RICARDO DOLL LAHUERTA

**PROJETO DE ESTRUTURAS CONSIDERANDO O EFEITO
DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA UTILIZANDO O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

SÃO PAULO

2012

RICARDO DOLL LAHUERTA

**PROJETO DE ESTRUTURAS CONSIDERANDO O EFEITO
DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA UTILIZANDO O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:

Engenharia de Controle e Automação
Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

SÃO PAULO

2012

*Dedico este trabalho à minha família e minha esposa
por me apoiarem e darem todas as condições
necessárias de realizá-lo.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, por todo o suporte, por acreditar em mim, por todas as importantes orientações recebidas, por toda paciência e pela motivação dada a todos os seus alunos, no desenvolvimento de suas carreiras e pela sua importante contribuição na ciência e na engenharia.

Agradeço aos professores Paulo M. Pimenta, Eduardo M. B. Campello e Pablo Muñoz-Rojas por todas as discussões sobre problemas não-lineares e apoio no tema.

Agradeço a minha mãe, Marli Doll de Moraes Lahuerta e ao meu pai Leonardo Lahuerta, por toda a dedicação e carinho e por todo apoio em todos os momentos da minha vida e aos meus irmãos Luiz Fernando e Rafael pelo apoio, paciência e por todos os momentos de convivência.

A minha querida esposa Andrea Castro Corrallo, o meu amor e mais sincero agradecimento pelo apoio, incentivo e muita paciência.

Ao meu amigo Eduardo Simões meus agradecimentos por todas as discussões de problemas não-lineares, ideias, sugestões, questionamentos, apoio e incentivo.

A todos os meus amigos do grupo de pós-graduação da engenharia mecatrônica e engenharia civil (JAC), pela amizade, pelo apoio e pelos momentos de descontração, com um agradecimento em especial ao meu amigo Ronny Calixto Carbonari por todas as discussões e trabalhos em conjunto no laboratório.

Ao meu amigo Valdir Mendes Cardoso pelo apoio, discussões e por todos os momentos de trabalho juntos.

A FUSP (Fundação de Apoio à Universidade da USP) pelo apoio financeiro neste trabalho, através da bolsa de treinamento.

E por fim, a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

“O primeiro passo em direção ao sucesso é o conhecimento”

-Nikola Tesla

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Paulo, de janeiro de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Lahuerta, Ricardo Doll

**Projeto de estruturas considerando o efeito da não-linearidade geométrica utilizando o método de otimização topológica / R.D. Lahuerta – ed.rev.-- São Paulo, 2012.
123 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Topologia (Otimização) 2. Estruturas (Projeto) 3. Método dos elementos finitos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.

RESUMO

Este trabalho propõe estudar o projeto de estruturas submetidas a grandes deslocamentos utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT). O MOT é um método numérico capaz de fornecer de forma sistemática a distribuição ótima de material no domínio de uma estrutura de forma a atender a um dado requisito de projeto, por exemplo o valor de flexibilidade máxima permitida em uma estrutura. Desde sua introdução, há quase três décadas, o MOT ganhou popularidade na área acadêmica e na indústria. Até o presente momento (2011), a maioria dos trabalhos relacionados com o método tem se preocupado com a otimização de estruturas com o comportamento linear, ou seja, pequenos deslocamentos. Um pequeno número de artigos e trabalhos tem sido relacionado com a modelagem e otimização topológica de estruturas submetidas a efeitos não-lineares. Este trabalho propõe compilar as formulações descritas na literatura e agregar novas técnicas na implementação da OT de forma a melhorar a robustez na obtenção de resultados sob não-linearidade geométrica. O MOT para o comportamento não-linear geométrico neste trabalho foi implementado utilizando o modelo de material “*SIMP*”. O comportamento não-linear geométrico é representado utilizando a formulação Lagrangiana para as leis de material de Kirchhoff-Saint Venant e neo-Hookiana. Ambas as leis de material foram implementadas utilizando o método de elementos finitos (MEF) e o equilíbrio estático da estrutura é obtido através de uma rotina incremental e iterativa de Newton incluindo todos os elementos (inclusive os de baixa densidade) dentro do domínio de projeto. A sensibilidade da função objetivo é deduzida utilizando o método adjunto e o problema de otimização é resolvido utilizando o Método das Assíntotas Móveis (MAM) em conjunto com uma função de Relaxação proposta para estabilizar a solução de OT não-linear. A função de projeção não-linear em conjunto com o Método da Continuação é utilizada para eliminar o problema de tabuleiro e independência de malha, melhorando a convergência dos resultados. A função objetivo para minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento é testada, considerando um carregamento fixo. Neste trabalho, os exemplos mostram que as diferenças na rigidez das estruturas otimizadas utilizando modelagem linear e não-linear são geralmente pequenas para pequenos carregamentos, mas elas podem ser grandes em certos casos envolvendo grandes cargas, acarretando em instabilidades na estrutura, o que pode degenerar a solução obtida.

Palavras-Chaves: Otimização Topológica, Não-Linearidade Geométrica, Grandes Deformações, Grandes Deslocamentos, Formulação Lagrangiana, Método das Assíntotas Móveis, Método de Elementos Finitos.

ABSTRACT

This work proposes studying the design of structures undergoing large displacement using Topology Optimization Method (TOM). The TOM is a numerical method capable of synthesizing the basic layout of a mechanical structure accomplishing to a given design requirement, for example the maximum strain energy allowed in the structure. Since its introduction nearly three decades, TOM has gained widespread popularity in academia and industry. So far, most papers dealing with the method have been concerned with the optimization of structures with linear geometric and material behavior. Even now a small number of works and articles have been concerned with the modeling and topology optimization of structures undergoing nonlinear effects. This work proposes to compile the formulations described in the literature and adding new techniques to improve the robustness for obtaining results of OT under geometric nonlinearity. The TOM for geometric nonlinear behavior in this work is implemented with Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP) material model. The geometrically nonlinear behavior of the structures is modeled using a Lagrangean description for hyperelastic constitutive models for Saint Venant-Kirchhoff and neo-Hookean. Both constitutive models are implemented using the Finite Element Method (FEM) and the static equilibrium of the structure is obtained using an incremental and iterative Full-Newton Method considering all elements and internal force of the design domain (elements called "voids"). The sensitivity of the objective function is derived using the adjoint method and the optimization problem is solved using the Optimality Criteria (OC) method and Method of Moving Asymptotes (MMA) together with a Relaxation Function proposed to stabilize the TO nonlinear solution. The nonlinear projection function in conjunction with the Continuation Method is used to obtain checkerboard-free and mesh-independent designs and to improve the convergence results. The objective function of end-compliance is tested, by minimizing it for a fixed load. In this work, some examples show that differences in stiffness of optimized structures using linear and nonlinear modeling are generally small, however they can be large in certain cases involving buckling or bifurcation point, that degenerate the solution obtained.

Keywords: Topology Optimization, Nonlinear Geometric, Large Deformation, Large Displacements, Lagrangean Formulation, Method of Moving Asymptotes, Finite Element Method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Justificativa	5
1.2	Objetivo	5
1.3	Organização da Dissertação	6
2	Equações Básicas da Mecânica do Contínuo	8
2.1	Cinemática dos Sólidos Deformáveis	8
A.	Movimento de um Sólido Deformável e Gradiente da Transformação	8
B.	Medida de Deformação no Espaço	11
C.	Introdução aos Tensores de Tensões	11
D.	Princípio de Objetividade	12
E.	Deformação Volumétrica	14
2.2	Teorema das Potências	16
2.3	Teorema dos Trabalhos Virtuais	18
2.4	Elasticidade Sob Linearidade Geométrica	20
2.5	Elasticidade Sob Não-Linearidade Geométrica	21
A.	Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant	22
B.	Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet	24
C.	Comparação de Ambas as Leis somente no Estiramento 1	27
2.6	Estado Plano de Deformação e Tensão (EPD e EPT)	28
A.	Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant - EPD	30
B.	Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant - EPT	31
C.	Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet - EPD	33
D.	Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet - EPT	33
3	Otimização Topológica (OT)	35
3.1	Introdução	35

3.2	Histórico da Aplicação da Otimização Topológica Não-Linear	36
3.3	Conceito de MOT	39
3.4	Modelo de material.....	40
A.	Penalização	41
B.	Método da Continuação.....	42
3.5	Problemas na Implementação Numérica da OT	44
A.	Escalas de Cinza	44
B.	Instabilidade de Tabuleiro	45
C.	Dependência de Malha	46
3.6	Técnica de Projeção	47
4	Formulação da OT para o Projeto de Estruturas Considerando o Efeito da Não-Linearidade Geométrica.....	52
4.1	Função Objetivo - Minimização da Flexibilidade no ponto de Carga (" <i>end-compliance</i> ")	52
4.2	Restrições de Projeto	53
4.3	Função de Relaxação.....	54
4.4	Método das Assíntotas Móveis (MAM).....	55
4.5	Critério da Optimalidade (CO)	58
5	Implementação Numérica.....	61
5.1	Implementação do MEF Não-Linear Elástico 2D.....	61
5.2	Implementação de Métodos de Solução para Sistemas de Equações Não-Lineares	65
A.	Método de Newton.....	66
B.	Método do Comprimento de Arco Esférico	68
C.	Método do Controle Generalizado dos Deslocamentos (MCGD)	71
5.3	Implementação do Método de Otimização Topológica Não-Linear	72
5.4	Gradientes da Função Objetivo (Análise de Sensibilidade)	74
6	Resultados	77

6.1	Viga Engastada.....	77
6.2	Comparação entre Resultados da Literatura e Resultados Atuais.....	81
6.3	Viga Bi-Engastada.....	82
7	Conclusões e Futuras Atividades	86
7.1	Discussão e Conclusões do Trabalho	86
7.2	Atividades Futuras de Pesquisa	88
8	Referências Bibliográficas	90
9	Apêndice	96
9.1	Função de Forma do Elemento tipo Q4 - Isoparamétrico	96
9.2	Matriz de Rigidez Elástica Linear 2D	99
9.3	Verificação do MEF Não-Linear	101
9.4	Verificação do MEF Não-Linear – MCGD x MCA.....	103
9.5	Verificação da Sensibilidade da Função Objetivo da OT	106

Lista de Figuras

Figura 1 - Exemplo de procedimento de projeto pelo método de otimização topológica.....	1
Figura 2 - Movimento e deformação de um sólido no espaço.	9
Figura 3 – Transformação volumétrica infinitesimal de um elemento.	15
Figura 4 – Gráfico com a comparação do estiramento versus tensão.	28
Figura 5 - Exemplo de problema de Estado Plano de Deformação (EPD).	29
Figura 6 - Exemplo de problema de estado plano de tensão (EPT).	29
Figura 7 - Três principais tipos de otimização aplicada a estruturas mecânicas,.....	35
Figura 8 - Domínio estendido fixo Ω e domínio desconhecido Ω_d	40
Figura 9 - Influência do fator de penalização na propriedade efetiva do material.....	42
Figura 10 - Representação da influência da penalização na função objetivo na solução da OT.	43
Figura 11 - Exemplo de estrutura (viga M.B.B.) otimizada com escala de cinza.....	44
Figura 12 - Padrão de Instabilidade de Tabuleiro (" <i>checkerboard</i> ")	46
Figura 13 - Efeitos da dependência de malha (BENDSØE & SIGMUND, 2003).	47
Figura 14 - Representação da área de abrangência da projeção, independente da malha	47
Figura 15 - Resultados de topologia ótima para diferentes tamanhos de elementos para uma viga engastada de dimensões de 1000x250 milímetros, para $r_{\min} = 30$:.....	48
Figura 16 - Função de projeção, para a função de projeção linear.....	50
Figura 17 - Função de projeção, para a função de projeção não-linear.....	51
Figura 18 - Curva de aproximação convexa pelo Método das Assíntotas Móveis.	57
Figura 19 – (a) – Curva de Carga Incremental,.....	67
Figura 20 – (a) ponto limite e “snap-back”	69
Figura 21 - Fluxograma de implementação da rotina de OT sob Não-Linearidade Geométrica.	73
Figura 22 - Domínio fixo de projeto e condições de contorno da viga engastada.....	77

Figura 23 – Comparação dos deslocamentos das topologias ótimas não interpretadas.	81
Figura 24 - Domínio fixa de projeto e condições de contorno da viga bi-engastada.	82
Figura 25 - Elementos de quatro nós: (a) parametrizado; (b) coordenadas globais.	96
Figura 26 - Elemento de quatro nós com os respectivos graus de liberdade nodais.	97
Figura 27 - Elemento de quatro nós com os respectivos pontos de integração dentro do elemento.	99
Figura 28 – Pórtico Lee, dimensões em milímetros.	101
Figura 29 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee, comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q4.	103
Figura 30 – Configuração deformada dos pontos A, B, C e D do Pórtico Lee para o software implementado.	104
Figura 31 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q4/Q8.	105
Figura 32 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q8.	105
Figura 33 - Domínio discretizado, condições de contorno e numeração dos elementos.	106

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Comparação dos resultados ótimos da literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000) entre a análise linear e análise não-linear geométrica conforme variação do carregamento aplicado.	38
Tabela 2 – Dados dimensionais e de material.	77
Tabela 3 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para a lei de material Kirchhoff-Saint Venant.....	79
Tabela 4 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para a lei de material neo-Hookiana.	80
Tabela 5 – Dados dimensionais e de material	82
Tabela 6 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear.	83
Tabela 7 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para o carregamento de $230kN$	85
Tabela 8 – Peso de integração para o elemento Q4 com integração completa.	99
Tabela 9 - Comparação da sensibilidade via diferenças finitas e analítica da função objetivo da OT não-linear geométrica (não-linear elástico)	107

Lista de Abreviaturas

CO	Critério da Optimalidade
CONLIN	<i>"Convex Linearization"</i>
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
GDC	<i>"Generalized Displacement Control"</i>
GSP	<i>"General Stiffness Parameter"</i>
Q4	Elemento Isoparamétrico de 4 Nós
Q8	Elemento Isoparamétrico de 8 Nós <i>"Serendipity"</i>
MAM	Método das Assíntotas Móveis
MEF	Método de Elementos Finitos
MOT	Método de Otimização Topológica
MCGD	Método do Controle Generalizado dos Deslocamentos
MCA	Método do Comprimento de Arco
NL	Não-Linearidade ou Não-Linear
OT	Otimização Topológica
SAOM	<i>"Sequential Approximate Optimization Method"</i>
SIMP	<i>"Solid Isotropic Material with Penalization"</i>

Lista de Símbolos

	Símbolo	Descrição
Operadores Algébricos	∇	- Operador gradiente.
	tr	- Operador Traço.
	sym	- Operador de Simetria - $\text{sym}(\mathbf{A}) = 0,5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$.
	skew	- Operador Anti-Simétrico - $\text{skew}(\mathbf{A}) = 0,5(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$.
	$\mathbf{I}$	- Operador Identidade.
	$\det$	- Operador Determinante.
	$\otimes$	- Produto Diádico.
	$\cdot$	- Produto Escalar.
	$:$	- Produto Duplo (contração tensorial).
	$\times$	- Produto Vetorial.
	w	- Valor do peso de uma função.
	$\sin$	- Sinal de uma variável ou função.
Propriedades de Material	E	- Módulo de Elasticidade do Material.
	ν	- Coeficiente de Poisson.
	Λ, μ	- Constantes de Lamé.
	φ	- Massa específica.
	h	- Espessura.
Mecânica do Contínuo	(x, y)	- Coordenada cartesiana global.
	$\mathbf{x}^r$	- Campo das componentes da posição de referência do sólido no espaço.
	$\mathbf{x}$	- Campo das componentes da posição atual do sólido no espaço.
	$\mathbf{u}$	- Campo das componentes dos deslocamentos do sólido no espaço.
	ρ	- Campo das Pseudo-densidade dentro do domínio de projeto.
	$\mathbf{L}$	- Tensor do Gradiente dos Deslocamentos.
	$\mathbf{F}$	- Tensor do Gradiente da Transformação.
	$\mathbf{C}$	- Tensor de Cauchy-Green à direita.
	$\mathbf{B}$	- Tensor de Cauchy-Green à esquerda.

	E	- Tensor de deformação de Green.
	t	- Unidade de tempo.
	P	- Primeiro tensor da tensão de Piola-Kirchhoff.
	τ_i	- Componentes do Primeiro tensor da tensão de Piola-Kirchhoff.
	T	- Tensor das Tensões de Cauchy.
	t_i	- Componentes do Tensor das Tensões de Cauchy.
	S	- Segundo tensor da tensão de Piola-Kirchhoff.
	P_{ext}	- Potência Externa.
	P_{int}	- Potência Interna.
	P_S	- Potência das forças superficiais.
	P_V	- Potência das forças de volume.
	T	- Energia Cinética.
	W_{ext}	- Trabalho Externo.
	W_{int}	- Trabalho Interno.
	W_S	- Trabalho das forças superficiais.
	W_V	- Trabalho das forças de volume.
	b	- forças de volume, referente à primeira equação do movimento.
	v^ϑ	- Deformação volumétrica.
	ψ	- Função da Energia de Deformação Específica.
	D	- Tensor dos Módulos Tangentes de Rigidez Elástica.
Implementação Numérica	(ξ, η)	- Coordenada local do elemento isoparamétrico.
	$\mathbf{N}$	- Matriz das funções de forma do elemento.
	$\mathbf{x}$	- Campo das componentes da posição atual do nó do elemento no espaço.
	$\mathbf{J}$	- Matriz Jacobiana das derivadas das funções de forma do elemento em relação às coordenadas locais.
	$\mathbf{B}$	- Matriz das derivadas das funções de forma do elemento.
	$\mathbf{I}$	- Matriz Identidade.
	$\mathbf{f}_{\text{int}}$	- Vetor das forças internas do elemento.

	$\mathbf{f}_{\text{ext}}$	- Vetor da soma das forças externas.
	$\mathbf{p}^e$	- Vetor das forças externas nodais.
	$\mathbf{r}$	- Vetor de Resíduo.
	$\mathbf{u}$	- Vetor dos deslocamentos.
	$\delta \mathbf{u}_r$	- Vetor dos deslocamentos gerado pelo resíduo.
	$\mathbf{K}_L$	- Matriz Rigidez Linear Global.
	$\mathbf{K}_T$	- Matriz Rigidez Tangente Global.
Otimização - MOT	A_n	- Variável de projeto que representa a distribuição de material.
	ρ_e	- Pseudo-densidade no elemento.
	Ω	- Domínio de projeto fixo.
	V	- Volume do domínio de projeto.
	p	- Variável de penalização das variáveis de projeto.
	$r_{\min}$	- Raio mínimo, ou membro mínimo da função de projeção.
	λ	- Vetor dos multiplicadores de Lagrange.
	c	- Valor da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento.

1 Introdução

O Método de Otimização Topológica (MOT) é um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material dentro de um domínio de projeto fixo. Para isto utiliza uma combinação entre métodos de otimização (por exemplo, o Critério de Optimalidade e a Aproximação Convexa Seqüencial) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Assim, inicialmente uma região do espaço é discretizado em elementos finitos para que se possa analisar seu comportamento mecânico e então o material é distribuído de forma racionalizada dentro do domínio de projeto por meio de algoritmos de otimização (BENDSØE & SIGMUND, 2003) utilizando a sensibilidade da função objetivo e restrições de projeto em relação às variáveis de projeto.

Um exemplo de procedimento de projeto através do MOT é representado na Figura 1, onde uma viga engastada com carregamento em sua extremidade oposta é sintetizada, considerando como função objetivo a minimização da flexibilidade média sujeita a uma restrição de volume a ser atribuído no domínio de projeto.

Figura 1 - Exemplo de procedimento de projeto pelo método de otimização topológica.

Uma vantagem do MOT é a sua capacidade de fornecer o “*layout*” ótimo de um componente estrutural para uma determinada aplicação. Assim, este método pode ser aplicado durante a fase

conceitual de projeto, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização paramétrica ou de forma, que somente podem ser aplicados após a definição do “*layout*” do componente. Desse modo, o MOT pode ser classificado como um processo de síntese de estruturas.

Na literatura, o MOT tem sido aplicado em diversos problemas, como por exemplo, no projeto de estruturas com máxima rigidez (BENDSØE, 1995), no projeto de mecanismos flexíveis (SILVA, FONSECA, & KIKUCHI, 1998), no projeto de materiais e no projeto de estruturas para absorção de impacto (PEDERSEN C. B., 2004), entre outras aplicações. Mas somente um pequeno número de trabalhos e artigos tem sido relacionados com a modelagem e otimização topológica de estruturas submetidas a grandes deformações e deslocamentos, justamente pela dificuldade da implementação do método de elementos finitos não-linear de forma robusta (BENDSØE 1995; MAUTE 1998; SWAN & KOSAKA 1997; BRUNS & TORTORELLI 1998 e 2002; BUHL & SIGMUND 2000; OHSAKI & NISHIWAKI 2005; KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005).

Exemplos de artigos que estudam a formulação de otimização topológica com modelo de material não-linear são descritos por (BENDSØE, 1995), (MAUTE, SCHWARZ, & RAMM, 1998) e (SWAN & KOSAKA, 1997). O número de trabalhos que tratam com a não-linearidade geométrica é um pouco maior. Para o nosso conhecimento apenas sete trabalhos publicados por (JOG C. , 1996), (BRUNS & TORTORELLI, 2001), (BRUNS, SIGMUND, & TORTORELLI, 2002), (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), (GEA & LUO, 2001), (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) e (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010) tem estudado o tema sobre otimização topológica de estruturas considerando o efeito da não-linearidade geométrica.

Os trabalhos de (JOG C. , 1996), (BRUNS, SIGMUND, & TORTORELLI, 2002) mencionados acima não mostraram diferenças significativas na topologia ótima ou valores da função objetivo para estruturas sujeitas a pequenas e grandes deformações, já os trabalhos publicados por (BRUNS, SIGMUND, & TORTORELLI, 2002), (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) e (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010) apresentaram resultados muito interessantes que demonstram a diferença da topologia ótima de uma estrutura considerando o efeito da não-linearidade geométrica durante o processo de otimização topológica. No entanto os trabalhos apresentados por (BRUNS, SIGMUND, & TORTORELLI, 2002) limitaram-se a utilizar o método de Newton e Newton Modificado para a solução do MEF não-linear baseados em elementos do tipo Q4R (elemento quadrilátero com integração reduzida) e excluíram os elementos com baixa densidade ou removendo a força interna para evitar problemas de instabilidade numérica e excesso de distorção durante o processo de otimização, gerando dúvidas sobre a

consistência dos resultados apresentados, pois estes procedimentos evitam que os elementos excluídos reapareçam dentro do domínio de projeto. A questão que surge é se a utilização do método de solução do MEF não-linear é adequado para resolver estruturas sujeitas a grandes deformações e se o Método de Newton é adequado para tal aplicação. Durante o processo de otimização, estruturas locais instáveis podem surgir dentro do domínio de projeto (efeito de flambagem local e global) e o método de Newton pode não ser adequado para resolver este caso em particular de não-linearidade, pois a estrutura pode perder rigidez ao longo do incremento de carga e o Método de Newton pode não encontrar solução para o sistema que tem tangente igual ou menor que zero. O correto seria analisar se a estrutura se mantém estável ao longo das iterações, analisando se a rigidez se mantém ou se existe uma perda de rigidez (PRG, Parâmetro de Rigidez Generalizado (YANG & SHIEH, 1990)) como discutido no trabalho publicado por (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) onde foi analisado se a estrutura ótima obtida era estável a cada nível de incremento de carga. Nesse caso quando a estrutura se encontrava em uma condição de instabilidade foi utilizado o método da corda para a solução e métodos de estabilização quando necessário.

Outro ponto importante não abordado corretamente por (BRUNS, SIGMUND, & TORTORELLI, 2002) e (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) é o tratamento dos elementos de baixa densidade (chamados em inglês de elementos “voids”) dentro do domínio de projeto. São os elementos de baixa densidade que geram grande instabilidade (problema de perda de elipsidade da lei de material e problemas de integração numérica pela excessiva distorção do elemento) durante o processo iterativo de solução do MEF não-linear. Todos estes problemas relatados acumulam erros e problemas durante o processo de cálculo da matriz rigidez tangente do sistema. Neste caso a matriz rigidez tangente pode adquirir características algébricas de positiva semi-definida ou indefinida, prejudicando a solução iterativa numérica do sistema linear de equações (gerando dificuldades de solução e até a não solução do sistema) dificultando o processo de otimização topológica, pois impossibilita o cálculo da sensibilidade corretamente. Geralmente para resolver este problema, o critério de convergência do Método de Newton ou da Corda é relaxado e conseqüentemente, isto prejudica a nova distribuição de material dentro do domínio de projeto pelo algoritmo de otimização. Outro recurso comumente utilizado é resolver o problema não-linear pelo Método de Newton-Modificado, pois este não necessita da matriz rigidez tangente atualizada, evitando erros numéricos de elementos excessivamente distorcidos, porém este método não tem convergência quadrática próximo do espaço de solução e tem solução numérica muito custosa. Somente o trabalho realizado por (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010) tratou deste aspecto durante o processo da distribuição ótima de material ao longo do domínio de

projeto, não apagando os elementos instáveis ou com baixa densidade. Para tanto foi utilizado uma lei de material que tem solução matemática garantida (BALL, 1977), independentemente do valor de rigidez (isto se for desconsiderado a aplicação numérica, onde o excesso de distorção do elemento pode prejudicar o processo de integração numérica e o sistema pode não ter solução). Foi utilizada a lei de material *neo-Hookiana* que é uma lei de material hiperelástica (termodinamicamente consistente) e que tem a característica de poli-convexidade, que garante solução para o problema que descreve o comportamento não-linear elástico da estrutura. Até então todos os trabalhos anteriores ao de (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010) utilizaram a lei de material de *Kirchhoff-Saint Venant*, que também é hiperelástica e convexa, porém pode perder convexidade com compressão excessiva durante o processo iterativo de Newton, pois a tensão do elemento tende a zero sob compressão e sob tração a tensão tende a infinito muito rapidamente, devido à relação quadrática entre os estiramentos (ver ítem 2.5C). No entanto o trabalho de (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010) não foi classificado como sendo de otimização topológica, pois não foi utilizado o controle de raio mínimo de projeção e também porque foi utilizada outra lei de material e outro sistema de solução para a otimização numérica.

Estas dúvidas e problemas relatados são partes da motivação deste trabalho, e o intuito é discutir melhor estes problemas e propor formulações mais consistentes para o problema de otimização topológica não-linear.

Com relação à notação utilizada, ao longo de todo o trabalho letras minúsculas latinas utilizando a Fonte “*Euclid*” ou gregas em itálico ($a, b, \dots \alpha, \beta \dots$) representam grandezas escalares, ao passo que as correspondentes em negrito utilizando a mesma fonte ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \dots$) denotam vetores. Letras maiúsculas latinas utilizando a fonte “*Euclid*” ou gregas em negrito-italico ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$) expressam tensores de segunda ordem, tensores de terceira ordem são expressos pela fonte “*Euclid Math One*” em negrito e para tensores de quarta ordem “*Euclid Math Two*” em itálico. Todas as grandezas estão no espaço Euclidiano tridimensional. Vetores e matrizes construídos com componentes tensoriais são expressos por letras latinas utilizando a fonte “*Times New Roman*” em negrito ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots \mathbf{a}, \mathbf{b} \dots$). Um espaço vetorial linear é descrito por $\mathcal{V}_n$, no qual n é a dimensão do espaço. Adota-se ainda a convenção de somatório sobre índices repetidos, estando subentendido que estes assumem valores entre $\{1, 2\}$ para letras gregas ou entre $\{1, 2, 3\}$ para letras latinas. Para descrever derivadas de uma função, tensor ou matriz utiliza-se a convenção de Einstein, onde a derivada é representada por vírgula e a sua respectiva direção no espaço Euclidiano.

1.1 Justificativa

Como já comentado, o "MOT" não-linear geométrico tem grandes aplicações em projeto e concepção de estruturas sujeitas a grandes deformações e deslocamento (sem e com instabilidade estrutural), como o projeto de estruturas internas de aeronaves ("cavernas"), projeto de asas de aviões, projeto de tanques de alta pressão sujeitos a flambagem por pressão interna, projeto de veículos com critério de absorção de energia, atuadores piezoelétricos, próteses flexíveis e entre outras aplicações na indústria em geral.

Esta área de aplicação do "MOT" ainda não foi muito explorada, justamente pela dificuldade de implementação do método de elementos finitos não-linear de forma consistente e com boa convergência, pois isto requer elementos com formulações e leis de material mais consistentes, com um domínio de projeto com mais elementos ou utilizando elementos de alta ordem, o que gera um maior custo de programação e um enorme custo computacional para a solução do problema de otimização topológica. Este trabalho irá permitir um melhor entendimento do projeto ótimo de estruturas sujeitas a grandes deformações.

1.2 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é estudar o projeto de estruturas mecânicas considerando o efeito das grandes deformações (grandes deslocamentos) com e sem instabilidade estrutural utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT). Para tanto este trabalho visa implementar rotinas de MEF não-linear elástico para solução de problemas em duas dimensões utilizando os métodos solução de Newton, Método da Corda (MC ou "*Arc Length*") e o Método do Controle Generalizado dos Deslocamentos (MCGD ou "*GDCM*"), para que seja utilizada em conjunto com a rotina de Otimização Topológica para o projeto ótimo destas estruturas.

Em relação ao algoritmo de otimização (MOT), os objetivos principais são utilizar métodos de otimização matemática numérica mais robustos (CO, CONLIN, MAM) (FLEURY, 1982), melhorar a técnica

de projeção existente para ser aplicada no problema de OT não-linear, implementar de um método da continuação mais robusto e estabilizar a solução da OT durante o processo iterativo de solução.

1.3 Organização da Dissertação

A organização deste trabalho é descrita da seguinte forma:

O Capítulo 2 aborda o resumidamente a Mecânica do Contínuo, apresentando suas principais características, fundamentação teórica relacionada à sua aplicação à não-linearidade geométrica baseada na não-linearidade elástica para duas leis de material utilizando descrição Lagrangiana (item 2.5).

O Capítulo 3 aborda os principais tópicos da Otimização Topológica, abrangendo uma breve introdução no item 3.1, com as abordagens de otimização, e uma descrição do método. A seguir é levantado um histórico da aplicação da Otimização Topológica (OT) considerando o efeitos da não-linearidade em estruturas mecânicas (item 3.2) e são apresentados alguns resultados da literatura mais relevantes para este trabalho. São abordados os principais conceitos do MOT (item 3.3), como o domínio fixo estendido de projeto e o modelo de material e ao final (item 3.4) são abordados alguns aspectos na implementação, tais como a relaxação e a penalização.

O Capítulo 4 reúne a compilação da formulação da Otimização Topológica aplicada a estruturas sob não-linearidade geométrica, incluindo a formulação da função objetivo, restrições do problema e rotinas de otimização (LM, CO e MAM).

O Capítulo 5 aborda a Implementação Numérica do MOT considerando o efeito da Não-Linearidade Geométrica, como implementação do MEF 2D não-linear, métodos de solução do sistema não-linear (item 5.1), implementação do MOT utilizando o MEF 2D Não-Linear, onde são apresentados fluxograma de operação e características especiais do MOT NL (item 5.3). O capítulo é finalizado com as deduções dos Gradientes da Função Objetivo (item 5.4).

No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos com MOT para estruturas sujeitas ao efeito não-linear geométrico, para dois exemplos de estruturas, viga engastada e bi-engastada, para ambas as leis de material descritas neste trabalho.

Finalizando, no capítulo 7 são discutidos os resultados e apresentadas as conclusões e contribuições deste trabalho. Na sequência são descritas atividades futuras para o doutorado.

2 Equações Básicas da Mecânica do Contínuo

Neste item é abordado um resumo sobre a mecânica do contínuo que é necessária para a formulação em elementos finitos da mecânica dos sólidos e problemas estruturais. As relações cinemáticas, as leis de materiais, a equação de equilíbrio são descritas em detalhe neste item.

A notação tensorial utilizada neste item para descrever a cinemática dos sólidos deformáveis foi baseada nas notações da apostila de Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas (PIMENTA P. M., 2008), no livro *“Nonlinear Finite Element Methods”* (WRIGGERS, 2008) e no livro *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis* (BONET, 2008).

Relações cinemáticas são formuladas para o sistema referencial de movimento de corpo no espaço. Baseado nessas relações as medidas de deformações são introduzidas. Formulações variacionais são derivadas para o método de elementos finitos mais a frente (ver item 5.1). O comportamento da lei de material isótopo hiperelástico é discutido neste item.

2.1 Cinemática dos Sólidos Deformáveis

A. Movimento de um Sólido Deformável e Gradiente da Transformação

A posição de referência de um ponto material qualquer na configuração deformada é dada por:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^r + \boldsymbol{u}, \quad (1)$$

onde $\boldsymbol{x}^r$ são os pontos materiais na configuração de referência e $\boldsymbol{u}$ os deslocamentos de cada ponto material.

Figura 2 - Movimento e deformação de um sólido no espaço.

A Figura 2 descreve o movimento de um sólido no espaço entre o instante de tempo t_a e t_b , neste tipo de descrição cinemática é tratada de maneira exata sem hipóteses simplificadoras.

O tipo de escrita da cinemática da deformação utilizada neste trabalho considera o corpo na configuração indeformada do sólido (todas as funções dependem dos pontos na configuração de referência $\mathbf{F}(\mathbf{x}^r)$) é chamado de descrição *Lagrangiana*. Esta descrição é utilizada na grande maioria das aplicações na mecânica dos sólidos e é justamente a configuração indeformada que conhecemos que torna esta uma forma simples de abordar o problema.

Quando a variável independente for à posição instantânea do corpo no instante de tempo t , a atenção é fixada em determinada região do espaço (ao invés da região do corpo) e este tipo de descrição da deformação é chamada de descrição *Euleriana*. Esta abordagem é mais comum em Mecânica dos Flúidos do que na Mecânica dos Sólidos.

Baseado na Figura 2, a posição sólido no instante de tempo t_b em relação à t_a pode ser descrito por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^r + \mathbf{u}, \quad (2)$$

onde $\mathbf{x}^r$ refere-se aos pontos materiais na configuração de referência ($\mathbf{x}^r = x_i^r \mathbf{e}_i$) e $d\mathbf{u}$ o deslocamento na configuração deformada. A posição final (2) é descrito por $\mathbf{x}$. O gradiente da transformação da cinemática do sólido (apresentado na Figura 2), que descreve a transformação entre os instantes de tempo t_b e t_a pode ser descrito por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^r} = \nabla [\mathbf{x}^r + \mathbf{u}] = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad (3)$$

e o tensor de segunda ordem do gradiente da transformação pode ser escrito como um tensor de primeira ordem da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ x_{3,2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Da mesma forma que foi descrito o tensor do gradiente da transformação ($\mathbf{F}$) em (2), o tensor do gradiente dos deslocamentos é a relação entre os deslocamentos dos pontos materiais em relação a sua posição sendo dada por:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^r} = \nabla [\mathbf{u}] = \boldsymbol{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (5)$$

Tanto o gradiente da transformação quanto o gradiente dos deslocamentos podem ser descritos pelas componentes de cada uma das suas direções principais $\{1, 2, 3\}$, dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i^r} \\ \boldsymbol{\gamma}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i^r} \end{cases}. \quad (6)$$

O gradiente das velocidades é descrito pela derivada do gradiente da transformação em relação à derivada temporal, sendo dado por:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (7)$$

B. Medida de Deformação no Espaço

Com o gradiente da transformação (2), é possível obter tensores de medida de deformação do sólido no espaço na configuração deformada " dx ", como apresentado na Figura 1, sendo dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (8)$$

onde $\mathbf{E}$ é o tensor das deformações de Green e $\mathbf{C}$ o tensor direito de Cauchy-Green, descrito por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{f}_g \cdot \mathbf{f}_h)(\mathbf{e}_g \otimes \mathbf{e}_h). \quad (9)$$

O tensor esquerdo de Cauchy é dado por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (\mathbf{f}_g \otimes \mathbf{f}_g). \quad (10)$$

Tanto $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ são tensores simétricos, positivos definidos.

Com a diferenciação do tensor $\mathbf{E}$ em relação ao tempo, temos a taxa de deformação de Green, dada por:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}). \quad (11)$$

C. Introdução aos Tensores de Tensões

Além dos tensores de deformação é necessário também definir tensores de tensões, o primeiro deles é o tensor das tensões de Cauchy e é dado por:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 t_i(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (12)$$

onde $t_i(\mathbf{e}_i)$ são as colunas da matriz das componentes do tensor das tensões, sendo que o tensor das tensões de Cauchy $\mathbf{T}$ é simétrico, ou seja, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. Também é necessário definir mais tensores de tensões que serão utilizados nas leis de materiais utilizadas neste trabalho. O tensor de tensões mais

utilizado neste trabalho para descrever as respectivas leis de materiais é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff que é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{t}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r \end{cases} \quad (13)$$

Este tensor pode ser interpretado como o operador vetorial que associa ao plano cuja normal na configuração de referência é dada por $\mathbf{n}^r$, o vetor tensão nominal ou forças superficiais por unidade de área de referência $\mathbf{t}^r$, ou seja, pode ser interpretado como um tensor de tensão de Engenharia.

Podemos reescrever o tensor $\mathbf{P}$ em suas componentes, da seguinte forma:

$$\tau_i = \mathbf{P} \mathbf{e}_i = (\mathbf{t}_j \otimes \mathbf{g}_j) \mathbf{e}_i = (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}_j. \quad (14)$$

O tensor das tensões dado por (15) é denominado segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$). Esse tensor $\mathbf{S}$ é simétrico, e tem difícil interpretação física na forma de um operador vetorial.

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \quad (15)$$

D. Princípio de Objetividade

O princípio da objetividade estabelece que uma lei de material deva ser invariante perante a superposição de movimentos de corpos rígidos ao movimento de um sólido. Fisicamente o que se deseja é que os esforços internos não sejam afetados por movimentos superpostos de corpo rígido, pois estes não provocam deformações e, portanto não devem afetar o estado das forças internas de corpo.

Um exemplo do princípio da objetividade por ser dado pelo movimento de um sólido no espaço descrito por $\mathbf{x}(\mathbf{x}^r, t)$. Superpor um movimento de corpo rígido a este movimento significa transformar o movimento em:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{x}^r, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0^r, t) + \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}(\mathbf{x}^r, t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0^r, t)), \quad (16)$$

onde $Q(t)$ é um movimento de rotação superposta e $q_0(t)$ é um movimento de translação adicional do ponto 0. Baseado na equação do movimento do sólido (16), um novo gradiente da transformação é obtido pela a diferenciação de (16) segundo a sua posição de referência (x^r) , o que resulta em:

$$F^* = QF. \quad (17)$$

O gradiente da transformação é afetado por movimentos superpostos de corpo rígido, como dado na equação (17). Baseado no novo gradiente da transformação, o novo tensor das deformações de Green superposto é dado por:

$$E^* = \frac{1}{2}(F^{*T}F^* - I) = \frac{1}{2}(F^T Q^T Q F - I) = \frac{1}{2}(F^T F - I) = E, \quad (18)$$

como o tensor Q é ortogonal ($Q^T Q = I$), o tensor de Green não é afetado pelo movimento de corpo rígido superposto ao movimento do sólido. Podemos dizer também que o tensor direito de Cauchy (9) também não é afetado.

Dado um vetor normal a uma superfície na configuração atual que também foi rotacionado através de (16), sua transformação é dada por:

$$n^* = Qn, \quad (19)$$

O vetor das tensões ou das forças superficiais é transformado juntamente com os vetores normais de acordo com:

$$t^* = Qt. \quad (20)$$

Logo, o novo tensor de Cauchy é tal que:

$$T^* = QTQ^T. \quad (21)$$

Logo, pode-se deduzir que o tensor de Cauchy é afetado pelo movimento de corpo rígido.

O novo primeiro tensor de Piola-Kirchhoff de (16) é dado por:

$$P^* = QP, \quad (22)$$

Este tensor das tensões também é afetado pelo movimento de corpo rígido, porém o segundo tensor de Piola-Kirchhoff não é, pois:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{P}^* = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{S} \quad (23)$$

A forma mais simples de satisfazer o Princípio da Objetividade é expressar algum tensor não afetado pelo movimento de corpo rígido em função de algum tensor das deformações que também não seja afetado pelo movimento de corpo rígido. Daí a importância de se utilizar tensores que não sejam afetados pelo movimento de corpo rígido nas equações constitutivas. Por causa deste motivo na análise da não-linearidade geométrica, utiliza-se no tratamento de equações constitutivas, o par conjugado $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$. No entanto, qualquer outro par é permitido, desde que o Princípio da Objetividade seja respeitado, ou seja, mesmo que o par conjugado em si não seja objetivo $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$, a lei de material descrita por este par deve ser composta por parâmetros tensoriais objetivos, como por exemplo, invariantes baseados em tensores de deformações objetivos.

Os modelos materiais devem obedecer a todos os princípios gerais da Física, em particular os dois Princípios da Termodinâmica. O primeiro Princípio da Termodinâmica estabelece que os modelos materiais devam submeter-se à Lei da Conservação da Energia. O segundo Princípio da Termodinâmica estabelece que eles devam manter ou aumentar a entropia do sólido. Os Princípios da Termodinâmica aplicados a processos puramente mecânicos, ou seja, a processos isotérmicos, estabelecem que a equação constitutiva deva sempre conservar ou dissipar localmente a energia mecânica.

E. Deformação Volumétrica

É importante também determinar a deformação volumétrica do sólido no espaço. Considerando os três vetores $\mathbf{g}_1^r, \mathbf{g}_2^r$ e $\mathbf{g}_3^r$ tangentes a três fibras coplanares num ponto da configuração de referência de tal forma que $\llbracket \mathbf{g}_1^r, \mathbf{g}_2^r, \mathbf{g}_3^r \rrbracket > 0$, conforme apresentado na

Figura 3. O elemento infinitesimal de volume naquele dado ponto e naquela dada configuração é descrito por (24):

$$dV^r = \llbracket g_1^r, g_2^r, g_3^r \rrbracket d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (24)$$

Figura 3 – Transformação volumétrica infinitesimal de um elemento.

Os vetores $\{g_1, g_2, g_3\}$ tangentes infinitesimais de um elemento na configuração deformada podem ser obtidos a partir da do produto misto dos vetores f_1, f_2, f_3 do gradiente da transformação:

$$\begin{cases} g_1 = f_2 \times f_3 \\ g_2 = f_3 \times f_1 \\ g_3 = f_1 \times f_2 \end{cases} \quad (25)$$

A partir do gradiente da transformação (4) e com a relação de Euler, tem-se a relação do volume de um elemento infinitesimal na configuração de referência e na configuração deformada, dado por:

$$dV = \det(\mathbf{F}) dV^r = J dV^r, \quad (26)$$

onde J é denominado *Jacobiano da transformação*. Baseado na continuidade da lei de material, o campo das transformações (2) deve ter qual que o sólido não penetre em sim mesmo e, portanto o jacobiano da transformação é uma variável que permite tal controle. Portanto em qualquer ponto de V^r , $J > 0$. Esta condição é chamada de *condição local de impenetrabilidade* e é adotada na lei de material neo-Hookiana.

A partir de (26) é possível chegar à equação da deformação volumétrica, que é dada por:

$$\vartheta = \frac{dV - dV^r}{dV^r}. \quad (27)$$

2.2 Teorema das Potências

O teorema da potência diz que a cada instante de tempo a potência de um sólido deformável vale:

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} + \dot{T}, \quad (28)$$

onde a potência dos esforços internos representado por P_{int} é definido por:

$$P_{\text{int}} = \int_{V^r} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r, \quad (29)$$

onde $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ e $\dot{\mathbf{E}}$ é o tensor da taxa das deformações de Green (tensor simétrico).

A potência das forças de volume de um sólido deformável é definida por:

$$P_V = \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dV^r. \quad (30)$$

A energia cinética de um sólido deformável pode ser descrito por:

$$T = \int_{V^r} \frac{1}{2} \rho^r \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV^r, \quad (31)$$

e a derivada de (31) temporal é dada por:

$$\dot{T} = \int_{V^r} \rho^r \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV^r. \quad (32)$$

A potência das forças de superfície de um sólido deformável é definida por:

$$P_S = \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dS^r. \quad (33)$$

A partir das equações (13) e (33) com ajuda do teorema do divergente, tem-se a potência das forças de volume dentro de uma integral do volume de referência, que é dada por:

$$\begin{aligned}
P_S &= \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dS^r = \\
&= \int_{S^r} (\mathbf{P} \mathbf{n}^r) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS^r = \\
&= \int_{V^r} (\operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}) dV^r = \\
&= \int_{V^r} (\operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV^r + P_{\text{int}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Introduzindo na equação (29) a primeira equação do movimento $\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \rho^r \ddot{\mathbf{u}}$ obtém-se a Potência das Forças Superficiais:

$$P_S = \int_{V^r} (\rho^r \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}^r) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV^r + P_{\text{int}}. \tag{35}$$

Introduzindo na equação (35) as equações (30) e (32) obtém-se:

$$P_S = \dot{T} - P_V + P_{\text{int}}. \tag{36}$$

Introduzindo na equação (28) a equação (36), temos que a Potência Externa é a soma das Potências das Forças de volume com as Potências das Forças de Superfície de um sólido deformável:

$$P_{\text{ext}} = P_V + P_S = \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dS^r. \tag{37}$$

O teorema das Potências para processos quase-estáticos (a derivada da energia cinética e a sua variação possam a ser considerados desprezíveis) pode ser definido por:

$$\begin{aligned}
P_{\text{ext}} &= P_{\text{int}} \\
\int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \dot{\mathbf{u}} dS^r &= \int_{V^r} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r.
\end{aligned} \tag{38}$$

O Trabalho dos Esforços Externos é definido num intervalo de tempo (t_a, t_b) por:

$$W_{\text{ext}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{ext}} dt, \tag{39}$$

O Trabalho dos Esforços Internos é definido num intervalo de tempo (t_a, t_b) por:

$$W_{\text{int}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{int}} dt, \quad (40)$$

portanto num processo de quase-estático (a partir da equação 26) podemos deduzir o trabalho num intervalo de tempo (t_a, t_b) por:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}. \quad (41)$$

2.3 Teorema dos Trabalhos Virtuais

O equilíbrio de um corpo no espaço euclidiano pode ser expresso utilizando o teorema dos trabalhos virtuais. Seja um campo de deslocamentos $\delta \mathbf{u} \in H_1(V^r)$, são denominados deslocamentos virtuais.

O trabalho virtual dos esforços externos é definido de forma similar a (37), por:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \delta \mathbf{u} dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \delta \mathbf{u} dS^r, \quad (42)$$

da mesma que em (42), para o trabalho virtual dos esforços internos podemos definir por:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V^r} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV^r, \quad (43)$$

onde $\delta \mathbf{F}$ é o gradiente da transformação virtual (44), dado por:

$$\delta \mathbf{F} = \nabla \delta \mathbf{u}. \quad (44)$$

Variação virtual da energia cinética é dada por (45):

$$\delta T = \int_{V^r} \rho^r \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV^r, \quad (45)$$

para processos dinâmicos aplicando ao teorema do divergente de forma semelhante a (34), como demonstrado no teorema das potências e utilizando as mesmas definições utilizadas em (35), tem-se:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T + \int_{V^r} (\text{div } \mathbf{P} + \mathbf{b}^r - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV^r + \int_{S^r} (\mathbf{t}^r - \mathbf{P} \mathbf{n}^r) \cdot \delta \mathbf{u} dS^r, \quad (46)$$

a partir do lema fundamental do cálculo variacional pode-se concluir que:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_1(V^r) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ em } V^r \\ \mathbf{t}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r \text{ em } S^r \end{cases}, \quad (47)$$

portanto o trabalho externo pode ser escrito por:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T, \quad \forall \delta \mathbf{u}. \quad (48)$$

É uma condição necessária e suficiente para que a primeira equação local do movimento e as condições de contorno estáticas sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ em } V^r \\ \mathbf{t}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r \text{ em } S^r \end{cases}, \quad (49)$$

esta proposição (49) é conhecida como teorema dos trabalhos virtuais.

O teorema dos trabalhos virtuais para processos quase estáticos pode ser definido a partir da equação (46), logo:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_1(V^r) \Rightarrow \begin{cases} \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \mathbf{0} \text{ em } V^r \\ \mathbf{t}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r \text{ em } S^r \end{cases}, \quad (50)$$

portanto, temos para processos quase estáticos:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (51)$$

é uma condição necessária e suficiente para que sejam satisfeitas a primeira equação local do equilíbrio e as condições de contorno estáticas são dadas por:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \mathbf{0} \text{ em } V^r \\ \mathbf{t}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r \text{ em } S^r \end{cases}, \quad (52)$$

2.4 Elasticidade Sob Linearidade Geométrica

Quando as deformações e rotações são pequenas, ou seja, infinitesimais, tem-se que a configuração de referência com a configuração final passa a ser equivalentes $(\bullet) = (\bullet)^r$. Portanto pode-se definir o gradiente da transformação, o tensor das tensões e deformação por:

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{I}, \quad \mathbf{T} \approx \mathbf{S} \approx \mathbf{P} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} \approx \text{Sym}(\nabla \mathbf{u}). \quad (53)$$

A partir de (53) tem-se o tensor de deformação infinitesimal, dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \text{Sym}(\mathbf{E}), \quad (54)$$

onde $\mathbf{L}$ é o gradiente do campo dos deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}^r)$ na configuração de referência e é dado por:

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{u}. \quad (55)$$

Um material é dito elástico se existir uma função tensorial do seguinte tipo, dada por:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}). \quad (56)$$

A equação (56) garante que para cada estado de deformação do ponto material corresponde a um único estado de tensões. Um material elástico é também um material reversível porque em um ciclo de deformações a tensão retorna a seu valor inicial. Porém para um material dito linear elástico este deve seguir também a relação (56), porém esta relação entre o tensor das tensões e das deformações deve ser linear.

A relação entre o tensor das tensões com a das deformações pode ser reescrito da seguinte forma, dado por:

$$\mathbf{S} = \mathbb{D} \mathbf{E}, \quad (57)$$

onde $\mathbb{D}$ é um tensor de quarta ordem, denominado *tensor dos módulos de rigidez elástica*.

Para um material linear elástico e isótropo, ou seja, com as mesmas propriedades em todas as direções, o tensor dos módulos de rigidez elástico tem a seguinte expressão:

$$\mathbb{D} = \Lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \mu \mathbb{I}_s, \quad (58)$$

onde Λ e μ são constantes de Lamé, dadas por:

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (59)$$

e $\mathbb{I}_s$ é um tensor de quarta ordem que pode ser utilizado como identidade simétrico e é dado por (60):

$$\mathbb{I}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I}), \quad (60)$$

ambas as constantes Λ e μ estão em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν .

A relação (56) pode ser rescrita a partir da equação (58) por:

$$\mathbf{S} = \mathbb{D}\mathbf{E} = \Lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}, \quad (61)$$

onde esta relação em (56) e em (61) é conhecida como Lei de Hooke que descreve o comportamento elástico linear de uma material isotrópico.

2.5 Elasticidade Sob Não-Linearidade Geométrica

Na teoria da elasticidade sob não-linearidade geométrica a cinemática dos sólidos deformáveis é tratada neste trabalho de forma exata. Não são feitas restrições aos deslocamentos, rotações, alongamentos e distorções do sólido. A consideração da não-linearidade geométrica é necessária para o desenvolvimento da teoria da estabilidade de sólidos e das estruturas. Da mesma forma que na teoria da elasticidade sob linearidade geométrica, pode-se formular na teoria da elasticidade sob não-linearidade geométrica problemas estáticos, quase-estáticos e problemas tangentes, porém neste trabalho somente foram tratados de problemas estáticos.

Uma forma de se formular equações constitutivas elásticas não-lineares é através da função da energia de deformação específica ψ .

Na não-linearidade existem diversos tensores de tensão e deformação que são utilizados para descrever a função da energia de deformação específica. Primeiramente será utilizado o par conjugado $\{S, E\}$ para a Lei de Material de *Kirchhoff-Saint Venant* e depois o par conjugado $\{P, F\}$ para a Lei de Material *neo-Hookiano de Simo- Ciarlet*.

A. Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant

Para a Lei de Material de *Kirchhoff-Saint Venant* a função da energia de deformação específica $\psi(E)$ é descrita em função do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, que é dado por:

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial E}, \quad (62)$$

onde E é o tensor das deformações de Green (ver equação (8)). Para materiais isotrópicos a função da energia de deformação específica pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\psi(E) = \psi(I_E, II_E, III_E), \quad (63)$$

onde $\{I_E, II_E, III_E\}$ são os invariantes do tensor das deformações definidos a seguir por:

$$I_E = \text{tr } E, \quad II_E = \frac{1}{2} \text{tr } E^2, \quad III_E = \frac{1}{3} \text{tr } E^3. \quad (64)$$

O segundo tensor das tensões Piola-Kirchhoff é dado então por:

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial I_E} \frac{\partial I_E}{\partial E} + \frac{\partial \psi}{\partial II_E} \frac{\partial II_E}{\partial E} + \frac{\partial \psi}{\partial III_E} \frac{\partial III_E}{\partial E} = \frac{\partial \psi}{\partial I_E} I + \frac{\partial \psi}{\partial II_E} E + \frac{\partial \psi}{\partial III_E} E^2. \quad (65)$$

Este modelo de Material de *Kirchhoff-Saint-Venant* é muito utilizado na otimização topológica não-linear e a sua função da energia de deformação específica é dada por:

$$\psi(E) = \frac{1}{2} \Lambda I_E^2 + 2\mu II_E. \quad (66)$$

A relação entre o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformação de Green é dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbb{D}\mathbf{E} = \Lambda I_E \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (67)$$

Note-se que a equação (67) é uma extensão direta da equação (61).

O tensor dos módulos de rigidez elástico tangente, que é derivada parcial da equação (67) em relação ao tensor de deformação $\mathbf{E}$ é dado por:

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}^2} = \Lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu \mathbb{I}_S. \quad (68)$$

Utilizando a equação (15) em (67) temos a expressão para a o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, dada por:

$$\mathbf{P} = \Lambda I_E \mathbf{F} + \mu \mathbf{F} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \Lambda I_E \mathbf{F} + \mu (\mathbf{B} - \mathbf{I}) \mathbf{F}, \quad (69)$$

decompondo o tensor F em suas respectivas componentes, temos:

$$\mathbf{P} = (\Lambda I_E - \mu) (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i) + \mu (\mathbf{f}_g \otimes \mathbf{f}_g) (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i), \quad (70)$$

onde as componentes do primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_2] \\ \tau_i = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}_i} \Rightarrow \tau_i = \frac{\partial \psi}{I_E} \frac{I_E}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial \psi}{\partial II_E} \frac{\partial II_E}{\partial \gamma_i} \end{array} \right. \quad (71)$$

O tensor dos módulos de rigidez elástico tangente é obtido a partir da derivada parcial das componentes do primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff (71) em relação às componentes do gradiente da transformação (4), que é dado por:

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{\partial \tau_i}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial \tau_i}{\partial \mathbf{f}_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{f}_i^2}. \quad (72)$$

A equação (69) pode ser reescrita em relação as suas respectivas componentes, dada por:

$$\begin{aligned} P e_i = \tau_i &= \Lambda I_E \mathbf{f}_i + \mu \mathbf{f}_i [\mathbf{C} - \mathbf{I}] = \Lambda I_E \mathbf{f}_i + \mu [\mathbf{B} - \mathbf{I}] \mathbf{f}_i, \\ \tau_i &= (\Lambda I_E - \mu) \mathbf{f}_i + \mu \mathbf{B} \mathbf{f}_i, \end{aligned} \quad (73)$$

onde a sua derivada em relação as componentes do gradiente da transformação é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_i}{\partial f_j} &= \frac{\partial \left((\Lambda I_E - \mu) f_i \right)}{\partial f_j} + \frac{\partial \left(\mu B f_i \right)}{\partial f_j} \\ \frac{\partial \tau_i}{\partial f_j} &= \delta_{ij} \left(\mu B + (\Lambda I_E - \mu) I \right) + \Lambda \frac{\partial I_E}{\partial f_j} \otimes f_i + \mu \frac{\partial B}{\partial f_j} f_i\end{aligned}\quad (74)$$

A derivada do invariante I_E é dada por:

$$\frac{\partial I_E}{\partial f_j} = I : \frac{\partial E}{\partial f_j} = I : \frac{\partial C}{2 \partial f_j} = I : \mathcal{B}_j = f_j \quad (75)$$

Portanto, substituindo a equação 67 na equação 66 obtemos tensor dos módulos de rigidez elástico tangente, para o par conjugado $\{P, F\}$, dado por:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial f_j} = \delta_{ij} \left[\mu B + (\Lambda I_E - \mu) I \right] + \mu \left[\left(f_i \cdot f_j \right) I + \left(f_j \otimes f_i \right) \right] + \Lambda \left(f_j \otimes f_i \right) \quad (76)$$

B. Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet

A lei material de Kirchhoff-Saint-Venant foi muito utilizada no passado em teorias estruturais por sua simplicidade. No entanto, esta lei de material tem sérios problemas teóricos e práticos, pois pode levar a problemas estáticos sem solução (BALL, 1977), como será comentado mais a frente. Um material que não apresenta esse problema é o material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet (CIARLET, 1988) (PIMENTA P. M., 2008). Todos os membros desta classe representam extensões da Lei de Hooke generalizada para não-linearidade geométrica e possuem apenas dois parâmetros constitutivos $\{J, I_C\}$ e a função da energia de deformação específica é dada por:

$$\psi = \psi(J, I_C) = \frac{1}{2} \Lambda \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] + \frac{1}{2} \mu (I_C - 3 - 2 \ln J), \quad (77)$$

onde $\{I_C, II_C, III_C\}$ são os invariantes do tensor das deformações definidos a seguir por:

$$I_C = I : C, \quad II_C = \frac{1}{2} \left[(C : C)^2 - (I_C)^2 \right] \quad (78)$$

Para obter o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente é necessário obter as derivadas parciais dos dois parâmetros constitutivos $\{J, I_C\}$. A derivada parcial do Jacobiano do gradiente da transformação (J) em relação às componentes do gradiente da transformação é dada por:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}_1} = \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}_2} = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}_3} = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2. \quad (79)$$

A derivada parcial do primeiro invariante I_C em relação às componentes do gradiente da transformação $\mathbf{f}_i$ é dada por:

$$\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{f}_i} = 2\mathbf{f}_i. \quad (80)$$

As derivadas parciais da energia de deformação específica ψ (77) em relação aos dois parâmetros $\{J, I_C\}$ são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial J} = \left(\frac{1}{2} \Lambda (J^2 - 1) - \mu \right) J^{-1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial I_C} = \frac{1}{2} \mu \end{cases}. \quad (81)$$

Incluindo as equações (79), (80) e (81) em (71) obtemos as componentes do primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \left[\frac{1}{2} \Lambda (J^2 - 1) - \mu \right] \frac{1}{J} \mathbf{g}_i + \mu \mathbf{f}_i, \quad (82)$$

O tensor dos módulos de rigidez elástico tangente (neste caso é um tensor de segunda ordem $\mathbf{D}_{ij}$) é obtido a partir da derivada parcial de (71) em relação às componentes do gradiente da transformação (4) utilizando as equações (79), (80), (81) e (82), este tensor elástico é dado por:

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \frac{\partial \tau_i}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial \tau_i}{\partial f_j} \\
D_{ij} &= \left[\frac{1}{2} \Lambda (1 + J^{-1}) + \mu J^{-1} \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \left[\frac{1}{2} \Lambda (J - J^{-1}) - \mu J^{-1} \right] \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{f}_j} + \mu \delta_{ij} \mathbf{I},
\end{aligned} \tag{83}$$

Como o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente depende diretamente das derivadas parciais dos tensores das deformações volumétricas $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ em relação às componentes do gradiente da transformação (4), se faz necessário às respectivas deduções de $\left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{f}_j} \right\}$ para que no próximo item seja possível obter o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente para EPD e EPT que são dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_i &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = \text{skew}(\mathbf{f}_2) \mathbf{f}_3 = -\text{skew}(\mathbf{f}_3) \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 = \text{skew}(\mathbf{f}_3) \mathbf{f}_1 = -\text{skew}(\mathbf{f}_1) \mathbf{f}_3, \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \text{skew}(\mathbf{f}_1) \mathbf{f}_2 = -\text{skew}(\mathbf{f}_2) \mathbf{f}_1 \end{cases} \\
\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{f}_j} &\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{f}_1} = \mathbf{0}, \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = -\text{skew}(\mathbf{f}_3), \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{f}_3} = \text{skew}(\mathbf{f}_2) \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{f}_1} = \text{skew}(\mathbf{f}_3), \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{f}_2} = \mathbf{0}, \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{f}_3} = -\text{skew}(\mathbf{f}_1), \\ \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \mathbf{f}_1} = -\text{skew}(\mathbf{f}_2), \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \mathbf{f}_2} = \text{skew}(\mathbf{f}_1), \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \mathbf{f}_3} = \mathbf{0} \end{cases}
\end{aligned} \tag{84}$$

Observa-se que o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente (83) para a lei de material neo-Hookiana $\mathbf{D}_{ij}$ é um tensor de segunda ordem, pois foi obtido a partir da derivada do tensor de primeira ordem do par conjugado $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\} \longrightarrow \{\boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{f}_i\}$.

C. Comparação de Ambas as Leis somente no Estiramento 1

Neste item é feita uma comparação unidimensional de uma barra sujeita ao efeito de tração e compressão na direção principal 1 (x_1) em relação à configuração de referência ($\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1 = \tau_1$) para ambas as leis de material de Kirchhoff-Saint Venant e neo-Hookiana.

Como foi selecionada somente a direção principal x_1 , o estiramento principal nesta direção é dado por λ_1 e os demais estiramentos nas outras duas direções são dados por $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e o valor do jacobiano para dada barra é igual à λ_1 . O gradiente da transformação ($\mathbf{F}$) nas mesmas condições é dado por $F_{11} = \lambda_1$.

Utilizando a equação (69) que relaciona tensão e deformação para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant utilizando as premissas anteriores temos:

$$\tau_1 = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (\lambda_1^2 - 1) = \chi \lambda_1 (\lambda_1^2 - 1), \quad (85)$$

onde χ representa a relação das propriedades de material das constantes de Lamé (λ e μ) para ambas as leis de material aqui descritas.

Para a lei de material neo-Hookiana a equação (82) que relaciona tensão e estiramento somente na direção principal 1 (x_1) sob as mesmas premissas da lei de material anterior, é dada por:

$$\tau_1 = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \chi \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right), \quad (86)$$

A partir das equações (71) e (72) é possível gerar um gráfico que relaciona o estiramento versus a tensão na seção da barra para ambas as leis de material descrito neste item, ver Figura 4.

Figura 4 – Gráfico com a comparação do estiramento versus tensão.

Analisando o gráfico da Figura 4, pode-se verificar que a barra que utiliza a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, sob compressão excessiva a tensão na seção da barra tende a zero e sob tração excessiva, a tensão tende a infinito muito rapidamente (quadraticamente). Porém a barra que utiliza a lei de material neo-Hookiana quando submetida aos mesmos efeitos, sob compressão, o valor de tensão aumenta, ou seja, a tensão de compressão tende a infinito, sob o efeito de tração a tensão tende a infinito quase linearmente evitando assim instabilidades durante o processo iterativo de solução não-linear do sistema de equações de equilíbrio, acarretando numa grande vantagem na estabilização no processo de solução não-linear do sistema (BALL, 1977).

2.6 Estado Plano de Deformação e Tensão (EPD e EPT)

As formulações utilizadas neste trabalho são duas, *Estado Plano de Deformação* (EPD) e *Estado Plano de Tensão* (EPT).

Para o EPD, a formulação consiste numa aproximação bidimensional para estruturas planas com espessuras muito longas e com seção constante ao longo do seu plano normal z e sujeitas a carregamentos somente nos eixos x e y .

Para melhor ilustrar a formulação EPD, um esquema da configuração deste tipo de estrutura é apresentado na Figura 5.

Figura 5 - Exemplo de problema de Estado Plano de Deformação (EPD).

Para a formulação EPD, assume-se a seguinte relação entre os deslocamentos $u_3 = 0$ e entre as deformações $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Para o caso do EPT a formulação também é aproximada e consiste em uma aproximação bidimensional de estruturas planas finas, sujeitas a carregamentos somente nos eixos x e y também.

Figura 6 - Exemplo de problema de estado plano de tensão (EPT).

Para a formulação EPT, assume-se que para EPT temos a seguinte relação entre as tensões

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Para obter o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente para o EPT acrescenta-se a seguinte hipótese no campo de deformações perpendicular ao plano:

$$\gamma_3 = \gamma_{33} e_3. \quad (87)$$

O jacobiano dado na equação (26), a partir da hipótese de $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, o jacobiano do gradiente da transformação pode ser reescrito por:

$$J = \mathbf{f}_3 \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) = (1 + \gamma_{33}) \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2), \quad (88)$$

e $\bar{J}$ Já dado por:

$$\bar{J} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2). \quad (89)$$

Logo os tensores da equação (84) podem ser reescritos baseado na hipótese do estado plano de deformação por:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\text{skew}(\mathbf{e}_3) \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{g}_2 = -\mathbf{f}_1 \times \mathbf{e}_3 = \text{skew}(\mathbf{e}_3) \mathbf{f}_1 \end{cases}, \quad (90)$$

e suas respectivas derivadas parciais, são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{f}_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{f}_2} = -\text{skew}(\mathbf{e}_3) \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{f}_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{f}_1} = \text{skew}(\mathbf{e}_3) \end{cases}. \quad (91)$$

A. Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant - EPD

Para a condição do EPD pode-se utilizar o mesmo tensor do módulo de rigidez elástico tangente dado na equação (76), considerando somente as direções $\{1, 2\}$, desta forma ele é dado por:

$$\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \mathbf{f}_\beta} = \delta_{\alpha\beta} [\mu \mathbf{B} + (\Lambda I_E - \mu) \mathbf{I}] + \Lambda (\mathbf{f}_\beta \otimes \mathbf{f}_\alpha) + \mu [(\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\beta) \mathbf{I} + (\mathbf{f}_\beta \otimes \mathbf{f}_\alpha)]. \quad (92)$$

B. Lei de Material Kirchhoff-Saint Venant - EPT

Considerando a hipótese EPT, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_3 &= (\Lambda I_E - \mu) (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_3 + \mu (\mathbf{f}_g \otimes \mathbf{f}_g) (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_3 \\ \tau_3 &= [(\Lambda I_E - \mu) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{f}_g \otimes \mathbf{f}_g)] \mathbf{f}_3 \\ \tau_3 &= [(\Lambda I_E - \mu) \mathbf{I} + \mu (\mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\alpha + \mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_3)] \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo à hipótese EPT no invariante I_E , dado pela equação (64), temos:

$$I_E = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha + \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3 - 3). \quad (94)$$

Substituindo a equação (94) em (93), chegamos a seguinte relação:

$$\tau_3 = \left(\frac{\Lambda}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha) \right) \mathbf{f}_3 - \left(\frac{3\Lambda + 2\mu}{2} \right) \mathbf{f}_3 + \mu (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_\alpha + \left(\frac{\Lambda}{2} + \mu \right) (\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_3, \quad (95)$$

onde componente de τ_3 na direção $\mathbf{e}_3$ é dada por:

$$\begin{aligned} (\tau_3 \cdot \mathbf{e}_3) &= \tau_{33} = \left(\frac{\Lambda}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha) \right) (1 + \gamma_{33}) - \left(\frac{3\Lambda + 2\mu}{2} \right) (1 + \gamma_{33}) \\ &+ \mu (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3)^2 (1 + \gamma_{33}) + \left(\frac{\Lambda}{2} + \mu \right) (1 + \gamma_{33})^3, \end{aligned} \quad (96)$$

sendo a condição de EPT obtida através de:

$$\begin{aligned}
\tau_{33} &= 0 \\
0 &= \left(\frac{\Lambda}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha) \right) (1 + \gamma_{33}) - \left(\frac{3\Lambda + 2\mu}{2} \right) (1 + \gamma_{33}) \\
&\quad + \mu (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3)^2 (1 + \gamma_{33}) + \left(\frac{\Lambda}{2} + \mu \right) (1 + \gamma_{33})^3 \\
0 &= (1 + \gamma_{33}) \left(\frac{\Lambda}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha) - \left(\frac{3\Lambda + 2\mu}{2} \right) + \mu (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3)^2 + \left(\frac{\Lambda}{2} + \mu \right) (1 + \gamma_{33})^2 \right).
\end{aligned} \tag{97}$$

Devido à condição de incompressibilidade, é impossível, portanto a única solução do sistema anterior, dado por:

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\Lambda + 2\mu}{2} \right) \left(\frac{3\Lambda + 2\mu}{2} - \mu (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3)^2 - \frac{\Lambda}{2} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha) \right)} - 1}, \tag{98}$$

no qual, pela hipótese EPT para elementos 2D temos:

$$\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \tag{99}$$

Substituindo na equação (98) a condição EPT dada em (99) temos:

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{3\Lambda + 2\mu}{\Lambda + 2\mu} - \frac{\Lambda}{\Lambda + 2\mu} (\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha)} - 1, \tag{100}$$

Considerando o EPT para elementos 2D, obtemos um novo invariante $(I_E)_{EPT}$. Introduzindo na equação (94) a nova relação entre o gradiente dos deslocamentos na direção 3 dado em (100), este novo invariante é dado por:

$$\begin{aligned}
(I_E)_{EPT} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{f}_\alpha + (1 + \gamma_{33})^2 - 3 \right] \\
(I_E)_{EPT} &= I_E + \gamma_{33} + \frac{\gamma_{33}^2 - 1}{2}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Para determinar o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente para a condição EPT é necessário isolar os termos relacionados ao tensor $\mathbf{f}_3$ e aplicar o invariante nas condições do EPT dado na equação (101). Esta nova relação entre o gradiente da transformação e o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff no EPT é dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^{EPT} = \boldsymbol{\tau}_\alpha^{EPD} + \frac{1}{2} \Lambda (\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_\alpha + \mu (\mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_\alpha, \quad (102)$$

a partir da relação dada na equação (102) é possível obter o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente para a condição EPT, dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^{EPT}}{\partial \mathbf{f}_\beta} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^{EPD}}{\partial \mathbf{f}_\beta} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}_\beta} \left[\frac{1}{2} \Lambda (\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_\alpha + \mu (\mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_3) \mathbf{f}_\alpha \right] \\ \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{EPT} &= \mathbf{D}_{\alpha\beta}^{EPD} - \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda + 2\mu} \right) \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{f}_\beta + \mu (\mathbf{f}_3 \otimes \mathbf{f}_3) \end{aligned} \quad (103)$$

C. Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet - EPD

Para a condição do EPD pode-se utilizar o mesmo tensor do módulo de rigidez elástico tangente dado na equação (83), considerando somente as direções $\{1, 2\}$, desta forma o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente é dado por:

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \left[\frac{1}{2} \Lambda (1 + J^{-1}) + \mu J^{-1} \right] \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\alpha + \left[\frac{1}{2} \Lambda (J - J^{-1}) - \mu J^{-1} \right] \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial \mathbf{f}_\beta} + \mu \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}, \quad (104)$$

D. Lei de Material neo-Hookiano de Simo-Ciarlet - EPT

Para a condição do EPT o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente dado na equação (83), deve considerar as equações ((87), (88) e (90)) da hipótese do estado plano de deformação na equação (71), obtendo:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{\partial \psi}{\partial J} (1 + \gamma_{33}) \mathbf{g}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial I} 2 \mathbf{f}_1 \\ \tau_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial J} (1 + \gamma_{33}) \mathbf{g}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial I} 2 \mathbf{f}_2 \\ \tau_{33} = \frac{\partial \varphi}{\partial J} \bar{J} + \frac{\partial \psi}{\partial I} 2 (1 + \gamma_{33}) \end{cases} \quad (105)$$

Impondo o EPT na equação (105), temos:

$$\tau_{33} = \frac{\partial \varphi}{\partial J} \bar{J} + 2(1 + \gamma_{33}) \frac{\partial \psi}{\partial I} = 0. \quad (106)$$

Substituindo a equação (106) na equação (83), obtemos a seguinte relação:

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{2\mu + \Lambda}{\Lambda \bar{J}^2 + 2\mu}} - 1. \quad (107)$$

O tensor das tensões que surge devido a hipóteses do EPT, advém da substituição da equação (107) na equação (105) sendo dado por:

$$\tilde{\tau}_\alpha = \left[\frac{1}{2} \Lambda (J^2 - 1) - \mu \right] \frac{1}{\bar{J}} \mathbf{g}_\alpha + \mu \mathbf{f}_\alpha = \varphi(\bar{J}) \mathbf{g}_\alpha + \mu \mathbf{f}_\alpha, \quad (108)$$

$$\varphi(\bar{J}) = \left[\frac{1}{2} \Lambda (J^2 - 1) - \mu \right] \frac{1}{\bar{J}} = -\mu \frac{\Lambda + 2\mu}{\Lambda \bar{J}^3 + 2\mu \bar{J}}, \quad (109)$$

onde $\frac{\partial \varphi(\bar{J})}{\partial \bar{J}}$ é dado por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{J}} = \varphi'(\bar{J}) = \mu \frac{(\Lambda + 2\mu)(3\Lambda \bar{J}^2 + 2\mu)}{(\Lambda \bar{J}^3 + 2\mu \bar{J})^2} = -\varphi(\bar{J}) \frac{3\Lambda \bar{J}^2 + 2\mu}{\Lambda \bar{J}^3 + 2\mu \bar{J}}, \quad (110)$$

A partir das equações (108), (109) e (110), finalmente chega-se ao tensor dos módulos de rigidez elástico tangente no EPT, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} &= \varphi'(\bar{J}) \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \mu \mathbf{I} \\ \mathbf{D}_{22} &= \varphi'(\bar{J}) \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \mu \mathbf{I} \\ \mathbf{D}_{12} &= (\mathbf{D}_{21})^T = \varphi'(\bar{J}) \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \varphi(\bar{J}) \text{skew}(\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (111)$$

onde o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente EPT completo é dado por:

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}. \quad (112)$$

3 Otimização Topológica (OT)

3.1 Introdução

Os métodos de otimização estão muito presentes na Engenharia, permitindo a obtenção de projetos mais eficientes, o que reflete em economia de recursos e de tempo. Existem diferentes abordagens que podem ser aplicadas no processo de otimização, sendo as três principais: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica (ver Figura 7).

Figura 7 - Três principais tipos de otimização aplicada a estruturas mecânicas, viga bi apoiada ("M.B.B. Beam").

(a) - Otimização Paramétrica.

(b) - Otimização de Forma.

(c) - Otimização Topológica.

A otimização paramétrica um método de otimização estrutural numérico iterativo (VANDERPLAATS, 1984) (ver Figura 7 (a.1)), que consiste em parametrizar a estrutura geométrica definida inicialmente, mantendo as condições de carregamentos e restrições mecânicas fixas. Por exemplo, na Figura 7 (a.1), a estrutura é discretizada com elementos de treliça, e nesse caso definiu-se que as variáveis de projeto otimizáveis são as características geométricas, como a área da secção transversal de cada elemento, também pode-se definir como variáveis de projeto, as coordenadas

geométricas. No exemplo analisado, se adotarmos que a função objetivo é maximizar a rigidez da estrutura, que está sujeita a uma restrição de volume, obtém-se o resultado mostrado na Figura 7 (a.2).

A otimização de forma um método de otimização estrutural numérico iterativo (HAFTKA, GURDAL, & KAMAT, 1990) (ver Figura 7 (b.1)), onde os contornos externos e internos da estrutura são parametrizados por curvas do tipo "*splines*", e os parâmetros dessas curvas constituem as variáveis de projeto. Nessa abordagem, é importante destacar que o método não cria novos furos na estrutura, somente otimiza os contornos já existentes. Dessa forma, utilizando um algoritmo computacional de otimização, determina-se os parâmetros ótimos das curvas "*splines*", e conseqüentemente obtém-se a forma ótima da estrutura (ver Figura 7 (b.2)), que maximiza a rigidez para um dado volume.

A otimização topológica é um método de otimização estrutural numérico iterativo de destaque nos projetos de engenharia em todo o mundo (BENDSØE & KIKUCHI, 1988), sendo robusto e eficiente. A principal característica da otimização topológica é a forma de distribuição de uma determinada quantidade de material no interior de um domínio fixo de projeto (ver Figura 7 (c.1)), através de sua adição ou remoção de forma livre, porém, direcionada, objetivando a obtenção da topologia ótima da estrutura. A OT neste trabalho é aplicada para a minimização da função objetivo, no qual se deseja obter a menor flexibilidade da estrutura para um determinado carregamento levando em consideração o efeito de grandes deslocamentos sujeito a uma restrição no volume de material.

3.2 Histórico da Aplicação da Otimização Topológica Não-Linear

Desde a introdução do MOT há duas décadas por (BENDSØE & KIKUCHI, 1988), este método de otimização tem ganhado muita popularidade na área acadêmica e industrial. Mas a maioria dos trabalhos na área de OT, são relacionados com a otimização de estruturas em regime linear (material e geométrico). Um pequeno número de trabalhos tem aplicado o MOT em análises não-lineares de estruturas, relacionada com o comportamento do material e geométrico. Inicialmente um pequeno número de trabalhos na OT relacionou o comportamento não-linear de material no projeto de estruturas (BENDSØE, 1995), (YUGE & KIKUCHI, 1995), (SWAN & KOSAKA, 1997), (MAUTE, SCHWARZ, & RAMM, 1998), (PEDERSEN C. B., 2003a). Estes trabalhos mostram a importância do efeito da não-linearidade de material, com a topologia ótima obtida utilizando o MOT. Já os resultados obtidos

(MAUTE, SCHWARZ, & RAMM, 1998) levaram em consideração o efeito da plasticidade do material, no caso o efeito do encruamento.

Os trabalhos de *Jog* (1996), *Tortorelli & Bruns* (2002) mostraram diferenças significativas na topologia ótima para estruturas submetidas a pequenos e grandes deslocamentos, mas, porém para estabilizar o sistema de solução não-linear utilizaram-se de técnicas inconsistentes para o MOT, como apagar elementos com baixa densidade (“void”) que prejudicavam a convergência do sistema. *Buhl & Sigmund* (2000) propôs zerar forças internas dos nós rodeados de elementos com baixa densidade (valor da pseudo-densidade de 0,001), estabilizando assim o sistema não-linear. Com esta nova técnica de estabilização foi possível reproduzir com mais qualidade os exemplos de uma viga engastada proposta por *Tortorelli & Bruns* (1998) variando o carregamento aplicado no processo de OT. Porém analisando mais o seu efeito numérico, verificou-se que este recai sobre o que *Tortorelli & Bruns* (1998) propuseram anteriormente.

Tabela 1 - Comparação dos resultados ótimos da literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000) entre a análise linear e análise não-linear geométrica conforme variação do carregamento aplicado.

Força [kN]	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a grandes deslocamentos
12	$C_{linear} = 0,188kJ$	$C_{não-linear} = 0,188kJ$
60	$C_{linear} = 4,690kJ$	$C_{não-linear} = 4,645kJ$
96	$C_{linear} = 12,000kJ$	$C_{não-linear} = 11,780kJ$
144	$C_{linear} = 27,000kJ$	$C_{não-linear} = 25,920kJ$
240	$C_{linear} = 75,190kJ$	$C_{não-linear} = 66,520kJ$

Gea & Luo (2001) apresentaram alguns resultados similares aos de Buhl & Sigmund (2000) alterando somente a função objetivo proposta por Tortorelli & Bruns (1998) e Buhl & Sigmund (2000), trocando as funções objetivo *Flexibilidade no ponto de Carga* ("end-compliance") e *Trabalho Complementar* ("complementary work") para a *Flexibilidade Média* ("mean compliance"). Porém nem todos os resultados de Buhl & Sigmund (2000) foram reproduzidos, mas aqueles reproduzidos tiveram uma estabilidade numérica um pouco maior. É importante salientar que todos os autores acima mencionados somente apresentaram de exemplos de estruturas 2D.

Porém Stegmann (2004) e Kemmler (2005), aplicaram o MOT para estruturas 3D em cascas e utilizando métodos numéricos de estabilização do sistema não-linear numéricos mais consistentes,

como por exemplo, "*line-search*" juntamente com o método de Newton-Raphson e Newton-Modificado (WRIGGERS, 2008) e o método da corda (CRISFIELD, 1981) ("*arc-length*") ao invés de utilizar os métodos anteriores. Com isto foi possível obter resultados de estruturas mais complexas (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) utilizando elementos de casca.

3.3 Conceito de MOT

O MOT é baseado principalmente em dois conceitos (BENDSØE & KIKUCHI, 1988) (BENDSØE, Optimal shape design as a material distribution problem, 1989), domínio estendido fixo e modelo de material.

O MOT é baseado em determinar a estrutura ótima, gerando buracos ou membros através da remoção e adição de material dentro do domínio de projeto. Desta forma o problema de otimização pode ser definido como obter a distribuição ótima de propriedades de materiais no domínio fixo estendido (Ω) (BENDSØE & KIKUCHI, 1988) que formará a nova estrutura desconhecida (Ω_d). Assim na implementação numérica, o domínio fixo é discretizado por elementos finitos que permanecerão inalterados durante todo o processo de otimização, simplificando o cálculo das derivadas da função objetivo definida para o problema, sendo somente alterada a distribuição de material no elemento, como apresentado na Figura 8 e pela seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \int_{\Omega} q d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial A_n} d\Omega, \quad (113)$$

onde A_n é uma variável de projeto que representa a distribuição de material, e q é uma função contínua de primeira ordem (derivável).

Figura 8 - Domínio estendido fixo Ω e domínio desconhecido Ω_d .

O segundo conceito importante no método é como variar a presença de material de *zero* a *um* no interior do domínio estendido fixo de projeto durante a otimização. Os dois principais modelos de materiais que definem a mistura em microescala de dois ou mais materiais são: homogeneização (BENDSØE & KIKUCHI, 1988) e o método das densidades (BENDSØE & SIGMUND, 2003). Neste trabalho foi adotado o método das densidades.

3.4 Modelo de material

O modelo de material é uma equação (114) que define a microestrutura do domínio fixo de projeto necessário para a caracterização da presença de material (sólido) ou a ausência do mesmo (vazio), e ainda permitir a existência de estágios intermediários entre as condições de sólido e vazio, fornecendo relaxamento matemático para o problema de otimização.

A variável de projeto utilizada no modelo de material, é denominada pseudo-densidade ($\rho(x)$) e representa as propriedades de um dado material isotrópico (BENDSØE, 1989). Esta aproximação baseada em modelos de materiais artificiais é denominada pela sigla SIMP (*"Solid Isotropic Material with Penalization"*). Esta aproximação permite relaxar o problema discreto, pois o problema discreto com pseudo-densidade com valores de 0 ou 1, sem valores intermediários torna o problema mal-posto, que tem como característica não possuir solução única e apresentar uma dependência da discretização do problema. A relaxação no SIMP permite alterar a propriedade efetiva do material num determinado ponto do domínio de projeto, de acordo com a variação contínua das pseudo-densidades com valores

entre 0 e 1. Desta forma possibilita a solução do problema de otimização no meio contínuo, tornando o problema bem-posto.

$$E(x) = \rho(x)E_0 \quad (114)$$

A equação (114) define que, a partir da propriedade E_0 (módulo de elasticidade, densidade, etc.) do material base isotrópico, é possível definir propriedades intermediárias de acordo com o valor da pseudo-densidade $\rho(x)$ ($0 \leq \rho(x) \leq 1$). Matematicamente têm-se materiais com propriedades efetivas ($E(x)$) intermediárias, neste caso variando linearmente de 0 até o valor E_0 , constituindo um modelo artificial de material.

A. Penalização

A relaxação de um problema discreto, que em geral não tem uma única solução, em um problema contínuo, possibilita a busca pela solução ótima, evitando a solução ficar presa em algum mínimo local do espaço de solução. Porém, ao introduzi-lá, cria-se a liberdade para que a variável de projeto assuma valores intermediários entre "0 e 1", conhecidos como "escalas de cinza" (ver item 3.5A) na OT. Tais valores intermediários das variáveis de projeto ("pseudo-densidades") nem sempre são factíveis do ponto de vista da manufatura e precisam ser controladas (introdução do raio mínimo, ver item 3.6). É desejável que a solução final seja constituída apenas pelo material base ou regiões de não presença de material, reconstituindo um caráter discreto no projeto, evitando materiais com características intermediárias, que na prática não tem significado nos processos atuais de manufatura. Uma das formas de se fazer isso é penalizar as densidades intermediárias, forçando valores entre 0 e 1.

No modelo SIMP, para evitar a formação de regiões de escalas de cinza, decorrentes da relaxação do problema, propôs-se a penalização da equação (114), conforme BENDSØE (1999):

$$E(x) = \rho(x)^p E_0(x), \quad (115)$$

onde p é o fator de penalização que proporciona uma redução no aparecimento de regiões de escalas de cinza, deixando a distribuição mais próxima de um caráter discreto (0 ou 1) (Figura 9).

Figura 9 - Influência do fator de penalização na propriedade efetiva do material.

Na Figura 9 é possível visualizar o efeito da penalização sobre as pseudo-densidades em relação aos valores das propriedades efetivas do material, o efeito da penalização é reduzir o efeito dos valores intermediários das pseudo-densidades sobre os valores propriedades efetivas do material, como pode ser deduzido pela equação (115). Nota-se que para valores altos de penalização, a curva da propriedade efetiva do material fica mais próxima de uma curva “degrau”, aproximando-se de uma distribuição discreta. Entretanto, valores muito elevados do fator de penalização levam a otimização novamente aos problemas característicos de uma abordagem discreta. Portanto neste trabalho foi utilizando um valor máximo de $p = 10$.

B. Método da Continuação

A maioria dos problemas de OT são não convexos, o que acarreta a existência de muitos mínimos locais dentro do espaço de solução, gerando diferentes soluções ótimas para o mesmo problema quando utilizado diferentes valores penalização para o mesmo modelo, principalmente na OT NL.

A ideia do método da continuação é alterar gradualmente a “forma” do problema de otimização não convexo (com diversos mínimos locais) para um problema convexo artificialmente, relaxando inicialmente o problema de otimização, utilizando-se inicialmente valores baixos de penalização no

modelo material, permitindo assim a existência de regiões com valores intermediários pseudo-densidades ao longo do processo iterativo. Durante o processo iterativo o valor de penalização na função objetivo é alterada penalizando valores intermediários resultando assim em valores mais discretos (valores mais próximos de 0 e 1) de pseudo-densidades, pois a efetividade do material com baixa densidade vai ser tornando cada vez menor conforme o valor p é incrementado a cada iteração do processo de otimização (ver item 3.4-A e Figura 9).

O método da continuação implementado neste trabalho é baseado na mudança do valor da penalização ao longo de um processo iterativo. Geralmente inicia-se com um valor de penalização pequeno, geralmente com $p = 1$, (para OT não-linear foi utilizado o valor da penalização igual à 2 para retirar membros espúrios que acarretam em flambagem da estrutura) e a cada iteração o valor de p é gradativamente somado a um valor de Δp (foi utilizado $\Delta p = 0,01$) assim sucessivamente até um valor limite, no caso $p = 5$.

$$p_{i+1} = p_i + \Delta p. \quad (116)$$

O método de continuação é necessário para que a solução MOT não convirja para um mínimo local indesejável, pois para valores p de muito altos, a função objetivo em geral será mal comportada uma vez que se aproxima de uma função discreta, principalmente considerando efeitos não-lineares na estrutura.

Figura 10 - Representação da influência da penalização na função objetivo na solução da OT.

Uma representação esquemática dessa situação é exposta na Figura 10, referente a uma aplicação mais “tradicional” do método SIMP, conforme a equação (115). Verifica-se que a função $f(\rho(x))$ é convexa, enquanto a função $f(\rho(x)^3)$ é mal comportada, pois possui vários mínimos locais. Assim, iniciando com $p = 1$ é mais provável que o método de otimização convirja para o ótimo mais próximo do ótimo global, e posteriormente, com o aumento do valor da penalização (p), a solução convirja para um ótimo local cada vez mais próximo do ótimo global do problema.

3.5 Problemas na Implementação Numérica da OT

A. Escalas de Cinza

Em problemas tradicionais de OT onde se busca obter uma distribuição discreta ótima de material ao longo do domínio fixo de projeto, a relaxação total dos problemas através da utilização de um modelo de material não é interessante, devido à variação da variável de projeto de forma contínua ao longo do domínio, levando ao surgimento de valores intermediários de pseudo-densidades, como é apresentado na Figura 11. As escalas de cinza dentro do modelo de material utilizado (SIMP) são consistentes, mas do ponto de vista de engenharia ainda são pouco factíveis, e por esta razão são utilizados artifícios, como a penalização, para reduzi-la no final da otimização.

Figura 11 - Exemplo de estrutura (viga M.B.B.) otimizada com escala de cinza (BENDSØE & SIGMUND, 2003).

B. Instabilidade de Tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro ("*checkerboard*") é caracterizada pela formação de regiões com material e elementos sem material ou com baixo valor de pseudo-densidade em cor branca, dispostos em forma de um tabuleiro como ilustrado na Figura 12. Este tipo de instabilidade é mais comum em problemas de otimização estrutural no qual a função objetivo que se deseja minimizar é a flexibilidade. Nestes casos, a configuração padrão de tabuleiro apresenta numericamente uma rigidez maior (rigidez artificial) do que uma configuração de mesmo volume homogênea, sendo neste caso predominantes em algumas regiões ao final da OT. Conforme mostrado por *Jog & Haber* (1996), a natureza do surgimento do padrão "*checkerboard*" é a mesma envolvida na convergência do MEF. Em linhas gerais, trata-se de uma "incompatibilidade" entre a discretização dos campos de deslocamento e de densidades, que provocam o surgimento de uma distribuição de oscilações espúrias no campo de densidades. Através de simulações numéricas, *Jog & Haber* (1996) demonstram que, no caso dos elementos de baixa ordem, o sistema não-linear se torna mal condicionado para alguns campos de deslocamentos, o que propicia o aparecimento das instabilidades de tabuleiro. Uma abordagem para a solução do problema de instabilidade de tabuleiro é atacar a raiz do problema e utilizar elementos de alta ordem para representar o campo de deslocamentos, como já comentado. *Jog & Haber* (1996) propõem que a combinação entre a interpolação do campo de deslocamento do campo de densidades, para os elementos quadrados, que apresentam estabilidade são Q8/UD, Q9/UD, Q8/Q4 e Q9/Q4. A nomenclatura adotada para representar estas combinações é: QX representa um elemento quadrado "Q" com "X" nós, e UD um elemento quadrado com campo constante, a sigla antes da barra indica o campo de deslocamento e a sigla depois da barra indica o campo de densidades.

Neste trabalho utiliza-se uma forma alternativa para a eliminação da instabilidade do tabuleiro nos problema de OT sem recorrer a elementos de alta ordem como solução para este problema. Com a introdução de métodos de controle da variação espacial das variáveis de projeto ou o controle das pseudo-densidades no domínio de projeto, através de implementações de filtros e técnicas de projeção no domínio de projeto, com estas técnicas foi possível evitar o problema de tabuleiro especificando um tamanho de membro mínimo no domínio de projeto.

Uma das técnicas de filtragem mais utilizadas é a técnica desenvolvida por *Bendsøe & Sigmund* (1999), esta técnica baseia-se no conceito que a instabilidade do tabuleiro é caracterizada por variações bruscas nos gradientes das variáveis de projeto (PETERSON & SIGMUND, 1998) e utiliza as pseudo-

densidades para alterar a gradiente das variáveis de projeto (gradiente baseado em variáveis elementais) alterando a média dos pesos das variáveis de projeto vizinhas, eliminando assim o problema de instabilidade do tabuleiro, mas não a escala de cinza totalmente.

Figura 12 - Padrão de Instabilidade de Tabuleiro ("*checkerboard*")
(BENDSØE & SIGMUND, 2003).

Neste trabalho utilizou-se a técnica de projeção proposta por *Guest, Prévost e Belytschko* (2004), pois esta se mostrou mais eficiente no controle da instabilidade do tabuleiro e minimização da dependência de malha que a seguir será detalhada.

C. Dependência de Malha

A dependência de malha ocorre com diferentes discretizações da malha de elementos finitos em um domínio fixo que geralmente não geram qualitativamente a mesma solução. O refino da malha de elementos finitos deveria idealmente resultar na mesma topologia obtida por malhas mais pobres, mas o que se observa com o aumento da discretização de um mesmo domínio com as mesmas condições de contorno é que a topologia da estrutura ótima tende a se alterar, aumentando o número de membros da estrutura, caracterizando assim, o problema de dependência de malha. A dependência de malha ocorre devido ao fato que a introdução de mais furos no domínio, sem alteração de volume, gera um aumento da eficiência de uma dada estrutura. Consequentemente as variações estruturais tendem a formar uma microestrutura que melhor aproveita o material. Tais microestruturas são tipicamente não isotrópicas e, portanto, não se encaixam nas descrições de projeto de um material isotrópico. Existe uma falta de fechamento do conjunto admissível de projetos. O efeito disto é a formação de mais furos à medida que o domínio fixo é mais discretizado.

Na Figura 13 são apresentados diferentes resultados para um mesmo problema de otimização estrutural, alterando-se apenas a discretização da malha.

Malha com 800 elementos.

Malha com 1200 elementos.

Figura 13 - Efeitos da dependência de malha (BENDSØE & SIGMUND, 2003).

3.6 Técnica de Projeção

A técnica de projeção foi inicialmente proposta por *Guest, Prévost e Belytschko* (2004), para que fosse possível garantir um tamanho mínimo de membro e eliminar o problema de dependência de malha e instabilidade de tabuleiro. Segundo *Sigmund* (2007) é a melhor técnica para minimizar a escala de cinza durante o processo de otimização topológica.

Esta técnica consiste em se projetar um domínio de variáveis sobre um domínio de pseudo-densidades de cada elemento do domínio de projeto. É uma função dependente de uma ponderação das pseudo-densidades de cada elemento pertencente a um raio de abrangência mínimo, como é apresentado na Figura 14, que ilustra o campo de varredura do raio mínimo de forma a garantir a independência da discretização do domínio de projeto.

Figura 14 - Representação da área de abrangência da projeção, independente da malha (a) malha refinada e (b) malha padrão.

A vantagem desta técnica de projeção é a não necessidade de restrições extras, funções de penalização ou filtros, melhorando assim a qualidade dos resultados obtidos. Na Figura 15 é possível verificar a independência dos resultados em relação à malha utilizando a técnica de projeção sobre uma viga engastada de 1000 x 250 milímetros de domínio de projeto.

Figura 15 - Resultados de topologia ótima para diferentes tamanhos de elementos para uma viga engastada de dimensões de 1000x250 milímetros, para $r_{\min} = 30$:

- (a) - Malha com 175 elementos. (b) - Malha com 1250 elementos.
(c) - Malha com 2500 elementos. (d) - Malha com 5000 elementos.

Para compreender melhor o conceito de variáveis de projeto e pseudo-densidades na técnica de projeção, elas devem ser separadas. Antes da introdução da técnica de projeção por *Guest, Prévost e Belytschko* (2004), as pseudo-densidades, utilizadas no cálculo das propriedades efetivas do material, eram as próprias variáveis de projeto, as quais são utilizadas na rotina de otimização topológica. Um exemplo deste uso é o filtro implementado por *Peterson & Sigmund* (1998) e *Sigmund* (2001), no qual as pseudo-densidades são utilizadas para alterar o gradiente das variáveis de projeto (elementos) alterando a média dos pesos das variáveis de projeto da vizinhança. Na técnica de projeção, as pseudo-densidades passam a serem funções das variáveis de projeto, ou seja, elas terão valores diferentes entre si. A pseudo-densidade de cada variável de projeto (a variável de projeto pode ser elemento ou nó, como foi introduzido por *Guest* (2004)) no domínio é uma função que depende das variáveis de projeto de cada elemento dentro do raio mínimo de projeção e de suas respectivas distâncias (ver Figura 4). Quanto maior for a distância de um elemento do centro da projeção (i), menor será a sua influência, de modo que, quanto mais próximo do centro de projeção, maior será a influência sobre a pseudo-densidade.

Considere que o raio de projeção é a distância do centro do elemento (ponto e) em relação aos demais elementos, dado por:

$$r \equiv \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_e\| \quad (117)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_e$ é o vetor referente as coordenadas centrais do elemento central do raio de projeção.

A função peso $w(\mathbf{x})$ que relaciona as distâncias entre o elemento central e os elementos adjacentes dentro desse raio de projeção é dada por:

$$w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_e) = \begin{cases} \frac{r_{\min} - r}{r_{\min}} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_w^e \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_w^e \end{cases} \quad (118)$$

O peso da função é independente da malha. Se o modelo for mais refinado (com maior número de elementos) a única mudança será no aumento no número de elementos mapeados pela função de projeção. A função de projeção que relaciona a função peso ao valor da nova variável de projeto é dada por:

$$\rho_e = \frac{\sum_{j \in \mathbf{s}_e} (\rho_e)_j w\|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_e\|}{\sum_{j \in \mathbf{s}_e} w\|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_e\|} \quad (119)$$

onde a variável j refere-se aos elementos dentro do raio de projeção ao redor do elemento central (e). A variável $\mathbf{s}_e$ refere-se ao vetor do conjunto de elementos dentro do domínio de influência do elemento e (Ω_w^e na Figura 14), o qual consiste em um círculo de raio mínimo de influência ($r_{\min}$) e centro no elemento " e ". A função peso $w(\mathbf{x})$ dentro de um raio de influencia r pode assumir diferentes curvaturas (linear, exponencial, etc.). As equações (118) e (119) apresentadas anteriormente constituem uma função linear da função peso em relação à distância r . Neste caso, a função de ponderação assume o formato de um cone, com centro e valor máximo 1 no ponto " e ", decrescendo linearmente até o valor igual à zero, quando $r = r_{\min}$ conforme apresentado na Figura 16.

Figura 16 - Função de projeção, para a função de projeção linear.

A função de projeção linear dada na equação (119) pode ser combinada com método da continuação (116). Esta combinação gera uma nova função de projeção não-linear, dada por:

$$\rho_e = \frac{\sum_{j \in \mathbf{s}_e} (\rho_e)_j w \|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_e\|^p}{\sum_{j \in \mathbf{s}_e} w \|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_e\|^p} \quad (120)$$

onde a variável p altera continuamente a curvatura da função ao longo do processo iterativo de otimização. A implementação desta técnica de projeção não-linear se mostrou muito robusta e eficiente para a eliminação da escala de cinza dentro do domínio de projeto. Na Figura 17 é apresentada a função de curvatura do peso da função de projeção para diferentes valores de penalização.

Figura 17 - Função de projeção, para a função de projeção não-linear.

Pode-se verificar que a função de projeção não-linear implementada, utiliza a mesma curvatura da função de efetividade do modelo de material “*SIMP*” (ver Figura 9 e equações (115) e (120)). A variação da curvatura da função de projeção em conjunto com a penalização do modelo de material é controlada pelo método da continuação, ou seja, o método da continuação altera a penalização do modelo de material e da função de projeção ao mesmo tempo.

4 Formulação da OT para o Projeto de Estruturas Considerando o Efeito da Não-Linearidade Geométrica

A formulação do problema de otimização topológica não-linear é definido formulando-se a função objetivo e restrições do problema, que são definidos por (121):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar}_{\rho(\mathbf{x})} \quad f_0(\rho(\mathbf{x})) = C \quad \left(\rho(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^1 \right) \\ &\text{Sujeito à : } \mathbf{r}(\mathbf{u}) \cong 0 \\ &\quad 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \\ &\quad f_1(\rho(\mathbf{x})) = \frac{V(\rho(\mathbf{x}))}{V_0} - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \tag{121}$$

4.1 Função Objetivo - Minimização da Flexibilidade no ponto de Carga ("end-compliance")

No caso da otimização aplicada ao projeto de estruturas sob não-linearidade geométrica, que é o tema deste trabalho, a característica a ser otimizada é a distribuição ótima de material no domínio de projeto, levando em conta os grandes deslocamentos, que minimize a flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento no domínio de projeto. A escolha natural da função objetivo é a minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento ou denominada também em inglês de "*end-compliance*", pois esta não necessita de vários incrementos de carga para obter o valor da sua função total, minimizando o custo computacional. O cálculo da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento é simples, pois requer apenas uma verificação do equilíbrio, no caso a equação de equilíbrio (154). A estrutura obtida através desta função objetivo, segundo *Buhl et al.* (2000), será uma estrutura, com grande probabilidade de falha se o carregamento aplicado não for exatamente igual ao carregamento de projeto. No entanto, vamos testar essa função objetivo e continuar a discutir os seus inconvenientes no item 7.1.

Definimos a letra "*C*" para descrever a função de flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento de uma estrutura em sua configuração de equilíbrio, esta função pode ser escrita por:

$$f_0(\rho(\mathbf{x})) = C = \psi \cong \mathbf{p}^e \cdot \mathbf{u}. \quad (122)$$

Para múltiplos casos de carregamento, podemos definir a nova função objetivo da seguinte forma:

$$f_0(\rho_e) = \sum_{i=1}^M w_i C_i = \sum_{i=1}^M w_i (\mathbf{p}_i^e \cdot \mathbf{u}_i), \quad (123)$$

onde M é referente ao número de casos de carregamento, e w_i é o valor do peso da função objetivo referente ao caso de carregamento i .

4.2 Restrições de Projeto

A primeira restrição de projeto a ser satisfeitas em problemas de não-linearidade estática é o equilíbrio das forças do sólido no espaço, que é dado por:

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{f}(\mathbf{u})_{\text{int}} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \cong \mathbf{0}, \quad (124)$$

onde $\mathbf{p}_e$ se refere as força de superfície externa e $\mathbf{f}(\mathbf{u})_{\text{int}}$ as forças internas, que num processo estático ou quase estático devem se anular.

Outra restrição de projeto importante no problema de OT é a limitação de material a ser utilizada, através da definição de uma fração de volume. A fração de volume controla a porcentagem de volume de material que se deseja obter ao final da otimização, em relação ao volume total do domínio estendido de projeto inicial.

A definição básica da restrição de volume é dada pela equação:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega &\leq V_{\text{final}}, \\ 0 &\leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \end{aligned} \quad (125)$$

onde ρ representa os valores de pseudo-densidades em cada ponto do domínio Ω e V_{final} o volume final que se deseja atingir na otimização.

4.3 Função de Relaxação

Para evitar instabilidades na aproximação da função objetivo, como por exemplo, erros numéricos advindo de elementos excessivamente distorcidos durante o processo de otimização e permitir obter um espaço de solução dentro da região do domínio viável, são acrescentadas restrições artificiais para alteração das variáveis de projeto. Estas restrições vão sendo atualizadas em cada iteração do processo de otimização baseado em um parâmetro de distorção de cada elemento em seu respectivo ponto de integração (ver item 9.1, sobre pontos de integração). O invariante que mede a distorção de cada ponto de Gauss de um elemento isoparamétrico (ARMERO & LOVE, 2003) é dada por:

$$I_D = \det(\mathbf{A})^{-2/3} \mathbf{A} : \mathbf{A} = (\phi_1 \phi_2 \phi_3)^{-2/3} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) \quad (126)$$

onde ϕ_i refere-se aos estiramentos quadráticos nas direções principais. Um fator de mudança nos valores das pseudo-densidades para mais ou para menos baseado num critério de distorção é dado por:

$$\delta = e^{\left(I_M - \sum_{i=1}^k I_D \right)} \quad (127)$$

onde k se refere ao número de pontos de Gauss do elemento isoparamétrico. Para um elemento tipo Q4 com integração o valor sem distorção, o valor de I_M é igual a 12. Baseado na equação (127) é possível descrever a equação que rege a mudança de cada variável de projeto baseado em um critério de distorção, que é dada por:

$$\rho_{e-new}^i = \delta^i \rho_e^i + (1 - \delta^i) \rho_e^{i-1} \quad (128)$$

onde ρ_{e-new}^i é o valor da pseudo-densidade atualizada no elemento, δ é o fator de mudança (127) da variável de projeto (ρ_e^i) da iteração atual i , o valor de δ varia de 0 à 1, quanto maior for a deformação na estrutura na iteração i , menor deverá ser a alteração de ρ_e^i , portanto menor será o valor de cada δ^i .

Este procedimento de atualização das variáveis de projeto se mostrou essencial para a convergência e estabilidade o processo de OT-NL, pois os algoritmos de otimização numéricos (utilizados), baseiam-se em derivadas de primeira ordem da função objetivo. A derivada de primeira ordem nada mais é que uma taxa de variação instantânea da função objetivo em um determinado ponto das variáveis de projeto (ρ_e) naquela iteração, não podendo ser considerada como a derivada que descreve toda a função objetivo para quais quer alterações nas variáveis de projeto, ou seja, a derivada de primeira ordem da função objetivo não é capaz de descrever ou prever uma perda de elipsidade (da lei de material) ou estabilidade (da estrutura). Baseado nisto uma alteração abrupta dos valores de pseudo-densidades de zero a um, ou vice-versa tende a alterar a curva (ordem) da função objetivo completamente de uma iteração para a seguinte. A alteração da ordem da função objetivo depende diretamente de uma taxa de deformação do elemento, portanto se a mudança dos valores das pseudo-densidades for baseada num valor relacionado com a taxa de deformação de cada variável de projeto (elemento), o problema se torna convexo e estável até o limite da respectiva lei de material e capacidade de integração do elemento utilizado.

4.4 Método das Assíntotas Móveis (MAM)

O MAM foi originalmente proposto por *Svanberg* (1987), para operar de forma similar ao método de PLS (*Programação Linear Sequencial*) uma vez que este resolve uma sequência de aproximações mais simples do problema original (aproximação convexa separável), baseando-se no princípio proposto por *Fleury* (1989), com método de aproximação convexa chamado de CONLIN. Como o MAM somente trata de restrições de desigualdade, para descrevê-lo, tanto a função objetivo quanto as restrições são representadas genericamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{a}}{\text{Minimizar}} && f_0(\mathbf{a}) && \left(\mathbf{a} \in \mathbb{R}^1 \right) \\ &\text{Sujeito à :} && f_i(\mathbf{a}) \leq \hat{f} && i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{129}$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ é o vetor das variáveis de projeto, $f_0(\mathbf{a})$ é a função objetivo e $f_i(\mathbf{a}) \leq \hat{f}_i$ são as restrições de projeto. A função objetivo e as restrições são linearizadas, mas para isto são introduzidas

variáveis intermediárias L_j e U_j , chamadas de assíntotas móveis. Considerando o vetor das variáveis na iteração k ($a^{(k)}$), os valores dos parâmetros das assíntotas móveis, estão restritos por uma desigualdade (ver Figura 18), para assegurar a convexidade da aproximação e evitar denominador nulo da função (131), controlando os limites inferiores e superiores da seguinte forma:

$$L_j^{(k)} < a_j^{(k)} < U_j^{(k)}, \quad (130)$$

onde j , é referente a posição vetorial da variável.

A função a ser aproximada é então, linearizada em relação às variáveis intermediárias (assíntotas móveis) para cada $i = 1, \dots, m$, onde as restrições $f_i^{(k)}$ são definidas por (131):

$$f_i^{(k)}(a) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - a_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{a_j - L_j^{(k)}} \right), \quad (131)$$

onde dependendo do sinal da derivada $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ e a derivada for positiva, lineariza-se com relação a

$\frac{1}{U_j^{(k)} - a_j}$ e se for negativa, em relação $\frac{1}{a_j - L_j^{(k)}} :$

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \left(U_j^{(k)} - a_j^{(k)} \right)^2 \frac{\partial f_i}{\partial a_j}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial a_j} > 0 \\ 0, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \leq 0 \end{cases}, \quad (132)$$

e

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \geq 0 \\ - \left(a_j^{(k)} - L_j^{(k)} \right)^2 \frac{\partial f_i}{\partial a_j}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial a_j} < 0 \end{cases},$$

onde todas as derivadas de $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ são avaliadas em $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(k)}$ e os valores das assíntotas móveis são ajustadas ao longo do processo de otimização.

A característica mais importante do MAM é que através dos valores fornecidos para as assíntotas L_j e U_j , é possível modificar a curvatura de aproximação, o que equivale a ter o controle sobre os graus de convexidade e conservação da mesma, como apresentado na Figura 18.

Figura 18 - Curva de aproximação convexa pelo Método das Assíntotas Móveis.

Baseado no algoritmo básico do MAM descrito acima, alguns aprimoramentos deste método foram desenvolvidos, destacando se os trabalhos de *Zhang* (1996) e *Bruyneel, Duysinx & Fleury* (2002). Um estudo da eficiência numérica deste método pode ser encontrado em *Bruyneel & Duysinx* (2005).

4.5 Critério da Optimalidade (CO)

Os métodos baseados no critério de optimalidade (CO) são algoritmos empíricos de atualização das variáveis de projeto que se baseiam na condição de estacionaridade da função Lagrangiana do problema a ser minimizado (BENDSØE & SIGMUND, 2003). Sua principal vantagem é a sua grande eficiência numérica, porém é um método muito específico, uma vez que a regra de atualização das variáveis de projeto deve ser deduzida para cada tipo de problema.

O CO é um método que têm sido importante na otimização estrutural, mais especificamente com o método otimização topológica, em particular para o clássico problema de otimização topológica em que a função objetivo é a minimização da flexibilidade, sujeita a uma única restrição de volume (SIGMUND O. , 2001). Quando considerada mais de uma restrição de projeto, o método de CO é de difícil formulação.

No problema de minimização da flexibilidade, a configuração mais comum e eficiente do CO foi descrita por *Bendsøe* (1989) sendo que um parâmetro de amortecimento heurístico numérico ζ (BENDSØE, 1989) (BENDSØE & SIGMUND, 2003) foi acrescentado para melhorar a convergência e estabilidade do processo do CO.

Bendsøe & Sigmund (2003) observaram resultados muito similares utilizando o MAM (Método das Assíntotas Móveis) e OC, e observou-se que as rotinas numéricas utilizadas por ambos eram muito similares. Eles observaram que a definição da assíntota inferior em um subproblema do MAM para zero (problema com uma restrição de volume linear) resulta na mesma configuração de atualização das variáveis proposta por *Bendsøe* (1989), quando o parâmetro de amortecimento heurístico numérico η é definido igual a 0,5 para o CO. *Bendsøe* (1989) observou também que o seu método heurístico CO, durante o processo de otimização topológica, se parecia muito com o método FSD ('Fully Stress Design').

Groenwold (GROENWOLD & ETMAN, 2007) demonstrou que as configurações utilizadas no CO por *Bendsøe* (1989), no caso o parâmetro de amortecimento heurístico numérico η , geram um caso particular do SAOM "Sequential Approximate Optimization Method" ou Método de Otimização Seqüencial Aproximada (FLEURY, 1982) no qual o MAM (SVANBERG, 1987) e o CONLIN (FLEURY, 1989) fazem parte desta família. A grande vantagem do uso deste método, é que o chute inicial das variáveis de projeto não precisa estar necessariamente dentro do espaço de solução de projeto.

Bendsøe (1989) havia proposto o seguinte processo heurístico de atualização das variáveis de projeto para o MOT:

$$\rho_e^{novo} = \begin{cases} \rho_e B_i^\eta & \text{se } \check{\rho}_e < \rho_e B_i^\varsigma < \hat{\rho}_e \\ \check{\rho}_e & \text{se } \rho_e B_i^\varsigma \leq \check{\rho}_e \\ \hat{\rho}_e & \text{se } \rho_e B_i^\varsigma \geq \hat{\rho}_e \end{cases}, \quad (133)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, com as variáveis seguindo os seguintes valores máximos e mínimos:

$$\begin{cases} \check{\rho}_e \leftarrow \max(\rho_e - \delta, \min(\rho_e)) \\ \hat{\rho}_e \leftarrow \min(\rho_e + \delta, 1) \end{cases}, \quad (134)$$

onde $\delta > 0$, é uma limite móvel para as variáveis de projeto, $\min(\rho_e)$ se refere ao valor mínimo do vetor das pseudo-densidade do modelo de material, para $\forall i$.

Então, a equação (133) é iterativamente resolvida até que a seguinte condição da equação (135) seja satisfeita para a saída do laço:

$$\|\rho_e^{novo} - \rho_e\| < e_b, \quad (135)$$

onde $e_b > 0$. A variável B_i da equação (133) é obtida a partir da seguinte equação:

$$B_i = \frac{-\left(\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e}\right)}{\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \rho_e}\right)}, \quad (136)$$

onde $\lambda \geq 0$. No entanto na equação (133), temos $B_i \leftarrow B_i^\varsigma$, com ς como parâmetro de amortecimento heurístico numérico, introduzido para reduzir o comportamento oscilatório observado quando a equação (133) é resolvida (de forma iterativa) com $\varsigma = 1$. O multiplicador de Lagrange pode ser obtido utilizando a estratégia de bi-seção. Na equação (136) a derivada da função objetivo do problema é $\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e}$ e a derivada da restrição é $\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e}$.

Para o problema de minimização da flexibilidade média com restrição de volume (considerando linearidade geométrica e de material) o problema pode ser definido da seguinte forma:

$$f_0(\rho_e) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (137)$$

porém para resolver o problema numericamente, é necessário definir de forma numérica a equação do cálculo da flexibilidade média:

$$f_0(\rho_e) = \sum_{i=1}^n (\rho_e)_i^p (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i), \quad (138)$$

onde n é o número de variáveis de projeto (ou o número de elementos dentro do domínio de projeto), $p \geq 1$ é um valor de penalização das variáveis de projeto, que pode ser alterado durante o processo de otimização para diminuir a escala de cinza (ver *método da continuação*), $\mathbf{u}_i$ é o vetor local dos deslocamentos e $\mathbf{K}_i$ é a matriz de rigidez linear do elemento (i) (ver Apêndice 9.2), portanto a partir da função objetivo do problema (138), podemos definir a sua derivada em relação as variáveis de projeto:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = -p (\rho_e)_i^{p-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i), \quad (139)$$

A definição da função de restrição de volume do problema pode ser definida da seguinte forma:

$$f_1(\rho_e) = \frac{V(\rho_e)}{V_0} - \bar{V} \leq 0, \quad (140)$$

onde $V(\rho_e)$ é o volume final da estrutura a cada iteração, v_0 é o volume total do domínio de projeto e $\bar{V}$ é a fração de volume definida no início do processo de otimização. A partir da função de restrição (140), podemos definir a sua derivada em relação às variáveis de projeto (141):

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e} = \frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \frac{V_i}{V_0} = 1, \quad (141)$$

considerando que a cada iteração do processo de OT, a área inicial de cada elemento não se altere, essa restrição pode ser utilizada na OT em regime não-linear geométrico.

5 Implementação Numérica

5.1 Implementação do MEF Não-Linear Elástico 2D

Neste item é descrita a formulação do MEF onde a relação entre os esforços internos e externos não corresponde a uma relação linear. Para resolver o sistema é utilizada a formulação na forma fraca o sistema é resolvido por Métodos de Solução de Equações não-lineares iterativo dado no item 5.2.

Antes de descrever o MEF não-linear utilizado neste trabalho é necessário listar alguns casos onde uma análise não-linear é indispensável, podendo ser citadas três fontes principais de não-linearidades:

- Não linearidade de material (plasticidade e dano).
- Não linearidade geométrica (elástica ou cinemática).
- Não linearidade nas condições de contorno (contato).

Neste trabalho foi somente formulada a não-linearidade geométrica exata que é um dos temas principais deste trabalho.

A não-linearidade geométrica surge devido à modificação da geometria de referência da análise ao longo do processo de deformação do corpo. Ocorre devido ao efeito das grandes deformações, representado pela parcela de segunda ordem do tensor de deformação, que gera grandes deslocamentos e rotações.

A análise deste tipo de problema está ligada à escolha do sistema de referência a ser utilizado. Neste trabalho optou-se por utilizar a formulação Lagrangiana, pois é a formulação tradicionalmente utilizada na literatura para análise MOT considerando o efeito da não-linear geométrica (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), (KEMMLER, LIPKA, & RAMM, 2005) e (PENZLER, RUMPF, & WIRTH, 2010).

Para descrever o comportamento do sólido no espaço de forma numérica, é necessário discretizar o domínio de projeto. Neste trabalho é utilizado o Método dos Elementos Finitos para tal discretização, ou seja, discretiza-se o domínio de projeto em pequenos elementos para que o conjunto

descreva o comportamento do sólido como um todo. Além de discretizar é necessário também interpolar os valores dentro do elemento, logo temos a seguinte relação entre contínuo e o discreto interpolado, dado por:

$$\mathbf{x} \cong \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{x} \quad \mathbf{u} \cong \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{u} \quad (142)$$

onde N_k descreve uma função de forma do elemento, n refere-se ao número do nós do elemento. Da mesma forma que a posição do sólido é interpolada pela equação (142), pode-se interpolar para qualquer variável dentro do elemento. Para mais detalhes sobre a função de forma do elemento Q4 utilizado, ver Apêndice 9.1 do trabalho.

Como já mencionado anteriormente, existem as não-linearidades causadas por grandes deformações. Estas mudanças de configurações podem ser tratadas definindo uma medida de tensão e deformação auxiliar que leve em consideração o movimento de um corpo e defina medidas cinemáticas do seu movimento no espaço (equação (54)) de forma objetiva. Para isto o gradiente da transformação ($\mathbf{F}$) (143) que descreve o estiramento e rotações que as fibras do material submetidas ao um determinado carregamento entre o tempo t_a e t_b , é definido num elemento 2D a partir de:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x} \otimes \nabla N_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_2^r} \end{bmatrix} \cong \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha, \quad (143)$$

porém para compor a matriz do gradiente da transformação é necessário obter as derivadas parciais das funções de forma do elemento (190) em relação as suas respectivas coordenadas locais (192) e dos seus respectivos deslocamentos nodais $\mathbf{u}_k$.

Cada termo da matriz do gradiente da transformação é composta por uma somatória das derivadas parciais da função de forma do elemento que resulta na seguinte equação para elemento Q4 (para mais detalhes ver Apêndice 9.1):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1^r} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_1^r} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{u}_k \mathbf{e}_k \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{x}_1^r}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2^r} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_2^r} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{u}_k \mathbf{e}_k \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{x}_2^r}, \quad (144)$$

onde $\mathbf{N}$ é matriz das funções de forma do elemento (N_k) e a sua derivada em relação ao sistema de coordenada local, que pode ser agrupada em uma matriz $\mathbf{B}_k$ dada por:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{N}_{,i} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{k,i} & 0 \\ 0 & N_{1,2} & \dots & 0 & N_{k,i} \\ N_{1,2} & N_{1,1} & N_{k,i} & N_{k,i} \end{bmatrix}, \quad (145)$$

A partir de equação (51) podemos definir o equilíbrio na forma fraca a partir das funções de forma do elemento, dada por:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \\ \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot (\mathbf{N} \delta \mathbf{u}) dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot (\mathbf{N} \delta \mathbf{u}) dS^r = \int_{V^r} \boldsymbol{\tau}_i \cdot (\delta \mathbf{f}) dV^r, \quad (146)$$

onde o gradiente da transformação virtual $(\delta \mathbf{F})$ é dado a partir da equação (143), por:

$$\delta \mathbf{F} = (\delta \mathbf{u} + \mathbf{x}^r) \otimes \nabla \mathbf{N}. \quad (147)$$

A partir das equações (146) e (147), obtém-se a expressão em termos das forças internas e externas a partir do trabalho virtual:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \\ \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{ext}} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\text{int}}. \quad (148) \\ \delta \mathbf{u} \cdot \left(\int_{V^r} \mathbf{N} \mathbf{b}^r dV^r + \int_{S^r} \mathbf{N} \mathbf{t}^r dS^r \right) = \delta \mathbf{u} \cdot \left(\int_{V^r} \boldsymbol{\tau}_i \nabla \mathbf{N} dV^r \right)$$

A partir da equação (148), podemos chegar à equação das forças internas de um elemento, que é dada por:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{V^r} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\tau}_i dV^r. \quad (149)$$

Da mesma maneira chega-se na equação dos esforços externos, dada por:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_{V^r} \mathbf{N} \mathbf{b}^r dV^r + \int_{S^r} \mathbf{N} \mathbf{t}^r dS^r, \quad (150)$$

A partir das equações (148), (149) e (150) chega-se a equação de esforços do equilíbrio estático de um sólido no espaço, dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}} \cong \mathbf{0}, \quad (151)$$

Derivando a equação do equilíbrio, dada pela equação (151), em relação ao vetor dos deslocamentos, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \int_{V^r} \mathbf{B}_k^T \frac{\partial \mathbf{b}^r}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{B}_k dV^r + \int_{S^r} \mathbf{B}_k^T \frac{\partial \mathbf{t}^r}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{B}_k dS^r - \int_{V^r} \mathbf{B}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{B}_k dV^r, \\ &= (\mathbf{K}_T(\mathbf{u}))_k \end{aligned} \right. \quad (152)$$

onde $(\mathbf{K}_T(\mathbf{u}))_k$ se refere a matriz tangente do elemento do sistema linearizado. Como as componentes das forças externas neste trabalho não dependem do deslocamento do sólido temos a seguinte relação, dada por:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(- \int_{V^r} \mathbf{B}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} \mathbf{B}_k dV^r \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(- \int_{V^r} \mathbf{B}_k^T \mathbf{D}_{ij} \mathbf{B}_k dV^r \right) = \sum_{k=1}^n (-\mathbf{K}_T(\mathbf{u}))_k \end{aligned} \right. \quad (153)$$

Observa-se que o tensor de segunda ordem $\mathbf{D}_{ij}$, representado por uma matriz simétrica, refere-se ao tensor dos módulos de rigidez elástico tangente dado nos itens 2.6A, 2.6B, 2.6C e 2.6D para EPD e EPT. Portanto para obter a matriz rigidez tangente linearizada relativa às leis de material descritas neste trabalho, basta substituir o tensor dos módulos de rigidez elástico tangente na equação (153).

Como neste trabalho o vetor das forças externas é aplicado diretamente nos nós, representaremos por $\mathbf{p}^e$. Geralmente é utilizado o resíduo normalizado um valor próximo de 10^{-8} , o que garante na maioria dos casos consistência ao equilíbrio de forças. Portanto podemos reescrever a equação (151) para o vetor nodal das forças externa de forma incremental, de modo que a variável λ representa um escalar incremental da equação de equilíbrio, dada por:

$$\lambda \mathbf{p}^e - \mathbf{f}(\mathbf{u})_{\text{int}} = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \cong \mathbf{0}, \quad (154)$$

Para um sistema linear, a partir da equação (152), consideramos que a força externa é igual à interna, pois o gradiente da transformação é dado como um tensor identidade, pois consideram-se as deformações infinitesimais. Portanto temos a seguinte relação:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u} \cong \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (155)$$

5.2 Implementação de Métodos de Solução para Sistemas de Equações Não-Lineares

A representação do comportamento não-linear de estruturas a partir de parâmetro de carregamento e deslocamentos envolve fenômenos como o aumento de rigidez ou seu decréscimo envolvendo trajetórias instáveis como apresentado na Figura 19 (a) e Figura 20 (a). Para a representação completa de tais trajetórias, procedimentos numéricos iterativos e incrementais são empregados para percorrer toda a trajetória de carga da estrutura e detectar a ocorrência de pontos limites de carga (ponto *A* da Figura 19 (a)) e de pontos limites de deslocamento ou “snap-back” (ponto *B* Figura 20 (a)).

Como os Métodos de Solução de Equações Não-Lineares aqui apresentados são iterativos e incrementais, a notação utilizada para unificar todos os métodos apresentados é dada por (156):

$$\begin{matrix} \text{incremento} \rightarrow i \\ \text{iteração} \rightarrow j \end{matrix} \mathbf{u}, \quad (156)$$

onde *i* refere-se ao incremento de carga e *j* a iteração para convergência do método de solução não-linear de equações.

Inicialmente neste trabalho optou-se pelo uso o método de Newton iterativo e incremental, porém com os elementos de baixa densidade dentro do domínio de projeto acabaram por instabilizar a estrutura gerando modos de flambagem localizados. Entretanto imaginou-se que utilizando o método do comprimento de arco e o “GDC” poderia resolver o problema mesmo em regiões instáveis, o que não se mostrou verdadeiro, pois mesmo passando o ponto limite, os elementos distorciam muito inviabilizando a integração da matriz rigidez de modo correto, inviabilizando assim a solução por qualquer método implícito, portanto neste trabalho o Método de Newton se mostrou suficiente para resolver todos os problemas propostos neste trabalho. Portanto aqui são apresentados todos os métodos de solução implementados neste trabalho durante o estudo do MOT NL.

A. Método de Newton

Para resolver o sistema não-linear de equações e encontrar as suas raízes (equação (154)), um dos métodos utilizados foi o método de Newton, que tem como objetivo estimar as raízes de uma função $f(y)$. Para isso, toma-se um ponto qualquer da função ($_1y$), calculando a derivada da função ($f'(y)$) no ponto escolhido ($_1y$) e subtraindo com o valor do ponto da solução anterior ($_iy$) até que, o ponto calculado anteriormente seja igual ao calculado na iteração atual, dentro de uma determinada tolerância ($_{i+1}y \cong y^*$), onde y^* é um ponto da função $f(y)$, cujo valor é a raiz da função.

Uma das grandes vantagens deste método é a convergência quadrática, se este estiver próxima da raiz da função, reduzindo assim o tempo computacional para a solução do sistema de equações não-lineares. A partir da descrição feita é possível escrever a função iterativa do método de Newton que é dada por:

$$_{i+1}y = _iy - \frac{f(_iy)}{f'(_iy)}, \quad (157)$$

Baseado no equilíbrio quase-estático dado pela equação (154), a função de solução das raízes pelo método de Newton é dada por (158):

$$\begin{cases} _{j+1}^i\mathbf{u} = _j^i\mathbf{u} + \left(\mathbf{K}_T(_{j-1}^i\mathbf{u})\right)^{-1} \mathbf{r}(_{j-1}^i\mathbf{u}) \\ _{j+1}^i\mathbf{u} = _j^i\mathbf{u} + _j^i\delta\mathbf{u}_r \end{cases} \quad (158)$$

onde,

$$\left(\mathbf{K}_T(_{j-1}^i\mathbf{u})\right)^{-1} \mathbf{r}(_{j-1}^i\mathbf{u}) = _j^i\delta\mathbf{u}_r.$$

O método de convergência iterativo e incremental de Newton é representado de forma gráfica na Figura 19 (a) e (b) para um melhor entendimento de seu processo. Para que o processo seja incremental é necessário aplicar uma parcela do carregamento externo $\mathbf{p}^e$ a cada incremento e o fator incremental para o carregamento é dado pela equação (159) que rege esta atualização para o Método de Newton, porém é importante destacar que esta atualização do fator incremental é somente incremental e não iterativa e incremental como em outros métodos que serão descritos na sequência.

$${}^{i+1}\lambda = {}^i\lambda + {}^i\delta\lambda \quad (159)$$

A equação (159) descreve o processo de atualização do fator incremental de carga, onde ${}^i\lambda$ se refere ao carregamento aplicado e ${}^i\delta\lambda$ ao incremento da carga, ambos aplicados no incremento i , referentes à atualização da equação de equilíbrio dada pela equação (154).

As vantagens da utilização de métodos incrementais de solução são grandes, pois com linearização de pequenas regiões no espaço de solução do equilíbrio, o uso de pontos de partida melhores condicionados, possibilita estimar com maior eficiência as raízes de sistemas não-lineares de equações de ordem mais alta, sem adição de erros, pois como já descrito, o método de Newton é um método iterativo de estimação das raízes de uma função e com a utilização da estimativa do incremento anterior é mais fácil estimar os novos valores das raízes seguintes.

Figura 19 – (a) – Curva de Carga Incremental,
(b) – Procedimento Iterativo de Convergência do Método de Newton.

Analisando a Figura 19 (b), a variável ${}^2\lambda p_e$ representa o vetor das forças externas na iteração j , $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ é a matriz tangente da estrutura (atualizada para cada iteração j) e $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda)$ o vetor do resíduo, relativo à equação de equilíbrio (154). O vetor do incremento dos deslocamentos é descrito por ${}^i\mathbf{u}$. Com a atualização da matriz rigidez a cada iteração, o Método de Newton tem a característica de convergência quadrática quando próximo das raízes do sistema, porém este método apresenta falha de

convergência quando a derivada do sistema é descontínua ou não tem raízes ou as funções possuem ordem acima de cúbica (ver Figura 19 (a)). É importante também levar em consideração que pelo MEF, o Método de Newton terá convergência com funções de ordem inferior à cúbica somente se os elementos que discretizam a estrutura estiverem dentro de limite de distorção que garante precisão durante o processo de integração numérica. É muito comum na literatura o uso do método de Newton Modificado para evitar este tipo de problema, pois este Método não atualiza a matriz rigidez a cada iteração, evitando assim problemas de integração numérica advindos de elementos excessivamente distorcidos, porém o seu custo computacional é muito elevado comparado com o método de Newton “puro” necessitando de preditores de pontos de partida melhores condicionados (preditores de $\mathbf{u}^i$) como, por exemplo, o Método de “line-search” para agilizar e melhorar o processo de convergência iterativo, porém este Método de predição não garante a mesma taxa de convergência do método de Newton com atualização da matriz tangente rigidez.

B. Método do Comprimento de Arco Esférico

Inicialmente o Método do Comprimento de Arco foi proposto por Riks (RIKS, 1979), tendo sido muito aprimorado por outros autores (REDDY, 2004), (WRIGGERS, 2008), (BONET, 2008) entre outros tendo como base o problema do uso do Método de Newton em determinados casos onde nem sempre é possível obter solução em todos os pontos de trajetória da estrutura, como por exemplo, em pontos limites (ponto A da Figura 20 (a)), onde o fator de carregamento é constante durante o processo iterativo e não sendo possível percorrer a trajetória de regiões instáveis da estrutura, como apresentado na Figura 20 (a), onde o ponto A representa o ponto limite da estrutura, onde a matriz rigidez tangente da estrutura adquire características positiva semi-definida ou indefinida, o que acarreta na instabilidade da estrutura e não solução do sistema de equações. Já o ponto B representa o efeito de “snap-back” da estrutura.

Nos diversos Métodos de Comprimento de Arco, o processo iterativo é controlado por uma combinação geométrica entre as variáveis de deslocamentos e fator de carga proporcional aplicado. A Figura 20 (b) ilustra o procedimento para a obtenção do equilíbrio do sistema, pelo Método do Comprimento de Arco Esférico.

Figura 20 – (a) ponto limite e “snap-back”

(b) Representação do Método do Comprimento de Arco Esférico.

Para o Método de Comprimento de Arco Esférico, a seguinte combinação precisa ser controlada na primeira iteração a partir do ponto inicial da trajetória durante o processo iterativo (conforma linha vermelha da Figura 20 que representa uma superfície esférica de restrição), onde esta restrição é dada por:

$$({}^i\delta\bar{s})^2 = ({}^i\delta\mathbf{u} \cdot {}^i\delta\mathbf{u}) + (\varpi)^2 ({}^i\delta\lambda)^2 (\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e), \quad (160)$$

onde $\delta\bar{s}$ refere-se ao raio da restrição esférica imposta dentro de um incremento de carga que é calculado a cada iteração até se alcançar um determinado valor de tolerância do equilíbrio do sistema ($\text{tol} \approx 0 \approx 10^{-8}$, tanto para o equilíbrio de forças quanto para os deslocamentos), dada por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = {}^i\lambda \mathbf{p}_e - \mathbf{f}({}^i\mathbf{u})_{\text{int}} \approx \mathbf{0}. \quad (161)$$

A atualização do fator incremental e iterativo do carregamento dentro da restrição esférica imposta é dada por (162):

$$\begin{cases} {}^{i+1}_j\lambda = {}^i_j\lambda + {}^i\delta\lambda \\ {}^{i+1}_{j+1}\lambda = {}^i_j\lambda + {}^i\delta\lambda \end{cases}, \quad (162)$$

onde o fator de carga incremental ($^{i+1}_j\lambda$) só é atualizado após a convergência do incremento de carga iterativo ($^i_j\delta\lambda$). A atualização incremental e iterativa dos vetores dos deslocamentos relativo à restrição esférica do método é dada por:

$$\begin{cases} ^{i+1}_j\mathbf{u} = ^i_j\mathbf{u} + ^i_j\delta\mathbf{u} \\ ^{i+1}_{j+1}\mathbf{u} = ^i_j\mathbf{u} + ^i_j\delta\mathbf{u} \end{cases} \quad (163)$$

onde o incremento iterativo do deslocamento ($^i_j\delta\mathbf{u}$) é dado pela composição da parcela referente ao resíduo e ao fator de carga incremental e iterativo, dado por:

$$^i_j\delta\mathbf{u} = ^i_j\delta\mathbf{u}_r + ^i_j\lambda ^i_j\mathbf{u}_p, \quad (164)$$

As parcelas dos vetores dos deslocamentos $^i_j\delta\mathbf{u}_r$ e $^i_j\mathbf{u}_p$ são dadas por:

$$\begin{cases} ^i_j\delta\mathbf{u}_r = \mathbf{K}_T(^{i-1}_{j-1}\mathbf{u})\mathbf{r}(^{i-1}_{j-1}\mathbf{u}, ^i_j\lambda) \\ ^i_j\mathbf{u}_p = \mathbf{K}_T(^{i-1}_{j-1}\mathbf{u})\mathbf{p}_e \end{cases} \quad (165)$$

Para determinar o valor do incremento iterativo de carga que reduz a distância entre o carregamento aplicado e a restrição esférica da equação (160), temos a seguinte expressão quadrática:

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0, \quad (166)$$

onde as constantes da equação quadrática a_1 , a_2 e a_3 são dadas por:

$$\begin{cases} a_1 = (^i_j\mathbf{u}_p \cdot ^i_j\mathbf{u}_p) + \varpi^2(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e) \\ a_2 = 2(^i_j\mathbf{u}_p \cdot (^i_j\delta\mathbf{u} + ^i_j\delta\mathbf{u}_r)) + 2(^i_j\delta\lambda)\varpi^2(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e) \\ a_3 = ^i_j\delta\mathbf{u}_r \cdot (2(^i_j\delta\mathbf{u} + ^i_j\delta\mathbf{u}_r)) + (^i_j\delta\mathbf{u} \cdot ^i_j\delta\mathbf{u}) - ^i_j\delta s^2 \end{cases} \quad (167)$$

A equação (167) é uma equação de segundo grau que tem duas raízes dada por:

$$^{(k)}\delta\lambda \rightarrow \begin{cases} ^{(1)}\delta\lambda \\ ^{(2)}\delta\lambda \end{cases}, \quad (168)$$

onde a raiz selecionada é aquela que gerar o maior ângulo θ do seguinte produto escalar dado por:

$${}^{(k)}\cos\theta = \frac{{}_j^i\delta\bar{\mathbf{s}} \cdot {}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{s}}}{{}_j^i\delta\bar{s}^2}. \quad (169)$$

Os vetores que geram este produto são dados por:

$$\begin{aligned} {}_j^i\delta\bar{\mathbf{s}} &= \begin{bmatrix} {}_j^i\delta\mathbf{u} \\ {}_j^i\delta\lambda\varpi\mathbf{p}_e \end{bmatrix} & {}^{(k)}\delta\bar{\mathbf{s}} &= \begin{bmatrix} {}_j^i\delta\mathbf{u} + ({}_j^i\delta\mathbf{u}_r + {}^{(k)}\delta\lambda\mathbf{u}_p) \\ \left({}_j^i\lambda + {}^{(k)}\delta\lambda\right)\varpi\mathbf{p}^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (170)$$

(a) (b)

C. Método do Controle Generalizado dos Deslocamentos (MCGD)

Este método, proposto por *Yang & Shieh* (1990), tem como objetivo automatizar o ajuste do tamanho do passo incremental, através do acompanhamento do parâmetro de rigidez generalizado da estrutura ("*GSP*"), e a troca do sinal do incremento de carga proporcional na ocorrência de pontos limites. Baseado no conceito do Método do Comprimento de Arco, os autores propuseram um novo método do cálculo do incremento iterativo de carga e propuseram relacionar deslocamentos incrementais em dois passos sucessivos, através da seguinte expressão para o fator de carga proporcional, dado por:

$${}_j^i\delta\lambda = -\frac{{}_{i-1}^1\mathbf{u}_p \cdot {}_j^i\delta\mathbf{u}_r}{{}_{i-1}^1\mathbf{u}_p \cdot {}_j^i\mathbf{u}_p}, \quad (171)$$

porém para toda primeira iteração de cada incremento do fator de carga (onde $j = 1$), temos uma variação da equação (171) que nada mais é que um parâmetro generalizado de rigidez das estrutura ("*GSP*") definido pelos autores do método (YANG & SHIEH, 1990) e dado por:

$$GSP = \frac{{}_1^1\mathbf{u}_p \cdot {}_1^1\mathbf{u}_p}{{}_{i-1}^1\mathbf{u}_p \cdot {}_1^1\mathbf{u}_p}, \quad (172)$$

de modo que o incremento no fator de carga, para a primeira iteração de um passo genérico é dado por:

$${}_1^i\delta\lambda = \sin(GSP){}_1^1\delta\lambda\sqrt{|GSP|} \quad (173)$$

O GSP , definido por (134), possui varias características importantes, a primeira delas é o numerador e o denominador da expressão do parâmetro de rigidez generalizado representam, respectivamente, os deslocamentos no primeiro passo e, aproximadamente, os deslocamentos no passo corrente. Assim, o GSP é representativo para a variação da rigidez da estrutura e seu uso torna automático o ajuste do tamanho do passo incremental. A segunda característica importante é o sinal do GSP , quando negativo a curva de carga se próxima de pontos limites, pois seu sinal depende do produto escalar entre ${}^{i-1}_1\delta\mathbf{u}_p$ e ${}_1^1\delta\mathbf{u}_p$. Desta forma o parâmetro fornece a indicação da mudança no sinal do incremento de carga.

MEF não-linear elástico implementado utilizou o Método do Controle Generalizado dos Deslocamentos (ou “MGDC”) e o método implementado foi comparado ao Método do Comprimento de Arco de um software comercial, neste caso o Abaqus, ver Apêndice 9.4 para maiores detalhes

5.3 Implementação do Método de Otimização Topológica Não-Linear

A rotina computacional do MOT implementada utiliza as rotinas de otimização CO ou MAM para resolver o problema de distribuição ótima de material ao longo do domínio de projeto. Foi verificado que os resultados de ambos os métodos de otimização numérica levam aos mesmos resultados de topologia final da estrutura em regime não-linear geométrico, portanto ambos os métodos são utilizados sem distinção.

Inicialmente são especificadas as dimensões e as condições de contorno do modelo 2D a ser otimizado, que fornecem os dados de entrada para a rotina de geração de malha gerar as coordenadas locais, matriz de conectividade, propriedades de material e condições de contorno. Logo em seguida é chamado um algoritmo de mapeamento da função de projeção que faz um mapeamento das variáveis de projeto e cálculo dos seus respectivos pesos baseados no valor de r_{min} . Na sequência o programa chama uma rotina de laço que dentro dela tem a rotina de cálculo do MEF Não-Linear Geométrico, a rotina de solução do MEF não-linear é baseada na solução das equações de equilíbrio do sistema (ver item). Na mesma rotina de calculo do MEF não-linear é feito o calculado o valor da Função Objetivo e das Sensibilidades baseado nos resultados obtidos durante o cálculo de equilíbrio do MEF Não-Linear Geométrico, é possível calcular o valor da função objetivo e suas respectivas sensibilidades relativa a

cada variável de projeto (ver item 5.4). Logo em seguida o programa chama uma *Função de Projeção* que aplica esta função nas variáveis de projeto, para evitar o problema de tabuleiro e garantir a independência do resultado (ver item 3.5) e finalmente a rotina de otimização numérica é chamada (*Otimizador*) para encontrar a ótima distribuição das pseudo-densidades (ou material) ao longo do domínio de projeto (ver itens 4.4 e 4.5) em conjunto o a função de Relaxação proposta (ver item 4.3). Após a função de relaxação é avaliado se a função objetivo convergiu ou não, dentro dos requisitos de projeto, terminando assim a função de laço.

A seguir é apresentado o fluxograma (implementado no programa *MatLab*) de implementação da rotina de OT para o Não-Linear Geométrico (elástico) na Figura 21.

Figura 21 - Fluxograma de implementação da rotina de OT sob Não-Linearidade Geométrica.

5.4 Gradientes da Função Objetivo (Análise de Sensibilidade)

A CO e MAM são algoritmos de otimização dependem da informação dos gradientes da função objetivo e das restrições de projeto para direcionar a otimização e a distribuição ótima de material ao longo do domínio fixo. O cálculo do gradiente destas funções é conhecido como análise de sensibilidade, na qual se verifica como a alteração da variável de projeto pode influenciar a função objetivo e as restrições, ou, em outras palavras, o quão sensível à função objetivo e as restrições são em relação a uma mudança na variável de projeto. A partir deste conhecimento, a otimização é direcionada iterativamente ao novo ponto ótimo, assim sucessivamente até um determinado critério de convergência estabelecido.

Para resolver o problema de OT em regime não-linear geométrico é necessário obter a sensibilidade da função objetivo do problema. *Buhl et al.* (2000) propuseram a função objetivo baseado na minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento e também propuseram a minimização do trabalho complementar, ambas baseadas na equação de equilíbrio do sistema (154).

O problema de otimização de minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento com a restrição de volume, é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_0(\boldsymbol{\rho}_e) = C = \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{u} \quad \left(\boldsymbol{\rho}_e \in \mathbb{R}^1 \right) \\ \text{Sujeito à :} \quad & f_1(\boldsymbol{\rho}_e) = \frac{V(\boldsymbol{\rho}_e)}{V_0} - \bar{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (174)$$

Assumindo que as variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}_e$ não dependam do carregamento externo, podemos definir a derivada da função objetivo (174) da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\rho}_e} = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial \boldsymbol{\rho}_e} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\rho}_e} = \mathbf{p}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\rho}_e}. \quad (175)$$

Para determinar a sensibilidade do deslocamento em relação a variável de projeto $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\rho}_e}$, é necessário utilizar o método adjunto, para isto é necessário introduzir uma variável a mais, um vetor dos multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Assumindo que o equilíbrio do sistema já foi determinado (equação

(154)), temos que produto de λ com $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ (vetor do resíduo) é igual à zero (pois $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{10}^{-8}$ é a tolerância de convergência utilizada) e, portanto pode ser adicionado junto à função objetivo (174), sem nenhuma mudança no valor da função objetivo:

$$f_0(\rho_e) = C = \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{r}(\mathbf{u}), \quad (176)$$

Com a introdução de um vetor dos multiplicadores de Lagrange na função objetivo (174), temos a nova equação para a sensibilidade, dada por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_e} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e}, \quad (177)$$

onde $\mathbf{p}_e$ e λ não dependem do deslocamento $\left(\frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_e} = \mathbf{0} \right)$, portanto suas respectivas derivadas parciais são zero, portanto a equação (177) é expressa por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = \mathbf{p}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e} \right), \quad (178)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ é igual a matriz de rigidez tangente $-\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ (como apresentado na Figura 19 e dado na equação (153)), assumindo que o vetor dos resíduos é igual a um vetor zero ($\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$), portanto o vetor dos multiplicadores de Lagrange λ pode assumir qualquer valor ($\lambda \in \mathbb{R}^1$). Para eliminar o termo $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e}$ da equação (177), o valor de λ deve ser calculado respeitando a seguinte equação:

$$(\mathbf{p}_e - \mathbf{K}_T(\mathbf{u})\lambda) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} = 0, \quad (179)$$

o que corresponde a resolver um sistema linear de equações para obter o valor de λ :

$$(\mathbf{K}_T(\mathbf{u}))^{-1} \lambda = \mathbf{p}_e, \quad (180)$$

Inserindo os valores de λ , obtidos na equação anterior (180), na equação (177), temos a função da sensibilidade da função objetivo:

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = -\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e}, \quad (181)$$

Como o vetor do resíduo é igual à zero, mas não a sua derivada parcial em relação às variáveis de projeto ρ_e para obter $\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e}$ temos que derivar a função de equilíbrio (154) em relação às variáveis de projeto. Então primeiramente temos a relação de equilíbrio penalizada:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_e - \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{p}_e - \int_{V^r} \mathbf{B}^T \rho_e^p \mathbf{P}(\mathbf{u}) dV^r \cong 0, \quad (182)$$

portanto a derivada parcial de $\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e}$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \rho_e} = \frac{\partial (\mathbf{p}_e - \mathbf{f}_{\text{int}})}{\partial \rho_e} = - \int_{V^r} \mathbf{B}^T p \rho_e^{p-1} \mathbf{P}(\mathbf{u}) dV^r, \quad (183)$$

substituindo a equação (181), na equação (183) temos a sensibilidade flexibilidade em relação flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento:

$$\frac{df_0}{d\rho_e} = -\lambda^T \int_{V^r} \mathbf{B}^T p \rho_e^{p-1} \mathbf{P} dV^r, \quad (184)$$

No Apêndice 9 são apresentadas tabelas com uma comparação da sensibilidade da função objetivo via diferenças finitas central em relação a sensibilidade analítica.

6 Resultados

Foram realizados diversos testes com a rotina de OT NL implementada, para verificar inicialmente os resultados e comparar com os resultados da literatura obtidos por *Buhl et al.* (2000), esta comparação dos resultados da literatura em relação ao presente trabalho pode ser visualizada no item 6.2. Os exemplos comparados foram com o modelo da viga engastada e bi-engastada, considerando a formulação dos elementos no EPD, a função objetivo como a minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento, com diferentes cargas e utilizou-se como método de solução do sistema não-linear o método de Newton.

6.1 Viga Engastada

Figura 22 - Domínio fixo de projeto e condições de contorno da viga engastada.

Na Figura 22 é apresentada a configuração e condição de contorno da viga engastada utilizada. O modelo de uma viga engastado otimizado, considera linearidade e não-linearidade geométrica e utiliza as características dimensionais e de material (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), descritas na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados dimensionais e de material.

- Módulo de Elasticidade (E):	3,00 GPa.
- Coeficiente de Poisson:	0,40.
- Número de Elementos no Domínio Fixo de Projeto:	7014 elementos.

O problema de otimização de minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento com a restrição de volume do modelo da Figura 22, para ambas as leis de material descrita neste trabalho, é dada por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f_0(\boldsymbol{\rho}_e) = C = \mathbf{p}^e \cdot \mathbf{u} && \left(\boldsymbol{\rho}_e \in \mathbb{R}^1 \right) \\
 &\text{Sujeito à :} && \boldsymbol{\rho}_e && \\
 &&& f_1(\boldsymbol{\rho}_e) = \frac{V(\boldsymbol{\rho}_e)}{V_0} - 0,5 \leq 0 && (185) \\
 &&& 0,001 \leq \rho_e \leq 1
 \end{aligned}$$

Na Tabela 3 são apresentados os resultados finais da OT L e NL geométrico considerando somente um caso de carga conforme Figura 22 e Tabela 2 para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant e na Tabela 4 é apresentada para a lei de material neo-Hookiana.

Tabela 3 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para a lei de material Kirchhoff-Saint Venant.

Força [kN] Eixo Y	Resultado de topologia ótima para linearidade elástica $E = \frac{1}{2}(L + L^T)$	Resultado de topologia ótima para não- linearidade elástica $E = \frac{1}{2}(F^T F + I)$
6	$C_L = 0,038kJ$	$C_{NL} = 0,038kJ$
12	$C_L = 0,161kJ$	$C_{NL} = 0,150kJ$
60	$C_L = 3,719kJ$	$C_{NL} = 3,707kJ$
96	$C_L = 9,496kJ$	$C_{NL} = 9,342kJ$
144	$C_L = 21,665kJ$	$C_{NL} = 21,888kJ$

Tabela 4 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para a lei de material neo-Hookiana.

Força [kN] Eixo Y	Resultado de topologia ótima para linearidade elástica $E = \frac{1}{2}(L + L^T)$	Resultado de topologia ótima para não- linearidade elástica $E = \frac{1}{2}(F^T F + I)$
12	$C_L = 0,149kJ$	$C_{NL} = 0,180kJ$
60	$C_L = 3,719kJ$	$C_{NL} = 4,422kJ$
96	$C_L = 9,496kJ$	$C_{NL} = 11,074kJ$
144	$C_L = 21,665kJ$	$C_{NL} = 23,546kJ$
240	$C_L = 60,234kJ$	$C_{NL} = 64,385kJ$

6.2 Comparação entre Resultados da Literatura e Resultados Atuais

Neste item é feita uma comparação dos valores de “*end compliance*” e topologia dos resultados da literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000) com os resultados obtidos neste trabalho para uma viga engastada seguindo as configurações do item 6.1, para os carregamentos de $96kN$ e $144kN$, ambos os resultados foram obtidos utilizando o a lei material Kirchhoff-Saint Venant.

Figura 23 – Comparação dos deslocamentos das topologias ótimas não interpretadas.

(a) – Topologia da Literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000).

(b) – Topologia deste Trabalho.

6.3 Viga Bi-Engastada

Figura 24 - Domínio fixa de projeto e condições de contorno da viga bi-engastada.

Na Figura 24 é apresentada a configuração e condição de contorno da viga bi-engastada utilizada. O modelo de uma viga bi-engastado otimizado, considera linearidade e não-linearidade geométrica e utiliza as características dimensionais e de material (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), descritas na Tabela 5.

Tabela 5 – Dados dimensionais e de material

- Módulo de Elasticidade (E):	3,00 GPa.
- Coeficiente de Poisson:	0,40.
- Número de Elementos no Domínio Fixo de Projeto:	6700 elementos.

Alterando a restrição de volume para 20% do volume inicial da equação (185) temos o seguinte restrição do problema de otimização:

$$f_1(\rho_e) = \frac{V(\rho_e)}{V_0} - 0,2 \leq 0 \quad (186)$$

Tabela 6 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear.

Lei de material de Kirchhoff-Saint Venant.		
Força [kN]	Resultado de topologia ótima para linearidade elástica	Resultado de topologia ótima para não- linearidade elástica
Eixo Y	$E = \frac{1}{2}(L + L^T)$	$E = \frac{1}{2}(F^T F + I)$
200
	$C_L = 2,340kJ$	$C_{NL} = 2,420kJ$
1600
	$C_L = 187,213kJ$	$C_{NL} = 254,886kJ$
Lei de material neo-Hookiana		
200
	$C_L = 2,340kJ$	$C_{NL} = 2,510kJ$
1600
	$C_L = 187,213kJ$	$C_{NL} = 333,232kJ$

Considerando o mesmo domínio de projeto dado na Figura 24, porém alterando a restrição de volume para 10% do volume inicial da equação (185) temos o seguinte restrição do problema de otimização:

$$f_1(\boldsymbol{\rho}_e) = \frac{V(\boldsymbol{\rho}_e)}{V_0} - 0,1 \leq 0 \quad (187)$$

onde o domínio de projeto fixo, discretizado para a Tabela 7 é dado por:

- Número de Elementos no Domínio Fixo de Projeto: 15000 elementos.

Tabela 7 - Comparação dos resultados ótimos obtidos para as análises linear e não-linear para o carregamento de $230kN$.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

Linear

$$C_L = 7,123kJ$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{I})$$

Kirchhoff-Saint Venant

$$C_{NL} = 10,073kJ$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{I})$$

neo-Hookiano

$$C_{NL} = 13,607kJ$$

7 Conclusões e Futuras Atividades

7.1 Discussão e Conclusões do Trabalho

O MEF NL elástico implementado se mostrou muito robusto. Utilizando os métodos de solução de Newton, Arc-Length e “GDC”. Os resultados de deslocamento do pórtico “Lee” foram comparados com os resultados do Abaqus 6.9 e mostraram-se muito similares, para diferentes pontos da trajetória do carregamento sendo que o software implementado conseguiu captar e continuar a trajetória com a utilização de elementos tipo Q8 e o Abaqus não (ver Apêndice 9.4).

Os resultados apresentados da Figura 15 para análise linear estática mostraram independência da malha na solução da OT utilizando a técnica de projeção implementada (GUEST, PRÉVOST, & BELYTSCHKO, 2004). A técnica de projeção não-linear em conjunto com o método da continuação se mostrou muito robusta, com pouca escala de cinza e muito eficiente computacionalmente, em comparação com o filtro proposto *Bendsøe & Sigmund* (2003), onde a escala de cinza é muito maior e o filtro é aplicado sobre a sensibilidade das variáveis de projeto, gerando problemas de mínimos locais durante o processo iterativo da OT.

Analisando os resultados finais apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4, é possível verificar uma não-simetria da topologia ótima obtida para a viga engastada utilizando o MOT NL. Isto se deve ao efeito de segunda ordem da deformação na estrutura, este efeito é não-simétrico e consequentemente gera um tensor dos módulos de elasticidade tangente não-simétrico acarretando em sensibilidades diferentes da análise linear. Comparando os resultados obtidos, com os resultados da literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), os resultados obtidos tem valores de energia de deformação inferiores ao da literatura até o presente momento e consequentemente a topologia também não ficou semelhante, possivelmente por causa nas diferenças entre filtro, método da continuação, valor da penalização inicial, função de relaxação para o tratamento do MOT NL, a não exclusão de elementos e nem das forças internas dos nós cercados de elementos de baixa densidade dentro do domínio de projeto. Do ponto de vista do MOT, o procedimento de apagar elemento ou remover a força interna de elementos de baixa densidade não é recomendado, pois deixa o problema descontínuo, já que cada elemento do domínio tem a liberdade de ter ou não a presença de material dependendo da convergência da OT. Neste trabalho foi possível verificar a ocorrência de regiões com baixos valores de

pseudo-densidade que em poucas iterações apresentavam presença de material, ou seja, na região valores de pseudo-densidade alternavam entre zero e um o que acarreta na possível superação dos resultados da literatura até o presente momento pelo trabalho aqui apresentado (ver Figura 23). Estas incoerências relatadas e apresentadas na literatura podem explicar as diferenças de resultados tanto de topologia como de valores de flexibilidade obtidos.

Os exemplos do item 6.3 foram reproduzidos com sucesso em comparação com os exemplos da literatura (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), é importante relatar que para obter os resultados da Tabela 6 e Tabela 7 não foi necessário implementar a função objetivo do trabalho complementar (BUHL, PEDERSEN, & SIGMUND, 2000), somente utilizando a função objetivo “*end compliance*” foi possível reproduzir. É importante ressaltar que estes exemplos mencionados são exemplos muito simples de serem reproduzidos, com poucos problemas de instabilidade em relação aos elementos de baixa densidade, porém são exemplos muito sensíveis ao efeito da não linearidade elástica tornando-se exemplos muito comuns em trabalhos sobre o tema, o que não significa que a implementação não-linear esteja suficientemente robusta ou coerente, pois é possível forçar tais resultados utilizando-se análises lineares alterando as configurações da função de projeção em conjunto com o método da continuação. Os melhores exemplos até o presente momento estão no item 6.1, onde realmente é necessário ter uma formulação não-linear extremamente robusta, pois se não for utilizada uma função de relaxação ou de estabilização a convergência fica muito instável devido a distorção excessiva dos elementos e de problemas relativos a flambagem local inviabilizando assim a obtenção de resultados.

Verificou-se em alguns momentos conforme o aumento do carregamento durante o processo de MOT NL uma mudança da taxa de convergência do método de Newton que foi deixando de ser quadrática ao longo de cada iteração da OT NL, provavelmente devido à distribuição não uniforme das propriedades das variáveis de projeto ao longo do domínio de projeto. O método de Newton foi utilizado em alternância com o “*MGDC*” (para todos os exemplos) quando problemas relativo à flambagem eram detectados durante o processo de otimização, porém foram casos isolados que poderiam ser contornados limitando a variação da técnica de relaxação proposta. É importante destacar que o controle da minimização do resíduo do equilíbrio como critério de convergência deve levar em conta o critério de força e de deslocamento com valores inferiores à 10^{-8} para garantir a correta convergência do sistema, pois os elementos de baixa densidade interferem criando uma falsa convergência se somente for avaliado o critério de força residual, prejudicando assim todo o processo iterativo de otimização topológica.

Em relação à utilização de otimizadores numéricos, tanto o CO quanto o MAM se mostram eficientes para a solução do MOT NL e com resultados quase idênticos para valores médios de deformação, porém para soluções instáveis com ocorrência de flambagem local o CO se mostrou muito oscilatório nos valores de pseudo-densidades, já o MAM se mostrou mais eficiente, porém são necessários alguns ajustes na curva de aproximação das assíntotas móveis. Para trabalhos futuros o ideal seria desenvolver um otimizador numérico específico para MOT NL que incluísse a função de relaxação proposta neste trabalho com a inclusão de ajustes automáticos da aproximação das funções de restrições.

Do lado do custo computacional, a rotina implementada mostrou-se eficaz para a solução do MEF linear e Não-Linear, porém grande parte do código acabou sendo implementado em C utilizando de rotinas numéricas do BLAS e LAPACK em conjunto com o *MatLab*® e também utilizando de rotinas de processamento paralelo, para acelerar o processo do MOT NL, pois não era viável aguardar mais de uma semana para obter o resultado de um modelo com 20 mil elementos. Com esta implementação o tempo de solução é de algumas horas dependendo da taxa de convergência, porém toda esta implementação atrasou a finalização deste trabalho. Por outro lado, a implementação em *MatLab*® facilitou a implementação em outros aspectos, principalmente graças às bibliotecas de funções já inclusas no programa, destacando-se o tratamento de matrizes esparsas, operações matriciais, rotinas de buscas, típicas em análises através do MEF.

7.2 Atividades Futuras de Pesquisa

O trabalho apresentado sobre MOT NL abre pode abrir portas para os temas de pesquisa na área de projeto de próteses Biomédicas flexíveis com feito de absorção de Energia, transdutores piezocompósitos sob Efeito de Pós-Flambagem, projeto de estruturas com critério de absorção de energia, como por exemplo, estruturas que sob impacto absorvam o máximo de energia, projeto de estruturas aeronáuticas considerando o efeito de pós-flambagem.

As próximas atividades de pesquisa a serem exploradas serão relativas à implementação do MOT NL elástico para elementos tridimensionais, tanto para elementos sólidos como para elementos de casca. Logo na sequência Incluir o efeito da plasticidade no MOT NL e comparar com os resultados da

literatura e na sequencia incluir a formulação ALE (Formulação Lagrangiana Euleriana Arbitrária) para OT NL, pois tal implementação traria mais robustez a formulação do MOT NL.

8 Referências Bibliográficas

- ARMERO, F., & LOVE, E. (2003). An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Finite Strain Plasticity. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, pp. 471-508.
- BALL, J. M. (1977). Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, pp. vol. 63, pp. 337-403.
- BENDSØE, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, pp. 193–202.
- BENDSØE, M. P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Berlin: Springer.
- BENDSØE, M. P., & KIKUCHI, N. (1988). Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 197–224.
- BENDSØE, M. P., & SIGMUND, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, pp. 635-654.
- BENDSØE, M. P., & SIGMUND, O. (2003). *"Topology Optimization", Theory, Methods and Applications*. Berlin: Springer.
- BONET, J. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Londres: Cambridge.
- BRUNS, D., & TORTORELLI, D. (1998). Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms. *Proc. 7-th Symp. on Multidiciplinary Analysis and Optimization*, pp. 1874-1882.
- BRUNS, T. E., & TORTORELLI, D. (2001). Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 3443–3459.
- BRUNS, T. E., SIGMUND, O., & TORTORELLI, D. A. (2002). Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, pp. 1215–1237.

- BRUYNEEL, M., & DUYSINX, P. (2005). Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 245–256.
- BRUYNEEL, M., DUYSINX, P., & FLEURY, C. (2002). A family of MMA approximations for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 263–276.
- BUHL, T., PEDERSEN, C., & SIGMUND, O. (2000). Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Structural Multidisciplinary Optimization*, pp. 93-104.
- CAMPELLO, E. (2005). *Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos*. São Paulo: Tese de Doutorado - EPUSP.
- CARDOSO, E. L. (2005). *Otimização Topológica de Transdutores Piezelétricos Considerando a Não-Linearidade Geométrica*. Porto Alegre: Tese de Doutorado - UFRGS.
- CARDOSO, E. L., & FONSECA, J. S. (1999). Intermediate density reduction and complexity control in the topology optimization. *CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- CHENG, K., & OLHOFF, N. (1981). An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 305–323.
- CIARLET, P. G. (1988). *Mathematical Elasticity, Vol. 1, Three-Dimensional Elasticity*.
- CRISFIELD, M. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap through". *Computers & Structures*, pp. 55–62.
- FLEURY, C. (1982). Reconciliation of Mathematical Programming and Optimality Criteria Approaches to Structural Optimization. *Foundations of Structural Optimization*, pp. 363-404.
- FLEURY, C. (1989). CONLIN: An Efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts. *Structural Optimization*, pp. 81-89.
- FLEURY, C., & BRAIBANT, V. (1986). Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, pp. 409-428.

- GEA, H., & LUO, J. (2001). Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities. *Computers & Structures*, pp. 1977–1985.
- GROENWOLD, A. A., & ETMAN, L. F. (2007). On the equivalence of optimality criterion and sequential approximate optimization methods in the classical topology layout problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 297–316.
- GUEST, J. K., PRÉVOST, J. H., & BELYTSCHKO, T. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, pp. 238–254.
- HAFTKA, R. T., GURDAL, Z., & KAMAT, M. P. (1990). *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers.
- JOG, C. (1996). Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 117-134.
- JOG, C. S., & HABER, R. (1996). Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 203-226.
- KAWAMOTO, A. (2009). Stabilization of geometrically nonlinear topology optimization by the Levenberg–Marquardt method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 429-433.
- KEMMLER, R., LIPKA, A., & RAMM, E. (2005). Large deformations and stability in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 459-476.
- KUO, S.-R., & YANG, Y.-B. (1995). Tracing postbuckling paths of structures containing multi-loops. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 4053–4075.
- M. TIAGO T. F., C. (2007). *Meshless methods: Extending the linear formulation and its generalization to geometrically exact structural analysis*. Lisboa: UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO.
- MAUTE, K., SCHWARZ, S., & RAMM, E. (1998). Adaptive topology optimization of elastoplastic structures . *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 81-91.

- MUÑOZ-ROJAS, P. A. (2001). Análise Não-Linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais. *Caderno de Engenharia, UFRGS*.
- MUÑOZ-ROJAS, P. A. (2003). *Otimização de Pré-Formas e Matrizes em Problemas Bidimensionais de Forjamento*. Porto Alegre: UFRGS, Tese de Doutorado.
- NETO, E. S., PERIC, D., & OWEN, D. (2008). *COMPUTATIONAL METHODS FOR PLASTICITY, THEORY AND APPLICATIONS*. United Kingdom: A John Wiley and Sons.
- OLHOFF, N., & TAYLOR, J. E. (1983). On structural optimization. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1139-1151.
- PEDERSEN, C. B. (2003a). Topology Optimization of 2D-Frame Structures with Path Dependent Response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 1471-1501.
- PEDERSEN, C. B. (2004). Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 653-678.
- PENZLER, P., RUMPF, M., & WIRTH, B. (2010). A phase-field model for compliance shape optimization in nonlinear elasticity. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*.
- PEREIRA, J. (2001). *Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrição sobre o Critério de Falha Material*. Florianópolis: Tese de Doutorado - UFSC.
- PETERSON, J., & SIGMUND, O. (1998). Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 1417-1434.
- PIMENTA, P. M. (2004). *Advanced Solid Mechanics*. São Paulo: EPUSP.
- PIMENTA, P. M. (2008). *Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas*. São Paulo: EPUSP.
- REDDY, J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. OXFORD.
- RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 529-551.
- SCHWARZA, S., MAUTEB, K., & RAMM, E. (2001). Topology and shape optimization for elastoplastic structural response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 2135-2155.

- SIGMUND, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 120–127.
- SIGMUND, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, pp. 401-424.
- SILVA, E. C., FONSECA, J. S., & KIKUCHI, N. (1998). Optimal design of periodic piezocomposites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 49-77.
- SIMULIA, D. S. (2010). *Abaqus Documentation - Theory Manual (6.9)*.
- STEGMANN, J., & LUND, E. (2004). Nonlinear topology optimization of layered shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 349-360.
- STUMPF, F. T. (2009). *Avaliação de um Modelo Hiperelástico Incompressível: Análise de Restrições, Implementação e Otimização de Parâmetros Constitutivos*. Porto Alegre: Dissertação de Mestrado UFRGS.
- SVANBERG, K. (1987). The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 359–373.
- SWAN, C. C., & KOSAKA, I. (1997). Voigt–Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 3785–3814.
- TORTORELLI, D. A. (1992). Sensitivity analysis for non-linear constrained elastostatic systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 1643–1660.
- VANDERPLAATS, G. N. (1984). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*. New York, EUA: McGraw-Hill.
- WRIGGERS, P. (2008). *Nonlinear Finite Element Methods*. Berlin: Springer-Verlag.
- YANG, Y.-B., & SHIEH, M.-S. (1990). Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. *Critical Points*, pp. 2110-2116.
- YUGE, K., & KIKUCHI, N. (1995). Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 197–208.

- YUGE, K., IWAI, N., & KIKUCHI, N. (1999). Optimization of 2-D structures subjected to nonlinear deformations using the homogenization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 286-299.
- ZHANG, W. H., FLEURY, C., DUYSINX, P., NGUYEN, V. H., & LASCHET, I. (1996). A generalized method of moving asymptotes (GMA) including equality constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp. 143-146.

9 Apêndice

9.1 Função de Forma do Elemento tipo Q4 - Isoparamétrico

Neste trabalho optou-se por utilizar elementos isoparamétricos bi-lineares quadriláteros de quatro nós (Q4) como mostrado na Figura 25, pois permitem parametrizar um elemento de formato irregular ou distorcido, "transformando-o" num elemento com propriedades de um elemento regular sem distorção, através de uma função de transformação de coordenadas. O elemento isoparamétrico permite até um determinado valor de distorção dependendo da regra de integração numérica utilizada, para a integração da matriz rigidez. Neste trabalho optou-se pelo método de integração de "Gauss".

Este tipo de elemento tem por característica funções de interpolações associadas aos graus de liberdade (deslocamento, rotações, velocidades, etc.) de seus nós, que são equivalentes às funções de forma que descrevem as coordenadas locais em função de suas coordenadas nodais.

Figura 25 - Elementos de quatro nós: (a) parametrizado; (b) coordenadas globais.

Figura 26 - Elemento de quatro nós com os respectivos graus de liberdade nodais.

Para compatibilizar o campo de deslocamentos do elemento Q4, os vetores de deslocamento $\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{v}_n$ representado na Figura 26 e representado na equação (188), deve ser linear ao longo de cada aresta do elemento, porque somente dois graus de liberdade existem ao longo de cada aresta do elemento tipo Q4 com função de forma linear.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (188)$$

As expressões de deslocamentos de um ponto genérico podem ser expressas equivalentemente em termos das funções de forma e dos deslocamentos nodais do elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{el} = \mathbf{N}\mathbf{u}, \quad (189)$$

onde $\mathbf{u}_{el}$ é o vetor que contém as componentes dos deslocamentos interpolados em cada ponto do elemento, $\mathbf{u}$ o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma para um elemento retangular Q4 como apresentado nas Figura 25 e Figura 26 com os vetores de deslocamento.

As funções de forma para a interpolação dos deslocamentos e coordenadas globais deste elemento são dadas pela equação:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, \end{aligned} \quad (190)$$

onde ξ e η são as coordenadas locais do elemento.

As coordenadas de um ponto genérico (x, y) do elemento isoparamétrico são obtidas em função das coordenadas nodais do elemento utilizando os mesmo polinômios bi lineares do elemento retangular (Q4), equação (189) e (190), da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (191)$$

A equação (191) representa as aproximações para o vetor nas componentes horizontal (x) e vertical (y) , do deslocamento de cada ponto no domínio do elemento.

As derivadas das funções de forma do elemento Q4 são dadas por:

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= -\frac{1}{4}(1-\eta), & N_{1,2} &= -\frac{1}{4}(1-\xi), \\ N_{2,1} &= \frac{1}{4}(1-\eta), & N_{2,2} &= -\frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{3,1} &= \frac{1}{4}(1+\eta), & N_{3,2} &= \frac{1}{4}(1+\xi), \\ N_{4,1} &= -\frac{1}{4}(1+\eta), & N_{4,2} &= \frac{1}{4}(1-\xi), \end{aligned} \quad (192)$$

Na figura 7 é apresentada a posição dos pontos de Gauss dentro do elemento Q4, e na Tabela 1 é apresentada a posição relativa às coordenadas local do elemento e seu respectivo peso.

Figura 27 - Elemento de quatro nós com os respectivos pontos de integração dentro do elemento.

Tabela 8 – Peso de integração para o elemento Q4 com integração completa.

Peso de Integração (w)	ξ	η
1,0	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
1,0	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
1,0	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
1,0	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$

9.2 Matriz de Rigidez Elástica Linear 2D

Neste item é apresentada uma introdução ao MEF linear, para elementos isoparamétricos, onde a matriz rigidez elástica é deduzida na equação (153), porém para deformações infinitesimais onde a configuração atual é igual à configuração de referência. Para tal consideração é necessário descrever a configuração isoparamétrica de um elemento, entre as coordenadas locais e globais.

Para relacionar o sistema de coordenada global em relação ao sistema de coordenada local é necessário utilizar uma matriz Jacobiana, que é dada para o caso EPD e EPT na equação:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (193)$$

A partir da equação (153) é possível calcular a matriz rigidez linear $\mathbf{K}$ de um elemento finito, baseado na premissa que $dV = dV^r = h \, dx \, dy$, logo:

$$\mathbf{K} = \int_x^0 \int_y^0 \left(\mathbf{B}(x,y) \right)^T \mathbf{DB}(x,y) h \, dx \, dy, \quad (194)$$

onde $\mathbf{B}$ é o tensor constitutivo homogêneo elástico do elemento (para EPD ou EPT) e h é referente a espessura do elemento no plano normal à (x, y) .

A mesma equação (194) da matriz rigidez elástica pode ser reescrita utilizando a formulação isoparamétrica acima apresentada, utilizando a matriz Jacobiana como operador para transformar as coordenadas locais (ξ, η) em coordenadas globais (x, y) da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{B}(\xi, \eta) \right)^T \mathbf{DB}(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta, \quad (195)$$

Se o elemento quadrilátero estiver distorcido, é extremamente difícil calcular analiticamente a integral da matriz rigidez elástica $\mathbf{K}$ utilizando a equação (194), mas utilizando o operador jacobiano e o método de integração numérica quadratura de *Gauss* na equação (195), por exemplo, a integração da matriz rigidez elástica se torna muito mais simples e computacionalmente eficiente, até determinados valores de distorção do elemento.

9.3 Verificação do MEF Não-Linear

Neste apêndice são apresentados os resultados comparativos de uma análise não-linear geométrica, utilizando-se de elementos tipo Q4 e Q8 de integração completa, para comparar os resultados entre o MEF implementado neste trabalho e software Abaqus.

Figura 28 – Pórtico Lee, dimensões em milímetros.

O modelo em teste foi o pórtico Lee (Figura 28), é uma estrutura bem conhecida que exibe pontos limites e de “*snap-back*”, sendo, portanto um ótimo exemplo para verificar a formulação não-linear elástica e a implementação numérica para a solução do comportamento não-linear da estrutura.

O modelo do pórtico Lee foi modelado com as seguintes características geométricas e propriedades de material:

- Lei de Material:	Kirchhoff-Saint Venant.
- Configuração:	EPD.
- Modulo de Elasticidade (E):	70,00 GPa.
- Coeficiente de Poisson:	0,334.
- Carregamento Pontual:	150 Newtons.
- Número de Elementos no Domínio Fixo de Projeto:	480 elementos (tamanho médio de 1,00 mm).

A partir destes dados, uma malha de elementos finitos foi gerada com as informações de coordenadas nodais, matriz de conectividade e numeração de nós e elementos e com a respectiva lei de material e propriedades baseadas na carta de entrada do software Abaqus, tanto para elementos do tipo Q4, quanto para Q8. O modelo foi discretizado com 2 elementos na espessura do pórtico com o tamanho médio de 2 mm.

Foi realizada uma análise não-linear elástica, utilizando o método de solução incremental e iterativo CGD (ou “GDC”), porém para resolver o mesmo problema no Abaqus foi utilizado o Método do Comprimento de Arco, utilizando a formulação Lagrangiana e elementos tipo CPE4 e CPE8 (código referente aos elemento Q4 e Q8) na hipótese cinemática EPD, com um incremento inicial de carga de 5% do valor da carga total aplicada, porém o MCGD possui em sua configuração uma função de controle automático do incremento de carga, este controle é baseado no GSP, que pode aumentar ou diminuir o incremento, conforme a solução vai se aproximando de pontos instáveis, como pontos limites, bifurcação e “snapback”.

No item 9.4 é possível visualizar graficamente a comparação da trajetória de ambos os resultados, entre o MEF não-linear implementado neste trabalho e os resultados obtidos no software Abaqus. Ambos os resultados ficaram próximos em comparação aos valores de deslocamentos nodais para os elementos do tipo Q4, com uma diferença de valores entre 10%, como é possível verificar no gráfico da Figura 30. Porém comparando com elemento Q8 implementado em relação ao elemento Q4 do Abaqus a solução se aproximou mais, com uma diferença dos valores nodais de deslocamento de 5% (Figura 31), porém comparando ambos os elementos Q8 do software implementado com o Abaqus, os resultados são quase idênticos, porém o Abaqus não conseguiu completar corretamente a trajetória do carregamento no ponto de “snap-back”, como é possível verificar na Figura 32 no ponto F. Parece que o

método do comprimento de arco (“arc-length”) do Abaqus não soube lidar com elementos de segunda ordem durante o efeito de “snapback” da estrutura, a estrutura acabou voltando para a sua configuração inicial e o carregamento ficou negativo, divergindo totalmente do resultado esperado. Foi também constatado este problema para todos os elementos da família Q8 EPD do Abaqus, como por exemplo, com a configuração de integração reduzida (R), configuração de integração híbrida (H) e etc.

Como o cálculo das sensibilidades e da atualização da matriz rigidez tangente de cada elemento é feita baseado no deslocamento final de cada incremento de carga e os resultados apresentados no item 9.4 ficaram próximos para os elementos tipo Q4 e muito próximos para elementos do tipo Q8 em relação aos resultados do software Abaqus (SIMULIA, 2010) no que foi possível obter, podemos assim considerar que o MEF implementado está validado numericamente.

9.4 Verificação do MEF Não-Linear – MCGD x MCA

Figura 29 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee, comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q4.

Figura 30 – Configuração deformada dos pontos A, B, C e D do Pórtico Lee para o software implementado.

Figura 31 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q4/Q8.

Figura 32 – Resposta de Força por Deslocamento do Pórtico Lee comparação entre a metodologia desenvolvida e o software Abaqus para o elemento tipo Q8.

9.5 Verificação da Sensibilidade da Função Objetivo da OT

O objetivo deste exemplo é verificar a exatidão e a eficiência da fórmula analítica da sensibilidade da função objetivo utilizada para "*end-compliance*". Os resultados de sensibilidade são comparados com os das sensibilidades obtidos via diferenças finitas.

O modelo em teste foi o uma viga na configuração "Encastred Beam", com as seguintes características geométricas (ver Figura 22) e propriedades de material:

- Lei de Material: Kirchhoff-Saint Venant.
- Configuração EPD.
- Modulo de Elasticidade (E): 3,00 GPa.
- Coeficiente de Poisson: 0,40.

Figura 33 - Domínio discretizado, condições de contorno e numeração dos elementos.

$$\frac{df(a)}{da} \cong \frac{f(a + \Delta a) - f(a - \Delta a)}{2\Delta a}, \quad (196)$$

Na Figura 33 é apresentado o domínio discretizado em elementos finitos com o total de 16 elementos no domínio fixo. Foi utilizado o método de diferenças finitas central (196) para obter o valor aproximado da derivada da função objetivo.

Na Tabela 9 são apresentados os resultados comparativos entre a derivada da função objetivo obtida através de derivadas via método de diferenças finitas e método analítico para a Lei de Material

de Kirchhoff-Saint Venant para os carregamentos de 12kN e 96kN (Newtons). Pode-se verificar que a diferença entre a derivada analítica e numérica para ambos os carregamentos é muito pequena.

Tabela 9 - Comparação da sensibilidade via diferenças finitas e analítica da função objetivo da OT não-linear geométrica (não-linear elástico) .

Newton-Raphson						
Elemento Nº	Carregamento de 12kN			Carregamento de 96kN		
	Diferenças Finitas	Equação OT-NL	Diferença %	Diferenças Finitas	Equação OT-NL	Diferença %
9	-11361.07	-11365.42	0.04	-716065.89	-721492.64	0.75
10	-10897.84	-10898.28	0.00	-689567.58	-691953.15	0.34
11	-7473.58	-7470.38	-0.04	-476860.72	-478036.53	0.25
12	-5168.99	-5165.65	-0.06	-331495.00	-332003.02	0.15
13	-3264.28	-3261.22	-0.09	-210770.21	-210896.73	0.06
14	-1836.78	-1834.31	-0.13	-119740.01	-119685.87	-0.05
15	-898.64	-896.92	-0.19	-59495.61	-59403.18	-0.16
16	-432.29	-430.80	-0.35	-29440.51	-29383.48	-0.19
1	-11406.98	-11372.05	-0.31	-733950.81	-724791.85	-1.26
2	-10923.67	-10902.10	-0.20	-699584.41	-693833.56	-0.83
3	-7462.86	-7453.21	-0.13	-472490.66	-469307.23	-0.68
4	-5148.18	-5145.27	-0.06	-323393.12	-321682.82	-0.53
5	-3240.80	-3241.51	0.02	-201741.31	-200943.06	-0.40
6	-1815.97	-1818.07	0.12	-111786.02	-111497.66	-0.26
7	-882.91	-885.06	0.24	-53495.23	-53433.23	-0.12
8	-419.97	-421.63	0.39	-24778.18	-24770.17	-0.03