Guilherme Cortez Duran

**Um sistema para a modelagem geométrica
de circuitos de montanhas-russas**

São Paulo

2019

Guilherme Cortez Duran

**Um sistema para a modelagem geométrica de
circuitos de montanhas-russas**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Marcos de Sales Guerra
Tsuzuki

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Duran, Guilherme

Um sistema para a modelagem geométrica de circuitos de montanhas russas / G. Duran -- versão corr. -- São Paulo, 2019.

63 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.MONTANHA-RUSSA 2.PARQUES DE DIVERSÕES 3.PROJETO MECÂNICO 4.GEOMETRIA COMPUTACIONAL 5.NURBS I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Dr. Marcos de Sales Guerra Tsuzuki, pela paciência e apoio, fundamentais à realização deste projeto.

Aos meus colegas do Laboratório de Geometria Computacional André Kubagawa Sato, Edson Kenji Ueda e Rogério Yugo Takimoto, pela imensa disposição para a ajuda.

À minha família, por não deixar de acreditar em mim.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa concedida (155621/2016-5).

E à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade.

*O real é o que é
Ao mundo não falta nada*

Benedictus de Spinoza

Resumo

As montanhas-russas são as atrações mais populares dos parques de diversões. O projeto mecânico de uma montanha-russa compreende diversas áreas da engenharia, entre elas a dinâmica, a análise estrutural e a geometria computacional. O projeto geométrico de uma montanha-russa busca determinar as formas e as posições das entidades que representam o seu circuito - essencialmente os trilhos e os suportes -, consistindo portanto no passo inicial para a completa modelagem de um equipamento. A localização das entidades geométricas que compõem um circuito se dá a partir de um sistema referencial móvel, localizado sobre uma curva de referência. A contribuição deste trabalho consiste na dedução de um sistema referencial adequado ao projeto de montanhas-russas, mas também ao de autoestradas e de ferrovias, para todas as situações em que se deseja manter as forças laterais resultantes nulas e assim evitar o risco de capotamento. Esse sistema referencial é utilizado para a modelagem de dois tipos de circuitos: (1) o que deriva da própria natureza do sistema referencial (circuitos nos quais a a força lateral resultante é nula) e (2), circuitos onde o ângulo de rolagem dos trilhos é imposto. Este trabalho apresenta uma comparação entre os diferentes tipos de representação de curvas, incluindo aquelas escolhidas, as NURBS (*Non Uniform Rational Basis Spline*). Os sistemas referenciais de curvas mais comuns estabelecem uma base para a dedução de um sistema adaptado ao projeto de montanhas-russas. Exemplos de circuitos são gerados segundo os dois métodos propostos e as acelerações resultantes são então discutidas.

Palavras-chave: Montanha-russa, parques de diversões, projeto mecânico, geometria computacional, NURBS.

Abstract

Roller coasters are the most popular attractions of amusement parks. The mechanical design of a roller coaster comprises several areas of engineering, including dynamics, structural analysis and computational geometry. The geometric design of a roller coaster aims to determine the shapes and positions of the entities that represent the roller coaster circuit - essentially the rails and the supports -, thus constituting the initial step for complete modeling of an equipment. The positioning of the geometric entities which make up a circuit takes place in a mobile coordinate system, located on a reference curve. The present study proposes a new mobile coordinate system suitable for roller coasters, but also for motorways and railroads, for situations in which it is desired to keep resulting lateral forces null and thus avoid the risk of a rollover. This reference system is used for the modeling of two types of circuits: (1) one which derives from the very nature of the coordinate system (null lateral force circuits) and (2), one in which the orientation of the track is arbitrarily defined. This study presents a comparison among the different types of curve representation, including those used, NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline). The most common coordinate systems of curves provide a basis for the deduction of the project-oriented coordinate system. Examples of circuits are generated according to the two proposed methods and the resulting acceleration are then discussed.

Keywords: Roller coaster, amusement parks, mechanical design, computational geometry, NURBS.

Sumário

	Sumário	6
	Lista de ilustrações	7
1	INTRODUÇÃO	9
1.1	O setor de parques de diversões no Brasil	12
1.2	Modelagem geométrica de montanhas-russas	14
1.3	Organização do texto	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	A modelagem de curvas e superfícies	16
2.2	As montanhas-russas no contexto científico	17
2.3	Regulamentação relacionada às montanhas-russas	19
3	MODELAGEM DA CURVA DE REFERÊNCIA	24
3.1	Curvas implícitas e explícitas	24
3.2	Curvas de Bézier	26
3.3	Curvas <i>B-Spline</i>	27
3.4	<i>B-Splines</i> racionais não uniformes	29
3.5	Algoritmo de interpolação de pontos	30
3.6	Propriedades geométricas das <i>B-Splines</i>	31
4	DEDUÇÃO DE UM SISTEMA REFERENCIAL	32
4.1	O triedro de Frenet	32
4.2	Triedro de Bishop	35
4.3	Sistema referencial proposto	37
5	MÉTODOS DE MODELAGEM DE CIRCUITOS	42
5.1	Método da força lateral resultante nula	45
5.2	Método de ângulo de rolagem imposto	49
5.3	Composição de um circuito de montanha-russa e análise das acelerações resultantes	52
6	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS	60

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – A primeira montanha-russa com rodas.	9
Figura 1.2 – Scenic Railway at Venice: a precursora das montanhas-russas tematizadas.	10
Figura 1.3 – Detalhe da patente das rodas de fricção inferiores de John Miller.	11
Figura 1.4 – Ciclone: a primeira montanha-russa de metal do Brasil.	12
Figura 1.5 – A curva de referência de um circuito e as geometrias derivadas da mesma: I.	14
Figura 2.6 – Sistema de coordenadas para análise de acelerações.	20
Figura 2.7 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção X	21
Figura 2.8 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção Y	21
Figura 2.9 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção Z	22
Figura 2.10 – Critério adicional para a reversão de acelerações na direção Z	23
Figura 3.11 – A curva de referência de um circuito e as geometrias derivadas da mesma: II.	24
Figura 3.12 – Um círculo de raio unitário centrado na origem.	25
Figura 3.13 – Polinômios de Bernstein.	26
Figura 3.14 – Funções de base e curva B - <i>Spline</i> de grau $p = 4$ e $n = 5$	28
Figura 3.15 – Efeitos da alteração da multiplicidade de nós.	29
Figura 3.16 – Uma curva NURBS com $w_1 = 1, 2, 5$ e 10	30
Figura 3.17 – Resultados obtidos com o algoritmo de Maekawa.	31
Figura 4.18 – Triedro de Frenet.	34
Figura 4.19 – Comparação entre os triedros de Frenet e Beta.	37
Figura 4.20 – Projeção a aceleração da gravidade no plano normal.	39
Figura 4.21 – A influência da velocidade na orientação do sistema referencial deduzido.	40
Figura 4.22 – A influência da curvatura na obtenção do sistema referencial.	41
Figura 4.23 – Módulo de $\ddot{C}(u)$ ao longo de uma curva NURBS quadrática.	41
Figura 5.24 – Os diferentes tipos de trens de montanhas-russas.	42
Figura 5.25 – Diferentes posições de centro de rotação dos trens.	43
Figura 5.26 – Vista frontal de um carro sentado. Neste caso a curva de referência H é posicionada entre os dois assentos do carro. Como o trilhos se posicionam abaixo do carro, o vetor V_{H/C_T} é orientado para baixo.	44
Figura 5.27 – Vista frontal de um carro invertido. No caso de uma montanha-russa invertida o vetor V_{H/C_T} é orientado para cima.	44
Figura 5.28 – A influência do ângulo de rolagem nas projeções das acelerações no plano normal ao trajeto.	45
Figura 5.29 – Nas curvas em que a primeira derivada não é constante, os pontos amostrais equidistantes no vetor de nós não são equidistantes no espaço.	47

Figura 5.30—A curva de referencia e os trilhos de uma montanha-russa sentada, gerada a partir do método da aceleração lateral nula.	48
Figura 5.31—Os diferentes elementos de montanhas-russas: parte I.	50
Figura 5.32—Modelagem de um <i>Loop</i>	50
Figura 5.33—Ângulo de rolagem ao longo de um <i>Loop</i> não invertido.	51
Figura 5.34—Modelagem de um <i>Loop</i> não invertido.	51
Figura 5.35—Os diferentes elementos de montanhas-russas: parte II.	52
Figura 5.36—Modelagem de um <i>Heartline Roll</i>	52
Figura 5.37—Modelagem de um <i>Zero-G Roll</i>	53
Figura 5.38—Acelerações resultantes em um <i>Zero-G Roll</i>	53
Figura 5.39—Um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto: I.	54
Figura 5.40—Um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto: II.	55
Figura 5.41—Acelerações resultantes em um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto. A região dos elementos do percurso são indicadas conforme a Fig. 5.40a. Note-se que a_Y não é nula em (3), (4) e (5).	56
Figura 5.42—Critério adicional para a reversão de acelerações na direção Z aplicado ao Zero-G Roll.	57

1 Introdução

As montanhas-russas são as atrações mais populares dos parques de diversões. Segundo o banco de dados do Roller Coaster DataBase¹, ao fim do ano de 2018 mais de 4500 montanhas-russas operavam no mundo. Dessas, cerca de oitenta operavam no Brasil.

As montanhas-russas modernas tem origem nos escorregadores de gelo construídos na Rússia entre os séculos XV e XVIII. Naquelas atrações, trenós eram empurrados e desciam livremente de colinas de mais de vinte metros de altura. Esses equipamentos acabaram tornando-se tão populares que eventualmente tochas eram instaladas ao longo de todo o percurso para que os escorregadores pudessem operar também durante a noite [CARTMELL, 1987]. As montanhas-russas se tornaram populares também no verão, quando carros com rodas eram montados sobre trilhos ranhurados e percorriam rampas sinuosas de madeira. A Fig. 1.1 apresenta uma ilustração da primeira montanha-russa com rodas, construída em meados do século XVIII. A atração fazia parte do complexo de diversão Katalnaya Gorka, nos Jardins de Orienbaum, em São Petersburgo.

Figura 1.1 – A primeira montanha-russa com rodas.

Fonte: Gilberb²

Ainda que as primeiras montanhas-russas tenham sido construídas na Rússia, a inauguração de duas atrações na França em 1817 - *Les Montagnes Russes a Belleville* e *Promenades Aeriennes* - foi tão importante que a partir de então Paris ficou conhecida como a terra natal das montanhas-russas modernas.

O primeiro magnata das montanhas-russas foi, provavelmente, La Marcus Thompson, um inventor norte-americano que se especializou na construção dessas atrações. Sua primeira criação, chamada de *Gravity Pleasure Switchback Railway* (algo como “Prazer da gravidade na ferrovia em ziguezague”) foi inaugurada em 1884 em Coney Island, Nova Iorque. Era uma estrutura de madeira com pouco menos de duzentos metros de

¹ O banco de dados do *Roller Coaster DataBase* é o mais extenso arquivo online sobre montanhas-russas. O site disponibiliza ferramentas para a classificação desses equipamentos sob as mais diversas categorias.

² Disponível em: <<http://www.angelfire.com/pa/ImperialRussian/blog/index.blog/1441373/katalnaya-gorka-at-oranienbaum/>>. Acesso em: 12/04/2019.

comprimento, parecida com os escorregadores de gelo da Rússia. Os passageiros subiam em vagões que eram empurrados ladeira abaixo, passando por algumas colinas. O brinquedo era mais destinado à apreciação da paisagem do que à emoção, já que os vagões viajavam a apenas 9,7 km/h. Mas a multidão adorava: Thompson cobrava apenas alguns centavos pelo passeio, mas arrecadava mais de US\$600 por semana [SAWYER, 2002].

Anos mais tarde Thompson investiu no projeto das *Scenic Railways*, ou “Ferrovias Cênicas”. A ideia do inventor era combinar as melhores práticas de design - como a adoção de circuitos fechados, a utilização de trens articulados e de colinas de elevação movidas à vapor - aliadas à customização de cenários artificiais, que eram iluminados no momento de passagem dos trens. A mais famosa criação de Thompson foi construída em Venice, na Califórnia (Fig. 1.2). O cenário temático contava com grandes montanhas artificiais feitas de gesso e argila.

Figura 1.2 – Scenic Railway at Venice: a precursora das montanhas-russas tematizadas.

Fonte: Bizarre Los Angeles³.

Para o projeto das *Scenic Railways*, Thompson contratou John Miller como seu engenheiro chefe. Mais tarde, Miller se tornaria uma figura central no desenvolvimento do projeto de montanhas-russas, sendo responsável por mais de cem patentes de dispositivos de montanhas-russas. Entre suas maiores contribuições estão os dispositivos *anti-rollback*, que impedem que os trens desçam as colinas de elevação em ré em caso de falta de energia e a invenção das rodas de fricção inferiores, que mantém os carros presos ao trilhos independentemente da orientação das acelerações a que são submetidos (Fig. 1.3).

As inovações propostas por Miller e outros engenheiros contribuíram para a proliferação das montanhas-russas na década de 1920. Nesse período mais de 2000 montanhas-russas de madeira foram construídas, no que ficou conhecida como a primeira era dourada das

³ Disponível em: <<https://bizarrela.com/2016/05/venice-beach/>>. Acesso em: 16/04/2019.

Figura 1.3 – Detalhe da patente das rodas de fricção inferiores de John Miller.

Fonte: Miller [1919].

montanhas-russas. O movimento durou até 1929, quando a grande depressão fez com que a visitação dos parques diminuísse, o que levou à falência muitos parques e fabricantes.

A abertura da Disneylândia da Califórnia em 1955 foi um fator importante para a retomada do interesse pelas montanhas-russas. O *boom* econômico do pós-guerra devolveu tempo e dinheiro às pessoas, fazendo com que um grande público viesse de todos os Estados Unidos da América⁴. Em 1959, Walt Disney inaugurou a primeira montanha-russa tubular de aço da história, a *Matterhorn*, inspirada nas *Scenic Railways* de La Marcus Thompson.

A história das montanhas-russas no Brasil teve seu primeiro grande marco em 1970, quando o engenheiro Marcelo Gutglas, inspirado em um parque de diversões que visitou em Nápoles, na Itália, instalou ao lado do ginásio do Ibirapuera alguns brinquedos como o carrossel, o tobogã e a primeira montanha-russa de metal do país, a Ciclone (Fig. 1.4). Mais tarde o pequeno parque seria transferido para um grande terreno entre as pontes do Limão e da Casa Verde, onde se consagrou como o mais tradicional parque de diversões do Brasil, o Playcenter. Marcelo Gutglas também foi responsável pela abertura dos parques Hopi Hari, em Vinhedo, e do Playcenter Pernambuco, em Recife.

Durante as décadas de 1990 e 2000 muitos tipos de montanhas-russas foram criados, dentre eles destacam-se as montanhas-russas invertidas e as voadoras. As atrações superaram os cem metros de altura, atingindo velocidades de até 240 km/h.

A revista *Amusement Today* promove anualmente o prêmio *Golden Tickets Awards*, que elege os melhores parques e atrações do mundo. Em 2018 a montanha-russa Fury 325, do parque norte-americano Carowinds, foi eleita a melhor montanha-russa de aço do mundo. O numeral 325 indica a altura da atração: 325 pés, o equivalente a 99,1 metros.

⁴ Disponível em: <<http://thrillnetwork.com/the-history-of-rollercoasters/>>. Acesso em: 25/05/2019.

Figura 1.4 – Ciclone: a primeira montanha-russa de metal do Brasil.

Fonte: Alberghini⁵.

Seu circuito de 2012 metros de comprimento é percorrido à velocidade máxima de 152,9 *km/h*.

1.1 O setor de parques de diversões no Brasil

Apesar do número razoável de parques de diversões e parques aquáticos no Brasil - a Associação das Empresas de Parques de Diversões do Brasil (ADIBRA) contabiliza mais de 300 parques associados -, há de se ressaltar as dificuldades vividas pelo setor no país. Segundo Alain Baldacci, presidente do Sistema Integrado de Parques e Atrações Turísticas⁶ (Sindepap), “Um obstáculo para o crescimento do setor de parques temáticos tem sido os altos impostos cobrados sobre produtos importados, já que o Brasil não conta com fábricas deste tipo de equipamento”⁷. Ainda segundo Baldacci,

“É praticamente impossível um parque brasileiro, que não tem condições de cobrar ingressos como cobram os parques americanos e europeus, conseguir comprar equipamentos novos. Sem novidades um parque morre, é como se fosse oxigênio, e economicamente essa equação não fecha.”

O portal de notícias G1 entrevistou representantes do mercado de parque de diversões e analistas para entender a situação do setor de parques de diversões no Brasil. Segundo Silvio Passarelli, diretor da Faculdade de Administração da Fundação Armando Alvares Penteado (FAAP), “A impressão que dá é que muitos parques ficaram parados no tempo, sem conseguir se reinventar e oferecer novas atrações. Lá fora, os grandes parques têm

⁵ Disponível em: <<https://rcdb.com/3270.htm>>. Acesso em: 22/04/2019.

⁶ O Sindepap surgiu em 2003 como fruto da união dos principais parques e atrações turísticas do Brasil. A associação conta com 18 associados de nove estados diferentes, fornecendo suporte institucional e político a cada associado.

⁷ Disponível em: <<https://diariodoturismo.com.br/alain-baldacci-presidente-do-sindepap/>>. Acesso em: 22/04/2017.

sempre um cronograma de eventos e novos brinquedos”⁸. Entre as principais razões apontadas pelos representantes do setor para as dificuldades financeiras nos últimos anos estão:

- problemas de administração do negócio;
- número de visitantes abaixo da expectativa do projeto;
- fracasso em atrair turistas de outras cidades e estados;
- acidentes e gastos elevados com seguros;
- alta dependência de brinquedos e peças de reposição importados;
- alto custo de manutenção em meio à oscilação do dólar;
- baixo índice de investimentos em novos brinquedos;
- oferta de experiência e serviços muito inferiores a de parques internacionais.

O setor de parques aquáticos também sofre com a falta de fabricantes nacionais. No final de 2017, a Câmara de comércio Exterior (Camex) aprovou a isenção do imposto de importação para cinco parques brasileiros. A medida deverá resultar em um investimento de R\$ 42,5 milhões e foi resultado de uma negociação feita pelo Ministério do Turismo com a equipe econômica do governo⁹. As iniciativas do Brasil para fortalecimento do segmento foram reconhecidas pelo presidente da Associação Internacional de Parques e Atrações Turísticas¹⁰ (IAAPA) Greg Hale, que, durante o congresso internacional realizado pela entidade em Orlando em novembro de 2017, elogiou o esforço do Brasil em melhorar o ambiente de negócios e, consequentemente, atrair investidores para o país¹¹.

Apesar das dificuldades vividas pelo setor, o relatório anual sobre a visitação de parques de diversões ao redor do mundo de 2016, *Theme Index Report* [AECOM/TEA, 2016], apontou para uma oportunidade: os desafios macro-econômicos decorrentes da crise econômica brasileira e o aumento da taxa de câmbio fizeram com que menos brasileiros viajassem para a região de Orlando, o que acabou aumentando o número de visitantes em muitas atrações turísticas no país.

⁸ Disponível em: <<https://g1.globo.com/economia/negocios/noticia/grandes-parques-de-diversao-fecham-no-pais-e-sobreviventes-tentam-se-reinventar.ghtml>>. Acesso em: 25/01/2018.

⁹ Disponível em: <https://www.mercadoeventos.com.br/_destaque_/slideshow/parques-ganham-isencao-tributaria-investimento-pode-chegar-a-r19-bilhao/>. Acesso em: 12/12/2017.

¹⁰ Fundada em 1918, a IAAPA é a maior associação internacional para negócios de parques de diversões. A organização representa mais de 5300 membros entre parques, fornecedores e indivíduos de mais de cem países.

¹¹ Disponível em: <[http://www.turismo.gov.br/%C3%BAltimas-not%C3%ADcias/8347-parques-tem%C3%A1ticos-v%C3%A3o-investir-mais-de-r\\$-40-milh%C3%B5es-no-brasil.html](http://www.turismo.gov.br/%C3%BAltimas-not%C3%ADcias/8347-parques-tem%C3%A1ticos-v%C3%A3o-investir-mais-de-r$-40-milh%C3%B5es-no-brasil.html)>. Acesso em: 11/12/2017.

1.2 Modelagem geométrica de montanhas-russas

A modelagem geométrica computacional é uma área de conhecimento multidisciplinar que trata da aplicação de modelos matemáticos e de técnicas da computação, afim de criar representações gráficas suficientemente complexas de sistemas físicos. Neste trabalho, propõe-se um sistema para a representação e modelagem geométrica de circuitos de montanhas-russas, considerando-se esse um ponto de partida natural para a completa determinação das formas geométricas que definem a estrutura de uma montanha-russa.

A localização das entidades geométricas que compõem um circuito se dá a partir de um sistema referencial móvel, localizado sobre uma curva de referência (Fig. 1.5). O posicionamento dessas entidades, portanto, deriva de dados de entrada conhecidos e/ou calculados *a priori*: o traçado do percurso, dado pela curva de referência, e a orientação do ângulo de rolagem dos trens em torno desse traçado. A contribuição deste trabalho consiste na dedução de um sistema referencial adequado ao projeto de montanhas-russas, mas também ao de autoestradas e de ferrovias, para todas as situações em que se deseja manter as forças laterais resultantes nulas e assim evitar o risco de capotamento. O sistema referencial de curvas mais comum disponível na literatura estabelece uma base para a dedução do sistema adaptado.

Figura 1.5 – A curva de referência de um circuito e as geometrias derivadas da mesma: I.

Fonte: Autor, “adaptado de” CoasterBridge¹².

Os equipamentos mecânicos de parques de diversões são projetados de modo a submeter os passageiros a variações de velocidade e de aceleração, provocando sensações como o aumento ou diminuição de peso, além de reações físicas como o aumento da taxa de batimento cardíaco e a liberação de adrenalina na corrente sanguínea. Note-se que, no caso das montanhas-russas, essas acelerações mudam de intensidade e de sentido

¹² Disponível em: <<http://www.thomasfsterling.com/roller-coaster-bridge/>>. Acesso em: 10/10/2018.

principalmente devido à mudança de trajetória dos trens. Assim, a geometria de um circuito de montanha-russa influi diretamente nas sensações resultantes do passeio.

Uma vez calculado ao longo de toda a curva de referência, o sistema referencial é então utilizado para a modelagem de dois tipos de circuitos:

1. o que deriva da própria natureza do sistema referencial. Nesses circuitos, o ângulo de rolagem é determinado *a priori* pela geometria da curva de referência e pela cinemática do trajeto. Nesse caso, portanto, as sensações físicas são pré-estabelecidas e limitadas, no sentido de estabelecer um percurso onde as forças resultantes são predominantemente adaptadas à fisiologia humana;
2. circuitos onde o ângulo de rolagem dos trilhos é imposto. Nesse caso, introduz-se mais um grau de liberdade, que oferece a possibilidade de criação dos populares elementos de montanhas-russas, que compreendem formas geométricas diversas.

1.3 Organização do texto

Neste capítulo, faz-se uma breve introdução à história das montanhas-russas no Brasil e no mundo, bem como se relata as dificuldades vividas pelo setor de parques de diversões no país. As características básicas do projeto geométrico de uma montanha-russa são apresentadas.

No capítulo 2, a revisão bibliográfica sobre as montanhas-russas no contexto científico é discutida, assim como uma breve revisão sobre o desenvolvimento das representações matemáticas de curvas e de sistemas referenciais. A regulamentação acerca dos limites de aceleração admissíveis em uma montanha-russa é também apresentada.

O capítulo 3 trata da modelagem geométrica de curvas, as quais representam os circuitos das montanhas-russas. O problema de interpolação de pontos e uma solução disponível na literatura para esse problema são discutidos.

A seguir, no capítulo 4, um sistema referencial móvel é deduzido, de modo que os problemas relacionados aos sistemas referenciais mais comuns de curvas sejam contornados.

No capítulo 5, dois métodos de modelagem de circuitos são propostos: o primeiro deles determina todas as geometrias dos trilhos com base apenas na velocidade e curvatura do circuito. Já no segundo método, o ângulo de rolagem dos trilhos é imposto, o que permite a criação de elementos de montanhas-russas mais complexos. Análises das acelerações resultantes e comentários são apresentados para ambos os casos.

A conclusão da pesquisa, a apresentação de suas contribuições para o projeto geométrico de montanhas-russas e para o setor de parques de diversões no país e as sugestões para trabalhos futuros são expostos no capítulo 6.

2 Revisão bibliográfica

O projeto de uma montanha-russa compreende diversas áreas do conhecimento, como discutido na seção 1.2. Assim, a revisão da literatura acerca do tema é apresentada neste capítulo em três diferentes seções. A primeira delas (seção 2.1), compreende o desenvolvimento das formas paramétricas de representação de curvas e superfícies, além dos sistemas referenciais mais comuns utilizados para a localização de geometrias derivadas dessas curvas e superfícies. Na segunda, o projeto mecânico e geométrico das montanhas-russas é revisado no contexto científico (seção 2.2). Finalmente, a terceira parte inclui as pesquisas relacionadas às fatalidades e aos danos causados aos seres humanos quando submetidos às acelerações em um passeio de montanha-russa. Essas pesquisas foram condensadas e traduzidas em normas internacionais e serão discutidas na seção 2.3.

2.1 A modelagem de curvas e superfícies

O desenvolvimento das curvas paramétricas de Bézier remonta aos anos 1960, quando engenheiros automotivos buscavam uma representação matemática para as superfícies livres das carrocerias de automóveis. As primeiras pesquisas foram publicadas por Pierre Bézier e por Paul Casteljau, que trabalharam na Renault e na Citroën, respectivamente. Apesar de pesquisarem o assunto isoladamente, ambos chegaram a um resultado idêntico. À curva desenvolvida por ambos foi dada o nome de Bézier [BÉZIER, 1967; BÉZIER, 1977], enquanto a um algoritmo utilizado para se encontrar um ponto em uma curva de Bézier foi dado o nome de Casteljau (citado pela primeira vez por Krautter e Parizot [1971]). A inovação na pesquisa dos engenheiros está na introdução de polígonos de controle, uma técnica de design intuitivo nunca antes utilizada.

As *B-Splines* (abreviação para *Basis Spline*) foram introduzidas por Schoenberg [1946], para o caso de vetores de nós uniformes. As *B-Splines* geradas a partir de vetores de nós não uniformes foram apresentadas em um artigo por H. Curry [CURRY, 1947]. Foi somente em 1960 que as *B-Splines* começaram a ser utilizadas como ferramenta para a representação geométrica, por C. de Boor nos laboratórios de pesquisa da General Motors. A generalização das *B-Splines* para as *NURBS* - acrônimo para *Non Uniform Rational Basis Spline* se tornou a forma padrão de representação de curvas e superfícies na indústria CAD/CAM, já que os polinômios racionais por partes da *NURBS* podem representar desde Splines até os diferentes tipos de geometrias cônicas [FARIN, 2002].

A ideia de anexar a cada ponto de uma curva arbitrária no espaço uma base foi apresentada inicialmente por Jean-Frédéric Frenet, em sua tese de doutorado [FRENET, 1847]. Da teoria das curvas espaciais surgem as fórmulas nomeadas de Frenet-Serret, que definem as propriedades cinemáticas de um ponto que se move ao longo de uma curva

contínua e diferenciável no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, ou as propriedades geométricas das curvas independentemente do movimento. À base móvel obtida ao longo da curva se deu o nome de Triedro de Frenet. No triedro, T é um vetor unitário e tangente à curva, que aponta no sentido do movimento, N_f é um vetor unitário cuja direção é a da curvatura e B_f é o produto vetorial de T e N_f . Nos pontos de curvatura nula, como aqueles de inflexão e em retas, a definição do triedro fica comprometida, mas o vetor tangente ainda pode ser calculado. Há ainda um segundo problema em relação aos pontos de inflexão: a curvatura muda de sentido e o triedro se torna descontínuo.

No artigo *There is More than One Way to Frame a Curve* [BISHOP, 1975], R. Bishop demonstra que existem outros sistemas referenciais tangenciais e equivalentes, $\{T, M_1, M_2\}$, que apresentam as mesmas vantagens do Triedro de Frenet, das quais ele destaca o fato desse sistema ser adaptado à curva, isto é, suas componentes são tangentes ou perpendiculares à curva.

Carroll et al. [2013] utilizaram o Triedro de Bishop para solucionar os problemas de descontinuidade do Triedro de Frenet. O artigo apresenta uma maneira de orientar o sistema de Frenet sempre positivamente, além de eliminar as normais não existentes (nos pontos onde há mudança de concavidade). Assim, o triedro proposto, chamado de Triedro Beta $\{T, N_\beta, B_\beta\}$, que é ao menos C^0 (i. e., ao menos contínuo), determina uma normal globalmente definida, além de uma curvatura e de uma torção globalmente definidas.

Neste trabalho, propõe-se um sistema referencial tangencial e adaptado, adequado essencialmente ao projeto de montanhas-russas, mas também ao de ferrovias e de autoestradas. Sua característica principal é de que na direção da segunda componente ortonormal as forças resultantes são nulas. Por serem nulas, nos casos em que a direção transversal dos trens ou carros é a mesma que a da segunda componente ortonormal, evita-se o risco de capotamento.

Como existe relação direta entre o sentido das acelerações centrípetas decorrentes do movimento de um trem sobre os trilhos e o sentido da curvatura desses trilhos, a descontinuidade do Triedro de Frenet não é eliminada, no entanto é amenizada pela introdução de um vetor de correção. Nesse caso, diferentemente do que foi proposto em [CARROLL et al., 2013], quando a curvatura é zero, N_f continua indefinido, mas existe um vetor auxiliar que possibilita a criação de um sistema redefinido, $\{T, N_g, B_g\}$. Esse vetor faz com que, ao longo da curva, o novo sistema referencial varie suave e continuamente.

2.2 As montanhas-russas no contexto científico

O projeto geométrico de uma montanha-russa busca determinar as formas e as posições das entidades que compõem o circuito de uma montanha-russa - essencialmente os trilhos e os suportes -, consistindo portanto no passo inicial para o projeto completo de um

equipamento.

Para descrever a geometria da linha de centro dos trilhos de veículos guiados, Sequeira et al. [2015] apresentaram uma metodologia. Três métodos diferentes de parametrização foram propostos, utilizando *Splines* cúbicas, *Splines* de Akima e *Splines* que preservam formas. As vantagens e desvantagens de cada método são debatidas. A discussão se dá através da aplicação da formulação desenvolvida para a análise dinâmica de um modelo de montanha-russa com geometria espacial complexa. O cálculo das forças de reação impostas à estrutura da montanha-russa pelos veículos em movimento são apresentados.

O artigo de Tändl e Kecskeméthy [2005] descreve uma estrutura orientada a objetos para representar o movimento espacial guiado em sistemas multicorpos. As decomposições vetoriais ao longo do caminho são calculadas utilizando três diferentes tipos de decomposição: utilizando o Triedro de Frenet, de Darboux e por meio de equações diferenciais ordinárias. É mostrado que, utilizando o Triedro de Frenet, é possível evitar as singularidades nos pontos de inflexão usando a regra de L'Hospital. A geometria dos trilhos é suavizada até a quinta ordem utilizando curvas *B-Spline*, permitindo a criação de circuitos nos quais as acelerações são contínuas.

Quanto à modelagem estrutural de um equipamento, Braccesi e Cianetti [2015] desenvolveram um procedimento para o projeto das estruturas de uma montanha-russa genérica, de modo que os projetistas possam dimensionar corretamente e rapidamente a estrutura completa. Os dados necessários para essa análise são a geometria tridimensional do trilho e as funções das forças de contato entre veículos e trilhos no tempo.

Smith [2005] examinou as falhas das travas de contenção de passageiros em brinquedos de parques de diversões itinerantes. Os cenários e fatores que contribuíram para as falhas ou incidentes foram identificados. O objetivo da pesquisa era determinar se as travas dos equipamentos móveis são suficientes para proteger os usuários e, quando necessário, determinar as ações que podem ser tomadas para aumentar a segurança dos sistemas.

Na indústria dos equipamentos de parques de diversões, especialmente na área das montanhas-russas, as patentes são comuns e abrangem desde pequenos dispositivos à novos modelos de trens. Algumas das mais notáveis são as da *Gravity Pleasure Switchback Railway* de La Marcus Thompson [THOMPSON, 1885], o trem invertido de Walter Bolliger e Claude Mabillard [BOLLIGER; MABILLARD, 1993] e, mais recentemente, o método inovador para a fabricação de trilhos proposto por Alan Schilke, Fred Grubb e Dody Bachtar [SCHILKE et al., 2013].

Nesta pesquisa, dois métodos de modelagem de circuitos são apresentados, sendo que em ambos o sistema referencial deduzido, $\{T, N_g, B_g\}$, é utilizado. O primeiro método baseia-se na própria natureza do sistema referencial proposto, i.e., em um circuito criado a partir desse método as forças laterais resultantes são nulas. No segundo método, os circuitos são gerados a partir da imposição do ângulo de rolagem do trem, tornando possível a geração de elementos de montanhas-russas mais complexos.

2.3 Regulamentação relacionada às montanhas-russas

As forças dinâmicas produzidas no corpo humano resultantes de acelerações podem ser perigosas se forem aplicadas em excesso ou se forem mantidas por um tempo maior do que o tolerável e, por isso, devem ser analisadas criticamente. Essas forças podem causar desde problemas como visão turva e blecaute até a perda completa de consciência do passageiro. Da mesma forma, a arrancada (no inglês *jerk*), definida como a derivada da aceleração no tempo, pode causar sensação de enjoo. Assim, é necessário limitar as acelerações e as suas variações num circuito de montanha-russa de modo a torná-lo seguro é confortável.

Até 2002 a norma DIN 4112 [DIN, 1983], sobre construções temporárias era a base para todos os cálculos no campo de equipamentos de parques de diversões. Os limites de acelerações suportados pelo corpo humano foram somente propostos em 2004, com a publicação da norma europeia EN 13814:2004 [EUROPEAN STANDARDS, 2005]. Devido a pesquisas internacionais, os limites de aceleração puderam ser mais precisamente definidos. Com um acordo entre as instituições normativas americanas e europeias foi possível harmonizar as normas internacionalmente [ROHDE; KUPERS, 2012].

Dentre essas pesquisas, Braksiek e Roberts [2002] revisaram os relatórios de lesões e fatalidades ocorridas em parques de diversões que foram publicados na literatura médica. Os efeitos físicos e fisiológicos das montanhas-russas que podem influenciar o tipo e a gravidade das lesões foram discutidos.

Smith e Meaney [2002] determinaram a extensão das acelerações na cabeça de passageiros de montanhas-russas através de dados de acelerações de três montanhas-russas populares. As acelerações mais altas registradas foram usadas num modelo simples de aceleração rotacional da cabeça baseado no pivotamento do crânio. Os pesquisadores concluíram que, mesmo num cenário conservador, as maiores acelerações produzidas na cabeça dos passageiros eram muito menores do que os níveis convencionais aceitos como causadores de ferimentos na cabeça.

Os deslocamentos e deformações do cérebro humano durante um passeio numa montanha-russa foram estudados por Kuo et al. [2017]. No estudo, foram medidas as acelerações nas cabeças de dois passageiros adultos e saudáveis. Os deslocamentos e deformações do cérebro foram calculados usando dinâmica de corpo rígido e análise de elementos finitos. O resultado do trabalho indicou que apesar de as acelerações num circuito de montanha-russa serem menores do que as de esportes de impacto, as montanhas-russas podem causar deslocamentos e deformações comparáveis à choques de cabeça leves de jogadores de futebol americano. Concluiu-se ainda que em um mesmo passeio e em posição semelhante, dois passageiros experimentaram deformações cerebrais significativamente diferentes. Estes resultados indicam que o movimento da cabeça e a deformação cerebral durante o passeio em uma montanha-russa são altamente sensíveis a cada indivíduo. O estudo sugere ainda que os passeios de montanha-russa não apresentam risco imediato de lesão cerebral aguda, mas os efeitos a longo prazo requerem estudos mais aprofundados.

A partir das normas internacionais ASTM F 2376:2008 [ASTM, 2008], ASTM F 2461:2009 [ASTM, 2009] e EN 13814:2004, a Comissão de Estudo Especial de Parques de Diversão da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT/CEE-117) elaborou a norma ABNT NBR 15926-2:2011 [ABNT, 2011]. Esta norma propõe um critério de segurança dado pela combinação máxima das acelerações no sistema de coordenadas cartesiano local dos trens.

Em 2012, o apêndice que trata dos limites de acelerações da norma EN 13814:2004 foi revisto, tornando-se normativo desde então. Os resultados da revisão da norma europeia, que serão considerados neste trabalho, são apresentados por Rohde e Kupers [2012].

Dada uma aceleração arbitrária num ponto do trajeto de uma montanha-russa, utiliza-se o sistema referencial apresentado na Fig. 2.6 para a sua decomposição em três direções ortogonais. Neste trabalho esse referencial será chamado de sistema referencial dos carros.

Figura 2.6 – Sistema de coordenadas para análise de acelerações.

Fonte: Rohde e Kupers [2012].

Em uma montanhas-russa sentada, uma aceleração na direção X corresponde à mudança de velocidade do trem. Quando os trens não são acelerados por fontes externas de energia, a aceleração tangencial imposta aos passageiros é sempre igual ou menor à da gravidade, dependendo da orientação dos trilhos.

As acelerações nas direções Y e Z devem-se a duas situações distintas. A primeira situação diz respeito à projeção da força peso no plano normal do sistema referencial dos carros. A segunda situação refere-se ao movimento dos trens sobre trilhos curvos, i. e., às acelerações normais impostas aos passageiros quando eles percorrem um trajeto sinuoso.

Os valores admissíveis das acelerações para o eixo X são expostos na Fig. 2.7. Os limites das acelerações em cada uma das direções do sistema referencial móvel são dados em função da aceleração da gravidade g , e calculados 60 cm acima do assento do carro. A curva azul indica os limites para um design de trem específico, chamado de voador.

Na norma europeia EN 13814:2004, a expressão “o passageiro é pressionado contra o assento” é usada para descrever uma aceleração no sentido $+Z$. O comitê da norma EEN

Figura 2.7 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção X.

Fonte: Rohde e Kupers [2012].

concordou com o uso de uma descrição mais curta sobre os efeitos das acelerações. Na nova norma, a expressão “olhos para baixo” é utilizada (isto é, aceleração vertical que empurra os olhos para baixo). Limites para a aceleração rotacional não são definidos na nova norma, pois essas acelerações podem ser transformadas e incluídas nas porções de X, Y e Z.

Para o eixo Y, os valores limites são representados na Fig. 2.8,

Figura 2.8 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção Y.

Fonte: Rohde e Kupers [2012]

e para o eixo Z, na Fig. 2.9.

Figura 2.9 – Limite de aceleração em função do tempo de aplicação na direção Z.

Fonte: Rohde e Kupers [2012].

As combinações das acelerações nas direções X, Y e Z devem obedecer às inequações 2.1, 2.2 e 2.3.

$$\left(\frac{a_x}{a_{x-adm}}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{a_{y-adm}}\right)^2 \leq 1,0 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{a_x}{a_{x-adm}}\right)^2 + \left(\frac{a_z}{a_{z-adm}}\right)^2 \leq 1,0 \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{a_z}{a_{z-adm}}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{a_{y-adm}}\right)^2 \leq 1,0 \quad (2.3)$$

A inequação 2.5 deve ser aplicada se qualquer um dos termos da inequação (2.4) não for verdadeiro.

$$\frac{a_x}{a_{xadm}} > 0,25, \quad \frac{a_y}{a_{yadm}} > 0,25 \quad \text{ou} \quad \frac{a_z}{a_{zadm}} > 0,25. \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{a_x}{a_{xadm}}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{a_{yadm}}\right)^2 + \left(\frac{a_z}{a_{zadm}}\right)^2 \leq 1,0 \quad (2.5)$$

Pode-se ainda definir o conceito de arrancada: a derivada das acelerações no tempo (eq. 2.6).

$$j(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad (2.6)$$

Em geral, para acelerações que duram menos de 0,20 segundo e que são sucedidas por acelerações no sentido contrário não é preciso analisar a arrancada. Eventos que duram mais do que 0,20 segundo são chamados de “eventos sustentados”. O tempo para a reversão da aceleração de positiva para negativa nas direções X e Y deve ser relativamente longo, o que é definido como um período maior que 0,20 segundo. Para transições em períodos menores do que esse, o limite da aceleração admissível na direção respectiva deve ser de apenas 50% do valor obtido nas figuras 2.7, 2.8 e 2.9. Matematicamente a arrancada pode atingir até

$$j = \frac{6g - (-2g)}{0,20s} = 40 \frac{g}{s} \quad (2.7)$$

no caso de uma desaceleração na direção X de $6g$ positivos para $2g$ negativos. Na direção lateral, a arrancada pode atingir

$$j = \frac{3g - (-3g)}{0,20s} = 30 \frac{g}{s} \quad (2.8)$$

A reversão de aceleração negativa na direção Z (“olhos para cima”) para aceleração positiva (“olhos para baixo”) requer um limite reduzido, porque no caso de um momento de *airtime*¹ que dure mais de 3s os passageiros podem perder o contato com o assento. Se a aceleração mudar de sentido, o passageiro pode ter problemas para reencontrar a sua posição original segura. Por esta razão, a aceleração limite foi reduzida para os seis primeiros segundos após a reversão (ver a Fig. 2.9). Um critério adicional para a reversão de acelerações na direção Z deve ser aplicado conforme a Fig. 2.10.

Figura 2.10 – Critério adicional para a reversão de acelerações na direção Z .

Fonte: Rohde e Kupers [2012]

¹ Chama-se de *airtime* o momento em que os passageiros sentem-se sem peso, causado pela projeção da aceleração centrífuga em sentido oposto ao da gravidade.

3 Modelagem da curva de referência

A modelagem geométrica do circuito de uma montanha-russa consiste na determinação das formas geométricas que compõem os trilhos e suas demais estruturas. A princípio, todas essas formas geométricas podem derivar de uma única curva arbitrária que dite a direção do percurso e de um ângulo em torno dessa curva, i.e., um ângulo de rolagem. Neste trabalho a curva arbitrária que define o circuito de uma montanha-russa é chamada de curva de referência.

A determinação completa de uma seção qualquer dos trilhos requer, portanto, a sua posição na curva de referência, a direção da curva nessa posição (para que se estabeleça o sistema de referencial) e o ângulo de rolagem dos trilhos em torno da mesma, conforme ilustra a Fig. 3.11.

Figura 3.11 – A curva de referência de um circuito e as geometrias derivadas da mesma: II.

Fonte: Autor, “adaptado de” CoasterBridge¹.

Neste capítulo serão apresentados os métodos mais comuns de representação matemática de curvas, a serem aplicados na modelagem da curva de referência.

3.1 Curvas implícitas e explícitas

A equação implícita de uma curva no plano xy tem a forma $f(x, y) = 0$. As equações implícitas estabelecem uma relação direta entre as coordenadas dos pontos que pertencem à curva. Um exemplo é a equação de um círculo de raio unitário e centrado na origem, dado por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, como apresentado na Fig. 3.12.

¹ Disponível em: <<http://www.thomasfsterling.com/roller-coaster-bridge/>>. Acesso em: 10/10/2018.

Figura 3.12 – Um círculo de raio unitário centrado na origem.

Fonte: Autor.

Já em uma função paramétrica, cada uma das coordenadas de um ponto da curva é calculada separadamente em uma função explícita de um parâmetro independente,

$$C(u) = \{x(u), y(u)\} \quad (a \leq u \leq b). \quad (3.1)$$

Neste caso, $C(u)$ é uma função vetorial da variável independente u . Ainda que o intervalo $[a, b]$ seja arbitrário, ele normalmente é normalizado para $[0, 1]$. Por exemplo, o primeiro quadrante do círculo da Fig. 3.12 pode ser representado de forma paramétrica por

$$C(u) = \{x(u), y(u)\} = \left\{ \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2} \right\} \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Caso $C(u) = \{x(u), y(u)\}$ represente o caminho traçado por uma partícula em função do tempo - sendo u a variável de tempo - então a primeira e a segunda derivadas de $C(u)$ são a velocidade e a aceleração da partícula, respectivamente.

A representação paramétrica tem inúmeras vantagens, dentre elas destacam-se:

- Para que o método paramétrico represente curvas arbitrárias no espaço tri-dimensional, basta adicionar a coordenada z , $C(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$;
- As curvas paramétricas têm um sentido natural de travessia, i.e., de $C(a)$ para $C(b)$ se $a \leq u \leq b$; curvas implícitas não. Assim, é mais fácil gerar sequências de pontos ao longo de uma curva paramétrica;
- Os coeficientes de muitas das funções paramétricas têm grande significado geométrico. Isto se traduz em métodos de design intuitivos e algoritmos numericamente estáveis.

As funções paramétricas mais comuns são as de Bézier e as *B-Splines*.

3.2 Curvas de Bézier

Uma curva de Bézier de grau p é definida como

$$C(u) = \sum_{i=0}^p B_{i,p}(u) Q_i \quad (0 \leq u \leq 1). \quad (3.2)$$

Os coeficientes geométricos dessa forma, Q_i , são chamados de pontos de controle. As funções de base, $B_{i,p}(u)$, são os polinômios de Bernstein de grau p , dados por

$$B_{i,p}(u) = \frac{p!}{i!(p-i)!} u^i (1-u)^{p-i} \quad (3.3)$$

A Fig. 3.13 apresenta os polinômios de Bernstein de primeiro e de terceiro grau.

Figura 3.13 – Polinômios de Bernstein.

Fonte: Autor.

Note-se que, a medida que o número de pontos de controle aumenta, o grau da curva necessariamente cresce, de modo que um ponto qualquer da curva é sempre resultado da ponderação de todos os pontos de controle.

Curvas geradas a partir de apenas um segmento de polinômio, como as de Bézier, apresentam as seguintes desvantagens:

- um grau alto é requerido de forma a satisfazer um grande número de restrições; e.g., é necessário uma curva de grau $(n - 1)$ para aproximar n pontos de controle. No entanto, curvas de alto grau são ineficientes de se processar e numericamente instáveis;
- a continuidade das derivadas nas conexões entre os segmentos de curva depende da magnitude dos vetores tangentes nos pontos finais dos segmentos - i.e, da posição dos pontos de controle da curva;
- curvas constituídas por um único segmento não são adequadas para design iterativo; o controle não é suficientemente local.

3.3 Curvas *B-Spline*

Uma curva *B-Spline*, assim como uma curva de Bézier, consiste em uma função paramétrica aproximadora de pontos representativos, chamados de pontos de controle. Uma *B-Spline* de ordem M é formada pela junção de partes de polinômios de grau $p = M - 1$.

A curva $C(u)$ é infinitamente derivável dentro de um intervalo de nós e $p - t$ vezes derivável em um nó com multiplicidade t . Um conjunto de nós não descendente $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$ define um vetor de nós U ,

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}, \quad (3.4)$$

o qual determina a parametrização das funções de base.

Dado um vetor de nós, a função de base a ele associada, $N_{i,p}(u)$, é definida como

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{para } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.5)$$

para $p = 0$, e

$$N_{i,p} = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u), \quad (3.6)$$

para $p > 0$ e $i = 0, 1, \dots, n$.

A k -ésima derivada de uma *B-Spline* é obtida a partir da computação da k -ésima derivada das funções de base, de modo que

$$N_{i,p}^{(k)}(t) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right). \quad (3.7)$$

O cálculo das funções de base dadas pela eq. (3.6) pode ser feito de forma remissiva. Piegl e Tyller [1997] apresentam algoritmos para o cálculo dessas funções, bem como suas derivadas.

Quando existem M múltiplos nós no começo e no fim do vetor de nós, a relação entre os pontos de controle da curva e a forma da mesma é similar aos segmentos de curvas de Bézier. Neste caso, o primeiro e o último ponto da curva coincidem com Q_0 e Q_n , respectivamente, e a tangente da curva nestes pontos tem a direção dos vetores $\overrightarrow{Q_0 Q_1}$ e $\overrightarrow{Q_{n-1} Q_n}$.

As curvas *B-Spline* podem ser abertas ou fechadas. Uma curva aberta de grau p com um polígono definidor determinado por $n + 1$ vetores de posição $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$, é expressa como a combinação linear destes pontos de controle e das funções de base *B-Spline*, dada por

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) Q_i \quad (a_0 \leq u \leq a_{n-M+2}), \quad (3.8)$$

onde o vetor de nós que determina as funções *B-Spline* é

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n+M}\}. \quad (3.9)$$

Os valores dos nós para esta curva podem ser determinados da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_i &= a_0 & (i = 0, 1, \dots, M-1), \\ u_{i+M} &= a_{i+1} & (i = 0, 1, \dots, n-M), \\ u_{i+n+1} &= a_{n-M+2} & (i = 0, 1, \dots, M-1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

com

$$a_i = i \quad (i = 0, 1, \dots, n-M+2). \quad (3.11)$$

A Fig. 3.14a ilustra as funções de base de uma *B-Spline* aberta com $n = 5$ e $p = 4$. Nesse caso, o vetor de nós é dado por

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2\}.$$

A Fig. 3.14b apresenta uma curva gerada a partir de tais funções.

Figura 3.14 – Funções de base e curva *B-Spline* de grau $p = 4$ e $n = 5$.

(a) Funções de base.

(b) Curva gerada.

Fonte: Autor.

Note-se que na Fig. 3.14a, em $u = 1$, $C^{p-m} = C^3$. Caso a multiplicidade desse nó seja aumentada para $t = 4$,

$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2\},$$

a curva torna-se, em $u = 1$, C^0 . Neste caso será possível observar uma descontinuidade na direção e/ou no módulo da primeira derivada da curva, como ilustrado na Fig. 3.15b. Como o vetor de nós foi aumentado, é necessária a adição de $t - 1$ pontos de controle à

Figura 3.15 – Efeitos da alteração da multiplicidade de nós.

- (a) As funções de base tornam-se C^0 em $u = 1$. (b) A primeira derivada da curva torna-se descontínua em $u = 1$.

Fonte: Autor.

curva. No exemplo da Fig. 3.15b foram adicionados 3 pontos de controle coincidentes com o terceiro ponto de controle da Fig. 3.14b.

Para informações sobre curvas fechadas, sugere-se consultar Yamaguchi [1988].

3.4 B-Splines racionais não uniformes

Uma curva aberta NURBS de grau p e com $n + 1$ pontos de controle é definida como

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_iQ_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i}, \quad (3.12)$$

onde w_i são os *pesos* atribuídos a cada um dos pontos de controle. A utilização de pesos possibilita a criação de geometrias cônicas, por exemplo.

Se

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j}, \quad (3.13)$$

então a eq. (3.12) pode ser reescrita como

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)Q_i. \quad (3.14)$$

As $\{R_{i,p}(u)\}$ são as *funções de base racionais*. Para qualquer $a \neq 0$, se $w_i = a$ para todo i , então $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$ para todo i . Neste caso a eq. (3.14) pode ser reescrita como

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)Q_i,$$

que é a forma já apresentada das *B-Splines* não racionais.

A Fig. 3.16 ilustra o exemplo de uma curva com w_1 variável.

Figura 3.16 – Uma curva NURBS com $w_1 = 1, 2, 5$ e 10 .

Fonte: Autor.

3.5 Algoritmo de interpolação de pontos

As curvas *B-Spline* não interpolam seus pontos de controle, exceto quando há multiplicidade de nós, como discutido anteriormente. Em situações onde é preciso que a curva interpole uma sequência de pontos dada, mas que se mantenha a continuidade de suas derivadas, pode-se utilizar algoritmos de interpolação geométricos. Maekawa et al. [2009] e Yamaguchi [1988] apresentam algoritmos para esse fim.

O algoritmo de interpolação de pontos de Maekawa consiste em dois passos. No primeiro deles, assume-se que os pontos de controle (Q_i) de uma curva *B-Spline* são os próprios pontos a serem interpolados (P_i),

$$Q_i^{(1)} = P_i^{(1)} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.15)$$

Assim, na primeira iteração,

$$C^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^n N_{j,p}(t) Q_j^{(1)}. \quad (3.16)$$

A seguir, para cada ponto dado P_i , excluindo-se os dois pontos das extremidades da curva (que já são interpolados), é calculado o ponto na curva *B-Spline* ($C^{(1)}(t)$) mais perto do respectivo ponto a ser interpolado P_i resolvendo-se a seguinte equação não linear

$$[P_i - C^{(1)}(t)] \cdot \dot{C}^{(1)}(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.17)$$

o que resulta na condição de que o vetor $P_i - C^{(1)}(t)$ é ortogonal à tangente naquele ponto. O parâmetro resultante é chamado de $\bar{t}_i$.

No segundo passo, cada ponto de controle Q_i é transladado por um vetor de erro $\vec{e}_i = P_i - C^{(1)}(\bar{t}_i)$, e assim gera-se $Q_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(1)} + P_i - C^{(1)}(\bar{t}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.18)$$

com $Q_0^{(2)} = P_0$ e $Q_n^{(2)} = P_n$.

Na k -ésima iteração, para cada ponto inicial $P_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$, encontra-se o ponto mais perto na curva B -Spline ($C^{(k)}(\bar{t}_i)$), definida pelos pontos de controle $Q_i^k, i = 0, 1, \dots, n$. Esses passos são repetidos até que a magnitude do vetor de erro se torne menor que uma tolerância prescrita para todos os pontos dados. Iterações locais podem ser necessárias em caso de vértices com baixa velocidade de convergência, a fim de diminuir o tempo de computação.

A Fig. 3.17a apresenta uma curva interpoladora dos pontos $(5, 5)$, $(10, 20)$, $(20, 20)$, $(30, 5)$ obtida pelo método de Maekawa. A Fig. 3.17b mostra o comportamento da convergência do algoritmo de interpolação em função do número de iterações.

Figura 3.17 – Resultados obtidos com o algoritmo de Maekawa.

Fonte: Autor.

3.6 Propriedades geométricas das B -Splines

As propriedades geométricas das curvas B -Spline são resumidas a seguir.

- Localidade - um ponto na curva é determinado apenas pelos M pontos de controle na vizinhança imediata daquele ponto. Assim, a variação da posição de um ponto de controle influencia somente a parte da curva próxima àquele ponto;
- Continuidade - em geral uma continuidade de classe C^{M-2} entre os segmentos da curva é mantida;
- Propriedade do polígono convexo - os segmentos de curva que compõem uma B -Spline são combinações convexas dos M vetores mais próximos Q_j . Isso quer dizer que cada segmento está contido no polígono convexo formado pelos M pontos.

4 Dedução de um sistema referencial

Como discutido no capítulo 3, as geometrias dos trilhos derivam da curva de referência. A localização de tais geometrias se dá em um sistema referencial móvel e contínuo ao longo da curva de referência. Neste capítulo se discute os sistemas referenciais mais comuns e se deduz um sistema referencial voltado para o projeto de montanhas-russas.

São três os sistemas referenciais mais utilizados em geometria diferencial: os triedros de Frenet, de Darboux e de Bishop.

4.1 O triedro de Frenet

O sistema referencial mais comum utilizado em curvas é o do Triedro de Frenet. Ele é composto por uma base ortonormal, cujo primeiro versor tem a direção da tangente da curva, o segundo a direção da curvatura e o terceiro pode ser derivado dos dois primeiros.

Uma curva paramétrica em três dimensões pode ser expressa como

$$C(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}.$$

A primeira derivada da curva em relação ao parâmetro u é denominada por $\dot{C}(u)$ ou $C(u)^1$, onde

$$\dot{C}(u) \equiv C(u)^1 = \frac{dC(u)}{du} = \{\dot{x}(u), \dot{y}(u), \dot{z}(u)\}. \quad (4.1)$$

A k -ésima derivada de uma B-Spline não racional é obtida a partir da computação da k -ésima derivada das funções de base, de modo que

$$C(u)^k = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^k(u) Q_i. \quad (4.2)$$

Se a condição

$$\dot{C}(u_0) \neq 0 \quad (4.3)$$

é satisfeita, então a curva é chamada de regular em $u = u_0$. $\dot{C}(u_0)$ é chamado de vetor tangente no ponto $u = u_0$. Um ponto onde a curva é regular é chamado de ponto ordinário; um ponto não regular é chamado de ponto singular. Se as derivadas de $x(u)$, $y(u)$ e $z(u)$ até a ordem r existem e são contínuas e se a curva é regular nesse intervalo de nós, então diz-se que essa curva é de classe C^r .

Considere-se agora o uso do comprimento s da curva como parâmetro. Indica-se a derivada em relação a s pelo símbolo $'$ para distingui-la da derivada em relação a u .

Como

$$\frac{dC}{ds} \equiv C' = \frac{dC}{du} \frac{du}{ds} = \frac{\dot{C}}{\dot{s}} \quad (4.4)$$

e

$$\frac{ds}{du} \equiv \dot{s} = \sqrt{\frac{dx^2}{du} + \frac{dy^2}{du} + \frac{dz^2}{du}} = \sqrt{\langle \dot{C}, \dot{C} \rangle}, \quad (4.5)$$

se $\dot{C} \neq 0$,

$$C' = \frac{\dot{C}}{\dot{s}} = \frac{\dot{C}}{\sqrt{\langle \dot{C}, \dot{C} \rangle}} \quad \therefore \quad \|C'\| = 1. \quad (4.6)$$

Isto é, C' tem a mesma direção de $\dot{C}$, e sua norma vale 1. C' é chamado de *vetor tangente unitário* e indicado por T_f , ou simplesmente T . A magnitude do vetor tangente $\dot{C}$ é dada por $\dot{s}$.

Considere-se a segunda derivada da curva em relação a s ,

$$C''(s) = \frac{d^2C}{ds^2}. \quad (4.7)$$

Da definição de derivada tem-se

$$C''(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{C'(s_0 + \Delta s) - C'(s_0)}{\Delta s}. \quad (4.8)$$

Quando no limite $\Delta s \rightarrow 0$, o numerador $C'(s_0 + \Delta s) - C'(s_0)$ se torna perpendicular ao vetor tangente no ponto $C(s_0)$ e aponta para o centro de curvatura da curva. Como no limite $\Delta s \rightarrow 0$ o seno do ângulo entre os vetores $C'(s_0 + \Delta s) - C'(s_0)$ se aproxima do próprio ângulo, a equação 4.8 leva a

$$\|C''(s)\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho} \Delta s}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \equiv \kappa, \quad (4.9)$$

onde ρ é o raio de curvatura e κ é o módulo do vetor curvatura. C'' pode ser expressa como

$$C''(s) = \frac{1}{\rho} N_f \equiv \kappa N_f \quad (4.10)$$

onde N_f é o *vetor unitário normal*, que aponta para o centro de curvatura. Derivando a equação 4.6 em relação a s e relacionando-a aos vetores $\dot{C}$ e $\ddot{C}$, pode-se expressar a curvatura como

$$C''(s) = \frac{(\dot{C} \wedge \ddot{C}) \wedge \dot{C}}{\|\dot{C}\|^4} \equiv \kappa N_f, \quad N_f = \frac{C''(s)}{\|C''(s)\|}. \quad (4.11)$$

O vetor unitário binormal B_f é obtido através do produto vetorial de T e N_f , como em

$$B_f = T \wedge N_f. \quad (4.12)$$

Considere-se agora um ponto $C(u_0)$ em uma curva e dois pontos muito próximos a ele, $C(u_0 - \Delta_1 u)$ e $C(u_0 + \Delta_2 u)$. O plano que contém os pontos quando $\Delta_1 u$ e $\Delta_2 u$ tendem a zero é chamado de plano osculador. A equação do plano osculador é dada por

$$[P - C(u_0), \dot{C}(u_0), \ddot{C}(u_0)] = 0, \quad \dot{P}(u_0) \wedge \ddot{C}(u_0) \neq 0. \quad (4.13)$$

Os colchetes indicam um triplo produto escalar. A eq. 4.13 é a condição para que os três vetores $P - C(u_0)$, $\dot{C}(u_0)$ e $\ddot{C}(u_0)$ estejam contidos no mesmo plano.

O plano osculador pode ser descrito também como o plano em $\mathbb{R}^3$ definido pelos vetores N_f e T , e dado por

$$\langle P - C(u_0), B_f \rangle = 0. \quad (4.14)$$

O plano em $\mathbb{R}^3$ definido pelos vetores N_f e B_f é chamado de plano normal, dado por

$$\langle P - C(u_0), T \rangle = 0 \quad (4.15)$$

Finalmente, o plano em $\mathbb{R}^3$ definido pelos vetores T e B_f é chamado de plano retificador, dado por

$$\langle P - C(u_0), N_f \rangle = 0. \quad (4.16)$$

Os versores e os planos do triedro de Frenet são apresentados na Fig. 4.18.

Figura 4.18 – Triedro de Frenet.

Fonte: Autor.

Seja $\vec{r} = C(t)$ a posição no instante t de uma partícula no espaço $\mathbb{R}^3$. Ainda, $s = \gamma(t)$ é a distância percorrida por essa partícula entre os instantes t_0 e t . Define-se

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (4.17)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade e $\vec{a}$ a aceleração vetorial da partícula.

Da mesma forma,

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (4.18)$$

onde v é a velocidade e a a aceleração escalar da partícula. Como

$$\vec{v} = vT, \quad (4.19)$$

então, derivando a eq. 4.19 em relação a t ,

$$\vec{a} = aT + v \frac{dT}{dt} = aT + v \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (4.20)$$

$$\therefore \vec{a} = aT + v^2 \frac{dT}{ds}. \quad (4.21)$$

Como N_f é a derivada de T em relação ao arco de comprimento, dividida pelo módulo da curvatura,

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N_f, \quad \vec{a} = aT + v^2 \kappa N_f, \quad (4.22)$$

fica claro que a aceleração vetorial é naturalmente descomposta nas direções T e N_f do Triedro de Frenet.

4.2 Triedro de Bishop

O principal problema do Triedro de Frenet é que ele não pode ser definido nos pontos onde $C''(u) = 0$. Esses pontos correspondem exatamente àqueles em que a curvatura vale zero. Assim, a principal característica do triedro de Bishop é que o versor normal não é um dos componentes de sua base ortonormal, $\{T, M_1, M_2\}$. Essa característica pode ser observada atentando-se às equações de Frenet-Serret,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa N_f, \\ \frac{dN_f}{ds} &= -\kappa T + \tau B_f, \\ \frac{dB_f}{ds} &= -\tau N_f. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O sistema referencial de Bishop foi introduzido em 1975 no artigo mensal “*There is More Than One Way to Frame a Curve*” [BISHOP, 1975]. Desde então ele é onipresente

na literatura na teoria de curvas e suas aplicações. Bishop demonstrou que existem outros sistemas referenciais tangenciais e equivalentes que apresentam as mesmas vantagens do Triedro de Frenet, das quais ele destaca o fato desse sistema ser adaptado à curva, isto é, suas componentes são tangentes ou perpendiculares à curva.

A dedução do sistema referencial de Bishop, chamado de *Relatively Parallel Adapted Frame* (RPAF) se baseia no conceito dos Campos Vetoriais Relativamente Paralelos. Diz-se que um campo vetorial normal M ao longo de uma curva é relativamente paralelo se a sua derivada é tangente,

$$\dot{M} = g(s)T(s), \quad (4.24)$$

para um função $g(s)$. Um campo vetorial tangencial é dito relativamente paralelo se for um múltiplo constante do campo tangente unitário, T . Um campo vetorial arbitrário é relativamente paralelo se as suas componentes tangencial e normais são relativamente paralelas.

Assim, os campos relativamente paralelos em uma curva C^2 no espaço vetorial tridimensional constituem dois subespaços, o primeiro unidimensional (tangencial), e o segundo bidimensional (normal). Chama-se uma base ortonormal nesse espaço vetorial que contém dois subespaços de *Relatively Parallel Adapted Frame* (RPAF), ou Referencial Adaptado Relativamente Paralelo.

Se $\{T, M_1, M_2\}$ é um RPAF, então suas derivadas em relação ao arco de comprimento são as chamadas equações de Bishop,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa_1 M_1 + \kappa_2 M_2, \\ \frac{dM_1}{ds} &= -\kappa_1 T, \\ \frac{dM_2}{ds} &= -\kappa_2 T. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como

$$\kappa = \|T'\| = \|\kappa_1 M_1 + \kappa_2 M_2\| = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}, \quad (4.26)$$

então, escrevendo a principal normal como

$$N_f = \cos(\theta)M_1 + \sin(\theta)M_2 = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)M_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa}\right)M_2 \quad (4.27)$$

e diferenciando a eq. 4.27,

$$\frac{dN_f}{ds} = -\kappa_f T + \tau B_f = -\kappa_f T + \theta'(-\sin(\theta)M_1 + \cos(\theta)M_2). \quad (4.28)$$

Se $\{T, M_1, M_2\}$ é propriamente orientado, então conclui-se que $B_f = -\sin(\theta)M_1 + \cos(\theta)M_2$ e, portanto, $\tau = \theta'$. Assim κ e a integral $\int \tau ds$ são as coordenadas polares da curva (κ_1, κ_2) .

Carroll et al. [2013] utilizaram o Triedro de Bishop para solucionar os problemas de descontinuidade do Triedro de Frenet. O artigo apresenta uma maneira de orientar o sistema de Frenet sempre positivamente, além de eliminar as normais não existentes. Assim, o triedro proposto, chamado de Triedro Beta $\{T, N_\beta, B_\beta\}$, que é ao menos C^0 (i. e., ao menos contínuo), determina uma normal globalmente definida, além de uma curvatura e de uma torção globalmente definidas. A Fig. 4.19 mostra uma aplicação para o Triedro Beta.

Figura 4.19 – Comparação entre os triedros de Frenet e Beta.

Fonte: Autor, “adaptado de” Carroll et al. [2013].

4.3 Sistema referencial proposto

O sistema referencial proposto, cuja base é formada por $\{T, N_g, B_g\}$, baseia-se no Triedro de Frenet. Isso porque as acelerações resultantes do movimento dos trens ao longo de um percurso curvilíneo assumem naturalmente as direções tangente e normal do triedro.

O versor N_f indica a direção da curvatura do circuito e, portanto, das acelerações normais. Assim, nessa direção existe uma correlação direta entre a geometria da curva de referência e as acelerações centrífugas sentidas pelos passageiros.

Como discutido anteriormente, o Triedro de Frenet não pode ser calculado em pontos de inflexão e retas, a não ser por métodos alternativos como o do sistema de Tändler e Kecskeméthy [2005] e de Carroll et al. [2013]. Observa-se, no entanto, que o sentido da curvatura global em Carroll et al. [2013] é sempre aquele que mantém o sistema referencial positivamente orientado. Assim, a informação sobre o sentido das acelerações centrípetas não é conservada nesse sistema. O sentido dessas acelerações é importante, já que ele pode ser utilizado para se orientar o ângulo de inclinação dos carros, de modo a acomodar as forças resultantes no sistema referencial dos carros de modo predefinido.

Para contornar os problemas do Triedro de Frenet, introduz-se um vetor de correção, chamado de *vetor de projeção da gravidade*, G_P , que é contribuição específica deste trabalho. A introdução desse vetor tem como objetivos: (1) definir uma direção para N_g quando a curvatura é nula e, portanto, N_f não é definido e (2), suavizar a movimentação do sistema referencial entre as regiões anteriores e posteriores a um ponto de inflexão.

Como os versores N_f e B_f pertencem ao plano normal à curva de referência, essa correção deve dar-se neste plano. Assim, é necessário que a direção de G_P seja perpendicular ao vetor T , ou seja, que G_P esteja contido no plano normal ao vetor T . A equação do plano normal a T é dada por

$$\langle \dot{C}(u), G_P \rangle = 0. \quad (4.29)$$

Considere-se agora a reta que passa pelo ponto $C(u) + \vec{a}_g$ e cuja a direção é dada por $C(u)$, onde $\vec{a}_g$ corresponde ao vetor da aceleração da gravidade. Pode-se escrever essa reta de forma paramétrica como

$$A(s) = C(u) + \vec{a}_g + \dot{C}(u)s. \quad (4.30)$$

O parâmetro s é utilizado para diferenciá-lo do parâmetro da curva, u . A eq. 4.30 pode ser reescrita em função de suas coordenadas,

$$\begin{aligned} x(s) &= x(u) + \langle \vec{a}_g, \hat{x} \rangle + \dot{x}(u)s, \\ y(s) &= y(u) + \langle \vec{a}_g, \hat{y} \rangle + \dot{y}(u)s, \\ z(s) &= z(u) + \langle \vec{a}_g, \hat{z} \rangle + \dot{z}(u)s, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são os versores do sistema cartesiano e os termos $\langle \vec{a}_g, \hat{x} \rangle$ e $\langle \vec{a}_g, \hat{y} \rangle$ são nulos.

Chame-se o ponto que pertence à reta $A(s)$ e que intercepta o plano normal em $s = s^*$ de $A(s^*)$. Ele corresponde à projeção do vetor aceleração da gravidade no plano normal, conforme ilustra a Fig. 4.20. O vetor de correção será então calculado por

$$G_P = A(s^*) - C(u). \quad (4.32)$$

Reescrevendo a eq. 4.29 em função das coordenadas,

$$\begin{aligned} A(s^*) &= \{x(s^*), y(s^*), z(s^*)\}, \\ C(u) &= \{x(u), y(u), z(u)\}, \\ \dot{C}(u) &= \{\dot{x}(u), \dot{y}(u), \dot{z}(u)\}. \end{aligned}$$

e omitindo os termos (u) , tem-se

$$\begin{aligned} \langle \dot{C}(u), G_P \rangle &= \dot{x}(x(s^*) - x) + \dot{y}(y(s^*) - y) + \dot{z}(z(s^*) - z) = 0 \\ &= \dot{x}x(s^*) + \dot{y}y(s^*) + \dot{z}z(s^*) - \dot{x}x - \dot{y}y - \dot{z}z = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Figura 4.20 – Projeção a aceleração da gravidade no plano normal.

Fonte: Autor.

Substituindo as equações 4.31 na eq. 4.33:

$$\dot{x}(x + \dot{x}s) + \dot{y}(y + \dot{y}s) + \dot{z}(z - a + \dot{z}s) - \dot{x}x - \dot{y}y - \dot{z}z = 0 \quad (4.34)$$

onde o termo a representa o módulo da aceleração da gravidade.

Resolvendo a equação 4.34 para s obtém-se s^* . Substituindo s por s^* na eq. 4.30 se obtém o ponto $A(s^*)$ e, conseqüentemente, G_P . Note-se que para isso

$$\dot{C}(u) \wedge \vec{a}_g \neq 0. \quad (4.35)$$

Como demonstra a eq. 4.22,

$$\vec{a} = aT + v^2\kappa N_f,$$

e como G_P também se trata de uma componente de aceleração (aquela que esta contida no plano normal), define-se

$$N_g = \frac{-\vec{G}_P + v^2\kappa N_f}{\|-\vec{G}_P + v^2\kappa N_f\|}, \quad (4.36)$$

isto é, a normal redefinida é igual a soma das parcelas das acelerações resultantes no plano normal à direção do trajeto. Assim, ainda que $v^2\kappa N_f$ seja nula, se a eq. 4.35 for satisfeita existirá uma direção para a composição de uma base ortonormal. A velocidade em que o circuito é percorrido influenciará diretamente na proporção entre as parcelas das acelerações, definindo a direção de N_g . Assim, é fundamental que a velocidade seja continua ao longo do circuito (o que de fato acontece).

Ainda,

$$B_g = T \wedge N_g \quad (4.37)$$

A Fig. 4.21 apresenta o sistema referencial $\{N_g, B_g\}$ calculado ao longo de uma curva de quinto grau genérica $C(u)$. Os versores $\{T\}$ são omitidos. Duas curvas são desenhadas ligando as extremidades dos versores ($\{N_g(u), B_g(u)\}$), de modo a facilitar a visualização. Na Fig. 4.21a, o percurso é feito a uma velocidade constante e igual a 1 *unidade/s*, enquanto que o percurso da Fig. 4.21b a velocidade é de 6 *unidades/s*.

Figura 4.21 – A influência da velocidade na orientação do sistema referencial deduzido.

- (a) Em baixas velocidades o versor N_g é levemente desviado direção vertical, aquela em que atua a aceleração da gravidade.
- (b) Em maiores velocidades, a parcela da aceleração centrípeta faz com que a orientação de N_g se aproxime dos planos osculadores da curva de referência.

Fonte: Autor.

É possível notar que a medida que a velocidade do percurso aumenta, a parcela da aceleração centrípeta torna-se cada vez maior em relação àquela da aceleração da gravidade projetada. Assim, o versor normal redefinido N_g inclina-se em direção ao plano osculador da curva de referência.

Considere que $C(u)$ seja uma curva NURBS *quadrática* e percorrida à velocidade constante de 5 *unidades/s*. A Fig. (4.22) apresenta o versor $\{N_g\}$ calculado ao longo de dessa curva. Os versores $\{T, B_g\}$ são omitidos. Uma curva é desenhada ligando as extremidades dos versores ($\{N_g(u)\}$), de modo a facilitar a visualização.

Como uma curva NURBS quadrática tem continuidade C^1 na união de suas partes, $\ddot{C}(u)$ varia bruscamente nesses pontos. Assim, também varia repentinamente o sentido da aceleração normal e, portanto, o sistema referencial fica descontínuo. A Fig. 4.23 mostra o gráfico do módulo de $\ddot{C}(u)$ em função do parâmetro u .

Figura 4.22 – A influência da curvatura na obtenção do sistema referencial.

Fonte: Autor.

Assim, o sistema referencial $\{T, N_g, B_g\}$ deve ser gerado a partir de uma curva NURBS de grau maior ou igual a 3.

Figura 4.23 – Módulo de $\ddot{C}(u)$ ao longo de uma curva NURBS quadrática.

Fonte: Autor.

5 Métodos de modelagem de circuitos

Uma vez determinada a curva de referência e um sistema referencial contínuo, deve-se determinar as geometrias dos trilhos e demais estruturas de uma montanha-russa. A geometria do trilho depende essencialmente do tipo de montanha-russa, i.e., do design de seus trens.

Um trem de montanha-russa é um veículo que contém carros onde os passageiros são dispostos. Entre os principais tipos de trens então os de design sentado (Fig. 5.24a), invertido (Fig. 5.24b), voador (Fig. 5.24c) e em pé (Fig. 5.24d). Diferentes tipos de chassis e articulações podem ser usados em função das características do projeto, como para circuitos de alta velocidade ou com curvas muito fechadas.

Figura 5.24 – Os diferentes tipos de trens de montanhas-russas.

(a) Trem sentado.

Fonte: Engelen¹

(b) Trem do tipo invertido.

Fonte: Autor.

(c) Trem voador.

Fonte: Garvanovic².

(d) Trem em pé.

Fonte: CoasterImage³.

Considere-se o posicionamento da curva de referência de uma montanha-russa sentada em duas localizações distintas, apresentadas na Fig. 5.25. Na primeira delas (Fig. 5.25a), a curva de referência é localizada no centro geométrico dos trilhos C_T e, na segunda, na

¹ Disponível em: <<https://rcdb.com/594.htm#p=55449>>. Acesso em: 27/04/2018.

² Disponível em: <<https://rcdb.com/4124.htm#p=28284>>. Acesso em: 27/04/2018.

³ Disponível em: <<https://rcdb.com/6.htm#p=13879>>. Acesso em: 27/04/2018.

altura do coração do passageiro H (Fig. 5.25b). Resta evidente que, no primeiro caso, a rolagem em torno da curva de referência resultará em grandes acelerações centrípetas na região da cabeça do passageiro. Já no segundo caso, como a rolagem se dá em torno da região do centro de gravidade do passageiro, as acelerações induzidas tanto na cabeça quanto na região das pernas serão menores.

Figura 5.25 – Diferentes posições de centro de rotação dos trens.

Fonte: Autor.

Segundo a norma ABNT 15926-2, o ponto de referência para a medição ou cálculo das acelerações deve estar sessenta centímetros acima do nível de assento do equipamento. Assim, é conveniente que a curva de referência do circuito, representada por $H(u)$, passe pelo ponto de referência indicado pela norma brasileira.

A Fig. 5.26 apresenta a vista frontal de um trem sentado. Nesse caso, a curva de referência é posicionada na altura do ponto de referência mencionado. O vetor $C_T - H$ indica um sentido para a orientação de um trem sentado. Esse vetor será denominado V_{H/C_T} .

A sequência de pontos C_T determina a *linha de centro dos trilhos*. A curva interpoladora dos pontos C_T será chamada de *curva de centro dos trilhos* e representada por $C_T(u)$.

$\overrightarrow{C_T C_{T1}}$ e $\overrightarrow{C_T C_{T2}}$ correspondem aos vetores transversais aos trilhos. C_{T1} e C_{T2} são os pontos que representam as linhas de centro dos trilhos esquerdo e direito, respectivamente. As curvas interpoladoras destes pontos serão chamadas de *curva dos trilhos* e serão representadas por $C_{Ti}(u)$. O vetor $V_{C_T/C_{T1}}$ é calculado usando

$$V_{C_T/C_{T1}} = V_{H/C_T} \wedge \dot{C}_T \quad (5.1)$$

onde $\dot{C}_T$ corresponde à direção entre pontos C_T sucessivos, ou aquela obtida na derivação da curva do centro dos trilhos.

Figura 5.26 – Vista frontal de um carro sentado. Neste caso a curva de referência H é posicionada entre os dois assentos do carro. Como o trilhos se posicionam abaixo do carro, o vetor V_{H/C_T} é orientado para baixo.

Fonte: Autor.

Para uma montanha-russa invertida, pode-se definir um vetor equivalente ao V_{H/C_T} , porém em sentido contrário, como ilustra a Fig. 5.27.

Figura 5.27 – Vista frontal de um carro invertido. No caso de uma montanha-russa invertida o vetor V_{H/C_T} é orientado para cima.

Fonte: Autor.

Propõe-se dois métodos para a orientação do vetor V_{H/C_T} . O primeiro se baseia na própria natureza do sistema referencial proposto no capítulo 4. O segundo é determinado por ângulos de rolagem impostos.

5.1 Método da força lateral resultante nula

Dada uma curva de referência, o ângulo de rolagem dos trens em torno da mesma, i.e., a orientação do vetor V_{H/C_T} , pode ser diversa. De fato, um elemento de montanhas-russas chamado *HeartlineRoll* consiste em uma rolagem de 360 graus em torno da curva de referência (ver as Fig. 3.11 e 5.35a).

Diferentes ângulos de rolagem θ resultam em diferentes projeções de forças nos eixos Y e Z , apresentados na Fig. 2.6. É natural que exista uma direção de orientação do vetor V_{H/C_T} , dada pelo ângulo θ_0 , que minimize a projeção lateral das forças resultantes, isto é, aquela na direção de Y . Isso acontece quando se orienta o versor de V_{H/C_T} , $\hat{v}_{H/C_T}$ paralelamente à aceleração resultante (ou, mais adequadamente, à força resultante) em determinado ponto do circuito, projetada no plano $Y - Z$, $\vec{a}_{Y-Z}$, como mostrado na Fig. 5.28.

Figura 5.28 – A influência do ângulo de rolagem nas projeções das acelerações no plano normal ao trajeto.

- (a) Em uma seção qualquer do trilho a projeção da aceleração no plano $Y - Z$ assume uma direção arbitrária, indicada pelo ângulo θ_0 em relação à vertical.
- (b) De modo a minimizar a projeção lateral das forças resultantes, orienta-se o versor $\hat{v}_{H/C_T}$ na direção de $\vec{a}_{Y-Z}$.

Fonte: Autor.

Dada a natureza do sistema referencial proposto no capítulo 4, o versor N_g já indica a direção da força resultante. O *método da força lateral resultante nula* consiste, portanto, em orientar a direção do vetor V_{H/C_T} naquela do versor N_g . O sentido de V_{H/C_T} dependerá

do tipo de trem envolvido e do sentido em que se deseja aplicar a projeção da aceleração no eixo Z , a_Z .

Usualmente deseja-se que o sentido de a_Z seja aquele que comprima dos passageiros contra o assento. Isso porque esse é um sentido natural de aplicação de aceleração, cujo limite é maior do que no sentido contrário.

Esse método mostra-se ideal para trechos do circuito onde o ângulo de rolagem não é imposto (o que não acontece nos elementos de montanhas-russas). Nesses casos, é conveniente que as forças laterais sejam mantidas pequenas, senão nulas, já que as mais prazerosas são aquelas nas direções X e Z (já que a área projetada de um corpo em perfil, no plano $X - Z$, é muito menor do que aquela). Assim,

$$\hat{v}_{H/C_T} = -N_g \quad (5.2)$$

para uma montanha-russa sentada.

Esse método de criação de circuitos, baseado no sistema referencial deduzido, foi apresentado pelo Autor no congresso INDUSCON (*IEEE/IAS International Conference on Industry Applications*) sob o título *Procedural method for finding roller coaster rails centerlines based on heart-line acceleration criteria* [DURAN; TSUZUKI, 2018]. O exemplo a seguir refere-se a esse artigo.

Considere-se que a velocidade em cada ponto de um circuito de montanha-russa, medida ao longo de sua curva de referência $H(u)$, seja aproximada pelas relações de conservação de energia. Nessa primeira hipótese, o trabalho do atrito e das forças de arrasto aerodinâmico são considerados nulos. Se um carro for considerado pontual, tem-se

$$EC_{z_0} + EP_{z_0} = EC(u) + EP(u) \quad (5.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{mv_{z_0}^2}{2} + ma_g z_0 &= \frac{mv(u)^2}{2} + ma_g z(u) \\ \therefore v(u) &= \sqrt{v_{z_0}^2 + 2a_g(z_0 - z(u))} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde z_0 corresponde à altura máxima da colina de elevação e $v(u)$ a velocidade de um ponto qualquer no percurso.

Na Fig. 5.29, a partir de uma curva de referência (tracejada), obteve-se os versores $\hat{v}_{H/C_T}$ e os pontos amostrais C_T pelo método da aceleração lateral nula. Esses pontos e versores foram obtidos variando u em intervalos iguais. Como a velocidade da curva $\dot{H}(u)$ (não confundir com a velocidade do percurso) não é constante, os sucessivos pontos amostrais não são equidistantes.

De acordo com a eq. (5.4), no ponto a da curva de referência o trem está em baixa velocidade. Nesse segmento a aceleração normal é pequena, então N_g e $\hat{v}_{H/C_T}$ são guiados

Figura 5.29 – Nas curvas em que a primeira derivada não é constante, os pontos amostrais equidistantes no vetor de nós não são equidistantes no espaço.

Fonte: Autor.

principalmente por G_P . À medida que o trem acelera ao descer pela espiral A, a aceleração normal cresce e faz com que N_g se torne mais alinhado ao plano osculador de $H(u)$.

No ponto b da colina B, a curva é contida em um plano paralelo ao plano $X-Z$. Como a curva está num plano vertical, ambos G_P e N_f pertencem ao mesmo plano. No ponto b , a aceleração normal se torna maior do que a projeção da gravidade, fazendo com que o sistema referencial fique descontínuo. Esse problema é resolvido observando as mudança brusca de sentido de N_g , de modo que se

$$\langle N_g(u), N_g(u - du) \rangle < 0, \quad (5.5)$$

então deve-se inverter o sentido de $N_g(u)$.

Note-se que os pontos amostrais foram calculados equidistantes ao longo do vetor de nós da curva de referência. No entanto, pode-se obter pontos amostrais equidistantes no seu arco de comprimento. Isso consiste em calcular um δu , de modo que

$$H(u + \delta u) - H(u) = \delta H,$$

desde que

$$(\delta s - \delta s_{tol} \leq \delta H \leq \delta s + \delta s_{tol}), \quad (5.6)$$

onde δs é a distancia desejada entre os pontos amostrais e δs_{tol} sua tolerância.

Esse procedimento é resumido no algoritmo 1. Nesse algoritmo, U_u é o último nó do vetor de nós da curva $H(u)$ correspondente. Δ é a diferença entre a distância efetiva entre pontos amostrais e aquela desejada e é iniciado com valor $\Delta > \delta s_{tol}$.

Algorithm 1 OBTENÇÃO DE PONTOS AMOSTRAIS EQUIDISTANTES.

- 1: **Entradas:** $\delta s, \delta s_{tol}, u, U_u$
 - 2: **Saída:** Novo ponto amostral, $H(u_N)$
 - 3: $\delta u \leftarrow \delta s / \|\dot{C}(u)\|$ ▷ Chute inicial para δu
 - 4: $u_N \leftarrow u + \delta u$
 - 5: **Enquanto** $\|\Delta\| > \delta s_{tol}$ && $u_N \leq U_u$ **faça**
 - 6: $dH \leftarrow \|H(u_N) - H(u)\|$
 - 7: $\Delta \leftarrow \delta s - dH$
 - 8: $u_N \leftarrow u_N + (\Delta / dH) \delta u$
 - 9: **Fim Enquanto**
 - 10: **Retorne:** $H(u_N)$
-

Na Fig. 5.30, a descontinuidade a da Fig. 5.29 é corrigida e trilhos para um circuito sentado são gerados.

Figura 5.30 – A curva de referencia e os trilhos de uma montanha-russa sentada, gerada a partir do método da aceleração lateral nula.

Fonte: Autor.

5.2 Método de ângulo de rolagem imposto

No segundo método proposto, uma NURBS de ordem M e vetor de nós definido segundo as equações (3.10) e (3.11), é utilizada para a ponderação dos ângulos de rolagem $\theta(u)$ ao longo de uma curva representativa, $H(u)$. O ângulo de rolagem é dado em relação ao referencial de aceleração lateral nula, desenvolvido no capítulo 4.

É conveniente que a parametrização da *curva de ângulo de rolagem*, $\theta(u)$, se dê sob o mesmo vetor de nós de $H(u_0)$, de modo que $\theta(u_0)$ represente o ângulo de rolagem do ponto $H(u_0)$. Assim, para uma curva racional,

$$M(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \Pi_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (5.7)$$

onde Π_i corresponde ao ponto de controle quadridimensional

$$\Pi_i = \{Q_i, \theta_i\} = \{x_i, y_i, z_i, \theta_i\}. \quad (5.8)$$

Define-se, para uma montanha-russa sentada,

$$\hat{v}_{H/C_T} = -N_g \cos(\theta_i(u)) - B_g \sin(\theta_i(u)). \quad (5.9)$$

$M(u)$ será chamada de *curva de controle* de um elemento de montanha-russa. Isso porque é nos elementos de montanhas-russas, principalmente, que a orientação dos trens deve ser inteiramente determinada, de modo a se obter uma forma geométrica preestabelecida. Alguns elementos de percurso de montanhas-russas estão presentes em muitos circuitos e, por isso, serão apresentados e modelados.

O principal elemento de montanhas-russas é o *Loop*. Trata-se de um laço vertical de raio variável, de modo que em seu ponto mais alto os passageiros encontram-se de ponta-cabeça (Fig. 5.31a). Já em um *Loop não invertido* (Fig. 5.31b), uma rolagem de 180 graus é realizada entre a entrada e o ponto mais alto de um *Loop*, de modo que os passageiros permanecem de cabeça para cima.

O sistema referencial de um *Loop* pode ser deduzido segundo a eq. (4.36). No entanto, note-se que a aceleração da gravidade poderá induzir uma rolagem arbitrária ou uma descontinuidade do sistema referencial no topo do *Loop*, do mesmo modo que no ponto b do exemplo da Fig. 5.29. No caso de um *Loop*, a solução adotada pode ser diferente: desconsiderar a aceleração da gravidade nesse elemento. Assim, a eq. (4.36) pode ser reescrita como

$$N_g = \frac{v^2 \kappa N_f}{\|v^2 \kappa N_f\|}, \quad (5.10)$$

O mesmo vale para o sistema referencial em um *Loop não invertido*. No entanto, em um *Loop não invertido* deseja-se controlar diretamente a orientação dos trilhos, de modo que exista uma rolagem de 360 graus entre a entrada e a saída do elemento.

Figura 5.31 – Os diferentes elementos de montanhas-russas: parte I.

(a) *Loop*. Fonte: Moraes⁴.(b) *Loop* não invertido. Fonte: Wiencek⁵.

A Fig. 5.32 apresenta o sistema referencial e os trilhos gerados para uma montanha-russa sentada em um *Loop*.

Figura 5.32 – Modelagem de um *Loop*

(a) O sistema referencial ao longo da curva de referência.

(b) Trilhos gerados para uma montanha-russa sentada.

Fonte: Autor.

Seja $\theta(u)$ o ângulo de rolagem ao longo de um *Loop* não invertido. A Fig. 5.33 expressa a função $y = \theta(u)$ com pontos de controle arbitrários e $\theta_n - \theta_0 = 360^\circ$. Observe-se que a direção de $\overrightarrow{\theta_0\theta_1}$ e de $\overrightarrow{\theta_{n-1}\theta_n}$ é paralela ao eixo u , de modo que no ponto de transição entre os elementos imediatamente anterior e posterior e o próprio *Loop* não invertido a continuidade do ângulo de rolagem seja ao menos C^1 .

⁴ Disponível em: <<https://rcdb.com/1148.htm#p=37928>>. Acesso em: 27/04/2018.

⁵ Disponível em: <<https://rcdb.com/3866.htm#p=24218>>. Acesso em: 08/10/2019.

Figura 5.33 – Ângulo de rolagem ao longo de um *Loop* não invertido.

Fonte: Autor.

Na Fig. 5.34 é gerado o sistema referencial e os trilhos para uma montanha-russa sentada ao longo de um *Loop* não invertido.

Figura 5.34 – Modelagem de um *Loop* não invertido.

- (a) O sistema referencial ao longo da curva de referência. (b) Trilhos gerados para uma montanha-russa sentada.

Fonte: Autor.

Outro elemento comum é o *Heartline Roll*, que consiste numa rolagem dos trilhos ao longo de um trecho em linha reta de $H(u)$ (Fig. 5.35a). Já em um *Zero-G Roll*, a mesma rolagem de 360° é realizada enquanto o trem percorre uma colina, fazendo com que o efeito centrífugo das acelerações centrípetas induzidas no topo da colina anulem a aceleração da gravidade, de modo que os passageiros se sintam sem peso enquanto estão de ponta-cabeça (Fig. 5.35b). As Figs. 5.36 e 5.37 mostram os modelos de um *Heartline Roll* e de um *Zero-G Roll*.

Figura 5.35 – Os diferentes elementos de montanhas-russas: parte II.

(a) *Heartline Roll*. Fonte: Marden⁶.(b) *Zero-G Roll*. Fonte: Engelen⁷.Figura 5.36 – Modelagem de um *Heartline Roll*

(a) O sistema referencial ao longo da curva de referência.

(b) Trilhos gerados para uma montanha-russa sentada.

Fonte: Autor.

A projeção Z da aceleração resultante ao longo de $H(u)$ é apresentada na Fig. 5.38.

5.3 Composição de um circuito de montanha-russa e análise das acelerações resultantes

Um circuito convencional de montanha-russa é composto por uma estação de embarque, uma colina de elevação, quedas, curvas, elementos de montanhas-russas e uma sessão de freios.

Considere-se que a velocidade em cada ponto de um circuito de montanha-russa, medida ao longo de sua curva de referência, seja aproximada pelas relações de conservação de energia, considerando-se agora o trabalho do atrito e das forças de arrasto aerodinâmico.

⁶ Disponível em: <<https://rcdb.com/3475.htm#p=76984>>. Acesso em: 27/04/2018.

⁷ Disponível em: <<https://rcdb.com/764.htm#p=48822>>. Acesso em: 27/04/2018.

Figura 5.37 – Modelagem de um *Zero-G Roll*

- (a) O sistema referencial ao longo da curva (b) Trilhos gerados para uma montanha-russa sentada.

Fonte: Autor.

Figura 5.38 – Acelerações resultantes em um *Zero-G Roll*.

Fonte: Autor.

Se um carro for considerado pontual, pode-se expressar essa relação como

$$EC_{z_0} + EP_{z_0} = EC_{(u)} + EP_{(u)} + W_{z_0 \rightarrow (u)}, \quad (5.11)$$

onde z_0 corresponde à cota máxima da colina de elevação. O trabalho entre os pontos z_0 e $H(u)$, $W_{z_0 \rightarrow (u)}$ corresponde à soma do trabalho das forças de atrito ao trabalho do arrasto aerodinâmico. O atrito pode ser dividido entre o atrito de rolamento (das rodas sobre os trilhos) e o dos rolamentos (componentes mecânicos).

O trabalho do atrito de rolamento das rodas sobre os trilhos pode ser expresso por

$$W_{R1} = \int F_{R1}(s) ds, \quad F_{R1}(s) = \frac{N(s)\mu_1}{r_R}, \quad (5.12)$$

onde $N(s)$ é a força normal, μ_1 é um coeficiente de rolagem com *dimensão de comprimento*, r_R é o raio da roda e s a distância percorrida. Um valor aceitável para μ_1 nessas condições

é de $0,256 \text{ mm}$ [HIBBELER, 2007]. Os raios das rodas variam normalmente entre 100 e 300 mm .

O trabalho do atrito dos rolamentos mecânicos pode ser expresso por

$$W_{R2} = \int F_{R2}(s)ds, \quad F_{R2}(s) = N(s)\mu_2 \quad (5.13)$$

onde μ_2 é o coeficiente de atrito dos rolamentos, normalmente $0,001 < \mu_2 < 0,005$.

Já o trabalho da resistência do ar é dado por

$$W_{AR} = \int \frac{1}{2}\rho v(s)^2 AC_D ds \quad (5.14)$$

onde ρ é a densidade do ar, A a área frontal de um carro e C_D o coeficiente de forma dos trens. Valores típicos são $\rho_{AR} = 1,2928 \text{ kg/m}^3$, $C_D = 1,8$ [HUNT, 2018] e $A = 1 \text{ m}^2$.

Na Fig. 5.39, um circuito do sexto grau, percorrido à velocidade aproximada pela eq. 5.11 para trens sentados é gerado.

Neste exemplo, sucessivos pontos $C_{T1}(s)$ e $C_{T2}(s)$ foram ligados por uma reta, para simular a viga que une esses pontos em uma montanha-russa real. Além disso, retas verticais entre os trilhos e o “solo” foram geradas, para facilitar a visualização em 3D e simular os suportes de uma montanha-russa real. O ângulo de rolagem adotado na curva de inclinação negativa foi de -60 graus (não interpolado).

Figura 5.39 – Um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto: I.

Fonte: Autor.

Figura 5.40 – Um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto: II.

- (a) Os principais elementos do circuito são: (1) estação de embarque, (2) colina de elevação, (3) Zero-G Roll, (4) Saca-rolhas, (5) curva com inclinação negativa e (6) curva em hélice.

(b) Plano $x - y$. (c) Plano $x - z$.

Fonte: Autor.

Nas Fig. 5.40a, Fig. 5.40b e Fig. 5.40c são apresentados os elementos do circuito e as vistas nos planos $x - y$ e $x - z$, respectivamente.

As projeções X , Y e Z da aceleração resultante ao longo de $H(u)$ em relação ao tempo do percurso são apresentadas na Fig. 5.41.

Figura 5.41 – Acelerações resultantes em um circuito gerado a partir do método do ângulo de rolagem imposto. A região dos elementos do percurso são indicadas conforme a Fig. 5.40a. Note-se que a_Y não é nula em (3), (4) e (5).

(a) Entre $t = 0$ e $t = 45s$.

(b) Entre $t = 45$ e $t = 90s$.

Fonte: Autor.

É possível observar na Fig. 5.41 que nos elementos em que o ângulo de rolagem é imposto, e somente neles, a aceleração lateral é diferente de zero. No demais momentos essa aceleração atinge picos de até $2g$.

No início do elemento (3), aos 55 segundos, a aceleração $a_Y = 1,5 g$ combina-se com as acelerações $a_Z = 1,5 g$ e $a_X = -0,7 g$. Nesse caso, aplicando-se o critério dado pela

eq. (2.5),

$$\left(\frac{-0,7}{-1,5}\right)^2 + \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1,5}{4}\right)^2 = 0,9209, \quad (5.15)$$

e, portanto, o critério é aceito. As acelerações admissíveis escolhidas são conservadoras.

No final do elemento (3), aos 58 segundos, a aceleração $a_Y = -2 \text{ g}$ combina-se com as acelerações $a_Z = 2 \text{ g}$ e $a_X = 1 \text{ g}$. Nesse caso, aplicando-se o critério dado na eq. (2.5),

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{-2}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 1,3611. \quad (5.16)$$

Assim nesse ponto do percurso o critério não é aceito. A saída do elemento (3) deve ser reprojeta, possivelmente no sentido de diminuir as acelerações laterais a_Y .

Em nenhum momento a arrancada atinge valores próximos aos limites estipulados. Um dos momentos de maiores arrancadas é aquele aos 47 segundos, quando o trem termina de descer a primeira queda e entra na curva à esquerda. Nesse momento, o valor da aceleração no eixo Z passa de $-0,2g$ para cerca de $3,8g$ em um segundo, ou $j = 4,0 \text{ g/s}$.

Como a aceleração no eixo Z atinge valores negativos em diversos pontos do circuito, aplica-se o critério adicional para a reversão de acelerações nessa direção, dado na Fig. 2.10. Após o momento de aceleração negativa aos 58 segundos (Zero-G Roll), a aceleração torna-se positiva com intensidade de aproximadamente $2,5g$. O tempo mínimo de aceleração entre 0 e $2g$ deve ser de $133ms$. No caso analisado ele é muito maior, cerca de 0,8 segundo. O mesmo vale para os demais momentos onde a aceleração no eixo Z chega a valores negativos. O critério adicional para esse momento é apresentado na Fig. 5.42.

Figura 5.42 – Critério adicional para a reversão de acelerações na direção Z aplicado ao Zero-G Roll.

Fonte: Autor.

6 Conclusão

As montanhas-russas são as atrações mais procuradas pelos visitantes dos parques de diversões. Fora dos parques esses equipamentos ocupam espaço no imaginário popular, seja como metáfora para os altos e baixos da vida, seja como uma forma de alusão a situações de extrema de emoção ou de eminente perigo.

O projeto geométrico consiste no passo inicial para a criação de uma montanha-russa. Das formas de seus elementos derivam as principais características dos passeios: as acelerações a que são submetidos os passageiros. As acelerações e as variações das acelerações são limitadas por normas nacionais e internacionais, baseadas em pesquisas acumuladas ao longo dos últimos anos. Para além de sua característica normativa, esse limite torna-se fundamento importante na concepção de equipamentos mais seguros e confortáveis para os visitantes.

As acelerações promovem um papel central na contribuição que este trabalho traz ao projeto de montanhas-russas: a dedução de um sistema referencial adaptado, derivado do Triedro de Frenet. Assim, foi possível obter um Triedro que, por sua própria natureza, anula as projeções laterais das forças resultantes, o que produz circuitos mais confortáveis e, sobretudo, de acelerações mais contínuas. Esse Triedro pode ser aplicado para o projeto de rodovias e ferrovias, já que ele determina o ângulo de inclinação lateral dos trilhos de modo a evitar o risco de capotamento. Outra vantagem é a de que o Triedro pode ser calculado mesmo nos pontos de inflexão e de curvatura nula. Observa-se contudo que, como esse sistema é obtido a partir da projeção da aceleração da gravidade em planos normais, na situações em que essas entidades são ortogonais, i.e., quando $\dot{H}(u) \wedge \vec{a}_g \approx 0$, a projeção é nula e, portanto, não pode ser calculada uma direção. Por isso, se nessas regiões a curvatura também for pequena ou nula, o cálculo de N_g fica instável ou até mesmo comprometido.

Bishop [1975] demonstrou que existem outros sistemas referenciais tangenciais e adaptados além do Triedro de Frenet. Assim, sugere-se que o Triedro definido neste trabalho seja traduzido nos termos do Triedro de Bishop. Essa alteração tem o potencial de corrigir os problemas citados do Triedro aqui desenvolvido.

Um método para a criação de circuitos de força lateral nula foi apresentado. Outro método, para a criação dos chamados elementos de montanhas-russas também foi proposto. Com a adição de uma dimensão extra, as curvas NURBS podem representar a distribuição dos ângulos de rolagem dos trilhos em relação ao Triedro proposto. Aplicando o algoritmo de interpolação de pontos de Maekawa et al. [2009] para a curva dos ângulos de rolagem, obtém-se o valor exato de inclinação desejado nos pontos de controle da curva de referencia.

Em anos recentes desenvolveu-se o Método de Análise Isogeométrica (AIG), que consiste na combinação entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e as NURBS. Nesse método

as NURBS, além de representarem o domínio do problema, definem a base do espaço no qual aproxima-se a solução de uma Equação Diferencial Parcial [GOMES; E., 2017]. Assim, a partir do modelo geométrico NURBS e do modelo dinâmico da estrutura pode-se partir para o problema da análise estrutural Isogeométrica, baseada na geometria exata de um circuito.

Referências

- ABNT. *Equipamentos de parques de diversão - Parte 2: Requisitos de segurança do projeto e de instalação*. 2011. Citado na página 20.
- AECOM/TEA. *Theme Index and Museum Index: The Global Attractions Attendance Report 2016*. [S.l.]: Themed Entertainment Association (TEA), 2016. Citado na página 13.
- ASTM. *Practice for Classification, Design, Manufacture, Construction, and Operation of Water Slide Systems*. 2008. Citado na página 20.
- ASTM. *Standard Practice for Manufacture, Construction, Operation, and Maintenance of Aquatic Play Equipment*. 2009. Citado na página 20.
- BISHOP, R. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, v. 82, p. Mathematical Association of America-, 03 1975. Citado 3 vezes nas páginas 17, 35 e 58.
- BOLLIGER, W.; MABILLARD, C. *Amusement ride of the roller coaster type*. 5,272,984. 1993. Citado na página 18.
- BRACCESI, F. C.; CIANETTI. Development of a procedure for the structural design of roller coaster structures: The rails. *Engineering Structures*, n. 93, p. 13–26, 2015. Citado na página 18.
- BRAKSIEK, R. J.; ROBERTS, D. J. Amusement park injuries and deaths. *Annals of Emergency Medicine*, p. 65–72, 2002. Citado na página 19.
- BÉZIER, P. Définition numérique des courbes et surfaces ii. *Automatisme*, n. XII, p. 17–21, 1967. Citado na página 16.
- BÉZIER, P. *Essay de définition numérique des courbes et des surfaces expérimentales*. Tese (Doutorado) — University of Paris VI, 1977. Citado na página 16.
- CARROLL, D.; KÖSE, E.; STERLING, I. Improving frenet’s frame using bishop’s frame. *Journal of Mathematics Research*, v. 5, 11 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 37.
- CARTMELL, R. *The Incredible Scream Machine - History of the Roller Coaster*. 1. ed. [S.l.]: Amusement Park Books, Inc, 1987. v. 1. Citado na página 9.
- CURRY, H. Review. *Math. Tables Aids Comput.*, n. 2, p. 167–169, 211–213, 1947. Citado na página 16.
- DIN. *Temporary structures; code of practice for design and construction*. [S.l.], 1983. Disponível em: <<https://www.beuth.de/en/standard/din-4112/1017703>>. Citado na página 19.
- DURAN, G. C.; TSUZUKI, M. de S. G. Procedural method for finding roller coaster rails centerlines based on heart-line acceleration criteria. *IEEE/IAS International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*, n. 13, p. 1341 – 1348, 2018. Citado na página 46.

- EUROPEAN STANDARDS. *Fairground and amusement park machinery and structures - Safety*: a. [S.l.], 2005. Disponível em: <<https://www.en-standard.eu/din-en-13814-fairground-and-amusement-park-machinery-and-structures-safety/>>. Citado na página 19.
- FARIN, G. A history of curves and surfaces in cagd. In: _____. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. 1. ed. [S.l.]: Elsevier, 2002. cap. 1. Citado na página 16.
- FRENET, J. *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes quelconques. Programme d'une thèse sur quelques propriétés des courbes à double courbure*. Tese (Doutorado) — University of Toulouse, 1847. Citado na página 16.
- GOMES, H.; E., G. Comparação entre o método de análise isogeométrica e o método dos elementos finitos. *TEMA (São Carlos)*, scielo, v. 18, p. 85 – 103, 04 2017. ISSN 2179-8451. Citado na página 59.
- HIBBELER, R. *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*. 11. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2007. 441-442 p. Citado na página 54.
- HUNT, K. *Design Analysis of Roller Coaster*. Dissertação (Mestrado) — Worcester Polytechnic Institute, 2018. Citado na página 54.
- KRAUTTER, J.; PARIZOT, S. Système d'aide à la définition et à l'usinage des surfaces de carrosserie. *Journal de la SIA*, n. 44, p. 581–586, 1971. Special Issue: La commande numérique, P. Bézier, guest editor. Citado na página 16.
- KUO, C.; WU, L. C.; YE, P. P.; LAKSARI, K.; CAMARILLO, D. B.; KUHL, E. Pilot findings of brain displacements and deformations during roller coaster rides. *Journal of Neurotrauma*, n. 34, p. 3198–3205, 2017. Citado na página 19.
- MAEKAWA, T.; GOFUKU, S. ichi; TAMURA, S. Point-tangent/point-normal b-spline curve interpolation by geometric algorithms. *Computer-Aided Design*, n. 41, p. 412–422, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 58.
- MILLER, J. *Pleasure-Railway Structure*. 1,319,888. 1919. Citado na página 11.
- PIEGL, L.; TYLLER, W. *The NURBS Book*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997. v. 1. Citado na página 27.
- ROHDE, M.; KUPERS, H. Limitations for accelerations on humans for amusement park rides in the new revision of the international standards. 2012. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 21, 22 e 23.
- SAWYER, C. *Roller Coaster Tycoon 2*. [S.l.], 2002. Citado na página 10.
- SCHILKE, A.; GRUBB, F.; BACHTAR, D. *Rolling vehicle track*. US 8,590,455 B2. 2013. Citado na página 18.
- SCHOENBERG, I. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, n. 4, p. 45–99, 1946. Citado na página 16.
- SEQUEIRA, B.; POMBO, J.; ANTUNES, P.; AMBROSIO, J.; WOODWARD, P. K. Development of a methodology for the geometric parameterization of three-dimensional tracks. *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, v. 108, n. 133, 2015. Citado na página 18.

SMITH, D. H.; MEANEY, D. F. Roller coasters, g forces, and brain trauma: On the wrong track? *Journal of Neurotrauma*, v. 19, n. 10, p. 1116–1121, 2002. Citado na página 19.

SMITH, T. *Human Factors Review of Restraint Failures on Mobile Amusement Rides*. 2005. Citado na página 18.

THOMPSON, L. M. *Gravity Switch Back Railway*. 332,726. 1885. Citado na página 18.

TÄNDL, M.; KECSKEMÉTHY, A. An object oriented approach for robust guided spatial motions. *Proceedings of IDETC/CIE 2005*, ASME, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 37.

YAMAGUCHI, F. *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.