A^l \\ \Delta \end{Bmatrix}, \quad \bar{F}_A = \begin{Bmatrix} F_A^l \\ F_{ext} \end{Bmatrix}$$

E com isso é possível reescrever o sistema de equações 4.120 como:

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{AA} & \bar{K}_{AB} \\ \bar{K}_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_A \\ X_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_A \\ F_B \end{Bmatrix}$$

com:

$$\bar{K}_{AA} = \begin{bmatrix} K_{AA}^{ll} & K_{AA}^{lk}Y \\ DK_{AA}^{kl} & DK_{AA}^{kk}Y \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{AB} = \begin{bmatrix} K_{AB}^l \\ DK_{AB}^k \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{BA} = \begin{bmatrix} K_{BA}^l & K_{BA}^k \end{bmatrix}$$

Assim, o procedimento é similar ao feito para o caso em que aplica-se apenas os deslocamentos: resolve-se para $\bar{X}_A$, obtém-se F_B e de posse desses dois vetores é possível obter-se tanto os deslocamentos da seção Δ , bem como a distribuição de esforços $\bar{F}_A^k$.

Resta agora definir as matrizes Y e D . Elas podem ser construídas da mesma forma que a matriz de rigidez é, utilizando a contribuição de cada nó mas, cada nó é considerado uma única vez. Como nesse processo os esforços e deslocamentos estão ligados aos tipos de nó (simples, caso seja relacionado ao elemento de hélice e Fourier, relacionada ao elemento de capa), a matriz pode ser determinada para cada um deles. Tal desenvolvimento é visto a seguir.

4.3.6.1 Cálculo das matrizes para o nó que utiliza série de Fourier

Para esse caso, os deslocamentos são diretamente a soma dos deslocamentos na direção, ou seja:

$$\mathbf{Y}_{d,i} \Delta_{section} = \mathbf{u}_{d,i}$$

com:

- $\Delta_{section} = \begin{bmatrix} \Delta_r & \Delta_\theta & \Delta_z \end{bmatrix}^T$, os deslocamentos da seção;
- $\mathbf{Y}_{d,i} = \mathbf{I}$, a matriz de identidade de ordem 3; e
- $\mathbf{u}_{d,i} = \begin{bmatrix} u_r & u_\theta & u_z \end{bmatrix}^T$, os deslocamentos do nó i .

Quanto às rotações, cabe aqui uma ressalva sobre a hipótese de seção plana. A rotação ao redor do eixo z , por ser escrita em função do termo de ordem 0 da série de Fourier, o faz de maneira exata. Já para as rotações ao redor dos eixos x e y foi feita uma hipótese considerando apenas o termo de ordem 1 da série. Isso implica que a seção não ficará plana quando da aplicação dessas rotações, mas sim com formato senoidal (ou cossenoidal, dependendo da rotação), como visto na figura 4.19. Se as rotações forem suficientemente pequenas, essa modulação é pequena e a seção aproxima-se da seção plana, podendo-se considerar que a aproximação é válida.

Figura 4.19: Forma da seção transversal considerando deslocamento modulado pelo primeiro termo da série de Fourier.

Dessa forma, a relação entre as rotações da seção e os deslocamentos fica:

$$\psi_x = \frac{1}{R_i} \bar{w}_1 \longrightarrow \bar{w}_1 = R_i \psi_x$$

$$\psi_y = -\frac{1}{R_i} \bar{w}_1 \longrightarrow \bar{w}_1 = R_i \psi_y$$

$$\psi_z = \frac{1}{R_i} v_0 \longrightarrow v_0 = -R_i \psi_z$$

sendo R_i o raio do nó i .

Assim é possível escrever, para o nó em questão, a matriz $\mathbf{Y}_i$ como:

$$\mathbf{Y}_i \mathbf{\Delta} = \mathbf{u}_i$$

com:

- $\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_r & \Delta_\theta & \Delta_z & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}^T$, a contribuição do elemento nos deslocamentos seção;

$$\bullet \mathbf{Y}_{i,nod} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{w}_1 & \bar{\bar{u}}_1 & \bar{\bar{v}}_1 & \bar{\bar{w}}_1 \end{bmatrix}^T$, os deslocamentos no nó.

Para os esforços o procedimento é similar. As forças tem relação direta, enquanto os momentos seguem o mesmo tipo de descrição das rotações, usando o termo adequado a série de Fourier:

$$M_x = R_i \bar{F}_z^1, M_y = R_i \bar{\bar{F}}_z^1, M_z = -\frac{R_i}{2} F_\theta^0$$

E a matriz $\mathbf{D}_i$ fica:

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A relação entre as forças da seção e do nó ficam dadas por:

$$\mathbf{D}_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{section}$$

com:

- $\mathbf{F}_{section} = \begin{bmatrix} F_{r,sec} & F_{\theta,sec} & F_{z,sec} & M_{x,sec} & M_{y,sec} & M_{z,sec} \end{bmatrix}^T$ as contribuições dos esforços nos nós da seção;
- $\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_r^0 & F_\theta^0 & F_z^0 & \bar{F}_r^1 & \bar{F}_\theta^1 & \bar{F}_z^1 & \bar{\bar{F}}_r^1 & \bar{\bar{F}}_\theta^1 & \bar{\bar{F}}_z^1 \end{bmatrix}^T$ os esforços no nó i .

4.3.6.2 Cálculo das matrizes para o nó simples

Para o caso em que o nó é simples, os deslocamentos e rotações são diretamente relacionado com o da seção. Ressalva-se que as rotações devem ser rotacionadas de acordo com o ângulo em que o nó se encontra. Assim é possível escrever:

$$\mathbf{Y}_i \Delta = \mathbf{u}$$

com:

- $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_r & \Delta_\theta & \Delta_z & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}^T$, os deslocamentos da seção;

- $\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com θ a coordenada circunferencial do nó i ;

e

- $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r & u_\theta & u_z & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}^T$, os deslocamentos no nó.

O mesmo ocorre para os esforços, ou seja:

$$\mathbf{D}_i \mathbf{F} = \mathbf{F}_{section}$$

com:

- $\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com θ a coordenada circunferencial do nó i ;

- $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_r & F_\theta & F_z & M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^T$, os esforços no nó.

- $\mathbf{F}_{section} = \begin{bmatrix} F_{r,sec} & F_{\theta,sec} & F_{z,sec} & M_{x,sec} & M_{y,sec} & M_{z,sec} \end{bmatrix}^T$, as contribuições dos esforços nos nós da seção;

4.4 Testes e Validações

Os testes apresentados nessa seção são os feitos com cada elemento. Exibem-se os resultados com o elemento cilíndrico e com o helicoidal individualmente. Os elementos de “bridge” e contato são testados em conjunto com os elementos já validados e apresentados. Isso se explica pelo fato de que tais elementos não possuem maneira efetiva de verificação senão trabalhando em conjunto com os demais.

4.4.1 Elemento Cilíndrico de Parede Espessa

Para efetuar os testes e validações desse elemento, utilizou-se como ferramenta de comparação um *software* de elementos finitos comercial (*ANSYS*).

Os casos simulados possuem os seguintes carregamentos:

- Pressão interna constante.
- Carregamento de tração na superfície superior do tubo.
- Pressão interna modulada pelo cosseno do ângulo em que é aplicada.
- Pressão interna modulada pelo cosseno do dobro do ângulo em que é aplicada.
- Pressão interna modulada pelo cosseno do dobro do ângulo em que é aplicada. Nesse caso o material é ortotrópico.

As propriedades de cada tubo são definidas em cada caso. Já o material isotrópico é definido na tabela 4.2, com propriedades semelhante a de polímeros. Todos possuem como condições de contorno o engastamento da superfície inferior do tubo e superfície superior livre.

Tabela 4.2: Propriedades do material isotrópico empregado.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de Elasticidade</i>	<i>490 MPa</i>
<i>Coefficiente de Poisson</i>	<i>0,45</i>

4.4.1.1 Caso de Pressão Interna Constante

O caso de pressão interna constante é usado como uma primeira validação do modelo (pois esse problema é facilmente resolvível com um modelo axissimétrico). Para tal, foi utilizado apenas um elemento no modelo proposto. O tubo utilizado tem as propriedades geométricas exibidas na tabela 4.3 e como carregamento foi utilizada uma pressão interna de 10 *MPa*.

Tabela 4.3: Propriedades do tubo.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
<i>Raio médio</i>	40 <i>mm</i>
<i>Espessura</i>	5 <i>mm</i>
<i>Comprimento</i>	200 <i>mm</i>

Para comparação foi usado uma malha já convergida de 19.900 elementos axissimétricos no ANSYS. Os resultados são exibidos na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Amplitude do deslocamento da superfície superior (Caso de pressão constante).

<i>Variação</i>	<i>1 Macro Elemento</i>	<i>ANSYS</i>
<i>Raio interno (mm)</i>	6,431	6,491
<i>Raio externo (mm)</i>	6,026	6,099
<i>Comprimento (mm)</i>	-12,910	-12,915

4.4.1.2 Tração na superfície superior

O caso de tração foi o segundo caso simulado, usando o mesmo tubo do caso anterior porém com tração aplicada ao topo de 10 *kN*. A malha de elementos finitos utilizada foi a mesma utilizada no caso de pressão interna constante. Os resultados são exibidos na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Amplitude do deslocamento da superfície superior (Caso de tração).

<i>Variação</i>	<i>1 Macro Elemento</i>	<i>ANSYS</i>
<i>Raio interno (mm)</i>	-0,2741	-0,2741
<i>Raio externo (mm)</i>	0,3106	0,3106
<i>Comprimento (mm)</i>	3,428	3,428

Ambos os casos apresentados mostram bons resultados, mesmo utilizando apenas um elemento.

4.4.1.3 Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Ângulo

O caso de pressão interna modulada pelo cosseno do ângulo foi feito aplicando uma pressão com amplitude de $0,1 \text{ MPa}$, com o tubo de propriedades dadas na tabela 4.6.

Tabela 4.6: Propriedades do tubo empregado no segundo teste.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
<i>Raio médio</i>	<i>40 mm</i>
<i>Espessura</i>	<i>2 mm</i>
<i>Comprimento</i>	<i>300 mm</i>

Nesse caso foi feito um estudo de convergência de malha, pois esse não apresenta axi-simetria de carregamentos. Para garantir a validade do estudo, verificou-se a convergência dos resultados para o programa de elementos finitos. A malha empregada no ANSYS é composta de elementos sólidos de 8 nós. Como pode ser visto na figura 4.20, a convergência é garantida com 18000 elementos aproximadamente (o que significa 0,1% de diferença entre os resultados).

Figura 4.20: Convergência do deslocamento radial da superfície superior externa do cilindro usando ANSYS.

Os gráficos exibidos nas figuras 4.21 a 4.23 exibem a convergência dos resultados em valor absoluto da extremidade externa superior para a direção radial, circunferencial e axial, respectivamente.

Figura 4.21: Variação radial (valor absoluto).

Figura 4.22: Variação circunferencial (valor absoluto).

Figura 4.23: Variação axial (valor absoluto).

Os resultados mostram que com a malha mais refinada o erro obtido foi de aproximadamente 0,15%. Com menos elementos (400 elementos) é possível obter uma solução com erro pequeno (aproximadamente 1%), mostrando a eficiência do elemento.

4.4.1.4 Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Dobro do Ângulo

O caso de pressão interna modulada pelo dobro do cosseno do ângulo utiliza um termo diferente da série de Fourier (o segundo termo) e serve para verificar a validade da formulação para termos diferentes do nulo e do primeiro termo. Mais uma vez, foram feitas simulações com o presente modelo e o *ANSYS*, comparando os resultados. No modelo de macro elementos foram utilizados 1024 elementos, cujo tubo tem as características dadas pela tabela 4.3, ao passo que no modelo de elementos finitos clássico foram utilizados 10800 elementos sólidos de 8 nós. Com ajuda do *CAD 3D* (que é discutido no capítulo 5) os resultados dos deslocamentos para cada direção são exibidos em figuras alternando-se entre *ANSYS* e modelo de macro elementos (figuras 4.24 a 4.29).

Figura 4.24: Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (*ANSYS*).

Figura 4.25: Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (*CAD com Macro Elementos*).

Figura 4.26: Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (*ANSYS*).

Figura 4.27: Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (*CAD com Macro Elementos*).

Figura 4.28: Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (ANSYS).

Figura 4.29: Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo (CAD com Macro Elementos).

4.4.1.5 Caso de Pressão Interna Modulada pelo Cosseno do Dobro do Ângulo Utilizando Material Ortotrópico

O caso de pressão interna modulada pelo dobro do cosseno do ângulo utiliza o tubo dado pela tabela 4.6 e é composto pelo material ortotrópico com as propriedades dadas na tabela 4.7. Tal material apresenta módulos de elasticidade de materiais poliméricos, porém os coeficientes de Poisson foram arbitrários de tal sorte que a matriz de elasticidade do material seja válida.

Tabela 4.7: Propriedades do material ortotrópico.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
<i>Módulo de Elasticidade (Direção Radial)</i>	200 MPa
<i>Módulo de Elasticidade (Direção Circunferencial)</i>	200 MPa
<i>Módulo de Elasticidade (Direção Axial)</i>	490 MPa
<i>Coefficiente de Poisson (Plano Radial-Circunferencial)</i>	0.2
<i>Coefficiente de Poisson (Plano Radial-Axial)</i>	0.1
<i>Coefficiente de Poisson (Plano Circunferencial-Axial)</i>	0.15
<i>Módulo de Cisalhamento (Plano Radial-Circunferencial)</i>	200 MPa
<i>Módulo de Cisalhamento (Plano Plano Radial-Axial)</i>	400 MPa
<i>Módulo de Cisalhamento (Plano Circunferencial-Axial)</i>	200 MPa

Mais uma vez, foram feitas simulações com o presente modelo e o *ANSYS*, comparando os resultados obtidos. Em ambos os casos consideram-se as malhas convergidas.

No modelo de macro elementos foram utilizados 3200 elementos ao passo que no modelo de elementos finitos clássico foram utilizados 32400 elementos sólidos de 8 nós. Também é novamente utilizado o *CAD 3D* para efetuar a comparação entre os deslocamentos no tubo como um todo. A tabela 4.8 exibe as amplitudes de deslocamento da superfície superior externa para o modelo proposto e para o *ANSYS*. Observa-se uma diferença máxima de aproximadamente 2%, mostrando que os dois modelos obtêm valores próximos, sendo que o modelo proposto tem uma malha com apenas 10% do número de elementos empregados no *software* comercial.

Tabela 4.8: Amplitude de deslocamento da superfície superior do cilindro medidos no raio externo, extremidade superior. (Caso de pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo com material ortotrópico).

	<i>Amplitude do deslocamento em mm (Macro Elementos)</i>	<i>Amplitude do deslocamento em mm (ANSYS)</i>	<i>Diferença (%)</i>
<i>Direção Radial</i>	2,002	2,017	0,72
<i>Direção Circunferencial</i>	-0,924	-0,92036	0,39
<i>Direção Axial</i>	-0,083	-0,081586	2,15

As figuras 4.30 a 4.35 exibem comparações entre o modelo (utilizando o *CAD 3D* para exibição) com os resultados obtidos pelo *ANSYS*.

Figura 4.30: Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (ANSYS).

Figura 4.31: Deslocamento radial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (CAD com Macro Elementos).

Figura 4.32: Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (ANSYS).

Figura 4.33: Deslocamento circunferencial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (CAD com Macro Elementos).

Figura 4.34: Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (ANSYS).

Figura 4.35: Deslocamento axial após a aplicação da pressão modulada pelo cosseno do dobro do ângulo e material ortotrópico (CAD com Macro Elements).

4.4.2 Elemento Tridimensional para Helicóides

Nesse tópico efetua-se a validação e comparação dos resultados obtidos com um programa de elementos finitos. Nos casos a seguir a comparação foi feita com o software *ANSYS*, assim como no caso do elemento anteriormente exibido. Os casos simulados são exibidos na tabela 4.9, onde o carregamento indica a força ou momento aplicado na extremidade superior da hélice.

Tabela 4.9: Casos a serem estudados (hélice).

<i>Caso</i>	<i>Passos</i>	<i>Ângulo de assenta- mento</i>	<i>Carregamento</i>
A	1	1°	Força axial de 100N
B	1	5°	Força axial de 100N
C	1	45°	Força axial de 100N
D	1	89°	Força axial de 100N
E	4	30°	Força axial de 100N
F	6	30°	Força axial de 100N
G	2	30°	Força radial de 100N
H	2	30°	Momento de flexão de 0,1Nm
I	2	30°	Momento de torção de 0,1Nm

Em todos os casos simulados, as características da hélice são as mesmas. Essas propriedades são exibidas na tabela 4.10. A hélice tem como condições de contorno a extremidade superior livre e a extremidade inferior engastada.

Tabela 4.10: Propriedades geométricas e de material da hélice.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
Raio médio	10mm
Raio da seção transversal (circular)	0,5mm
Módulo de elasticidade	10MPa
Coefficiente de Poisson	0,3

Para verificar o elemento, comparou-se o resultado obtido com uma malha usando os elementos desenvolvidos, com o *software* ANSYS utilizando elementos de viga (BEAM189), que é quadrático, possui 3 nós e utiliza o modelo de Timoshenko, incluindo efeitos de cisalhamento). A escolha da malha convergida se deu após alguns testes comparativos para garantir que o resultado convergirá. A figura 4.36 exibe a diferença entre os deslocamentos do nó do topo nas direções radial e circunferencial em função do número de elementos para ambos os modelos. O caso utilizado para essa comparação é o caso *G* da tabela 4.9.

Na figura 4.36, as linhas azul e verde exibem os deslocamentos do modelo proposto enquanto as linhas laranja e roxa exibem a solução do ANSYS. Percebe-se que com aproximadamente 20 elementos as soluções obtidas são próximas (apresentam aproximadamente 0,01% de diferença). O modelo proposto alcança diferenças indistinguíveis aos do *software* comercial utilizando 50 elementos.

Como dito, para garantir que todos os casos fossem comparados com a solução convergida, utilizou-se a malha do ANSYS que contém 1000 elementos (fazendo com que a diferença entre as soluções seja da ordem de 0,001%), apesar de uma malha menor ter convergência garantida com menos elementos. Cabe aqui um comentário que as malhas usadas no modelo proposto também apresentam convergência com diferença da mesma ordem (0,001%) tornando a comparação justa.

No modelo proposto, apenas 10 elementos foram empregados nos casos que vão de *A* até *D*. Nos casos *E* e *F* foram utilizados 20 e 40 elementos respectivamente. Já nos casos de *G* a *I* usou-se 50 elementos.

Os quatro primeiros casos mostram que a inclusão da tortuosidade no elemento faz com que ele seja mais eficaz no tratamento de diversos ângulos de assentamento. Isso pode ser dito quando se compara o elemento proposto nesse trabalho com o de

Figura 4.36: Comparação entre os deslocamentos e convergência de malha do modelo proposto.

ZHU e MEGUID (2004). No trabalho daqueles autores, verifica-se que mais elementos são necessários quando se incrementa o ângulo de assentamento. Alguns testes foram efetuados com o elemento de ZHU e MEGUID (2004). Tais resultados não são aqui apresentados.

Nos casos de E e F , no qual o número de passos varia, o uso de 10 elementos fazia com que a diferença do modelo com o ANSYS aumentasse. Para diminuir essa diferença, mais elementos foram utilizados. O ponto chave nesses casos é manter o tamanho de referência do elemento. Se é aumentado o comprimento da hélice mantendo o número de elementos, o comprimento desses elementos aumenta. Isso pode violar a hipótese de pequenos deslocamentos. Utilizando 20 elementos, a diferença passa a ser da ordem de 0,5%. Mas se forem utilizados 40 elementos para o caso de quatro passos e 50 elementos para o caso de seis passos a diferença cai para menos de 0,05%.

Já nos casos G , H e I , o efeito do carregamento é verificado. A diferença entre esses casos e os demais é que em vez de se aplicar uma força axial, aplica-se uma força em outra direção ou um momento. Para essas simulações foram utilizados 50 elementos.

As tabelas 4.11 a 4.16 exibem os deslocamentos e rotações na extremidade superior para todos os casos. Cabe aqui fazer uma nota quanto a alguns valores que apresentam duas ou mais ordens de grandeza quando comparados com os demais. Esses na verdade são resíduos numéricos e a diferença entre os modelos não é considerada (sendo marcada como um traço na coluna diferença).

Tabela 4.11: Comparação entre os deslocamentos radiais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Deslocamento radial (mm)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	-13201	-13200,87	0,000975
B	-527,9667	-527,9652	0,00029
C	-6,11338	-6,11339	-0,000252
D	-0,0807281	-0,0807285	-0,000593
E	-231,224	-231,236	0,004927
F	-520,0257	-520,279	0,048877
G	106,85486	106,85489	3,17E-05
H	-0,024941	-0,024942	0,005256
I	-1,30E-08	-1,59E-06	-

Tabela 4.12: Comparação entre os deslocamentos circunferenciais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Deslocamento circunferencial (mm)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	4202,6	4202,64	-0,001055
B	168,726	168,7249	0,000954
C	2,42114	2,421126	0,000795
D	0,03742	0,037424	0,002140
E	20,73013	20,72761	-0,012219
F	31,09651	31,08825	-0,026561
G	0,90478	0,904876	0,010926
H	-1,445235	-1,445244	0,000677
I	0,371200	0,371201	0,000508

Tabela 4.13: Comparação entre os deslocamentos axiais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Deslocamento axial (mm)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	146,74	146,7404	-0,000335
B	29,43201	29,43188	0,000461
C	4,028237	4,028228	0,000226
D	3,136291	3,136282	0,000272
E	21,63628	21,63542	-0,003963
F	32,44944	32,45061	0,003626
G	-14,45235	-14,45238	0,000238
H	5,14037E-09	-2,86231E-07	-
I	0,033255	0,033255	-4,78124E-06

Tabela 4.14: Comparação entre as rotações radiais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Rotação radial (rad)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	-8,3595E-06	5,30198E-07	-
B	-1,58525E-09	1,91591E-06	-
C	8,57344E-11	-8,01897E-08	-
D	1,39665E-11	1,32726E-07	-
E	1,65845E-06	6,23634E-07	-
F	3,45019E-05	1,85906E-06	-
G	-0,024941	-0,024943	0,0053
H	0,026559	0,026560	0,00052
I	1,36416E-10	-2,84893E-08	-

Tabela 4.15: Comparação entre as rotações circunferenciais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Rotação circunferencial (rad)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	-7,3345	-7,3346	-0,00087
B	-1,470309	-1,470305	0,000202
C	-0,194595	-0,194596	-0,000263
D	-0,147215	-0,147216	-0,000546
E	-1,062348	-1,062393	0,004182
F	-1,593019	-1,593581	0,035317
G	1,445235	1,445238	0,00017518
H	-1,22892E-10	-1,36082E-08	-
I	-1,46409E-10	-1,71128E-08	-

Tabela 4.16: Comparação entre as rotações axiais (extremidade superior da hélice).

<i>Caso</i>	<i>Rotação axial (rad)</i>	<i>ANSYS</i>	<i>Diferença (%)</i>
A	0,038394	0,0383941	-0,0004
B	0,038254	0,038253	0,000506
C	0,02715	0,027152	0,000948
D	0,00067017	0,00067016	0,002348
E	0,133021	0,133008	-0,00982
F	0,199533	0,199488	-0,02301
G	-1,43301E-08	-1,59341E-06	-
H	1,03704E-10	-2,84893E-08	-
I	0,03136	0,031359	-5,74505E-05

4.4.3 Elemento de Ligação “Bridge”

Para mostrar a eficácia do elemento de ligação, mostra-se aqui um exemplo representativo, que consiste em um tubo (modelado utilizando elementos cilíndricos de parede espessa) e uma hélice (utilizando elementos tridimensionais para helicoides) ligados pelo elemento de ligação “bridge”.

O caso estudado consiste em uma hélice, interna ao cilindro, de raio médio $125,37mm$, ângulo de assentamento (medido em relação ao eixo central do cilindro, alinhado com o eixo z) de -45° , seção transversal retangular de 2 por $7mm$, com comprimento correspondente a dois passos de hélice (que resulta em um comprimento aproximado de $787,72mm$). O material usado é um aço linear, isotrópico (módulo de elasticidade de $207GPa$ e coeficiente de Poisson 0,3). A hélice é dividida em 50 elementos do tipo tridimensionais para helicoides. A capa plástica encontra-se justaposta à hélice, sem nenhum espaçamento entre essas camadas. Ela apresenta o comprimento projetado da hélice na direção axial, espessura de $6mm$ e é modelada com 100 elementos cilíndricos de parede espessa. Já o material da capa, por motivos de simplificação, foi tomado como sendo linear elástico e tendo módulo de elasticidade de $1,4GPa$ e coeficiente de Poisson 0,45.

Observando que cada elemento da hélice possui três nós, 100 elementos de ligação foram criados entre os nós da hélice e os nós que formam a linha interna do cilindro. O parâmetro da rigidez dos elementos de ligação empregado foi 10^{10} . As condições de contorno são engaste na parte inferior (tanto hélice quanto capa) e deslocamento axial na parte superior de $2,5\text{mm}$, com os demais deslocamentos mantidos nulos. Esse valor foi escolhido para que as comparações pudessem ser feitas de acordo, uma vez que o programa de elementos finitos utilizado somente consegue atingir níveis de deslocamento maiores utilizando formulações não-lineares.

O primeiro estudo realizado foi o da convergência das ordens da série de Fourier, dado que, para o carregamento imposto, o deslocamento radial apresentaria é não simétrico. A figura 4.37 exibe o deslocamento da parte externa da capa na coordenada $z = 429,6\text{mm}$. Observa-se que levando em conta seis ou sete termos da série de Fourier não há praticamente diferença no deslocamento. Sendo assim, esse será considerado na comparação com o ANSYS.

Figura 4.37: Comparação entre as diferentes ordens da série de Fourier no raio externo da capa plástica e $z = 429,6\text{mm}$.

Um estudo paralelo, mas de grande importância para o problema, é o do efeito do parâmetro de penalidade no resultado. Para verificar sua influência, utilizou-se o termo de ordem 7 da série de Fourier enquanto esse parâmetro foi variado. O resultado obtido encontra-se na figura 4.38.

Figura 4.38: Comparação entre os diferentes parâmetros de penalidade. Deslocamento no raio externo da capa plástica e $z = 429,6\text{mm}$.

Observa-se que para valores do parâmetro de penalidade a partir de 10^4 , o valor da resposta final é praticamente o mesmo com valores superiores. A partir de 10^6 , não se percebe mais diferença entre os valores. Portanto, o valor utilizado nos testes ($\varepsilon = 10^{10}$) é adequado.

Utilizando então o resultado de ordem 7 do gráfico anterior e comparando com o mesmo caso simulado no ANSYS, obtém-se o gráfico da figura 4.39. O caso de comparação consiste em um modelo de mesmas dimensões e materiais, porém os elementos utilizados para a simulação são diferentes. A capa plástica é simulada com elementos sólidos de 20 nós e a hélice é modelada utilizando elementos de casca. Tal escolha foi feita por causa das dificuldades encontradas na modelagem do contato entre sólidos e vigas no *software* usado para comparação.

Figura 4.39: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS no raio externo da capa plástica e $z = 429,6\text{mm}$.

É possível perceber que o resultado obtido com o elemento proposto é satisfatório, dado que foi possível obter o deslocamento com pequenas diferenças em relação ao ANSYS. O principal ponto dessa comparação é que a não-simetria da solução foi obtida pelo modelo proposto.

4.4.4 Elemento de Contato com Série de Fourier

Aqui são apresentados os resultados utilizando o elemento de contato com Série de Fourier. Como visto na descrição dos elementos, o elemento de contato convencional é um caso particular deste e recomendado para contato entre nós de mesma natureza. Para mostrar a efetividade desse elemento, procurou-se simular um caso similar ao caso do “*Bridge*”, considerando uma capa e uma hélice porém permitindo a separação e penetração entre os elementos. Considera-se aqui dois casos: o contato em que não se leva em conta o atrito, podendo ocorrer apenas separação entre as camadas e o caso com atrito, que permite ocorrer tanto *sliding* quanto *sticking*. Os dados da capa são exibidos na tabela 4.17 e os da hélice na tabela 4.18. Para esse caso foi considerado que a base inferior está fixa, isto é, todos os nós (tanto da capa quanto hélice) estão fixos, ao passo que na parte superior é imposto um deslocamento de compressão de 0.8mm na direção do eixo. O valor utilizado é pequeno quando comparado com o tamanho total do cilindro, mas foi adotado porque com ele foi possível obter a convergência no ANSYS.

Tabela 4.17: Dados da capa plástica para o caso de contato.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
Raio médio:	130,37 <i>mm</i>
Espessura:	6,0 <i>mm</i>
Comprimento:	793,20 <i>mm</i>
Módulo de Elasticidade:	1400 <i>MPa</i>
Coeficiente de Poisson:	0,45

Tabela 4.18: Dados da hélice para o caso de contato.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
Seção transversal:	7 mm x 2 mm (retangular)
Raio médio:	126,37 mm
Comprimento:	793,20 mm (1 passo)
Módulo de Elasticidade:	207000 MPa
Coefficiente de Poisson:	0,3

Os dados relativos ao contato, como coeficiente de atrito e penalidades empregadas, são exibidos na tabela 4.19.

Tabela 4.19: Dados do algoritmo de contato.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
Coefficiente de atrito:	0,1
Penalidade Normal:	1e8
Penalidade Tangencial:	1e2

De posse das simulações, foi possível efetuar comparações entre o modelo e o ANSYS, bem como entre o modelo com e sem atrito. As figuras 4.40 a 4.42 exibem os deslocamentos da hélice nas direções radial, circunferencial e axial, respectivamente versus a coordenada axial da mesma.

Figura 4.40: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.41: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.42: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.

Observa-se que os resultados, exceto pela direção radial, possuem boa concordância. O que se especula sobre a diferença exibida é devida a formulação do contato e o comportamento do *software* de elementos finitos. Existe uma pequena variação do deslocamento radial da capa plástica para uma dada posição axial, enquanto o deslocamento no modelo apenas o termo de ordem 0 é considerado, já que testes com mais termos da série de Fourier não levaram à mudanças nos resultados. Tal fato acaba não sendo evidenciado nas outras direções porque o efeito da compressão mostra-se dominante para a direção axial. Nota-se também que, sem atrito o deslocamento circunferencial é da mesma ordem que o deslocamento radial, porém ambos são ordens de grandeza menor que o axial imposto.

Já no caso em que o atrito com valor 0.1 é considerado, há uma modificação nos deslocamentos, como visto nas figuras 4.43 a 4.45.

Figura 4.43: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.44: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.45: Comparação entre o caso usando os elementos propostos e o ANSYS considerando atrito. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.

Nesse caso observa-se que o comportamento radial é mantido, seja para o ANSYS, seja para o modelo proposto. Já o deslocamento circunferencial diminui drasticamente para ambos os modelos. Durante as fases de testes foi possível notar que o método (tanto o implementado, quanto o presente no ANSYS) mostra-se extremamente sensível e, variando a penalidade, ambos variam a forma do deslocamento drasticamente. A ordem de grandeza é, porém, a exibida no gráfico 4.44. Já o deslocamento axial mostra-se mais próximo de uma reta, diferentemente do caso sem atrito. Tal efeito se deve ao atrito entre a hélice e a capa.

Por fim, os resultados do modelo proposto são reapresentados nas figuras 4.46 a 4.48. comparando-se as duas situações: com e sem atrito.

Figura 4.46: Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento radial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.47: Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento circunferencial da hélice em função da coordenada axial.

Figura 4.48: Comparação entre os casos com e sem atrito utilizando o modelo proposto. Deslocamento axial da hélice em função da coordenada axial.

Nesses gráficos fica claro o efeito do atrito no problema. Enquanto não há variação no comportamento radial (o que é esperado, dado que em nenhum ponto o atrito aparece nessa direção durante a formulação), ele modifica muito os resultados nas demais direções. Como comentado anteriormente, o deslocamento circunferencial é reduzido em duas ordens de grandeza, ao passo que na direção axial a influência é demonstrada pela modificação de um comportamento oscilatório (condizente com uma hélice livre) para um deslocamento quase-linear.

4.4.5 Formulação de forças

Nessa seção procura-se exibir o funcionamento da formulação de forças para o elemento cilíndrico, uma vez que a representação de forças para o elemento helicoidal dá-se de maneira direta, exceto no caso do momento. Nesse caso a correção é simples, devendo-se levar em conta a coordenada circunferencial na qual o nó se encontra. Já o caso da capa plástica, por não exibir graus de liberdade de rotação, possui maior complexidade na representação de momentos. Para verificar a validade da formulação, simulou-se um caso de uma capa plástica com as propriedades exibidas na tabela 4.20.

Tabela 4.20: Dados da capa plástica para a formulação de forças.

<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>
Raio médio:	40 <i>mm</i>
Espessura:	2,0 <i>mm</i>
Comprimento:	300 <i>mm</i>
Módulo de Elasticidade:	1400 <i>MPa</i>
Coeficiente de Poisson:	0,45

Os casos estudados foram: tração de 100*N*, e momentos de 10*kN · mm* tanto na direção *x* (fletor) quanto na direção axial *z* (de torção). Como condições de contorno, engastou-se a extremidade inferior da capa, enquanto os carregamentos anteriormente descritos foram aplicados na extremidade superior.

Para o caso de tração, os deslocamentos da seção obtidos são exibidos na tabela 4.21.

Tabela 4.21: Resultados para aplicação de força de tração de $100N$ na extremidade superior da capa cilíndrica.

<i>Deslocamento na seção</i>	<i>Modelo (mm)</i>	<i>ANSYS (mm)</i>
Δ_r	-0.002946	-0.002623
Δ_θ	0	0
Δ_z	0.041960	0.042307
ϕ_x	0	0
ϕ_y	0	0
ϕ_z	0	0

Observa-se que os resultados encontram-se bem próximos em todas as direções. O caso para momento de torção é exibido na 4.22.

Tabela 4.22: Resultados para aplicação de momento de torção de $10kN \cdot mm$ na extremidade superior da capa cilíndrica.

<i>Deslocamento na seção</i>	<i>Modelo (mm)</i>	<i>ANSYS (mm)</i>
Δ_r	0	0
Δ_θ	0.30822	0.316803
Δ_z	0	0
ϕ_x	0	0
ϕ_y	0	0
ϕ_z	0	0

Da mesma forma, os resultados entre os dois modelos mostram-se bem satisfatórios.

O caso do momento de flexão (direção x) é modelado através do primeiro termo da série de Fourier. Para mostrar a efetividade da formulação, o deslocamento radial e circunferencial são tomados no centro do cilindro ($z = 150mm$), já que não há deslocamento nessas direções na extremidade superior. Já o deslocamento axial é máximo no topo e, por isso, foi tomado para a comparação. Os gráficos das figuras 4.49 a 4.51 exibem esses deslocamentos comparados com os obtidos pela simulação numérica utilizando o ANSYS.

Figura 4.49: Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento radial em função da coordenada circunferencial da capa para $z = 150mm$.

Figura 4.50: Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento circunferencial em função da coordenada circunferencial da capa para $z = 150\text{mm}$.

Figura 4.51: Comparação entre ANSYS e modelo proposto do deslocamento axial em função da coordenada circunferencial da capa para extremidade superior.

5 DESCRIÇÃO DA FERRAMENTA DO TIPO CAD

Esse capítulo procura mostrar os detalhes do *software* confeccionado durante o trabalho, que consiste em uma ferramenta computacional tipo CAD (do inglês, *Computer Aided Design*). Essa foi o resultado da busca por uma maneira de auxiliar o projetista durante o processo de concepção do cabo, facilitando a criação de novos *designs* e, aliado ao modelo, prever o comportamento do cabo como um todo. Durante esse capítulo serão exibidos o processo de criação e suas etapas, bem como as técnicas utilizadas durante esse projeto, procurando exibir uma descrição breve do procedimento e redirecionar o leitor caso se interesse pelo assunto.

A ferramenta foi dividida em módulos que servem como módulos independentes, uma vez escrita a interface adequada de entrada ou saída desejados. O módulo bidimensional serve como entrada de dados para a criação de cabos umbilicais e tubos flexíveis, ao passo que o módulo tridimensional serve para a visualização tridimensional do cabo e dos resultados obtidos com o modelo. Para a exibição do funcionamento do programa, alguns exemplos foram feitos e são exibidos após as especificações.

5.1 Etapas de Projeto

Um projeto de *software* bem feito respeita algumas etapas básicas, independentemente da metodologia utilizada. O que varia entre essas é a quantidade de tempo e informação recolhidas em cada etapa. Segundo PRESSMAN (2005), são:

- **Comunicação e Planejamento:** nessa etapa procura-se ouvir a necessidade do cliente, bem como planejar qual a melhor abordagem e metodologia a ser utilizada no projeto. Tal etapa define os rumos a serem tomados em seguida.
- **Engenharia de Requisitos:** nessa etapa, que pode ser considerada como parte do planejamento, são levantadas as funcionalidades desejadas do *software*, além de restrições e necessidades do cliente que precisam ser contempladas.

- **Modelagem:** uma vez levantadas as necessidades do cliente e definida a metodologia, passa-se para a modelagem do sistema. Nessa etapa, a descrição do *software* ainda é feita de maneira abstrata, em mais alto nível.
- **Construção:** essa etapa consiste na codificação em si. Normalmente é a etapa que demanda um grande tempo mas, dependendo da metodologia utilizada, esse tempo pode ser minimizado. Ainda assim, é uma das etapas mais trabalhosas do projeto.
- **Entrega:** etapa na qual o *software* concluído é entregue ao cliente. Dependendo da metodologia, pode ser versões parciais ou ainda versões que exibam determinada funcionalidade para avaliação.

No projeto do *CAD* proposto, a parte de comunicação e planejamento foi a definição do problema e qual a solução para o mesmo. Como se trata de um projeto de pesquisa, não há um cliente específico, mas ainda assim procurou-se focar como público-alvo os projetistas e pesquisadores que atuam na área. Para melhor descrever as necessidades, foi feito um levantamento dos requisitos. Esse levantamento, bem como uma explicação do que são os requisitos é vista na próxima seção. Em seguida, passou-se para a modelagem do sistema, que é feita através de diagramas que permitem a descrição em alto nível do *software*. Como cada tipo exibe o projeto sobre ângulos diferentes, um complementa a informação que o outro apresenta e, por isso, diferentes abordagens foram empregadas. Por fim, passou-se a etapa de construção e o resultado final pode ser visto no final desse capítulo.

5.2 Requisitos

Como etapa inicial, procurou-se levantar quais os requisitos que a aplicação deveria seguir, bem como as restrições que a ela se aplicam. A engenharia de requisitos abrange o levantamento de todas as funcionalidades desejadas no *software* pelo cliente. Tal processo é de extrema importância na confecção de um produto de qualidade, já que atua como guia e limitante no sentido de definir as possíveis práticas a serem empregadas (sendo que a escolha da prática a ser adotada depende de vários fatores, dentre eles a equipe). Também age na definição de ferramentas, linguagens, documentação e na própria interação com o cliente até a entrega do produto.

O foco desta disciplina é descrever o objetivo do produto de tal maneira que todos os envolvidos (sejam eles clientes, desenvolvedores, engenheiros ou outros profissionais) o compreendam. Tal efeito é alcançado expondo os requisitos de maneira clara, organizada e classificada. Existem várias formas na qual pode-se expressar os requisitos, variando de acordo com a necessidade dos envolvidos. Uma possível divisão é a vista em SOMMERVILLE (2007):

- **Requisitos do Usuário:** são declarações, em linguagem natural e também em diagramas, listando as funções desejadas pelo usuário.
- **Requisitos de Sistema:** estabelecem detalhadamente as funções e restrições do sistema.
- **Especificação do Projeto de *software*:** é uma descrição abstrata do projeto de *software*, servindo como base para um projeto e especificação mais detalhados.

Além disso, os requisitos também podem ser classificados quanto ao tipo (adaptado de SOMMERVILLE (2007)):

- **Requisitos Funcionais:** são declarações de quais funções o sistema deve executar, de como o sistema deve reagir a entradas específicas e de como deve se comportar em determinadas situações.
- **Requisitos Não Funcionais:** são restrições sobre os serviços ou as funções oferecidos pelo sistema. São ligados a características internas, não externadas pelo *software*.
- **Requisitos de Domínio:** são requisitos que se originam do domínio da aplicação (como por exemplo o sistema operacional) e refletem características desse domínio. Podem ser requisitos funcionais ou não funcionais.

Essa divisão facilita na organização dos requisitos. Esses, por sua vez, são de extrema importância para descrever o que se deseja obter com o *software*. Quanto mais bem detalhado os requisitos são, mais robusto será e menos retrabalho ter-se-á. Para obter mais informações acerca do assunto, sugere-se o livro WIEGERS (2003), que trata de requisitos de *software* de forma bastante detalhada.

Para determinar os requisitos específicos para o *software* em questão, procedeu-se a um levantamento entre as pessoas do grupo de pesquisa e alguns projetistas, que fazem parte do grupo alvo de utilização. Procurou-se levantar as maiores preocupações desse grupo, como a facilidade de criar e modificar novas configurações de cabos. Percebeu-se que a inclusão de ferramentas para verificar o cabo tridimensionalmente (já que existem possibilidades de certas interferências que só são vistas em três dimensões) e para visualizar resultados da simulação numérica é outra necessidade dos usuários.

Essas necessidades que o sistema deve atender foram classificadas em funcionais, não-funcionais ou de domínio, conforme as definições anteriores. Fez-se ainda a divisão de quais requisitos são pertinentes à interface, já que esta é uma das grandes preocupações do projeto. Essa separação é feita apenas para dar maior clareza (já que os requisitos de interface são requisitos funcionais). São:

- Requisitos Funcionais

- Permitir a construção do cabo usando camadas.
- Permitir ajuste de elementos tanto automático quanto manual.
- Permitir modificações de forma simplificada (usando, por exemplo, posição e redimensionamento).
- Permitir re-arranjo de elementos.
- Permitir refazer e desfazer operações.
- Incluir ferramentas como copiar e colar.
- Incluir ferramentas para controle de posição (translação, por exemplo) e espaçamento.
- Incluir ferramentas para importar e exportar arquivos *XML*, bem como salvar e ler arquivos próprios (binários).
- Incluir exemplos de cabos.
- Executar funções de *Zoom*, *Pan* e *Rotate*.
- Possibilitar a visualização tridimensional do cabo projetado como sólido, estrutura de arames ou ambas.
- Permitir carregar resultados da simulação de um componente.
- Exibir as deformações com escala de cores correspondente.

- Permitir a animação dos resultados, com opções para pausar ou interromper a animação.
 - Permitir a exibição usando efeitos de estereoscopia.
 - Permitir a visualização com efeitos de iluminação.
 - Permitir a utilização de texturas para os componentes.
- Requisitos Não-funcionais
 - Ser fácil de usar: poucas horas de treinamento permitem o uso das funções básicas como inclusão / exclusão / alteração de elementos, reposicionamento desses, visualização tridimensional, abertura e visualização dos resultados, entre outras.
 - Evitar falhas: o *software* encarrega-se de descrever bem o problema, apontando o ocorrido e evitando que este se encerre de maneira não esperada.
 - Requisitos de Interface
 - Permitir entrada de dados através de teclado e mouse (forma de comando de texto e gráfica).
 - Permitir que barras de ferramentas possam ser ocultadas e reposicionadas.
 - Exibir mensagens de erro claras e elucidativas.
 - Permitir ao usuário visualizar e interagir com o cabo projetado.
 - Permitir ao usuário visualizar a estrutura do cabo, separando as instâncias em camadas.
 - Alterar opções do programa como cores do fundo e possibilitar o controle da qualidade dos gráficos.
 - Requisitos de Domínio
 - O sistema operacional alvo é o *Microsoft Windows*.
 - A linguagem de programação a ser utilizada é o *C#*.
 - O código deve seguir normas de padronização.

Como dito anteriormente, foram utilizadas algumas abordagens para melhor esclarecer os requisitos. Porém, os de domínio são feitos com base no local de utilização ou alguma exigência do cliente.

A linguagem escolhida é o *C#* porque a plataforma de destino é o *Microsoft Windows*. Essa se mostra uma linguagem de desenvolvimento que apresenta grande facilidade para criar interfaces intuitivas e de fácil utilização no sistema operacional alvo, ao passo que outras linguagens possuem alguns inconvenientes. A seguir comenta-se sobre essa escolha e duas possíveis alternativas (*C++* e *Java*).

O *C#* mostra-se como uma linguagem voltada para aplicações *Windows*. Para tal, existem os *Forms*, tecnologia que foi introduzida na primeira versão do *.NET Framework*. Já o *WPF* (acrônimo para *Windows Presentation Foundation*) é uma alternativa para a criação de interfaces que foi incluída na versão 3.0 do *Framework*. Um ponto a ser ressaltado é que a linguagem está sempre recebendo atualizações e acréscimo de funcionalidades dadas pelas diferentes versões do *.NET Framework*, que se encontra atualmente na versão 4.5.

O *C++* é uma linguagem de alto desempenho, porém é demasiadamente complicado quanto trata-se de criar interfaces, mesmo quando se utiliza as bibliotecas *MFC* (acrônimo para *Microsoft Foundation Classes*), que em determinado momento foi abandonado pela *Microsoft*, em favorecimento dos *Forms* (utilizado no *C#*). Com o lançamento do *.NET Framework* 3.0, voltou-se atrás, incluído-o novamente. Nesse interim, criou-se o *Managed C++*, que é uma linguagem mais complexa de ser utilizada, e que acabou não agradando os desenvolvedores.

O *Java* é uma linguagem que torna fácil a criação de interfaces, sendo aparentemente a escolha a ser adotada projeto, mas esta é uma linguagem interpretada e fortemente dependente da máquina virtual utilizada. Como se pretende criar um *software* apenas para o ambiente *Windows*, optou-se por uma linguagem de maior velocidade com a mesma facilidade na confecção da interface.

Outra dúvida que surgiu durante os requisitos (e suas iterações) foi qual a melhor tecnologia para visualização de elementos tridimensionais deveria ser empregada. Levando em conta a linguagem adotada, podem ser consideradas três opções: *Windows Presentation Foundation (WPF)*, *OpenGL* e *XNA*, que é uma implementação do *DirectX* para *C#*. Para a decisão, têm-se um conjunto de requisitos, exibidos a seguir:

1. *Integração com C#*: Tem-se a restrição de utilização dessa linguagem de programação para o desenvolvimento, sendo a linguagem utilizada no módulo de visualização bidimensional. Desta forma, a biblioteca gráfica deve possuir um meio de ser integrada ao *C#*.

2. *Alto desempenho*: A aplicação deverá utilizar os recursos gráficos da placa de vídeo para obter um maior desempenho, uma vez que estarão presentes formas complexas (com elevado número de vértices), além dos efeitos de iluminação e textura. Um processamento apenas por *software* tornaria a utilização da aplicação inviável.
3. *Permitir a utilização de diferentes tipos de materiais e aplicação de texturas*: deve ser possível utilizar diferentes tipos de materiais (especulares, emissivos, etc) e aplicação de texturas para que o cabo projetado seja representado da forma mais realista possível.
4. *Possibilidade de alterar a cor de cada vértice separadamente*: é necessário que seja possível a alteração da cor de cada vértice separadamente para a representação dos resultados de uma simulação.
5. *Permitir a criação de animações*: deve ser possível criar animações para visualizar deslocamentos calculados em uma simulação, de forma a proporcionar uma perspectiva real do comportamento do cabo sendo projetado. A animação deve, no entanto, ser implementada sem que exista perda de desempenho.
6. *Permitir incorporar efeitos estereoscópicos por cores*: é necessário ainda que possa ser criado o efeito de realidade virtual utilizando cores (em inglês *anaglyphs*) para propiciar ao usuário uma perspectiva mais real do cabo projetado.

Outros itens desejáveis, porém não imprescindíveis são:

7. *Fácil implementação e boa documentação da biblioteca*: deseja-se que a biblioteca tenha uma implementação razoavelmente simples e intuitiva, com vasta gama de referências para que seja possível a implementação de todos os requisitos.
8. *Possibilidade de customização da iluminação*: é desejável que se possa fazer uso de diferentes tipos de fontes luminosas, além da aplicação de *shaders*, permitindo um nível de realidade superior e um bom desempenho da aplicação. *Shaders* são uma parte da *pipeline* existentes nas placas gráficas que são responsáveis pelo cálculo da cor que preenche o polígono.
9. *Possibilidade de implementação de estereoscopia por frequência*: apesar da estereoscopia por cores ser um requisito, deseja-se que seja possível adotar uma tecnologia menos restritiva. Desta forma, é desejável que a biblioteca permita a implementação de estereoscopia por frequência, pois manteria total fidelidade às cores da cena e causaria uma melhor experiência de realidade virtual ao usuário.

Primeiro descrever-se-á cada uma das tecnologias, seus pontos fortes e fracos e em seguida essas serão comparadas para mostrar a escolha feita. A primeira a ser descrita é o *OpenGL*, seguida pelo *WPF* e por fim fala-se de *XNA*.

5.2.1 *OpenGL*

O *OpenGL* é uma ferramenta de alta performance para gerar desenhos tanto bidimensionais quanto tridimensionais, pertencente a *SGI* (acrônimo para *Silicon Graphics International*) e de código aberto.

Esta biblioteca possui implementação em *C++*, utilizando assim código não gerenciado. No entanto, é possível sua utilização com *C#* fazendo-se a importação das *DLLs* (do inglês *Dynamic Link Library*), mas devido ao grande número de funções existentes no *OpenGL*, este trabalho seria inviável de ser feito dentro do prazo determinado, tornando-se necessária a utilização de *frameworks* como, como por exemplo o *TAO Framework (2012)*.

Devido ao fato desta biblioteca ser feita nativamente em uma linguagem de mais baixo nível, ela possui acesso direto aos recursos gráficos de *hardware* (da placa de vídeo), tendo um desempenho bastante elevado. Por outro lado, a mesma possui uma implementação mais difícil quando comparada a soluções feitas com código gerenciado. Deve-se levar em conta que, devido à sua grande popularidade e por já estar consolidada no mercado, possui uma documentação bastante completa incluindo diversos *sites* e livros sobre o assunto.

O *OpenGL* também possui recursos bastante completos no que diz respeito a iluminação, materiais e texturas. Com ele, é possível a definição de todos os tipos de fontes luminosas, além da definição de diferentes intensidades e cores para cada componente utilizada pelo algoritmo de *Phong* (algoritmo que simula o efeito da reflexão da luz em superfícies de maneira bem realista). Pode-se ainda definir materiais diferentes para a face frontal e posterior de cada polígono e, de maneira semelhante às fontes luminosas, é possível diferenciar as cores para os cálculos de reflexão ambiente, difusa e especular. Adicionalmente, é possível a criação de um material emissivo, ou seja, que possui luz própria.

Existe também a possibilidade de utilização de *shaders* específicos, produzidos em linguagem própria (a *GLSL* ou *OpenGL Shading Language*), o que permite uma grande customização e implementação de diversos efeitos diferenciados, além de possuir os algoritmos de *Flat Shading* e de *Gouraud* já implementados.

O *OpenGL* permite o controle de cores por vértices, facilitando assim a implementação da visualização de resultados da simulação do cabo. No entanto, apesar de ser uma biblioteca direcionada para jogos, que requerem a utilização de animações em grande escala, estas são feitas normalmente utilizando-se matrizes de transformação e não possui recursos nativos para a aplicação da animação necessária neste projeto, onde se tem diferentes deslocamentos para cada vértice separadamente sendo, portanto, necessário o cálculo manual dos vértices em cada momento da animação.

Como deseja-se incorporar efeitos de realidade virtual (estereoscopia) na modelagem tridimensional, é fundamental que o *software* seja criado utilizando uma plataforma que suporte este tipo de aplicação. Aplicando efeitos de transparências e sobreposição de duas imagens, vistas de pontos diferentes, é possível a criação de estereoscopia por cores. Além disto, o *OpenGL* também possui uma biblioteca de alto desempenho para realização de estereoscopia por frequência, conhecida por *OpenGL Performer*, que é comercializada pela *SGI*. Essa biblioteca é um conjunto de ferramentas direcionadas para a implementação de aplicativos de realidade virtual, com bibliotecas para desenvolvimento nas linguagens *C* e *C++*, sendo que no caso de sua utilização em *C#*, seria necessária a importação das funções a partir de bibliotecas de vínculo dinâmico. Esta ferramenta é compatível com os sistemas operacionais *IRIX*, *Linux* e *Windows*, como pode ser visto em Silicon Graphics, Inc. (2004).

5.2.2 *Windows Presentation Foundation*

O *Microsoft Windows Presentation Foundation* (*WPF*) foi inicialmente desenvolvido para programação de interface de aplicativos para o *Windows Vista* e *Windows 7*, porém também pode ser executado em versões anteriores desse sistema operacional, uma vez que o *WPF* é parte integrante do *.NET Framework 3.0* e posteriores, sendo necessário, apenas, a instalação deste pacote.

Esta ferramenta possui duas principais interfaces de programação relacionadas, sendo possível escrever programas totalmente em *C#*, ou uma nova linguagem baseada em *XML* chamada *Extensible Application Markup Language* (*XAML*, pronunciada “zammel”), podendo ainda ser utilizada as duas formas de programação os mesmo tempo, fazendo parte do código em *C#* e parte em *XAML* (Petzold (2006)).

O *WPF* é direcionado para a criação de interface de aplicativos, porém possui diversas ferramentas para desenhos tridimensionais. Devido ao fato desta linguagem não fazer utilização dos recursos gráficos da placa de vídeo diretamente, tendo grande parte

de sua implementação feita em *software*, apresenta um desempenho inferior quando comparado às que utilizam-se do *hardware*, tornando o processamento de objetos complexos bastante custoso. Por outro lado, como esta ferramenta é parte integrante do *.NET Framework*, a implementação fica bastante facilitada, além de existir uma documentação completa disponibilizada pela *Microsoft*, bem como alguns livros tratando do assunto.

No *WPF* os materiais são aplicados ao objeto como um todo, permitindo apenas a definição de materiais diferentes para os lados frontais e posteriores. É possível a definição de materiais difusos, especulares e emissivos, sendo que no caso da utilização de iluminação ambiente, a cor é calculada baseada na componente difusa do objeto.

Existe ainda a implementação de todos os tipos de fontes luminosas. No entanto, diferentemente do *OpenGL*, cada fonte luminosa possui apenas uma cor, sem distinção entre suas componentes. Como o *WPF* não possui acesso à placa gráfica, outras customizações de cores e iluminações, como a implementação de *shaders*, não são possíveis.

Como os materiais são tratados em nível de objeto ao invés de vértice, não é possível a determinação da cor de cada vértice separadamente. Para contornar esta restrição, é possível a utilização de texturas e, ao criar uma textura com as cores desejadas, basta mapear um ponto da textura com o vértice correspondente.

Por outro lado, o *WPF* possui implementações prontas para a aplicação de animações, da forma necessária para a aplicação a ser desenvolvida, permitindo a animação de vértices independentemente, sem a necessidade de calcular manualmente todas as posições.

É possível ainda realizar no *WPF* modelos de realidade virtual utilizando polarização de imagens por cor. A figura 5.1 mostra um exemplo de aplicação desta técnica. Um contraponto é que não foi encontrada documentação para implementação de realidade virtual por frequência utilizando essa biblioteca, assumindo-se assim, para efeitos de decisão neste projeto, que não existe suporte para tal na biblioteca em questão.

Figura 5.1: Estereoscopia por cores utilizando WPF. *Fonte:* Petzold (2007).

5.2.3 XNA

O *XNA* é um *framework* integrante do pacote *XNA Game Studio*, distribuído gratuitamente pela *Microsoft*, que consiste em uma ferramenta gráfica direcionada para o desenvolvimento de jogos para *Windows* e *Xbox 360*. Anunciada pela primeira vez em 2006, está, atualmente, em sua versão 4.0, que inclui suporte para *Windows Phone 7*.

Este pacote gráfico vem a ser um substituto do *Managed DirectX*, que é uma versão do *DirectX* usando código gerenciado, sendo uma ótima alternativa para utilização junto ao *C#*. Como o *XNA* é baseado no *DirectX*, mostra-se uma opção de alto desempenho, com implementação facilitada.

Apesar disso, tem-se como desvantagem o fato de sua documentação ainda não se encontrar completa, já que se trata de uma ferramenta relativamente nova. As poucas referências que se encontram são principalmente fóruns de *internet*, que funcionam como fonte de informação não-oficial.

Para ter compatibilidade com o *Xbox 360*, o *XNA* não faz uso da *pipeline* fixa das placas gráficas, implementando, portanto, todos os recursos de iluminação e renderização por *shaders*. No entanto, possui uma classe que faz esta implementação de forma simplificada, simulando alguns dos recursos básicos, como a iluminação ambiente e direcional, além de permitir a definição de materiais difusos, emissivos e especulares. Outra possibilidade que esta classe permite é a coloração por vértices isoladamente.

Caso se deseje a utilização de outras fontes luminosas, como a luz pontual ou o *spot-light*, deve ser criado um *shader* específico. A implementação utilizando-se *shaders* torna a ferramenta totalmente flexível, permitindo a criação de diversos efeitos diferentes, e uma vez que são executados pelo processador gráfico, mantém-se um alto desempenho.

O *XNA*, tal como o *OpenGL*, não possui suporte direto para a animação da forma que é necessária para projeto, porém, possui a possibilidade de implementação manual da posição dos vértices em cada etapa da animação. Permite, ainda, a utilização de realidade virtual por cores, fazendo uso de transparências e sobreposição de imagens. Ele também possui suporte direto para implementação de realidade virtual por frequência.

5.2.4 Comparação entre as bibliotecas gráficas

Após análise dos recursos disponibilizados por cada biblioteca gráfica estudada, foi possível fazer uma comparação entre as tecnologias, levando em conta quais requisitos anteriormente descritos são atendidos por cada uma, conforme a tabela 5.1.

Tabela 5.1: Comparação entre bibliotecas gráficas.

<i>Biblioteca</i> \ <i>Requisitos</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>OpenGL</i>	o ⁽¹⁾	•	•	•	o ⁽²⁾	•	o ⁽³⁾	•	•
<i>WPF 3D</i>	•	-	•	o ⁽⁴⁾	•	•	•	-	-
<i>XNA</i>	•	•	•	•	o ⁽²⁾	•	o ⁽⁵⁾	•	•

Onde:

●: representa um requisito totalmente cumprido.

○: representa um requisito parcialmente cumprido ou que demanda um trabalho adicional.

-: representa um requisito não cumprido.

E ainda:

(1): A integração com C# é possível, porém existe a necessidade de importação de bibliotecas.

(2): A animação deve ser implementada manualmente, não possuindo recursos nativos para tal.

(3): Existe uma boa documentação, porém a implementação requer maior cuidado e é mais trabalhosa.

(4): A definição de cor de cada vértice não é suportada, devendo ser utilizada uma textura para simular tal efeito.

(5): O *XNA* é uma ferramenta de fácil implementação, porém possui pouca documentação e referências sobre o assunto.

Observando-se a tabela, pode-se verificar que o *WPF* não cumpre um requisito essencial referente ao desempenho, além de exigir um trabalho adicional para a apresentação de resultados de simulação, que requerem a definição de cores por vértices, e não possuir suporte para outros requisitos desejáveis. O *WPF* se demonstra uma ferramenta inviável para a utilização no módulo tridimensional.

O *OpenGL* e o *XNA*, ambos cumprem todos os requisitos básicos, apesar da necessidade de implementação manual de animações, porém, o *OpenGL* não possui suporte direto para utilização junto ao C#, sendo necessária a importação das funções, além de possuir uma implementação dificultada. Quando comparada ao *XNA*, esta mostra-se mais viável, já que se enquadra melhor no cumprimento dos requisitos.

5.3 Especificação

Para a especificação do *software*, utilizam-se de um conjunto de diagramas que facilitam a compreensão do mesmo por todas as partes envolvidas (sejam clientes, projetistas ou programadores), uma vez que a linguagem é gráfica e previamente definida. Tal conjunto é conhecido como *UML*, do inglês *Unified Modeling Language*. Aqui serão descritos brevemente os tipos de diagramas que foram de fato utilizados no processo: diagramas de fluxo de dados, casos de uso e diagramas de classe, redirecionando à fontes adequadas quando cabível. Para mais informações sobre a *UML*, indica-se a leitura de BOOCH, RUMBAUGH e JACOBSON (2005).

5.3.1 Diagramas de Fluxo de Dados

Diagramas de fluxo de dados (*DFD* ou *Data Flow Diagrams* em inglês) focam nas modificações sobre as entradas do sistema e nas operações que devem ser executadas para que ocorram essas alterações. Esses diagramas podem exibir o *software* como um todo ou podem mostrar parte do sistema, permitindo uma maior compreensão sobre o mecanismo de funcionamento do programa durante a fase de projeto. Na figura 5.2 têm-se os elementos utilizados nos diagramas de fluxos de dados.

Figura 5.2: Elementos de um diagrama de fluxo de dados (*DFD*).

O item (a) representa a entrada de dados, o item (b) as ações, o item (c) a saída, o item (d) o fluxo de informações e o item (e) a base de dados. A figura 5.3 exibe um diagrama de fluxo de dados denominado *DFD* nível 0, por ser o mais geral, enquanto a figura 5.4 exibe um diagrama nível 1 com uma base de dados, derivado do diagrama da figura 5.3).

Figura 5.3: Diagrama de fluxo de dados nível 0.

Figura 5.4: Diagrama de fluxo de dados nível 1.

O refinamento dos diagramas de fluxo de dados é feito até que a estrutura do programa fique compreensível para todas as partes envolvidas com o projeto do *software*, desde clientes até projetistas e desenvolvedores.

No atual projeto, dividiu-se os diagramas de fluxo de dados para cada módulo, facilitando a compreensão de cada parte. Esses diagramas são exibidos a seguir.

5.3.1.1 Módulo Bidimensional

Os diagramas de fluxo de dados mostram o fluxo de informação dentro do *software*. Tais diagramas podem exibir camadas mais profundas, sendo que uma das ações do primeiro diagrama gera um novo diagrama e assim por diante.

Para descrever o funcionamento do *software*, foram criados uma série de diagramas que deixam claro o fluxo de informações, bem como a estrutura de camadas adotada. O primeiro deles é exibido na figura 5.5.

Figura 5.5: Diagrama de fluxo de dados nível 0 do módulo bidimensional.

Nesse diagrama observa-se o sistema como um todo, com as entradas de dados (tanto via arquivo quando feita diretamente pelo usuário) e as saídas (o desenho bidimensional, as propriedades calculadas com o modelo e os dados a serem gravados em arquivos). A ação *Sistema CAD* é desmembrada em um novo diagrama, que pode ser visto na figura 5.6.

Figura 5.6: Diagrama de fluxo de dados nível 1 do módulo bidimensional.

Nesse, a ação *Sistema CAD* foi subdivida em uma nova ação denominada *Interface Gráfica* ou no inglês usando a sigla (*GUI - Graphic User Interface*) e em uma base de dados (*Repositório*). Novamente, cria-se um diagrama exibindo em detalhes a estrutura da interface gráfica (figura 5.7).

Figura 5.7: Diagrama de fluxo de dados nível 2 do módulo bidimensional. *Graphic User Interface*.

Observa-se que o sistema apresenta ações específicas para lidar com as diversas entradas, que são posteriormente consolidadas em *Entrada de Dados*. A ação *Gerenciador da Interface* faz a comunicação com o *Presenter*, repassando as informações a serem tratadas nesse e dele obtendo o necessário para a execução do programa. Há ainda a ação *Modelo Matemático*, que trata do modelo proposto anterior e o *Geração dos Gráficos Módulo 2D* que é responsável pela visualização do modelo bidimensional. Ainda observa-se a divisão da base de dados em *Modelo*, que é responsável pelo encapsulamento e *Structure* e *Storage*, sendo responsáveis pela descrição dos componentes e pela descrição das camadas do cabo, respectivamente. O diagrama da figura 5.8 exhibe as ações referentes ao *Presenter*.

Figura 5.8: Diagrama de fluxo de dados nível 2 do módulo bidimensional. *Presenter*.

Nesse diagrama observa-se o *Presenter*, que faz a comunicação entre os outros elementos que compõem o *software*. O *Núcleo do Presenter* é responsável por obter todas as informações e instruções necessárias e tratá-las. Essa é a ação que faz com que o programa funcione adequadamente e requer grande atenção quando da sua implementação.

5.3.1.2 Módulo Tridimensional

Foram construídos quatro destes diagramas para descrever o módulo tridimensional. Para facilitar a compreensão desses, um esquema de cores foi adotado e é mostrado na figura 5.9.

Figura 5.9: Legenda para os diagramas de fluxo do módulo tridimensional.

O primeiro, exibido na figura 5.10, mostra a estrutura do software como um todo.

Figura 5.10: Diagrama de fluxo de dados nível 0.

Neste diagrama, tem-se como entradas as ações do usuário, assim como uma entrada de dados para a geração do modelo a ser analisado e, como saída, a visualização gráfica tridimensional, objetivo principal do *software* a ser desenvolvido. Também se vê a ação denominada *Sistema CAD* que representa o sistema como um todo. Assim, percebe-se como o programa funciona, de uma maneira geral. Essa ação é expandida em um novo diagrama, exibido na figura 5.11.

Figura 5.11: Diagrama de fluxo de dados nível 1.

Neste novo diagrama tem-se a ação *Sistema CAD* subdividida em duas outras ações denominadas *Interface Gráfica*, responsável por gerar a interface gráfica para o usuário, e *Unidade de Processamento Gráfico*, a qual é responsável por fazer todo o processamento gráfico do modelo tridimensional. Criou-se ainda duas bases de dados principais, uma denominada *Modelo 2D e 3D*, a qual armazena todas as informações necessárias, seja tanto do modelo bidimensional, quanto do modelo tridimensional, e uma segunda base de dados (*Resultados de Simulações*) responsável por armazenar as informações dos resultados de uma análise de tensões e/ou deformações para que possa ser feita a visualização no modelo em três dimensões.

Novamente, cria-se um diagrama exibindo uma estrutura mais interna do *software*, de forma a detalhar a ação denominada *Unidade de Processamento Gráfico* como pode ser observado na figura 5.12.

Figura 5.12: Diagrama de fluxo de dados nível 2 (Unidade de Processamento Gráfico).

Pode se observar que a unidade de processamento gráfico possui basicamente três ações principais que deve ser capaz de executar. Primeiramente, a base de dados do modelo tridimensional deve ser gerada a partir do modelo bidimensional (ação *Geração do Modelo 3D*). Tendo esta base de dados gerada, a unidade deve ser capaz de tratar eventos de mudança da visualização atual do modelo, como rotações, arrastos, iniciar modo de

realidade virtual, dentre outros, e desta forma, gerar a visualização gráfica correspondente de acordo com o tipo de visualização selecionada.

Tendo a unidade de processamento gráfico devidamente descrita, fez-se um último diagrama de forma a detalhar a ação *Interface Gráfica*, como mostrado na figura 5.13.

Figura 5.13: Diagrama de fluxo de dados nível 2 (Interface Gráfica).

Neste último diagrama, a ação *Interface Gráfica* é descrita. Inicialmente, a entrada de dados é recebida por um gerenciador (*Gerenciador de Dados*), de forma a direcionar os diferentes tipos de dados que podem existir. No caso de ser recebido um dado de modelo, a ação passa para um gerenciador específico (*Dados do Modelo*), e após tratar o dado de entrada, o mesmo é armazenado na base de dados correspondente. Por outro lado, caso seja um dado de resultados de simulações, é enviado para o gerenciador de análises (*Dados de Simulação*), o qual é responsável por criar a base de dados *Resultados de Simulações*.

Para o tratamento das ações de usuário, tem-se um gerenciador específico (*Gerenciador de Ações do Usuário*). Para ações referentes a pedidos de análise de simulações e mudanças no tipo de visualização, as ações *Evento de Análise* e *Evento de Mudança de Visualização* são acionadas, respectivamente. Como todas estas ações requerem algum tipo de alteração na imagem atualmente exibida pelo *software*, a ação *Gerenciador de Visualização* é utilizada, a qual se relaciona com o módulo de processamento gráfico, enviando as especificações da visualização desejada e ao receber seu retorno, gera a saída desejada (*Saída Gráfica*).

5.3.2 Casos de Uso

Os casos de uso são definidos em BOOCH, RUMBAUGH e JACOBSON (2005) como “uma descrição para um conjunto de ações, incluindo variações, que o sistema executa para obter um resultado de um valor observável pelo ator. Graficamente, um caso de uso é representado por uma elipse”. Alguns conceitos são importantes quando se fala de casos de uso, sendo eles definidos e explicados mais claramente a seguir:

- **Nomes:** cada caso de uso deve possuir um nome que o distingue dos outros casos de uso. Um nome é uma ou poucas palavras que o caracterizem. É possível qualificar um caso de uso, especificando o pacote. Um exemplo típico pode ser visto na figura 5.14.

Figura 5.14: Diagrama esquemático do Caso de Uso.

- **Atores:** um ator representa um conjunto de papéis que o usuário pode ter quando interage com esses casos de uso. Em geral representa um ser humano, mas também pode representar um equipamento ou algum outro sistema que atua sobre o sistema. Normalmente, o ator é representado como na figura 5.15. Essa notação é a usual e indicada, mas quando o ator não é um ser humano, representa-se o ator como uma caixa.

Figura 5.15: Representação de um ator em um caso de uso.

Existem ainda possíveis relações entre os elementos anteriormente citados, como especializações (por exemplo, um tipo de ator como *Empregado*, que derive de um ator *Pessoa*, especializando esse último), dependências e relações (como quando um caso de uso se utiliza ou depende de outro). Essas relações são exibidas nos chamados diagramas

de caso de uso. Um exemplo de diagrama de casos de uso é exibido na figura 5.16. Nela, as setas indicam que *Adicionar Instância* e *Adicionar Camada* são especializações do caso *Adicionar Objeto*.

Figura 5.16: Exemplo de diagrama de caso de uso.

Esse tipo de diagrama é muito útil por exibir as relações e o comportamento do sistema, mas em determinadas situações é necessário conhecer detalhadamente o mecanismo do caso de uso, a interação do usuário no caso e por isso são utilizadas descrições formais, especificando o cenário, os passos a serem executados e possíveis exceções. Nessas, descreve-se com detalhes o que a ação pretende executar, quais os atores que agem direta e indiretamente, bem como todos os possíveis desdobramentos do cenário.

Comparando essa abordagem com a anterior, a dos diagramas de fluxos de dados, vê-se que ela serve para ter uma visão completa do *software*, principalmente da maneira com que este se comporta dadas as entradas do usuário, enquanto os casos de uso são outra abordagem que visa descrever esse comportamento (e possíveis exceções) de uma maneira mais formal, que permite ampliar um pouco o conhecimento do mecanismo de operação do *software*. Os casos de uso serão apresentados para cada módulo nos itens a seguir. O formato de descrição dos casos de uso, tanto para o módulo bidimensional, quanto o tridimensional é apresentado a seguir:

NOME DO CASO DE USO

<i>Ator Principal:</i>	Quem inicia a ação diretamente.
<i>Atores Secundários:</i>	Quem inicia a ação indiretamente.
<i>Objetivo no contexto:</i>	O que se pretende com a execução correta do caso de uso.
<i>Pré-condições:</i>	Condições que devem existir previamente para que o caso possa acontecer.
<i>Acionamento:</i>	Mecanismo que leva ao acontecimento do caso de uso.
<i>Cenário:</i>	Passos do caso de uso.
<i>Exceções:</i>	Possíveis exceções que possam ocorrer durante o caso.

5.3.2.1 Casos de Uso - Módulo Bidimensional

Nessa seção os casos de uso relativos ao módulo bidimensional serão descritos. Como dito, essa abordagem é complementar à anterior e descreve o comportamento do *software* de uma maneira mais formal, através de um texto, permitindo ampliar um pouco o conhecimento sobre o mesmo.

Na figura 5.17 é exibido o diagrama de casos de uso referente ao módulo do *CAD* bidimensional desenvolvido. A descrição detalhada desses pode ser vista no apêndice B.

Figura 5.17: Diagrama de casos de uso.

5.3.2.2 Casos de Uso - Módulo Tridimensional

Na figura 5.18 é exibido o diagrama de casos de uso referente ao módulo tridimensional desenvolvido. O apêndice C exibe a descrição detalhada desses.

Figura 5.18: Diagrama de casos de uso.

5.3.3 Diagramas de Classe

Os Diagramas de Classe são confeccionados uma vez que a definição das classes é concluída. O uso destes não é restrito à modelagem baseada em classes, sendo que, quando um *software* começa a ser confeccionado, criam-se diversos modelos e por último, parte-se para a confecção dos diagramas, que resultarão nas classes do *software* final. A figura 5.19 mostra os elementos mais utilizados em um diagrama de classes.

Figura 5.19: Elementos mais utilizados nos diagramas de classe.

O item (a) é a representação da classe. Essa é dividida em três regiões. Na região superior escreve-se o nome das classes, na intermediária os atributos (na figura *fields*) e seus modificadores de acesso (no caso da figura, os *Properties*) e na inferior os métodos com parâmetros e valor de retorno. A seta do item (b) indica uma relação entre classes, com a flecha indicando qual classe utiliza a outra, enquanto a seta do item (c) indica herança, sendo a ponta da flecha indicando a classe mãe. O item (d) indica interface; a ponta da seta aponta para a interface e a base está na classe que implementa essa, ao passo que o item (e) é a representação simplificada da interface.

Alguns outros elementos presentes são os *packages* (que nada mais são que caixas com abas, com o nome do pacote) e *enumerations* (que são similares às classes, mas possuem apenas duas regiões: nome e atributos, sendo os atributos as enumerações).

Utilizando-se das abordagens anteriores é possível descrever o *software* de uma maneira mais próxima à que será implementada. Com base nos diagramas de fluxos e cenários é possível criar os objetos necessários, bem como definir os mecanismos de comunicação e a base de dados. Cabe lembrar que ainda há um certo distanciamento da linguagem a ser empregada. Apesar disso, como se trabalha com classes, pressupõe-se que a linguagem deva possuir orientação a objetos.

O *software* desenvolvido foi estruturado em diversas bibliotecas, procurando utilizar o padrão de projeto do tipo *MVP* (do inglês *Model-View-Presenter*, um modelo em camadas que facilita a implementação e compartimentariza a informação), onde a base de dados não é acessada diretamente pela interface e esse relacionamento é gerenciado por uma camada intermediária. A figura 5.20, mostra o relacionamento entre as diversas bibliotecas criadas.

Figura 5.20: Diagrama de Dependências de Bibliotecas.

Primeiramente têm-se a biblioteca *FlexCAD.Library*, que possui itens diversos e comuns a todas as outras bibliotecas, não possui nenhuma lógica interna de processamento, e é referenciada pela demais bibliotecas.

A biblioteca *FlexCAD.Model.Storage* implementa a base de dados responsável pelo repositório do programa, com componentes e materiais.

A biblioteca *FlexCAD.Model.Structure* é responsável pela implementação da estrutura do cabo, com as camadas e as instâncias. Ambas as bibliotecas, juntamente com a *FlexCAD.Model*, implementam a base de dados do programa.

Esta base de dados é por sua vez utilizada pela biblioteca *FlexCAD.Presenter*, responsável por gerenciar e executar todas as ações do usuário, além de gerar os modelos tridimensionais.

Por último, tem-se a biblioteca *FlexCAD.Interface*, que implementa a interface com o usuário, não possuindo nenhuma lógica de processamento, sendo que apenas envia ações para a camada de apresentação processá-la. Adicionalmente, foi criada a biblioteca *FlexCAD.Interface.CustomControls*, que apenas implementa controles customizados necessários para a interface.

Para deixar mais claro como essa estrutura funciona, os *namespaces* *Model*, *Storage* e *Structure* serão apresentados a seguir com mais detalhes.

Para atender os requisitos de flexibilidade necessários, recorreu-se a uma estrutura composta por duas bases (estrutura essa explicada mais a diante). De forma resumida, o acesso a essas bases é feito pela classe *Model*, o armazenamento dos componentes e materiais é feito por *Storage* e as camadas e instâncias pelo *Structure*. A figura 5.21 exibe o diagrama de classes da base de dados.

Figura 5.21: Estrutura de dados do Programa.

Nessa mesma figura observa-se uma descrição básica das classes *Structure* e *Storage*. Cada uma delas têm como variáveis coleções de classes abstratas, que servem para a implementação de diversos tipos de componentes, materiais e instâncias. A figura 5.22 exibe o *Storage* e a figura 5.23 exibe o *Structure*.

Figura 5.22: Base de dados *Storage*.

Figura 5.23: Base de dados *Structure*.

5.4 Descrição da Ferramenta

Nessa seção descreve-se detalhes e exemplos da ferramenta em si. O primeiro tópico mostra a estrutura de dados, que é o que prove as características de flexibilidade e generalidade desejadas. Os demais tópicos mostram exemplos de aplicação, bem como detalhes pertinentes aos módulos bi- e tridimensional do *software*.

5.4.1 Estrutura de dados

Para descrever a estrutura de dados adotada, exibe-se a lógica que levou à solução. O problema que foi resolvido era como obter uma estrutura de dados ao mesmo tempo genérica, que permita a inclusão de novos componentes sem grande esforço, com reusabilidade de elementos?

Pensou-se em duas soluções para resolver esse problema. São elas:

Estrutura de duas listas ligadas Nessa estrutura cogitou-se utilizar uma lista de camadas, para servirem como recipientes para os componentes. Assim, cada item da lista conteria uma nova lista com os componentes, formando o cabo completo. A figura 5.24 exemplifica essa linha de raciocínio.

Figura 5.24: Primeira possível estrutura de dados.

Essa estrutura apresenta como principal vantagem o fato de ser de fácil compreensão e intuitiva. Porém ela apresenta desvantagem quando há a necessidade da criação de componentes idênticos (mesmas dimensões, características geométricas e material). Isso é observado, por exemplo, em camadas com várias mangueiras, muito comuns em cabos umbilicais. Para sua implementação, um simples conjunto de vetores ou listas é indicado.

O fato desta estrutura não ser a escolhida, apesar da facilidade que ela proporciona é a falta de compromisso com a flexibilidade. Pensando em melhorar essa estrutura, atendendo aos critérios de flexibilidade, chegou-se à estrutura vista no próximo item.

Estrutura do tipo Repositório - Instâncias Nessa solução, busca-se resolver a limitação encontrada na estrutura anterior. Para tal, decidiu-se incorporar duas base de dados ao programa: uma que armazena os componentes e materiais e outra que armazena as instâncias desses componentes. Essa estrutura pode ser vista esquematicamente na figura 5.25.

Figura 5.25: Estrutura de dados base.

A ideia desta estrutura é bem simples: os dados são distribuídos em duas bases de dados. A primeira armazena os componentes e materiais e a segunda instâncias dos componentes. A vantagem desse método é que é possível reutilizar componentes já criados. Por exemplo, um cabo umbilical típico possui de 6 a 10 mangueiras idênticas cuja única diferença é a sua posição no cabo. Esse método porém tem como desvantagem a dificuldade de compreensão e manutenção. Apesar da complexidade, essa estrutura atende os requisitos de projeto e, por isso, foi empregada.

Apesar da ideia simples, convertê-la em uma estrutura computacional não é uma tarefa trivial. A figura 5.26 exhibe como esta foi implementada.

Figura 5.26: Detalhamento da estrutura de dados.

A grande dificuldade está na relação entre os elementos das duas bases. Por exemplo, um componente precisa de um material descrito na lista de materiais; ao mesmo tempo, a instância depende de um certo componente e, para a visualização desse, algumas propriedades do material (como cor, por exemplo) necessitam ser obtidas durante o desenho da instância de um certo componente. Por outro lado, essa estrutura permite a inserção de um novo tipo de elemento em pouco tempo com praticamente nenhuma alteração no código, somente a inclusão da classe, dada as ferramentas utilizadas. Um exemplo que está previsto é incorporar mangueiras de aço inox reforçadas, que são utilizadas nos *Steel Tube Umbilicals - STUs* no lugar de mangueiras poliméricas. Esse tipo de elemento pode ser facilmente incorporado ao código devido à adoção dessa estrutura.

5.4.2 Exemplo de aplicação do Módulo Bidimensional

Aqui mostra-se o processo de criação de um cabo partindo de um arquivo novo. A figura 5.27 exibe a tela inicial do programa após a operação para criar um novo projeto.

Figura 5.27: Janela inicial do programa com caso vazio criado.

A seguir, definem-se os materiais, como feito na figura 5.28. Pode-se adicionar diversos materiais de uma única vez mas a criação de um componente demanda a existência de pelo menos um material. Os materiais são adicionados através do botão *Add Material* da barra repositório. Na figura é possível ver a barra de propriedades, na qual as características (tanto geométricas quanto físicas) do material são definidas.

Figura 5.28: Adicionando materiais ao projeto.

O próximo passo é adicionar os componentes ao repositório, como pode ser visto na figura 5.29. Vê-se que apenas um conjunto pequeno de componentes necessita ser criado, como um tendão de uma camada de armadura ou uma mangueira, apesar de o cabo ser composto por vários desses elementos. A criação desses é feita utilizando o botão no repositório (*Add Component*). Para alterar a propriedade de qualquer elemento (seja materiais, componentes, camadas e instâncias), apenas seleciona-se o elemento desejado dentro da barra de ferramentas repositório ou na estrutura do cabo (*Cable tree*). Já as propriedades são exibidas na barra *Properties*, permitindo a alteração das mesmas.

Figura 5.29: Adicionando componentes ao projeto.

Define-se então as camadas, que abrigam as instâncias. Eles possuem como propriedade o material do preenchimento (*Filler*), além das dimensões. Pode-se depois adicionar as instâncias dos componentes às camadas previamente criadas. O processo é repetido até que se complete o cabo. O cabo completo é visto na 5.30.

Por fim, gera-se a visualização tridimensional – que será vista com mais detalhes no próximo tópico – como visto na figura 5.31.

Figura 5.30: Projeto com instâncias dos componentes já arranjadas.

Figura 5.31: Visão tridimensional do cabo projetado.

5.4.3 Exemplos de componentes no Módulo Tridimensional

Para a geração tridimensional dos componentes, optou-se pela utilização das técnicas de arrasto e revolução. Esta opção foi tomada devido à natureza dos componentes presentes em cabos umbilicais, como as mangueiras, por exemplo, que são fabricadas por extrusão e dispostas em helicoides, permitindo a utilização da técnica de arrasto de forma a gerar o sólido de forma simplificada.

Para a geração tridimensional das capas plásticas, foi utilizada a técnica de revolução, e o resultado obtido pode ser verificado na figura 5.32. Este componente também poderia ter sido gerado a partir de um arrasto, porém, devido ao modelo utilizado para a simulação dos componentes, optou-se por utilizar a revolução, pois esta permite uma maior fidelidade quando o *software* é utilizado em modo de visualização de resultados de simulação.

Figura 5.32: Exemplo de capa plástica gerada por revolução.

Para os demais componentes, optou-se pela utilização da técnica de arrasto. O exemplo de uma armadura helicoidal gerada pelo *software* pode ser visualizada na figura 5.33.

Figura 5.33: Exemplo de armadura helicoidal gerada por arrasto.

No caso das armaduras helicoidais, o perfil utilizado pode ser um retângulo ou um círculo, dependendo do tipo de armadura (tipo este que pode ser *customizado* pelo módulo bidimensional do *software*), e deve ser arrastado por um caminho helicoidal. Semelhantemente, a implementação das mangueiras é dada pelo arrasto de um perfil em forma de anel. A figura 5.34 mostra o resultado gerado por esta operação.

Figura 5.34: Exemplo de mangueiras geradas por arrasto.

Por último, têm-se os sólidos complexos que englobam carcaças intertravadas e armaduras de pressão. Estes componentes possuem um perfil diferenciado que não é composto simplesmente por primitivas geométricas. A figura 5.35 mostra um exemplo de perfil de carcaça intertravada.

Figura 5.35: Exemplo de perfil da carcaça intertravada.

Tanto a carcaça intertravada quanto a armadura de pressão são geradas pelo arrasto de seus respectivos perfis por uma helicóide, da mesma maneira que foi apresentada anteriormente para as mangueiras e armaduras de tração. No entanto, estes sólidos podem ser considerados complexos pois envolvem um grande número de curvas em seu perfil, sendo necessário o cálculo de cada ponto de acordo com o tipo de segmento em que se encontra (reta ou curva), e ainda, com a mesma diferenciação, é necessário o cálculo da normal em cada ponto para que a iluminação se dê de forma realista. A figura 5.36 mostra um exemplo de carcaça intertravada gerada pelo *software*.

Figura 5.36: Exemplo de carcaça intertravada.

5.4.4 Exemplo de aplicação do Módulo Tridimensional

Para exibir as funcionalidades do módulo tridimensional, parte-se da visualização do cabo bidimensional, cujos procedimentos para obtenção foram anteriormente (tal cabo pode ser visto na figura 5.37).

Figura 5.37: Exemplo de seção transversal de um cabo obtida usando o módulo bidimensional.

A partir desta, gera-se a imagem tridimensional, levando em conta os efeitos dos ângulos de assentamento, como pode ser visto na figura 5.38. Essa cabo exibe um núcleo eletro-hidráulico, mangueiras e camadas de armaduras. Cabe ainda frisar que, para facilitar a visualização, o cabo é exibido com camadas de alturas diferentes.

Figura 5.38: Exemplo de cabo eletro-hidráulico com elementos básicos.

A seguir, algumas funcionalidades que estão presente no módulo tridimensional serão exibidas.

5.4.4.1 Efeitos de Iluminação

Como customização de iluminação, foram implementadas as opções de utilização de uma fonte de luz ambiente e de até três fontes de luz direcional. A figura 5.39 mostra a caixa de diálogo de configuração de iluminação.

Figura 5.39: Diálogo de configuração de iluminação.

A luz ambiente possui a configuração para alteração de sua cor e intensidade. As fontes de luz direcionais, além de poderem ser ativadas ou desativadas, possuem a possibilidade de alterar a cor e a intensidade das componentes difusa e especular separadamente, enquanto que a direção dos raios luminosos pode ser configurada facilmente pela seta no lado direito da caixa de diálogo.

5.4.4.2 Efeitos de textura

A figura 5.40 mostra como é feita a escolha da textura para aplicação no modelo tridimensional. É importante ressaltar que a seleção de uma textura não causa alterações no desenho bidimensional, que continua sendo desenhado utilizando a cor definida.

Figura 5.40: *ComboBox* para a escolha da textura.

A seleção de uma textura não é obrigatória, sendo que nesse caso é utilizada a opção *None* (que é a seleção padrão). O *software* possui texturas que podem ser úteis no projeto de um cabo umbilical ou tubo flexível, como diversos tipos de metais e plásticos.

Ao ser gerado um elemento com uma textura definida, a mesma é mesclada com a cor do material, o que permite ainda uma maior flexibilidade, pois torna-se possível utilizar a textura com cores diferentes dependendo do desejado, além de uma maior fidelidade à realidade.

A figura 5.41 mostra um exemplo da geração tridimensional de um tubo flexível projetado pelo módulo bidimensional onde foram selecionadas texturas diversas em seus componentes.

Figura 5.41: Exemplo de tubo flexível com utilização de texturas.

5.4.4.3 Estereoscopia

Por fim, implementou-se o módulo de estereoscopia. Com a utilização de óculos específicos, permite ao usuário uma experiência tridimensional diferenciada, possibilitando a imersão tridimensional e a percepção mais realista de profundidade.

Uma das técnicas consiste na utilização de estereoscopia por frequência, na qual são geradas duas imagens (uma para cada olho) e são exibidas numa taxa de quadros de pelo menos 120 por segundo (sendo que cada quadro permanece no mínimo 60 vezes por segundo). A figura 5.42 mostra um exemplo usando esse tipo de efeito.

Figura 5.42: As duas imagens do cabo eletro hidráulico visto em modo de realidade virtual por frequência (Cada foto é a vista de um olho).

A outra técnica empregada foi utilizando polarização por cores com a combinação Vermelho / Ciano. Desta forma, basta ao usuário utilizar óculos com filtros nestas cores para que possa visualizar corretamente o cabo. A figura 5.43 mostra um exemplo desta visualização.

Figura 5.43: Cabo eletro hidráulico visto em modo de realidade virtual por cores.

5.4.4.4 Visualização de resultados

Apresenta-se aqui como ficam resultados obtidos via simulação quando visualizados com o módulo tridimensional. Foram feitos alguns testes relativos à capa plástica, exibindo o campo de deslocamento nas direções axial, circunferencial e radial, além de uma animação da deformação do elemento. As figuras 5.44 a 5.46 mostram esses campos de deslocamentos e as figuras 5.47 a 5.49 os passos da animação da configuração deformada.

Figura 5.44: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Deslocamento radial.

Figura 5.45: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Deslocamento circunferencial.

Figura 5.46: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Deslocamento axial.

Figura 5.47: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 0% do deslocamento total.

Figura 5.48: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 50% do deslocamento total.

Figura 5.49: Exemplo de capa plástica com aplicação de pressão interna. Animação em 100% do deslocamento total.

6 CONCLUSÃO

Observa-se no decorrer do trabalho o enfoque em duas áreas distintas que se complementam: o desenvolvimento de um modelo e a construção de um *software*. Como a pretensão do trabalho é apresentar uma ferramenta capaz de propiciar ao projetista meios de descrever e simular diversas configurações de cabo, foi necessário um grande empenho em ambas as áreas.

O modelo mostra-se bom diante dos problemas simulados. Ressalta-se que um dos pontos altos dele é a inclusão tanto do contato tipo “*bonded*” (aquele no qual as superfícies estão unidas de tal forma que agem como se estivessem coladas) e também o do tipo que permite separação e leva em conta o atrito. O objetivo desse modelo era criar uma base sólida para que novos tipos de elementos possam ser incorporados mas, ao mesmo tempo, preocupou-se em construir um modelo que permitisse a simulação de um caso simplificado. Isso se reflete nos elementos apresentados e na formulação de forças, que possibilita uma comparação mais direta com casos reais. Assim, pode-se dizer que o objetivo da modelagem foi cumprido com êxito.

Já no que tange à parte computacional, procurou-se criar uma ferramenta que tornasse o trabalho de projeto de cabos umbilicais e tubos flexíveis mais simples. Buscou-se utilizar todo e qualquer recurso para que isso fosse alcançado. Como descrito no decorrer do trabalho, o arcabouço necessário para cumprir esse objetivo é extenso e demandou grande estudo e planejamento. O resultado final foi a criação de uma ferramenta robusta que se mostra intuitiva, fácil de usar e auxilia sobremaneira no projeto dessas estruturas.

Observa-se como contribuições a confecção desse novo modelo, que permite levar em conta fenômenos modelados apenas com simulações computacionais custosas. Apesar de ainda não ser possível simular todos os casos (pois certos elementos necessitam ainda ser modelados para que esse modelo sirva para todos os possíveis cabos), é possível incorporar alguns elementos equivalentes, como por exemplo cilindros para representar carcaças intertravadas, uma vez que o modelo permite que o material seja ortotrópico. É

possível ainda, levar em conta variações não-uniformes de pressão, uma vez que o mesmo é modelado usando séries de Fourier. O elemento de helicóide mostra-se robusto e diminui o custo computacional da simulação por levar em conta a curvatura e a tortuosidade. Os elementos de ligação e contato permitem simular o comportamento de um cabo considerando as iterações entre os elementos.

Já o *software* mostra-se uma ferramenta de extrema valia, seja na geração de configurações, seja na visualização tridimensional. Como dito no decorrer do texto, esses módulos não estão atrelados ao modelo apresentado. O módulo bidimensional pode ser utilizado como gerador de entrada para outro *software* ou ainda gerar instruções para fabricação, por exemplo. Já o módulo tridimensional pode ser utilizado tanto como um visualizador para esse cabo gerado no módulo 2D, permitindo visualizar eventuais problemas de sobreposição dos elementos, visualizar os resultados do modelo ou ainda como um pós-processador para resultados vindos de outros programas. A única ressalva é que, apesar dessa funcionalidade, existe a necessidade de escrever um pequeno código que faça a interface entre o *software* exibido aqui e os outros com os quais se deseja comunicar.

Assim, o objetivo de conseguir modelar e avançar na compreensão da mecânica interna de cabos umbilicais e tubos flexíveis, bem como gerar uma ferramenta que facilite a tarefa de projetar esses cabos foi alcançado. Deram-se alguns passos na direção desse aumento do conhecimento, mas ainda há um caminho a ser percorrido para que o problema seja por inteiro compreendido.

6.1 Trabalhos Futuros

Propõe-se como trabalhos futuros uma expansão do modelo, sendo que a principal contribuição seria a inclusão de um elemento do tipo mangueira. Esse elemento seria de certa forma uma mescla dos dois elementos já presentes, ou seja, um cilindro cujo eixo central está sobre uma curva com tortuosidade e curvatura. Esse tipo de elemento apresenta uma dificuldade intrínseca de modelagem, já que, diferentemente do elemento tridimensional para helicoides, deve levar em conta a seção transversal e características do material em vez de módulos de rigidez, pressões interna e externa atuantes, entre outros fatores.

Já na parte de *software* propõe-se, como trabalhos futuros, a inclusão de novos tipos de elementos, além da implementação de módulos de comunicação com outros programas que são utilizados na indústria. Isso aumentaria em muito as capacidades do *software* já existente. Outra adição seria a parte de visualização de resultados dos elementos descritos anteriormente, o que facilitaria no avanço da compreensão do problema de mecânica interna.

REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO. *Anuario Estatístico Brasileiro de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis*. Rio de Janeiro, 02 2010. MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA.
- API STANDARDS. *Recommended practice for flexible pipe*. 2006.
- BAHTUI, A.; ALFANO, G.; BAHAI, H. A multi-scale approach to the analysis of ultra deepwater unbounded flexible risers. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2009.
- BAHTUI, A.; BAHAI, H.; ALFANO, G. A finite element analysis for unbonded flexible risers under torsion. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 130, 2008.
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. 1037 p.
- BOOCH, G.; RUMBAUGH, J.; JACOBSON, I. *The Unified Modeling Language User Guide*. 2. ed. New Jersey: Addison Wesley, 2005.
- BOULOS, P.; ZAGOTTIS, D. L. *Mecânica e Cálculo: um curso integrado*. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. 719 p.
- CORRE, V. L.; PROBYN, I. Validation of a 3d-dimensional finite element analysis model of a deep water steel tube umbilical in combined tension and cyclic bending. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2009.
- CRUZ, F. *Análise estrutural de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.
- CUSTÓDIO, A.; VAZ, M. A nonlinear formulation for the axisymmetric response of umbilical cables and flexible pipes. *Applied Ocean Research*, v. 24, 2002.
- ESTALEIRO ATLANTICO SUL. *Estaleiro Atlantico Sul*. 02 2010. Disponível em: <<http://www.estaleiroatlanticosul.com.br/>>.
- FÉRET, J.; LEROY, J.-M.; ESTRIER, P. Calculation of stresses and slips in flexible armour layers with layers interaction. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*. [S.l.: s.n.], 1995. V - Pipeline Technology.
- GAY NETO, A.; CORREIA, R. P. *Ambiente De Análise De Risers Em Águas Ultraprofundas: Análise Estática, Pré E Pós-Processador*. 2006. Departamento de Engenharia Mecânica / Mecatrônica. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Monografia.

GIMENA, F.; GONZAGA, P.; GIMENA, L. 3d-curved beam element with varying cross-sectional area under generalized loads. *Engineering Structures*, v. 30, p. 404–411, 2008.

GIMENA, L.; GIMENA, F. N.; GONZAGA, P. Structural analysis of a curved beam element defined in global coordinates. *Engineering Structures*, v. 30, p. 3355–3364, 2008.

HARTE, A. M.; MCNAMARA, J. F. Modeling procedures for the stress analysis of flexible pipe cross sections. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 15, p. 46–51, 1993.

KNAPP, R. H. Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, v. 14, p. 515–529, 1979.

KNAPP, R. H.; LE, T. T.; CRUICKSHANK, M. J. Design methodology for undersea umbilical cables. In: *OCEANS '91. 'Ocean Technologies and Opportunities in the Pacific for the 90's'. Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 1319–1327.

LE, T. T.; KNAPP, R. H. A finite element model for cables with nonsymmetrical geometry and loads. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 116, p. 14–20, 1994.

LENCI, S.; CLEMENTI, F. Simple mechanical model of curved beams by a 3d approach. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 135, p. 597–613, 2009.

LEROY, J.-M.; ESTRIER, P. Calculation of stresses and slips in helical layers of dynamically bent flexible pipes. *Oil & Gas Science And Technology*, v. 56, n. 6, p. 545–554, 2001.

LEROY, J.-M.; PERDRIZET, T.; CORRE, V. L.; ESTRIER, P. Stress assessment in armour layers of flexible risers. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2010.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. On the love strain form of naturally curved and twisted rods. *Thin-Walled Structures*, v. 28, n. 3/4, p. 253–267, 1997.

LOVE, A. E. H. *A Treatise On The Mathematical Theory Of Elasticity*. 4. ed. New York: Dover, 1944.

MCIVER, D. B. A method of modelling the detailed component and overall structural behaviour of flexible pipe sections. *Engineering Structures*, v. 17, p. 254–266, 1995.

MERINO, H. E. M.; SOUZA, J. R. M.; MAGLUTA, C.; ROITMAN, N. On the coupled extensional-torsional response of flexible pipes. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2009.

MERINO, H. E. M.; SOUZA, J. R. M.; MAGLUTA, C.; ROITMAN, N. Numerical and experimental study of a flexible pipe under torsion. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2010.

MILLER-MCCUNE MAGAZINE. *Miller-McCune Magazine*. 02 2010. Disponível em: <<http://www.miller-mccune.com/politics/hurricanes-enter-the-offshore-oil-drilling-debate-4236/>>.

NAWROCKI, A.; MICHEL, L. A finite element model for simple straight wire rope strands. *Computer And Structures*, v. 77, p. 345–359, 2000.

O'BRIEN, P. *Current Riser & Subsea Technology Issues Being Addressed By MCS*. 2007. Disponível em: <<http://www.subseauk.org/files/subsol06/PatrickOBrien-MCS.ppt>>.

OUT, J. M. M.; MORGEN, B. J. V. Slippage of helical reinforcing on a bent cylinder. *Engeneering Structures*, v. 19, p. 507–515, 1997.

OWEN, D. G.; REUBEN, R. L.; CHEN, Z.; FEL, G. Some internal mechanical aspects of flexible pipes, cables and umbilicals for marine applications. *Marine Structures*, v. 5, p. 387–398, 1992.

PETROBRAS. *Petrobras S.A.* 02 2010. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br/>>.

PETROV, E.; GÉRADIN, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, v. 165, p. 43–92, 1998.

PETROV, E.; GÉRADIN, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 2: Anisotropic and advanced beam models. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, v. 165, p. 93–127, 1998.

PETZOLD, C. *Applications = Code + Markup: A Guide to the Microsoft Windows Presentation Foundation*. [S.l.]: Microsoft Press, 2006.

PETZOLD, C. *3D Programming for Windows: Three-Dimensional Graphics Programming for the Windows Presentation Foundation*. [S.l.]: Microsoft Press, 2007.

PRESSMAN, R. S. *Software Engeneering*. 6. ed. New York: McGraw Hill, 2005. 880 p.

PRYSMIAN CABLES AND SYSTEMS. *Umbilical Thermoplastic and Steel Tube*. 2007.

RAMOS JR., R. *Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica de são Paulo, 2001.

RAMOS JR., R.; PESCE, C. P. A consistent analytical model to predict the structural behavior of flexible risers subjected to combined loads. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 126, 2004.

RATTANAWANGCHAROEN, N.; BAI, H.; SHAH, A. H. A 3d cylindrical finite element model for thick curved beam stress analysis. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, v. 59, p. 511–531, 2004.

SAEVIK, S. A finite element model for predicting stresses and slip in flexible pipe armouring tendons. *Computer And Structures*, v. 46, n. 2, p. 219–230, 1993.

SAEVIK, S.; BRUASETH, S. Theoretical and experimental studies of the axisymmetric behaviour of complex umbilical cross-sections. *Applied Ocean Research*, v. 27, p. 97–106, 2005.

SANDHU J. S., S. K. A.; DAVIES, G. A. O. A 3-d co-rotational, curved and twisted beam element. *Computers And Structures*, v. 35, n. 1, p. 69–79, 1990.

SHIP TECHNOLOGY. *Anasuria is the world's largest newhull tanker-based FPSO*. 2010. Disponível em: <<http://www.ship-technology.com/projects/anasuria/anasuria5.html>>.

SILICON GRAPHICS, INC. *OpenGL Performer - Getting Started Guide 3.2*. [S.l.], 2004.

SOMMERVILLE, I. *Software Engineering*. 8. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2007.

SOUZA, J. R. M.; PINHO, A. N.; ELLWANGER, G. B.; LIMA, E. C. Numerical analysis of a flexible pipe with damaged tensile armor wires. In: *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. [S.l.: s.n.], 2009.

TAN, Z.; WITZ, J. A. On the flexural-torsional behavior of a straight elastic beam subject to terminal moments. *Transactions of the ASME*, v. 60, 1993.

TAO FRAMEWORK. *TAO Framework - An OpenGL implementation*. 2012. Disponível em: <<http://sourceforge.net/projects/taoframework/>>.

WIEGERS, K. E. *Software Requirements*. 2. ed. [S.l.]: Microsoft Press, 2003. 516 p.

WITZ, J. A. A case study in the cross-section analysis of flexible risers. *Marine Structures*, v. 9, p. 885–904, 1996.

WITZ, J. A.; TAN, Z. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. *Marine Structures*, v. 5, p. 205–227, 1992.

WITZ, J. A.; TAN, Z. On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. *Marine Structures*, v. 5, p. 229–249, 1992.

WITZ, J. A.; TAN, Z. Rotary bending of marine cables and umbilicals. *Marine Structures*, v. 17, n. 4, p. 267–275, 1995.

WRIGGERS, P. *Computational Contact Mechanics*. [S.l.]: Jo, 2002. 440 p.

YU, A.; FANG, M.; MA, X. Theoretical research on naturally curved and twisted beams under complicated loads. *Computer And Structures*, v. 80, p. 2529–2536, 2002.

ZHU, Z. H.; MEGUID, S. A. Analysis of three-dimensional locking-free curved beam element. *International Journal of Computational Engineering Science*, v. 5, n. 3, p. 535–556, 2004.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E SISTEMAS DE COORDENADAS DE VIGAS HELICOIDAIS

A.1 Introdução

Nessa seção serão discutidas formas de obtenção das equações de equilíbrio de vigas helicoidais, bem como dois sistemas de eixos utilizados para representar essas curvas: o triedro de Frénet e os eixos de Darboux-Ribaucourt. LOVE (1944) traz em seu livro uma dedução completa e detalhada das equações de equilíbrio, embora utilizando uma linguagem que dificulta a compreensão. Aqui, busca-se justamente deixá-los de maneira mais aprazível ao leitor. Cabe aqui uma breve nota histórica: apesar deste conjunto ser comumente conhecido como equações de Love, essas foram obtidas primeiramente por Clebsch e Kirchhoff.

Para a obtenção das equações de equilíbrio são necessárias as relações entre os eixos que descrevem os sistemas (principalmente as relações entre os eixos principais de flexo-torção da seção e o triedro de Frénet), bem como as relações das derivadas dos versores (uma vez que esses variam de seção para seção com relação à um referencial fixo). Busca-se então descrever esse sistema de eixos e as relações necessárias para a obtenção dessas equações. Esses passos estão descritos como mais detalhes nos próximos dois sub-tópicos.

Para finalizar, apresenta-se o sistema de eixos de Darboux-Ribaucourt, que é comumente empregado na obtenção de equações de equilíbrio em viga helicoidais quando há escorregamento, mostrando-se as diferenças entre este sistema e o triedro de Frénet.

A.2 Descrição dos Eixos Principais e Suas Relações

Inicialmente, será considerada uma barra prismática de eixo reto e sobre a qual não haja esforços atuantes, como na figura A.1. Nessa mesma figura ainda é exibido o eixo inercial, $OXYZ$.

Figura A.1: Barra na configuração inicial com eixo fixo ($OXYZ$) e na configuração deformada (indicada pelo índice 1).

Se a barra sofre flexão, os eixos centrados em O e C (ponto pelo qual passa o eixo da barra) não coincidirão necessariamente, pois o eixo central da barra pode ser uma curva qualquer no espaço. Nessa configuração, os três elementos (x, y, z) da configuração não deformada não necessariamente se mantêm ortogonais. Entretanto, é possível construir um novo sistema (x_1, y_1, z_1) tal que os vetores que o compõem sejam ortogonais. A origem desse sistema é C_1 , que é a nova posição de C . O eixo z_1 é definido pela tangente ao eixo central da barra no ponto C_1 , com orientação positiva dada pela direção em que a abscissa curvilínea aumenta quando se percorre o eixo central. Define-se o plano x_1z_1 utilizando o eixo x da configuração inicial. Como o eixo x está contido nesse plano, utiliza-se esse e z_1 para defini-lo e toma-se x_1 como o vetor perpendicular a z_1 contido no plano. Seu sentido pode ser escolhido arbitrariamente, desde que na definição de y_1 os vetores formem uma base positiva. O vetor y_1 pode ser obtido como produto vetorial entre os vetores x_1 e z_1 . Normalizando esses é possível escrever-se os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ da barra na condição deformada. Esses são os eixos principais de flexo-torção da barra.

Em seguida escreve-se o triedro de Frénet para o eixo principal. O vetor tangente coincide com o versor $\vec{k}$ já que são definidos da mesma forma. De posse da curva do eixo central é possível escrever-se o vetor normal à essa curva (já que este é o vetor perpendicular ao vetor tangente que aponta para o centro de curvatura) e o vetor binormal como o produto vetorial dos dois anteriores. Os três sistemas de eixos são exibidos na figura A.2, juntamente com o eixo central da barra.

Figura A.2: Sistemas de eixos fixo, de Flexão $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e triedro de Frénet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.

Os sistemas $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ não são necessariamente coincidentes e por isso define-se uma relação entre os sistemas. Dado que $\vec{k} \equiv \vec{t}$, os demais vetores são co-planares. Assim, podemos definir um ângulo entre os versores $\vec{n}$ e $\vec{j}$, como exibido na figura A.3.

Figura A.3: Detalhe da barra com eixos coordenados.

Assim, é possível escrever a relação entre os sistemas visto na equação A.1

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{Bmatrix} \text{ ou } \mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{N} \quad (\text{A.1})$$

Uma vez que foi definida uma relação entre os versores, pode-se chegar a relações entre esses e suas derivadas. Derivando a equação A.1 em relação à abscissa curvilínea s , tem-se:

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\mathbf{N} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{N}}{ds} \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ é dado pelas conhecidas relações de Serret-Frénet, como pode ser visto em Boulos e Zagottis (1991):

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \\ \frac{d\vec{t}}{ds} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \chi \\ -\tau & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{b} \\ \vec{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde χ é a curvatura e τ é a tortuosidade da curva.

Substituindo as equações A.4 e A.3 na equação A.2, obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{i}}{ds} \\ \frac{d\vec{j}}{ds} \\ \frac{d\vec{k}}{ds} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{d\theta}{ds} + \tau\right) & -\chi \sin \theta \\ -\left(\frac{d\theta}{ds} + \tau\right) & 0 & \chi \cos \theta \\ \chi \sin \theta & -\chi \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Essa equação matricial relaciona as os eixos principais de flexo-torção com suas derivadas. A expressão dada em A.5, pode ser encarada como uma rotação, uma vez que o tensor que fornece a relação é anti-simétrico. Podemos então definir um vetor curvatura, chegando à relação:

$$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \left(-\chi \cos \theta, \chi \sin \theta, \left(\frac{d\theta}{ds} + \tau \right) \right)$$

Assim:

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = \boldsymbol{\kappa} \wedge \mathbf{I}$$

A.3 Equações de Equilíbrio

Uma vez determinada as relações entre os versores e suas derivadas, é possível determinar-se as equações de equilíbrio. Consideremos o elemento infinitesimal da figura A.4. O elemento tem como esforços uma força e um momento resultante em cada seção transversal bem como forças e momentos distribuídos.

Figura A.4: Sistema de forças atuante em um elemento infinitesimal.

Calculando o equilíbrio de forças no elemento, tem-se:

$$-\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + \mathbf{f}(s(B) - s(A)) = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

Sabendo que $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \Delta\mathbf{R}$ e chamando a diferença entre as abscissas em A e B de Δs , a equação A.6 fica:

$$\Delta \mathbf{R} + \mathbf{f} \Delta s = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

Dividindo-se a expressão dada em A.7 por Δs , e tomando o limite para $\Delta s \rightarrow 0$, chega-se à:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

Levando em consideração que $\mathbf{R} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + T \vec{k} = \mathbf{Q} \mathbf{I}$, é possível escrever $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}$ como:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s} \mathbf{I} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial s} \quad (\text{A.9})$$

Aplicando A.5 em A.9 e substituindo o vetor obtido em A.8 chega-se às 3 primeiras equações de equilíbrio de uma viga curva sobre ação de um carregamento qualquer:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_x}{\partial s} - Q_y \kappa_t + T \kappa_y + f_x = 0 \\ \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x \kappa_t - T \kappa_x + f_y = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial s} - Q_x \kappa_y + Q_y \kappa_x + f_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

Agora, procedendo para o equilíbrio de momentos no elemento infinitesimal, obtém-se:

$$-\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_A \wedge -\mathbf{R}_A + \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{R}_B + \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} \Delta s + \mathbf{m} \Delta s = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

Lembrando que $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}$ e sabendo que $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \Delta \mathbf{M}$, chega-se à:

$$\Delta \mathbf{M} + \mathbf{r}_A \wedge -\mathbf{R}_A + \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{R}_B + \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} \Delta s + \mathbf{m} \Delta s = \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

Ainda, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \Delta \mathbf{r}$. Assim, tem-se:

$$\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta s} + \mathbf{r}_A \wedge -\mathbf{R}_A + (\mathbf{r}_A + \Delta \mathbf{r}) \wedge (\mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}) + \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} \Delta s + \mathbf{m} \Delta s = \mathbf{0} \quad (\text{A.13})$$

Dividindo-se a expressão por Δs e tomando o limite para $\Delta s \rightarrow 0$, observa-se que $\mathbf{r}_B \rightarrow \mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_A$. Dessa forma, a expressão A.13 fica:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{r}_A \wedge \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{f} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

Mas, observando A.8 e verificando que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \vec{k}$, pode-se chegar à equação de equilíbrio de momentos:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \vec{k} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

Sabendo que $\mathbf{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = \mathbf{GI}$, é possível escrever $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}$ como:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \mathbf{I} + \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial s} \quad (\text{A.16})$$

Aplicando A.5 em A.16 e substituindo o vetor obtido em A.15 chega-se às outras 3 equações que descrevem o equilíbrio da viga. O sistema então, após as substituições necessárias fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_x}{\partial s} - M_y \kappa_t + M_z \kappa_y - Q_y + m_x = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial s} + M_x \kappa_t - M_z \kappa_x + Q_x + m_y = 0 \\ \frac{\partial M_z}{\partial s} - M_x \kappa_y + M_y \kappa_x + m_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

O sistema formado por A.10 e A.17 descrevem completamente o comportamento de uma viga de eixo curvo sob carregamento qualquer.

A.4 Eixos de Darboux-Ribaucourt

Para a determinação da configuração na qual ocorre o escorregamento dos elementos helicoidais (sendo comumente chamada pelo termo correspondente em inglês, *full slip*) é necessária a definição de um novo sistema de coordenadas que não apenas leve em conta a geometria helicoidal do tendão, mas sim leve em conta a superfície sobre a qual a curva está assentada. O sistema de eixos definidos são os chamados eixos de Darboux-Ribaucourt.

A definição dos eixos de Darboux-Ribaucourt não é tão trivial. Enquanto o triedro de Frénet é definido pelo vetor tangente à curva em questão, com o vetor normal como a variação do vetor tangente ao longo da variável de parametrização da curva e com

o vetor binormal como o produto vetorial entre esses, os eixos de Darboux-Ribeaucourt são definidos por:

- $\vec{t}$: vetor tangente à curva, idêntico ao definido no triedro de Frénet, ou seja, a variação do vetor raio ao longo da variável de parametrização da curva.
- $\vec{N}$: vetor normal à superfície portadora da curva.
- $\vec{B}$: vetor binormal, tangente à superfície, definido como o produto vetorial entre os versores $\vec{t}$ e $\vec{N}$.

A figura A.5 deixa claro os eixos através de um exemplo simples. Considera-se uma superfície esférica e uma circunferência sobre a esfera (um paralelo). Sobre essa circunferência são mostrados o triedro de Frénet (em vermelho) e os eixos de Darboux-Ribeaucourt (em azul). Percebe-se através dessa figura a diferença clara entre os versores normal e binormal dos dois triedros.

Figura A.5: Triedro de Frénet (em vermelho) e eixos de Darboux-Ribeaucourt (em azul) sobre um paralelo de uma esfera.

Para mostrar mais claramente essa diferença, serão determinados os eixos de Darboux-Ribeaucourt para o caso de uma esfera de raio R , cujo vetor raio do paralelo forma um ângulo φ com a direção $\vec{k}$.

As coordenadas de um ponto qualquer sobre o paralelo são dadas por:

$$\mathbf{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \text{ onde } \begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \\ y = R \sin \varphi \sin \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

O triedro de Frénet fica então:

$$\begin{cases} \vec{t} = -\sin \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \vec{i} + \cos \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \vec{j} \\ \vec{n} = \cos \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \vec{i} - \sin \left(\frac{s}{R \sin \varphi} \right) \vec{j} \\ \vec{b} = \vec{k} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Os eixos de Darboux-Ribeaucourt são:

- O vetor tangente idêntico ao obtido na equação A.18.
- O vetor normal à esfera, apontando para o centro da mesma, ou seja:

$$\vec{N} = -\frac{\mathbf{R}}{R}$$

- O vetor binormal, que é o produto vetorial entre os dois anteriores.

Assim, obtém-se os eixos de Darboux-Ribeaucourt para o caso da esfera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{t} = -\sin\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{i} + \cos\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{j} \\ \vec{N} = -\sin \varphi \cos\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{i} - \sin \varphi \sin\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{j} - \cos \varphi \vec{k} \\ \vec{B} = -\cos \varphi \cos\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{i} - \cos \varphi \sin\left(\frac{s}{R \sin \varphi}\right) \vec{j} + \cos \varphi \vec{k} \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Outro ponto a ser considerado é que, da mesma forma que o triedro de Frénet possui as conhecidas relações de Serret-Frénet, que são vistas na equação A.4 existem relações que ligam os versores às suas derivadas. Essas relações, que serão úteis quando for modelar-se o escorregamento da hélice, como por exemplo em FÉRET, LEROY e ESTRIER (1995). Tais equações podem ser vistas na equação A.20.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & C_n & C_b \\ -C_n & 0 & -\frac{1}{\tau} \\ -C_b & \frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \vec{t} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \quad (\text{A.20})$$

sendo C_n , C_b e τ obtidos utilizando o mesmo procedimento adotado no cálculo das equações que relacionam o triedro de Frénet com as coordenadas cartesianas.

APÊNDICE B – CASOS DE USO - MÓDULO BIDIMENSIONAL

Nesse apêndice os casos de uso do módulo bidimensional exibidos na figura 5.17 são descritos em detalhes a seguir. São:

MUDAR VISTA

Ator Principal: Usuário.

Atores Secundários: Nenhum.

Objetivo no contexto: Alterar a visualização atual do modelo.

Pré-condições: Um modelo esteja aberto e possua pelo menos uma camada.

Acionamento: O usuário seleciona a opção via menu ou botão na barra de ferramentas.

Cenário: O usuário seleciona a opção de visualização desejada. A visualização é modificada de acordo.

Exceções: Um modelo não existe mas há um arquivo aberto. Não há modificações na visualização.

ZOOM

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Aplica um <i>zoom</i> ao modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um modelo esteja aberto e possua pelo menos uma camada.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou botão na barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário seleciona a opção de visualização desejada. A visualização é modificada de acordo com o tipo de <i>zoom</i> , aproximando do modelo (<i>zoom in</i>) ou afastando (<i>zoom out</i>).
<i>Exceções:</i>	Um modelo não existe mas há um arquivo aberto. Não há modificações na visualização.

PAN

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Aplica um deslocamento (<i>pan</i>) ao modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um modelo esteja aberto e possua pelo menos uma camada.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou botão na barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário seleciona a opção de visualização desejada. A visualização é modificada de acordo com o a direção do <i>pan</i> (para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita).
<i>Exceções:</i>	Um modelo não existe mas há um arquivo aberto. Não há modificações na visualização.

FIT VIEW

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Enquadra o modelo na janela de visualização.
<i>Pré-condições:</i>	Um modelo esteja aberto e possua pelo menos uma camada.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou botão na barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário seleciona a opção de visualização desejada. A visualização é modificada aplicando efeitos de visualização tal que o modelo completo ocupe toda a janela de visualização e somente ela.
<i>Exceções:</i>	Um modelo não existe mas há um arquivo aberto. Não há modificações na visualização.

ADICIONAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Adiciona um item ao modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário entra com os dados necessários para a inclusão do item.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ADICIONAR MATERIAL

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Adiciona um material ao repositório.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário entra com os dados necessários para a inclusão do material.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ADICIONAR COMPONENTE

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Adiciona um componente ao repositório.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos um material.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário entra com os dados necessários para a inclusão do componente.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ADICIONAR CAMADA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Adiciona uma camada ao repositório.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário entra com os dados necessários para a inclusão da camada.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ADICIONAR INSTÂNCIA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Adiciona uma instância de um componente ao repositório.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto, exista pelo menos uma camada e um componente.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário entra com os dados necessários para a inclusão da instância, como em qual camada ela estará e qual componente ela instanciará.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 REMOVER

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Remove um item do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos um item do tipo a ser removido.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário confirma a exclusão do item.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 REMOVER INSTÂNCIA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Remove uma instância do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos uma instância.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário confirma a exclusão da mesma.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 REMOVER CAMADA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Remove uma camada do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos uma camada.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário confirma a exclusão. Se existirem instâncias na camada, pergunta se deseja excluí-las. Em caso negativo, nenhuma ação é feita.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 REMOVER COMPONENTE

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Remove um componente do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos um componente.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário confirma a exclusão. Se existirem instâncias associadas, pergunta se deseja excluí-las. Em caso negativo, nenhuma ação é feita.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 REMOVER MATERIAL

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Remove um material do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos um material.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário confirma a exclusão. Se existirem componentes associados, pergunta se deseja excluí-los. Em caso negativo, nenhuma ação é feita.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 ALTERAR PROPRIEDADE

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Altera alguma propriedade de itens do modelo.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto e exista pelo menos um item (camada, instância, componente, material).
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via barra de ferramentas.
<i>Cenário:</i>	O usuário altera a propriedade.
<i>Exceções:</i>	Se o valor é inválido, uma mensagem de erro é emitida, alertando o usuário. O valor é retornado ao estado anterior.

 DESFAZER

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Desfaz uma ação do usuário.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou atalho no teclado.
<i>Cenário:</i>	O usuário desfaz a última ação.
<i>Exceções:</i>	Não há nenhuma ação a ser desfeita. O sistema não executa nenhuma ação.

 REFAZER

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Refaz uma ação do usuário.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou atalho no teclado.
<i>Cenário:</i>	O usuário refaz a última ação.
<i>Exceções:</i>	Não há nenhuma ação a ser refeita. O sistema não executa nenhuma ação.

CORTAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Recorta o conteúdo e coloca na área de transferência.
<i>Pré-condições:</i>	Um item esteja selecionado.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou atalho no teclado.
<i>Cenário:</i>	Recorta o conteúdo e o coloca na área de transferência.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

COPIAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Copia o conteúdo e coloca na área de transferência.
<i>Pré-condições:</i>	Um item esteja selecionado.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou atalho no teclado.
<i>Cenário:</i>	Copia o conteúdo e o coloca na área de transferência.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

COLAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Cola o conteúdo da transferência.
<i>Pré-condições:</i>	Um modelo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu ou atalho no teclado.
<i>Cenário:</i>	Cola o conteúdo da área de transferência no modelo.
<i>Exceções:</i>	Destino inválido: não é possível colar e a ação não é executada. Conteúdo inválido: impossível colar o conteúdo no modelo, sendo que a ação não é executada. Área de transferência vazia: não há o que colar.

ARRASTAR & SOLTAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Arrastar e soltar um componente do repositório na área gráfica.
<i>Pré-condições:</i>	Um modelo esteja aberto e exista um componente e uma camada.
<i>Acionamento:</i>	O usuário clica e arrasta o componente para a área gráfica.
<i>Cenário:</i>	O componente é arrastado e uma nova instância desse é criada no local definido pela ação de <i>drop</i> .
<i>Exceções:</i>	A área de <i>drop</i> é inválida. Nenhuma ação é executada.

ABRIR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Abre um arquivo proprietário.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu.
<i>Cenário:</i>	O arquivo é aberto e os dados são carregados em um modelo.
<i>Exceções:</i>	O arquivo não é reconhecido pelo programa. Uma mensagem de erro é exibida e nenhuma ação é tomada.

SALVAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Salva em um arquivo proprietário.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo esteja aberto.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu.
<i>Cenário:</i>	Os dados são salvos em um arquivo.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

IMPORTAR XML

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Importa um arquivo <i>XML</i> .
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu.
<i>Cenário:</i>	O arquivo é aberto e os dados são carregados em um modelo.
<i>Exceções:</i>	O arquivo não é reconhecido pelo programa: uma mensagem de erro é exibida e nenhuma ação é tomada. Há um erro no arquivo XML: a leitura é interrompida e nenhuma ação é executada.

EXPORTAR XML

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Exporta um arquivo <i>XML</i> .
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu.
<i>Cenário:</i>	Os dados do arquivo aberto são exportados para um arquivo.
<i>Exceções:</i>	É impossível gravar o arquivo: nenhum arquivo é gerado e a operação é cancelada.

LER SCRIPT

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Lê um arquivo de <i>script</i> .
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a opção via menu.
<i>Cenário:</i>	Os dados do arquivo aberto são lidos e interpretados pelo <i>CAD</i> . O modelo é gerado de acordo com as instruções.
<i>Exceções:</i>	O arquivo possui erros ou está incompleto: o processo se encerra no último ponto válido, exibindo uma mensagem de que não foi concluído com êxito.

APÊNDICE C – CASOS DE USO - MÓDULO TRIDIMENSIONAL

Nesse apêndice os casos de uso do módulo tridimensional exibidos na figura 5.18 são descritos em detalhes a seguir. São:

OPÇÕES DE USUÁRIO

Ator Principal: Usuário.

Atores Secundários: Nenhum.

Objetivo no contexto: Alterar opções do programa para maior conforto do usuário.

Pré-condições: Nenhuma.

Acionamento: Alterar as opções desejadas no menu de ferramentas.

Cenário: O programa está em execução e o usuário seleciona o menu ferramentas. Faz as alterações desejadas e as salva.

Exceções: Nenhuma.

CARREGAR MODELO

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Carregar o modelo bidimensional para futura geração tridimensional do cabo a ser visualizado no programa.
<i>Pré-condições:</i>	O modelo bidimensional deve estar acessível.
<i>Acionamento:</i>	O carregamento dos dados do modelo se dá automaticamente a cada inicialização do modulo de visualização tridimensional.
<i>Cenário:</i>	O programa é iniciado e faz a requisição do modelo. O modelo é carregado na base de dados do programa.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

GERAR MODELO TRIDIMENSIONAL

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Gerar o modelo tridimensional.
<i>Pré-condições:</i>	Os dados do modelo do cabo devem ter sido carregados.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona o botão <i>Alterar para Visualização Tridimensional</i> .
<i>Cenário:</i>	O programa é iniciado e os dados do modelo são carregados (<i>Carregar Modelo</i>). O usuário seleciona a opção de visualização tridimensional. O modelo tridimensional fica armazenado na memória do programa.
<i>Exceções:</i>	Impossibilidade de gerar o modelo tridimensional causada por inconsistência de dados. Uma mensagem deve ser exibida e o programa deve retornar ao estado anterior.

CARREGAR RESULTADOS

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Carregar dados de um resultado de análise para visualização no protótipo tridimensional.
<i>Pré-condições:</i>	Ao menos um resultado de análise deve ter sido efetuado previamente.
<i>Acionamento:</i>	O usuário carrega um arquivo de resultados de análise.
<i>Cenário:</i>	Com o programa em execução, o usuário seleciona o menu <i>Load Analysis</i> . Seleciona-se um arquivo com resultados de análises e o arquivo é carregado na base de dados do programa.
<i>Exceções:</i>	Arquivo de análise não correspondente ao modelo carregado. Uma mensagem de erro deve ser mostrada e o carregamento da análise é abortado.

INICIAR ANIMAÇÃO

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Iniciar um módulo de animação, onde é possível visualizar deslocamentos do cabo quando submetido a determinado esforço.
<i>Pré-condições:</i>	Um arquivo de análise de deslocamentos deve ter sido carregado.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a carga do módulo de animação.
<i>Cenário:</i>	Com o programa em execução e ao menos um resultado de análise de deslocamentos carregado, o usuário seleciona o menu <i>Iniciar Animação</i> . Um menu com as opções de animações é exibido e o usuário pode fazer o controle da forma desejada.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ALTERAR VISUALIZAÇÃO

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Mudar a visualização atual do cabo. Esta ação engloba as ações denominadas: <i>Ampliar</i> , <i>Mover</i> , <i>Rotacionar</i> , <i>Estereoscopia por Cores</i> , <i>Estereoscopia por Frequência</i> , <i>Iluminação</i> e <i>Tela Cheia</i> .
<i>Pré-condições:</i>	O software deve estar em modo de visualização tridimensional.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona o tipo de alteração na visualização que deseja.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o novo tipo de visualização é aplicado.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

AMPLIAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Ampliar ou reduzir o modelo para visualização de detalhes.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona o grau de ampliação desejado.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o usuário seleciona o comando <i>Zoom</i> . Seleciona-se o fator pelo qual deseja se aproximar ou afastar da imagem e aplica-se as alterações ao modelo.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 MOVER

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Mudar a posição atual do cabo na janela de visualização.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona certo deslocamento relativo para a posição do cabo.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o usuário seleciona o comando <i>Pan</i> . Seleciona-se o deslocamento desejado e aplica-se as alterações ao modelo.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

 ROTACIONAR

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Rotacionar o cabo para sua visualização a partir de diversos ângulos diferentes.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona uma rotação para o cabo.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o usuário seleciona o comando para rotacionar o cabo. Seleciona-se o eixo que será rotacionado e o ângulo de rotação. As alterações são aplicadas ao modelo.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ILUMINAÇÃO

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Mudar o tipo de iluminação para uma melhor visualização do cabo.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona uma nova iluminação para o cabo.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o usuário seleciona uma nova forma de iluminação. A nova iluminação é definida por tipo de fonte de iluminação e cor da fonte luminosa. As alterações são aplicadas ao modelo tridimensional.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ESTEREOSCOPIA POR CORES

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Iniciar o modo de realidade virtual (estereoscopia por cores).
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona o menu para iniciar estereoscopia por cores.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução e o usuário seleciona o menu de estereoscopia por cores. Um novo modo de visualização é gerado e as alterações são aplicadas ao modelo tridimensional.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

ESTEREOSCOPIA POR FREQUÊNCIA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Iniciar o modo de realidade virtual (estereoscopia por frequência).
<i>Pré-condições:</i>	A visualização deve estar em tela cheia.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona a tecla de atalho para iniciar a estereoscopia por frequência.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução em tela cheia e o usuário seleciona a tecla de atalho para iniciar a estereoscopia por frequência. Um novo modo de visualização é gerado e as alterações são aplicadas ao modelo tridimensional.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.

TELA CHEIA

<i>Ator Principal:</i>	Usuário.
<i>Atores Secundários:</i>	Nenhum.
<i>Objetivo no contexto:</i>	Alternar entre o modo de visualização de janela para tela cheia e vice-versa.
<i>Pré-condições:</i>	Nenhuma.
<i>Acionamento:</i>	O usuário seleciona o menu ou a tecla de atalho para alternar entre o modo tela cheia e janela.
<i>Cenário:</i>	O programa está em execução (em janela ou tela cheia) e o usuário seleciona a opção para alternar o modo de visualização. Um novo modo de visualização é gerado e apresentado ao usuário.
<i>Exceções:</i>	Nenhuma.