UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

SERGIO DE PAULA PELLEGRINI

**Estimação dinâmica em tomografia por impedância elétrica
com modelos adaptativos**

São Paulo

2019

SERGIO DE PAULA PELLEGRINI

**Estimação dinâmica em tomografia por impedância elétrica
com modelos adaptativos**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

Área de Concentração: Engenharia de Controle e Automação
Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

Co-Orientador: Prof. Dr. Raul Gonzalez Lima

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Pellegrini, Sergio de Paula

Estimação dinâmica em tomografia por impedância elétrica com modelos adaptativos / S. P. Pellegrini -- versão corr. -- São Paulo, 2019.

148 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1.filtro de Kalman 2.problemas inversos 3.estimação não linear
4.tomografia I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia Mecânica II.t.

Ao presente...

e às pessoas queridas que nele estão

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer e muitos a quem agradecer. Peço desculpas se esqueci alguém.

Agradeço muito ao professor Flávio Celso Trigo, seu conhecimento e paciência, sua confiança e apoio durante esses cinco anos. Ao professor Raul Gonzalez Lima, que sempre tem muito a ensinar. Ao professor Jorge Luis Baliño, pelo suporte e tutoria há ainda mais tempo.

Devo agradecer às instituições que viabilizaram este trabalho, em diferentes momentos: ao CNPq, à ANP e à Petrobras.

E às muitas pessoas que me ajudaram e com quem tive a oportunidade de conviver e aprender com durante esse tempo: Lais Morimoto, Talles Santos, Laís Sampaio, Erick Camargo, Isadora Hoffmann, André Santos, Paulo Sabia, Ana Carolina Freitas, Olavo Silva; Murilo Cicolin, Gabriel Azevedo, João Isler, Douglas Serson, Alan Yamaguchi, Lucia Messa, Cesar Freire, Rodrigo Amaral, Ivan Korkischko, Alessandro de Lima, Fabiano Imada, Gabriel Penna, Victor Julian, Rafael Gioria, Gustavo Patiño, Daiane Dolci, Ivanildo Andreolli, Elói Rotava, Reinaldo Orselli; Gilmar Silva e seu irmão José; Vilma Guerra, Adriana Schleder, Jairson de Lima; Luciana Marques e Rafael Souza, para citar alguns nomes.

Assim como no meu trabalho de formatura, na graduação, agradeço novamente à Universidade de São Paulo, por proporcionar esse espaço para meu aprendizado e desenvolvimento, apesar do desafio que é ser uma universidade pública gratuita e do desafio que é fazer pesquisa no Brasil.

Devo muito também aos meus amigos em círculos que vão além da USP e abrangem além dos oceanos; e à minha família – titias, primos, padrinho – por serem uma lembrança constante do que é importante.

Finalmente, devo MUITO, claro, ao meu núcleo familiar: Izabela, Ilza, Américo, Diana e aos pequenos (no presente momento).

“Não me iludo
Tudo permanecerá do jeito que tem sido
Transcorrendo
Transformando
Tempo e espaço navegando todos os sentidos
(...)
Não se iludam
Não me iludo
Tudo agora mesmo pode estar por um segundo

Tempo rei, ó, tempo rei, ó, tempo rei
Transformai as velhas formas do viver
Ensinai-me, ó, pai, o que eu ainda não sei
Mãe Senhora do Perpétuo, socorrei”

Tempo rei, Gilberto Gil

ABSTRACT

This work investigated the use of electrical impedance tomography (EIT) in phase discrimination in two-phase air-water systems. EIT is a non-intrusive technique in which electric currents are imposed and electric potentials are measured at the boundary of a system. This method is mathematically challenging, as it is non-linear, inverse, and ill-posed. Also, for the application at hand, the system dynamics is fast enough to influence the sought estimates.

A systematic approach was created to combine information from measurements and other sources, including a generalized Tikhonov regularization term (Gaussian filter), state parametrization and evolution models. This adaptive estimation approach is a contribution to the literature.

State parametrization (vector of conductivities of the system of interest after spatial discretization) in logarithmic conductivity was implemented to ensure that the estimates remain in physical bounds, i.e., only positive values are achieved. Additional benefits are the increase of the region that leads to monotone convergence and a more uniform convergence rate of the estimates. The comparative analysis of a numerical system showed that state parametrization allowed an increase for the under-relaxation factor in the Gauss-Newton method, from 4% to 15%, increasing the algorithm's speed.

Two evolution models for flows were proposed and, when compared to the random walk model, provided faster convergence, better phase distinction and an improved degree of observability for the EIT problem. These models describe a representative velocity for the flow, estimated experimentally as 0.47 m/s .

Experimental tests of static setups suggest that the applied methods are able to differentiate the phases in a duct. In the case where the dynamics is relevant (flow of bubbles along the duct), the algorithm developed allows for monitoring inhomogeneities. Therefore, the results of this thesis are able to support the estimation of two-phase flow rates in future work, given that evaluating void fraction is a crucial step for an online multiphase flow rate meter.

Keywords: *Kalman filter, Inverse Problems, Nonlinear Estimation, Tomography*

RESUMO

Este trabalho investigou o uso de tomografia por impedância elétrica (TIE) na discriminação de fases em sistemas bifásicos água-ar. A TIE é uma técnica não-intrusiva em que são estimados parâmetros de condutividade elétrica de um sistema de interesse a partir de correntes elétricas impostas e potenciais elétricos medidos na fronteira desse meio. Esta técnica se traduz em um problema desafiador, por ser inverso, não-linear e mal-posto. Adicionalmente, na aplicação em análise, a dinâmica do sistema é rápida a ponto de influir nas estimativas procuradas.

Foi sistematizada uma abordagem para integrar informações de medições a de outras fontes, como um regularizador generalizado de Tikhonov (filtro gaussiano), parametrização de estado e modelos de evolução, construindo um modelo adaptativo de estimação. Tal combinação de métodos é inédita na literatura.

Parametrização do estado (vetor de condutividades do sistema de interesse, após discretização espacial) em condutividade logarítmica foi implementada para assegurar a obtenção de valores condizentes com a física, i.e., as estimativas em condutividade são mantidas estritamente positivas, com benefícios adicionais de aumento da região de convergência monotônica e melhoria na uniformidade da taxa de convergência das estimativas. O estudo de um sistema numérico evidenciou que a parametrização do estado permitiu o aumento do fator de sub-relaxação no método de Gauss-Newton, de 4% para 15%, o que torna o algoritmo mais rápido.

Dois modelos de evolução para escoamentos foram propostos e, comparativamente com o modelo de passeio aleatório, proporcionaram convergência mais rápida, melhor distinção das fases e melhoria do grau de observabilidade do problema de TIE. Esses modelos descrevem uma velocidade representativa para o escoamento, avaliada experimentalmente em $0,47 \text{ m/s}$.

Ensaio experimentais estáticos sugerem que os métodos aplicados diferenciam a presença das fases em um duto. No caso em que a dinâmica é relevante (passagem de bolhas ao longo do duto), o algoritmo desenvolvido permite o devido acompanhamento de não homogeneidades. Portanto, os resultados dessa pesquisa têm o potencial de apoiar a estimação de vazões bifásicas em trabalhos futuros, uma vez que a avaliação da fração de ocupação das fases é um passo crucial para o desenvolvimento de um medidor real de vazão multifásica.

Palavras-chave: *filtro de Kalman, problemas inversos, estimação não linear, tomografia*

SUMÁRIO

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Siglas	xv
Lista de Símbolos	xvii
Lista de Publicações	i
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e estrutura do texto	5
2 Revisão da literatura	7
2.1 Escoamentos multifásicos	7
2.1.1 Caracterização qualitativa: padrões de escoamento	7
2.1.2 Caracterização quantitativa	8
2.1.3 Modelagem	11
2.2 Tomografia por Impedância Elétrica	12
2.2.1 Modelo físico	13
2.2.2 Tomógrafos de propriedades elétricas para escoamentos multifásicos	16
2.2.3 Filtros de Kalman	19
3 Formulação teórica	21
3.1 Problema direto	25
3.1.1 Solução de sistema linear	25

3.2	Problema inverso	28
3.3	Regularização	29
3.3.1	Regularização no sentido clássico: regularização generalizada de Tikhonov	31
3.3.2	Positividade da solução	34
3.3.3	Redução da dimensão do espaço solução	36
3.3.4	Continuidade na evolução temporal	37
3.4	Algoritmos para resolução do problema inverso	38
3.4.1	Gauss-Newton	39
3.4.2	Gradientes conjugados não lineares	42
3.4.3	Filtros de Kalman	44
4	Metodologia	49
4.1	Parametrização do estado	50
4.2	Bancada experimental de testes: escoamento bifásico água-ar	50
4.2.1	Visão geral dos equipamentos incorporados à bancada	51
4.2.2	Construção do aparato experimental	52
5	Resultados e discussão	57
5.1	Ensaio numérico em sistema mínimo: descrição do espaço solução	57
5.1.1	Estrutura para problema inverso de TIE	57
5.1.2	Convergência monotônica com Gauss-Newton: valor limite de sub-relaxação e mínimos locais	58
5.1.3	Região de convergência monotônica	61
5.1.4	Taxa de convergência no problema inverso	62
5.1.5	Uniformidade na taxa de convergência no problema inverso: tendência no problema direto	63
5.1.6	Justificativa teórica da melhoria na taxa de convergência	65
5.2	Ensaio numéricos para a geometria construída	67

5.2.1	Discretização: sensibilidade à malha	68
5.2.2	Validação dos algoritmos de inversão	71
5.3	Ensaio experimentais estáticos	72
5.3.1	Caso homogêneo	72
5.3.2	Caso estratificado horizontal	79
5.3.3	Caso estratificado inclinado	85
5.4	Ensaio experimental dinâmico	90
5.4.1	Configurações do algoritmo de estimação	90
5.4.2	Estimação	98
6	Conclusões	109
	Referências	111
	Apêndice A – Sistemas comercializados para monitoramento de escoamen- tos multifásicos	121
	Apêndice B – Biblioteca de escoamento anular água-ar	123
B.1	Modelo fenomenológico: escoamento anular líquido-gás	124
B.2	Análise de sensibilidade	130
B.2.1	Discussão	131
B.3	<i>A priori</i> amostral	133
	Apêndice C – Seleção de componentes para sistema de medição	139
C.1	Câmera	140
C.1.1	Cuba	140
C.2	Placa de orifício	140
	Apêndice D – Parametrização dos estimadores	143
D.1	Nova parametrização: condutividade logarítmica restringida	144

D.2	Deduções das densidades de probabilidade das variáveis de busca	145
D.2.1	Condutividade e resistividade	145
D.2.2	Condutividade e resistividade logarítmicas	146
D.2.3	Condutividade e resistividade logarítmicas restringidas	147

LISTA DE FIGURAS

Figura - 1.1	Diagrama da exploração em campo de petróleo: poços produtores e injetores, dutos conectando-os a <i>manifolds</i> e plataforma. Figura extraída de (PETROBRAS, 2015).	1
Figura - 2.1	Padrões de escoamento para escoamento bifásico água-ar em duto vertical, com um aumento, da esquerda para a direita, da proporção de ar no escoamento: (a) escoamento de bolhas dispersas (<i>bubbly</i>), (b) escoamento em golfada (<i>slug</i>), (c) escoamento de transição (<i>churn</i>), (d) escoamento anular <i>wispy</i> (<i>wispy-annular</i>) e (e) escoamento anular (<i>annular</i>). Fluidos escoam de baixo para cima. Figura de Collier e Thome (COLLIER; THOME, 1994).	8
Figura - 2.2	Padrões de escoamento para escoamento bifásico água-ar em duto horizontal, com um aumento, na direção usual de leitura, da proporção de ar no escoamento: (a) escoamento de bolhas dispersas (<i>bubbly</i>), (b) escoamento de bolhas alongadas (<i>plug</i>), (c) escoamento estratificado (<i>stratified</i>), (d) escoamento estratificado ondulado (<i>wavy</i>), (e) escoamento em golfada (<i>slug</i>) e (f) escoamento anular (<i>annular</i>). Fluidos escoam da esquerda para a direita. Figura de Collier e Thome (COLLIER; THOME, 1994).	9
Figura - 2.3	Comparação da qualidade das estimativas obtidas com (a) o <i>Linear Back-Projection</i> e (b) um algoritmo de gradientes conjugados. Figura extraída de (INDUSTRIAL TOMOGRAPHY SYSTEMS LTD., 2005).	18
Figura - 3.1	Subsistemas em um equipamento de TIE. O escopo desta tese ficou restrito a algoritmos de estimação de imagem, tendo em vista modelos para o meio de interesse e contato.	21
Figura - 3.2	Semi-convergência em artigo de 1987: evolução do erro de reconstrução por iteração, para diferentes níveis de ruído de “medição” ($\square$ 1%, $+$ 5 %, $\diamond$ 10 %, $\triangle$ 20 %). Figura de (YORKEY; WEBSTER; TOMPKINS, 1987).	30
Figura - 4.1	Diagrama da estratégia implementada neste trabalho para a integração de diferentes fontes de informação visando resolver o problema inverso mal-posto de TIE.	49

Figura - 4.2	Sistema de recirculação água-ar instalado: à esquerda, dutos para os escoamentos monofásicos de água e de ar; em primeiro plano, a injeção de ar no escoamento de água; seguindo ao fundo, trecho de tubulação em acrílico que emula o <i>flowline</i> ; ao fundo, na vertical, trecho da tubulação em acrílico que emula o <i>riser</i>	51
Figura - 4.3	Instalação na bancada de testes, cuba de visualização e eletrodos para TIE: (a) projeto em CAD e (b) projeto executado e instalado.	52
Figura - 4.4	Interface do tomógrafo com o escoamento: equipamento construído para eletrodos.	53
Figura - 4.5	Representação esquemática da numeração dos eletrodos no duto, planejado.	54
Figura - 4.6	Vista parcial em corte longitudinal de projeto para a interface do tomógrafo com o escoamento: croqui de montagem para eletrodos.	55
Figura - 4.7	Calibração dos eletrodos para tomógrafo: (a) teste pneumático e (b) verificação do posicionamento de eletrodo.	55
Figura - 5.1	Fantoma com 15 elementos e 6 eletrodos nodais, nos vértices.	57
Figura - 5.2	Solução do problema inverso de TIE (em condutividade, σ) usando o método de Gauss-Newton e o valor limite de sub-relaxação para convergência monotônica, α_{thr}	59
Figura - 5.3	Solução do problema inverso de TIE em condutividade (σ) com o método de Gauss-Newton e um fator de sub-relaxação $\alpha = 40.0\%$	60
Figura - 5.4	Evolução da solução (13 primeiras iterações), ao se resolver o problema inverso de TIE em condutividade com o método de Gauss-Newton.	61
Figura - 5.5	Valores limites para o fator de sub-relaxação (para convergência monotônica à solução física) como função da estimativa inicial, usando o método de Gauss-Newton.	62
Figura - 5.6	Evolução da solução ao se resolver o problema inverso de TIE com o método de gradientes conjugados não linear.	63
Figura - 5.7	Modelo para análise de sensibilidade, com 32 eletrodos e 385.601 elementos.	64
Figura - 5.8	Sensibilidade numérica do problema direto de TIE, para o modelo mostrado na fig. 5.7. Valores distintos para o campo-base são responsáveis pela variação de cerca de cinco ordens de grandeza na magnitude das ordenadas.	65

Figura - 5.9	Malha de elementos finitos utilizada para resolver o problema inverso de TIE. O meio de interesse é composto por 21538 elementos tetraédricos. Os 32 contatos, representados com um modelo Patacon, somam 6664 elementos prismáticos de base triangular, divididos em uma camada para representar o metal e seis camadas para a impedância de contato.	68
Figura - 5.10	Variação dos potenciais elétricos para os eletrodos ativos (em que há corrente não nula, para os 32 padrões de corrente bipolares) como função do refinamento do comprimento característico na parede do duto.	69
Figura - 5.11	Análise de sensibilidade da solução à variação dos parâmetros de controle da malha. A variação absoluta máxima dentre duas “medidas” é mostrada em função da alteração de valores para cada um dos quatro parâmetros de controle da malha.	70
Figura - 5.12	Valores reais e evolução por iteração das estimativas, usando o filtro estendido iterado JARK de Kalman para um caso numérico mínimo na geometria de interesse.	71
Figura - 5.13	Comparação entre a média e desvio de 1000 repetições do sinal medido para duto completamente preenchido com água. Os potenciais elétricos são plotados para cada sensor, definido como a composição do canal de medição e o eletrodo físico.	72
Figura - 5.14	Variância do sinal para cada um dos 1024 sensores. Cada variância é calculada a partir de 1000 repetições.	73
Figura - 5.15	Ruído de excitação e medição, valores experimentais de 1000 repetições para cada um dos 1024 sensores. As curvas em preto denotam a região abrangida por seis desvios padrões, para cada sensor.	74
Figura - 5.16	Ruído de excitação e medição e desvios padrões calculados, para sensores correspondentes aos padrões de corrente 1 e 28.	74
Figura - 5.17	Estimativas em condutividade logarítmica obtidas, para cada iteração, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	76
Figura - 5.18	Estimativas descritas em termos da condutividade, para cada iteração, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	76

Figura - 5.19 Evolução por iteração para a norma euclidiana da matriz P^+ estimada, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	77
Figura - 5.20 Evolução por iteração para os valores estimados para a matriz diagonal Q , usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	78
Figura - 5.21 Histograma para os resíduos de observação na última iteração, com diferenciação entre eletrodos ativos e passivos, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	78
Figura - 5.22 Evolução por iteração para a média dos resíduos de observação normalizados, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.	79
Figura - 5.23 Representação dos valores numéricos, para cada elemento, das 50 ROIs utilizadas na análise dos casos estratificados horizontais. Evidenciam-se (a) os valores de todas as ROIs e (b) a geometria estratificada de ROIs típicas. Cada estrato tem uma espessura da ordem de 1 mm.	80
Figura - 5.24 Matriz passa baixa para regularização gaussiana, casos estratificados horizontais.	81
Figura - 5.25 Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano nos casos estratificados horizontais. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e a (d) mostra estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 1000$	81
Figura - 5.26 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado alto.	82
Figura - 5.27 Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado alto.	82
Figura - 5.28 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado baixo.	83
Figura - 5.29 Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado baixo.	83

Figura - 5.30 Comparação entre as estimativas para os dois casos estratificados horizontais, na iteração 100.	84
Figura - 5.31 Visualização de interface água-ar estimada com critério adotado para diferenciação das fases, caso estratificado horizontal.	84
Figura - 5.32 Representação, para cada elemento, dos valores numéricos das 1250 ROIs utilizadas na análise do caso inclinado. Evidenciam-se variações nas direções (a) axial e (b) vertical. Cada região tem um comprimento característico mínimo na ordem de 2 mm. Para referência, reitera-se que o meio de interesse tem 50 mm de diâmetro e 104 mm de comprimento axial.	85
Figura - 5.33 Matriz passa baixa para regularização gaussiana, utilizada no caso estratificado inclinado.	86
Figura - 5.34 Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano no caso estratificado inclinado. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e as (d)-(e) mostram estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 100$	86
Figura - 5.35 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado.	87
Figura - 5.36 Distribuição espacial das estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado.	87
Figura - 5.37 Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado. .	88
Figura - 5.38 Distribuição espacial das incertezas estimadas, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado. Os valores exibidos são desvios padrões estimados para cada estado, em condutividade logarítmica. Para efeitos de comparação, as estimativas para o estado assumem valores entre $-4,48$ e $-4,32$	89
Figura - 5.39 Visualização da interface água-ar com critério simples para diferenciação das fases, caso estratificado inclinado.	89
Figura - 5.40 Representação, para cada elemento, dos valores numéricos das 13843 ROIs utilizadas na análise do caso dinâmico. Evidenciam-se variações (a) na direção	

axial e (b) em uma única seção. Cada região tem um comprimento característico mínimo na ordem de 2 mm.	90
Figura - 5.41 Matriz passa baixa para regularização gaussiana, utilizada no caso dinâmico.	91
Figura - 5.42 Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano nos casos dinâmicos. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e as (d)-(e) mostram estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 10$	91
Figura - 5.43 Ilustração do efeito dos modelos de evolução para uma não homogeneidade. Seis tempos discretos propagados são mostrados, calculados apenas a partir de uma distribuição inicial e a aplicação do modelo de evolução. A primeira coluna mostra o modelo de passeio aleatório. A segunda, o modelo de advecção pura; e a terceira, o de advecção-difusão. A primeira linha mostra uma distribuição inicial de condutividades e as linhas a seguir distribuições propagadas.	93
Figura - 5.44 Séries temporais do potencial elétrico demodulado medido nos eletrodos ativos dos anéis 1 e 3, com a aplicação dos padrões de corrente intra-anel da tab. 5.6.	94
Figura - 5.45 Séries temporais do potencial elétrico demodulado medido nos eletrodos ativos dos anéis 2 e 4, com a aplicação dos padrões de corrente intra-anel da tab. 5.6.	95
Figura - 5.46 Covariância entre sinais dos eletrodos ativos dos anéis 1 e 3, para todos os atrasos.	96
Figura - 5.47 Covariância entre sinais dos eletrodos ativos, para ± 20 tempos discretos. ...	97
Figura - 5.48 Covariância entre sinais dos eletrodos passivos, para ± 20 tempos discretos.	98
Figura - 5.49 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de passeio aleatório.	99
Figura - 5.50 Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de passeio aleatório.	100
Figura - 5.51 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção pura.	100
Figura - 5.52 Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando	

o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção pura.	101
Figura - 5.53 Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção-difusão.	102
Figura - 5.54 Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção-difusão.	102
Figura - 5.55 Representação esquemática de uma linha vertical contida no segundo anel de eletrodos. Essa linha é utilizada como referência para mostrar a evolução temporal das estimativas.	103
Figura - 5.56 Evolução das estimativas na linha vertical definida na fig. 5.55: comparação para os três modelos de evolução apresentados. A representação gráfica mostra as estimativas, sugerindo o movimento dos fluidos da direita para a esquerda.	104
Figura - 5.57 Representação esquemática de uma linha ao longo do escoamento com uma diferença de cota de 5 mm para o topo do duto. Essa linha é utilizada como referência para mostrar a evolução temporal das estimativas.	105
Figura - 5.58 Evolução das estimativas na linha longitudinal definida na fig. 5.57: comparação para os três modelos de evolução apresentados.	106
Figura - 5.59 Análise comparativa de modelos de evolução: estimativas em duas seções do duto na iteração 5. Ressalta-se a melhoria na convergência com o uso de modelos advectivos.	107
Figura - 5.60 Análise comparativa de modelos de evolução: estimativas em duas seções do duto na iteração 39. Ressalta-se a melhoria no grau de observabilidade (trechos inicial e final do duto) com o uso de modelos advectivos.	108
Figura - B.1 Representação esquemática de seção transversal de escoamento anular horizontal. Em preto, a parede do duto; em cinza, líquido e em branco, gás.	125
Figura - B.2 Representação esquemática do modelo fenomenológico para escoamento anular água-ar, descrito nas equações B.3 a B.15.	131
Figura - B.3 Análise de sensibilidade do modelo fenomenológico proposto para escoamento anular. Os valores da fração de vazio, α , do fator mássico de <i>entrainment</i> , e , da fração de <i>entrainment</i> , γ , e da perda de pressão de estagnação, $\frac{dP}{ds}$, são mostrado como função da variação dos parâmetros de entrada ao redor de um escoamento	

de referência.	132
Figura - B.4 Análise de sensibilidade do modelo fenomenológico proposto para escoamento anular. Os valores da espessura média do filme, t_a , da espessura do filme na parte inferior (para escoamento horizontal) , t_b , da velocidade de propagação da onda do filme, v_{wave} , e da frequência característica dessas ondas, f_{wave} , são mostrado como função da variação dos parâmetros de entrada ao redor de um escoamento de referência.	133
Figura - B.5 Mapa de padrões de escoamento para duto horizontal e propriedades definidas pela tab. B.2 e amostra sorteada de distribuição uniforme, denotada por pontos azuis. As linhas denotam transição entre padrões de escoamento e a letra A denota a região de escoamento anular.	134
Figura - B.6 Histograma para valores correspondentes de (a) título e (b) vazão mássica total, com sorteio uniforme do par de velocidades superficiais, de líquido e de gás.	135
Figura - B.7 Descrição em condutividade do <i>a priori</i> amostral para escoamento anular: distribuição de propriedades elétricas média, dentre os 100.000 “indivíduos”, vistas (a) com corte transversal, (b) superior e (c) superior com corte longitudinal parcial.	137
Figura - B.8 Autovalores da matriz de covariância Γ_σ da biblioteca de escoamento anular água-ar.	138
Figura - B.9 Autovetores de maior importância para a matriz de covariância Γ_σ da biblioteca de escoamento anular água-ar.	138
Figura - D.1 Parametrização para restrição do espaço solução, onde s é o parâmetro analisado e ζ é o parâmetro que indica a condutividade σ	144
Figura - D.2 Parametrização composta (exponencial e função logística generalizada) para restrição do espaço solução, onde s é o parâmetro analisado e σ é a condutividade.	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	Análise comparativa entre diferentes métodos de determinação experimental de fração de vazio. Baseada em (SILVA, 2008).	5
Tabela 5.1	Valor limite para o fator de sub-relaxação α (método de Gauss-Newton) que delimita convergência monotônica à solução física para o problema inverso de TIE no sistema em análise.	59
Tabela 5.2	Valores atribuídos para os parâmetros de controle da malha a ser utilizada para a resolução dos problemas inversos. Essa malha é a mostrada na fig. 5.9. . . .	71
Tabela 5.3	Valores iniciais para a estimação, caso homogêneo.	75
Tabela 5.4	Valores iniciais para a estimação, casos estratificados horizontais.	80
Tabela 5.5	Valores iniciais para a estimação, casos dinâmicos.	90
Tabela 5.6	Pares de padrões de injeção de corrente utilizados para obter velocidade representativa de advecção. Os eletrodos dos anéis 1 e 3 tem as mesmas posições angulares, assim como os eletrodos dos anéis 2 e 4.	96
Tabela B.1	Propriedades dos fluidos e condições de escoamento para a análise do modelo fenomenológico para escoamento anular líquido-gás.	125
Tabela B.2	Valores dos parâmetros ditos constantes para geração do <i>a priori</i> amostral baseado em modelo fenomenológico para escoamentos horizontais anulares água-ar.	134

LISTA DE SIGLAS

CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional
ECT	Tomografia por capacitância elétrica
ERT	Tomografia por resistência elétrica
JARK	Filtro adaptativo de Jazwinski, Rios Neto e Kuga
MEF	Método dos elementos finitos
PDF	Função de densidade de probabilidade
ROI	Região de Interesse
TIE	Tomografia por impedância elétrica

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal de um duto; área qualquer de interesse $[m^2]$
A_2	Área de passagem em restrição (placa de orifício) $[m^2]$
A_f	Área da seção transversal de um duto ocupada pela fase líquida $[m^2]$
A_g	Área da seção transversal de um duto ocupada pela fase gasosa $[m^2]$
B	Densidade de fluxo magnético ou indução magnética (vetor) $[T]$
Bo	Número de Bond $[-]$
c	Vetor de correntes elétricas, meio discretizado $[A]$
C_D	Coefficiente de descarga para placa de orifício $[-]$
d	Diâmetro de gotícula $[m]$
d_{ij}	Distância entre dois pontos i e j $[m]$
D	Diâmetro de duto $[m]$
D	Deslocamento elétrico (vetor) $\left[\frac{C}{m^2}\right]$
e	Fator de <i>entrainment</i> em massa $[-]$
e	Erro/Resíduo de modelo de observação não linear $[V]$
E	Campo elétrico (vetor) $\left[\frac{V}{m}\right]$
f	Frequência característica para ondulações do filme em escoamento anular $[Hz]$
f	Fator de atrito (monofásico) $[-]$
f_m	Fator de atrito multifásico $[-]$
Fr	Número de Froude $[-]$
G	Fluxo mássico $\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$
G	Ganho de Kalman
g	Aceleração da gravidade $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
g_s	Aceleração da gravidade decomposta na direção do duto $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
h	Coefficiente de convecção $[-]$

h	Modelo não linear de observação $[V]$
h_m	Entalpia específica do pseudo-fluido, modelo homogêneo $\left[\frac{J}{kg}\right]$
H	Matriz de sensibilidade medida-estados, modelo de observação linearizado
H	Filtro passa alta para regularização espacial $[-]$
$\mathbf{H}$	Intensidade do campo magnético (vetor) $\left[\frac{A}{m}\right]$
I	Corrente elétrica $[A]$
j	Fluxo volumétrico ou velocidade superficial $\left[\frac{m}{s}\right]$
j_f	Velocidade superficial da fase líquida $\left[\frac{m}{s}\right]$
j_g	Velocidade superficial da fase gasosa $\left[\frac{m}{s}\right]$
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente elétrica $\left[\frac{A}{m^2}\right]$
L	Filtro passa baixa para regularização espacial $[-]$
$\dot{m}$	Vazão mássica total $\left[\frac{kg}{s}\right]$
$\hat{n}$	Versor normal a uma área de interesse $[-]$
P^-	Matriz de covariância do erro de estimação predito
P^+	Matriz de covariância do erro de estimação atualizado
Q	Matriz de covariância do ruído do processo
Q	Vazão volumétrica total $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
Q_f	Vazão volumétrica da fase líquida $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
Q_g	Vazão volumétrica da fase gasosa $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
r	Resíduo de estimação/observação $[V]$
R	Matriz de covariância do ruído da observação
Re	Número de Reynolds $[-]$
s	Condutividade elétrica logarítmica restringida $[-]$
S	Razão de escorregamento $[-]$
t	Tempo $[s]$
t_a	Espessura média do filme líquido, escoamento anular $[m]$
t_b	Espessura do filme líquido no trecho inferior, escoamento anular $[m]$

T	Matriz binária para seleção dos nós dos eletrodos $[-]$
u_f	Velocidade média da fase líquida $\left[\frac{m}{s}\right]$
u_{fj}	Velocidade de deriva da fase líquida $\left[\frac{m}{s}\right]$
u_g	Velocidade média da fase gasosa $\left[\frac{m}{s}\right]$
V	Potencial elétrico medido; potencial elétrico em meio contínuo $[V]$
$\hat{V}$	Potencial elétrico estimado a partir de modelo discreto $[V]$
v_{wave}	Velocidade de propagação característica para ondulações do filme em escoamento anular $\left[\frac{m}{s}\right]$
x	Vetor de estados genérico $[-]$
x	Título mássico, em sistema bifásico $[-]$
x	Título mássico de gás, em sistema trifásico $[-]$
x_w	Título mássico de água, em sistema trifásico $[-]$
$\hat{x}$	Estimativas para o estado $[-]$
W	Matriz de ponderação para regularização $[-]$
W_e	Funcional a ser minimizado no método dos elementos finitos $\left[\frac{J}{m}, W\right]$
We	Número de Weber $[-]$
Y	Matriz de rigidez para o método de elementos finitos (matriz de admitância, matriz de condutância) $[S]$
α	Fração de vazio, em sistema bifásico $[-]$
α	Fator de sub-relaxação para método de Gauss-Newton $[-]$
β	Título volumétrico, em sistema bifásico $[-]$
β	Razão dos diâmetros em restrição $[-]$
γ	Fator de <i>entrainment</i> em área $[-]$
Γ	Matriz de covariância amostral de campo de condutividades para regularização com <i>a priori</i> amostral $[-]$
Δp	Pressão diferencial montante-jusante da placa de orifício $[Pa]$
ϵ	Permissividade elétrica $\left[\frac{F}{m}\right]$
ϵ_σ	Precisão de cálculo para estimativa

$\varepsilon \left \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right $	Precisão de cálculo para variação da função objetivo
λ	Fator de regularização $\left[\frac{V \cdot m}{S}, V \right]$
μ	Viscosidade dinâmica de um fluido $[Pa \cdot s]$
μ	Permeabilidade magnética $\left[\frac{H}{m} \right]$
v_k	Variável aleatória para erro de modelo de observação linearizado
π	Função de densidade de probabilidade $[-]$
ρ	Resistividade elétrica $[\Omega m]$
ρ	Massa específica de um fluido $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
ρ_g	Massa específica de um gás $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
ρ_l	Massa específica de um líquido (homogeneizado) $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
ρ_m	Massa específica média $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
ρ_o	Massa específica de óleo $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
ρ_v	Densidade volumétrica de carga elétrica (líquida) $\left[\frac{C}{m^3} \right]$
ρ_w	Massa específica da água $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
σ	Tensão superficial entre dois fluidos $\left[\frac{N}{m} \right]$
σ	Condutividade elétrica $\left[\frac{S}{m} \right]$
$\bar{\sigma}_{am}$	Média amostral de campo de condutividades, campo base para regularização com <i>a priori</i> amostral $\left[\frac{S}{m} \right]$
σ_b	Campo base para regularização, descrito em condutividade elétrica $\left[\frac{S}{m} \right]$
σ_{geom}	Comprimento característico para regularização gaussiana $[m]$
ς	Condutividade elétrica logarítmica $[-]$
ς_b	Campo base para regularização, descrito em condutividade elétrica logarítmica $[-]$
$\phi_{k+1,k}$	Matriz de transição de estados $[-]$
Φ	Função objetivo $[V^2]$
ω	Frequência de excitação de corrente elétrica harmônica $\left[\frac{rad}{s} \right]$
ω_k	Variável aleatória para erro de modelo de evolução

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Lista de publicações do autor no tema da tese de doutorado

Artigo publicado em periódico

PELLEGRINI, S. P.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G. Solving the electrical impedance tomography inverse problem for logarithmic conductivity: numerical sensitivity. *COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, v. 37 n. 2, pp. 681-690, 2018.

Artigos publicados em anais de conferências

PELLEGRINI, S. P.; YAMAGUCHI, A. J.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G.; BALIÑO, J. L.; CAMPOS, S. R. V. Apparatus Design for an independent Multiphase Flowrate meter. In: *4th Multiphase Flow Journeys (JEM – EBECEM)*. Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM), São Paulo, Brasil, 2017. 9 p.

PELLEGRINI, S. P.; BALIÑO, J. L.; TRIGO, F. C. Design of a sample-based prior using a phenomenological model for annular flow. In: *8th World Congress on Industrial Process Tomography (WCIPT8)*. International Society for Industrial Process Tomography (ISIPT), Foz do Iguaçu, Brasil, 2016. 6 p.

PELLEGRINI, S. P.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G. Solving the electrical impedance tomography inverse problem for logarithmic conductivity: numerical sensitivity. In: *14th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism (OIPE)*. IEEE, Roma, Itália, 2016. 2 p.

Artigo aceito em conferência

PELLEGRINI, S. P.; LAZO-VÁSQUEZ, D.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G.; BALIÑO, J. L. Sample-based prior using a phenomenological model for slug flow. In: *10th International Conference on Multiphase Flow (ICMF 2019)*. Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM), Rio de Janeiro, Brasil, 2019. 2 p.

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho teve como ponto de partida os esforços de pesquisa e desenvolvimento incentivados pela Petrobras, que tem entre suas atividades centrais a exploração de petróleo. Cada campo de petróleo é explorado com um conjunto de poços, de acordo com a fig. 1.1. Um poço ativo pode ser utilizado para (a) produção de óleo ou gás, (b) injeção de gás ou água, ou (c) produção de água, em função das propriedades geológicas do reservatório e do mecanismo de produção dominante. Partindo dos poços de produção, dutos levam os fluidos a uma plataforma. Frequentemente há uma estrutura intermediária no leito submarino, chamada de *manifold*, para controlar o escoamento e reduzir a quantidade de dutos de elevação.

Figura 1.1: Diagrama da exploração em campo de petróleo: poços produtores e injetores, dutos conectando-os a *manifolds* e plataforma. Figura extraída de (PETROBRAS, 2015).

Tendo em vista que as linhas de produção são combinadas, seja nos *manifolds* ou em separadores de fases na plataforma, antes da obtenção de medições de vazão, não é possível realizar um mapeamento das vazões multifásicas para cada poço. No entanto, essa monitoração da produção, em especial de forma contínua, seria de grande valor para a posterior otimização da produção. Dessa forma, um objetivo industrial importante na área é a medição de vazão multifásica individualizada, para cada poço.

Ressalta-se que a estimação de vazão multifásica é um campo de pesquisa em aberto, uma vez que – ao contrário de escoamentos monofásicos – dados de pressão dinâmica são insuficientes para caracterizar a vazão multifásica. Isso pois não é conhecida, em princípio, a proporção dos fluidos no escoamento. Um escoamento típico na área de petróleo e gás é composto por óleos (leves ou pesados, e com viscosidade variável), gás e água salina (além de fluidos injetados para inibir a formação de hidratos e parafinas; emulsões, espumas e partículas sólidas que podem se desprender no reservatório), em proporções variáveis.

Há diferentes métodos utilizados com sucesso para medir a vazão de escoamentos monofásicos em dutos. No entanto, a extensão dessas técnicas para escoamentos multifásicos não é evidente, uma vez que a composição do escoamento não é conhecida *a priori*. Uma primeira abordagem poderia pressupor o cálculo de propriedades médias. Mas há outros efeitos que levariam a erros sistemáticos de medição, uma vez que fenômenos como, por exemplo, atrito viscoso, tensão superficial ou efeitos de inércia, dependem dos padrões de escoamento.

Para um escoamento monofásico pode-se determinar a vazão através de uma medida diferencial de pressão antes e depois de uma restrição no duto – como uma placa de orifício, um bocal ou um tubo de Venturi. Essa tecnologia está bem estabelecida na literatura (WHITE, 2002; ISO5167, 2003). A vazão mássica é obtida a partir da medição de pressão diferencial, Δp , através da curva de calibração mostrada na eq. 1.1, onde A_2 é a área de seção na restrição e β é a razão entre os diâmetros da restrição e do duto.

$$\dot{m} = C_D A_2 \left[\frac{2 \rho \Delta p}{(1 - \beta^4)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

O coeficiente de descarga C_D reflete a influência da geometria da restrição e, eventualmente, do número de Reynolds¹. Cada geometria normatizada tem uma fórmula para o cálculo do respectivo coeficiente de descarga (ISO5167, 2003).

A aplicação da formulação monofásica para determinar uma vazão multifásica leva

¹Número adimensional que reflete a razão de efeitos de inércia por efeitos viscosos.

inevitavelmente a uma sobre-estimação da vazão total, uma vez que a interação entre as fases implica uma perda de carga adicional em comparação ao caso monofásico. Dessa forma, a comunidade científica buscou incluir um parâmetro de concentração, como a razão entre a vazão mássica da fase gasosa em relação à total (o título x , eq. 2.4 (p. 10)), nas curvas de calibração vazão-pressão diferencial.

Diversas curvas análogas à eq. 1.1 foram desenvolvidas para escoamentos bifásicos (BERTANI et al., 2010). Essas formulações usam o coeficiente de descarga monofásico como uma referência, mas tipicamente sugerem o ajuste dessa constante com base em resultados experimentais *in situ*.

Tipicamente, essas curvas de calibração proporcionam bons resultados quando uma das fases é predominante, i.e., quando o título é $x < 10\%$ ou $x > 95\%$.

Paz (PAZ, 2011) implementou um medidor de vazão trifásica, utilizando uma placa de orifício e medições periódicas de título. As hipóteses adicionais são escorregamento constante, inexistência de mudanças de fase (título constante), fases líquidas homogeneizadas e fases incompressíveis ao longo do escoamento isotérmico, que é modelado de forma unidimensional. Paz estima a vazão mássica total de acordo com a eq. 1.2a, onde C_D é o coeficiente de descarga monofásico – sem nenhum ajuste com base em dados experimentais – e ρ_l é a massa específica de líquido (homogeneizado), calculada de acordo com a eq. 1.2b.

$$\dot{m} = C_D A_2 \left[\frac{2\Delta p}{\left(x + \frac{1-x}{S}\right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} S\right) (1 - \beta^4)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2a)$$

$$\rho_l = \frac{(1-x) \rho_w \rho_o}{(1-x-x_w) \rho_w + x_w \rho_o} \quad (1.2b)$$

Para fechar o modelo, são requeridas medições *a posteriori* do título (de gás, x , e de água, x_w) e o uso da correlação de Chisholm para determinar a razão entre as velocidades das fases gasosa e líquida (o escorregamento S , eq. 2.7 (p. 10)). Também, é necessário utilizar uma aproximação de que a água é uma substância pura e o modelo de *black oil* – que fixa a composição química do óleo e do gás, convertendo o sistema multicomponente em um sistema bifásico – para determinar as massas específicas ρ_g e ρ_o .

Essa metodologia foi aplicada em campo, em poços da Petrobras na localidade de Urucu-AM, apresentando um erro máximo, avaliado como o coeficiente de variação do desvio RMS, de 3,52% (CAMPOS et al., 2014). Os valores do título foram calibrados durante testes de

produção (tipicamente, realizados a cada 45 dias (IMADA, 2014)), em que as vazões monofásicas são medidas individualmente para cada poço, após o separador de fases (comum a vários poços). Esses valores de título são então “transportados” à seção em que a medição diferencial de pressão é realizada, tendo em vista as mudanças de estado termodinâmico.

Abordagens como essa, em que a composição do escoamento é determinada de forma exógena, são classificadas como medidores virtuais de vazão. Alternativamente, um medidor real de vazão é capaz de proporcionar menores erros de medição, especialmente em poços que tenham flutuações na composição dos fluidos. Nesse sentido, a literatura tem buscado a incorporação de técnicas tomográficas, de forma a não depender de valores medidos *a posteriori* para o título (THORN; JOHANSEN; HAMMER, 1999).

Uma reconstrução tomográfica tridimensional permitiria também a determinação de velocidades de estruturas no escoamento, com uma análise de correlações temporais entre duas seções, como mostrado em (DONG et al., 2005) para anéis de sensores em duas seções transversais. Essa informação redundante à medida diferencial de pressão pode favorecer melhoria na robustez do medidor.

Através de um estudo numérico, Imada (IMADA, 2014) comprovou a viabilidade da utilização da fração de vazio, α , à montante da placa de orifício para determinar as proporções de cada fase. A determinação da fração de vazio em tempo real comporia um medidor real de vazão multifásica, robusto em relação a flutuações nas composições do escoamento.

No entanto, uma análise comparativa de sistemas disponíveis comercialmente indica que não existe uma tecnologia consolidada para a determinação da composição de escoamento. Essa análise, mostrada em detalhe no apêndice A, apresenta produtos de nove fabricantes, que somam oito diferentes técnicas para estimar a presença relativa de fases.

Tendo isso em vista, é importante investigar as vantagens comparativas entre as diferentes técnicas, integrais ou tomográficas, para determinação da fração de vazio em escoamentos bifásicos. Tal estudo é mostrado na tab. 1.1.

Destacam-se duas técnicas: a *wire-mesh* e a Tomografia por Impedância Elétrica (TIE). A técnica de *wire-mesh* proporciona uma alta taxa de amostragem e boa resolução espacial. No entanto, a implementação de sensores intrusivos inviabiliza o uso na indústria de óleo e gás, uma vez que o material particulado que escoar nos dutos diminui a vida útil dos sensores. Assim, a TIE parece a técnica mais promissora para a aplicação de óleo e gás, apesar dos desafios relacionados com a baixa resolução espacial.

Tabela 1.1: Análise comparativa entre diferentes métodos de determinação experimental de fração de vazio. Baseada em (SILVA, 2008).

	Vantagens	Desvantagens
Tomografia computadorizada (raios X ou gama)	<ul style="list-style-type: none"> Alta resolução espacial 	<ul style="list-style-type: none"> Radiação ionizante requer procedimentos de segurança <i>Hardware</i> complexo e caro
Ressonância magnética	<ul style="list-style-type: none"> Alta resolução espacial Pode medir velocidade 	<ul style="list-style-type: none"> Baixa taxa de amostragem <i>Hardware</i> complexo e caro
Sistemas óticos (de infravermelho a ultravioleta)	<ul style="list-style-type: none"> Alta taxa de amostragem Alta resolução espacial 	<ul style="list-style-type: none"> Falha em sistemas com alta fração de vazio Frações de vazio maiores do que 10% configuram um sistema majoritariamente opaco
Ultrassom	<ul style="list-style-type: none"> Alta taxa de amostragem Alta resolução espacial 	<ul style="list-style-type: none"> Falha em sistemas com alta fração de vazio
<i>Wire-mesh</i>	<ul style="list-style-type: none"> Alta taxa de amostragem 	<ul style="list-style-type: none"> Sensor intrusivo: interferência no escoamento
Métodos de impedância elétrica média (propriedades elétricas integrais)	<ul style="list-style-type: none"> Alta taxa de amostragem <i>Hardware</i> barato 	<ul style="list-style-type: none"> Calibração depende do padrão de escoamento Configuração de eletrodos em linha é inadequada O efeito de não homogeneidades em outros planos é espalhado, gerando uma reconstrução difusa e imprecisa (LEMONNIER; PEYTRAUD, 1998; CAMARGO, 2013)*
TIE	<ul style="list-style-type: none"> Alta taxa de amostragem <i>Hardware</i> barato 	<ul style="list-style-type: none"> Baixa resolução espacial Exige introdução de informações conhecidas <i>a priori</i>

* Reporta-se (VOUTILAINEN et al., 2010) que é possível obter uma reconstrução adequada com os eletrodos em um plano se o problema inverso for resolvido com um tratamento que inclua um modelo de como o sistema evolui temporalmente, em especial na direção perpendicular ao plano definido pelos eletrodos.

1.1 Objetivos e estrutura do texto

Considerando o exposto acima, o objetivo principal deste trabalho foi melhorar a resolução espacial intrinsecamente baixa em TIE.

Para esse fim, objetivos específicos incluíram desenvolver e implementar estratégias para incorporar informação previamente conhecida na solução do problema inverso em TIE. Tal abordagem procurou combinar, em proporções adequadas, as informações advindas de medições e de outras fontes como regularizadores e modelos de evolução baseados na descrição do fenômeno físico.

Este texto segue com uma revisão bibliográfica, apresentando aspectos de caracterização e modelagem em escoamentos bifásicos, o equacionamento para TIE em meio contínuo e

aplicações de TIE em escoamentos multifásicos, com foco no uso de filtros de Kalman.

O capítulo 3 discute os fundamentos da implementação da análise de dados de TIE. Partindo dos modelos expostos no capítulo anterior, serão obtidos modelos discretizados. A seguir, são discutidos os problemas direto e inverso. Finalmente, após discutir formas de regularizar o problema (com a introdução de informações conhecidas previamente sobre o sistema), são mostrados algoritmos para a resolução do problema inverso.

A seguir, no capítulo 4, descreve-se os métodos utilizados neste trabalho, incluindo a estratégia de integração das diferentes fontes de informação. As técnicas utilizadas para testar os algoritmos de análise de dados de TIE são indicadas, incluindo o aparato experimental construído e os casos analisados.

Resultados e discussão são expostos em conjunto, em um capítulo dividido em quatro seções. Inicia-se com um estudo sobre a imposição de positividade para a solução do problema inverso de TIE. A segunda parte mostra estudos numéricos para a geometria construída. Posteriormente, três ensaios experimentais estáticos são analisados. Por último, apresentam-se resultados para um caso dinâmico de passagem de bolhas.

Finalmente, conclusões e sugestões para a continuidade do trabalho encerram o texto.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Escoamentos multifásicos

Escoamentos multifásicos são deslocamentos de matéria em ao menos duas fases ou substâncias líquidas que não se misturam. Dentre as diversas aplicações industriais, destacam-se trocadores de calor, reatores de colunas de bolhas ou leitos fluidizados e escoamentos de misturas de substâncias. Em específico, no caso de extração de petróleo, há um escoamento de óleo, gás, água salgada e partículas sólidas (hidratos, parafinas, areia).

A dificuldade de caracterizar esses escoamentos ocorre uma vez que, além dos efeitos nas escalas microscópica e macroscópica – o problema da turbulência, presente também em escoamentos monofásicos –, a análise de escoamentos multifásicos requer também o estudo de efeitos em uma escala mesoscópica, uma vez que é necessário resolver as interfaces entre as diferentes fases presentes. Os balanços de massa, momento e energia definem formas típicas para as distribuições de fases ao longo do escoamento, com padrões de escoamento.

2.1.1 Caracterização qualitativa: padrões de escoamento

Diferentes domínios energéticos são relevantes em escoamentos multifásicos. Em adição aos domínios energéticos de escoamentos monofásicos – com gradientes de energias potencial gravitacional, cinética e térmica, além de efeitos de compressibilidade – há também o fenômeno de tensão superficial. Para exemplificar a diversidade de padrões, serão apresentados padrões de escoamento típicos para escoamentos co-corrente bifásicos água-ar, para um duto vertical na Fig. 2.1 e para um duto horizontal na Fig. 2.2.

Os diferentes padrões apresentados são obtidos variando as proporções de vazões de água e de ar no duto. Esses padrões podem ser agrupados, de acordo com parâmetros característicos, em mapas de padrões de escoamento.

Resulta que esses mapas são específicos para cada tipo de escoamento multifásico em

Figura 2.1: Padrões de escoamento para escoamento bifásico água-ar em duto vertical, com um aumento, da esquerda para a direita, da proporção de ar no escoamento: (a) escoamento de bolhas dispersas (*bubbly*), (b) escoamento em golfada (*slug*), (c) escoamento de transição (*churn*), (d) escoamento anular *wispy* (*wispy-annular*) e (e) escoamento anular (*annular*). Fluidos escoam de baixo para cima. Figura de Collier e Thome (COLLIER; THOME, 1994).

análise. Diferentes combinações de substâncias escoando, como líquido-vapor de uma mesma substância ou o carregamento de partículas sólidas, podem apresentar padrões de escoamento distintos. Não existem mapas de padrões de escoamento para escoamentos trifásicos (água, óleo e ar, modelo que aproximaria melhor o caso de aplicação na indústria de petróleo).

Uma análise comparativa entre os padrões de escoamento mostrados nas figuras 2.1 e 2.2 mostra como um único efeito, o do campo gravitacional, no caso, pode ter um grande impacto nos padrões de escoamento.

2.1.2 Caracterização quantitativa

Para caracterizar o escoamento, são definidos parâmetros de três tipos, como mostrado a seguir. Esses valores são, rigorosamente, definidos como função da posição, do tempo e da amostra de dados. Podem também ser definidas médias – temporal, espacial ou de conjunto (de amostras) (ROSA, 2012).

2.1.2.1 Parâmetros de fluxo

Os parâmetros de fluxo podem ser definidos para o escoamento como um todo ou para cada fase, em separado.

Figura 2.2: Padrões de escoamento para escoamento bifásico água-ar em duto horizontal, com um aumento, na direção usual de leitura, da proporção de ar no escoamento: (a) escoamento de bolhas dispersas (*bubbly*), (b) escoamento de bolhas alongadas (*plug*), (c) escoamento estratificado (*stratified*), (d) escoamento estratificado ondulado (*wavy*), (e) escoamento em golfada (*slug*) e (f) escoamento anular (*annular*). Fluidos escoam da esquerda para a direita. Figura de Collier e Thome (COLLIER; THOME, 1994).

Os dois primeiros são medidas clássicas: a vazão mássica, $\dot{m}$, é a quantidade de massa transportada a cada instante de tempo; a vazão volumétrica, Q , é a quantidade de volume transportado a cada instante de tempo.

O fluxo mássico, G , e o fluxo volumétrico, j , são definidos, respectivamente, como a vazão mássica e a vazão volumétrica (total ou de uma fase em específico) divididas pela área de passagem, A , de acordo com a eq. 2.2 e a eq. 2.1, respectivamente. O fluxo volumétrico também é conhecido como velocidade superficial, uma vez que pode ser compreendido como a velocidade de deslocamento do centro de volume do sistema. Ressalta-se que a unidade do fluxo volumétrico é a mesma de velocidades, razão pela qual o fluxo volumétrico também é chamado de velocidade superficial.

$$j = \frac{Q}{A} \quad (2.1)$$

$$G = \frac{\dot{m}}{A} \quad (2.2)$$

A velocidade superficial pode ser definida também para cada fase em separado, de acordo com as eqs. 2.3, onde os índices f e g remetem às fases líquida e gasosa, respectivamente.

$$j_f = \frac{Q_f}{A} \quad (2.3a)$$

$$j_g = \frac{Q_g}{A} \quad (2.3b)$$

2.1.2.2 Parâmetros de concentração

Os parâmetros de concentração são definidos para cada uma das $i - 1$ fases, onde i é o número total de fases, sempre na forma de ocupação (em algum sentido) de uma fase em relação à ocupação total.

O título, denotado por x , define a porcentagem de massa de uma fase presente no sistema. Para um sistema bifásico ar-água, o título pode ser determinado em função da vazão mássica, $\dot{m}$, de acordo com a eq. 2.4.

$$x = \frac{\dot{m}_g}{\dot{m}_f + \dot{m}_g} \quad (2.4)$$

O título volumétrico, β , é definido de forma análoga ao título mássico, mas em função da vazão volumétrica, Q , das fases. Para um sistema bifásico, vale a eq. 2.5.

$$\beta = \frac{Q_g}{Q_f + Q_g} \quad (2.5)$$

Finalmente, a fração de vazio, α , é calculada em função da ocupação das fases na área de seção do duto. Para um sistema bifásico, a fração de vazio é definida de acordo com a eq. 2.6.

$$\alpha = \frac{A_g}{A_f + A_g} \quad (2.6)$$

2.1.2.3 Parâmetros de velocidade

Podem ser definidas as velocidades médias de cada fase, u_f para a fase líquida e u_g para a fase gasosa em uma mistura bifásica.

A análise do escoamento relativo das fases pode ser realizada através da razão de escorregamento, S . A razão de escorregamento, *slip* em inglês, é a razão entre as velocidades médias das fases, exemplificada para um escoamento bifásico na eq. 2.7.

$$S = \frac{u_g}{u_f} \quad (2.7)$$

2.1.3 Modelagem

Apesar de existirem diversas formas de tratar os problemas multifásicos, o escopo dessa subseção limita-se ao modelo homogêneo, em que as diferentes fases são homogeneizadas em um único pseudo-fluido equivalente. Um modelo mais refinado será discutido no apêndice B, com um modelo fenomenológico para escoamento anular água-ar.

No tratamento mais simples, o escoamento multifásico é reduzido à modelagem unidimensional de um escoamento monofásico de um pseudo-fluido de propriedades representativas, com uma velocidade única.

A simplificação a modelos unidimensionais exige a introdução leis de fechamento, agregando informações sobre gradientes nas direções radial e tangencial (direções tangenciais são relevantes se o escoamento não for axi-simétrico, como em um duto horizontal com efeitos gravitacionais relevantes, por exemplo). Exemplos ilustrativos de leis de fechamento são o fator de atrito, f , e o coeficiente de convecção, h , importantes também para escoamentos monofásicos (BALIÑO, 2014).

Para um sistema bifásico, a massa específica do pseudo-fluido equivalente é função da fração de vazio α e é descrita de acordo com a eq. 2.8.

$$\rho_m = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_f \quad (2.8)$$

A determinação da viscosidade do pseudo-fluido – e consequente determinação do fator de atrito multifásico, f_m – não é evidente. Cioncolini et al (CIONCOLINI; THOME; LOMBARDI, 2009) reportam onze diferentes formulações, adequadas para diferentes casos. Cada formulação pode ser compreendida como uma diferente lei de fechamento para incluir os efeitos da tensão de cisalhamento bifásica no modelo monofásico equivalente.

Uma vez que as fases escoam com a mesma velocidade, o título em uma seção do duto pode ser calculado a partir da razão de escorregamento, de acordo com a eq. 2.9.

$$x = \frac{1}{1 + \frac{\rho_f}{\rho_g} \frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{\rho_g}{\rho_m} \alpha \quad (2.9)$$

Adicionalmente, é necessário impor algum modelo de evolução para as propriedades termodinâmicas da mistura homogeneizada. As hipóteses mais comuns são que as fases sejam adiabáticas entre si ou que cada fase escoe de forma isotérmica (conhecido como modelo *frozen*) (BALIÑO, 2014).

Com o modelo homogêneo, a conservação de momento resulta de acordo com a eq. 2.10, onde a perda de carga resulta da soma de efeitos convectivos, viscosos e gravitacionais divididos por um fator de compressibilidade. Na equação, s é a posição no duto, g_s é a aceleração gravitacional na direção do duto e h_m é a entalpia específica do pseudo-fluido.

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{G^2 \left[\left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial h_m} \right)_p \frac{\partial h_m}{\partial s} - \frac{1}{\rho_m A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{2} \frac{f_m}{\rho_m D} \right] - \rho_m g_s}{1 + G^2 \left[x \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho_g} \right) + (1-x) \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho_f} \right) + \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)_{h_m} \right]} \quad (2.10)$$

A simplicidade do modelo homogêneo, com menos variáveis, permite a análise de características complexas, como por exemplo da velocidade de propagação. No entanto, a aplicabilidade deve ser verificada caso a caso, comparando a perda de carga prevista pelo modelo com algum valor mais preciso – experimental ou de um modelo mais complexo. Em geral, padrões de escoamento dispersos podem ser descritos bem com o modelo homogêneo. Em contraste, o modelo homogêneo é incompatível com a física de escoamentos em contra-corrente – uma vez que, no caso bifásico, as fases escoam em sentidos opostos e o modelo homogêneo unidimensional comporta apenas uma única velocidade para o pseudo-fluido.

2.2 Tomografia por Impedância Elétrica

A tomografia por impedância elétrica procura obter uma imagem representativa de um certo sistema por meio de estimativas das propriedades dielétricas dos componentes desse sistema, utilizando dados medidos exclusivamente na sua fronteira.

Para isso, dispõe-se uma série de eletrodos nesse contorno e impõem-se correntes elétricas de baixa amplitude através deles (a imposição de potenciais elétricos e medição de correntes elétricas também é possível), seguindo uma sequência específica de acionamento. Mede-se então o potencial elétrico em todos os eletrodos. A excitação elétrica e a resposta medida são usadas para mapear a distribuição de material dentro do sistema, uma vez que cada fase de cada substância possui características próprias de condutividade e permissividade elétricas.

Apesar das vantagens – principalmente grande resolução temporal, muito baixo nível de radiação e hardware barato (MURAI; KAGAWA, 1985) – a quantidade, finita, de eletrodos limita consideravelmente a resolução que uma imagem de TIE pode atingir. Para as rotinas de análise, exigem-se técnicas de discretização espacial e algoritmos eficientes de identificação de sistema, tendo como ponto de partida um modelo físico que caracterize o sistema real.

2.2.1 Modelo físico

A modelagem física adequada para um sistema de tomografia por impedância elétrica decorre das Equações de Maxwell (SADIKU, 1992), expressas matematicamente por:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.11c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.11d)$$

Nas expressões acima $\mathbf{D}$ é o deslocamento elétrico, ρ_v é a densidade volumétrica de carga (líquida), $\mathbf{B}$ é a densidade de fluxo magnético ou indução magnética, $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{H}$ é a intensidade do campo magnético e $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente elétrica. Além das equações acima, há três relações constitutivas que modelam o comportamento do meio:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.12c)$$

Nas equações acima ϵ , μ e σ são tensores que modelam, respectivamente, a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética e a condutividade elétrica do meio.

Para o caso de interesse, visando-se determinar a distribuição do campo elétrico em um certo domínio, a eq. 2.11a, além de 2.12a e/ou 2.12c, são utilizadas. Adicionalmente, são definidas as seguintes hipóteses, com o sistema sendo:

- não homogêneo, uma vez que diferentes materiais são distribuídos no domínio;
- isotrópico;
- neutro, uma vez que não há carga líquida acumulada no domínio e nem correntes geradas no sistema em análise;
- fechado (“bounded”), uma vez que a quantidade de energia irradiada é baixa, dada a frequência de excitação;

Considerando um regime harmônico para a excitação por corrente elétrica, a análise em fasores para o campo elétrico fornece que:

$$\nabla \cdot ((\sigma + i\omega\epsilon) \nabla V) = 0 \quad (2.13)$$

Na eq. 2.13, V é o potencial elétrico, i é tal que $i^2 = -1$ e ω é a frequência angular de excitação.

A eq. 2.13 tem características complexas (CARRIER; PEARSON, 1976) e é portanto classificada como uma equação elíptica. Assim, o modelo físico usado em TIE é uma equação espacialmente elíptica e instantânea, isto é, não dependente do tempo. Para resolver esse tipo de equação é necessário fixar condições de contorno ao redor de todo o domínio de solução do problema.

O contorno do objeto de estudo, em TIE, pode ser separado de acordo com a presença ou ausência de eletrodos. Nos trechos do contorno do sistema em que há eletrodos, a condição de contorno é do tipo Neumann não-homogênea (no caso geral), como mostrado na eq. 2.14a. Nos outros trechos do contorno, modela-se que não há corrente transmitida, resultando assim em uma condição de Neumann homogênea, representada na eq. 2.14b.

$$\int_{e_i} \sigma \nabla V \cdot \hat{n} dA = I_{e_i}^{bound} \quad \text{no contorno, eletrodo } e_i \quad (2.14a)$$

$$\sigma \nabla V \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{no contorno, exceto eletrodos} \quad (2.14b)$$

Na expressão 2.14a e_i denota o i -ésimo eletrodo, em que corrente $I_{e_i}^{bound}$ é injetada, $\hat{n}$ denota a direção normal ao contorno do sistema, cujo contorno tem diferencial de área dA .

A modelagem do interior do sistema, eq. 2.13 (equação de domínio), em conjunto com um modelo de contorno, como o mostrado pelas eqs. 2.14 (condições de contorno), proporciona uma análise matemática completa do comportamento do sistema (o conjunto é chamado de equações governantes).

No entanto, note-se que em um aparato experimental o sinal a ser usado para cálculos é o medido pelo conversor analógico-digital (ADs). Do contorno modelado acima até os ADs, há ainda dois sub-domínios relevantes: o circuito de condicionamento do sinal e a interface entre esse circuito e o modelo das eqs. 2.14.

Para a modelagem do circuito de condicionamento de sinal, não foram encontrados relatos na literatura especificando os modelos físicos utilizados na solução de TIE. O modelo físico deve reproduzir características do equipamento eletrônico utilizado, em específico. Uma forma geral é buscar um circuito RC equivalente, modelando apenas características principais dos circuitos.

O sub-domínio de interface circuito-meio de interesse é comumente referido na literatura como modelo de eletrodo. Apesar de, rigorosamente, isso ser um abuso de linguagem, costuma-se referir a esse modelo como parte das condições de contorno (HOLDER, 2005). O modelo de eletrodo estabelecido na literatura é apresentado na eq. 2.15 e comporta uma impedância z_{e_i} (tipicamente sem parte imaginária) que acarreta uma perda de potencial em cada contato eletrodo-sistema.

$$V + \sigma z_{e_i} \nabla V \cdot \hat{n} = V_{e_i} \quad \text{no eletrodo } e_i \quad (2.15)$$

Na equação acima, V_{e_i} é o potencial medido no eletrodo e_i .

O conjunto das eqs. 2.14a, 2.14b e 2.15 é conhecido na literatura como modelo completo de eletrodos (CHENG et al., 1989). Há duas implementações numéricas importantes desse modelo (HUA et al., 1993; SILVA et al., 2017), que serão discutidas posteriormente.

O sistema físico, modelado em separado pelas equações do domínio, eq. 2.13, do contorno, eqs. 2.14, e do eletrodo, eq. 2.15, pode ser compreendido como um sistema que, de forma causal, relaciona a corrente injetada nos eletrodos, I_{e_i} , com os potenciais elétricos medidos nos eletrodos, V_{e_i} . Essa relação pode ser descrita de acordo com a eq. 2.16, onde f é uma função característica.

$$V_{e_i} = f(I_{e_i}) \quad (2.16)$$

A determinação da distribuição de propriedades no meio – objetivo central da TIE – é a determinação da função f a partir dos valores conhecidos para o sinal de entrada (a corrente de excitação, I_{e_i} , imposta ao sistema) e o sinal de saída (o potencial elétrico medido, V_{e_i} , resultante da interação da entrada sobre o sistema). Resulta que este é um problema inverso não linear.

Além disso, variações nas propriedades elétricas mais ao interior do domínio são fracamente identificadas com as medidas na fronteira (MURAI; KAGAWA, 1985). Matematicamente, isso configura um problema mal-posto no sentido de Hadamard, uma vez que diferentes funções f

(com propriedades elétricas distintas em regiões geometricamente centrais do domínio) resultam no mesmo mapeamento entre os sinais de entrada e saída (FOX; NICHOLLS; TAN, 2010).

Dentre os matemáticos parece haver hoje um consenso de que o ruído de medição torna o problema mal-posto. Bal (BAL, 2011) apresenta a noção de que o problema de TIE é severamente mal-posto, uma vez que a função f tem um severo efeito de alisamento. Isso não implica que o problema inverso não tenha uma solução única, mas sim que a resolução do problema requer a introdução de hipóteses definidas *a priori* sobre a solução. Nesse sentido, vislumbra-se uma abordagem para TIE em que a informação das medidas é regularizada com a introdução de outras fontes de informação.

2.2.2 Tomógrafos de propriedades elétricas para escoamentos multifásicos

Diferentes trabalhos abordam a estimação de fases com a estimação da distribuição da parte real ou imaginária da impedância elétrica do meio, com os métodos de ERT (do inglês para tomografia de resistência elétrica) e ECT (do inglês para tomografia de capacitância elétrica). As diferenças principais estão na estratégia de excitação – a ERT impõe corrente elétrica e a ECT impõe potencial elétrico, ambas medindo o potencial elétrico do sistema como resposta – e na propriedade elétrica reconstruída – com a ERT obtendo estimativas de condutividade/resistividade e com a ECT estimando permissividade. Reporta-se (SILVA, 2008) que é preferível estimar a parte real da impedância para a identificação de sistemas em que a água é predominante e que a estimação da parte imaginária é preferível em sistemas em que o óleo é predominante.

Dentre as estratégias tomográficas multi-modais (ISMAIL et al., 2005), a estimação simultânea das partes real e imaginária da impedância elétrica, ERT/ECT ou TIE, tem a vantagem de permitir uma análise integrada, no sistema de medição, e o potencial de diferenciar também as fases líquidas entre si (LI; YANG, 2009). Potencialmente, o uso de diferentes frequências de excitação, com uma espectroscopia, pode também auxiliar na identificação mais precisa de fases (ISMAIL et al., 2005).

Como comentado na tab. 1.1, uma desvantagem dos sistemas de ERT e ECT é que eles são tipicamente construídos com eletrodos alinhados em uma única seção transversal de um duto, reconstruindo uma imagem bidimensional do escoamento. No entanto, os algoritmos usados para a estimação bidimensional podem ser utilizados para a reconstrução tridimensional de um escoamento.

A empresa Pietro Fiorentini apresenta o medidor multifásico Flowatch 3l (Pietro Fiorentini

S.P.A., 2016a), que combina a medição diferencial de pressão em um tubo de Venturi com uma medida de impedância elétrica média (incluindo condutância e capacitância) a partir de seis pares de eletrodos. Diferentes modelos são implementados, de forma a obter uma faixa de operação ampla, de vazão volumétrica de gás em comparação com a vazão total de 0 ~ 97% e uma porcentagem de água no total de líquidos variando de 0 ~ 100%.

Já o sistema Roxar MPFM 2600, da empresa Emerson, é um sistema compacto que possui versões com e sem integração com tomógrafos de radiação gama (Emerson Electric CO., 2016). Os doze eletrodos estão dispostos em duas seções do duto e o sistema de medição de impedância é utilizado em conjunto com um tubo de Venturi. O modelo sem a tomografia por raios gama tem como recomendação que a vazão volumétrica de gás em comparação com a vazão total não ultrapasse 85 ~ 90%. As incertezas típicas reportadas não ultrapassam $\pm 6\%$.

Há também uma empresa ligada a um grupo de pesquisa em medição de vazão multifásica na Universidade de Coventry (Atout Process LTD., 2016), mas não há muitas informações técnicas disponíveis.

Visando rapidez de processamento, os algoritmos comumente utilizados podem ser classificados em não-iterativos – dentre eles, o *Linear Back-Projection* e variações regularizadas (NOSER, Tikhonov e Laplace) – e os iterativos – como o Landweber¹ (YANG; PENG, 2003; WEI et al., 2015). O processamento rápido é obtido às custas da qualidade das estimativas para a distribuição de fases, como observado na fig. 2.3, que mostra fotos do sistema real – água e uma solução salina com corante em um misturador – e a estimativa da distribuição de condutividades usando o *Linear Back-Projection* e um algoritmo de gradientes conjugados, mais custoso.

A empresa Industrial Tomography Systems (ITS) (Industrial Tomography Systems, 2017) comercializa equipamentos para ECT e ERT, incluindo a parte mecânica, a elétrica e a análise de dados. A empresa tem uma ligação histórica com a Universidade de Manchester, apesar de uma parte dos fundadores trabalhar atualmente na Universidade de Leeds. Como padrão, utiliza-se o *Linear Back-Projection*, no entanto a ITS disponibiliza também soluções com o algoritmo de Landweber e um algoritmo de gradientes conjugados.

Expressando o problema inverso de TIE na forma de mínimos quadrados, algoritmos de otimização podem ser utilizados. Linearizando o problema, o método de Gauss-Newton é um método simples e robusto (GEORGE et al., 2000). Alternativamente, o método de gradientes conjugados não depende de uma estimativa da segunda derivada da função a ser minimizada (VAUHKONEN, 2004) e fornece melhores resultados (WANG et al., 2013). Métodos de Monte Carlo,

¹O método de Landweber é uma variação do método de *steepest descent* com um tamanho de passo fixo (em vez de minimizar a função objetivo na direção de menor gradiente, como no método de *steepest descent*).

Figura 2.3: Comparação da qualidade das estimativas obtidas com (a) o *Linear Back-Projection* e (b) um algoritmo de gradientes conjugados. Figura extraída de (INDUSTRIAL TOMOGRAPHY SYSTEMS LTD., 2005).

como o MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*) (KAPIO et al., 2000) e o recozimento simulado (*simulated annealing*) (ORTIZ-ALEMÁN; MARTIN, 2005), não dependem de cálculos de derivadas e proporcionam estimativas mais precisas, apesar de um grande custo computacional. Note-se que os cálculos de derivadas são sempre aproximados, na medida em que a distribuição de propriedades não é conhecida de forma precisa.

No entanto, todos os algoritmos anteriores analisam o escoamento multifásico como um processo estacionário. Nessa hipótese, o sistema medido varia no tempo, mas é assumido como sendo estático durante um período de aquisição de dados para tratamento em lote, conforme será apresentado posteriormente na seção 3.4. Um lote grande é desejável para diminuir a influência de ruídos de medição com média nula, mas implica em um longo tempo entre as imagens estimadas, isto é, uma baixa taxa de aquisição.

Uma alternativa é o uso de filtros de Kalman, algoritmos dinâmicos capazes de incorporar

correlações temporais para as estimativas (VAUHKONEN; KARJALAINEN; KAPIO, 1998). Essa família de algoritmos tem um grande potencial para TIE por permitirem a incorporação, de forma simples, da hipótese de evolução temporal suave para as estimativas.

Na indústria, a empresa finlandesa Rocsole (Rocsole Ltd., 2016) oferece soluções comerciais voltadas ao monitoramento da ocupação de fases em dutos e tanques. A empresa utiliza a tecnologia de inversão bayesiana – uma nomenclatura geral que abrange os filtros de Kalman – e o método do erro de aproximação – uma forma de lidar com erros de modelagem. Não há informações sobre taxa de geração de *frames*, mas trabalhos acadêmicos da *University of Eastern Finland*, parceira da Rocsole, reportam a resolução em tempo real de 15 imagens tridimensionais por segundo, a partir de 80 eletrodos com o algoritmo de Gauss-Newton (HEIKKINEN et al., 2006) e uma taxa de 20 *frames* por segundo utilizando o filtro estendido de Kalman (SEPPÄNEN et al., 2007b).

Dentre as empresas citadas na tabela mostrada no apêndice A (p. 122), nota-se também que a FMC reporta utilizar “tomografia eletromagnética”. No entanto, não foi encontrado um detalhamento do tipo de tomografia realizado pela empresa.

2.2.3 Filtros de Kalman

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo de estimação de estado que comporta medições com ruído e requer modelos, mesmo que imperfeitos, para a evolução do estado e para a relação das medições com esse estado. Na formulação tradicional, as incertezas nas estimativas para o estado são determinadas a cada iteração como função das incertezas associadas às medidas e ao modelo, ambas informações determinadas *a priori*.

Desenvolvido originalmente para sistemas lineares (KALMAN, 1960), o filtro de Kalman é ótimo (no sentido de minimizar o erro quadrático das estimativas para o estado) para ruído gaussiano, sendo o melhor estimador linear para outros tipos de ruído. Para TIE, o uso do filtro de Kalman linear foi realizado em (VAUHKONEN, 1997).

Desde a década de 1960, com o salto em desempenho da computação digital, a linearização do modelo deixou de ser uma limitação e o filtro de Kalman foi estendido para sistemas não lineares, com a linearização ao redor das estimativas a cada iteração. Esse filtro foi aplicado na TIE em (TRIGO; GONZALEZ-LIMA; AMATO, 2004).

A variante do filtro de Kalman estendido iterado é mais adequada para sistemas com não linearidades, uma vez que o algoritmo pode realizar a linearização mais de uma vez para cada medida incorporada, até que a estimativa obtida para o estado condiga com a medida. Apesar do

maior custo computacional, há uma melhoria efetiva na estimação em TIE (TRIGO, 2005).

A análise dos dados pode ser realizada também de forma sequencial, com o filtro estendido sequencial de Kalman. Trigo (TRIGO, 2005) reporta que não há diferença nos valores estimados, mas que a melhoria na velocidade de processamento também não é significativa para o problema de TIE, pois o passo de linearização é que impõe um maior custo computacional.

Trigo (TRIGO, 2005; TRIGO; LIMA, 2005) também investigou o filtro estendido de Kalman iterado adaptativo com o algoritmo FJARK (RIOS NETO; KUGA, 1982). A estimação adaptativa, em que a confiabilidade do modelo de evolução é estimada simultaneamente ao estado, melhora as propriedades de convergência das estimativas para TIE.

As variantes raiz quadrada e em função da matriz de informação, em vez da matriz de covariância, tendem a proporcionar melhores estimadores para TIE pois elas são, respectivamente, mais precisa nos cálculos e mais adequada, em princípio, para sistemas com baixo grau de observabilidade (NASCIMENTO JÚNIOR, 1988).

Tendo em vista que a “amarração” das estimativas no tempo é um diferencial para obter melhores soluções para o problema de TIE, uma variante importante é o filtro estendido de Kalman suavizado. Relata-se (KOLEHMAINEN; VOUTILAINEN; KAPIO, 2001; KOLEHMAINEN et al., 2003) que esse algoritmo fornece uma estimativa com um atraso temporal fixo, mas mais precisa e com evolução mais suave.

O filtro de Kalman *unscented* estima a covariância do estado diretamente através do modelo (de observação, no caso) não linear, ao invés do modelo linearizado, e melhora a qualidade das estimativas sem aumentar proibitivamente o custo computacional (IJAZ et al., 2008a; IJAZ et al., 2008b; MOURA, 2013). Por usar o modelo não linear, evita-se o cálculo de derivadas, assim como nos métodos de Monte Carlo.

Finalmente, o filtro de Kalman *ensemble* tem o potencial de melhorar ainda mais a qualidade das estimativas, por estimar a covariância dos estimadores a partir de uma descrição estatística, além de ser um algoritmo mais adequado para sistemas não lineares de um grande número de incógnitas (BUTALA et al., 2009; IGLESIAS; LAW; STUART, 2013). Porém, na aplicação de TIE, reporta-se apenas um estudo preliminar bidimensional (LEI; LIU; WANG, 2012) e um análise bidimensional de dados experimentais de ERT (BOUZAGLOU et al., 2018).

3 FORMULAÇÃO TEÓRICA

O princípio de operação de um tomógrafo por impedância elétrica é representado esquematicamente na fig. 3.1 em três grandes blocos: o meio de interesse (o duto com eletrodos, no caso em estudo); o sistema eletrônico de excitação e medição; e os algoritmos de demodulação e estimação de imagem. O escopo deste estudo engloba os algoritmos de estimação de imagem, requerendo uma modelagem representativa para o meio de interesse e o contato.

Figura 3.1: Subsistemas em um equipamento de TIE. O escopo desta tese ficou restrito a algoritmos de estimação de imagem, tendo em vista modelos para o meio de interesse e contato.

Iniciando pela modelagem do meio de interesse, há uma dificuldade em obter formulações analíticas para a relação entre potenciais e correntes no eletrodos, eq. 2.16 (p. 15), devido à não-homogeneidade do domínio (SADIKU, 1992). Dessa forma, buscam-se soluções numéricas para o problema, com a discretização do potencial elétrico V no sistema. Dentre os métodos de discretização, o método dos elementos finitos (MEF) destaca-se pela versatilidade, em especial para a resolução de problemas em meios não-homogêneos em geometrias complexas.

No MEF, um sistema contínuo é aproximado através da projeção dos valores das propriedades, contínuas, em um espaço vetorial determinado por funções de interpolação, obtendo a melhor aproximação possível dada a representação discretizada do domínio do sistema. Para isso o domínio é dividido em um mosaico – chamado de malha – com células básicas – chamadas de elementos – de formas bem definidas. É recorrente o uso de elementos triangulares (no caso bidimensional) ou tetraédricos (no caso tridimensional), uma vez que esses formatos permitem flexibilidade no ajuste a contornos de geometrias complexas. No caso da TIE, o potencial elétrico é calculado em pontos-chave – chamados de nós – dos elementos e interpolados para os outros pontos do domínio. As propriedades elétricas de condutividade, σ , e permissividade, ϵ , são definidas com funções de interpolação, contínuas para cada elemento. Tendo em vista que o domínio medido é composto por uma distribuição descontínua de propriedades, com interfaces entre diferentes materiais/fases/tecidos, é necessário desenvolver um esquema de discretização que seja capaz de lidar com essa distribuição. Uma possibilidade é o uso de uma malha fixa com muitos elementos de baixa ordem, com a posição dos nós fixos e usando funções de interpolação simples, visando que a descontinuidade fique localizada em um trecho pequeno do domínio discretizado. A segunda possibilidade é o uso de uma malha adaptativa e um método que permita descontinuidades, em que as descontinuidades fiquem localizadas nas interfaces entre elementos. Optando pela primeira possibilidade, o método de ordem mais baixa possível impõe que o potencial seja interpolado linearmente dentro de cada elemento, resultando que o campo elétrico seja uniforme dentro de cada elemento, uma vez que o campo elétrico $\mathbf{E} = \nabla V$.

Em posse de uma representação discretizada do domínio, a TIE busca estimar valores das propriedades elétricas do meio de forma que a equação diferencial de Laplace mostrada na eq. 2.13 (p. 14) seja respeitada. Usando cálculo variacional ¹ (FOX, 1987; LANCZOS, 1970), afirma-se que a equação diferencial anterior pode ser resolvida alternativamente com a minimização do funcional W_e , apresentado na eq. 3.1.

$$W_e = \frac{1}{2} \int (\sigma + i\omega\epsilon) |\nabla V_e|^2 dV \quad (3.1)$$

¹De forma análoga às técnicas do cálculo diferencial para determinar extremos de funções, o cálculo variacional (de variações fracas) busca encontrar uma função $y = f(x)$ que seja um extremo I_s do funcional $I = \int_a^b F(x, y, \frac{dy}{dx}) dx$, com $y_a = f(a)$ e $y_b = f(b)$ conhecidos. Minimizar o funcional I é uma condição necessária para resolver a equação diferencial $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

A equação diferencial pode ser simplificada nos casos: a) $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = F(y, \frac{dy}{dx})$, em que a equação se reduz a $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c$; e b) $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = F(x, \frac{dy}{dx})$, em que a equação se reduz a $\frac{\partial F}{\partial y'} = c$. Em ambos os casos, c é uma constante arbitrária.

Para definir se o extremo do funcional é mínimo ou máximo, pode se utilizar o teste de Legendre, em que o conjunto de três condições: a) a equação diferencial em F é satisfeita; b) o intervalo $[a, b]$ é pequeno o suficiente; c) o sinal de $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ é constante em $[a, b]$ implica que I_s é máximo se $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0$ e mínimo se $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$.

Note-se que, para baixas frequências de excitação, a parte imaginária da impedância tem uma pequena contribuição frente à parte real. Neste trabalho, a parte imaginária é desprezada, isto é, toma-se a eq. 3.1 com permissividade ϵ nula. A estimação de variáveis complexas requer variantes específicas dos filtros de Kalman.

No caso bidimensional da equação de Laplace, o funcional W_e tem o significado físico da energia elétrica armazenada no elemento e por unidade de comprimento, relacionado à espessura, (SADIKU, 1992). Para o caso em análise, com impedância complexa, o funcional W_e tem unidades de potência (em Watts, no SI) e representa a soma da energia transportada através do elemento e da energia armazenada no campo eletromagnético de cada elemento. Tendo isso em vista, a resolução do problema inverso em TIE pelo método dos elementos finitos visa obter a distribuição de propriedades no domínio que, respeitando as informações impostas e medidas nos eletrodos, minimize a potência total do domínio do sistema em análise. Isso requer a resolução iterativa dos problemas direto – no qual os potenciais são obtidos nos nós, assumindo uma certa distribuição de propriedades elétricas – e inverso – no qual a estimativa das propriedades elétricas é refinada, partindo da diferença nos potenciais (medidos e obtidos do problema direto) dos nós correspondentes aos eletrodos.

Realizando a discretização do operador laplaciano (na eq. 2.13) através do formalismo de Galerkin, obtém-se uma matriz simétrica positiva definida (NORRIE; de VRIES, 1973). Dessa forma, o ponto crítico da eq. 3.1, obtido com a condição 3.2, é a minimização (local, dado o uso da formulação variacional fraca) dos funcionais W_e . Para a implementação do problema direto, é necessário escolher funções de teste (de forma e peso, idênticas no formalismo de Galerkin) e montar uma matriz conhecida como matriz de rigidez, Y , (que, no caso de TIE, tem o significado físico de admitância) para o sistema completo. A matriz de rigidez integra propriedades geométricas da malha e propriedades elétricas do meio discretizado. O procedimento de resolução é padrão (SADIKU, 1992; LOGAN, 2011) e já explicitado para a TIE (TRIGO, 2001; MIRANDA, 2003; CAMARGO, 2013; MOURA, 2013).

$$\frac{\partial W_e}{\partial \hat{V}_n} = 0 \quad \text{Para todos os elementos } e \text{ e todos os nós } n \quad (3.2)$$

A condição explicitada acima descreve um sistema de equações que relaciona correntes e potenciais elétricos no nós da malha de elementos finitos.

O próximo sub-sistema elencado é a interface entre o meio de interesse e o circuito eletrônico de excitação e medição, chamado de contato. Note-se que, fisicamente, há duas formas predominantes de transporte de cargas elétricas envolvidas: uma de natureza iônica/de indução

(no domínio de interesse, que contém a região interna do duto) e outra de eletrônica (nos eletrodos e circuitos). A mudança na forma de condução de corrente implica uma certa impedância de contato, modelada pela eq. 2.15, o modelo completo de eletrodos. Diferentes implementações numéricas para essa impedância de contato existem, focando apenas na parte real da impedância de contato, i.e., esses modelos são, na prática, modelos de resistência de contato.

O modelo clássico para a impedância de contato foi introduzido por Hua (HUA et al., 1993). Concebido para sistemas bidimensionais, o bloco elementar do modelo consiste em dois elementos quadrangulares de Elementos Finitos, forçando com que os três nós superiores, que representam a parte metálica no contato, tenham o mesmo potencial elétrico. A matriz de rigidez local associada a esse bloco elementar resulta de dimensão 4×4 , como mostrado em (HUA et al., 1993; TRIGO, 2005; SILVA, 2012; MOURA, 2013; CAMARGO, 2013).

É possível estender esse modelo refinando a discretização da interface com o eletrodo e sobrepondo blocos elementares (SILVA, 2012; MOURA, 2013; CAMARGO, 2013). Também, é possível estender o modelo de Hua para modelos tridimensionais, tomando elementos prismáticos e forçando que todos os nós da face superior tenham o mesmo potencial elétrico (VAUHKONEN et al., 1999; SILVA, 2012).

Um segundo modelo, chamado de Patacon, consiste basicamente em uma região adicional representando o contato, com uma variável comum para a condutividade, e uma segunda região representando o metal do eletrodo (SILVA, 2012; SILVA et al., 2017). Esse modelo comporta uma distribuição de potencial elétrico mais realista, por acomodar correntes elétricas nas direções definidas pela interface. Resulta também que o modelo Patacon permite o uso de malhas menos refinadas para descrever o modelo de eletrodo (SILVA, 2012). Na proposta original (SILVA, 2012), essas regiões adicionais são descritas com elementos tetraédricos não-estruturados.

Além dos dois subsistemas apresentados acima, os sistemas eletrônicos para excitação, multiplexação e condicionamento de sinal têm comportamentos característicos que são refletidos nos sinais medidos nos conversores analógico-digital.

Essa tese não inclui nenhum modelo adicional para a eletrônica. Parte das resistências nos circuitos podem ser comportadas no modelo de contato, mas fenômenos como capacitâncias parasitas e desbalanço na fonte bipolar de corrente requerem modelos adicionais, não implementados. Qualquer fenômeno não modelado (mas presente no sinal medido) será acomodado com alterações nas estimativas para o contato e meio de interesse.

3.1 Problema direto

O sistema de equações obtido com a eq. 3.2 e o modelo de contato pode ser escrito na forma da eq. 3.3, em que o potencial elétrico V_n , para os n nós, é relacionado a um vetor de correntes elétricas nodais c_n através de uma matriz de rigidez $Y = Y(\hat{\sigma}_e)$.

$$Y_{[n \times n]} V_{n[n]} = c_{n[n]} \quad (3.3)$$

Uma vez que a energia potencial elétrica, assim como a energia potencial gravitacional, é invariante à escolha do referencial, resulta que a matriz de rigidez Y tem suas linhas (ou colunas) linearmente dependentes². Matematicamente, isso é refletido com o vetor unitário ($\in \mathbb{R}^n$) sendo parte intrínseca do núcleo do operador definido por Y . Para que o sistema da eq. 3.3 seja tratável, é necessário fixar uma referência para os potenciais elétricos, aterrando qualquer nó. Isso é realizado zerando as filas de Y correspondentes ao nó escolhido, alterando para 1 a posição de intersecção das filas em Y e fixando o valor de potencial desejado na posição equivalente no vetor C .

Esse vetor de correntes elétricas nodais é tal que $c_{n[n]} = T c_{m[m]}$, onde T é uma matriz binária que seleciona os nós que representam os m nós referentes aos eletrodos. O vetor $c_{m[m]}$ descreve um padrão de injeção de corrente, referido comumente como padrão de corrente.

Com isso, o sistema resultante define de forma única os potenciais elétricos em todos os nós como função da corrente aplicada e da distribuição de propriedades estimada.

3.1.1 Solução de sistema linear

Tanto para determinar $\hat{V}_n$, supondo conhecidos $Y(\hat{\sigma}_e)$ e c_n , na eq. 3.3 quanto posteriormente, na resolução do problema inverso através de métodos baseados em modelos de diferenças, é importante selecionar métodos adequados para a resolução do sistema linear. Sem entrar em detalhes – uma discussão extensa pode ser encontrada, por exemplo, em (PRESS et al., 1992; CALVETTI; SOMERSALO, 2007; WESTLAKE, 1968; MALISKA, 2004; van KAN; SEGAL; VERMOLEN, 2008) –, existem dois tipos de métodos: diretos e iterativos.

Nos métodos diretos, resolve-se o sistema linear buscando uma formulação explícita de fatorações para a matriz que multiplica o vetor de incógnitas. Estes métodos requerem que

²Pode-se também evocar um teorema que afirma que a eq. 2.13 com condições de contorno de Neumann em todo o contorno (eq. 2.14a e eq. 2.14b) só pode ser determinada a menos de uma constante aditiva (van KAN; SEGAL; VERMOLEN, 2008).

o algoritmo seja executado até o fim, isto é, se o algoritmo for interrompido, nem mesmo uma estimativa de solução para o sistema linear pode ser obtida. Dentre os diversos algoritmos, destacam-se a decomposição LU (e suas variantes) para matrizes quadradas de valores reais e a decomposição em valores singulares para matrizes não quadradas e problemas mal-postos.

Nos métodos iterativos, obtêm-se sucessivas aproximações para a solução do sistema linear em análise. Estes métodos são mais apropriados para a resolução de sistemas com muitas variáveis, especialmente com matriz esparsa, por requerer menos espaço de armazenagem e menos esforço computacional (WESTLAKE, 1968; van KAN; SEGAL; VERMOLEN, 2008). No entanto, a taxa de convergência pode ser uma desvantagem, especialmente para problemas mal condicionados – razão pela qual se usam pré-condicionadores, que aceleram a taxa de convergência.

Será apresentado a seguir o método dos gradientes conjugados, pela sua importância e como prévia de algoritmos de resolução do problema inverso.

3.1.1.1 Método dos gradientes conjugados

O método dos gradientes conjugados pode ser compreendido como uma evolução do método de máxima declividade (*steepest descent method*), com três diferenças importantes (SHEWCHUK, 1994).

Para discutir as diferenças, define-se uma função objetivo quadrática genérica $f(x)$ de acordo com a eq. 3.4a, com A positiva-definida e simétrica. A minimização da função objetivo recai na busca pela raiz do gradiente da função objetivo, definido na eq. 3.4b, que por sua vez recai na resolução do sistema linear genérico da eq. 3.4c.

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x + c \quad (3.4a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} A^t x + \frac{1}{2} A x - b = A x - b \quad (3.4b)$$

$$A x = b \quad (3.4c)$$

Um conceito central no método dos gradientes conjugados é a compreensão de que A pondera a influência das direções de x na função objetivo, da mesma forma que a rigidez em um material elástico anisotrópico pondera a energia de deformação elástica, deformando o poço de energia potencial elástica.

Tendo isso em vista, a primeira das diferenças importantes entre o método de máxima declividade e o método dos gradientes conjugados é que, para uma dada direção, o ponto “mais

próximo” ao mínimo da função objetivo não é o ponto cujo gradiente é ortogonal à direção analisada, mas sim o ponto cujo vetor que aponta para o mínimo da função objetivo é A-ortogonal – ou conjugado (x e y são ditos conjugados se $x^t A y = 0$) – à direção em análise. Essa estratégia de determinação do ponto “mais próximo” do mínimo implica que cada direção seja percorrida uma única vez (SHEWCHUK, 1994).

A seguir, é necessário definir a próxima direção de busca. No método de máxima declividade, a próxima direção é ortogonal à direção atual. No método dos gradientes conjugados, a próxima direção é escolhida de forma a ser conjugada à direção atual. Dessa forma, as direções de busca são tais que formam um espaço vetorial com uma propriedade matemática particular: o espaço formado pelas direções de busca em uma dada iteração é idêntico à soma de dois espaços: o definido pelas direções de busca no passo anterior e o definido pela conjugação em A desse mesmo espaço. Esse espaço é referido como um subespaço de Krylov e, para cada iteração i , é denotado por $\mathcal{K}_i$. Em notação matemática, portanto, $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} + A \mathcal{K}_{i-1}$.

Na forma de equações, o método dos gradientes conjugados é composto pela definição de uma direção inicial de busca, $d_{(0)}$, que é igual ao resíduo inicial, $r_{(0)}$, e é função de uma estimativa inicial $x_{(0)}$ para a solução do sistema linear eq. 3.4c, de acordo com a eq. 3.5.

$$d_{(0)} = r_{(0)} = b - A x_{(0)} \quad (3.5)$$

O processo iterativo é então composto pela determinação do passo $\alpha_{(i)}$, eq. 3.6a, pelo cálculo da nova estimativa para a solução $x_{(i+1)}$, eq. 3.6b, pelo cálculo do novo resíduo $r_{(i+1)}$, eq. 3.6c, pela determinação de um escalar referente à operação de conjugação de Gram-Schmidt $\beta_{(i+1)}$, eq. 3.6d e, finalmente, pela determinação da nova direção de busca, $d_{(i+1)}$, eq. 3.6e.

$$\alpha_{(i)} = \frac{r_{(i)}^t r_{(i)}}{d_{(i)}^t A d_{(i)}} \quad (3.6a)$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)} \quad (3.6b)$$

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} A d_{(i)} \quad (3.6c)$$

$$\beta_{(i+1)} = \frac{r_{(i+1)}^t r_{(i+1)}}{d_{(i)}^t r_{(i)}} \quad (3.6d)$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)} d_{(i)} \quad (3.6e)$$

Tipicamente, o algoritmo é terminado assim que a norma do resíduo tenha diminuído a

um fator pré-estabelecido, de acordo com a eq. 3.7.

$$\|r_{(i)}\| < \varepsilon \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \quad (3.7)$$

Em essência, o método dos gradientes conjugados pode ser compreendido como um método de minimização iterativa do resíduo em direções linearmente independentes ordenadas de forma decrescente com relação à influência no resíduo da solução. No entanto, como as direções não são armazenadas, a conjugação entre direções de iterações não consecutivas não é garantida por causa de erros de cancelamento devidos à notação em ponto flutuante.

A taxa de convergência do método dos gradientes conjugados é função da raiz quadrada do número de condicionamento – a razão entre o maior e menor valor singular (não-nulo) da matriz A .

Uma forma de acelerar a convergência do método é pré-multiplicar o sistema linear da eq. 3.4c por uma matriz, P , cuja inversa aproxima a matriz A . O novo sistema linear a ser resolvido tem número de condição espectral determinado pelos valores singulares de PA e é mais próximo da unidade, acelerando a taxa de convergência. Tipicamente, utiliza-se a decomposição LU incompleta para determinar a matriz P .

O método dos gradientes conjugados pode ser generalizado para resolver sistemas lineares com uma matriz A não necessariamente simétrica e nem positiva definida, com o método dos gradientes biconjugados. Existem implementações (PRESS et al., 1992) que recaem no método dos gradientes conjugados se a matriz A for simétrica e positiva definida, e o algoritmo não será apresentado em detalhes aqui.

Finalmente, existe a variação GMRES (*generalized minimal residual*, em inglês), em que há duas diferenças fundamentais com relação ao método dos gradientes conjugados. Em primeiro lugar, no GMRES a norma do resíduo é minimizada a cada iteração – em contraste, no método dos gradientes conjugados, minimiza-se a norma do erro na incógnita x . Em seguida, as direções de busca não são conjugadas, mas sim ortonormais, exigindo o armazenamento de todas as direções já percorridas (CALVETTI; SOMERSALO, 2007).

3.2 Problema inverso

Pode-se então tomar os nós correspondentes aos eletrodos e, subtraindo os valores dos potenciais medidos, definir um vetor de erros, válido para cada padrão de corrente elétrica aplicada no

sistema. Tomando simultaneamente p padrões de corrente linearmente independentes³ e medidas tomadas nos m eletrodos⁴, pode-se definir o erro de acordo com a eq. 3.8. Nesta equação, $\hat{V}_{[mp]}$ é definido alocando ordenadamente as colunas de $T_{[m \times n]} \hat{V}_n$ $[n \times p]$.

$$e_{[mp]} = V_{[mp]} - \hat{V}(\hat{\sigma})_{[mp]} \quad (3.8)$$

Visando minimizar o erro total, pode-se definir uma função objetivo de acordo com a eq. 3.9, a ser minimizada.

$$\Phi_1(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2} e_{[1 \times mp]}^t e_{[mp \times 1]} \quad (3.9)$$

3.3 Regularização

Entretanto, a minimização do erro de medição é incapaz de proporcionar uma solução única, uma vez que o problema é mal-posto. É necessário recorrer a formas de regularizar o problema inverso.

Do ponto de vista matemático, a ideia fundamental de regularização, no sentido clássico, é substituir o problema original, mal-posto, por um bem-posto que seja próximo do problema original (VAUHKONEN, 1997). Ressalta-se que, a proximidade com relação ao problema original e o quão bem-posto é o novo problema são condições conflitantes, requerendo a busca por uma solução de compromisso.

Uma abordagem que permite uma boa compreensão teórica é a de decomposição truncada em valores singulares. Tomando a decomposição em valores singulares, os valores singulares menores que um certo valor limite são desprezados. Esse truncamento dos menores valores singulares elimina a influência do ruído das medidas na imagem reconstruída. É importante notar que esses pequenos valores singulares teriam um grande impacto na imagem, uma vez que o operador inverso toma o recíproco dos valores singulares. No entanto, essa técnica não é usualmente aplicada a problemas de muitas incógnitas, uma vez que a decomposição em

³No caso de excitação bipolar, o número máximo de padrões de corrente permitidos é determinado pela combinação dos m eletrodos dois a dois, isto é, $C_2^m = \frac{m!}{(m-2)!2!}$. No entanto, ruído nas medidas permite que padrões de corrente repetidos sejam interpretados simultaneamente, por constituírem um conjunto (fracamente) linearmente independente. Assumindo que os erros tenham média nula, a análise conjunta de diversos padrões reduz a influência dos erros na estimação da distribuição de propriedades elétricas.

⁴Há um número máximo de valores de impedância que podem ser calculados diretamente a partir das medições nos m eletrodos. De acordo com (MURAI; KAGAWA, 1985) esse número é $\frac{m(m-1)}{2}$, sendo definido pela forma que cada eletrodo percebe os outros e limitado pelo teorema da reciprocidade.

valores singulares é custosa (FOX; NICHOLLS; TAN, 2010; VAUHKONEN, 1997). Ressalta-se que a determinação da quantidade de valores singulares aceitável não é evidente (PRESS et al., 1992).

Ao se resolver o problema inverso com um método que recai em um sistema linear de equações e utilizando um método iterativo – como o método dos gradientes conjugados, apresentado anteriormente na seção 3.1.1.1 – para resolver esse sistema, pode-se regularizar a solução através do truncamento de iterações. Isso pois os métodos do tipo de gradientes conjugados minimizam o erro de forma ordenada – i.e., as direções de maiores valores singulares da matriz A são percorridas nas primeiras iterações – e pois as direções de menores valores singulares são as direções da sensibilidade da solução do sistema linear a ruído (CALVETTI; SOMERSALO, 2007). De forma análoga ao problema de ordem do modelo truncado para valores singulares, a determinação do número máximo de iterações é um problema de difícil solução. A fig. 3.2 mostra evidências de que esse fenômeno de semi-convergência ocorre também para o problema inverso não linear de TIE e que o truncamento de iterações com o algoritmo de Gauss-Newton é uma forma de regularizar a solução.

Figura 3.2: Semi-convergência em artigo de 1987: evolução do erro de reconstrução por iteração, para diferentes níveis de ruído de “medição” ($\square$ 1%, $+$ 5 %, $\diamond$ 10 %, $\triangle$ 20 %). Figura de (YORKEY; WEBSTER; TOMPKINS, 1987).

3.3.1 Regularização no sentido clássico: regularização generalizada de Tikhonov

Uma forma explícita de expressar o problema regularizado como uma alternativa bem-posta ao problema original foi proposta por Tikhonov em 1943, em um artigo em russo. Na formulação generalizada (TIKHONOV; ARSÉNINE, 1976), o funcional da eq. 3.9, mal-posto, é substituído por um funcional similar, descrito de acordo com a eq. 3.10 e definido aqui apenas para a condutividade.

$$\Phi_2(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2} e(\hat{\sigma})^t e(\hat{\sigma}) + \frac{1}{2} \lambda (\hat{\sigma} - \sigma_b)^t W^t W (\hat{\sigma} - \sigma_b) \quad (3.10)$$

A matriz W é uma ponderação e o vetor σ_b reflete valores esperados para a distribuição de condutividades. Ambos serão discutidos em mais detalhes na sequência.

O parâmetro de regularização λ pondera o conflito entre a proximidade do problema original – a acomodação das medidas – e o quão bem-posto é o problema – o distanciamento de características indesejadas para a solução. A determinação do valor do parâmetro de regularização λ não é óbvia e deve refletir a confiança que se tem na regularização em análise. Nesse sentido, o formalismo da regularização generalizada de Tikhonov dialoga com a perspectiva bayesiana, em que uma informação probabilística acerca da influência da solução sobre uma variável medida é incorporada a um conhecimento prévio sobre a variabilidade típica da solução – um *a priori* estatístico –, resultando em uma estimativa *a posteriori* para a solução (CALVETTI; SOMERSALO, 2007).

A dificuldade de determinar o valor de λ é análoga à dificuldade em determinar o truncamento adequado, seja para a decomposição em valores singulares como para a resolução iterativa do problema inverso. De fato, essas formas de regularização tem efeitos similares (CALVETTI; SOMERSALO, 2007).

Tendo em vista que o funcional Φ_2 é minimizado, a matriz de ponderação W reflete uma característica indesejada para a solução. Com mais rigor matemático, pode-se afirmar que a solução regularizada fica mais próxima do núcleo do operador descrito por W (VAUHKONEN, 1997). A minimização do funcional Φ_2 também implica que soluções muito distantes da solução de referência σ_b sejam desfavorecidas.

O funcional regularizado Φ_2 pode ser interpretado como uma ponderação entre duas normas em espaços $\mathbb{R}^N$: uma no espaço de medidas e outra no espaço solução. Os matemáticos apontam que esse formalismo é válido em espaços de Banach (um espaço normado completo),

e portanto abrange casos além do $\mathbb{R}^N$. Dependendo do tipo de problema inverso em análise – do ruído envolvido ou da forma da imagem – diferentes normas ou regularizadores podem ser preferíveis. Uma regularização espacial é apresentada a seguir.

3.3.1.1 Filtro Gaussiano

Para penalizar soluções com grandes variações para a impedância, cria-se regularizador em que a matriz de ponderação W é um filtro passa alta, H , definido de acordo com a eq. 3.11. Nessa equação, I é a matriz identidade e L é um filtro passa baixa baseado em ponderações por distância.

$$H_{[e \times e]} = I_{[e \times e]} - L_{[e \times e]} \quad (3.11)$$

A matriz L é uma matriz simétrica de pesos nulos ou gaussianos, definidos de acordo com a eq. 3.12 no caso em que a distância d_{ij} entre dois elementos i e j for menor ou igual a seis vezes um desvio padrão σ_{geom} , que caracteriza o filtro espacial gaussiano e é definido *a priori*. Essa matriz deve ser normalizada de forma que a soma de cada fila seja igual à unidade.

$$L_{ij} = \exp \left(- \frac{d_{ijx}^2 + d_{ijy}^2 + d_{ijz}^2}{2 \sigma_{geom}^2} \right) \quad (3.12)$$

O uso dessa regularização suaviza variações de impedância, de forma similar ao efeito de desfoque (em inglês, *blurring*) no tratamento de imagens. A condição de variações suaves de impedância não condiz com a realidade para escoamentos multifásicos. No entanto, na ausência de melhores regularizações, a obtenção de um mapa de condutividades desfocado é preferível à alternativa de obter uma solução sem nenhum significado.

3.3.1.2 A priori amostral

Em contraste, pode ser construído um regularizador que permita variações abruptas na distribuição de impedância a partir da amostragem de uma população de distribuições de impedância típicas do sistema em análise. Essa biblioteca de estimativas esperadas pode ser utilizada como um *a priori* no sentido bayesiano. Esse *a priori* descreve a estatística da amostra de uma população de estimativas (KAPIO; SOMERSALO, 2004).

Essa amostra de estimativas pode ser obtida a partir de dados experimentais – como em (CAMARGO, 2013), que apresenta um atlas anatômico criado a partir de tomografias de

raio-X, em suínos, para regularização do problema de TIE – ou de dados simulados – como em (SANTOS, 2015), que apresenta um *a priori* baseado em amostras para detecção de furos em pericárdios bovinos via TIE. O tamanho (e representatividade) da amostra populacional é um fator determinante na qualidade do *a priori*. No primeiro trabalho, o atlas anatômico foi construído com uma população efetiva de 660 indivíduos, recombinao imagens de raio-X de 39 suínos, segmentadas em 5 materiais diferentes. No segundo, o *a priori* baseado em amostras foi criado a partir de 250.000 amostras.

Ambos os tratamentos acima requerem que a população seja descrita em termos de impedância elétrica. Para isso, é realizado um sorteio de propriedades a partir de uma função de densidade de probabilidade que caracterize cada meio, em um processo chamado de *bootstrapping* (SINGH; XIE, 2008). A determinação das funções de densidade de probabilidade das propriedades elétricas é outro ponto sensível. Para a construção do atlas anatômico (CAMARGO, 2013), valores médios foram determinados a partir da resolução do problema de TIE com dados experimentais, com a malha segmentada de forma a ter apenas cinco incógnitas. Um desses valores médios foi alterado para melhor adequação a outras fontes de dados. Já para o desvio padrão, três materiais tiveram valores determinados experimentalmente e outros dois, valores arbitrários. No segundo trabalho (SANTOS, 2015), foi determinada uma resistividade de 0,35 Ωm para o pericárdio, um valor cem vezes maior para furos e atribuído um desvio padrão de $\pm 15\%$ para ambos os casos.

Uma vez obtida uma amostra representativa para a população de estimativas, descrita em termos da impedância elétrica, é necessário descrever a estatística dessa amostra em um formato que possa ser incorporado no problema inverso de TIE. Para tal, é possível aproximar a distribuição estimada de impedância por uma distribuição Gaussiana, caracterizada por uma média $\bar{\sigma}^{am}$ e covariância Γ (KAPIO; SOMERSALO, 2004). No formato da eq. 3.10, o campo base é definido como $\sigma_b = \bar{\sigma}^{am}$ e a matriz de ponderação como $W = \Gamma^{-1}$.

Em escoamentos multifásicos, um *a priori* amostral foi apresentado em (DIAS, 2017), onde uma biblioteca de imagens obtidas experimentalmente com um sensor *wire-mesh* de 16x16 fios é utilizada para aumentar a resolução de imagens obtidas com sensores de menos fios (8x8, 6x6, 4x4 e 2x2).

Há uma grande diversidade de modelos na área de escoamentos multifásicos. Valendo-se dessa característica da área, é possível construir um *a priori* baseado em amostras para escoamento bifásico água-ar a partir de modelos fenomenológicos, uma vez que eles podem representar adequadamente a distribuição de fases de forma tratável. Isso foi realizado neste doutorado e é apresentado no apêndice B, com a compilação e estudo de um modelo fenomenológico e criação de uma biblioteca de imagens de TIE para escoamentos anulares água-ar.

3.3.2 Positividade da solução

Uma das dificuldades implícitas na resolução do problema inverso é que podem ser obtidas estimativas para as propriedades elétricas sem sentido físico, com valores negativos (TRIGO, 2005). Valores negativos para a condutividade elétrica representam matematicamente um sistema físico não conservativo, em que fatores não modelados são refletidos como “criação” de energia elétrica. Exemplos concretos incluem a modelagem de eletretos ou de sinapses neuronais, embora no último caso a resolução espacial das imagens de TIE não permita a estimação dessas propriedades. Assim, limitar *a priori* a busca de estimativas em condutividade a valores positivos tende a contribuir para a obtenção de melhores soluções.

Analisando apenas a parte real das propriedades elétricas, uma forma de evitar a obtenção de valores negativos é resolver o problema inverso em função de condutividades caso estimativas negativas sejam obtidas ao resolver o problema inverso em resistividades. Isso pois a busca por estimativas em resistividade para sistemas bastante condutivos leva a valores próximas de zero, que podem levar o algoritmo de estimação a ficar preso em minimizadores locais (TRIGO, 2005). No entanto, não há solução evidente para sistemas sem uma dominância clara entre altas condutividades ou resistividades.

Um método alternativo é baseado na regularização generalizada de Tikhonov, apresentada na seção 3.3.1. Se o termo de regularização for convexo e se a solução esperada for fisicamente possível, pode-se resolver o problema inverso em etapas, impondo diferentes parâmetros de regularização. Partindo de um valor alto o suficiente para que exista apenas um mínimo, global, e usando a solução final dessa primeira etapa como valor inicial da etapa seguinte, a resolução do problema inverso é repetida diminuindo consecutivamente a ponderação atribuída à regularização até que um fator de regularização adequado seja atingido (KŘÍŽ; DĚDKOVÁ, 2009).

Para a resolução do problema inverso com métodos do tipo de Newton, discutidos na seção 3.4.1, é possível determinar a cada iteração o maior fator de sub relaxação que não leve a condutividades negativas, em um método chamado de *backtracking* (PRESS et al., 1992). Há também os métodos reflexivos de Newton (no original, *reflexive Newton methods*) (BABAEIZADEH; BROOKS; ISAACSON, 2007), que tomam valores absolutos para as condutividades obtidas iterativamente. Diferentes métodos de reconstrução podem ser formulados usando uma projeção em conjuntos convexos (no original, *POCS – projection onto convex sets*), em que não é permitido que o método de reconstrução explore valores inferiores a um certo valor limite (PRESS et al., 1992; WANG et al., 2012; SALEHIN; HUANG; ABHAYAPALA, 2013).

Por outro lado, parametrizações podem ser implementadas a fim de restringir o espaço

de busca da solução sem recorrer a expressões condicionais no algoritmo. Em (SHAW; GOUSSARD; GUARDO, 1993), uma parametrização de alisamento, que leva em conta a proporção entre as diferenças relativas da distribuição de condutividade e uma distribuição-base homogênea é apresentada. Focando em imagens relativas para aplicações clínicas, foi proposta (ADLER; GUARDO, 1996) uma parametrização exponencial do quociente de duas condutividades, a incógnita e uma distribuição-base. No entanto, esses trabalhos não discutem as dificuldades impostas na escolha dessa distribuição-base de condutividades, em especial no caso de meios não homogêneos com grades variações de condutividade. Alternativamente, podem ser impostos valores máximos e mínimos para a condutividade através de uma parametrização sigmoïdal (TEIXEIRA et al., 2010; MOURA, 2013). No entanto, a determinação desses valores de referência – mínimos, máximos e de uma distribuição base – dependem de conhecimento prévio sobre o sistema.

Uma parametrização exponencial pode ser utilizada, definindo uma nova variável a ser estimada: a condutividade logarítmica. Na literatura de otimização (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), parametrizações são uma solução elegante de incorporar restrições, como a de positividade, e são válidas desde que os problemas, descritos na variável original e na variável parametrizada, tenham soluções equivalentes.

Uma parametrização que garante isso é o mapeamento de condutividade logarítmica, ς , para a condutividade, σ , apresentado na eq. 3.13. Nesta equação, a constante escalar σ_0 é incluída para consistência dimensional, de forma que $\sigma_0 = 1 \text{ S/m}$, e a nova variável de busca, a condutividade logarítmica ς , é adimensional (TARANTOLA, 2001).

$$\sigma = \sigma_0 \exp \varsigma \quad (3.13)$$

Do ponto de vista matemático, o problema inverso em ς pode ser definido como uma busca por estimadores ótimos, em algum sentido, no domínio $\mathbb{R}$. Em contraste, a estimação em σ busca soluções em $\mathbb{R}_+$.

O uso de condutividade logarítmica na estimação da distribuição de propriedades dielétricas não é novidade (BARBER; BROWN, 1984). No entanto, a maioria dos estudos que utilizaram parâmetros logarítmicos, fizeram-no para imagens relativas (KOTRE, 1989; SASAKI, 1994; HOLDER, 2005; FRIEDEL, 2003; GRYCHTOL; ADLER, 2014). Tarantola (TARANTOLA, 2006) discute que a propriedade física de condutividade elétrica pode ser representada em diferentes métricas. Note-se que, por ser não linear, essa mudança de variáveis tem grandes implicações à noção de distância entre dois valores de condutividade (por exemplo, do valor do sistema físico à estimativa inicial implementada) e deve implicar alterações na sensibilidade do problema inverso de TIE.

Não foram encontradas na literatura análises quantitativas do efeito na solução de TIE utilizando condutividade logarítmica ao invés das variáveis tradicionais (resistividade ou condutividade).

3.3.3 Redução da dimensão do espaço solução

No caso de malhas refinadas, a determinação das impedâncias é um problema subdeterminado, na medida em que há diversas soluções possíveis para os valores nodais do potencial elétrico de forma a acomodar os potenciais nos eletrodos.

3.3.3.1 Malha grosseira

Um método simples para diminuir a quantidade de variáveis do problema de estimação é a implementação de malhas grosseiras, com um número reduzido de elementos.

Para malhas muito grosseiras, instabilidades numéricas podem ser obtidas. Refinando a malha a partir de certo valor limite, essas instabilidades desaparecem. No entanto, a representação do meio contínuo em um sistema discreto introduz uma rigidez adicional, que diminui conforme o refinamento dessa malha. Recorre-se a testes de convergência de malha para avaliar sua sensibilidade ao número de elementos e verificar qual é a malha mais grosseira cujo refinamento não implica em uma alteração significativa nos valores estimados.

Malhas refinadas são computacionalmente custosas, tendo consequências maiores ainda no custo da resolução de problemas inversos. Uma forma de contornar isso é discutida em (KAPIO; SOMERSALO, 2004), com o método do erro de aproximação. Nesse método, o problema inverso é resolvido com uma malha grosseira e “corrigido”, em ordem zero, por uma malha refinada. Esse método foi implementado com sucesso em (CAMARGO, 2013).

3.3.3.2 Regiões de interesse

Uma vez fixada uma malha, uma segunda possibilidade é definir um número de regiões de interesse (ROIs, do inglês), estabelecendo um valor único para a variável em cada uma dessas regiões. Assim, pode-se reduzir consideravelmente o número de variáveis. Vauhkonen (VAUHKONEN, 1997) obtém estimativas com variações temporais mais estáveis com 5 ROIs, em vez de 496 variáveis.

Trigo (TRIGO, 2005) usa filtros de Kalman com ROIs e conclui que o uso de ROIs permite uma convergência mais rápida, mas pode levar a um maior desvio em relação à média nula para o resíduo de observação, indicando que o uso de (poucas) ROIs pode fazer com que o

modelo numérico seja incapaz de acomodar bem as medidas.

Wrasse (WRASSE et al., 2016) aplica essa estratégia para um sistema físico que pode ser completamente descrito com duas variáveis, com a descrição paramétrica de um escoamento estratificado. O trabalho obtém boas estimativas (em ECT) sem a necessidade de nenhuma outra forma de regularização.

3.3.4 Continuidade na evolução temporal

Pode também se assumir que exista alguma relação temporal entre estimativas obtidas para medidas consecutivas, na medida em que os sistemas físicos estão sujeitos à continuidade temporal. Em uma abordagem estocástica em tempo discreto, pode-se descrever um modelo linear para a evolução temporal das estimativas com a forma da eq. 3.14.

$$x_{k+1} = \phi_{k+1,k} x_k + \omega_k \quad (3.14)$$

Nessa equação, o estado a ser estimado x_k é um vetor de dimensão e . A matriz de transição de estados é denotada por $\phi_{k+1,k}$ tem dimensão $e \times e$. Finalmente, o vetor ω_k , de dimensão e , é uma variável aleatória.

3.3.4.1 Passeio aleatório

A hipótese mais simples é de que a estimativa no próximo instante de análise seja (ao menos parecida com) a estimativa no instante de tempo atual. Esse modelo é nomeado de passeio aleatório e caracteriza-se por possuir como matriz de transição a matriz identidade, de forma que toda a dinâmica do sistema seja decorrente do modelo assumido para a variável aleatória ω_k . Assim, o modelo de passeio aleatório é mostrado na eq. 3.15.

$$\phi_{k+1,k} = I \quad (3.15)$$

3.3.4.2 Transporte advectivo-difusivo

Seppänen (SEPPÄNEN et al., 2001) usa de operadores advectivos e difusivos, integrantes da equação de Navier-Stokes, para modelar a evolução dos estimadores. Aproximar a dinâmica de um escoamento multifásico modelando-o como o escoamento monofásico de um pseudo-fluido é a proposta do modelo homogêneo, discutida na seção 2.1.3, e, apesar de simples, é capaz de

fornecer estimativas adequadas para um escoamento em uma cuba com um agitador de duas pás com velocidade angular de $1,5 \text{ rot/s}$ (SEPPÄNEN et al., 2007a), por exemplo.

Determinação do perfil de velocidades É importante ainda definir um perfil de velocidades que caracterize o escoamento. Seppänen (SEPPÄNEN; VOUTILAINEN; KAPIO, 2009) realiza a identificação simultânea de propriedades elétricas e velocidades em um escoamento monofásico, com a identificação de um perfil de velocidades simplificado. Nesse trabalho, o filtro de Kalman estendido é usado para identificar propriedades (como a velocidade máxima) e a projeção do campo de velocidades em um espaço reduzido de perfis de velocidade. Desvios em relação ao perfil teórico podem ocorrer devido a cotovelos, junções em T ou a escoamentos multifásicos. Os autores reportam que, apenas com sensores TIE, essa estratégia requer alguma distribuição de concentrações, seja de bolhas ou de espécies químicas solubilizadas – de forma análoga a partículas marcadoras na técnica de PIV (*Particle Image Velocimetry*).

Um ponto central da estratégia acima é a definição desse espaço reduzido de perfis de velocidade, uma vez que espaços pequenos demais geram estimativas imprecisas e espaços grandes demais geram um problema mal-posto (SEPPÄNEN; VOUTILAINEN; KAPIO, 2009). Lipponen *et al* (LIPPONEN; SEPPÄNEN; KAPIO, 2010) determinam esse espaço reduzido com o método de *Proper Order Decomposition* (POD), referido como sinônimo de análise de componentes principais (PCA, na sigla em inglês). Os autores resolvem numericamente as equações de Navier-Stokes e de transporte de concentração para um conjunto linearmente independente de velocidades, estimam a energia média modelada com esse espaço reduzido e utilizam essa métrica para determinar o tamanho adequado para esse espaço reduzido.

Quando essa técnica de POD é aplicada diretamente a dados experimentais, a literatura de mecânica dos fluidos utiliza o nome de *Dynamic Mode Decomposition* (DMD) (SCHMID, 2010). Essa decomposição tem grandes semelhanças com o método de Ibrahim (IBRAHIM; MIKULCIK, 1973), que está contido na literatura de análise modal operacional.

3.4 Algoritmos para resolução do problema inverso

Serão apresentados a seguir métodos de minimização do funcional Φ_2 . Não serão discutidos métodos heurísticos, como algoritmos genéticos ou recozimento simulado. Dessa forma, três diferentes classes de algoritmos serão discutidas: os tratamentos determinísticos via métodos do tipo de Newton, o tratamento determinístico via gradientes conjugados e os tratamentos estocásticos via filtros de Kalman.

Os tratamentos determinísticos são chamados de estacionários (VAUHKONEN, 1997) por requererem o acúmulo de um lote de medidas e assumirem que o sistema em análise permanece estático durante esse acúmulo. No caso em que o sistema se altera significativamente durante o tempo de acúmulo de medidas, tratamentos determinísticos proporcionam uma imagem reconstruída média nesse tempo, como mostrado por exemplo em (KOLEHMAINEN et al., 2003). Em contraste, os métodos dinâmicos comportam uma evolução para o sistema em análise entre os instantes de incorporação de medidas.

Uma distinção importante para os métodos de minimização é a classificação em locais ou globais. Os métodos discutidos a seguir são locais e portanto assumem que existe um mínimo próximo à estimativa inicial para o vetor de propriedades elétricas. Essa hipótese de que o mínimo local “mais próximo” da estimativa inicial é o mínimo global que nem sempre é verdadeira. Frequentemente, é necessário sub-relaxar o esquema numérico para lidar com a não-linearidade do problema e obter estimativas condizentes. A seção 5.1 discutirá uma forma de expandir a região de influência de soluções fisicamente coerentes.

3.4.1 Gauss-Newton

Os métodos de Newton podem ser compreendidos como a busca por um mínimo local através da determinação de mínimos das sucessivas aproximações quadráticas para a hipersuperfície definida pela função objetivo (MADSEN; NIELSEN; TINGLEFF, 2004; MIRANDA, 2003). Para o caso em que se estima uma impedância real para cada elemento, essa hipersuperfície é descrita em $\mathbb{R}^{e+1}$, com as dimensões correspondendo às e incógnitas e à função objetivo. Para a minimização, define-se um processo iterativo em que a nova distribuição de propriedades é o ponto estacionário da linearização por Taylor da derivada da função objetivo Φ_2 (definido na eq. 3.10, p. 31) com relação às propriedades, isto é, de acordo com a eq. 3.16. Nessa equação, α é o parâmetro de sub-relaxação, um escalar real contido no intervalo $]0, 1]$ que estabiliza a busca pela solução e reflete a não-linearidade da função objetivo.

$$\sigma_{[e \times 1]}^{k+1} = \sigma_{[e \times 1]}^k + \alpha \frac{\partial^2 \Phi_2(\sigma_0)^{-1}}{\partial \sigma^2}_{[e \times e]} \left(-\frac{\partial \Phi_2(\sigma_0)}{\partial \sigma}_{[e \times 1]} \right) \quad (3.16)$$

Uma forma simples de deduzir o método de Gauss-Newton parte da função objetivo linearizada, mostrada na eq. 3.17. Essa derivação implicitamente já despreza uma variação de segunda ordem no cálculo da segunda derivada da função objetivo. Quando essa variação não é desprezada, recai-se no método de Newton-Raphson (VAUHKONEN, 2004). Ressalta-se que as variações de primeira ordem já são determinadas apenas de forma aproximada.

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(\sigma) = & \frac{1}{2} \left(V - \hat{V}(\sigma_0) - \frac{\partial \hat{V}(\sigma_0)}{\partial \sigma} (\sigma - \sigma_0) \right)' \left(V - \hat{V}(\sigma_0) - \frac{\partial \hat{V}(\sigma_0)}{\partial \sigma} (\sigma - \sigma_0) \right) \\ & + \frac{1}{2} \lambda (\sigma - \sigma_b)' W' W (\sigma - \sigma_b)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Na eq. 3.17, o termo $\frac{\partial \hat{V}}{\partial \sigma}(\sigma_0)$ é a derivada do potencial calculado nos eletrodos com relação às propriedades de cada elemento, conhecida na literatura como matriz Jacobiana. Para cada um dos e elementos define-se uma coluna da matriz Jacobiana de acordo com a eq. 3.18.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{V}(\sigma_0)}{\partial \sigma_i}_{[mp \times 1]} &= -\text{vec} \left(T_{[m \times n]} Y_{[n \times n]}^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_i}_{[n \times n]} Y_{[n \times n]}^{-1} c_{[n \times p]} \right) \\ &= -\text{vec} \left(T_{[m \times n]} Y_{[n \times n]}^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_i}_{[n \times n]} \hat{V}_{[n \times p]} \right)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Tendo em vista que a função objetivo é positiva semi-definida, pode-se determinar o mínimo da aproximação da função objetivo calculando seu gradiente, de acordo com a eq. 3.19.

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{\Phi}_2(\sigma) = & \frac{\partial \hat{V}^t(\sigma_0)}{\partial \sigma} \frac{\partial \hat{V}(\sigma_0)}{\partial \sigma} \sigma - \frac{\partial \hat{V}^t(\sigma_0)}{\partial \sigma} \left(V - \hat{V}(\sigma_0) + \frac{\partial \hat{V}(\sigma_0)}{\partial \sigma} \sigma_0 \right) \\ & + \lambda W' W (\sigma - \sigma_b)\end{aligned}\quad (3.19)$$

Pode-se então obter um esquema numérico zerando o gradiente da aproximação da função objetivo, com linearizações sucessivas. Esse procedimento iterativo resulta em um sistema linear em σ_{k+1} , de acordo com a eq. 3.20.

$$\begin{aligned}0 = & \left(\frac{\partial \hat{V}^t(\sigma_k)}{\partial \sigma} \frac{\partial \hat{V}(\sigma_k)}{\partial \sigma} + \lambda W' W \right) \sigma_{k+1} \\ & - \frac{\partial \hat{V}^t(\sigma_k)}{\partial \sigma} \left(V - \hat{V}(\sigma_k) + \frac{\partial \hat{V}(\sigma_k)}{\partial \sigma} \sigma_k \right) + \lambda W' W \sigma_b\end{aligned}\quad (3.20)$$

Incluindo a sub-relaxação α , a eq. 3.20 pode ser reescrita de forma explícita em uma iteração do método de Gauss-Newton, de acordo com a eq. 3.21.

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \alpha \left(\frac{\partial \hat{V}^t}{\partial \sigma}(\sigma_k) \frac{\partial \hat{V}}{\partial \sigma}(\sigma_k) + \lambda W^t W \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{V}^t}{\partial \sigma}(\sigma_k) (V - \hat{V}(\sigma_k)) - \lambda W^t W (\sigma_k - \sigma_b) \right) \quad (3.21)$$

O processo iterativo é repetido até que um dos três critérios de parada mostrados nas equações 3.22 seja satisfeito, onde ε_σ é a precisão de cálculo estabelecida para a condutividade de um elemento, $\varepsilon_{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right|}$ é a precisão de cálculo definida para a variação da função objetivo com relação às condutividades (o que é um indicativo de proximidade de um mínimo para a função objetivo) e MaxIter é o máximo número de iterações permitidas. O limite de precisão de cálculo depende da representação em ponto flutuante usada. Sugere-se (PRESS et al., 1992) impor precisões de cálculo de no máximo 10^{-4} no caso de representação em ponto flutuante simples (32 *bits*) e de no máximo $3 \cdot 10^{-8}$ no caso de dupla (64 *bits*). Para análise de dados sujeitos a ruído, devem ser utilizadas precisões menos rígidas.

$$\left\| \sigma^k - \sigma^{k-1} \right\| \leq \varepsilon_\sigma \quad (3.22a)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{V}^{k^t}}{\partial \sigma} (V - \hat{V}^k) \right\| \leq \varepsilon_{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right|} \quad (3.22b)$$

$$\text{número de iterações} = \text{MaxIter} \quad (3.22c)$$

Vale notar que cada iteração do método de Gauss-Newton recai na resolução de um sistema linear, que já foi discutida na seção 3.1.1.

3.4.1.1 Outros métodos de Newton

Uma outra forma de minimizar a função objetivo 3.10 (p. 31) – que forma um problema não linear de mínimos quadrados – é usando o algoritmo de Levenberg-Maquardt (MADSEN; NIELSEN; TINGLEFF, 2004). Esse algoritmo propõe que o passo de correção da distribuição de condutividades seja uma combinação linear entre a direção ditada pelo algoritmo de Gauss-Newton (eq. 3.16) e a direção de máxima declividade para a função objetivo (o método de *steepest descent*). A escolha sobre como realizar a combinação linear é um ponto central do algoritmo e implicitamente determina uma região de confiança na linearização do problema original, não

linear (VAUHKONEN, 2004). Na TIE, o Levenberg-Maquardt foi introduzido por ser uma forma de regularizar a solução do problema inverso (YORKEY; WEBSTER; TOMPKINS, 1987). Como notado na seção 3.3.1, ressalta-se aqui que o método de Levenberg-Marquardt equivale a introduzir uma regularização impondo que os valores numéricos a serem determinados tenham baixa magnitude (VAUHKONEN, 1997).

Tendo como ponto de partida do método de Gauss-Newton, o método de Kaczmarz evita a inversão da matriz $\left(\frac{\partial \hat{V}^t}{\partial \sigma_{[e \times mp]}} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \sigma_{[e \times mp]}} \right)$, calculada em σ_k . Ao se tratar os padrões de corrente em separado, cada escalar $\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial \sigma_{[1 \times e]}} \frac{\partial \hat{V}^t}{\partial \sigma_{[e \times 1]}} \right)^{-1}$ preenche uma posição da diagonal principal de uma matriz que aproxima a matriz inversa original (VAUHKONEN, 2004). A autora reporta que uma desvantagem do método é a necessidade de computar o problema direto com maior frequência.

3.4.2 Gradientes conjugados não lineares

O método dos gradientes conjugados apresentado na seção 3.1.1.1 pode ser generalizado também para a minimização de um problema não linear (SHEWCHUK, 1994). No caso de TIE, isto permite a minimização diretamente do funcional da eq. 3.10, em vez de sua versão linearizada, eq. 3.17. Para aplicar o método, é necessário calcular o gradiente não linear da função objetivo, mostrado na eq. 3.23.

$$\nabla \Phi_2(\sigma) = -\frac{\partial \hat{V}^t}{\partial \sigma}(\sigma) (V - \hat{V}(\sigma)) + \lambda W^t W (\sigma - \sigma_b) \quad (3.23)$$

Assim como no caso linear, para o caso não linear o resíduo também é definido com a direção do gradiente mas no sentido oposto (isso pode ser notado, para o caso linear, comparando a eq. 3.5 (p. 27) e a eq. 3.4b (p. 26)). No entanto, no caso não linear, a fórmula recursiva, eq. 3.6c (p. 27), não pode ser utilizada, exigindo o cálculo do gradiente a cada passo.

Estabelecida uma direção de busca, a determinação do ponto “mais próximo” nessa direção, i.e., a definição de α , não é óbvia. Para lidar com a não-linearidade, busca-se um mínimo na direção de busca – de forma que se perde o benefício de percorrer cada direção apenas uma vez. A determinação do mínimo em uma direção pode ser realizada utilizando métodos de minimização em linha, como o método de Gauss-Newton ou o método das secantes (para determinação de mínimo), além de métodos heurísticos (SHEWCHUK, 1994; MADSEN; NIELSEN; TINGLEFF, 2004). A precisão na determinação de α tem um efeito importante na taxa de convergência do método como um todo (VAUHKONEN, 2004).

Finalmente, existem diversas formas de impor a conjugação entre as direções de busca,

i.e., de determinar β . As duas formulações mais citadas na literatura são a de Fletcher-Reeves e a de Polak-Ribière (SHEWCHUK, 1994; PRESS et al., 1992; VAUHKONEN, 2004), mostradas nas equações 3.24a e 3.24b, respectivamente.

$$\beta_{(i+1)}^{FR} = \frac{r_{(i+1)}^t r_{(i+1)}}{r_{(i)}^t r_{(i)}} \quad (3.24a)$$

$$\beta_{(i+1)}^{PR} = \frac{r_{(i+1)}^t (r_{(i+1)} - r_{(i)})}{r_{(i)}^t r_{(i)}} \quad (3.24b)$$

Ressalta-se a importância histórica da forma de Fletcher-Reeves. No entanto, a forma de Polak-Ribière é mais robusta e converge mais rapidamente, desde que valores negativos sejam desprezados (SHEWCHUK, 1994; PRESS et al., 1992; VAUHKONEN, 2004).

Em equações, o método dos gradientes conjugados não lineares é iniciado com a definição da direção de busca inicial, conforme a eq. 3.25.

$$d_{(0)} = r_{(0)} = -f'(x_{(0)}) \quad (3.25)$$

A seguir, cada iteração é composta pelas equações 3.26, de forma similar ao caso linear apresentado anteriormente.

$$\text{Determinar } \alpha_{(i)} \text{ que minimize } f(x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)}) \quad (3.26a)$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} d_{(i)} \quad (3.26b)$$

$$r_{(i+1)} = -f'(x_{(i+1)}) \quad (3.26c)$$

$$\beta_{(i+1)} = \max \left\{ \frac{r_{(i+1)}^t (r_{(i+1)} - r_{(i)})}{r_{(i)}^t r_{(i)}}, 0 \right\} \quad (3.26d)$$

$$d_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i+1)} d_{(i)} \quad (3.26e)$$

O critério de parada é o mesmo do caso linear, mostrado na eq. 3.7. Assim como no caso linear, o método de minimização pode ser pré-condicionado (SHEWCHUK, 1994), com uma aproximação da matriz Hessiana da função objetivo.

Devido à não-linearidade da função objetivo, há situações em que o método deve ser reiniciado na direção de máxima declividade, esquecendo do processo anterior de busca

(SHEWCHUK, 1994; VAUHKONEN, 2004). A primeira delas, já embutida na eq. 3.26d, ocorre quando o coeficiente $\beta^{PR} < 0$. Uma segunda situação ocorre quando o número de iterações sem que o método tenha sido reiniciado seja igual à dimensão do vetor de incógnitas x . Adicionalmente, o método deve ser reiniciado caso a nova direção de busca não seja uma direção de descida, i.e., caso $r_{(i+1)}^t d_{(i+1)} \leq 0$. Finalmente, uma forma de acelerar o método é reiniciá-lo caso os gradientes em duas iterações não sejam pelo menos aproximadamente ortogonais entre si, i.e., o método é reiniciado se a condição da eq. 3.27 for verdadeira, onde θ é o ângulo entre os dois gradientes e γ é um valor limite, tipicamente igual a 0,1 (VAUHKONEN, 2004).

$$\cos \theta = \frac{f'(x_{(i+1)})^t f'(x_{(i)})}{\|f'(x_{(i+1)})\| \|f'(x_{(i)})\|} \geq \gamma \quad (3.27)$$

3.4.3 Filtros de Kalman

Por levar em consideração a evolução temporal do sistema em análise, os métodos dinâmicos proporcionam uma forma natural de acumular a informação de medições anteriores. Além disso, o fato de os algoritmos serem recursivos permite o acompanhamento de variações mais rápidas na distribuição de propriedades elétricas, em comparação com os algoritmos anteriores, que armazenam lotes de medidas. Finalmente, uma diferença teórica importante é a estimação não apenas do estado, mas também da incerteza associada a essa estimativa.

3.4.3.1 Filtro estendido de Kalman

Para aplicar o filtro estendido de Kalman, é necessário primeiro definir os modelos de evolução e de observação. Um modelo de evolução simples, linear, foi apresentado na eq. 3.14. O modelo de observação, mostrado na eq. 3.28, é obtido através do MEF, é não linear e é idêntico à eq. 3.8 (p. 29). Neste trabalho, o estado x é uma variável de dimensão e que determina a condutividade elétrica para cada elemento finito.

$$V^k = \hat{V}^k(x_k, c_k) + e_k \quad (3.28)$$

Sobre o modelo de observação, é importante notar que para uma malha não variante no tempo, a função $\hat{V}^k$ também é invariante no tempo. Sob essa hipótese, a notação será simplificada a $\hat{V}$. Além disso, o filtro estendido de Kalman exige que ambos os modelos sejam descritos em formas lineares. Linearizando a eq. 3.28 ao redor do estado no tempo discreto $k - 1$, obtêm-se a eq. 3.29, onde o erro v_k é a soma do erro e_k e do erro da linearização.

$$V^k = \hat{V}(x_{k-1}, c_k) + \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(x_{k-1}, c_k) (x_k - x_{k-1}) + v_k \quad (3.29)$$

Na notação típica para a área de filtro de Kalman, a eq. 3.29 pode ser reescrita de forma a isolar o resíduo r_k , definido como a diferença entre a medida e a influência da estimativa do estado nos sensores. Assim, os modelos de evolução e observação resultam de acordo com a eq. 3.30, em que $v_k = V^k$, $h = \hat{V}$ e $H = \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}$.

$$x_k = \phi_{k,k-1} x_{k-1} + \omega_k \quad (3.30a)$$

$$r_k = v_k - h(x_k, c_k) = H(x_{k-1}, c_k) (x_k - x_{k-1}) + v_k \quad (3.30b)$$

Os erros ω_k e v_k são assumidos como gaussianos de média nula e com covariâncias $Q = E[\omega_k \omega_k^t]$ e $R = E[v_k v_k^t]$, matrizes diagonais nos casos mais simples. Extensões podem ser feitas com o uso de *shaping filters* para a estimação de dinâmicas não modeladas, obtendo matrizes Q com elementos fora da diagonal principal (FLEURY; TRIGO, 2013).

Em específico, para as imagens absolutas em TIE, uma dificuldade intrínseca advém do fato de que há duas formas de condução de corrente envolvidas: uma de natureza eletrônica (nos eletrodos e circuitos) e outra de natureza iônica/de indução (no domínio de interesse, que contém a região interna do duto). O fato de haver modelos diferentes acarreta um desafio para a resolução do problema inverso de estimação, uma vez que o grau de confiança em cada modelo é bastante diferente. Trigo et al (TRIGO; GONZALEZ-LIMA; AMATO, 2004) implementam uma estratégia de estimação em duas fases. Nessa abordagem, a estimação de parâmetros do contato/circuito e do domínio é realizada alternadamente, até ser obtida convergência. Apesar da taxa de convergência ser mais lenta, as estimativas resultam mais precisas, uma vez que evita-se que o algoritmo de estimação fique preso em mínimos locais.

Uma vez definido o modelo, podem-se então apresentar as equações do filtro estendido de Kalman. Cada iteração do filtro de Kalman depende apenas da iteração anterior e é composta dos passos de propagação e de atualização.

O passo de propagação efetua uma predição da estimativa do estado $\hat{x}_k^{(-)}$ e da covariância do estimador $P_k^{(-)}$ no novo passo temporal, utilizando apenas do modelo de evolução, i.e, antes

da incorporação da medida. Isso é realizado respectivamente com a eq. 3.31a e a eq. 3.31b.

$$\hat{x}_k^{(-)} = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}^{(+)} \quad (3.31a)$$

$$P_k^{(-)} = \phi_{k,k-1} P_{k-1}^{(+)} \phi_{k,k-1}^t + Q \quad (3.31b)$$

A incorporação da medida na estimativa do estado é realizada no passo de atualização, composto de três equações. A primeira, mostrada na eq. 3.32a, define o ganho de Kalman G_k , que pondera a confiança no modelo e na medida. A incorporação da influência da medida no estado ocorre na eq. 3.32b, que atualiza a estimativa do estado em função do resíduo de medição. Finalmente, a eq. 3.32c recalcula a covariância incluindo a contribuição da medida.

$$G_k = P_k^{(-)} H^t \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) \left[H \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) P_k^{(-)} H^t \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) + R \right]^{-1} \quad (3.32a)$$

$$\hat{x}_k^{(+)} = \hat{x}_k^{(-)} + G_k r_k \quad (3.32b)$$

$$\begin{aligned} P_k^{(+)} &= \left[I - G_k H \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) \right] P_k^{(-)} \\ &= \left[I - G_k H \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) \right] P_k^{(-)} \left[I - G_k H \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) \right]^t + G_k R G_k \end{aligned} \quad (3.32c)$$

A formulação original, mal-condicionada, para a atualização da matriz de covariâncias, P_k^{+} , foi reescrita à forma de Joseph, uma formulação análoga (RIOS NETO, 2012), de acordo com a eq. 3.32c.

3.4.3.2 Filtro estendido iterado de Kalman

É possível lidar com a não-linearidade no modelo de observação em TIE utilizando a variante iterada do filtro estendido de Kalman. Essa variante permite melhor proveito da informação introduzida por meio da análise cada observação, uma vez que o passo de atualização é repetido até que as estimativas converjam entre si.

Como apresentado por Trigo (TRIGO, 2005), a estimativa atualizada do estado é inicializada com o valor propagado e então as eqs. 3.32a e 3.32b são recalculadas em função dos novos valores atualizados para as estimativas, até que seja atingida convergência (em número de iterações ou em tolerância nas estimativas, a um critério pré-definido) ou que um maior número

de iterações seja atingido.

3.4.3.3 Filtro JARK

Para determinar a confiabilidade do modelo para cada estado, o filtro adaptativo JARK (o acrônimo advém de Jazwinski, Rios Neto e Kuga) identifica valores para uma matriz Q diagonal simultaneamente à identificação das estimativas x . Isso é realizado por dois filtros de Kalman: o “pseudo-filtro”, que estima Q , é aninhado dentro do passo de propagação do filtro principal, que estima x . O equacionamento é apresentado em detalhes em (RIOS NETO; KUGA, 1982; NASCIMENTO JÚNIOR, 1988; TRIGO, 2005; RIOS NETO, 2012), por exemplo.

3.4.3.4 Filtro de Kalman regularizado (Tikhonov)

A regularização generalizada de Tikhonov pode ser introduzida no filtro de Kalman de forma explícita, adicionando a eq. 3.33 às equações de observação já existentes (KAPIO et al., 1998; TRIGO, 2005).

$$W (x_b - x_k) = v_k^1 \quad (3.33)$$

Assim como para o erro na equação de observação não regularizada, o erro v^1 é assumido com média nula e covariância $E [v_k^1 v_k^{1t}] = \frac{1}{\lambda} I$, onde λ é o parâmetro de regularização e é arbitrado *a priori*.

Visando colocar a eq. 3.33 no mesmo formato da eq. 3.30b, pode-se subtrair $W x_{k-1}$ de ambos os lados da equação, obtendo formulações aumentadas para as matrizes R , $H(x, c)$ e para o vetor de resíduos r_k , mostradas na eq. 3.34.

$$R^{reg} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} I \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$H^{reg} \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) = \begin{bmatrix} H \left(\hat{x}_k^{(-)}, c_k \right) \\ W \end{bmatrix} \quad (3.34b)$$

$$r_k^{reg} = \begin{bmatrix} r_k \\ W (x_b - x_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (3.34c)$$

Com essas matrizes aumentadas, podem-se utilizar as mesmas equações dos passos de

propagação e atualização mostradas respectivamente na eq. 3.31 e na eq. 3.32.

Uma forma de interpretar esse equacionamento é que o filtro de Kalman combina informações de um modelo de evolução com informações de fontes externas, tanto de observações como de valores esperados para o estado.

4 METODOLOGIA

Tendo em vista o exposto anteriormente, este trabalho implementou uma abordagem de integração da análise de dados experimentais com informações advindas de hipóteses definidas *a priori* sobre a solução. A regularização, em um sentido amplo, é uma forma de tornar o problema original, severamente mal-posto, tratável (BAL, 2011).

No entanto, a combinação de diferentes fontes de informação, eventualmente conflitantes entre si, requereu uma estratégia bem definida. A abordagem utilizada neste trabalho é esquematizada na fig. 4.1, com um diagrama de blocos mostrando a integração de fontes de informação e restrições.

Figura 4.1: Diagrama da estratégia implementada neste trabalho para a integração de diferentes fontes de informação visando resolver o problema inverso mal-posto de TIE.

Essa abordagem foi implementada com um filtro de Kalman, uma vez que esses algoritmos são rápidos e comportam naturalmente a integração de fontes de informações, incluindo matrizes de ponderação (R e Q) que podem ser calibradas de forma a refletir a confiabilidade de cada fonte de informação. Em especial, foi utilizado um filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com ruído aditivo e parametrização de estado em duas fases. Embora a perturbação imposta na matriz de covariância do erro de estimação signifique efetivamente a incorporação de ruído aditivo ao modelo de propagação, como isso é feito de maneira automática no algoritmo, caracteriza-se uma estratégia adaptativa.

As medidas foram analisadas com uma rotina computacional de método de elementos finitos (bidimensional e tridimensional) implementada em MatLab. Para o modelo de contato, foi utilizada uma variação do modelo Patacon, na medida em que elementos prismáticos triangulares tendem a ser mais adequados para representar uma camada fina, em que a direção da espessura tem gradientes mais intensos do que as outras direções.

4.1 Parametrização do estado

Antes de analisar dados experimentais, foi realizado um estudo sobre o método de imposição da condição de positividade da solução. Para tal fim, foi criado um sistema numérico com poucas variáveis de forma a isolar um único efeito: a influência da métrica que descreve o espaço solução sobre o problema inverso.

Algoritmos determinísticos (Gauss-Newton e Gradientes conjugados não lineares) foram implementados para resolver o problema inverso.

4.2 Bancada experimental de testes: escoamento bifásico água-ar

Dados experimentais foram obtidos em um sistema bifásico água-ar. Cinco configurações foram analisadas: (i) duto completamente preenchido com água, chamado de homogêneo; (ii) duto na posição horizontal parcialmente preenchido com água mas com predominância de ar, chamado de estratificado baixo; (iii) duto na posição horizontal parcialmente preenchido, com predominância de água, chamado de estratificado alto; (iv) duto em posição inclinada parcialmente preenchido de água, chamado de inclinado; e (v) caso dinâmico, com a passagem de bolhas.

Os ensaios foram realizados em um sistema de recirculação água-ar já construído

(YAMAGUCHI, 2012) e calibrado (YAMAGUCHI, 2016), mostrado na fig. 4.2. Nesse sistema são realizadas medições de vazões monofásicas antes da mistura dos fluidos. À jusante do trecho em que ocorre a mistura das fases, a tubulação tem um diâmetro de 50 mm e emula um sistema *flowline-riser*, típico na exploração submarina de petróleo, com um trecho da tubulação apoiada no leito submarino – o *flowline* – e um tubo de elevação até o nível do mar – o *riser*. Cada um dos trechos tem pouco mais de 6 metros de comprimento. É possível controlar o desnível angular do trecho referente ao *flowline*.

Figura 4.2: Sistema de recirculação água-ar instalado: à esquerda, dutos para os escoamentos monofásicos de água e de ar; em primeiro plano, a injeção de ar no escoamento de água; seguindo ao fundo, trecho de tubulação em acrílico que emula o *flowline*; ao fundo, na vertical, trecho da tubulação em acrílico que emula o *riser*.

4.2.1 Visão geral dos equipamentos incorporados à bancada

O equipamento de medição tomográfica foi incorporado no trecho horizontal da bancada. Esse sistema faz parte de um objetivo maior (PELLEGRINI et al., 2017), que é a medição de vazão

bifásica água-ar com a integração do tomógrafo de TIE, para determinar a fração de vazio, à medição da perda de carga média ao redor de uma placa de orifício. Foi prevista também a implantação de uma câmera para permitir a captura de imagens para visualizar o escoamento.

Tendo em vista a interferência de cada sub-sistema de medição no escoamento, optou-se por posicionar a câmera à montante, seguida da seção com eletrodos para o tomógrafo de impedância elétrica. Finalmente, mais à jusante, posiciona-se uma placa de orifício e os sensores de pressão.

4.2.2 Construção do aparato experimental

A fig. 4.3 mostra uma comparação do projeto e do sistema instalado, para os dois sistemas mais à montante.

Figura 4.3: Instalação na bancada de testes, cuba de visualização e eletrodos para TIE: (a) projeto em CAD e (b) projeto executado e instalado.

Os sub-sistemas da cuba e da placa de orifício serão discutidos no apêndice C. Os

eletrodos para TIE são apresentados na fig. 4.4.

A interface entre a eletrônica do tomógrafo por impedância elétrica com o escoamento multifásico foi construída como um trecho de tubulação em nylon com 33 eletrodos de aço inox de 10 mm de diâmetro, como mostrado na fig. 4.4. Cada eletrodo tem um diâmetro de 10 mm.

Figura 4.4: Interface do tomógrafo com o escoamento: equipamento construído para eletrodos.

Além do eletrodo que pode fazer o papel de terra, há 32 eletrodos divididos em quatro anéis iguais, compreendidos em 1,5 vezes o diâmetro do duto. Há uma defasagem no alinhamento angular dos eletrodos, de 45° de um anel de eletrodos para o adjacente. Dentro de cada anel, os eletrodos são equiespaçados angularmente.

A escolha por essa geometria resultou da análise de dois fatores principais: (i) um eletrodo de maior diâmetro tende a diminuir a relevância dos efeitos de contato e (ii) a distância entre os eletrodos reflete um equilíbrio entre, por um lado, efeitos de *shunt* e, por outro, a necessidade de proximidade para obter maiores gradientes de potenciais elétricos. Seria de enorme valia a realização posterior de um estudo visando melhorar essa geometria.

O circuito de excitação proporciona uma corrente bipolar com frequência de 125 kHz, chaveada de forma a obter um padrão dito pula-3 (MUELLER; SILTANEN, 2012). Nesse padrão de corrente há sequencialmente (e circularmente) um canal de injeção, três canais passivos, um de retirada de corrente e 27 canais passivos (ADLER; GAGGERO; MAIMAITIJIANG, 2011). Esses canais são conectados ao duto conforme a numeração dos eletrodos mostrada na fig. 4.5, que mostra uma vista planificada do duto. Nota-se que há três tipos de padrões de corrente: os intra-anel, entre anéis adjacentes e os entre anéis opostos. Nota-se também que os padrões de injeção de corrente utilizados são (aproximadamente, para os casos de corrente entre anéis) diametrais.

Figura 4.5: Representação esquemática da numeração dos eletrodos no duto, planificado.

As amplitudes das correntes elétricas foram definidas experimentalmente a um valor da ordem de 0,1 mA. A calibração foi realizada para o caso de maior fração de vazio (o caso mais resistivo), de forma a não saturar os canais de medição, limitados em ± 5 V. A baixa amplitude do sinal de excitação impõe um desafio adicional, dada a natureza mal-posta do problema.

Para cada padrão de corrente imposto, são realizadas medições nos 32 eletrodos. Tendo em vista que há 32 padrões de corrente bipolares pula-3 possíveis, são obtidas medidas em 1024 “sensores”, definidos como a combinação do canal de medição multiplexado em cada eletrodo físico.

De forma a suportar a pressão absoluta de projeto para a bancada experimental, de 400 kPa, foi definido o uso de o-rings, exigindo o faceamento da parede externa do duto e uma usinagem particular dos eletrodos. Os eletrodos foram fixados ao duto com uma rosca cilíndrica, rosqueada inteiramente por fora. O posicionamento da altura do eletrodo, o ajuste da pressão no o-ring e o posicionador dos anéis de contato elétrico foram construídos com roscas independentes entre si. Um desenho esquemático de montagem é mostrado na fig. 4.6.

Uma vez projetado e construído, o sistema foi calibrado de forma a garantir a estanqueidade e o posicionamento dos eletrodos, cuidando-se para que fiquem tangentes à superfície interna do duto. Dessa forma, limita-se a interferência dos sensores a pequenas reentrâncias na região do escoamento, com efeito reduzido de recirculação.

Figura 4.6: Vista parcial em corte longitudinal de projeto para a interface do tomógrafo com o escoamento: croqui de montagem para eletrodos.

(a)

(b)

Figura 4.7: Calibração dos eletrodos para tomógrafo: (a) teste pneumático e (b) verificação do posicionamento de eletrodo.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Ensaio numérico em sistema mínimo: descrição do espaço solução

Visando cobrir uma lacuna na literatura, esta seção apresenta uma análise de sensibilidade do uso de condutividade logarítmica, em vez de condutividade ou resistividade, na solução do problema de TIE. Este estudo compõe um artigo, publicado em 2018 (PELLEGRINI; TRIGO; LIMA, 2018).

5.1.1 Estrutura para problema inverso de TIE

Um fantoma numérico¹ bidimensional de 15 elementos foi utilizado para avaliar comparativamente a influência das diferentes parametrizações para a condutividade. Esse modelo, mostrado na fig. 5.1, é um hexágono assimétrico e irregular.

Figura 5.1: Fantoma com 15 elementos e 6 eletrodos nodais, nos vértices.

¹O nome “fantoma” é emprestado do contexto de imagens médicas, em que define sistemas, físicos ou numéricos, com características representativas de um objeto de interesse.

Para a geração de dados simulados, foram atribuídas as condutividades 0 , 1 S/m e 10 S/m para dois elementos internos e 1 S/m para todos os outros. Foram definidos seis eletrodos nodais², onde 15 padrões de corrente bipolar (todas as combinações dos 6 eletrodos em pares) foram injetados, repetidamente, 16 vezes. Os potenciais elétricos nos eletrodos foram obtidos a partir da solução do problema direto. Em seguida, as “medidas” foram formadas tomando-se esses potenciais e somando-os a uma realização ruído branco uniforme de média nula e com amplitude de 1% do maior potencial, equivalendo a uma relação sinal-ruído de 40 dB. Todos os problemas inversos resolvidos nesta seção utilizam o mesmo conjunto de correntes e potenciais elétricos “medidos”, i.e., há uma única realização para o ruído de medição.

A fim de evitar a necessidade de regularização e isolar um único fator (a parametrização da solução), mantendo-se inalteradas todas as outras, a mesma malha foi utilizada para a solução de ambos os problemas, direto e inverso. Um crime inverso (LIONHEART, 2004) seria configurado se a intenção fosse pleitear em favor de um método de inversão, fornecendo resultados falsamente otimistas para apenas uma das alternativas.

O problema inverso de TIE foi resolvido com a minimização iterativa do funcional Φ_1 , como definido na eq. 3.9 (p. 29), por meio de dois métodos: o de Gauss-Newton e o de gradientes conjugados não linear (variante Polak-Ribère, com minimização exata em linha). A escolha do primeiro algoritmo se deu por seu uso recorrente em TIE, e do segundo por não ser evidente como impor a condição de positividade.

A convergência dos algoritmos foi controlada pela norma euclidiana do tamanho do passo, de modo que $\|\sigma^k - \sigma^{k-1}\| \leq \epsilon_\sigma$, e pela norma euclidiana do gradiente da função objetivo, de modo que $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^k} \right\| \leq \epsilon_{deriv}$. Ambas as tolerâncias são ajustadas a $3 \cdot 10^{-8}$ (PRESS et al., 1992). Além disso, o número máximo de iterações é fixado em 10^5 . Exceto se mencionado explicitamente, a condição inicial para as soluções dos problemas inversos mostradas nesta seção é uma distribuição homogênea de condutividades, com $\sigma_0 = 2,789 \text{ S/m}$. Esse valor corresponde ao dobro da condutividade média, ponderada pela área dos elementos, do fantoma.

5.1.2 Convergência monotônica com Gauss-Newton: valor limite de sub-relaxação e mínimos locais

Ao resolver o problema inverso de TIE utilizando o método de Gauss-Newton, verificou-se um valor máximo para o fator de sub-relaxação de forma a obter convergência monotônica à solução

²Rigorosamente, cada eletrodo “nodal” tem uma densidade de corrente elétrica distribuída nas duas arestas adjacentes ao nó, com um valor máximo no nó e decaindo linearmente a zero nos outros extremos dessas arestas. Essa distribuição de densidade de corrente tem a forma definida pelas funções de interpolação utilizadas.

Tabela 5.1: Valor limite para o fator de sub-relaxação α (método de Gauss-Newton) que delimita convergência monotônica à solução física para o problema inverso de TIE no sistema em análise.

variável de busca	α_{thr}	número de iterações
σ	34.0%	92
ρ	17.8%	100
ζ	52.8%	24

fisicamente plausível. Para esse sistema e realização de ruído de “medição”, esses valores limites para o fator de sub-relaxação dependem da variável utilizada para descrever a propriedade física de condutividade. No caso em análise, esses valores limites são mostrados na tab. 5.1.

A solução do problema inverso em condutividade utilizando o método de Gauss-Newton com o valor limite de sub-relaxação é apresentada na fig. 5.2. A solução convergida é mostrada na fig. 5.2a e a análise de convergência na fig. 5.2b. Verifica-se convergência monotônica uma vez que, depois da primeira iteração, a função objetivo (marcadores em $\times$ na fig. 5.2b) apenas decresce. Na última iteração, o valor da função objetivo é $5,4 \times 10^{-4}$.

Figura 5.2: Solução do problema inverso de TIE (em condutividade, σ) usando o método de Gauss-Newton e o valor limite de sub-relaxação para convergência monotônica, α_{thr} .

Maiores fatores de sub-relaxação são desejáveis por fornecem uma convergência mais rápida. No entanto, o uso de fatores de sub-relaxação acima dos valores limites levou a uma das três situações indesejáveis: (a) convergência não-monotônica à solução física; (b) obtenção de um mínimo local correspondente a soluções não físicas, com condutividades negativas; ou (c) uma solução não numérica, obtida por divisões impróprias. Uma ilustração do caso (b) é mostrada na fig. 5.3, com a solução convergida e a análise de convergência.

Figura 5.3: Solução do problema inverso de TIE em condutividade (σ) com o método de Gauss-Newton e um fator de sub-relaxação $\alpha = 40.0\%$.

Verifica-se que o algoritmo alcança um mínimo, pois a norma euclidiana do gradiente da função objetivo (marcadores $\circ$ na fig. 5.3b) atinge o valor de 2.6×10^{-9} . Adicionalmente, esse mínimo é local pois o valor final da função objetivo (marcadores em $\times$) é de $2,8 \times 10^0$, valor maior do que o verificado utilizando o valor limite de sub-relaxação. No entanto, essa solução matematicamente possível, mostrada na fig. 5.3a, tem condutividades negativas.

O significado físico das condutividades negativas é uma violação da condição de conservação de energia, uma vez que a presença delas adiciona (numericamente) energia ao sistema. Isso justifica o valor mais alto para a função objetivo, que representa a energia – no sentido de análise de sinais – do erro estimado de medição, eq. 3.9.

Com o objetivo de mostrar como o algoritmo alcança soluções não-físicas, a fig. 5.4 mostra as primeiras 13 iterações para dois fatores de sub-relaxação: 34.0% (valor limite, fig. 5.4a) e 34.1% (fig. 5.4b). A energia exógena adicionada (numericamente) ao sistema pode permitir que os algoritmos de busca local atinjam mínimos que atendam aos critérios de parada mas representem soluções fisicamente impossíveis. Isso pode explicar a diferença qualitativa entre as figuras 5.4a e 5.4b. Ambas as simulações exibem condutividades negativas, mas apenas a primeira delas recede a uma solução plausível, parecendo não ter energia suficiente para explorar regiões do domínio que sejam atraídas a outros mínimos.

No entanto, condutividades negativas intrinsecamente não se fazem presentes quando o problema de TIE é descrito em termos de condutividade logarítmica (ς), implicando na inexistência de (ao menos alguns dos) mínimos locais. Dessa forma, a mudança das variáveis

Figura 5.4: Evolução da solução (13 primeiras iterações), ao se resolver o problema inverso de TIE em condutividade com o método de Gauss-Newton.

utilizadas para descrever o espaço solução modifica a hipersuperfície descrita pela função objetivo.

Ao se resolver o mesmo problema em função da condutividade logarítmica, obtém-se um maior valor limite para convergência monotônica. Com fatores de sub-relaxação maiores, são obtidas soluções não-físicas ou soluções não-numéricas, devido a divisões impróprias.

5.1.3 Região de convergência monotônica

O resultado estimado também pode ser influenciado pelos valores iniciais. Para o sistema em análise, a fig. 5.5 estende os resultados da tab. 5.1 para diferentes estimativas iniciais e mostra um aumento em robustez com o uso da condutividade logarítmica. Nesse gráfico, para uma sub-relaxação fixa α e uma distribuição inicial homogênea de condutividades, $\hat{\sigma}_0$ (definida como função da condutividade média do fantoma, $\bar{\sigma}$), verificou-se a convergência monotônica *a posteriori* até se determinar o valor limite de fator de sub-relaxação para convergência monotônica, α_{thr} , com precisão de 0.001. A região de convergência monotônica é a área delimitada pelos eixos coordenados e pelos marcadores, para cada parâmetro.

Nota-se que a estimacão em condutividade logarítmica (indicado com $\circ$ na figura 5.5) é mais robusta do que em condutividade (marcadores em $\times$ na figura 5.5) com relação aos valores iniciais. Essa afirmação é justificada pois, dada uma distribuição inicial, um fator de sub-relaxação maior pode ser usado para determinar estimativas em condutividade logarítmica. Por exemplo, para uma estimativa inicial de dez vezes a média ponderada da distribuição real, condutividade logarítmica permite o aumento do fator de sub-relaxação, de 4,42% para 15,50%.

Figura 5.5: Valores limites para o fator de sub-relaxação (para convergência monotônica à solução física) como função da estimativa inicial, usando o método de Gauss-Newton.

5.1.4 Taxa de convergência no problema inverso

O método de gradientes conjugados não linear, que não comporta um fator de sub-relaxação, foi utilizado para estudar taxas de convergência das estimativas. Para uma mesma condição inicial, de $\hat{\sigma}_0 = 2\bar{\sigma}$, a fig. 5.6 mostra a evolução da solução ao se buscar estimativas em condutividade e em condutividade logarítmica.

Nota-se que, resolvendo o problema inverso em condutividade, os estimadores tem uma convergência mais lenta para maiores valores finais obtidos. Em contraste, a busca de soluções em condutividade logarítmica permite que o resultado final seja atingido de maneira mais uniforme, com as taxas de convergência sendo menos dependentes dos seus respectivos valores finais estimados. Essa é uma propriedade desejável pois, como apresentado na seção 3.3, truncamento de iterações é uma forma de lidar com semi-convergência. Além disso, para casos dinâmicos, o truncamento de iterações pode incorrer em um viés, obtendo-se estimativas sistematicamente menos condutivas ao se resolver o problema inverso em condutividade. Ao se buscar estimativas em resistividade, também se observa uma taxa de convergência mais lenta para valores numéricos maiores (i.e., mais resistivos), com diferentes algoritmos de inversão (VAUHKONEN, 2004).

Figura 5.6: Evolução da solução ao se resolver o problema inverso de TIE com o método de gradientes conjugados não linear.

5.1.5 Uniformidade na taxa de convergência no problema inverso: tendência no problema direto

Vauhkonen (VAUHKONEN, 2004) relaciona essa diferença sistemática na taxa de convergência a uma assimetria na função de erro do problema direto, definida como a norma euclidiana da diferença entre o potencial elétrico, V , medido nos eletrodos para um sistema com uma não-homogeneidade e o potencial medido para um sistema homogêneo, V^{ref} .

Essa norma foi calculada aqui para diferentes valores de não-homogeneidades de alvos em um fantoma cilíndrico com diâmetro de 200 mm e 50 mm de altura, com 32 eletrodos circulares arranjados radialmente. Três alvos cilíndricos com diâmetros de 40, 20 e 15 mm foram inseridos no domínio, como mostrado na fig. 5.7. Esse domínio foi discretizado usando uma malha de 385.601 elementos.

As correntes foram injetadas diretamente nos nós das superfícies que correspondem aos eletrodos, de maneira análoga ao fantoma apresentado anteriormente, com a intensidade total da corrente sendo dividida igualmente entre esses nós. Então, 32 padrões de corrente elétrica do modo de injeção pula-3 foram aplicados nesse modelo e a média do potencial elétrico dos nós pertencentes à superfície de cada eletrodo foi calculada e definida como o potencial elétrico “medido”. Cada padrão de corrente foi aplicado uma única vez e não foi somado nenhum ruído no sinal “medido”, uma vez que essa análise se limita ao problema direto.

As condutividades das não-homogeneidades foram definidas com valores iguais entre si e foram analisadas, variando entre valores representativos para medula óssea ($\sigma = 3,4 \times 10^{-3} \text{ S/m}$,

Figura 5.7: Modelo para análise de sensibilidade, com 32 eletrodos e 385.601 elementos.

para corrente alternada em 125 kHz) (GABRIEL; LAU; GABRIEL, 1996) e prata ($\sigma = 6,2 \times 10^7$ S/m) (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2003). Esse grande intervalo de condutividades se justifica pois um dos desafios em TIE é lidar com sistemas de grande contraste. O valor base foi definido como a média aritmética dos dois extremos da variação da não-homogeneidade, tanto para condutividade como para condutividade logarítmica. As figuras 5.8a e 5.8b mostram, respectivamente para condutividade e condutividade logarítmica, a norma euclidiana da diferença dos potenciais medidos (para um domínio não homogêneo, V , e um homogêneo, V^{ref}) como função do valor das não-homogeneidades.

Estes gráficos mostram a influência agregada dos elementos não-homogêneos nos eletrodos, ou seja, a contribuição de cada elemento assemelha-se a uma versão em escala das curvas apresentadas. No contexto do problema inverso, esses gráficos podem ser interpretados como o dobro da função objetivo não regularizada, Φ_1 , para um fantoma com uma não-homogeneidade na iteração inicial, partindo de uma distribuição homogênea de condutividades.

Analisando a inclinação das curvas, há duas distinções importantes entre os gráficos das figuras 5.8a e 5.8b. Primeiramente, para uma estimativa inicial próxima do valor do campo-base, a simetria (aproximada, para valores de ordenadas de até 3×10^{-3} na fig. 5.8b) em torno da configuração homogênea indica que, para a condutividade logarítmica, uma subestimação (inicial) tem o mesmo efeito que uma sobre-estimação do valor real da incógnita. Isto implica que a taxa de convergência é mais homogênea no espaço solução, isto é, menos dependente do valor real das incógnitas. Em segundo lugar, ao se resolver o problema inverso, uma estimativa inicial errada em ordens de grandeza faz com que o esquema numérico execute um passo grande ao buscar estimativas em condutividade, mas um passo menor ao buscar estimativas em condutividade

Figura 5.8: Sensibilidade numérica do problema direto de TIE, para o modelo mostrado na fig. 5.7. Valores distintos para o campo-base são responsáveis pela variação de cerca de cinco ordens de grandeza na magnitude das ordenadas.

logarítmica. Adicionalmente, passos grandes, ao se buscar estimativas em condutividade, podem levar a soluções sem significado físico.

5.1.6 Justificativa teórica da melhoria na taxa de convergência

Um questionamento possível é se o uso de outras parametrizações para impor a propriedade de positividade para a condutividade proporcionam resultados similares. Para responder a isso, é necessário buscar uma teoria de estimação que permita essa discussão.

A partir de um contexto Bayesiano, o problema inverso de TIE pode ser visto como a determinação dos parâmetros do modelo que maximizam a probabilidade de que o modelo explique os dados medidos. Essa frase pode ser descrita de acordo com a eq. 5.1, que relaciona a função de densidade de probabilidade (PDF, na sigla do inglês *Probability Density Function*) *a posteriori* dos parâmetros estimados, $\pi_{post}(\sigma | V)$, como o produto da verossimilhança, $\pi_{ver}(V | \sigma)$, pelo conhecimento *a priori* dos parâmetros, $\pi_{prior}(\sigma)$, dividido pela PDF marginal das medidas, $\pi_{marg}(V)$.

$$\pi_{post}(\sigma | V) = \frac{\pi_{ver}(V | \sigma) \pi_{prior}(\sigma)}{\pi_{marg}(V)} \quad (5.1)$$

No caso específico em que a PDF marginal do modelo de medição possa ser considerada constante, o teorema de Bayes, mostrado acima, pode ser simplificado à eq. 5.2

$$\pi_{post}(\sigma | V) = k \pi_{ver}(V|\sigma) \pi_{prior}(\sigma) \quad (5.2)$$

Se, adicionalmente, a PDF *a priori* for gaussiana e for utilizada uma norma quadrática para avaliar o erro de medição, a estimação Bayesiana é equivalente à minimização da função objetivo Φ_2 , definida na eq. 3.10.

Uma extensão da perspectiva Bayesiana foi proposta por (TARANTOLA; VALETTE, 1982). Partindo de axiomas fundamentais, os autores formalizam a estimação em problemas inversos como a combinação de duas fontes de informação, normalizada por uma descrição adequada de uma “densidade de probabilidade homogênea” (que, originalmente, tinha sido nomeada “estado de informação nula”³). Em forma de equação, cada um dos três entes acima é descrito por uma densidade de probabilidade: $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $\mu(x)$, respectivamente. Resulta então que a informação conhecida sobre um sistema a partir de duas fontes distintas pode ser descrita de acordo com a eq. 5.3.

$$f(x) = \frac{f_1(x) f_2(x)}{\mu(x)} \quad (5.3)$$

É importante notar que, em contraste com a perspectiva Bayesiana, em que as PDFs descrevem ora os parâmetros do modelo, σ , ora as medidas, V – ou as versões condicionais, no formalismo proposto por Tarantola e Valette a variável x representa ambos, os parâmetros do modelo e as medidas. Essa expressão, um tanto hermética, foi traduzida em (MOSEGAARD, 2011) como apresentado na eq. 5.4, em que a densidade de probabilidade *a posteriori* $\pi(\sigma, V)$ é calculada como o produto de uma distribuição $\theta(\sigma, V)$, que descreve a relação entre o modelo e os dados, multiplicada pelo *a priori* conjunto $\rho(\sigma, V)$ dividido pela densidade de probabilidade homogênea $\mu(\sigma, V)$.

$$\pi(\sigma, V) = \frac{\theta(\sigma, V) \rho(\sigma, V)}{\mu(\sigma, V)} \quad (5.4)$$

A formulação da eq. 5.4 é reduzida à formulação mostrada na eq. 5.2 ao serem aplicadas hipóteses simplificadoras adicionais, como por exemplo a de que a relação entre os parâmetros do modelo e as medidas é conhecida de forma exata e a hipótese de uma densidade de probabilidade homogênea constante.

³Ambas as nomenclaturas foram traduzidas literalmente do inglês, “null information density function” e “homogeneous probability density”. De acordo com (MOSEGAARD, 2011), o uso e a nomenclatura dessa densidade de probabilidade μ foi objeto de controvérsia.

Considerando a hipótese de independência para a densidade de probabilidade homogênea, pode-se escrever a eq. 5.5, separando efeitos das medidas e dos parâmetros de modelo.

$$\mu(\sigma, V) = \mu_d(V) \mu_m(\sigma) \quad (5.5)$$

A densidade de probabilidade homogênea dos parâmetros do modelo, $\mu_m(\sigma)$, é uma descrição probabilística do espaço solução do problema inverso, limitando e atribuindo ponderações a valores específicos.

O apêndice D mostra a dedução das densidades de probabilidade homogênea para condutividade e resistividade. Resulta que ambas são descritas por uma função hiperbólica (também em (MOSEGAARD, 2011)). No entanto, para simplificar a eq. 5.4 à formulação mostrada na eq. 5.2, é requerido que a densidade de probabilidade homogênea seja constante para que ela seja incorporada no escalar k . O uso da condutividade logarítmica pode ser visto como uma mudança de coordenadas para o espaço dos modelos (TARANTOLA; VALETTE, 1982), espaço solução do problema inverso de TIE. A densidade de probabilidade homogênea descrita em termos da condutividade logarítmica resulta constante (ver apêndice D).

Uma vez que os ensaios numéricos realizados buscaram isolar a parametrização como única diferença entre os casos estudados, parece razoável que a diferença sistemática na taxa de convergência ao se resolver o problema inverso de TIE – com convergência mais uniforme em condutividade logarítmica e com uma tendência em condutividade ou resistividade – advenha da diferença na densidade de probabilidade homogênea. Resolver o problema inverso de TIE em condutividade ou resistividade supondo incorretamente que a densidade de probabilidade homogênea seja constante pode levar à tendência na taxa de convergência, de ser mais lenta para valores maiores finais das estimativas. Esta afirmação é corroborada pela assimetria observada na figura 5.8a.

Uma outra coordenada com a densidade de probabilidade homogênea constante, chamada de condutividade logarítmica restringida, foi concebida. Esta nova parametrização é apresentada e discutida no apêndice D.

5.2 Ensaios numéricos para a geometria construída

Serão apresentados a seguir ensaios numéricos com a geometria do duto, visando (i) analisar sensibilidade ao refinamento de malha e (ii) testar os algoritmos de inversão implementados com um caso em que há completo conhecimento sobre os valores a serem estimados.

5.2.1 Discretização: sensibilidade à malha

O aparato experimental deve ser representado em um domínio discreto para o tratamento computacional. Foram criadas malhas de elementos finitos com o programa GMSH, com diferentes graus de refinamento, seguindo a geometria apresentada na seção 4.2.2. Um trecho reduzido do duto foi representado, com o truncamento, à montante e à jusante, a uma distância axial de meio diâmetro a partir dos anéis de eletrodos mais extremos. Uma malha típica é mostrada na fig. 5.9.

(a) Vista transversal

(b) Vista longitudinal

(c) Detalhe: contato

Figura 5.9: Malha de elementos finitos utilizada para resolver o problema inverso de TIE. O meio de interesse é composto por 21538 elementos tetraédricos. Os 32 contatos, representados com um modelo Patacon, somam 6664 elementos prismáticos de base triangular, divididos em uma camada para representar o metal e seis camadas para a impedância de contato.

Como referido anteriormente, utiliza-se uma variação do modelo Patacon com quantidades pré-definidas de camadas de elementos para representar, com elementos prismáticos de base triangular, a impedância de contato e a parte metálica. O meio de interesse é modelado com elementos tetraédricos, com dimensões controladas por comprimentos característicos no eixo central do duto e na parede do duto. Esse último comprimento característico determina o refinamento da malha tanto no meio de interesse como no contato. Resulta, portanto, que o refinamento da malha é determinado por quatro parâmetros: comprimento característico no eixo central, comprimento característico na parede do duto, quantidade de camadas para representar metal e quantidade de camadas para representar o contato. Variando o comprimento característico na parede do duto, por exemplo, obteve-se o gráfico mostrado na fig. 5.10, com os potenciais “medidos”. Foram atribuídas as condutividades de $0,013 \text{ S/m}$ e $0,02 \text{ S/m}$ para o meio de interesse e o contato, respectivamente. Os 32 padrões de corrente são impostos e não foi somado nenhum ruído à “medição”, dada pelo potencial elétrico do nó mais central da face externa do trecho que representa o metal.

Figura 5.10: Variação dos potenciais elétricos para os eletrodos ativos (em que há corrente não nula, para os 32 padrões de corrente bipolares) como função do refinamento do comprimento característico na parede do duto.

Uma forma clássica de mostrar os resultados principais da fig. 5.10 é a análise apenas das maiores variações absolutas nas “medidas” obtidas com malhas de dois graus de refinamento próximos entre si. Isso pode ser visto na fig. 5.11, que apresenta a sensibilidade dos potenciais “medidos” aos parâmetros de controle da malha para os eletrodos ativos – em que a corrente do circuito de excitação é transmitida ao meio de interesse – e para os eletrodos passivos – em que não há corrente imposta pelo circuito de excitação.

Analisando a fig. 5.11, nota-se que os potenciais elétricos variam pouco com o refina-

Figura 5.11: Análise de sensibilidade da solução à variação dos parâmetros de controle da malha. A variação absoluta máxima dentre duas “medidas” é mostrada em função da alteração de valores para cada um dos quatro parâmetros de controle da malha.

mento do comprimento característico no eixo central do duto (variações na ordem de mV) e com o aumento da quantidade de camadas para modelar o metal (variações em μ V).

Com relação aos dois outros parâmetros (comprimento característico na parede do duto e quantidade de camadas para modelar o contato), há uma variação na ordem de 0,1 V nas “medidas” nos eletrodos ativos. Para os eletrodos passivos, as variações são novamente na ordem de mV e μ V, respectivamente. A diferença de comportamento entre os eletrodos ativos e passivos sugere que o refinamento é necessário para melhoria do modelo de contato. Isso é condizente com a física do problema, na medida em que os maiores gradientes de potencial elétrico (e maiores densidades de corrente) estão próximos aos eletrodos ativos.

Tendo em vista que o objetivo central é o estudo do meio de interesse – e não uma identificação rigorosa das propriedades de contato, e considerando também o custo computacional envolvido, optou-se pelo uso dos valores mostrados na tab. 5.2 para os parâmetros de controle. Esses valores caracterizam a malha mostrada na fig. 5.9, que possui 21538 elementos tetraédricos

Tabela 5.2: Valores atribuídos para os parâmetros de controle da malha a ser utilizada para a resolução dos problemas inversos. Essa malha é a mostrada na fig. 5.9.

Parâmetro de controle da malha	Valor fixado
Comprimento característico no eixo central	6 mm
Comprimento característico na parede do duto	3,2 mm
Quantidade de camadas para representar o contato	6
Quantidade de camadas para representar metal	1

representando o meio de interesse e 6664 elementos prismáticos de base triangular representando os 32 contatos. Essa foi a malha utilizada para todos os problemas apresentados a seguir.

5.2.2 Validação dos algoritmos de inversão

Visando validar o algoritmo de inversão com um caso simples, foi realizado um ensaio em que os dados gerados por um sistema conhecido foram usados para estimar as propriedades elétricas originais. “Medidas” foram geradas e somou-se erro gaussiano com 1% de amplitude da máxima tensão “medida” (relação sinal-ruído de 40 dB). Para manter a complexidade ao mínimo, foram utilizados a mesma malha e o mesmo modelo de contato na geração dos dados e na resolução do problema inverso, de forma que se comete um crime de inversão (LIONHEART, 2004).

A evolução por iteração para as estimativas mapeadas em condutividade elétrica é mostrada na fig. 5.12 e comparada com os valores reais. Essas estimativas são obtidas utilizando o filtro estendido iterado JARK de Kalman para buscar estimativas em condutividade logarítmica.

Nota-se que as estimativas obtidas com a resolução do problema inverso correspondem aos valores reais que haviam sido definidos para gerar os dados.

Figura 5.12: Valores reais e evolução por iteração das estimativas, usando o filtro estendido iterado JARK de Kalman para um caso numérico mínimo na geometria de interesse.

5.3 Ensaios experimentais estáticos

A seguir serão apresentados resultados experimentais estáticos na geometria do duto.

5.3.1 Caso homogêneo

5.3.1.1 Calibração da matriz R

Calibrar a matriz da covariância esperada do erro do modelo de observação linearizado, $R = E[v_k v_k^t]$, não é uma tarefa evidente. Isso pois o erro v_k , mostrado na eq. 3.29 (p. 45) engloba três tipos de erros: o erro devido à linearização; erro de modelo (que inclui o erro de discretização da malha (discutido na seção 5.2.1) e a parte não modelada do circuito de medição (discutido na seção 3)) e_k , mostrado na eq. 3.28 (p. 44); e o ruído nos circuitos de excitação e medição. A análise a seguir é centrada nesse último tipo de ruído.

Para o caso homogêneo, por não haver dinâmica no meio de interesse, espera-se que uma longa série de dados reflita apenas o ruído de excitação e medição. Tomando 1000 repetições dos 32 padrões de corrente pula-3 nos 32 eletrodos, uma amostra da repetibilidade do sinal pode ser vista na fig. 5.13. Na figura, o sinal médio e os desvios de cada um desses 1000 sinais em relação à média, para os 1024 sensores.

Figura 5.13: Comparação entre a média e desvio de 1000 repetições do sinal medido para duto completamente preenchido com água. Os potenciais elétricos são plotados para cada sensor, definido como a composição do canal de medição e o eletrodo físico.

A quantificação desses desvios foi realizada com a análise dos momentos centrais para as distribuições de ruído de cada sensor.

O primeiro momento dos desvios tem pouco significado, uma vez que eles são definidos em função do valor médio.

Um histograma para o segundo momento central dos sinais medidos, calculado a partir de 1000 repetições para cada um dos 1024 sensores, é mostrado na fig. 5.14. Nota-se que há uma variabilidade não-desprezível nas variâncias dos ruídos de excitação e medição.

Figura 5.14: Variância do sinal para cada um dos 1024 sensores. Cada variância é calculada a partir de 1000 repetições.

Dessa forma, estabelecer uma matriz R diagonal com um único valor é uma aproximação que não representa bem a realidade. Visando especificar valores para a diagonal da matriz R , a fig. 5.15 mostra todos os 1024000 erros obtidos experimentalmente e uma curva englobando 6 desvios padrões, para cada sensor.

O gráfico da fig. 5.15 aparece em detalhe na fig. 5.16, onde são mostrados apenas dois padrões de corrente. Nota-se que tanto para o padrão de corrente 1, fig. 5.16a, como para o padrão de corrente 28, fig. 5.16b, há menor variabilidade nos erros para os eletrodos ativos e que há aumento gradativo de ruído, a cada bloco de oito sensores. Ambas são características próprias dos circuitos de excitação e medição utilizados.

Finalmente, visando comportar os outros tipos de erros que compõem a matriz R , assumiu-se que se possa escalar as variâncias dos ruídos de excitação e medição por um fator constante, para todos os sensores. Esse fator de escala para a matriz R será apresentado, para cada caso.

Figura 5.15: Ruído de excitação e medição, valores experimentais de 1000 repetições para cada um dos 1024 sensores. As curvas em preto denotam a região abrangida por seis desvios padrões, para cada sensor.

(a) Padrão 1 – eletrodos ativos: 1 e 5

(b) Padrão 28 – eletrodos ativos: 28 e 32

Figura 5.16: Ruído de excitação e medição e desvios padrões calculados, para sensores correspondentes aos padrões de corrente 1 e 28.

Tabela 5.3: Valores iniciais para a estimação, caso homogêneo.

P_0	10^3
fator de escala para R	120
Q_0	$10^3 \bar{R} = 1,614$
σ_0 meio de interesse	$0,1 \text{ s/m}$
σ_0 contato	$0,1 \text{ s/m}$

5.3.1.2 Estimação dos valores de contato

A seguir, os dados experimentais do duto completamente preenchido com água foram analisados para estimar valores para a condutividade da água e dos contatos. Foram estimadas 33 variáveis: a caracterização do contato para cada eletrodo e uma única ROI para o meio de interesse. Dada a pequena dimensão do estado, nenhuma regularização é requerida.

Os valores iniciais para as condutividades e para as matrizes P e Q são apresentados na tab. 5.3, assim como o fator de escala para a matriz R . Os valores iniciais para a matriz Q são definidos em função do valor médio dos elementos da matriz R , isto é, em função de $\bar{R} = 1,614 \cdot 10^{-3}$. Tendo em vista que os dados foram obtidos para um sistema estático, o modelo de passeio aleatório é utilizado para a matriz de transição ϕ . Para esta análise, foi implementada a estimação em duas fases, mencionada na p. 45.

O filtro JARK foi utilizado para atualizar a matriz Q , com a estratégia adaptativa de ajuste da matriz Q_p do pseudo-filtro (RIOS NETO, 2012). Foi permitido que o filtro iterado fizesse até três iterações, desde que a alteração máxima na condutividade elétrica fosse maior do que $\epsilon_\zeta = 0,001 \text{ s/m}$. As medidas foram tratadas em lotes de 1024, isto é, cada passo propagação-atualização do filtro tratou simultaneamente 32 padrões de corrente.

Com esses parâmetros de controle, o estado do sistema foi estimado em termos de condutividades logarítmicas, fornecendo os gráficos mostrados na fig. 5.17.

Uma vez que essa métrica não é a tradicionalmente utilizada para descrever as propriedades elétricas, fig. 5.18 mostra as estimativas mapeadas a variáveis usuais, na forma de condutividades elétricas.

Figura 5.17: Estimativas em condutividade logarítmica obtidas, para cada iteração, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

O filtro de Kalman avalia também uma covariância para as estimativas. A fig. 5.19 mostra a evolução por iteração para a norma euclidiana da matriz $P^{(+)}$ em separado para o modelo de contato e para o meio de interesse.

Nota-se na fig. 5.19 que o filtro estima uma baixa variância para o valor estimado para o meio, mas que a incerteza para as estimativas nos contatos estabiliza em um patamar mais alto.

Figura 5.18: Estimativas descritas em termos da condutividade, para cada iteração, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

O mesmo efeito é indicado pelas estimativas fornecidas pelo pseudo-filtro do filtro JARK para todos os elementos não-nulos da matriz Q , diagonal. A fig. 5.20 mostra que a estimativa

Figura 5.19: Evolução por iteração para a norma euclidiana da matriz P^+ estimada, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

para o meio tende a um valor assintótico baixo e que, ao contrário, as estimativas para o contato tendem a valores mais altos.

Ambos os gráficos acima sugerem uma diferença na qualidade dos modelos utilizados para o meio de interesse e para o contato. Essa impressão pode ser confirmada com a análise do resíduo de observação, separando os resíduos relativos aos eletrodos ativos dos resíduos dos eletrodos passivos: uma vez que não há corrente elétrica através dos eletrodos passivos, o modelo de contato não tem efeito sobre os resíduos de observação nos eletrodos passivos. Na verdade, o fato de não haver um modelo em separado para o circuitos de medição e excitação se reflete nos sensores ativos, tanto no resíduo de observação como nos valores estimados para o contato.

A fig. 5.21 mostra um histograma para os resíduos de observação normalizados da última iteração. Percebe-se uma distribuição que sugere convergência, por ser aproximadamente simétrica e com média próxima a zero (a média dos resíduos de observação normalizados é de $-0,008$ para os eletrodos ativos e de $0,015$ para os passivos). No entanto, nota-se um comportamento bastante distinto para a variabilidade dos resíduos nos eletrodos ativos e passivos.

A evolução por iteração da média dos resíduos de observação normalizados, forma tradicional de análise dos resíduos de observação, é mostrada na fig. 5.22, onde se apresenta a sua média dividida pela raiz quadrada do maior valor da matriz R . Note-se que, uma vez que o

Figura 5.20: Evolução por iteração para os valores estimados para a matriz diagonal Q , usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

Figura 5.21: Histograma para os resíduos de observação na última iteração, com diferenciação entre eletrodos ativos e passivos, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

Figura 5.22: Evolução por iteração para a média dos resíduos de observação normalizados, usando o filtro de Kalman estendido iterado JARK em duas fases para o caso homogêneo.

fator de escala para a matriz R foi definido de forma a acomodar os resíduos de observação nos eletrodos ativos, a média dos resíduos de observação tem baixa variabilidade.

5.3.2 Caso estratificado horizontal

Uma vez identificados valores para os contatos, apresenta-se a seguir casos com o duto na posição horizontal parcialmente preenchido com água, em dois níveis. Esse estudo visou verificar, com poucas variáveis, a capacidade de obter estimativas condizentes para o meio de interesse.

Para isso, foi efetuada apenas a estimação do meio de interesse, assumindo que as propriedades de contato não variem com a alteração da condutividade do meio (TRIGO, 2001). É importante ressaltar que o objetivo não é refinar a estimativa das propriedades do contato, mas sim ter valores que permitam uma representação realista para o meio de interesse.

5.3.2.1 Configurações do algoritmo de estimação

Para ambos os casos estratificados horizontais, utilizou-se o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman. Utilizou-se também o modelo de passeio aleatório para tratar lotes de 1024 medidas a cada passo e buscar estimativas em condutividade logarítmica, como efetuado na seção anterior. Os valores iniciais definidos para as matrizes P e Q e os parâmetros da distribuição normal usada para atribuir valores iniciais para as condutividades são apresentados na tab. 5.4, assim como o fator de escala para a matriz R .

Tabela 5.4: Valores iniciais para a estimação, casos estratificados horizontais.

P_0	10^5
fator de escala para R	300
Q_0	$10^3 \bar{R} = 1,614$
σ_0 meio de interesse	$N\left(8 \cdot 10^{-3}; (8 \cdot 10^{-5})^2\right) \text{ s/m}$

Foi utilizada também uma técnica de ruído aditivo, impondo um salto na matriz de covariância das estimativas P caso a sua norma variasse pouco em um conjunto de iterações. O critério adotado foi impor um salto para P caso o desvio padrão do conjunto das normas de P nas últimas 50 iterações for menor do que metade da média desses valores.

Tendo em vista que, para este ensaio, o duto estava em posição horizontal, qualquer configuração estática com preenchimento parcial de água proporcionará uma interface água-ar horizontal. Assim, o meio de interesse foi dividido em 50 lâminas horizontais, com 1 mm de espessura. Cada elemento da malha foi atribuído a uma ROI de acordo com a posição do seu centróide, calculado como a média dos quatro vértices. Uma representação esquemática dessas 50 ROIs é mostrada na fig. 5.23, com a representação gráfica do valor numérico da ROI (i.e., entre 1 e 50) para cada elemento. Resulta portanto que o estado a ser estimado tem 50 incógnitas.

Figura 5.23: Representação dos valores numéricos, para cada elemento, das 50 ROIs utilizadas na análise dos casos estratificados horizontais. Evidenciam-se (a) os valores de todas as ROIs e (b) a geometria estratificada de ROIs típicas. Cada estrato tem uma espessura da ordem de 1 mm.

Apesar do pequeno número de estimativas, implementou-se uma regularização gaussiana para evitar imagens com alto contraste. A matriz passa baixa L , discutida na eq. 3.12 (p. 32) foi implementada com $\sigma_{geom} = 4 \text{ mm}$ e é mostrada na fig. 5.24. Essa figura representa uma matriz simétrica que denota, para cada fila, a relação esperada de uma região de interesse com as demais.

Figura 5.24: Matriz passa baixa para regularização gaussiana, casos estratificados horizontais.

Em contraste com a regularização apresentada na eq. 3.10 (p. 31), a regularização foi implementada em função da condutividade logarítmica, isto é, o termo de regularização é descrito conforme a eq. 5.6. Foi atribuído o valor nulo ao campo base ς_b , sugerindo que o filtro busque estimativas ς próximas entre si.

$$\lambda (\varsigma - \varsigma_b)^t W^t W (\varsigma - \varsigma_b) \quad (5.6)$$

O fator de regularização λ foi ajustado empiricamente de forma a obter estimativas condizentes. A fig. 5.25 mostra a evolução das estimativas para o estado, em condutividade logarítmica, para fatores de regularização de diferentes ordens de grandeza. Não houve a preocupação de encontrar valores ideais para λ , e as estimativas para os casos estratificados horizontais foram obtidas com $\lambda = 1000$. É importante ressaltar que o regularizador Gaussiano não é o mais indicado para sistemas com interfaces bem definidas, como no caso de escoamentos água-ar. A aplicação desse regularizador tende a suavizar essas alterações abruptas nas propriedades elétricas.

Figura 5.25: Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano nos casos estratificados horizontais. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e a (d) mostra estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 1000$.

5.3.2.2 Estimação: caso estratificado alto

Com essa configuração, as medidas foram analisadas e forneceram as estimativas mostradas na fig. 5.26. Nota-se uma rápida convergência (em aproximadamente cinco iterações) a um patamar mantido durante o restante do procedimento de estimação.

Figura 5.26: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado alto.

A evolução da norma da covariância atualizada das estimativas $P^{(+)}$ e o histograma do resíduo de observação normalizado para a última iteração são mostrados na fig. 5.27.

Figura 5.27: Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado alto.

Nota-se o efeito da técnica de ruído aditivo para a norma de P^{+} na 50ª iteração. Boa parte dos resíduos de observação normalizados ficam na faixa $\pm 3\sigma$ e a média deles é de $-0,151$.

5.3.2.3 Estimação: caso estratificado baixo

Para o caso estratificado baixo, a evolução dos estimadores é mostrada na fig. 5.28

Figura 5.28: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado baixo.

As propriedades de convergência são mostradas na fig. 5.29, com a evolução da norma da covariância atualizada das estimativas $P^{(+)}$ (fig. 5.29a) e o histograma do resíduo de observação normalizado para a última iteração (fig. 5.29b).

Figura 5.29: Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado baixo.

Novamente, se observa a técnica de ruído aditivo para a norma de P^{+} na iteração de número 50. Os resíduos de observação se concentram na faixa $\pm 3\sigma$ e têm média de $-0,138$.

5.3.2.4 Análise comparativa

A distribuição espacial das estimativas para a última iteração de ambos os casos estratificados horizontais é mostrada na fig. 5.30. Nota-se que as estimativas permitem a diferenciação da quantidade de cada fluido no sistema.

Figura 5.30: Comparação entre as estimativas para os dois casos estratificados horizontais, na iteração 100.

Aplicando como critério para a diferenciação entre as fases a definição de um valor limite no meio da escala, fig. 5.31 ressalta a diferença na posição estimada para a interface estimada ar-água.

Figura 5.31: Visualização de interface água-ar estimada com critério adotado para diferenciação das fases, caso estratificado horizontal.

5.3.3 Caso estratificado inclinado

Visando estudar o efeito do aumento do número de variáveis, ainda com um caso estático, foi analisada uma situação na qual o duto foi colocado em uma posição inclinada.

5.3.3.1 Configurações do algoritmo de estimação

Utilizou-se o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman de forma similar ao apresentado anteriormente, com o modelo de passeio aleatório, tratando lotes de 1024 medidas a cada passo e buscando estimativas em condutividade logarítmica. Os valores iniciais definidos para as condutividades e para as matrizes P e Q, assim como o fator de escala para a matriz R, são idênticos aos apresentados na tab. 5.4.

Com o duto inclinado, é necessário que as ROIs comportem a possibilidade da altura da lâmina de água variar também na direção axial. Para isso, o meio de interesse foi dividido em 1250 regiões de forma que os centróides de cada elemento foram classificados a partir de uma vista lateral do duto, com o auxílio de uma grade de quadrados de aresta de 2 mm, de forma análoga ao apresentado no caso horizontal. A fig. 5.32 mostra os valores numéricos das ROIs (1 a 1250) com uma representação em escala de cores para este caso.

Figura 5.32: Representação, para cada elemento, dos valores numéricos das 1250 ROIs utilizadas na análise do caso inclinado. Evidenciam-se variações nas direções (a) axial e (b) vertical. Cada região tem um comprimento característico mínimo na ordem de 2 mm. Para referência, reitera-se que o meio de interesse tem 50 mm de diâmetro e 104 mm de comprimento axial.

A matriz passa baixa L para as 1250 ROIs, com $\sigma_{geom} = 10$ mm, resulta conforme a fig. 5.33. Novamente, atribui-se o valor nulo para o campo base da regularização ζ_b .

Figura 5.33: Matriz passa baixa para regularização gaussiana, utilizada no caso estratificado inclinado.

O fator de regularização λ foi estudado conforme a fig. 5.34 e foi ajustado de forma análoga ao caso anterior, atribuindo-se o valor de 100.

Figura 5.34: Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano no caso estratificado inclinado. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e as (d)-(e) mostram estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 100$.

5.3.3.2 Estimação

A fig. 5.35 mostra a evolução das estimativas por iteração. Nota-se novamente que os valores finais são atingidos rapidamente, em cerca de cinco iterações.

Figura 5.35: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado.

A distribuição espacial dos estimadores é mostrada na fig. 5.36, sendo condizente com um duto inclinado parcialmente preenchido com água.

Figura 5.36: Distribuição espacial das estimativas descritas em termos da condutividade, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado.

A convergência do problema de estimação é caracterizada na fig. 5.37, com a evolução

da norma da covariância atualizada das estimativas $P^{(+)}$ (fig. 5.37a) e o histograma do resíduo de observação normalizado para a última iteração (fig. 5.37b).

Figura 5.37: Caracterização da convergência durante estimação usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado.

Para esta estimação a técnica de ruído aditivo foi levemente alterada, para analisar conjuntos de 100 iterações. Os resíduos de observação normalizados se concentram na faixa $\pm 3\sigma$ e tem média de $-0,154$.

A distribuição espacial da variância estimada para cada estado é mostrada na fig. 5.38, com a raiz quadrada dos elementos da diagonal principal da matriz P^{+} na última iteração. Essa análise das variâncias estimadas para cada dimensão do estado em separado, pouco usual para TIE, é mostrada, por exemplo, em (JULIER; UHLMANN, 1997) para o problema bidimensional de reentrada. Na figura, o desvio padrão estimado é descrito na unidade do estado, isto é, em condutividade logarítmica. Para essa iteração, as estimativas para o estado assumem valores entre $-4,48$ e $-4,32$.

Nota-se na fig. 5.38 que há seções transversais do duto com estimativas melhores e piores. Em geral, as estimativas em seções que contêm os eletrodos são mais confiáveis, sugerindo melhor sensibilidade às medidas.

Seguindo o critério para diferenciação de fases apresentado na seção anterior, a fig. 5.39 mostra uma interface água-ar estimada. Nota-se que uma linha aproximadamente reta é formada com uma inclinação próxima de 6° , valor condizente com a bancada experimental.

Figura 5.38: Distribuição espacial das incertezas estimadas, usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para o caso estratificado inclinado. Os valores exibidos são desvios padrões estimados para cada estado, em condutividade logarítmica. Para efeitos de comparação, as estimativas para o estado assumem valores entre $-4,48$ e $-4,32$.

Figura 5.39: Visualização da interface água-ar com critério simples para diferenciação das fases, caso estratificado inclinado.

Tabela 5.5: Valores iniciais para a estimação, casos dinâmicos.

P_0	10^5
fator de escala para R	120
Q_0	$10\bar{R} = 0,161$
σ_0 meio de interesse	$N\left(8 \cdot 10^{-3}; (8 \cdot 10^{-5})^2\right) \text{ s/m}$

5.4 Ensaio experimental dinâmico

Finalmente, visando acompanhar efeitos dinâmicos no duto, serão apresentados resultados para um caso de passagem de bolhas.

5.4.1 Configurações do algoritmo de estimação

Novamente, utilizou-se o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman para processar lotes de 1024 medidas a cada passo e buscar estimativas em condutividade logarítmica, como efetuado nas estimações anteriores. O fator de escala para a matriz R e os valores iniciais definidos para as condutividades e para as matrizes P e Q são apresentados na tab. 5.5.

Figura 5.40: Representação, para cada elemento, dos valores numéricos das 13843 ROIs utilizadas na análise do caso dinâmico. Evidenciam-se variações (a) na direção axial e (b) em uma única seção. Cada região tem um comprimento característico mínimo na ordem de 2 mm.

Para analisar o comportamento tridimensional da passagem de bolhas é necessário que as ROIs não tenham nenhuma direção predominante. Assim, as posições dos centróides de cada

elemento foram verificadas e separadas em regiões definidas por um malha estruturada fictícia de cubos de 2 mm de aresta. A fig. 5.40 mostra as 13843 ROIs resultantes.

De forma análoga ao apresentado anteriormente, a matriz passa baixa L calculada com $\sigma_{geom} = 10$ mm é mostrada na fig. 5.41. O campo base para a regularização ζ_b foi, novamente, definido como nulo.

Figura 5.41: Matriz passa baixa para regularização gaussiana, utilizada no caso dinâmico.

Fixou-se apenas a ordem de grandeza para o fator de regularização λ , que, analisando os gráficos na fig. 5.42, resulta com o valor de 10.

Figura 5.42: Estudo de sensibilidade ao fator de regularização λ para um regularizador Gaussiano nos casos dinâmicos. As figuras (a)-(b) mostram estimadores sub-regularizados e as (d)-(e) mostram estimadores sobre-regularizados. Determina-se o uso de $\lambda = 10$.

5.4.1.1 Modelos de evolução

Como discutido na seção 3.3.4, serão apresentados resultados utilizando três matrizes de transição de estado.

A primeira delas é a matriz identidade e corresponde a um modelo de passeio aleatório.

A segunda assume um modelo homogêneo, com um pseudo-fluido escoando com um perfil de velocidades plenamente desenvolvido. O que se propõe neste trabalho é que se escolha um perfil de velocidades. Algumas opções incluem o perfil laminar, diferentes perfis turbulentos, ou ainda perfis não-axissimétricos que sejam representativos para um escoamento multifásico de interesse. Por simplicidade, foi escolhido um perfil constante para implementar o modelo. A matriz de transição $\phi_{k+1,k}$ de transporte advectivo foi criada partindo de uma matriz nula e, para cada linha (cada elemento, no instante k), substituindo por 1 a coluna referente ao elemento mais próximo da posição propagada em um passo temporal. A matriz de transição para transporte advectivo resulta composta de valores binários com um elemento unitário por linha, não obrigatoriamente na diagonal principal.

Visando comportar outros deslocamentos das interfaces ar-água, um próximo passo foi a inclusão do fenômeno de difusão. O transporte difusivo é equivalente a implementar um operador espacial de desfoque gaussiano, discutido em detalhes na seção 3.3.1.1. O comprimento característico desse operador foi adotado como 2,4 mm.

O efeito dos três modelos de evolução é visualizado na fig. 5.43, que mostra a propagação prevista para uma não homogeneidade na seção analisada. São mostrados seis instantes nos quais a condutividade foi calculada apenas a partir da sua distribuição adotada no instante inicial.

Calibração da velocidade de advecção Ambos os modelos, de advecção pura e de advecção-difusão, requerem que se determine uma velocidade de advecção representativa. Para isso, tomaram-se os padrões de corrente intra-anel que têm contrapartes aplicadas nos eletrodos na mesma posição angular em outro anel mais à jusante. Para o circuito de excitação e interface do tomógrafo com o escoamento utilizados, os pares de padrões de correntes resultam de acordo com a tab. 5.6. Recomenda-se o uso da fig. 4.5 (p. 54) para referência.

As figuras 5.44 e 5.45 mostram séries temporais de sinais demodulados para o potencial elétrico nos eletrodos ativos com a aplicação dos padrões de corrente intra-anel da tab. 5.6. Nota-se que há padrões de variação similares, com um certo atraso para os anéis 3 e 4, mais à jusante. Em posse da distância entre os anéis, da taxa de aquisição de dados e desse atraso, pode-se estimar uma velocidade.

Figura 5.43: Ilustração do efeito dos modelos de evolução para uma não homogeneidade. Seis tempos discretos propagados são mostrados, calculados apenas a partir de uma distribuição inicial e a aplicação do modelo de evolução. A primeira coluna mostra o modelo de passeio aleatório. A segunda, o modelo de advecção pura; e a terceira, o de advecção-difusão. A primeira linha mostra uma distribuição inicial de condutividades e as linhas a seguir distribuições propagadas.

Els ativos dos anéis 1 e 3: série temporal

Figura 5.44: Séries temporais do potencial elétrico demodulado medido nos eletrodos ativos dos anéis 1 e 3, com a aplicação dos padrões de corrente intra-anel da tab. 5.6.

Els ativos dos anéis 2 e 4: série temporal

Figura 5.45: Séries temporais do potencial elétrico demodulado medido nos eletrodos ativos dos anéis 2 e 4, com a aplicação dos padrões de corrente intra-anel da tab. 5.6.

Tabela 5.6: Pares de padrões de injeção de corrente utilizados para obter velocidade representativa de advecção. Os eletrodos dos anéis 1 e 3 tem as mesmas posições angulares, assim como os eletrodos dos anéis 2 e 4.

Anel 1	Anel 3	Anel 2	Anel 4
1-5	18-22	9-13	26-30
2-6	19-23	10-14	27-31
3-7	20-24	11-15	28-32

Para quantificar esse atraso, pode-se tomar a covariância entre os pares de séries temporais mostrados nas figuras 5.44 e 5.45. A análise a seguir apresenta covariâncias não normalizadas (pela raiz quadrada do produto das variâncias de cada sinal, calculadas separadamente), de forma que a amplitude do pico reflete o grau de covariância entre os dois sinais. A fig. 5.46 mostra a covariância entre os sinais dos eletrodos ativos dos anéis 1 e 3.

Figura 5.46: Covariância entre sinais dos eletrodos ativos dos anéis 1 e 3, para todos os atrasos.

É importante ressaltar que, para grandes atrasos, a covariância tem baixo significado estatístico, dada a quantidade limitada de amostras. Tendo isso em vista, apenas ± 20 atrasos são mostrados na fig. 5.47 para todos os pares coerentes de eletrodos ativos. A mesma quantidade de atrasos é mostrada na fig. 5.48 para os eletrodos passivos.

Nota-se que os pares de eletrodos com covariância mais intensa correspondem aos eletrodos no topo do duto, em consonância com os gráficos das figuras 5.44 e 5.45. Isso reflete o ensaio experimental, indicando a presença de bolhas.

(a) Anéis 1 e 3

(b) Anéis 2 e 4

Figura 5.47: Covariância entre sinais dos eletrodos ativos, para ± 20 tempos discretos.

Nota-se também que quando há um pico pronunciado para a covariância, ele se concentra nos atrasos -2 e -3 , com uma predominância de -2 tempos discretos. Calculando a velocidade utilizando o valor de dois tempos discretos, é estimada uma velocidade característica de $v = 473 \text{ mm/s}$. As limitações para a faixa de valores que podem ser estimados e a precisão na determinação da velocidade característica advêm de dois fatores principais: a distância entre os anéis de eletrodos e a taxa de aquisição de medidas.

Figura 5.48: Covariância entre sinais dos eletrodos passivos, para ± 20 tempos discretos.

5.4.2 Estimação

O problema inverso foi resolvido para 52 iterações, correspondendo a um tempo de aproximadamente 2 s, iniciando no tempo discreto de número 222 (ou seja, o tempo discreto 223 nas figuras

5.44 e 5.45 corresponde à iteração 1 da análise.). Essa seleção da janela de análise de dados foi realizada com base nas figuras 5.44 e 5.45, em que os gráficos referentes aos eletrodos próximos ao topo do duto mostram dois eventos de aumento do potencial elétrico medido, refletindo a passagem de uma fase mais resistiva.

5.4.2.1 Modelo de passeio aleatório

Utilizando o modelo de passeio aleatório, a evolução das estimativas para o estado resulta conforme a fig. 5.49.

Figura 5.49: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de passeio aleatório.

Nota-se que a partir da terceira iteração o estado atinge valores compreendidos entre as flutuações obtidas durante o restante da estimação. Percebe-se a ocorrência de dois eventos em que valores mais resistivos são obtidos nas iterações dos intervalos 10 a 25 e 34 a 46.

A fig. 5.50 mostra a caracterização do comportamento do filtro. Nota-se que os resíduos de observação tem um histograma que adequado, com média de 0,029, distribuição aproximadamente simétrica e concentrada entre $\pm 3\sigma$, condizente com as hipóteses do modelo de estimação. No mesmo sentido, a norma da matriz P^+ tem um aspecto de decaimento exponencial. A técnica de ruído aditivo foi novamente alterada, agora para analisar conjuntos de 20 iterações, auxiliando o filtro a não deixar de incorporar novas medidas.

Figura 5.50: Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de passeio aleatório.

5.4.2.2 Modelo de advecção pura

A seguir, com o modelo de advecção pura, a evolução das estimativas é mostrada na fig. 5.51.

Figura 5.51: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção pura.

Em oposição ao mostrado anteriormente, no modelo de passeio aleatório, o valor predito para uma variável não é igual ao valor atualizado da iteração anterior, de forma que não há mais os patamares horizontais observados na fig. 5.49.

Com relação à caracterização da convergência do filtro, a norma de $P^{(+)}$ e o resíduo de observação para a iteração 52 são mostradas na fig. 5.52. Analisando a fig. 5.52a, nota-se que os valores decaem mais rapidamente do que na análise com o modelo de passeio aleatório. O ruído aditivo impõe as subidas nas normas de $P^{(+)}$. A média dos resíduos de observação normalizados é de 0,032.

Figura 5.52: Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção pura.

5.4.2.3 Modelo de advecção-difusão

A evolução das estimativas com o uso do modelo de advecção-difusão é mostrada na fig. 5.53.

Nota-se que há uma menor variação típica (isto é, sem considerar os valores que “escapam” da faixa central em um único passo de atualização) nos valores de condutividade em comparação com as estimativas obtidas usando os outros modelos de evolução, sem alteração de nenhum outro parâmetro para o filtro.

Com relação às características de convergência, mostradas na fig. 5.54, nota-se que a norma de P^{+} tem uma taxa de decaimento, novamente, mais acentuada em relação ao caso do passeio aleatório. A técnica de ruído aditivo foi utilizada de forma análoga às outras análises

Figura 5.53: Evolução por iteração para as estimativas descritas em termos da condutividade para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção-difusão.

para o caso dinâmico. Os resíduos de observação normalizados têm média de 0,031.

(a) Evolução por iteração para a norma da matriz P^+

(b) Histograma dos resíduos de observação normalizados na iteração 52

Figura 5.54: Caracterização da convergência durante estimação para o caso dinâmico usando o filtro estendido iterado regularizado JARK de Kalman com modelo de evolução de advecção-difusão.

5.4.2.4 Análise comparativa

Serão mostradas a seguir três visualizações das estimativas para o sistema dinâmico.

A primeira delas é o acompanhamento temporal das estimativas em uma linha vertical que passa pelo segundo anel de eletrodos e cruza o eixo central do duto, esquematizada na fig. 5.55. A evolução das estimativas nessa linha é mostrada na fig. 5.56.

Figura 5.55: Representação esquemática de uma linha vertical contida no segundo anel de eletrodos. Essa linha é utilizada como referência para mostrar a evolução temporal das estimativas.

A fig. 5.56 mostra a evolução das estimativas para essa linha, com os três modelos de evolução. Essa representação gráfica acumula as estimativas nessa linha de forma a sugerir que os fluidos escoam da direita para a esquerda. Em comparação com os gráficos de evolução das estimativas apresentados nas figuras 5.49, 5.51 e 5.53, as três primeiras iterações foram omitidas para que a escala favoreça a análise do restante das iterações.

A diferença na convergência pode ser notada com a análise comparativa das primeiras iterações mostradas na fig. 5.56. Ao se utilizar modelos com advecção, as estimativas atingem valores representativos para água em menos iterações em comparação à análise com o passeio aleatório. Adicionalmente, nota-se que o uso de um modelo de evolução que inclua advecção proporciona separação mais nítida entre as fases.

Figura 5.56: Evolução das estimativas na linha vertical definida na fig. 5.55: comparação para os três modelos de evolução apresentados. A representação gráfica mostra as estimativas, sugerindo o movimento dos fluidos da direita para a esquerda.

Essas afirmações podem ser analisadas também observando as estimativas em uma linha longitudinal, i.e., na direção do escoamento, 5 mm abaixo do topo do duto, esquematizada na fig. 5.57. A evolução das estimativas nessa linha é mostrada na fig. 5.58, comparando os três modelos de evolução.

Figura 5.57: Representação esquemática de uma linha ao longo do escoamento com uma diferença de cota de 5 mm para o topo do duto. Essa linha é utilizada como referência para mostrar a evolução temporal das estimativas.

Para a fig. 5.58, são mostradas as mesmas iterações da fig. 5.56. Na nova figura constam também, em preto, circunferências mostrando a posição longitudinal do centro dos anéis de eletrodos e uma linha de referência, denotando a velocidade representativa estimada anteriormente através de covariâncias entre os potenciais elétricos. Essa linha diagonal pode ser compreendida como a representação do movimento previsto pelo modelo de evolução para uma partícula fluida.

(a) Passeio aleatório

(b) Advecção pura

(c) Advecção-difusão

Figura 5.58: Evolução das estimativas na linha longitudinal definida na fig. 5.57: comparação para os três modelos de evolução apresentados.

Em paralelo com o apresentado para o caso estratificado inclinado, ressalta-se que os trechos iniciais e finais do duto ($0 \text{ mm} < z < 20 \text{ mm}$ e $82 \text{ mm} < z < 104 \text{ mm}$) são menos sensíveis às medidas. De fato, a análise com o modelo de passeio aleatório identifica a diminuição de condutividade (passagem de bolha) apenas para o trecho central da região de estimação, o que não é fisicamente possível. Para os modelos com advecção percebem-se alterações de condutividade coerentes com um escoamento, ao longo de todo o comprimento do duto. Resulta portanto que a introdução de modelos de evolução representativos acarreta uma melhoria do grau de observabilidade do sistema.

Um outro aspecto é que, na análise com o modelo de passeio aleatório, há uma sugestão de velocidades de passagem de estruturas (principalmente na interface marcando o final da segunda bolha). Há uma melhoria nesse aspecto para ambos os modelos, de advecção e de advecção-difusão, uma vez que as interfaces à montante e à jusante das duas bolhas apresentam uma velocidade bem marcada e próxima à identificada na seção 5.4.1.1.

Finalmente, as figuras 5.59 e 5.60 corroboram as análises acima, com a distribuição das estimativas em dois planos, o meridional vertical e um de cota constante, a 5 mm abaixo do topo do duto. As figuras mostram, respectivamente, as estimativas em uma das primeiras iterações e em um instante em que há uma bolha de ar presente no duto.

Figura 5.59: Análise comparativa de modelos de evolução: estimativas em duas seções do duto na iteração 5. Ressalta-se a melhoria na convergência com o uso de modelos advectivos.

A fig. 5.59 evidencia uma distribuição geométrica característica para a convergência nos modelos de evolução com advecção. Isso pois nesses casos os valores iniciais, mais baixos, são corrigidos de a montante para a jusante. Em oposição, no modelo de passeio aleatório, a convergência não é estruturada no domínio e resulta mais lenta.

Nota-se também um artefato (região amarela) próximo à região central do duto. Essa variação nas estimativas é uma característica dessa malha implementada.

Figura 5.60: Análise comparativa de modelos de evolução: estimativas em duas seções do duto na iteração 39. Ressalta-se a melhoria no grau de observabilidade (trechos inicial e final do duto) com o uso de modelos advectivos.

Já a fig. 5.60 descreve a passagem da bolha de ar na parte superior do duto. Esses gráficos denotam a melhoria no grau de observabilidade com a introdução dos modelos de evolução advectivos, na medida em que se detecta ar não apenas na região do duto compreendida pelos eletrodos, mas também no início e no final do duto.

Um aspecto interessante é que o artefato, observado também na fig. 5.59, é transportado pelos modelos de evolução com advecção. Para esses casos, notam-se repetições do artefato à jusante, sendo que o uso do modelo de advecção-difusão proporciona um decaimento mais rápido para esses valores.

6 CONCLUSÕES

Esse trabalho utilizou a TIE para a obtenção de parâmetros em sistemas bifásicos água-ar. Tal problema, inverso, não linear e mal-posto, possui dinâmica que influencia diretamente as estimativas. A superação dessas dificuldades demandou a aplicação conjunta de técnicas adaptativas com modelos representativos para escoamentos e para a TIE. Os resultados podem ser considerados promissores, uma vez que vetores de estado com dimensão elevada em cinco sistemas experimentais (duto completamente preenchido com água, sistemas água-ar estáticos estratificado baixo, estratificado alto, estratificado inclinado, além de um escoamento bifásico dinâmico) foram corretamente estimados, de acordo com critérios de convergência bem estabelecidos na literatura e discutidos na seção de resultados, com o controle da norma euclidiana da matriz de covariância do erro de estimação no estado, P^+ , e a análise do resíduo de observação.

Um filtro estendido iterado JARK de Kalman com parametrização do estado e regularizador Gaussiano foi utilizado para analisar dados obtidos em uma bancada de escoamentos multifásicos. A parametrização do estado com a estimação em condutividade logarítmica proporcionou melhoria na resolução do problema inverso, em três aspectos: garantia de obtenção de valores condizentes com a física; aumento da região de convergência monotônica; melhoria na uniformidade da taxa de convergência das estimativas.

A calibração realizada para a matriz de covariância do ruído de observação introduziu uma informação importante ao filtro, da confiança relativa a ser atribuída a cada um dos sinais medidos.

Ensaio estáticos foram propostos e executados, permitindo o estudo da influência dos modelos de observação e da regularização no comportamento do filtro.

Dois modelos de evolução para escoamentos homogêneos, com termos referentes ao transporte advectivo e difusivo, foram implementados e seus resultados comparados com os obtidos por meio do modelo de passeio aleatório, comumente utilizado em TIE. Verificou-se que a utilização desses modelos acelera a convergência das estimativas fornecidas pelo filtro de Kalman, bem como proporciona valores estimados mais representativos em regiões distantes dos

eletrodos, o que denota efetiva melhoria no grau de observabilidade do processo como um todo.

Naturalmente, há pontos que não fizeram parte do escopo da pesquisa mas que são importantes para este problema. Por exemplo, conforme mencionado na introdução, a estimação de frações de vazio poderia ser obtida a partir da TIE com o refinamento do critério de diferenciação entre as fases e medidas em ensaios com escoamentos multifásicos controlados. Pode ser realizado um estudo para a determinação de melhores disposições dos eletrodos no duto, além da introdução de melhores modelos para o circuito e contato. Outra medida que teria efeito positivo é a criação de regularizadores representativos para cada padrão de escoamento multifásico.

Além disso, aplicações diversas em TIE se beneficiariam da implementação de variantes do filtro de Kalman mais propícias para problemas não lineares, como o filtro de Kalman *unscented* ou o filtro de Kalman *ensemble*. Podem ser obtidos modelos de evolução mais refinados com técnicas de análise modal operacional.

Não menos importante, porém mais imediatas, ações como a análise de cada padrão de corrente em separado, a implementação de passos de alisamento e a estimação em condutividade logarítmica restringida com o filtro JARK desse texto constituem-se em temas abertos, deixados aqui como sugestões de continuação de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ADLER, A.; GAGGERO, P. O.; MAIMAITIJIANG, Y. Adjacent stimulation and measurement patterns considered harmful. *Physiological Measurement*, IOP Publishing, v. 32, n. 7, p. 731–744, jun 2011. ISSN 1361-6579.
- ADLER, A.; GUARDO, R. Electrical impedance tomography: regularized imaging and contrast detection. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, v. 15, n. 2, p. 170–179, Apr 1996. ISSN 0278-0062.
- Agar Corporation. *MPFM-50 Series Multiphase Flow Meter (Oil/Water/Gas)*. Acessado em jul / 2017. Disponível em: <<http://www.agarcorp.com/literature/mpfm50.html>>.
- Atout Process LTD. Acessado em mai / 2016. Disponível em: <<http://atoutprocess.com>>.
- BABAEIZADEH, S.; BROOKS, D.; ISAACSON, D. 3-D Electrical impedance tomography for piecewise constant domains with known internal boundaries. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, v. 54, n. 1, p. 2–10, Jan 2007. ISSN 0018-9294.
- BAL, G. *Lecture notes for 2011 course Introduction to Inverse Problems*. 2011. Disponível em: <<https://www.stat.uchicago.edu/~guillaumbal/COURSES/E6901/LectureNotesIP.pdf>>.
- BALIÑO, J. L. Notas de aula: PME5221 - escoamento multifásico. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2014.
- BARBER, D. C.; BROWN, B. H. Applied potential tomography. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, v. 17, n. 9, p. 723, 1984.
- BERTANI, C.; SALVE, M. D.; MALANDRONE, M.; MONNI, G.; PANELLA, B. *State-of-Art and selection of techniques in multiphase flow measurement*. Agenzia nazionale per le nuove tecnologie, l'energia e lo sviluppo economico sostenibile (ENEA), Sept 2010.
- BOUZAGLOU, V.; CRESTANI, E.; SALANDIN, P.; GLOAGUEN, E.; CAMPORESE, M. Ensemble Kalman filter assimilation of ERT data for numerical modeling of seawater intrusion in a laboratory experiment. *Water*, v. 10, n. 4, 2018. ISSN 2073-4441. Article number 397.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University, 2004. ISBN 978-0521833783.
- BUTALA, M. D.; FRAZIN, R. A.; CHEN, Y.; KAMALABADI, F. Tomographic imaging of dynamic objects with the Ensemble Kalman filter. *Trans. Img. Proc.*, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, v. 18, n. 7, p. 1573–1587, jul. 2009. ISSN 1057-7149.
- CALVETTI, D.; SOMERSALO, E. *Introduction to Bayesian Scientific Computing: ten lectures of subjective computing*. [S.l.]: Springer, 2007. (Surveys and tutorials in the applied mathematical sciences, v. 2). ISBN 978-0387733937.

CAMARGO, E. D. L. B. *Desenvolvimento de algoritmo de imagens absolutas de Tomografia por Impedância Elétrica para uso clínico*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2013.

CAMPOS, S.; BALIÑO, J.; SLOBODCICOV, I.; FILHO, D.; PAZ, E. Orifice plate meter field performance: Formulation and validation in multiphase flow conditions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 58, p. 93 – 104, 2014. ISSN 0894-1777.

CARRIER, G.; PEARSON, C. *Partial Differential Equations: Theory and Technique*. [S.l.]: Academic Press, 1976. ISBN 978-1483259161.

CHENG, K.-S.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C.; GISSER, D. Electrode models for electric current computed tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, v. 36, n. 9, p. 918–924, Sept 1989. ISSN 0018-9294.

CIONCOLINI, A.; THOME, J. R. Entrained liquid fraction prediction in adiabatic and evaporating annular two-phase flow. *Nuclear Engineering and Design*, v. 243, n. 0, p. 200 – 213, 2012. ISSN 0029-5493.

CIONCOLINI, A.; THOME, J. R. Void fraction prediction in annular two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 43, n. 0, p. 72 – 84, 2012. ISSN 0301-9322.

CIONCOLINI, A.; THOME, J. R. Liquid film circumferential asymmetry prediction in horizontal annular two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 51, n. 0, p. 44 – 54, 2013. ISSN 0301-9322.

CIONCOLINI, A.; THOME, J. R.; LOMBARDI, C. Unified macro-to-microscale method to predict two-phase frictional pressure drops of annular flows. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 35, n. 12, p. 1138 – 1148, 2009. ISSN 0301-9322.

COLLIER, J. G.; THOME, J. R. *Convective Boiling and Condensation*. 3rd. Oxford: Oxford University Press, 1994. ISBN 978-0198562962.

DIAS, F. d. A. *Increasing image resolution for wire-mesh sensor based on statistical reconstruction*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

DONG, F.; XU, Y.; XU, L.; HUA, L.; QIAO, X. Application of dual-plane ERT system and cross-correlation technique to measure gas-liquid flows in vertical upward pipe. *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 16, n. 2-3, p. 191–197, 2005. ISSN 0955-5986.

Emerson Electric CO. *Roxar MPFM 2600*. Acessado em jun / 2016. Disponível em: <<http://www2.emersonprocess.com/en-US/brands/roxar/FlowMetering/meteringsystems-/Pages/RoxarMultiphasemeter2600.aspx>>.

FLEURY, A. T.; TRIGO, F. C. Notas de aula: PME 5009 - Fundamentos da Teoria da Estimção. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2013.

FMC Technologies. *Multi Phase Meters*. Acessado em jul / 2017. Disponível em: <<http://www.fmctechnologies.com/en/Multiphase-meters/Benefits.aspx>>.

FOX, C. *An introduction to the Calculus of Variations*. New York: Dover, 1987. ISBN 978-0486654997.

FOX, C.; NICHOLLS, G. K.; TAN, S. M. *An introduction to Inverse Problems: course notes for ELEC 404*. 2010 edition. ed. University of Otago, 2010. Disponível em: <http://elec.physics.otago.ac.nz/w/images/1/19/ELEC404_Inverse_Problems.pdf>.

FRIEDEL, S. Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach. *Geophysical Journal International*, Blackwell Science Ltd, v. 153, n. 2, p. 305–316, 2003. ISSN 1365-246X.

GABRIEL, S.; LAU, R. W.; GABRIEL, C. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in Medicine and Biology*, v. 41, n. 11, p. 2271, 1996. ISSN 1361-6560.

GEORGE, D.; TORCZYNSKI, J.; SHOLLENBERGER, K.; O'HERN, T.; CECCIO, S. Validation of electrical-impedance tomography for measurements of material distribution in two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 26, n. 4, p. 549 – 581, 2000. ISSN 0301-9322.

GRYCHTOL, B.; ADLER, A. Choice of reconstructed tissue properties affects interpretation of lung eit images. *Physiological Measurement*, v. 35, n. 6, p. 1035, 2014. ISSN 1361-6579.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos da Física*. 6a. ed. [S.l.]: LTC, 2003. ISBN 978-8521613503.

HEIKKINEN, L. M.; KOURUNEN, J.; SAVOLAINEN, T.; VAUHKONEN, P. J.; KAIPIO, J. P.; VAUHKONEN, M. Real time three-dimensional electrical impedance tomography applied in multiphase flow imaging. *Measurement Science and Technology*, v. 17, n. 8, p. 2083, 2006. ISSN 1361-6501.

HOLDER, D. S. (Ed.). *Electrical Impedance Tomography: methods, history and applications*. London: Institute of Physics, 2005. ISBN 978-0750309523.

HUA, P.; WOO, E. J.; WEBSTER, J. G.; TOMPKINS, W. J. Finite element modeling of electrode-skin contact impedance in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 40, n. 4, April 1993. ISSN 0018-9294.

HURLBURT, E.; NEWELL, T. Prediction of the circumferential film thickness distribution in horizontal annular gas-liquid flow. *ASME J. Fluids Eng.*, v. 122, n. 2, p. 396–402, Feb 2000. ISSN 0021-9223.

IBRAHIM, S. R.; MIKULCIK, E. C. A time domain modal vibration test technique. *The shock and vibration bulletin*, v. 43(4), p. 21–37, 1973. ISSN 0362-3874.

IGLESIAS, M. A.; LAW, K. J. H.; STUART, A. M. Ensemble Kalman methods for inverse problems. *Inverse Problems*, v. 29, n. 4, p. 045001, 2013. ISSN 1361-6420.

IJAZ, U. Z.; CHUNG, S. I.; KHAMBAMPATI, A. K.; KIM, K. Y.; KIM, S. Electrical resistance imaging of a time-varying interface in stratified flows using an unscented kalman filter. *Measurement Science and Technology*, v. 19, n. 6, p. 065501, 2008. ISSN 1361-6501.

IJAZ, U. Z.; KHAMBAMPATI, A. K.; LEE, J. S.; KIM, S.; KIM, K. Y. Nonstationary phase boundary estimation in electrical impedance tomography using unscented kalman filter. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 15, p. 7089 – 7112, 2008. ISSN 0021-9991.

IMADA, F. H. J. *Estudo da estrutura multidimensional de escoamentos multifásicos em dispositivos de medição de pressão diferencial*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.

Industrial Tomography Systems. Acessado em jul / 2017. Disponível em: <<http://www.itoms.com>>.

INDUSTRIAL TOMOGRAPHY SYSTEMS LTD. *Sensitivity Conjugate Gradients (SCG) Image Reconstruction Utility*. Version 2.54. Manchester, UK, 2005.

ISHII, M.; MISHIMA, K. Droplet entrainment correlation in annular two-phase flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 32, n. 10, p. 1835 – 1846, 1989. ISSN 0017-9310.

ISMAIL, I.; GAMIO, J.; BUKHARI, S.; YANG, W. Tomography for multi-phase flow measurement in the oil industry. *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 16, n. 2-3, p. 145–155, 2005. ISSN 0955-5986.

ISO5167. *ISO Standard 5167 - Measurement of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits running full*. [S.l.], 2003.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *Proc. SPIE*, v. 3068, p. 3068 – 3068 – 12, 1997.

KAPIO, J.; SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2004. (Applied Mathematical Sciences, v. 160). ISBN 978-1441919649.

KAPIO, J. P.; KOLEHMAINEN, V.; SOMERSALO, E.; VAUHKONEN, M. Statistical inversion and monte carlo sampling methods in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, v. 16, n. 5, p. 1487, 2000. ISSN 1361-6420.

KAPIO, J. P.; SOMERSALO, P. K. E.; KARJALAINEN, P. A.; SOMERSALO, E.; VAUHKONEN, M. State estimation in time-varying electrical impedance tomography. In: *Int. Conf Electrical Bio-Impedance*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 389–392.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960. ISSN 0021-9223.

KOLEHMAINEN, V.; PRINCE, S.; ARRIDGE, S. R.; KAPO, J. P. State-estimation approach to the nonstationary optical tomography problem. *J. Opt. Soc. Am. A, OSA*, v. 20, n. 5, p. 876–889, May 2003. ISSN 1520-8532.

KOLEHMAINEN, V.; VOUTILAINEN, A.; KAPO, J. P. Estimation of non-stationary region boundaries in eit – state estimation approach. *Inverse Problems*, v. 17, n. 6, p. 1937, 2001. ISSN 1361-6420.

KOTRE, C. J. A sensitivity coefficient method for the reconstruction of electrical impedance tomograms. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, v. 10, n. 3, p. 275, 1989. ISSN 0143-0815.

KŘÍŽ, T.; DĚDKOVÁ, J. A new algorithm for electrical impedance tomography inverse problem. In: *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. Beijing: [s.n.], 2009. p. 132–136. ISSN 1559- 9450.

LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 4th. ed. [S.l.]: Dover, 1970. ISBN 978-0486650678.

LEI, J.; LIU, S.; WANG, X. Y. Dynamic inversion in electrical capacitance tomography using the ensemble Kalman filter. *IET Science, Measurement Technology*, v. 6, n. 2, p. 63–77, March 2012. ISSN 1751-8822.

LEMONNIER, H.; PEYTRAUD, J. F. Is 2D impedance tomography a reliable technique for two-phase flow? *Nuclear Engineering and Design*, v. 184, n. 2-3, p. 253–268, 1998. ISSN 0029-5493.

LI, Y.; YANG, W. Measurement of multi-phase distribution using an integrated dual-modality sensor. In: *2009 IEEE International Workshop on Imaging Systems and Techniques*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 335–339. ISSN 1558-2809.

LIONHEART, W. R. B. EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological Measurement*, v. 25, n. 1, p. 125, 2004. ISSN 1361-6579.

LIPPONEN, A.; SEPPÄNEN, A.; KAIPPIO, J. P. Reduced-order estimation of nonstationary flows with electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, v. 26, n. 7, p. 074010, 2010. ISSN 1361-6420.

LOGAN, D. L. *A first course in the Finite Element Method*. 4th. ed. [S.l.]: Cengage, 2011. ISBN 978-0495667919.

MADSEN, K.; NIELSEN, H. B.; TINGLEFF, O. *Methods for Non-Linear Least Squares Problems (2nd ed.)*. Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby: Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, 2004. 60 p.

MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 2a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 453 p. ISBN 978-8521613961.

Medeng Technologies Canada Inc. *MEDENG Multiphase Flowmeters*. Acessado em jul / 2017. Disponível em: <<http://www.medeng.com/mpfm/>>.

MIRANDA, D. A. A. *Algoritmo de tomografia por impedância elétrica baseado em Newton-Raphson*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.

MOSEGAARD, K. Quest for consistency, symmetry, and simplicity – the legacy of Albert Tarantola. *GEOPHYSICS*, v. 76, n. 5, p. W51–W61, 2011. ISSN 1942-2156.

MOURA, F. S. d. *Estimação não linear de estado através do Unscented Kalman filter na tomografia por impedância elétrica*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2013.

MUELLER, J. L.; SILTANEN, S. *Linear and nonlinear inverse problems with practical applications*. [S.l.]: SIAM, 2012. ISBN 9781611972337.

MURAI, T.; KAGAWA, Y. Electrical impedance computed tomography based on a finite element model. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, BME-32, n. 3, p. 177–184, March 1985. ISSN 0018-9294.

NASCIMENTO JÚNIOR, C. L. *Estudo comparativo de métodos de combate à divergência de filtros de Kalman*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 1988.

National Instruments. Acessado em jul / 2017. Disponível em: <<http://www.ni.com/pt-br.html>>.

NORRIE, D. H.; de VRIES, G. *The finite element method: fundamentals and applications*. [S.l.]: Academic Press, 1973. ISBN 978-1483205489.

ORTIZ-ALEMÁN, C.; MARTIN, R. Two-phase oil-gas pipe flow imaging by simulated annealing. *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 2, n. 1, p. 32, 2005. ISSN 1742-2140.

PAZ, E. F. d. *Sistema baseado em medidor de pressão diferencial para determinação em linha de vazões de produção em poços de petróleo*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.

PELLEGRINI, S. P.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G. Solving the electrical impedance tomography inverse problem for logarithmic conductivity: Numerical sensitivity. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, v. 37, n. 2, p. 681–690, 2018. ISSN 0332-1649.

PELLEGRINI, S. P.; YAMAGUCHI, A. J.; TRIGO, F. C.; LIMA, R. G.; BALIÑO, J. L.; CAMPOS, S. R. V. Apparatus design for an independent multiphase flowrate meter. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS (ABCM). *4th Multiphase Flow Journeys (JEM - EBECEM)*. São Paulo, 2017. p. 9.

PETROBRAS. *Conheça os diferentes tipos de poços de petróleo e gás natural*. 2015. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br/fatos-e-dados/conheca-os-diferentes-tipos-de-pocos-de-petroleo-e-gas-natural.htm>>.

Pietro Fiorentini S.P.A. *Flowatch 3I*. Acessado em jun / 2016. Disponível em: <http://www.fiorentini.com/ww/en/product/components/mpfm_eng/flowatch3i>.

Pietro Fiorentini S.P.A. *Flowatch HS*. Acessado em jun / 2016. Disponível em: <https://www.fiorentini.com/media/files/547_specification_sheetflowatch_v3_hs_1_1_2.pdf>.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University, 1992. ISBN 978-0521431088.

RIOS NETO, A. *Controle ótimo de sistemas dinâmicos: notas de aula e exemplos de aplicação*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2012. Chap. 7.

RIOS NETO, A.; KUGA, H. K. *Estimação adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), abril 1982.

Rocsole Ltd. Acessado mai / 2016. Disponível em: <<http://www.rocsole.com/en/technology/>>.

ROSA, E. S. *Escoamento multifásico isotérmico: modelos de multifluidos e de mistura*. [S.l.]: Bookman, 2012. ISBN 978-8540700703.

SADIKU, M. N. O. *Numerical Techniques in Electromagnetics*. [S.l.]: CRC, 1992. ISBN 978-0429196089.

SALEHIN, S.; HUANG, S.; ABHAYAPALA, T. Projection onto convex sets (pocs) method for photoacoustic tomography with a non negative constraint. In: *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2013 35th Annual International Conference of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 3411–3414. ISSN 1557-170X.

SANTOS, T. B. R. *Sistema de triagem de pericárdio bovino para manufatura de válvulas cardíacas por tomografia de impedância elétrica*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2015.

SASAKI, Y. 3-D resistivity inversion using the finite-element method. *GEOPHYSICS*, v. 59, n. 12, p. 1839–1848, 1994. ISSN 1942-2156.

SAWANT, P.; ISHII, M.; HAZUKU, T.; TAKAMASA, T.; MORI, M. Properties of disturbance waves in vertical annular two-phase flow. *Nuclear Engineering and Design*, v. 238, n. 12, p. 3528 – 3541, 2008. ISSN 0029-5493.

Schlumberger Ltd. *Vx Spectra Surface Multiphase Flowmeter*. Acessado em nov / 2016. Disponível em: <<http://www.slb.com/services/characterization/testing/multiphase/spectra.aspx>>.

SCHMID, P. J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 656, p. 5–28, 8 2010. ISSN 1469-7645.

SCHUBRING, D.; SHEDD, T. Wave behavior in horizontal annular air-water flow. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 34, n. 7, p. 636 – 646, 2008. ISSN 0301-9322.

SEPPÄNEN, A.; HEIKKINEN, L.; SAVOLAINEN, T.; VOUTILAINEN, A.; SOMERSALO, E.; KAIPIO, J. P. An experimental evaluation of state estimation with fluid dynamical models in process tomography. *Chemical Engineering Journal*, v. 127, n. 1-3, p. 23–30, 2007. ISSN 1385-8947.

SEPPÄNEN, A.; PELTOLA, A.; HEIKKINEN, L.; KOURUNEN, J.; KAIPIO, J. P. State estimation in process tomography – experimental study in 3d multi-phase flow case. In: *5th World Congress on Industrial Process Tomography*. [S.l.: s.n.], 2007.

SEPPÄNEN, A.; VAUHKONEN, M.; VAUHKONEN, P. J.; SOMERSALO, E.; KAIPIO, J. P. State estimation with fluid dynamical evolution models in process tomography - an application to impedance tomography. *Inverse Problems*, v. 17, n. 3, p. 467, 2001. ISSN 1361-6420.

SEPPÄNEN, A.; VOUTILAINEN, A.; KAIPIO, J. P. State estimation in process tomography – reconstruction of velocity fields using eit. *Inverse Problems*, v. 25, n. 8, p. 085009, 2009. ISSN 1361-6420.

SHAW, G.; GOUSSARD, Y.; GUARDO, R. Linearization of the forward problem in electrical impedance tomography. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 1993. Proceedings of the 15th Annual International Conference of the IEEE*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 82–83.

SHEWCHUK, J. R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Available at <http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf>. 1994.

SHOHAM, O. *Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2006. ISBN 978-1555631079.

SILVA, M. J. d. *Impedance Sensors for Fast Multiphase Flow Measurement and Imaging*. Tese (Doutorado) — Technische Universität Dresden, 2008.

SILVA, O. L. *Muscle contraction detection using electrical impedance tomography*. Tese (Doutorado) — Polytechnic School of the University of São Paulo, 2012.

SILVA, O. L.; LIMA, R. G.; MARTINS, T. C.; MOURA, F. S. de; TAVARES, R. S.; TSUZUKI, M. S. G. Influence of current injection pattern and electric potential measurement strategies in electrical impedance tomography. *Control Engineering Practice*, v. 58, p. 276 – 286, 2017. ISSN 0967-0661.

SINGH, K.; XIE, M. Bootstrap: a statistical method. *Unpublished manuscript, Rutgers University, USA.*, Retrieved from <http://www.stat.rutgers.edu/home/mxie/RCPapers/bootstrap.pdf> 2008.

TARANTOLA, A. *Logarithmic parameters*. November 17th 2001. Disponível em: <http://www.ipgp.fr/~tarantola/Files/Professional/Papers_PDF/Music.pdf>.

TARANTOLA, A. *Elements for Physics*. [S.l.]: Springer, 2006. ISBN 978-3540311072.

TARANTOLA, A.; VALETTE, B. Inverse problems = quest for information. *Journal of Geophysics*, v. 50, p. 159–170, 1982. ISSN 2156-2202.

TEIXEIRA, B. O.; TÔRRES, L. A.; AGUIRRE, L. A.; BERNSTEIN, D. S. On unscented Kalman filtering with state interval constraints. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 1, p. 45 – 57, 2010. ISSN 0959-1524.

THORN, R.; JOHANSEN, G. A.; HAMMER, E. A. Three-phase flow measurement in the offshore oil industry: is there a place for process tomography? In: *1st World Congress on Industrial Process Tomography*. Manchester: [s.n.], 1999. p. 228–235.

TIKHONOV, A.; ARSÉNINE, V. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Moscou: MIR, 1976.

TRIGO, F. C. *Filtro extendido de Kalman aplicado à Tomografia por impedância elétrica*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.

TRIGO, F. C. *Estimação não Linear de Parâmetros Através dos Filtros de Kalman Aplicada à Tomografia por Impedância Elétrica*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.

TRIGO, F. C.; GONZALEZ-LIMA, R.; AMATO, M. B. P. Electrical impedance tomography using the extended Kalman filter. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 51, n. 1, p. 72–81, 2004. ISSN 1558-2531.

TRIGO, F. C.; LIMA, R. G. Iterated extended Kalman filter with adaptive state noise estimation for electrical impedance tomography. In: ABCM. *Proceedings of Technology Meets Surgery International TMSI 2005*. São Paulo, 2005.

van KAN, J.; SEGAL, G.; VERMOLEN, F. *Numerical methods in scientific computing*. 2nd. ed. Delft: VSSD, 2008. ISBN 978-9071301506.

VAUHKONEN, M. *Electrical impedance tomography and prior information*. Tese (Doutorado) — University of Kuopio, 1997.

VAUHKONEN, M.; KARJALAINEN, P. A.; KAIPIO, J. P. A Kalman filter approach to track fast impedance changes in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 45, n. 4, p. 486–493, April 1998. ISSN 0018-9294.

VAUHKONEN, P. J. *Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography*. Tese (Doutorado) — University of Kuopio, 2004.

VAUHKONEN, P. J.; VAUHKONEN, M.; SAVOLAINEN, T.; KAIPIO, J. P. Three-dimensional electrical impedance tomography based on the complete electrode model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 46, n. 9, p. 1150–1160, Sept 1999. ISSN 0018-9294.

VOUTILAINEN, A.; LEHIKONEN, A.; VAUHKONEN, M.; KAIPIO, J. P. Three-dimensional nonstationary electrical impedance tomography with a single electrode layer. *Measurement Science and Technology*, v. 21, n. 3, p. 035107, 2010. ISSN 1361-6501.

WANG, Q.; WANG, H.; CUI, Z.; YANG, C. Reconstruction of electrical impedance tomography (EIT) images based on the expectation maximum (EM) method. *ISA Transactions*, v. 51, n. 6, p. 808 – 820, 2012. ISSN 0019-0578.

WANG, Q.; YANG, C.; WANG, H.; CUI, Z.; GAO, Z. Online monitoring of gas-solid two-phase flow using projected CG method in ECT image reconstruction. *Particuology*, v. 11, n. 2, p. 204 – 215, 2013. ISSN 1674-2001. Measurement Technology for Particulate System.

WEI, K.; QIU, C.; SOLEIMANI, M.; PRIMROSE, K. ITS reconstruction tool-suite: An inverse algorithm package for industrial process tomography. *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 46, Part B, p. 292 – 302, 2015. ISSN 0955-5986. Special issue on Tomography Measurement & Modeling of Multiphase Flows.

WESTENDE, J. M. C. van't. *Droplets in annular-dispersed gas-liquid pipe-flows*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2008.

WESTLAKE, J. R. *A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations*. [S.l.]: Wiley, 1968. ISBN 978-0882752259.

WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 2002. 570 p. ISBN 978-858680424X.

WOLDESEMAYAT, M. A.; GHAJAR, A. J. Comparison of void fraction correlations for different flow patterns in horizontal and upward inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 33, n. 4, p. 347 – 370, 2007. ISSN 0301-9322.

WRASSE, A. N.; MOURA, H. L. d.; PIPA, D. R.; SILVA, M. J. d. Shape-aware parametric reconstruction of stratified liquid-gas flow. In: *8th World Congress in Industrial Process Tomography*. Foz do Iguaçu: [s.n.], 2016.

YAMAGUCHI, A. J. Montagem do laboratório multipropósito de escoamentos multifásicos e projeto de experimentos de intermitência severa. In: *20º Simpósio Internacional de Iniciação Científica da Universidade de São Paulo*. São Paulo: [s.n.], 2012.

YAMAGUCHI, A. J. *Estudo experimental de intermitência severa em um sistema água-ar*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica de Universidade de São Paulo, 2016.

YANG, W. Q.; PENG, L. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, v. 14, n. 1, p. R1, 2003. ISSN 1361-6501.

YORKEY, T. J.; WEBSTER, J.; TOMPKINS, W. J. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, BME-34, n. 11, p. 843–852, Nov 1987. ISSN 0018-9294.

**APÊNDICE A – SISTEMAS
COMERCIALIZADOS PARA
MONITORAMENTO DE
ESCOAMENTOS
MULTIFÁSICOS**

Segue uma análise comparativa entre diferentes sistemas comercialmente disponíveis para medição e monitoramento para escoamentos multifásicos (Schlumberger Ltd, 2016; Pietro Fiorentini S.P.A., 2016a; Pietro Fiorentini S.P.A., 2016b; Emerson Electric CO., 2016; Medeng Technologies Canada Inc., 2017; Agar Corporation, 2017; FMC Technologies, 2017; Industrial Tomography Systems, 2017; Rocsole Ltd., 2016). Sub-sistemas opcionais são mostrados entre colchetes.

Evidencia-se o contraste entre a concordância no uso de tubos de Venturi e diversidade de estratégias exploradas para estimar a composição do escoamento.

Fabricante	Produto	Δp em restrição	Método para estimar composição do escoamento
Schlumberger	Vx Spectra	Venturi	raios γ
Pietro Fiorentini	Flowatch HS [Subsea]	Venturi	raios γ
	Flowatch 3I	Venturi	prop. el. integrais
Emerson (Roxar)	MPFM 2600 M	[Venturi]	prop. el. integrais
	MG-MV-MVG		[raios γ] [medidor de salinidade]
Medeng	Single/Dual range [Subsea, Downhole]	Venturi	Sonar, microondas e raios γ
Agar	MPFM-50	Venturi	Coriolis e medidor de <i>water cut</i>
FMC Technologies	MPM multiphase meter	Venturi	Tomografia eletromagnética e raios γ
GE	Safire 2.0	x	Microondas e ultrassom
ITS	Flow-itometer	x	ERT/ECT
Rocsole	Pipeline monitoring	x	EIT

APÊNDICE B – BIBLIOTECA DE ESCOAMENTO ANULAR ÁGUA-AR

Um regularizador próprio para escoamentos pode ser construído a partir de modelos fenomenológicos. Este apêndice mostra, a título de exemplo, a construção de uma biblioteca de escoamentos anulares a partir de um modelo fenomenológico para escoamentos anulares água-ar. Este estudo foi apresentado no *8th World Congress on Industrial Process Tomography (WCIPT8)*.

B.1 Modelo fenomenológico: escoamento anular líquido-gás

Modelos fenomenológicos descrevem a distribuição de fases em uma seção a partir de parâmetros gerais dos fluidos e do escoamento. Esses modelos dependem fortemente do padrão de escoamento, hipótese inicial para a modelagem. Será desenvolvido a seguir um modelo integrando diferentes relações de fechamento obtidas da literatura, para um escoamento bifásico líquido-gás anular.

O escoamento anular, mostrado nas fig. 2.1(e) e fig. 2.2(f) (p. 8), é de particular importância para instalações industriais, uma vez que ele ocorre para uma grande gama de valores de títulos em diferentes condições de escoamento e pressões (COLLIER; THOME, 1994).

A distribuição de fases no escoamento líquido-gás anular é caracterizada por um filme de líquido na parede do duto. O núcleo da distribuição pode conter gotículas dispersas de líquido carregadas (*entrained*) pelo gás, que predomina. Se o campo gravitacional tiver uma componente fora da direção axial – isto é, se o escoamento for horizontal ou diagonal – o filme será assimétrico, com a parte inferior mais espessa do que a parte superior. Uma visualização de uma seção característica é mostrada na fig. B.1.

Além do título, x , e da fração de vazio, α , que quantificam a proporção de gás em massa e em área, respectivamente, é necessário determinar a proporção de líquido *entrained* no núcleo gasoso da seção. Para isso, a fração de líquido *entrained* é definida em massa, com o fator e , e em área seccional ocupada, com o fator γ . As definições dos fatores são mostradas nas eqs. B.1 e B.2, respectivamente, onde o índice fc indica o líquido que escoar carregado no núcleo e o índice ff indica o líquido que escoar no filme.

$$e = \frac{\dot{m}_{fc}}{\dot{m}_f} = \frac{\dot{m}_{fc}}{\dot{m}_{fc} + \dot{m}_{ff}} \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma = \frac{A_{fc}}{A_f} = \frac{A_{fc}}{A_{fc} + A_{ff}} \quad (\text{B.2})$$

Figura B.1: Representação esquemática de seção transversal de escoamento anular horizontal. Em preto, a parede do duto; em cinza, líquido e em branco, gás.

Para estabelecer um modelo fenomenológico para o escoamento anular, é necessário atribuir valores para a fração de vazio, a fração de líquido *entrained*, a assimetria no filme e a perda de carga ao longo do escoamento. Cada um desses valores é definido com alguma lei de fechamento específica, discutidas a seguir. As leis de fechamento serão testadas usando casos de referência da operação de um poço de exploração de petróleo em Urucu-AM, definidos em (IMADA, 2014) e mostrados na tab. B.1.

Tabela B.1: Propriedades dos fluidos e condições de escoamento para a análise do modelo fenomenológico para escoamento anular líquido-gás.

Caso	ρ_g [kg/m ³]	σ [N/m]	ρ_f [kg/m ³]	μ_f [Pa · s]	x [–]	$\dot{m}$ [kg/s]	D [mm]
1	101,9	0,02	827,7	$5,0 \cdot 10^{-4}$	0,45	4,95	50,8
2	70,9	0,02	846,0	$5,6 \cdot 10^{-4}$	0,46	4,95	50,8
3	131,3	0,02	673,7	$3,2 \cdot 10^{-4}$	0,62	6,28	50,8
4	84,4	0,02	714,3	$4,1 \cdot 10^{-4}$	0,63	6,28	50,8

A correlação mais reconhecida na literatura para a determinação da fração de vazio é a de Woldesemayat (WOLDESEMAYAT; GHAJAR, 2007), que relaciona a fração de vazio com as massas específicas, a tensão superficial, as velocidades superficiais, a inclinação do duto e a pressão relativa de operação, além da aceleração gravitacional e do diâmetro hidráulico do duto. Uma correlação alternativa, de Cioncolini (CIONCOLINI; THOME, 2012b), tem precisão similar e

uma formulação mais simples, como mostrado na eq B.3.

$$\alpha = \frac{h x^n}{1 + (h - 1) x^n} \quad (\text{B.3a})$$

$$h = -2,129 + 3,129 \left(\frac{\rho_g}{\rho_f} \right)^{-0,2186} \quad (\text{B.3b})$$

$$n = 0,3487 + 0,6513 \left(\frac{\rho_g}{\rho_f} \right)^{0,5150} \quad (\text{B.3c})$$

Além da vantagem da simplicidade, ressalta-se que a correlação de Woldesemayat fornece, para os casos em análise, frações de vazio próximas a 0,5, sendo que o esperado valor limite mínimo de α para escoamento anular é de cerca de 0,7 (CIONCOLINI; THOME, 2012b). De fato, a correlação de Cioncolini para fração de vazio limita-se para valores de α entre 0,7 e 1 (atendo-se portanto a valores realistas), além de ser válida apenas para razões de massa específica $\frac{\rho_g}{\rho_f}$ entre 10^{-3} e 1. Ambas correlações são adequadas para escoamentos horizontais, verticais e inclinados. Para a correlação mostrada na eq. B.3, é reportado um desvio padrão esperado de $\pm 2,9\%$ no valor estimado, determinado a partir de dados experimentais.

Para a fração mássica de líquido carregado, a correlação estabelecida na literatura é a de Ishii (ISHII; MISHIMA, 1989), em que o fator e é definido como função do número de Weber e do número de Reynolds. A correlação de Ishii inclui um modelo adicional para a região de entrada, com um crescimento exponencial ao valor permanente. Para os casos em análise, a fração mássica de líquido carregado obtida pela correlação de Ishii é de 1, indicando que todo o líquido escoar na forma de gotículas, isto é, que não há filme e que o padrão de escoamento é do tipo de névoa dispersa (*dispersed mist* ou *spray*).

Por esse motivo, preferiu-se utilizar a correlação de Cioncolini para determinação do fator e (CIONCOLINI; THOME, 2012a), válida para escoamentos horizontais, verticais e inclinados. Nessa correlação, a fração mássica de líquido carregado é calculada de acordo com a eq. B.4a em função de uma versão simplificada do número de Weber do núcleo, $We_{c,s}$, definido de acordo com a eq. B.4b com propriedades tipicamente mensuráveis. Percebe-se que o número de Weber do núcleo é função da massa específica do núcleo, ρ_c , mostrada na eq. B.4c. Uma vez que ρ_c é função da quantidade de líquido carregado no núcleo, é necessária a determinação iterativa dos parâmetros. Os autores sugerem inicializar com um modelo sem gotículas líquidas ($e = 0$) e realizar o cálculo de e em dois passos, um preditor e um corretor. Foi implementada uma pequena alteração, com o cálculo iterativo até convergência numérica. Para a formulação original, após o

primeiro passo de correção, reporta-se um desvio absoluto de $\pm 34,1\%$ de valores experimentais.

$$e = (1 + 279,6 \text{We}_{cs}^{-0,8395})^{-2,209} \quad (\text{B.4a})$$

$$\text{We}_{cs} = \frac{\rho_c j_g^2 D}{\sigma} \quad (\text{B.4b})$$

$$\rho_c = \frac{x + e(1-x)}{\frac{x}{\rho_g} + e\frac{1-x}{\rho_f}} \quad (\text{B.4c})$$

A fração em área seccional de líquido carregado no núcleo, γ , pode ser determinada a partir da hipótese de que as gotículas líquidas escoam na mesma velocidade do que o gás. Dessa hipótese, de razão de escorregamento unitária, resulta a eq. B.5.

$$\gamma = e \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-x}{x} \frac{\rho_g}{\rho_f} \quad (\text{B.5})$$

A determinação da espessura média do filme, t_a é realizada tomando a área seccional do filme, que pode ser calculada em função de α e γ e estimada com um modelo em que o filme é perfeitamente simétrico, resultando na eq. B.6. Resolvendo a equação em t_a , resulta que há apenas um valor entre 0 e $\frac{D}{2}$.

$$(1-\alpha)(1-\gamma) = \frac{4t_a(D-t_a)}{D^2} \quad (\text{B.6})$$

Conhecendo a espessura média, pode-se calcular a assimetria do filme usando outra correlação de Cioncolini (CIONCOLINI; THOME, 2013), mostrada na eq. B.7a, válida apenas para escoamentos horizontais – a assimetria ocorre devido à ação do campo gravitacional. Nessa correlação, a assimetria é definida como a razão da espessura média do filme, t_a , pela espessura na parte inferior da seção, t_b , e é explicada como função do número de Froude, Fr, calculado de acordo com a eq. B.7b. Esse equacionamento é válido apenas para $\text{Fr} > 1$. Os autores reportam um desvio padrão de $\pm 42,7\%$ em relação a valores experimentais.

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{0,366 \text{Fr}^{1,45}}{1 + 0,366 \text{Fr}^{1,45}} \quad (\text{B.7a})$$

$$\text{Fr} = \sqrt{\frac{\rho_c v_c^2}{(\rho_f - \rho_c) g D}} \quad (\text{B.7b})$$

Para valores de $Fr < 1$, a correlação proposta em (HURLBURT; NEWELL, 2000), mostrada na eq. B.8a, e calculada em função do número de Froude como definido na eq. B.8b. Foi determinado (CIONCOLINI; THOME, 2013) um desvio padrão de $\pm 41,8\%$ em relação a valores experimentais. Apesar do desvio padrão ser levemente abaixo do desvio determinado para a correlação de Cioncolini (eq. B.7), a correlação de Hurlburt e Newell (eq. B.8) é usada como correlação auxiliar uma vez que outras formas de estimar o desvio sugerem que a correlação de Cioncolini é mais precisa.

$$\frac{t_a}{t_b} = 0,2 + 0,7 \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{\left(\frac{x}{1-x} \right)^{0,5} Fr_{hn} - 20}{75} \right] \right\} \quad (B.8a)$$

$$Fr_{hn} = \frac{j_g}{\sqrt{gD}} \quad (B.8b)$$

Ressalta-se (HURLBURT; NEWELL, 2000) também que há limites esperados para a relação $\frac{t_a}{t_b}$, com um valor máximo unitário para um escoamento dominado por efeitos de inércia e um valor mínimo de $\frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{t_b}{D}}$ para um escoamento dominado pela gravidade.

Finalmente, a perda de pressão de estagnação (“perda de carga”) é modelada com duas leis de fechamento para o fator de atrito bifásico, f_m , definidas por Cioncolini et al. (CIONCOLINI; THOME; LOMBARDI, 2009). As correlações serão apresentadas aqui para o fator de atrito de Darcy, apesar da descrição original ser para o fator de atrito de Fanning. O primeiro modelo, mostrado na eq. B.9a, é válido para escoamentos macroscópicos e foi testada apenas para valores experimentais de escoamentos verticais. Essa equação correlaciona o fator de atrito, f_m , com um cálculo mais preciso do número de Weber do núcleo, We_c , de acordo com a eq. B.9b. O número de Weber é função da massa específica do núcleo (eq. B.4c) e do fluxo mássico do escoamento do núcleo, definido pela eq. B.9c.

$$f_m = 0,688 We_c^{-0,372} \quad (B.9a)$$

$$We_c = \frac{G_c^2 (D - 2t_a)}{\rho_c \sigma} \quad (B.9b)$$

$$G_c = \frac{4 [x + e(1-x)] \dot{m}}{\pi (D - 2t_a)} \quad (B.9c)$$

Para escoamentos microscópicos, a influência do número de Reynolds do filme, Re_l , passa a ser importante. A correlação para determinação do fator de atrito é exibida na eq. B.10a, com a definição do número de Reynolds na eq. B.10b. Esta correlação foi testada pelos autores usando dados experimentais de escoamentos horizontais. Para ambas as formas de estimar o fator de atrito, reporta-se um desvio absoluto médio de 13,1%.

$$f_m = 0,0784 We_c^{-0,372} Re_l^{0,318} \quad (B.10a)$$

$$Re_l = (1 - e)(1 - x) \frac{GD}{\mu_l} \quad (B.10b)$$

A transição entre as escalas microscópica e macroscópica é ditada pelo número de Bond, Bo, definido de acordo com a eq. B.11. Para valores abaixo do valor limite 4, o escoamento é classificado como microscópico.

$$Bo = \frac{g(\rho_f - \rho_g) D^2}{\sigma} \quad (B.11)$$

A seguir, aspectos da distribuição do escoamento na direção longitudinal serão discutidos, em especial a caracterização das gotículas carregadas no núcleo gasoso e de ondulações na superfície do filme, que requer a determinação de uma frequência e uma velocidade de propagação para essas ondas.

Para o diâmetro das gotículas carregadas no núcleo gasoso, optou-se por fazer a caracterização a partir de dados experimentais (WESTENDE, 2008) obtidos no centro de um duto vertical de diâmetro de 50 mm, com escoamento água-ar anular disperso indo para cima, com velocidades superficiais de 21 m/s e 0,02 m/s para o gás e líquido, respectivamente. A eq. B.12 sumariza esses dados, descrevendo uma função de densidade de probabilidade (PDF) a partir do diâmetro da gotícula, d_d , em μm .

$$PDF_d = \begin{cases} 0,02443 \exp(-0,02d_d) & 10\mu m < d_d < 700\mu m \\ 0 & d_d < 10\mu m \text{ e } d_d > 700\mu m \end{cases} \quad (B.12)$$

Visando escoamentos horizontais, uma correlação para a velocidade de propagação das ondas foi proposta (SCHUBRING; SHEDD, 2008) conforme mostrado na eq. B.13. Os autores

reportam um desvio absoluto médio de 8% em relação a valores experimentais.

$$v_{wave} = 0,42 \frac{\dot{m} \sqrt{x}}{\rho_g} \text{Re}_G^{-0,25} \quad (\text{B.13a})$$

$$\text{Re}_G = \frac{\dot{m} D}{\mu_l} \quad (\text{B.13b})$$

Com relação à frequência característica das ondulações do filme, (SCHUBRING; SHEDD, 2008) propõem duas correlações. A primeira, mostrada na eq. B.14, visa explicar dados experimentais obtidos para dutos de menor diâmetro (8,8 mm e 15,1 mm). A segunda, mostrada na eq. B.15, foi determinada a partir de dados experimentais com um duto de 26,3 mm de diâmetro. Para ambas correlações, os autores apontam um desvio absoluto de 25% para dados experimentais disponíveis na literatura.

$$f = 0,0050 \frac{\dot{m} \sqrt{x}}{\rho_g D} \quad (\text{B.14})$$

$$f = 0,035 \frac{\dot{m} x \sqrt{\text{Fr}_{mod}}}{\rho_g D} \quad (\text{B.15a})$$

$$\text{Fr}_{mod} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{\frac{\dot{m} x}{\rho_g}}{\sqrt{g D}} = \frac{\dot{m} x}{\rho_l \sqrt{g D}} \quad (\text{B.15b})$$

Uma correlação alternativa, proposta por (SAWANT et al., 2008), ressalta a influência da pressão sobre a caracterização da frequência das ondulações do filme.

O conjunto dessas equações é o modelo fenomenológico, esquematizado sinteticamente na fig. B.2.

B.2 Análise de sensibilidade

Visando estudar a sensibilidade do modelo fenomenológico proposto a variações nos parâmetros de entrada do modelo, toma-se como referência o primeiro caso mostrado na tab. B.1. Cada parâmetro é então individualmente alterado, em $\pm 20\%$, mantendo os outros parâmetros constantes.

Nota-se na fig. B.3 que a fração de vazio, α , é sensível a variações apenas das massas

Figura B.2: Representação esquemática do modelo fenomenológico para escoamento anular água-ar, descrito nas equações B.3 a B.15.

específicas dos fluidos e do título. A maior sensibilidade da fração de vazio é com relação ao título.

O fator de maior influência na fração mássica de líquido *entrained*, e , é o diâmetro do duto. Paralelamente, a fração em ocupação de líquido *entrained*, γ , é mais sensível a variações nas massas específicas. Ambas as medidas de fração de líquido *entrained* são insensíveis a variações na viscosidade do líquido.

A perda de pressão de estagnação por metro de duto apresenta um crescimento acentuado para menores valores de diâmetro do duto, além de um crescimento linear com a vazão mássica total. Para o modelo, a perda de pressão de estagnação também é insensível a variações da viscosidade do líquido.

A espessura média do filme, t_a , e a espessura do filme na parte inferior, t_b , são fortemente dependentes do diâmetro do duto e do título da mistura. Novamente, ambas espessuras são insensíveis a variações na viscosidade do líquido.

Finalmente, a frequência e a velocidade de deslocamento de ondulações no filme são dependentes principalmente do diâmetro da tubulação, além da massa específica do gás, da vazão mássica e do título. A velocidade característica também é dependente da viscosidade do líquido e a frequência característica, da massa específica de líquido.

B.2.1 Discussão

O modelo fenomenológico apresentado captura características essenciais do escoamento anular.

A independência da perda de pressão com relação à viscosidade se justifica para o caso

Figura B.3: Análise de sensibilidade do modelo fenomenológico proposto para escoamento anular. Os valores da fração de vazio, α , do fator mássico de *entrainment*, e , da fração de *entrainment*, γ , e da perda de pressão de estagnação, $\frac{dP}{ds}$, são mostrados como função da variação dos parâmetros de entrada ao redor de um escoamento de referência.

macroscópico, uma vez que o número de Reynolds é alto. Note-se que pode ser feita uma analogia com o caso monofásico, em que o fator de atrito é independente do número de Reynolds para escoamento totalmente rugoso (WHITE, 2002). Em contraste, o caso microscópico, não incluído na análise de sensibilidade, depende da viscosidade do líquido através do número de Reynolds do filme.

A fração de vazio estimada para o caso 1, de $\alpha = 0,83$, é coerente com o valor de $\alpha = 0,86$ estimado por Imada (IMADA, 2014) usando simulação tridimensional da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

No entanto, uma vez que a lei de fechamento para a fração de vazio é independente dos outros parâmetros e que os modelos embutidos na simulação por CFD também tem erros, seria desejável validar o modelo comparando os valores previstos para a perda de pressão de estagnação com valores experimentais. Adicionalmente, deveriam ser verificados a espessura do filme na parte inferior da seção e a caracterização de ondulações na espessura do filme, além da caracterização das gotículas.

Figura B.4: Análise de sensibilidade do modelo fenomenológico proposto para escoamento anular. Os valores da espessura média do filme, t_a , da espessura do filme na parte inferior (para escoamento horizontal), t_b , da velocidade de propagação da onda do filme, v_{wave} , e da frequência característica dessas ondas, f_{wave} , são mostrado como função da variação dos parâmetros de entrada ao redor de um escoamento de referência.

Esse modelo de um escoamento anular líquido-gás em regime permanente poderia ser utilizado para definir uma distribuição de propriedades elétricas que se espera, *a priori*, obter.

B.3 *A priori* amostral

Como discutido anteriormente, a regularização gaussiana tem a característica indesejada de suavizar variações espaciais nas estimativas. Visando obter uma regularização que seja mais adequada à realidade do sistema físico em análise, o uso de um *a priori* amostral baseado em um modelo será apresentado a seguir.

Para tal, o modelo apresentado na seção B.1 e discutido na seção B.2 será utilizado para gerar uma amostra de uma “população” de escoamentos horizontais anulares água-ar. A variabilidade dessa população será obtida com um modelo de sorteio para as variáveis de entrada do modelo. Fixando as propriedades dos fluidos e o diâmetro do duto de acordo com a tab. B.2, resta definir valores admissíveis para as variáveis x e $\dot{m}$, que caracterizam o escoamento.

Tabela B.2: Valores dos parâmetros ditos constantes para geração do *a priori* amostral baseado em modelo fenomenológico para escoamentos horizontais anulares água-ar.

ρ_g	2,4 kg/m ³
σ	0,072 N/m
ρ_f	997,05 kg/m ³
μ_f	$8.9 \cdot 10^{-4}$ Pa · s
D	50,8 mm

A determinação de valores limites para o título x e a vazão mássica $\dot{m}$ não é evidente. Na verdade, os limites entre os padrões de escoamento são tipicamente definidos em termo das velocidades superficiais de líquido, j_f , e de gás, j_g . Para o caso específico, com escoamento horizontal e as propriedades definidas na tab. B.2, o mapa de escoamento, como compilado por (SHOHAM, 2006), é mostrado na fig. B.5.

Figura B.5: Mapa de padrões de escoamento para duto horizontal e propriedades definidas pela tab. B.2 e amostra sorteada de distribuição uniforme, denotada por pontos azuis. As linhas denotam transição entre padrões de escoamento e a letra A denota a região de escoamento anular.

Para delimitar a região de escoamento anular, é necessário ainda estabelecer limites relacionados à capacidade da bancada de testes, fixados em $j_f^{min} = 10^{-3}$ m/s e $j_g^{max} = 100$ m/s.

Finalmente, realiza-se um sorteio de uma amostra de 1.000 indivíduos de forma que o sorteio de qualquer par conjugado (j_g, j_f) pertencente à região de escoamento anular seja equiprovável. Os pontos amostrados nesse sorteio, a partir de uma distribuição uniforme definida em um domínio bidimensional não retangular, são mostrados na fig. B.5. Há uma falsa tendência de maior concentração de pontos para maiores valores de velocidades superficiais devido à visualização dos dados com uma escala bi-logarítmica.

A seguir, os valores sorteados para j_f e j_g devem ser convertidos para as variáveis de entrada do modelo. Isso é realizado de acordo com a eq. B.16.

$$x = \frac{\rho_g j_g}{\rho_f j_f + \rho_g j_g} \quad (\text{B.16a})$$

$$\dot{m} = (\rho_f j_f + \rho_g j_g) \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{B.16b})$$

Nota-se na fig. B.6 que a distribuição uniforme no par (j_f, j_g) não corresponde a distribuições uniformes em x e $\dot{m}$. Observa-se que diferentes fluidos proporcionariam histogramas com aspectos bastante diferentes.

Figura B.6: Histograma para valores correspondentes de (a) título e (b) vazão mássica total, com sorteio uniforme do par de velocidades superficiais, de líquido e de gás.

Uma vez bem definida a amostra da população de escoamentos em função das variáveis de entrada do modelo, determinam-se as variáveis de saída do modelo, e obtêm-se assim uma caracterização geométrica da distribuição de fases no duto. Como uma primeira aproximação, a geometria da ondulação da superfície do filme é descrita com uma função seno, de amplitude de

4% da espessura do filme. Esse valor foi determinado a partir dos desvios típicos obtidos em experimentos (SCHUBRING; SHEDD, 2008).

Tendo em vista a intenção de representar adequadamente a variabilidade da população de escoamentos anulares, é importante não ignorar a estatística de desvios entre os valores previstos e experimentais – um erro esperado – nas correlações que compõem o modelo fenomenológico. Assim, soma-se às variáveis de saída do modelo um erro sorteado de acordo com os desvios reportados para cada correlação, como descrito na seção B.1. Toma-se o cuidado adicional de assegurar que não sejam permitidos valores incompatíveis com a física, estabelecendo valores máximos unitários para as frações de líquido *entrained* em massa, e , e em área seccional, γ , e um valor máximo para a fração de vazio α calculado com a correlação de Chisholm para o escorregamento (COLLIER; THOME, 1994), em função do maior título.

A seguir, a distribuição de fases, definida no meio contínuo, é mapeada a uma malha de elementos finitos, verificando a fase em pontos representativos de cada elemento. Em específico, o valor da ocupação volumétrica de fases para cada elemento foi calculado tomando-se uma média ponderada entre valores binários (0 se líquido e 1 se gás, representando a ocupação local no ponto em análise) para os quatro vértices, com peso unitário, e o ponto central, com peso quatro vezes maior. Esse mapeamento deve ser realizado diretamente à malha que será utilizada para a resolução do problema inverso. Este estudo, no entanto, foi efetuado em uma outra malha, com 5054 elementos. Resulta que cada elemento tem um valor entre 0 e 1 descrevendo a ocupação volumétrica das fases.

Então, para o uso em TIE, é preciso descrever as distribuições de fase de cada indivíduo em termos de propriedades elétricas. Para isso, a distribuição de fases de cada indivíduo é utilizada para gerar 100 distribuições de propriedades elétricas, sorteadas a partir de distribuições normais $N(0,03; 0,02^2)$ S/m para a água e $N(2,3 \cdot 10^{-16}; (1 \cdot 10^{-16})^2)$ S/m para o ar¹.

Finalmente, essa amostra da população de escoamentos é condensada em uma descrição através de uma função de densidade gaussiana, com uma distribuição de propriedades elétricas média $\bar{\sigma}^{am}$ e uma covariância Γ_{σ} . A distribuição média é apresentada na fig. B.7.

Pode-se apresentar a matriz de covariância por meio de seus autovalores e autovetores. A análise dos autovalores é mostrada na fig. B.8, com eles ordenados. Resulta que os primeiros quinze autovalores tem um maior valor; a seguir, há um patamar de valores próximos entre si; um decrescimento mais acentuado inicia-se a partir do autovalor de número 1500; e, finalmente, há uma queda mais abrupta para os últimos 300 autovalores.

¹Originalmente, buscaram-se valores teóricos para propriedades de fases puras. Esse valores devem ser revistos para que sejam representativos no problema de TIE.

Figura B.7: Descrição em condutividade do *a priori* amostral para escoamento anular: distribuição de propriedades elétricas média, dentre os 100.000 “indivíduos”, vistas (a) com corte transversal, (b) superior e (c) superior com corte longitudinal parcial.

Também, a matriz de covariância tem um número de condição baixo, de $1.2 \cdot 10^{-5}$. Essa propriedade é interessante para a implementação desse *a priori* como regularizador, uma vez que a inversa dessa matriz será tomada, conforme discutido na seção 3.3.1.2.

A seguir, os autovetores com maiores autovalores, denotando as direções de maior variabilidade para o escoamento em análise, são mostrados na fig. B.9.

Figura B.8: Autovalores da matriz de covariância Γ_σ da biblioteca de escoamento anular água-ar.

Figura B.9: Autovetores de maior importância para a matriz de covariância Γ_σ da biblioteca de escoamento anular água-ar.

APÊNDICE C – SELEÇÃO DE COMPONENTES PARA SISTEMA DE MEDIÇÃO

Este apêndice apresenta os componentes selecionados para os dois subsistemas complementares de medição, discutidos na seção 4.2.

C.1 Câmera

Tendo em vista a qualidade de imagem e uma taxa de aquisição adequada, foi selecionada a câmera preto e branco PCO edge 5.5 e lentes Nikon 50 mm f/1.4 e Nikon 18-55 mm, além de uma lente telecêntrica Kowa LM1119TC. Adicionalmente, foi adquirido também um painel de iluminação de LED contínuo, com fluxo luminoso máximo de 4320 lm.

C.1.1 Cuba

Para uma obter uma imagem não distorcida pela parede do cilindro, é necessário “planificar” a imagem do escoamento interno ao duto. Isso pode ser feito via *software*, mas foi preferido construir uma cuba em formato de paralelepípedo para realizar isso fisicamente.

Assim, foi projetada uma cuba de paredes transparentes, a ser preenchida com um fluido de índice de refração próximo ao do material da parede do duto. Os fluidos mais comuns para essa aplicação são água (de índice de refração $n = 1,33$) e glicerina ($n = 1,47$), ambos com índice de refração próximo ao do acrílico (material do duto, com $n = 1,49$). Se fazem necessários três furos, com tampas – para encher a cuba, para esvaziar a cuba e para a saída de ar durante o enchimento da cuba – além das furações para acomodar o duto. Dado que o sistema não está pressurizado, não há grandes preocupações com vedação. Note-se que a viscosidade da glicerina é mais de 1400 vezes maior que a da água, e portanto os furos para preencher e esvaziar a cuba não podem ser pequenos.

C.2 Placa de orifício

Placas de orifício com tomadas de pressão nos flanges foram incorporadas à bancada de medição. Foi tomado o cuidado de realizar as tomadas de pressão em pontos mais baixos, de forma que se bolhas de ar entrarem no sistema de medição, elas saiam espontaneamente.

Foram escolhidos transdutores de pressão do tipo piezorresistivo. Alternativas incluem sensores capacitivos e LVDT (ambos com membrana), que também são capazes de realizar leituras de valores DC e flutuações, mas de forma menos precisa e com maior limitação da banda de frequências medida.

Para a medição de temperatura, um sensor PT-100 1/10 DIN de 4 fios permite um equilíbrio interessante entre custo e precisão de medição.

Foi selecionado um sistema de aquisição de dados da National Instruments (National Instruments, 2017), com um chassi cDAQ-9189 (8 slots, conexão Ethernet). Para a medição de temperatura, foi adquirido o módulo para RTD PT 100 do modelo NI 9216 (8 canais, até 400 Samples/s/canal, 24 bits). Finalmente, para a medição de pressão, foi especificado o módulo de entrada de corrente NI 9208 (16 canais, até 500 S/s/canal, 24 bits). Esse sistema permite uma taxa de aquisição alta, de forma a ter uma margem de segurança na medição da resposta em frequência da dinâmica de escoamentos, em diferentes padrões de escoamento.

APÊNDICE D – PARAMETRIZAÇÃO DOS ESTIMADORES

D.1 Nova parametrização: condutividade logarítmica restringida

Uma extensão pode ser realizada com a imposição de valores mínimos e máximos para os valores de condutividade a serem determinados na resolução do problema inverso, diminuindo ainda mais o espaço solução.

O uso da função logística generalizada foi proposto para impor limites a estimadores (TEIXEIRA et al., 2010) e implementada para estimação em resistividades (MOURA, 2013). Impondo valores mínimos e máximos para a condutividade logarítmica, ζ^{min} e ζ^{max} , pode-se definir um novo parâmetro de estimação s como a condutividade logarítmica restringida, de acordo com a eq. D.1. Essa parametrização é esquematizada na fig. D.1.

$$\zeta(s) = \zeta^{min} + \frac{\zeta^{max} - \zeta^{min}}{1 + \exp(-s)} \quad (D.1)$$

Figura D.1: Parametrização para restrição do espaço solução, onde s é o parâmetro analisado e ζ é o parâmetro que indica a condutividade σ .

Essa parametrização adicional, em composição com a parametrização exponencial, é mostrada na fig. D.2.

A intuição sobre a necessidade de uma densidade de probabilidade homogênea ser constante pode ser exemplificada aqui. Do ponto de vista numérico, seria possível questionar a necessidade do mapeamento de ζ a σ , uma vez que condutividades negativas podem ser evitadas apenas com o uso de uma sigmóide. Analisando o mapeamento direto entre o parâmetro s e a condutividade σ , mostrado na fig. D.2, observa-se também uma curva sigmóide. No entanto, essa curva não é simétrica (simetria ímpar em torno do ponto de condutividade média), de forma que

Figura D.2: Parametrização composta (exponencial e função logística generalizada) para restrição do espaço solução, onde s é o parâmetro analisado e σ é a condutividade.

o esquema numérico não penaliza a determinação de baixas condutividades, como ocorreria com o uso de uma sigmóide simétrica com $\sigma^{\min}$ próximo a zero. De fato, demonstra-se a seguir que a densidade de probabilidade homogênea para a condutividade logarítmica restringida também é constante.

Para algoritmos que demandam o cálculo da matriz Jacobiana, a derivada da matriz de rigidez local em relação à nova variável de estimação pode ser determinada analiticamente de acordo com a eq. D.2.

$$\frac{\partial Y_{local}^{Real}}{\partial s} = (\varsigma^{\max} - \varsigma^{\min}) \frac{e^s}{(1 + e^s)^2} Y_{local}^{Real} \quad (D.2)$$

D.2 Deduções das densidades de probabilidade das variáveis de busca

As deduções mostradas aqui seguem o raciocínio mostrado em (TARANTOLA, 2001).

D.2.1 Condutividade e resistividade

Para uma densidade de probabilidade $f(\rho)$, descrita em função da resistividade ρ , existe uma densidade de probabilidade associada $g(\sigma)$, em função da condutividade σ de forma que:

$$g(\sigma) = \left| \frac{d\rho}{d\sigma} \right| f(\rho) \quad (D.3)$$

Para determinar o jacobiano da transformação de variáveis de σ para ρ , parte-se da definição

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{D.4})$$

então,

$$d\rho = -\sigma^{-2} d\sigma \quad (\text{D.5})$$

e

$$\left| \frac{d\rho}{d\sigma} \right| = \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{D.6})$$

Assim, substituindo em D.3, obtêm-se

$$g(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} f(\rho) \quad (\text{D.7})$$

Essa última equação pode ser reescrita, utilizando D.4, como

$$\sigma g(\sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad (\text{D.8})$$

No entanto, uma vez que σ e ρ são formas equivalentes de denotar a mesma propriedade física, ambas as densidades de probabilidade $f(\rho)$ e $g(\sigma)$ devem ter a mesma forma, isto é, que $f(x) = g(x)$, para um escalar x real, representando condutividade ou resistividade.

Pode-se então determinar a densidade de probabilidade f igualando a equação acima a uma constante unitária, por simplicidade. Assim, obtêm-se que

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{D.9})$$

Assim, a densidade de probabilidade não é constante, tendo na verdade a forma de uma hipérbole.

D.2.2 Condutividade e resistividade logarítmicas

Partindo da condutividade logarítmica ζ , definida como

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\zeta) \quad (\text{D.10})$$

e uma resistividade logarítmica ϱ de forma análoga, isto é, na forma

$$\rho = \rho_0 \exp(\varrho) \quad (\text{D.11})$$

a relação entre condutividade e resistividade, eq. D.4, implica que

$$\zeta = -\varrho \quad (\text{D.12})$$

Assim,

$$\left| \frac{\zeta}{\varrho} \right| = 1 \quad (\text{D.13})$$

Dessa forma, a relação entre as densidades de probabilidades análoga à eq. D.3 resulta como

$$g(\zeta) = f(-\zeta) \quad (\text{D.14})$$

A solução mais simples que satisfaz a equação acima (além de satisfazer $f(x) = g(x)$) é tal que

$$f(x) = g(x) = \text{constante} \quad (\text{D.15})$$

D.2.3 Condutividade e resistividade logarítmicas restringidas

De forma similar à seção anterior, busca-se a definição de condutividade logarítmica restringida s , descrita tal que

$$\zeta(s) = \zeta^{\min} + \frac{\zeta^{\max} - \zeta^{\min}}{1 + \exp(-s)} \quad (\text{D.16})$$

Pode-se definir uma resistividade logarítmica restringida de forma análoga, como

$$\varrho(r) = \varrho^{\min} + \frac{\varrho^{\max} - \varrho^{\min}}{1 + \exp(-r)} \quad (\text{D.17})$$

Uma vez que $\varsigma = -\varrho$, os valores limites para ς e ϱ estão relacionados

$$\varsigma^{\min} = -\varrho_1 \quad (\text{D.18a})$$

$$\varsigma^{\max} = -\varrho_2 \quad (\text{D.18b})$$

Uma vez que $\varsigma^{\min} < \varsigma^{\max}$, então $\varrho_2 < \varrho_1$. Assim

$$\varrho^{\min} = -\varsigma^{\max} = \varrho_2 \quad (\text{D.19a})$$

$$\varrho^{\max} = -\varsigma^{\min} = \varrho_1 \quad (\text{D.19b})$$

Substituindo as definições das variáveis logarítmicas restringidas (eq. D.16 e D.17) na eq. D.12, obtém-se

$$\varsigma^{\min} + \frac{\varsigma^{\max} - \varsigma^{\min}}{1 + \exp(-s)} = -\varrho^{\min} + \frac{-\varrho^{\max} - (-\varrho^{\min})}{1 + \exp(-r)} \quad (\text{D.20})$$

Alterando os limites de forma que todos sejam descritos em ς e subtraindo $\varsigma^{\min}$ de ambos os lados da equação, obtém-se

$$\frac{\varsigma^{\max} - \varsigma^{\min}}{1 + \exp(-s)} = -\varsigma^{\min} + \varsigma^{\max} + \frac{\varsigma^{\min} - \varsigma^{\max}}{1 + \exp(-r)} \quad (\text{D.21})$$

Simplificando, resulta que

$$\frac{1}{1 + \exp(-s)} = \frac{\exp(-r)}{1 + \exp(-r)} \quad (\text{D.22})$$

e, finalmente, que

$$r = -s \quad (\text{D.23})$$

Uma vez que a eq. D.23 é análoga à eq. D.12, a discussão realizada para o par de variáveis ς e ϱ é idêntica para o par s e r .