Artur Siqueira Nóbrega de Freitas

**Análise Estrutural e de Estabilidade do
Vaso de Pressão de um AUV**

São Paulo

2017

Artur Siqueira Nóbrega de Freitas

**Análise Estrutural e de Estabilidade do Vaso de
Pressão de um AUV**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para Obtenção
do Título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Ettore Apolônio de
Barros

São Paulo
2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Freitas, Artur Siqueira Nóbrega de
Análise Estrutural e de Estabilidade do Vaso de Pressão de um AUV / A.
S. N. Freitas -- versão corr. -- São Paulo, 2017.
135 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Estabilidade Estrutural 2.Flambagem 3.Vaso de Pressão
4.Submersíveis não tripulados I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e ao meu irmão pelo apoio e carinho. Aos amigos do laboratório de Veículos Não Tripulados (João Dantas, Lucas Machado, William Caetano, Persing Cardenas, Rodrigo Diana e Franco Picarelli, Sarah Pérez e Igor Silva) pelo companheirismo e pela colaboração durante o dia a dia. Ao Dr. Alexander Alfonso Alvarez pela paciência e perseverança ao longo deste trabalho.

Resumo

O planeta Terra tem aproximadamente três quartos submersos em água, ainda assim, estima-se que somente são conhecidos 5% dos mares e oceanos. Nas últimas décadas, os AUVs (Autonomous Underwater Vehicles) se converteram em uma ferramenta útil para a exploração dos oceanos por levar a bordo vários equipamentos com um relativo baixo custo de operação.

A parte estrutural dos AUVs, usualmente cascas cilíndricas, tem sido estudada. De modo geral, os objetivos desses estudos visam a manter a rigidez e deixar a estrutura mais leve, sob o critério de resistência a flambagem. A falha por flambagem, normalmente, ocorre antes da falha por resistência do material em cascas devido à sua geometria e à influência de imperfeições iniciais.

Uma forma de aumentar a rigidez das cascas é o uso de enrijecedores, os quais geralmente são soldados à casca. No entanto, o uso desses enrijecedores em um veículo de pequeno porte diminui o espaço utilizados por diferentes dispositivos e instrumentos do veículo, além de resultar em possíveis inconvenientes na fabricação, tais como aumento do custo e produção de tensões residuais relativas aos processos de soldagem. Portanto, alternativas ao enrijecedor convencional devem ser buscadas para esse tipo de veículo.

É possível substituir os enrijecedores convencionais por uma estrutura interna ao vaso de pressão e comum em submersíveis, a prateleira de acomodação da eletrônica. Essa estrutura, chamada aqui de enrijecedores deslizantes, possui cavernas circunferenciais que podem fornecer rigidez à casca e evitar os inconvenientes de redução de volume e de fabricação que os enrijecedores convencionais trazem. No entanto, tal substituição para o aumento de rigidez ainda não foi analisada.

Portanto, neste trabalho se propõe analisar o comportamento do enrijecedor deslizante quando utilizado em substituição ao enrijecedor convencional, considerando que ambos fornecem resistência à compressão embora não apresentem as mesmas restrições de graus de liberdade. A análise é feita através de métodos analíticos e numéricos, tipicamente utilizados no estudo de enrijecedores convencionais.

Abstract

The planet Earth has about three quarters of water, yet it is estimated that only 5% of the seas and oceans are known. In the last decades, the AUVs have become useful tools for the exploration of the oceans by carrying on board several equipment with a relative low cost of operation.

The structural part of the AUV's, usually cylindrical shells, has been studied as well. In general, the objectives of these studies are to maintain rigidity and to leave the structure lighter, under the criterion of buckling resistance. The buckling failure occurs prior to failure by yielding due to its geometry and the influence of initial shell imperfections.

One way to increase the stiffness of the shells is to use stiffeners, which are usually welded to the shell. However, the use of these stiffeners in a small vehicle reduces the space used for different devices and instruments of the vehicle, in addition there are manufacturing drawbacks as residual stresses related to the welding processes. Therefore, alternatives to the conventional stiffener should be sought for this type of vehicle.

It is possible to replace conventional stiffeners by an internal structure to the pressure vessel and common in submersibles, the shelf of accommodation of the electronics. This structure, referred to here as sliding stiffeners, has circumferential frame bulkheads that can provide stiffness to the shell and avoid the drawbacks of volume reduction and fabrication that conventional stiffeners bring. However, such substitution for increased rigidity has not yet been analyzed.

Therefore, in this work it is proposed to analyze the behavior of the sliding stiffeners when used in substitution of the conventional stiffeners, considering that both provide compressive strength although they do not present the same restrictions of degrees of freedom. The analysis is done by analytical and numerical methods, typical of conventional stiffeners.

Key-words: Unmanned Underwater Vehicle, External Pressure Vessel, Buckling.

Sumário

	Sumário	7
	Lista de ilustrações	9
1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Veículos autônômicos subaquáticos	16
2	ESTABILIDADE ESTRUTURAL	19
2.1	Evolução da teoria de estabilidade de cascas	19
2.2	Fenômenos de instabilidade estrutural	25
2.2.1	Instabilidade por ponto limite (<i>snap-through</i>)	25
2.2.2	Instabilidade por bifurcação	26
2.2.2.1	Ponto de bifurcação assimétrico	27
2.2.2.2	Ponto de bifurcação simétrico instável	27
2.2.2.3	Ponto de bifurcação simétrico estável	28
2.2.3	Sensibilidade à imperfeição	29
2.2.4	Comportamento das cascas	30
2.3	Critérios estáticos	31
2.3.1	Método energético	31
2.3.2	Método equilíbrio	32
2.3.3	Cálculo da carga crítica para casca sem enrijecedores	33
2.3.4	Cálculo da carga crítica para casca com enrijecedores	35
3	ANÁLISE DE VASOS DE PRESSÃO EXTERNA UTILIZA- DOS EM AUVS	38
3.1	Ferramenta para o auxílio no projeto estrutural de um AUV	38
3.1.1	Funcionamento da ferramenta	39
3.1.2	Procedimento de cálculo analítico do algoritmo	41
3.2	Comparação com resultados obtidos através do método dos elementos finitos e com resultados experimentais	44
3.2.1	Comparação com análise linear de flambagem	44
3.2.2	Comparação com análise geometricamente não linear	47
3.2.3	Comparação com dados experimentais	52
3.3	Proposta de critério para projeto	53
4	ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE ENRIJECEDORES NO VASO DE PRESSÃO DE UM AUV	57

4.1	Análise da casca com enrijecedores convencionais	57
4.1.1	Análise linear de flambagem	58
4.1.2	Análise geometricamente não linear	59
4.1.3	Comparação dos resultados para o enrijecedor convencional com dados experimentais da literatura	60
4.2	Análise da casca com as cavernas da prateleira	61
4.2.1	Análise linear de flambagem	63
4.2.2	Análise geometricamente não linear	65
4.2.3	Comparação das cavernas da prateleira com enrijecedores convencional	69
5	CONCLUSÕES	75
5.1	Sugestões de trabalhos futuros	76
	REFERÊNCIAS	77
A	MÉTODO DE CÁLCULO DA PRESSÃO DE FLAMBAGEM	84
A.1	Flexão de uma barra curva com eixo circular	84
A.2	Flambagem de anéis circulares e tubos longos sob pressão ex- terna uniforme	90
A.3	Deformação de um elemento de casca	94
A.4	Caso geral de deformação de uma casca cilíndrica	99
A.5	Flambagem de uma casca cilíndrica sujeita a uma pressão hi- drostática	105
A.6	Deformação simétrica de uma casca esférica	110
A.7	Flambagem de uma casca esférica uniformemente comprimida	113
B	ESTABILIDADE ESTRUTURAL: DESENVOLVIMENTOS .	117
B.1	Análise da estabilidade	117
B.1.1	Estabilidade de um estado de equilíbrio	117
B.1.2	Estabilidade de uma trajetória de equilíbrio	120
B.1.3	Instabilidade por ponto limite (<i>snap-through</i>)	121
B.1.4	Instabilidade por bifurcação	125
B.1.4.1	Ponto de bifurcação assimétrico	126
B.1.4.2	Ponto de bifurcação simétrico	130
B.1.4.3	Ponto de bifurcação simétrico estável	134

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – AUV Pirajuba (fonte: autor).	13
Figura 1.2 – AUV Gavia, configuração estanque (fonte: teledynemarine.com).	13
Figura 1.3 – AUV Odissey, configuração <i>free flooded</i> (fonte: auvac.org).	14
Figura 1.4 – Torre de eletricidade colapsada. Munsterland, Alemanha (fonte: No- gueira [8]).	14
Figura 2.5 – Vista da seção lateral da casca cilíndrica com enrijecedor circunferencial (fonte: autor).	22
Figura 2.6 – Curva de ponto limite (fonte: adaptado de Thompson [48]).	25
Figura 2.7 – Características gerais do ponto de bifurcação (fonte: adaptado de Camotim [31]).	26
Figura 2.8 – Ponto de bifurcação assimétrico (fonte: adaptado de Thompson [48]).	27
Figura 2.9 – Ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: adaptado de Thompson [48]).	28
Figura 2.10–Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: adaptado de Thompson [48]).	28
Figura 2.11–Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: adaptado de Bushnell [29]).	30
Figura 2.12–Representação do comportamento da energia potencial ao redor de um estado de equilíbrio (fonte: adaptado de Camotim [31]).	31
Figura 2.13–Comparação entre os modelos para cascas cilíndricas sob pressão hi- drostática (fonte: autor).	35
Figura 3.14–Diagrama de blocos da ferramenta numérica desenvolvida (fonte: autor).	39
Figura 3.15–Interface inicial do programa (fonte: autor).	39
Figura 3.16–Interface de cálculo estrutural do programa (fonte: autor).	40
Figura 3.17–Modelo CAD em 3D do vaso gerado pela ferramenta (fonte: autor).	41
Figura 3.18–Simulação de flambagem linear de um vaso cilíndrico (AL5456-H111, fonte: autor).	45
Figura 3.19–Gráfico pressão crítica <i>vs.</i> relação L/D (fonte: autor).	46
Figura 3.20–Gráfico pressão crítica <i>vs.</i> relação h/D (fonte: autor).	47
Figura 3.21–Primeiro modo de flambagem imposto com 35% da espessura (fonte: autor).	48
Figura 3.22–Simulação geometricamente não linear de um vaso cilíndrico (AL5456- H111, fonte: autor).	49
Figura 3.23–Comparação da influência na carga crítica para diferentes valores de imperfeição (fonte: autor).	50
Figura 3.24–Curva P_s/P_c <i>vs.</i> δ/h para a casca cilíndrica, (fonte: autor).	51

Figura 3.25—Comparação entre dados experimentais e as simulações não lineares de um vaso cilíndrico (fonte: autor).	53
Figura 3.26—Avaliação do critério proposto (fonte: autor).	56
Figura 4.27—Análise linear de flambagem da casca com enrijecedores (fonte: autor).	59
Figura 4.28—Curvas de pressão pela deformação para a casca com enrijecedores com diferentes valores de imperfeição (fonte: autor).	60
Figura 4.29—Comparação com dados experimentais obtidos na literatura (fonte: autor).	61
Figura 4.30—Prateleira de eletrônica e caverna do AUV Pirajuba (fonte: autor).	62
Figura 4.31—Configurações da casca: a) casca com 3 cavernas e 400 mm entre si, b) 3 cavernas com $L_f = 300$ mm e c) 4 cavernas com 168 mm entre si (fonte: autor).	63
Figura 4.32—Simulação do vaso enrijecido com 3 cavernas ($L_f = 300$ mm, fonte: autor).	64
Figura 4.33—Simulação do vaso enrijecido com 4 cavernas ($L_f = 168$ mm, fonte: autor).	65
Figura 4.34—Modelo de elementos finitos do vaso enrijecido (fonte: autor).	65
Figura 4.35—Simulação do vaso enrijecido (fonte: autor).	66
Figura 4.36—Simulação do vaso enrijecido (fonte: autor).	67
Figura 4.37—Efeito do número de cavernas na casca (fonte: autor).	68
Figura 4.38—Modelos: a) casca com enrijecedores convencionais, b) casca com anéis removíveis, c) casca com 4 cavernas com $L_f = 168$ mm (fonte: autor).	69
Figura 4.39—Simulações da casca com enrijecedores convencionais e anéis removíveis (fonte: autor).	70
Figura 4.40—Comparação entre a casca enrijecida com enrijecedores convencionais e cavernas da prateleira (fonte: autor).	71
Figura 4.41—Comparação entre a casca não enrijecida e cascas com diferentes enrijecedores (fonte: autor).	72
Figura A.42—(a) Barra curva em estado deformado, (b) Detalhe do trecho mn (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	85
Figura A.43—(a) Anel esbelto sob compressão e (b) arco com extremidades articuladas (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	88
Figura A.44—Arco circular sob pressão externa uniforme (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	91
Figura A.45—(a) Elemento de casca, (b) vista do plano xz (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	95
Figura A.46—Referência de casca cilíndrica (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	99
Figura A.47—(a) Forças resultantes, (b) momentos (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	100

Figura A.48—Ângulos de um elemento infinitesimal de uma casca cilíndrica (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	101
Figura A.49—Cilindro que defflete em m semi ondas de seno longitudinais e n ondas circunferenciais (fonte: adaptado de Camotim [31]).	109
Figura A.50—Elemento de casca esférica, forças e momentos atuantes (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).	111
Figura B.51—Arco simples (fonte: autor).	122
Figura B.52—Características do ponto limite imperfeito (fonte: autor).	123
Figura B.53—Características do ponto limite imperfeito (fonte: autor).	125
Figura B.54—Barra articulada: exemplo de comportamento assimétrico (fonte: autor).	127
Figura B.55—Comportamento assimétrico (fonte: autor).	128
Figura B.56—Exemplo de comportamento simétrico instável (fonte: autor).	130
Figura B.57—Exemplo de comportamento simétrico instável (fonte: autor).	131
Figura B.58—Comportamento simétrico instável (fonte: autor).	132
Figura B.59—Ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: autor).	133
Figura B.60—Comportamento de uma estrutura perfeita com ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: autor).	134
Figura B.61—Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: autor).	135

1 Introdução

Aproximadamente três quartos da superfície do planeta está submersa em água. Ainda assim, existem mais explorações espaciais que subaquáticas, visto que o ser humano não conhece mais que 5% do território submerso [1]. Nas últimas décadas, uma busca pelo entendimento do mundo submerso culminou no desenvolvimento de robôs subaquáticos [2], os quais poderiam realizar as tarefas que o ser humano não seria capaz.

Existe um grupo de robôs submarinos conhecidos como veículos não tripulados subaquáticos (*Unmanned Underwater Vehicle*, UUV é a sigla em inglês). Essa classificação, UUV, inclui os veículos subaquáticos controlados remotamente (*Remotely Operated Vehicles*, ROV é a sigla em inglês), os quais são controlados e alimentados a partir da superfície por um operador através de um cabo umbilical. Inclui, também, os *Autonomous Underwater Vehicle* (AUV, é a sigla em inglês), robôs que navegam embaixo da água sem necessitar de piloto humano.

Os AUVs abriram portas para uma nova plataforma de pesquisa e exploração, pois se tornaram possíveis novas missões de média ou longa duração e de baixo custo, quando comparadas a missões tripuladas, sem expor vidas humanas a riscos. Um interesse nesse tipo de veículo é notado nas áreas de oceanografia [2], de extração de petróleo offshore [3], de aplicações militares [4], entre outras. Por esse motivo, vários AUVs foram desenvolvidos com diferentes geometrias, profundidades de operação, fontes de energia e tipos de propulsão [5].

No Brasil, um AUV vem sendo desenvolvido no Laboratório de Veículos Não Tripulados da Escola Politécnica da USP, chamado de Pirajuba, o qual é mostrado na Figura 1.1. O projeto do AUV Pirajuba teve início em 2008 com o objetivo de servir de plataforma de testes para pesquisas nas áreas de dinâmica, controle e navegação de veículos submarinos [6]. Desde então, seus principais componentes vêm sendo aperfeiçoados. Em 2013, passou a ser adaptado para missões oceanográficas e de monitoramento ambiental, com objetivo de facilitar o mapeamento do solo marinho, além de ser usado em trabalhos de inspeção de instalações submersas, como oleodutos, gasodutos e emissários submarinos [7].

Os AUVs podem ser classificados, quanto à sua estrutura, nos tipos estanque (Figura 1.2) e "*free flooded*" ou inundável (Figura 1.3). Os AUVs estanques são concebidos com seções conectadas entre si ou um único vaso de pressão, formando um casco externo com características hidrodinâmicas. O projeto e a manufatura dessa configuração são mais elaborados, pois as geometrias dos cascos diferem daquelas convencionais (cilíndricas, esféricas ou cônicas). Para a configuração "*free flooded*", os vasos de pressão externa com geometrias convencionais são envolvidos por um casco externo. Geralmente, este casco externo é fabricado em fibra de vidro e com uma geometria mais complexa por questões de hidrodinâmica. A configuração "*free flooded*" permite a entrada de água entre os vasos de

Figura 1.1 – AUV Pirajuba (fonte: autor).

Figura 1.2 – AUV Gavia, configuração estanque (fonte: teledynemarine.com).

pressão e o casco externo, o que exige o projetista de dimensionar o casco hidrodinâmico à pressão hidrostática.

Se por um lado, a solução *"free flooded"* simplifica o projeto estrutural, sua implementação implica em desvantagens comparativamente à solução estanque devido a necessidade do veículo ser inundado para depois submetê-lo a procedimentos de ajustes em seus sistemas de lastro e flutuabilidade e, assim, garantir a estabilidade de operação. Além disso, há uma maior área do casco sujeita a cuidados com a vedação para que não ocorra absorção de água, principalmente em missões longas ou em altas profundidades.

A solução estanque, por outro lado, permite que grande parte do trabalho de balanceamento hidrostático do veículo seja feito com precisão na fase de projeto, principalmente hoje em dia, com a ajuda de ferramentas CAD que promovem a estimativa de massa e volume dos mais variados componentes do veículo com facilidade. Dessa maneira, é possível lançar o AUV diretamente ao meio fluido para que o mesmo inicie imediatamente a sua missão.

O AUV estanque é considerado um vaso de pressão modular, enquanto a configuração inundável possui vasos internamente. As duas configurações devem ser projetadas para

Figura 1.3 – AUV Odissey, configuração *free flooded* (fonte: auvac.org).

diferentes profundidades e deve-se considerar o tipo de estrutura e material para que a embarcação tenha um maior número de equipamentos, utilizando a mesma potência.

Os vasos do veículo são submetidos a uma pressão hidrostática externa, podendo ocorrer o fenômeno de instabilidade estrutural, o qual depende das propriedades do material, da geometria do vaso e da profundidade de operação. O vaso deve resistir a este esforço sem uma deformação excessiva, evitando a perda de funcionalidade, danos no equipamento interno ou, até mesmo, a perda do veículo. O efeito da instabilidade deve ser considerado no projeto, pois suas consequências podem ser desastrosas como a mostrada na Figura 1.4 [8], onde as estruturas treliçadas das torres de energia não suportaram o carregamento devido ao peso adquirido com o acúmulo de neve e gelo.

Figura 1.4 – Torre de eletricidade colapsada. Munsterland, Alemanha (fonte: Nogueira [8]).

Os vasos de pressão de um AUV podem ser representados como estrutura de casca fina, pois apresentam espessura pequena, comparada com as outras dimensões, e reagem a esforços externos através de uma parcela predominante de tração e compressão, além de uma pequena parcela de flexão, ambas internamente. Tratando os vasos como cascas, seu dimensionamento se torna um processo que pondera suas dimensões, material e carga crítica suportável, existindo a possibilidade de gerar modelos de CAD desse vaso para redução de tempo e custos. Essa etapa de dimensionamento do projeto pode ser integrada e automatizada em uma ferramenta numérica que atenda a todos os requisitos de missão e segurança, gerando uma estrutura mais leve que garanta um aumento na carga útil para a potência original do veículo.

Neste trabalho, propõe-se uma análise estrutural e de estabilidade do vaso de pressão do AUV Pirajuba representado como uma casca. Uma análise sob o ponto de vista de projeto é realizada, considerando a integração do dimensionamento e programas de CAD em uma ferramenta numérica para redução de custos, a qual é desenvolvida neste trabalho baseada nas teorias de estabilidade. Os resultados gerados pela ferramenta numérica são comparados com simulações baseadas em elementos finitos. As simulações geometricamente não lineares são realizadas para incluir e analisar os efeitos das imperfeições nas cascas sujeitas à pressão externa uniforme. Dados experimentais, obtidos na literatura, são utilizados para avaliar se as simulações e as respostas da ferramenta são compatíveis com a realidade. Propõe-se uma análise dos critérios de dimensionamento, como escoamento, instabilidade e um sob a perspectiva da falha por vedação. Um estudo de caso com os vasos do AUV Pirajuba é realizado para avaliar a teoria de estabilidade utilizada e analisar novas configurações de enrijecedores internos, visando um aumento de rigidez na casca e, conseqüentemente, alcançar uma maior profundidade de missão ou obter um vaso de menor espessura para a mesma profundidade de missão que o vaso original. Para isso, é analisada a possibilidade de utilizar como enrijecedor interno a estrutura que posiciona os componentes eletrônicos para orientação e navegação do veículo, chamada de prateleira de eletrônica. As comparações realizadas para a casca sem enrijecedores também são feitas para esta configuração enrijecida.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. Neste capítulo, após uma breve descrição do contexto de AUVs, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre desenvolvimentos dos AUVs.

Apresenta-se, no capítulo 2, uma revisão histórica sobre a estabilidade estrutural das cascas e os critérios para sua definição, assim como, os modelos analíticos que são utilizados e as ferramentas mais utilizadas através do método dos elementos finitos. São descritos os tipos de fenômenos de instabilidade estrutural e é realizada uma análise qualitativa do comportamento das cascas e dos efeitos de imperfeições.

No capítulo 3, é apresentada uma ferramenta numérica para o dimensionamento de cascas através da aplicação dos conceitos de estabilidade e é realizada uma discussão sobre

sua utilização em projetos. A ferramenta é utilizada em uma proposta de redimensionamento do vaso do AUV Pirajuba e esses resultados são comparados com simulações realizadas pelo método dos elementos finitos e com dados experimentais encontrados na literatura. Tais considerações são utilizadas para analisar a influência das imperfeições.

São realizadas, no capítulo 4, análises analítica e numérica sobre uma casca cilíndrica com enrijecedores internos convencionais a fim de analisar o aumento de rigidez fornecido. Propõe-se investigar a utilização da prateleira de eletrônica, que acomoda os sensores e circuitos eletrônicos dentro dos vasos, em substituição aos enrijecedores no projeto da casca. Na sequência são expostas as conclusões do trabalho.

No anexo A se descreve didática e detalhadamente a obtenção das cargas críticas de flambagem para cascas cilíndricas pelos métodos do equilíbrio, baseados nos trabalhos de Timoshenko [9]. No anexo B são detalhados matematicamente os fundamentos da teoria da estabilidade estrutural, abrangendo os pontos de equilíbrio, o comportamento anterior à esses pontos e os critérios para definição da estabilidade. Além disso, é realizada uma análise dos fenômenos de instabilidade e dos efeitos de imperfeições nas cascas através de exemplos simples.

1.1 Veículos autônômos subaquáticos

Esta seção tem como objetivo apresentar os desenvolvimentos sobre AUVs, os quais são uma ótima solução para a exploração e coleta de dados em profundidades maiores que 100 metros [10]. Como dito anteriormente, o desenvolvimento de veículos subaquáticos são impulsionados por pesquisas em diferentes áreas, por exemplo, o veículo AUV Sentry, desenvolvido pelo instituto WHOI (*Woods Hole Oceanographic Institution*), foi utilizado para avaliar as condições da fauna e flora marinha no Golfo do México após o grande vazamento de petróleo que ocorreu na região [11]. O setor militar tem investido nesses veículos para acesso a áreas marinhas hostis e monitoramento das costas [4].

Um dos primeiros AUV é conhecido como SPURV (*Special Purpose Underwater Research Vehicle*), o qual gerou uma grande evolução nas áreas de inteligência artificial e de controle para esse tipo de robô. Após o sucesso deste veículo, uma nova versão foi desenvolvida, o SPURV II, com melhorias no desempenho e autonomia [12].

O AUV SCAT foi desenvolvido em duas versões: a L-1 e a L-2 [13]. A primeira foi utilizada para testar as novas tecnologias voltadas para AUVs, enquanto a segunda foi utilizadas em pesquisas oceanográficas.

Em 1987, o AUV ARCS realizou seu primeiro mergulho. Seus desenvolvedores conseguiram monitorar e controlar o veículo em tempo real, implementar um novo sistema de navegação e testar novos tipos de bateria [14].

Em meados dos anos 1990, foi investigada a possibilidade de utilizar painéis solares em um AUV, chamado SAUV. Esse veículo apresentou autonomia de aproximadamente 30

dias [15].

No início dos anos 2000, o AUV Remus [16] foi apresentado com um grande número de sensores e instrumentos embarcados. A comunicação utilizada nesse veículo foi um dos seus diferenciais e, em suas versões mais recentes, sua modularidade também é destaque.

Também nos anos 2000, começam a ser desenvolvidos AUVs para profundidades altas (por volta de 10000 metros) e o AUV DEPTHX, financiado pela NASA, é um exemplo desses veículos [17]. O instituto WHOI desenvolveu o híbrido Nereus [18] para profundidades de até 11000 metros. Por ser híbrido, o veículo tem a opção de ser controlado remotamente via cabo umbilical como um ROV ou navegar livremente como um AUV.

O centro de Pesquisa NOC (*National Oceanographic Centre*) desenvolveu o *Autosub Long Range* com grande autonomia. O veículo é equipado com sensores e sistema de propulsão de baixo consumo, gerando uma autonomia de 6000 km ou seis meses de operação [10].

Os AUVs podem ser divididos em duas novas categorias [2]: os micro AUVs com massa até 20 quilogramas e os mini AUVs com massa de 20 a 100 quilogramas. Nesta última categoria se encontram a maioria dos veículos existentes e na primeira categoria estão os AUVs biônicos que são baseados no conceito de que um peixe tem habilidade de acelerar seu movimento sem um esforço muscular significante (paradoxo de Gray). Exemplos de robôs biônicos são o *Tuna Project* [19] e o *AQUA 2* [20].

Para a fabricação de veículos submersíveis, os materiais devem resistir aos esforços e às condições de operação submersa. Um fator importante na seleção de materiais é a relação entre resistência e densidade material, pois, quanto maior essa relação, maior será a carga paga (carga extra) que o veículo pode carregar. Tendo esse parâmetro em vista, atualmente, os principais materiais utilizados no mercado de veículos submarinos são aços de alta resistência, ligas de alumínio, ligas de titânio, materiais compósitos e em alguns casos cerâmicos e poliméricos [21].

Ainda não foi desenvolvido um material que atenda a todos os requisitos do projeto, então, recomenda-se a análise cuidadosa das propriedades e o comportamento do material para selecionar o mais adequado à operação na qual o vaso será utilizado.

A Tabela 1 mostra as propriedades de alguns materiais utilizados na fabricação de vasos de pressão para AUVs.

Dentre os materiais citados, os aços são muito utilizados devido a sua disponibilidade, sua resistência à compressão, seu baixo custo e sua processabilidade. Porém, existe a desvantagem de serem anódicos em relação à maioria das ligas existentes, ou seja, mais suscetível à corrosão quando comparados com outros metais. As ligas de titânio possuem excelente relação resistência por densidade e são ideais nos casos em que a carga paga é um requisito importante, porém seu alto custo pode inviabilizar seu uso. As ligas de alumínio têm baixa densidade em relação ao aço e, também, tem grande

Tabela 1 – Materiais comuns utilizados em vasos de pressão.

	Densidade (g/cm^3)	Tensão de escoamento (MPa)	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson
Alumínio 5456-H111	2,66	230	70,3	0,33
Titânio Ti-6Al-4V	4,43	880	113,8	0,34
AISI 316	8,00	250	193,0	0,30
Aço HY - 100	7,87	689	205,0	0,28
Duplex S32205	7,80	450	200,0	0,30
Superduplex UNS S32750	7,80	450	200,0	0,30
CFRP (fibra de carbono) ^a	1,55	-	100,2	0,25

^a Propriedades relativas a direção longitudinal do material [22], matriz do compósito: resina epóxi, orientação das fibras nas camadas -30, 90, 30, 30, 90,-30.

disponibilidade. Recentemente, novas ligas de aço foram desenvolvidas e aplicadas na indústria *offshore*, os aços duplex [23] e superduplex [24]. Os aços duplex são ligas que apresentam microestruturas bifásica composta pelas fases ferrítica e austenítica e contém 0,3% em peso de nitrogênio na forma atômica. A distribuição volumétrica das fases normalmente é igualitária, ou seja, 50% para cada fase e obtendo elevadas propriedades mecânicas quando comparado com outros materiais. Os aços superduplex apresentam as mesmas propriedades que o duplex, porém com resistência à corrosão maior. Essas ligas tem sido comumente utilizadas nas indústrias químicas, de óleo, gás, papel e celulose, aplicadas principalmente em evaporadores, dutos, unidades de dessalinização e dessulfuração, equipamentos para destilação, tanques de condução, armazenamento de material corrosivo e elementos estruturais nas plataformas de petróleo e outras estruturas offshore [23]. Entretanto, existe uma dificuldade na obtenção dessas ligas que as torna custosas [24].

Outros materiais tem sido investigados para a fabricação de vasos de pressão, como as ligas de magnésio [2] e os compósitos de fibra de carbono [25]. No caso dos micro AUVs, vem sendo investigada a utilização de materiais com propriedades de converter sinais elétricos em vibrações mecânicas [26].

Sabe-se que a maioria dos AUVs atuais são desenvolvidos para profundidades maiores que 300 metros, o que equivale a uma pressão de 30 atmosferas. Por esse motivo, os submersíveis utilizam vasos de pressão para proteger os componentes de inteligência da pressão externa e do contato com a água. Conforme citado, esses vasos podem ser representados como estruturas do tipo casca, pois esse tipo de estrutura tem a propriedade de transferir as pressões normais em tensões similares ao caso estado plano internas [27]. Em outras palavras, a casca converte a carga externa em tensões de membrana compressiva.

A seguir se apresenta uma revisão bibliográfica sobre a estabilidade de cascas e sua análise com o método dos elementos finitos, com o objetivo de desenvolver estruturas mais leves para profundidades menores que 300 metros e, com isso, garantir que o veículo tenha uma gama de missões maior, sem aumento de potência ou de massa.

2 Estabilidade estrutural

Neste capítulo serão apresentados uma evolução histórica da teoria da estabilidade, seus conceitos fundamentais e os fenômenos de instabilidade estrutural estáticos. São discutidos o comportamento particular das cascas utilizadas em vasos de pressão convencionais de AUVs e a influência das imperfeições geométricas nessas cascas. Do mesmo modo, são estudados os critérios para a obtenção das cargas críticas dessas estruturas e os modelos utilizados, os quais são aplicados no dimensionamento de cascas com e sem enrijecedores.

2.1 Evolução da teoria de estabilidade de cascas

Uma revisão bibliográfica e histórica sobre a estabilidade de cascas e sua análise com o método dos elementos finitos, se apresenta a seguir, apresentando resultados que serão aplicados na investigação de vasos de pressão comumente presentes no projeto de AUVs.

Como dito na seção anterior, o vaso de pressão pode ser considerado uma casca fina, pois sua espessura é inferior às outras duas dimensões e a relação espessura pelo raio é menor que 0,1 ($h/R < 0,1$). Se estiver sob pressão externa, estará sujeito à instabilidade estrutural, a qual é caracterizada pela ocorrência de grandes deslocamentos [28]. Para a casca, a análise estática se resume a dois comportamentos: o bifurcacional e o limite [29], apresentados na seção seguinte.

Segundo Mazzilli [30], um dos primeiros estudos sobre estabilidade do equilíbrio está relacionado a Leonhard Euler, em 1744, que obteve analiticamente a carga crítica de flambagem para uma barra sob compressão axial e concluiu que essa é inversamente proporcional ao quadrado de seu comprimento. Em 1788, Lagrange apresentou o método energético, o qual permite generalizações que não são obtidas com facilidade pelas leis de Newton. Em 1885, Poincaré propôs uma teoria geral para a bifurcação do equilíbrio, que viria a ser uma das primeiras teorias de flambagem. Nesse período, as teorias de estabilidade não apresentavam muita coerência entre si nem rigor matemático. Somente em 1892, Liapunov apresenta sua teoria da estabilidade, que representou uma unificação dos procedimentos de diversas áreas do conhecimento, inclusive com o rigor matemático e sistemático exigidos para sistemas discretos.

Segundo Camotim [31], quando a indústria aeronáutica teve grandes evoluções, foram desenvolvidas estruturas muito leves e suscetíveis às instabilidades estruturais, gerando a teoria clássica de estabilidade. Por meio desta, são obtidas as cargas críticas e os modos de instabilidade clássicos quando aplicados os critérios energético e de equilíbrio, detalhados nas próximas seções.

Timoshenko [9] apresentou sua teoria para cascas cilíndricas sob pressões laterais e axiais simultâneas baseada no método do equilíbrio que equipara os esforços internos

e externos da estrutura, aplicando a segunda Lei de Newton, e se tem como resultado um sistema de cuja solução não trivial se obtém a pressão crítica (q_{cr}), considerando os deslocamentos radiais e longitudinais uniformes e o tangencial nulo.

Flugge [32] apresenta um trabalho sobre análise linear de flambagem teórica e experimental, praticamente simultaneamente a Timoshenko, obtendo resultados semelhantes. Donnell [33] apresentou uma formulação distinta que representa a deformação de uma estrutura de casca através do método energético, o qual implica em uma igualdade entre as energias internas da estrutura com os trabalhos de agentes externos de onde se obtém a carga crítica da estrutura quando um ponto estacionário ocorre nessa equação.

Diversos outros autores apresentam modelos para obtenção de carga crítica, como pode ser visto nos compêndios feito por Windenburg e Trilling [34] e Allen e Bunson [35], os quais são analisados posteriormente.

Para estimar o tipo de falha que ocorrerá na estrutura, Windenburg e Trilling [34], também, apresentam um coeficiente de esbeltez (*thinness ratio*, λ_{th}) que permite uma comparação entre cilindros com diferentes comprimentos, diâmetros, espessuras e materiais. Quando $\lambda_{th} < 0,8$ é provável que ocorra falha por escoamento e para $\lambda_{th} \geq 1,2$ é possível que o vaso falhe por instabilidade elástica. O cálculo deste coeficiente é dado por:

$$\lambda_{th} = \sqrt[4]{\frac{(L/D)^2}{(h/D)^3}} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \quad (2.1)$$

onde σ_e é a tensão de escoamento do material, E é o módulo de elasticidade, L é o comprimento da casca, D é o diâmetro médio e h é a espessura.

Como o coeficiente de esbeltez fornece apenas uma previsão do tipo de falha para a estrutura, ensaios experimentais foram realizados para validar os modelos de carga crítica [36], nos quais grandes diferenças foram apresentadas entre as cargas geradas pelos modelos teóricos e as ensaiadas experimentalmente. Apesar dos níveis de precisão utilizados nos cálculos analíticos, eram obtidos resultados três a cinco vezes maiores que os experimentais em alguns casos. Essas diferenças foram justificadas como diferentes condições de contorno aplicadas ao problema, excentricidade da carga aplicada ou imperfeições geométricas inerentes à fabricação, sendo esta última a principal causa nas diferenças apontadas nas cargas [37].

Das justificativas usadas para as diferenças entre cargas citadas, Hoff [38] analisou diferentes condições de contorno nas cascas e um estado de membrana antes da flambagem não é o ideal como condição de contorno, pois existem deslocamentos circunferenciais, relativos à flexão, que não podem ser desconsiderados. Almroth [39] também estudou o comportamento da casca com diferentes condições de contorno na eminência da flambagem, concluindo que não são o principal responsável pelas diferenças entre cargas teóricas e experimentais. Simitses [40] investigou as excentricidades de cargas, mostrando que também não são o fator primordial nas discrepâncias entre cargas teóricas e experimentais.

Imperfeições geométricas foram investigadas e confirmadas como a principal causa das diferenças entre cargas teóricas e experimentais. Os autores von Karman e Tsien [41]-[42] e Donnell e Wan [33] concluem que as imperfeições geométricas impactam na carga crítica real da estrutura, ao investigarem as cascas esféricas sob pressão externa e cilíndricas axialmente comprimidas, ambas, com imperfeições geométricas.

Koiter [43] contribuiu explicando e quantificando os comportamentos pós-críticos observados experimentalmente, ressaltando a estabilidade e a sensibilidade a imperfeição, ou seja, a explicação para as discrepâncias teóricas e experimentais está na relação entre imperfeições geométricas das cascas, inerentes a fabricação e o comportamento pós-crítico natural dessas estruturas.

Uma vez justificado o motivo de existir as discrepâncias entre as cargas, foi investigado como uma casca se comporta fisicamente na presença de imperfeições [38], [44]. Mostrou-se que as proporções de energia de membrana e de flexão que as cascas podem apresentar são as responsáveis por esse comportamento. A casca tem a capacidade de absorver energia de membrana sem uma deformação excessiva, enquanto que para absorver a energia de flexão, a casca apresenta uma deformação muito maior. As imperfeições geométricas atuam como intensificadores das tensões de flexão e, portanto, a casca se deforma significativamente com cargas inferiores às previstas.

Conforme a discrepância entre resultados teóricos e experimentais foi constatada, as pesquisas sobre instabilidade de cascas assumiram duas linhas destacadas [45]: uma relativa a sistemas contínuos e outra relacionada a sistemas discretos. A primeira baseia-se em hipóteses fundamentais e teóricas a procura de uma extensão do conceito de estabilidade para os sistemas contínuos, com origem nos trabalhos de Koiter [43], von Karman e Tsien [41] e Hutchinson [46]. O conceito de energia mínima de perturbação segue essa linha de pesquisa, o qual implica que o efeito das imperfeições pode ser representado e determinado através da estrutura perfeita, utilizando um valor para a energia de perturbação calibrado por ensaios experimentais [44], [47].

A segunda linha de pesquisa, procura retirar conclusões de sistemas discretos, utilizando coordenadas generalizadas, para estudar sua estabilidade e sua sensibilidade à imperfeição [48], [49]. A representação por coordenadas generalizadas permite comparar a energia potencial da estrutura com sua estabilidade e suas imperfeições, onde se obtém informações sobre a estabilidade antes, depois e no ponto de carga crítica da estrutura com e sem imperfeições. Essa abordagem torna a compreensão do comportamento da estrutura mais didática e é apresentada no apêndice B.

Seguindo as duas linhas de raciocínio e a mecânica básica das cascas [50], foram desenvolvidas normas de projeto [35] e um método para o cálculo das pressões críticas é destacado [27], [51], o qual permite determinar a carga de bifurcação da estrutura perfeita e, então, aplicar fatores de redução para considerar as imperfeições e plasticidades. Esses fatores são obtidos através de curvas empíricas, baseadas em ensaios experimentais,

relacionando geometria, material e falhas [52], [53].

Em paralelo às pesquisas citadas, outras áreas relacionadas à instabilidade de cascas também são objetos de estudo, como os efeitos de tensões residuais [54], efeitos de soldagem nos tampos das cascas [55] e variações na espessura da casca [56]. Ross e Humphries [57] apresentaram um modelo de casca "corrugada", Ross e Little [58] estudaram a flambagem de um cilindro em fibra de carbono através de um modelo de elementos finitos para cascas axissimétricas de paredes finas, fizeram comparações com análises experimentais e mostraram a coerência entre os resultados. Cascas com o formato de domo sujeitas a pressões externas foram analisadas por Blachut e Galletly [59]. O projeto otimizado de cascas foi objeto de investigação nos trabalhos de Blanchut [60] e Reitinger e Ramm [61].

A utilização de enrijecedores foi investigada como método para aumentar a rigidez de uma casca. Enrijecedores com o formato de anéis circunferenciais e tiras longitudinais foram estudados em [62], [63] e [64]. O projeto de cascas enrijecidas é feito com o objetivo de evitar que a instabilidade elástica ocorra antes do escoamento do material [65], [52]. Para que isso aconteça, considera-se o colapso entre enrijecedores o modo crítico de falha e se superestima a carga de falha generalizada, onde a casca e enrijecedor colapsam juntos [27], levando em conta uma casca enrijecida como a mostrada na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Vista da seção lateral da casca cilíndrica com enrijecedor circunferencial (fonte: autor).

Contemporâneos ao desenvolvimento de enrijecedores, os métodos numéricos começaram a ser desenvolvidos como solução para os modelos analíticos, normalmente, complexa. Na área estrutural, o método dos elementos finitos é muito utilizado por fornecer soluções aproximadas, porém precisas [66].

Basicamente, o método consiste em discretizar uma estrutura em um número finito de elementos, conectados por um número finitos de pontos, chamados de nós [67]. Em outras palavras, baseia-se em uma formulação integral de pequenos domínios e na somatória dos resultados dessas integrações. Cada domínio corresponde a um elemento finito de geometria simples, então, ao somar as integrais em cada elemento, obtém-se a resposta da estrutura. Os elementos têm informações do material e de suas relações constitutivas, representados em forma de deslocamentos nos nós [66]. A resposta da estrutura é representada por um sistema de equações baseado nos deslocamentos dos nós e já consideram as cargas e condições contorno do problema.

Baseado no método dos elementos finitos [37], as opções para obtenção das informações sobre instabilidade são:

- Análise linear de flambagem:

É utilizada para encontrar a carga crítica de bifurcação através da resolução de problemas de autovalores. As soluções dos problemas são as cargas críticas clássicas (autovalores) e seus respectivos modos de flambagem (autovetores). A abordagem de limite inferior (*lower bound approach*) é baseada nesse tipo de análise e é uma das recomendações do EUROCODE em 2007 [68]. As cargas clássicas e os modos de flambagem da casca perfeita são obtidas através da análise linear de flambagem. Então, fatores de redução são aplicados à carga crítica conforme a seguinte equação:

$$\lambda_a \leq C \frac{\lambda_{cr}}{\gamma_m} \quad (2.2)$$

onde λ_a é o fator de carga a ser utilizado, λ_{cr} é o fator de carga crítico, C é uma constante empírica e γ_m um coeficiente de segurança.

Esse procedimento é facilmente implementado, porém é necessário que o projetista selecione adequadamente a constante C [29], caso contrário as vantagens em utilizar estruturas esbeltas se perdem, como por exemplo, pode-se aumentar o custo de materiais ou a massa da estrutura.

- Análise geometricamente não linear (com imperfeições):

Um indicativo de sensibilidade à imperfeição ocorre se a resposta da estrutura com imperfeições, oriunda da análise geometricamente não linear, for menor que a resposta da análise linear [69]. Esse conceito pode ser utilizado para definir a trajetória pré-crítica da casca perfeita a qual se aplica ao problema de autovalor, assim como, pode obter informações da curva pós-crítica utilizando essa técnica.

- Análise não linear (material e geometria imperfeitos):

Essa análise permite incluir não linearidades de material e de geometria em cascas perfeitas [45]. Contudo, essa técnica é indicada para cascas de parede grossas onde

as não linearidades do material predominam, porém podem ser extrapoladas para outras situações.

Uma opção para a integração dos modelos de estabilidade e dos métodos numéricos são as ferramentas numéricas. Nas últimas décadas, foram desenvolvidas ferramentas, a partir da evolução dos computadores, para a solução de cálculos estruturais cada vez mais complexos.

O software ANSR-I (*Analysis of Nonlinear Structural Response*) [70], é baseado no método dos elementos finitos e calcula a resposta estática e dinâmica de estruturas, considerando grandes deslocamentos e efeitos inelásticos. Na segunda versão, o ANSR-II, foram incluídos recursos que permitiam o usuário decidir a sequência de simulação e a inclusão de deslocamento impostos, entre outros [71].

Bosor4 [72] e Bosor5 [73] são ferramentas, também, baseadas no método dos elementos finitos, utilizadas para calcular, por exemplo, tensões, cargas de flambagem e modos de vibração de cascas de revolução com enrijecedores ou com variações na espessura.

O CUFSM [74] foi desenvolvido para análise de estabilidade em perfis de aço forjado à frio. O método das faixas finitas semi analítico, é utilizado nessa ferramenta, onde as estruturas são discretizadas em faixas longitudinais (elementos) elásticas que geram as matrizes de rigidez.

Em seu livro, Ross [52], apresenta três programas: dois para a flambagem de cascas cilíndricas com e sem enrijecedores e outro para cascas cônicas, todos sem a inclusão de imperfeições. Esses programas calculam os deslocamentos da superfície média, as deflexões, as tensões longitudinais e circunferenciais nas superfícies internas e externas, baseados nas teorias para prever a falha elástica das cascas cilíndricas.

Embora existam muitas opções para a automatização do dimensionamento de estruturas, não foi encontrada uma que atendesse os requisitos de projeto voltados para submersíveis operacionais, como por exemplo, requisitos de deformação máxima para a vedação e a integração com softwares de CAD. Para garantir um AUV que atenda todos os requisitos e restrições de missão, será desenvolvida uma ferramenta cujo algoritmo calcula a espessura com base na equação (2.10) e gera automaticamente um modelo 3D do vaso dimensionado. As restrições das condições de contorno são aplicadas conforme encontradas nas referências literárias em uma condição biapoada, ou seja, para um casco cilíndrico, ambas as extremidades foram restringidas nas direções circunferenciais e radiais, mas apenas uma delas teve a direção longitudinal restringida.

Uma vez dimensionada a casca pela ferramenta, comparações com simulações lineares e não lineares são feitas para avaliar os efeitos das imperfeições geométricas e, posteriormente, será realizada uma comparação com dados experimentais da literatura a fim de validar o método de cálculo utilizado.

2.2 Fenômenos de instabilidade estrutural

Os fenômenos de instabilidade estrutural estáticos, bifurcação ou ponto limite, são analisados qualitativamente, sendo descritos pela evolução de uma trajetória de equilíbrio fundamental e, em determinado momento, enfrentam a transição de configurações estáveis para instáveis.

2.2.1 Instabilidade por ponto limite (*snap-through*)

Esse tipo instabilidade é caracterizada pela determinação do comportamento da trajetória de equilíbrio não linear e das coordenadas do ponto limite, o qual indica que a tangente da trajetória é nula e a transição de estável para instável. Quando a estrutura se encontra em seu ponto limite e é submetida a um pequeno aumento de carga, ocorre uma passagem dinâmica, o "*snap*", para uma configuração de equilíbrio distante e estável.

As características da estrutura perfeita com esse comportamento estão resumidas na Figura 2.6. As linhas fortes são as trajetórias de equilíbrio, as linhas contínuas são as regiões estáveis e as tracejadas as regiões instáveis. Curvas da energia potencial para determinados valores das cargas são mostradas também, exemplificando a relação entre a energia potencial, equilíbrio e estabilidade do sistema. Conforme pode ser visto, a trajetória, inicialmente estável, perde a sua estabilidade ao atingir um máximo local da carga. Nota-se que a energia potencial atinge um mínimo local em relação a Q_i na região estável e ascendente da curva. Por outro lado, atinge um máximo na região instável e descendente da curva. Conforme o valor do carregamento vai aumentando, o máximo e o mínimo da energia potencial tendem a um mesmo valor e ocorre uma inflexão horizontal no ponto limite. Então, para valores ainda maiores de carregamento, não há estados de equilíbrio locais e a energia potencial não tem um ponto estacionário. Essa ausência de ponto estacionário implica que um sistema com esse comportamento tende a sofrer o "*snap-through*" dinamicamente.

Figura 2.6 – Curva de ponto limite (fonte: adaptado de Thompson [48]).

É importante ressaltar que o fenômeno de "*snap*" se diferencia da bifurcação, pois os deslocamentos que o definem estão presentes desde o início do carregamento aplicado e, não, ao interceptar uma outra trajetória de equilíbrio. Além disso, o aumento do carregamento provoca uma diminuição da rigidez da estrutura até que esta se anula no ponto limite.

Um exemplo de estrutura que apresenta esse comportamento é apresentado na seção B.1.3 do apêndice B.

2.2.2 Instabilidade por bifurcação

Os próximos casos são conhecidos como instabilidade com pontos de bifurcação. A Figura 2.7 mostra um diagrama carga por deslocamento genérico que exemplifica de forma esquemática os conceitos essenciais num problema de instabilidade bifurcacional arbitrário. Esse tipo de instabilidade por bifurcação é caracterizada por uma trajetória fundamental, que se inicia na origem do diagrama carga-deslocamento; por uma trajetória de pós-crítica, que não passa pela origem do mesmo diagrama; por um ponto de bifurcação, que corresponde à interseção das duas trajetórias mencionadas e no qual as configurações de equilíbrio se alteram.

Figura 2.7 – Características gerais do ponto de bifurcação (fonte: adaptado de Camotim [31]).

Vale ressaltar o comportamento repentino da instabilidade bifurcacional, o qual pode ser explicado pelo fato dos deslocamentos não estarem presentes desde o início da trajetória fundamental e surgirem subitamente ao ocorrer a bifurcação. Portanto, só é possível antecipar as cargas críticas em sistema estrutural e prever tais deslocamentos.

Ressalta-se, também, que em português, a tradução do termo *buckling* seria flambagem, contudo o termo em inglês engloba tanto as instabilidades bifurcacionais como a de ponto limite. Enquanto, o termo flambagem caracteriza apenas os casos bifurcacionais.

2.2.2.1 Ponto de bifurcação assimétrico

No ponto de bifurcação assimétrico, a trajetória fundamental perde sua estabilidade ao ser interceptada por outra trajetória pós-crítica distinta e contínua. As duas trajetórias apresentam tangente não nula no ponto crítico e conforme o parâmetro de carga é aumentado, ocorre uma mudança de estado na estabilidade.

O comportamento da estrutura perfeita pode ser observado nas curvas de energia potencial da Figura 2.8. Para cargas menores que a crítica ($\lambda < \lambda_{cr}$), a energia potencial tem um mínimo em relação à coordenada generalizada Q_i na região estável da trajetória fundamental e um máximo na região instável da curva de pós-crítica. Conforme o carregamento se aproxima da carga crítica, a energia potencial tende a um ponto de inflexão horizontal do estado de equilíbrio crítico. Após o ponto crítico, um máximo e um mínimo reaparecem na curva da energia potencial. No entanto, esses pontos, máximo e mínimo, reaparecem nas trajetórias trocadas em relação ao caso da carga inferior à crítica.

Figura 2.8 – Ponto de bifurcação assimétrico (fonte: adaptado de Thompson [48]).

Na seção B.1.4.1 do apêndice B, um exemplo deste comportamento é desenvolvido.

2.2.2.2 Ponto de bifurcação simétrico instável

O ponto de bifurcação simétrico instável apresenta uma trajetória fundamental que intercepta uma outra trajetória pós-crítica descendente e instável, que também possui tangente nula no ponto crítico.

Antes do ponto crítico, a energia potencial apresenta três pontos estacionários em relação à coordenada generalizada Q_i , sendo dois máximos na trajetória pós-crítica instável e um mínimo na região estável da trajetória fundamental (Figura 2.9). Esses três pontos estacionários desaparecem e um único ponto de máximo ocorre para cargas maiores que a crítica. O estado de equilíbrio crítico é instável e, conseqüentemente, existe o risco de ocorrer "*snap-through*" se a carga for aumentando vagarosamente.

Figura 2.9 – Ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: adaptado de Thompson [48]).

Uma ressalva é válida nesse momento, a primeira é que os casos de bifurcação simétrica instável e estável têm essa nomenclatura devido a trajetória de pós-crítica ter tangente nula no ponto crítico. Portanto, não necessariamente ocorre simetria na curva e a terceira derivada normalmente é não nula.

Um exemplo desse comportamento é apresentado na seção B.1.4.2 do apêndice B.

2.2.2.3 Ponto de bifurcação simétrico estável

A trajetória fundamental, inicialmente estável, segue evoluindo até perder sua estabilidade inicial ao cruzar uma trajetória pós-crítica no ponto crítico com tangente nula.

Figura 2.10 – Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: adaptado de Thompson [48]).

Nota-se que a energia potencial tem um único ponto estacionário, conhecido como mínimo da região estável da trajetória fundamental, quando o carregamento é menor que o crítico. Conforme a carga ultrapassa o valor crítico, surgem dois mínimos e um máximo para a energia potencial, como na Figura B.60.

Analisando o ponto crítico, é possível conferir que sua estabilidade é estável e, portanto, não há possibilidade de ocorrer o "*snap-throgh*". Então, o sistema seguirá a trajetória de pós-crítica na direção em que ocorrer uma possível perturbação.

2.2.3 Sensibilidade à imperfeição

Como descrito no capítulo 2.1, na prática as estruturas não são perfeitas e, nesta seção, é analisada a influência das imperfeições geométricas nas cargas críticas e no comportamento das estruturas.

As estruturas sensíveis à imperfeição apresentam grandes variações no seu comportamento na presença de pequenas imperfeições [44], as quais se encontram dentro das tolerâncias de fabricação. Essa modificação de comportamento significa alteração nas trajetórias de equilíbrio e nas cargas críticas.

O efeito de pequenas perturbações é descrito pela estabilidade do equilíbrio no estado crítico nos casos de estruturas sensíveis à imperfeição [43]. Em outras palavras, se o equilíbrio crítico for estável, o comportamento pós-crítico será inicialmente estável e pouco sensível às imperfeições. Enquanto, se o equilíbrio crítico for instável, o comportamento pós-crítico será instável e uma sensibilidade a imperfeição significativa é notada.

Se a curva pós crítica representar uma ramo decrescente e instável, a rigidez da estrutura cai rapidamente à medida que os deslocamentos críticos crescem, ou seja, a estrutura apresenta sensibilidade à imperfeição [33].

As estruturas do tipo casca tem apresentado os maiores desafios no assunto imperfeições [30]. As cascas, de modo geral, têm comportamento bifurcacional simétrico instável. Koiter propôs que a trajetória pós-crítica é dada inicialmente pela seguinte equação [75]:

$$\frac{P}{P^c} = 1 + b \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \quad (2.3)$$

onde P denota os valores pós críticos de carga, P^c é a carga crítica da estrutura, δ é a amplitude do deslocamento crítico e h é a espessura. O coeficiente b é uma medida da rapidez com que a carga evolui após o estado crítico e é calibrado com ensaios experimentais. Percebe-se que b é negativo para estruturas sensíveis à imperfeições.

Considerando P^L a carga crítica do sistema imperfeito, com amplitude de imperfeição δ_1 , Koiter estabeleceu que as curvas de sensibilidade à imperfeição obedecem à seguinte equação:

$$\frac{P^L}{P^c} = 1 - \frac{3}{2^{2/3}} (-b_1)^{1/3} \left(\frac{\delta_1}{h} \right)^{2/3} \quad (2.4)$$

2.2.4 Comportamento das cascas

Como já dito anteriormente, a casca apresenta uma rigidez a esforços de membrana superior a sua rigidez aos esforços de flexão. Em outras palavras, a casca é capaz de absorver grande quantidade de energia de deformação de membrana sem se deformar significativamente, enquanto que se a casca absorver a mesma quantidade de energia relativa à flexão, grandes deformações ocorrem [29]. Caso exista uma quantidade de energia de membrana sendo absorvida em uma casca através da ação de esforços externos e de alguma maneira essa energia seja convertida para deformações de flexão, a casca falha por instabilidade.

A instabilidade se manifesta dependente das condições de contorno, das propriedades do material e, principalmente, da geometria [37]. O estado pré-crítico das cascas normalmente não é linear. Na prática, esse comportamento pode ser observado em uma curva carga-deformação como na Figura 2.11 [29]. O ponto de bifurcação B se encontra entre a origem e o ponto A (carga de colapso da casca perfeita). Caso a trajetória fundamental OAC corresponda ao comportamento limite da casca, ela apresenta deformações axissimétricas. A trajetória BD representa a trajetória pós-crítica ou secundária que intercepta a fundamental no ponto de bifurcação e gera deformações não axissimétricas. Portanto, a estrutura geralmente é caracterizada pelo rápido crescimento de deformações não axissimétricas [76]. Sob o ponto de vista de projeto, o ponto A não tem significado prático, uma vez que a estrutura perfeita falha antes desse ponto ocorrer em B .

Figura 2.11 – Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: adaptado de Bushnell [29]).

No caso da estrutura imperfeita, o ponto de bifurcação pode não existir devido às variações que as imperfeições geram. A trajetória que uma estrutura real segue é a OEF .

na Figura 2.11, com falha do tipo limite no ponto E . O colapso da estrutura no ponto E representa um deslocamento significativo e não simétrico.

2.3 Critérios estáticos

A análise de estabilidade de sistemas conservativos é realizada através dos métodos energéticos e de equilíbrio, os quais geram modelos de obtenção da carga crítica para a estrutura. São analisados alguns modelos a fim de selecionar qual será utilizado neste trabalho.

2.3.1 Método energético

A aplicação do método energético se baseia na utilização do princípio da mínima energia potencial, o qual admite uma configuração de equilíbrio estável sempre que a energia potencial do sistema apresentar um ponto estacionário.

Para sistemas mecânicos conservativos, existem teoremas que são utilizados na análise da estabilidade de uma estrutura, baseados na função da energia potencial total. Para a demonstração desses teoremas, considera-se um sistema conservativo com estado de equilíbrio estático e com um mínimo na função de energia potencial total (V) na origem. O comportamento dessa função, $V = k$, ao redor do estado de equilíbrio para duas variáveis q_i e q_j , é representado na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Representação do comportamento da energia potencial ao redor de um estado de equilíbrio (fonte: adaptado de Camotim [31]).

Nota-se que qualquer movimento do sistema, próximo ao estado de equilíbrio (com energia potencial $V < k$), não sairá da curva de $V = k$ pelo princípio de conservação da energia. Então, o estado de equilíbrio será estável. A partir dessa situação, foi obtido o teorema de Lagrange-Dirichlet:

- Um estado de equilíbrio cuja energia potencial total seja um mínimo local isolado é necessariamente estável.

Se neste sistema, estável com um mínimo em V , for adicionado um "amortecedor", como a dissipação de energia em forma de calor ou ruído, a estabilidade assume um comportamento assintótico em relação ao ponto de equilíbrio.

Segundo Thompson e Hunt [48], Koiter apresentou a solução para a recíproca deste teorema, a qual assume um pequeno "amortecimento" (positivo-definido) ao considerar um estado de equilíbrio em que a energia potencial total não tenha um mínimo local, e, sim, um máximo ou um ponto de sela. Existem, na vizinhança desse estado, configurações do sistema que apresentam valores menores da energia potencial e, portanto, um movimento iniciado com energia cinética nula nunca retornará ao estado de equilíbrio fundamental. Pode-se afirmar, ainda, que ao considerar que o estado fundamental está isolado, ou seja, não há outro estado de equilíbrio em sua vizinhança, o sistema não encontra um ponto de equilíbrio e tende a se afastar dessa vizinhança, caracterizando a instabilidade. Assim, a recíproca do teorema anterior pode ser escrito da seguinte maneira:

- Um estado de equilíbrio cuja energia potencial total não seja um mínimo isolado é necessariamente instável.

Generalizando esse teorema e sua recíproca, é possível escrever um segundo teorema:

- Um mínimo relativo completo da energia potencial total em relação às coordenadas generalizadas é condição necessária e suficiente para a estabilidade de um estado de equilíbrio do sistema.

Portanto, para estabelecer a estabilidade do estado em um sistema basta analisar a função energia potencial total (V) na vizinhança de um estado em questão: se V for um mínimo local, então o estado é estável, caso contrário, instável. A fundamentação para análise de sistemas conservativos discretos é baseada nesse dois teoremas citados.

2.3.2 Método equilíbrio

O método do equilíbrio se baseia em analisar a curva do comportamento da estrutura, procurando uma configuração de equilíbrio que apresente, para um mesmo valor de carregamento, outra condição de equilíbrio. Em outras palavras, procura-se uma carga crítica do sistema que se encontra em duas curvas de equilíbrio ao mesmo tempo, as trajetórias fundamental (pré-crítica) e a pós crítica.

Para ilustrar este caso, pode-se utilizar uma expansão em série de Taylor da variação da energia potencial entre uma configuração da trajetória fundamental e uma adjacente:

$$\Delta V = V(Q_i^f + q_i, \lambda) - V(Q_i^f, \lambda) = V_i q_i + \frac{1}{2!} V_{ij} q_i q_j + \frac{1}{3!} V_{ijk} q_i q_j q_k + \dots \quad (2.5)$$

onde Q_i^f é a coordenada generalizada na trajetória fundamental, q_i é um incremento da coordenada generalizada relativa à configuração adjacente, λ é um parâmetro de carga e $V_i, V_{ij}, \dots$ são as derivadas parciais da energia potencial na trajetória fundamental escritas em notação indicial.

Para a vizinhança da trajetória de equilíbrio, q_i assume valores pequenos e se constata que o sinal da equação (2.5) é regido pelo termo de segunda ordem (forma quadrática):

$$\Delta V \simeq \frac{1}{2!} V_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2!} \delta^2 V \quad (2.6)$$

Se a configuração adjacente é de equilíbrio, tem-se:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial Q_i} \right|_{Q_i=Q_i^f+q_i} = \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i=q_i} = V_{ij} q_j = 0 \quad (2.7)$$

onde $j = 1$ a n . A equação de equilíbrio do sistema (2.7) pode ser escrita na forma matricial, a qual constitui um sistema homogêneo de i equações lineares:

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

As soluções desse sistema são: $q_i = 0$ que correspondem a trajetória fundamental (solução trivial) e $q_i^{(m)} \neq 0$ (solução não trivial) com $m = 1, 2, \dots, n$.

As soluções não triviais são obtidas ao anular o determinante do sistema (2.8):

$$\det [V_{ij}(\lambda)] = 0 \quad (2.9)$$

Solucionar a equação (2.9) é o mesmo que encontrar os autovalores e autovetores do sistema (2.8) que representam, respectivamente, as cargas de flambagem $\lambda_b^{(m)}$ e os modos de instabilidade $q_i^{(m)}$ do sistema e a menor das cargas de flambagem e o correspondente modo de instabilidade são chamados de carga crítica e modo crítico.

2.3.3 Cálculo da carga crítica para casca sem enrijecedores

Com objetivo de definir qual modelo de obtenção da carga crítica da casca será utilizado, são analisados alguns modelos oriundos da teoria clássica de flambagem e baseados nos critérios descritos anteriormente, como o de Timoshenko [9] que é obtido através do critério do equilíbrio:

$$q_{cr} = \frac{Eh}{R} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2} \left[\frac{1}{\left(n^2 \left(\frac{L}{\pi R} \right)^2 + 1 \right)^2} + \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \left(n^2 + \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, h é a espessura da casca cilíndrica, R é o raio médio da casca, n é o número de semiondas circunferenciais, L o comprimento da casca e ν é o coeficiente de Poisson.

O modelo de Donnell [33], obtido através do método energético que considera um cilindro perfeito, as hipóteses de Love-Kirchhoff e se baseia na seguinte equação:

$$D \nabla^8 w + \frac{1 - \nu^2}{R^2} C w_{xxxx} - \nabla^4 (N_x^f w_{xx} + N_y^f w_{yy} + 2N_{xy}^f w_{xy}) = 0 \quad (2.11)$$

onde w é o deslocamento radial da casca, ∇ é o gradiente de w , D é a rigidez à flexão e C é a rigidez de membrana, N_x^f , N_y^f , N_{xy}^f são os esforços de membrana nas direções dos respectivos subscritos e w_{xx} , w_{yy} e w_{xy} , representa as derivadas parciais referentes aos subscritos.

Para a solução da equação (2.11) são aplicadas condições de contorno como apoios simples e se obtém a pressão crítica (q_{crdo}) da estrutura, a qual apresenta resultados similares aos de Flugge e de Timoshenko:

$$q_{crdo} = \frac{\pi^2 E h^3}{12 (1 - \nu^2) l^2 R} \left[\frac{\left(1 + \frac{n^2 l^2}{\pi^2 R^2}\right)^2}{\frac{n^2 l^2}{\pi^2 R^2}} + \frac{12 \left(\frac{l^2}{R h}\right)^2 (1 - \nu^2)}{\pi^4 \left(\frac{n^2 l^2}{\pi^2 R^2}\right)^2 \left(1 + \frac{n^2 l^2}{\pi^2 R^2}\right)^2} \right] \quad (2.12)$$

O modelo de Tokugawa (q_{crt}) [34] é similar ao de Timoshenko (q_{cr}), porém com a adição de um parâmetro k_t para incluir a influência de enrijecedores, o qual quando unitário representa a casca sem enrijecedores. Neste modelo, a pressão crítica é calculada por:

$$q_{crt} = \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(n^2 + \left(\frac{\pi D}{2L} \right)^2 \right)^2 - \frac{n^4 (2n^2 - 1)}{\left(n^2 + \left(\frac{\pi D}{2L} \right)^2 \right)^2} \right] \frac{2E}{1 - \nu^2} \left(\frac{t}{D} \right)^2 + \frac{2E \left(\frac{t}{D} \right)}{\left(n^2 \left(\frac{2L}{\pi D} \right)^2 + 1 \right)^2} \right\} \cdot \frac{1}{n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi D}{2L} \right)^2}$$

Onde D é o diâmetro e k_t omitido por ser unitário. Outro modelo, baseado no modelo de Timoshenko (q_{cr}) e conhecido como fórmula de David Taylor Model Basin (DTMB) [34], é obtido através da minimização do parâmetro n e um valor médio para a razão diâmetro sobre o comprimento:

$$q_{crdtmb} = \frac{2,42E}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \frac{\left(\frac{h}{D} \right)^{5/2}}{\left[\frac{L}{D} - 0,45 \left(\frac{h}{D} \right)^{1/3} \right]} \quad (2.13)$$

No gráfico da Figura 2.13, é apresentada uma comparação entre os diferentes modelos de pressão crítica dentro do regime elástico, onde o parâmetro ϕ , relativo a pressão externa, está no eixo das ordenadas e a razão espessura pelo diâmetro da casca nas abscissas.

Figura 2.13 – Comparação entre os modelos para cascas cilíndricas sob pressão hidrostática (fonte: autor).

Observa-se que na região de $0,01 < h/D < 0,1$ há coerência entre os modelos. Divergências são notadas para cascas muito finas ($h/D < 0,01$) ou cascas moderada e grossas ($h/D > 0,1$). Na aplicação em submersíveis ($0,01 < h/D < 0,06$), os modelos de carga crítica apresentam uma diferença pequena entre si de 10%, com excessão da equação DTMB (2.13). As equações de Timoshenko (2.10) e de Donnell (2.12) apresentam uma concordância entre si em quase toda sua extensão, com diferenças máximas de 2%. Embora todas as curvas possam ser utilizadas no dimensionamento de um AUV, o modelo de Timoshenko (2.10) apresenta os valores de carga mais elevados, ou seja, é a menos conservadora, porém seguros. Com isso, um AUV de menor espessura pode ser projetado. Por esse motivo, a equação (2.10) é utilizada para o dimensionamento da casca sem enrijecedores e usada na ferramenta numérica. O desenvolvimento desse modelo é apresentado no Apêndice A.

2.3.4 Cálculo da carga crítica para casca com enrijecedores

O cálculo para a obtenção da carga crítica nas cascas enrijecidas é similar ao de cascas sem enrijecedores, basta adicionar os termos de rigidez que um anel enrijecedor adiciona à

estrutura.

As relações constitutivas e cinemáticas de um elemento infinitesimal de uma casca enrijecida por anéis circunferenciais foram utilizadas por Kendrick [77] para demonstrar a equação de deformação da casca enrijecida perfeita através do método da energia, o qual implica em que um mínimo na função de energia potencial corresponde um ponto de equilíbrio de onde se obtém as cargas críticas da estrutura:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{qR}{2EI_c} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{h}{I_c R^2} \right) w = \frac{q}{EI_c} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \quad (2.14)$$

onde q é a pressão, I_c é o momento de inércia do anel enrijecedor combinado com a casca e w é o deslocamento radial. Na equação (2.14), o segundo termo representa a ação longitudinal da pressão, o qual pode ser desprezado por não apresentar influência quando a estrutura está distante da carga crítica [78]. Baseado nessa análise, expressões para as pressões que provocam a falha em diferentes regiões da casca foram obtidas através de uma aproximação, por série de Taylor, da equação (2.14):

- A pressão circunferencial na superfície externa entre enrijecedores:

$$P_{c3} = \frac{h\sigma_{yp}}{R(1 + \gamma H)} \quad (2.15)$$

- A pressão circunferencial na superfície média da casca entre enrijecedores:

$$P_{c5} = \frac{h\sigma_{yp}}{R(1 + \gamma G)} \quad (2.16)$$

- A pressão longitudinal na superfície interna da casca adjacente ao enrijecedor:

$$P_{c7} = \frac{2h\sigma_{yp}}{R \left[1 + \gamma R \sqrt{\frac{12}{1 - \nu^2}} \right]} \quad (2.17)$$

- A pressão externa que causa falha pelo critério de von Mises na casca entre enrijecedores:

$$P_{c6} = \frac{h\sigma_{yp}}{R\sqrt{\gamma^2 G^2 + 1, 5\gamma G + 0, 75}} \quad (2.18)$$

onde σ_{yp} é tensão de escoamento do material da casca e γ vale:

$$\gamma = \frac{A \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)}{(A + hh_w)(1 + \beta)} \quad (2.19)$$

A é área transversal do enrijecedor e β o índice de confiabilidade que vale:

$$\beta = \frac{2hN}{\alpha(A + hh_w)} \quad (2.20)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 h^2}} \quad (2.21)$$

$$N = \frac{\cosh(\alpha L) - \cos(\alpha L)}{\sinh(\alpha L) - \sin(\alpha L)} \quad (2.22)$$

$$H = \frac{-2 \left[\left(1 + \sqrt{\frac{3\nu^2}{1-\nu^2}} \right) \sinh \frac{\alpha L}{2} \cos \frac{\alpha L}{2} + \left(1 - \sqrt{\frac{3\nu^2}{1-\nu^2}} \right) \cosh \frac{\alpha L}{2} \sin \frac{\alpha L}{2} \right]}{\sinh \alpha L + \sin \alpha L} \quad (2.23)$$

$$G = \frac{-2 \left[\sinh \frac{\alpha L}{2} \cos \frac{\alpha L}{2} + \cosh \frac{\alpha L}{2} \sin \frac{\alpha L}{2} \right]}{\sinh \alpha L + \sin \alpha L} \quad (2.24)$$

$$R_u = \frac{\sinh \alpha L - \sin \alpha L}{\sinh \alpha L + \sin \alpha L} \quad (2.25)$$

Outro modelo de obtenção da carga crítica local de cascas enrijecidas foi obtido por Kendrick [79] ao resolver as equações de equilíbrio (2.14), onde foi utilizada uma condição de contorno da casca biapoiada e a solução obtida, similar a equação (2.10), vale:

$$P_{ml} = \frac{Eh}{R} \left[n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \left\{ \left[n^2 \left(\frac{L}{\pi R} \right)^2 + 1 \right]^{-2} + \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \left[n^2 - 1 + \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 \right\} \quad (2.26)$$

Mackay [76] recomenda o uso de uma curva empírica baseada em dados experimentais e normalizada pela equação (2.16) para o escoamento da casca perfeita e pela equação (2.26) para falha local. As seguintes equações são obtidas dessa curva empírica:

$$\frac{P_{ci}}{P_{c5}} \approx \frac{P_{ml}}{2P_{c5}} \quad \text{para} \quad P_{ml} \leq P_{c5} \quad (2.27)$$

$$\frac{P_{ci}}{P_{c5}} \approx 1 - \frac{P_{c5}}{P_{ml}} \quad \text{para} \quad P_{ml} \geq P_{c5} \quad (2.28)$$

As equações (2.27) e (2.28) são utilizadas para o dimensionamento das cascas enrijecidas por considerarem as imperfeições das cascas e a falha local, desprezando o efeito da área em que estão os enrijecedores devido ao fato dessa região incluir pequenas diferenças, cerca de 3%, na pressão crítica [80], [81].

3 Análise de vasos de pressão externa utilizados em AUVs

Neste capítulo, é apresentada uma análise da estabilidade de vasos de pressão com geometrias geralmente utilizadas no desenvolvimento de AUVs e outros veículos submarinos (torpedos, submarinos, etc).

Os resultados produzidos a partir de expressões analíticas são obtidos através de uma ferramenta numérica. Estes são comparados com resultados oriundos do método dos elementos finitos, com objetivo de reforçar as estimativas analíticas.

3.1 Ferramenta para o auxílio no projeto estrutural de um AUV

Nos AUVs, a geometria dos vasos de pressão é limitada pelo porte do veículo e a carga paga embarcada, em outras palavras, as dimensões de comprimento e de diâmetro são definidas pela hidrodinâmica e pelas dimensões máximas dos sensores e equipamentos, entre outros. Então, com intuito de redução no tempo de projeto, atendendo todos os requisitos e restrições, foi desenvolvida uma ferramenta, cujo algoritmo calcula a espessura do vaso de pressão e gera automaticamente um modelo 3D do vaso dimensionado.

O ambiente do software Matlab foi utilizado no desenvolvimento da ferramenta para realizar uma integração dos conceitos de instabilidade, aplicando a equação (2.10), com softwares de CAD e CAE. A Figura 3.14 mostra um diagrama de blocos simplificado da ferramenta para uma melhor compreensão de seu uso.

Figura 3.14 – Diagrama de blocos da ferramenta numérica desenvolvida (fonte: autor).

3.1.1 Funcionamento da ferramenta

Inicialmente, é executado um arquivo no software Matlab que abre a primeira interface da ferramenta, na qual são inseridos os parâmetros básicos de operação do veículos: profundidade e velocidade de missão, densidade e viscosidade do meio, como pode ser visto na Figura 3.15.

Figura 3.15 – Interface inicial do programa (fonte: autor).

Uma vez inseridos os parâmetros de missão, seleciona-se o tipo de veículo que será utilizado na missão, clica-se no botão avançar e os dados iniciais são exportados para uma nova interface.

A segunda interface realiza o cálculo de espessura do vaso de pressão para resistir aos esforços relativos à profundidade de operação, levando-se em conta um coeficiente de

segurança igual a três [35]. É necessário fornecer ao programa os dados do material e da geometria do vaso. Existe uma lista dos materiais mais utilizados pré-estabelecida, onde o módulo de elasticidade, o coeficiente de poisson, a densidade e a tensão de escoamento são importados. Outra opção é inserir os dados de outro material manualmente. Este módulo ainda apresenta uma prévia das dimensões do vaso selecionado na área de gráfico da interface. Juntamente com a espessura, são apresentados massa e volume de material do vaso para facilitar ainda mais a fase de projeto. Esses recursos podem ser vistos na Figura 3.16.

Figura 3.16 – Interface de cálculo estrutural do programa (fonte: autor).

Outra funcionalidade deste módulo é o botão *Gerar desenho*, o qual manipula o software Solidworks através de uma macro criada em Visual Basic. A macro realiza automaticamente um modelo tridimensional do vaso selecionado com os resultados da ferramenta. Além disso, já são modeladas tampas planas, exceto para o caso esférico. A Figura 3.17 mostra um vaso, em alumínio 5456, gerado por esta macro.

Figura 3.17 – Modelo CAD em 3D do vaso gerado pela ferramenta (fonte: autor).

O botão *Simulação (AEF)* manipula os mesmos softwares através de macros em Visual Basic. Uma simulação estrutural simplificada é realizada a partir do modelo tridimensional, de modo a observar o campo de tensões atuantes no vaso relativo a pressão de operação. Nessa simulação preliminar, é adicionado um carregamento distribuído externo referente à profundidade de missão, a qual foi inserida pelo usuário na interface inicial. As restrições das condições de contorno são aplicadas em uma condição biapoiada, conforme encontrado nas referências literárias e foi estabelecido um padrão de malha relativa a ordem da espessura para cada vaso, pois, dessa maneira, uma variedade de vasos podem ser simulados.

3.1.2 Procedimento de cálculo analítico do algoritmo

O cálculo da espessura ocorre de forma similar para os três formatos utilizados. Para os cascos cilíndricos, está implementado o procedimento iterativo utilizando a fórmula (2.10). Para os vasos esféricos, aplica-se diretamente a fórmula (A.182) e para o formato cônico, a fórmula (2.10) é adaptada, substituindo o comprimento do cilindro pelo equivalente do cone:

$$L_{eq} = \sqrt{(R + h)^2 + L^2} \quad (3.1)$$

e o raio do cilindro por um raio equivalente:

$$R_{eq} = \frac{(R_a + R_b)}{(2 \cos \alpha)} \quad (3.2)$$

Uma vez inseridos os parâmetros de missão na interface inicial, insere-se as características e o material do vaso na segunda interface e se pressiona o botão *Calcular*. O processo de cálculo utiliza a razão de esbeltez, equação (2.1), $\lambda_{th} = 1, 2$, para gerar uma estimativa inicial da espessura do vaso, a qual é inserida na equação (2.10) e esta é minimizada em relação ao número de ondas circunferenciais (n) para se obter uma nova pressão. Uma comparação é realizada entre a nova pressão calculada e a de operação, multiplicada por um coeficiente de segurança, se a primeira for menor que a segunda, um incremento é feito na estimativa inicial da espessura e o processo se reinicia. O processo converge quando a pressão calculada for maior que a de operação, onde a espessura utilizada na iteração anterior a esta é escolhida como resultado para o vaso de pressão em questão, gerando a carga crítica, as n ondas circunferenciais e, também, a massa e o volume da estrutura.

Para a ilustração de como utilizar a ferramenta, foi utilizado como referência um componente do veículo submersível desenvolvido no Laboratório de Veículos Não Tripulados (LVNT) da Escola Politécnica da USP, o AUV Pirajuba.

Conforme descrito a seção anterior, os parâmetros de missão são inseridos: operação a 100 metros de profundidade e densidade do meio de operação, 1025 kg/m^3 . Na segunda interface, insere-se os dados dos materiais: são utilizados os apresentados na Tabela 1, com exceção do compósito de fibra de carbono. Insere-se o tipo de vaso e as dimensões restritas: o veículo apresenta um vaso de pressão cilíndrico, fabricado em alumínio, de comprimento $L = 840 \text{ mm}$, de diâmetro interno $D_i = 188 \text{ mm}$ e de espessura $h = 6,35 \text{ mm}$. Para este vaso cilíndrico, foi realizado um redimensionamento de sua espessura para a profundidade inserida, com um coeficiente de segurança igual a 3.

Como os AUVs podem utilizar vasos cônicos e esféricos e a ferramenta, também, é capaz de dimensioná-los, foram realizados os dimensionamentos de um vaso esférico e de um cônico para adaptação ao vaso cilíndrico redimensionado na parte de ré. As dimensões utilizadas foram diâmetro $D_i = 188$ para ambos os formatos e um ângulo de conicidade igual a 25° para o caso cônico.

Ao pressionar o botão *Calcular*, o procedimento de cálculo é iniciado e são obtidos a espessura, a massa, o volume, a pressão crítica do vaso e uma tensão equivalente para comparações entre os vasos em si e com análises de elementos finitos, utilizando a tensão equivalente de von Mises para um estado plano de tensão de uma estrutura tipo casca [82]:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta \sigma_l + \sigma_l^2} \quad (3.3)$$

onde σ_v é a tensão equivalente, σ_θ é a tensão circunferencial e σ_l é a tensão longitudinal. A Tabela 2 mostra os resultados gerados pela ferramenta para as espessuras, as tensões equivalentes e as novas massas para os três tipos de vaso, onde utilizou-se cinco metais diferentes no dimensionamento de cada vaso:

Tabela 2 – Resultados analíticos gerados pela ferramenta.

Vaso Cilíndrico	Espessura (mm)	Tensão de von Mises (MPa)	Massa (kg)
Alumínio 5456-H111	4,76	19,59	6,22
Titânio Ti-6Al-4V	3,90	23,10	8,75
AISI 316	3,20	28,16	12,92
Duplex S32205	3,10	28,88	12,19
Superduplex UNS S32750	3,10	28,88	12,19

Vaso Esférico	Espessura (mm)	Tensão de von Mises (MPa)	Massa (kg)
Alumínio 5456-H111	1,40	35,72	0,41
Titânio Ti-6Al-4V	0,86	57,14	0,42
AISI 316	1,20	41,67	1,12
Duplex S32205	1,10	40,42	1,05
Superduplex UNS S32750	1,10	40,42	1,05

Vaso Cônico	Espessura (mm)	Tensão de von Mises (MPa)	Massa (kg)
Alumínio 5456-H111	3,80	42,43	1,33
Titânio Ti-6Al-4V	3,20	50,38	1,87
AISI 316	2,70	59,72	2,82
Duplex S32205	2,57	40,42	2,68
Superduplex UNS S32750	2,57	40,42	2,68

Analisando os materiais através da relação escoamento pela densidade, σ_e/ρ , é possível afirmar que a liga de titânio se mostra a melhor opção, pois apresenta o valor mais alto de σ_e/ρ . A segunda opção seria a liga de alumínio, porém ao considerar custo de aquisição e de usinabilidade, o alumínio se torna a melhor opção para a aplicação.

Vale ressaltar que a massa do vaso de pressão cilíndrico atual do AUV Pirajuba é igual a 8,51 kg e a massa do vaso redimensionado, em alumínio, vale 6,22kg. Essa diferença de 2,29 kg representa um ganho de 26,91% e foi possível sem a utilização de métodos de otimização. Esse ganho pode ser utilizado em um aumento da carga paga do veículo, como por exemplo, sensores e instrumentos para novas operações, o que faria o veículo adquirir uma versatilidade maior em relação as possíveis missões. Uma outra opção é utilizar a liga de titânio para o caso cilíndrico, pois foi dimensionado um vaso de, aproximadamente, mesmo peso que o atual com espessura menor e uma resistência maior, inclusive garantindo resistência à impactos. No entanto, como dito, as ligas de titânio tem um custo significativo e tais fatos podem inviabilizar sua utilização. Pode-se observar, também, que os aços duplex e superduplex não apresentam um ganho em massa quando comparado com o alumínio, porém esses materiais apresentam outras vantagens, como por exemplo, alta resistência à corrosão. Portanto, uma análise de viabilidade dos materiais é necessária.

Analisando os vasos esféricos, observa-se que a diferença de massa e de espessura não é significativa como a do cilindro e, com isso, a utilização de outros materiais pode ser possível. A utilização da liga de titânio pode ser viável, uma vez, que apresenta a mesma massa que o alumínio para uma espessura menor.

Para o caso cônico, as espessuras tem uma variação maior comparado com o caso esférico, porém as massas dos vasos não sofrem alterações consideráveis. Por esse motivo, também pode ser viável a utilização de um material como o titânio.

Utilizando os três formatos em alumínio, é possível realizar uma análise sobre qual vaso é mais indicado para a utilização em um AUV. Embora o cilindro apresente uma espessura e uma massa maiores, seus esforços equivalentes são menores para a mesma profundidade e, mais importante, apresenta um volume interno maior, com isso, permitindo maior versatilidade para o veículo.

3.2 Comparação com resultados obtidos através do método dos elementos finitos e com resultados experimentais

Com objetivo de se avaliar os resultados obtidos através da ferramenta numérica, são realizadas comparações com simulações lineares, não lineares e com ensaios experimentais obtidos da literatura.

3.2.1 Comparação com análise linear de flambagem

A fim de se comparar os resultados obtidos na seção anterior, foi aplicado um modelo de elementos finitos para o vaso de pressão cilíndrico, redimensionado em alumínio. As simulações foram feitas no software ANSYS, o qual tem a função de análise linear de flambagem que gera a carga crítica clássica da estrutura. Esse recurso permite calcular os autovetores e autovalores associados com a forma e magnitude da carga aplicada. O problema de autovalor pode ser escrito como:

$$\lambda_{av}[K_1][\phi_{av}] = [k_1][\phi_{av}] \quad (3.4)$$

Onde λ_{av} é o autovalor correspondente à carga, K_1 é a matriz de rigidez geométrica, k_1 é a matriz de rigidez elástica global correspondente aos nós e ϕ_{av} é o vetor deslocamento. A pressão crítica de flambagem pode ser obtida como a multiplicação do autovalor pela pressão a qual o vaso está submetido, sendo escrito da seguinte maneira:

$$q_{cr} = \lambda_{av}q \quad (3.5)$$

Impondo-se uma pressão unitária (1 MPa) sobre o vaso, os autovalores obtidos são as próprias pressões críticas de flambagem. A Figura 3.18 mostra a deformação do vaso obtida na simulação de flambagem linear.

Figura 3.18 – Simulação de flambagem linear de um vaso cilíndrico (AL5456-H111, fonte: autor).

A pressão crítica simulada é igual a 4,4686 MPa, valor aproximadamente 4,5 vezes maior que pressão aplicada referente a cem metros de profundidade (1 MPa). Isso mostra que, teoricamente, o vaso suportaria uma pressão de 450 metros de profundidade. A ferramenta numérica gera um valor de pressão crítica igual a 4,2851 MPa, mostrando que os resultados analíticos e simulados apresentam uma diferença inferior 5% para cascas com características geométricas similares. Este resultado concorda com a hipótese, admitida neste trabalho, da coerência entre resultados analíticos e aqueles produzidos pelas simulações numéricas.

Para evidenciar a influência das dimensões (L , D e h) na carga crítica das cascas cilíndricas, foi gerado um gráfico (Figura 3.19), o qual mostra curvas que representam as alterações da pressão crítica, analítica e simulada, para variações na relação L/D , mantendo a mesma espessura.

Quando se mantém o diâmetro constante e se incrementa o comprimento, ou seja, aumenta-se a relação L/D , uma redução na pressão crítica da casca é exibida. Isto ocorre, pois ao realizar esse tipo de alteração na geometria, a estrutura se torna mais esbelta e, conseqüentemente, mais sensível à instabilidade.

Figura 3.19 – Gráfico pressão crítica *vs.* relação L/D (fonte: autor).

Por outro lado, as curvas com linhas espessas, também, representam um aumento na relação L/D , porém, neste caso, o diâmetro é reduzido e o comprimento é mantido constante. Um aumento na pressão crítica é observado com a alteração de diâmetro, pois, apesar de se obter uma estrutura mais esbelta, a relação h/D é afetada implicando em um aumento de rigidez para a casca.

Outra comparação foi realizada, relacionando a pressão crítica com diferentes valores de h/D e um mesmo comprimento, como pode ser observado no gráfico da Figura 3.20.

Figura 3.20 – Gráfico pressão crítica *vs.* relação h/D (fonte: autor).

Pode-se observar nesse gráfico que, aumentando a espessura ou diminuindo o diâmetro, ou seja, aumentando a relação h/D , a pressão crítica também aumenta. Tal comportamento ocorre pois aumentar a relação h/D significa obter uma geometria com maior rigidez, logo, com uma pressão crítica maior. Toma-se o cuidado de manter o valor da relação h/D no intervalo de cascas finas para não incluir outros fatores que alteram o valor da carga crítica, como não linearidade do material.

3.2.2 Comparação com análise geometricamente não linear

Para avaliar a influência das imperfeições geométricas da casca, análises foram feitas através de simulações geometricamente não lineares com auxílio do pacote estrutural do ANSYS, o qual permite impor o primeiro modo da flambagem linear como imperfeição no cilindro [83]. Assim, afirma-se que uma casca é sensível à imperfeição se o resultado da análise não linear for menor que o da linear [84].

Segundo os manuais do ANSYS [85] - [86], os resultados da simulação linear de flambagem são pós processados por um algoritmo (ANSYS APDL) que impõe os deslocamentos do primeiro modo de flambagem como imperfeição na estrutura original. Um fator percentual da espessura foi aplicado nesses deslocamentos, ou seja, a variação da geometria inicial tem a configuração do primeiro modo de flambagem, porém com deslocamentos equivalentes a uma fração da espessura do vaso, como exemplifica a Figura 3.21.

Figura 3.21 – Primeiro modo de flambagem imposto com 35% da espessura (fonte: autor).

Foram selecionadas cinco variações percentuais da espessura como imperfeições: 100%h, 35%h, 10%h, 5%h e 1%h. Então, a estrutura imperfeita é submetida a uma simulação não linear para a análise da carga crítica.

O gráfico da Figura 3.22 exibe a curva da estrutura com 35% da espessura como imperfeição, a curva da estrutura perfeita e a carga crítica gerada pela simulação linear. Pode-se observar que a estrutura perfeita se deforma linearmente até atingir a carga crítica, $P_c = 4,4686$ MPa, e após esse ponto apresenta as deformações características da instabilidade. Nota-se, também, que a estrutura imperfeita apresenta um comportamento não linear até o valor do ponto limite de $P_s = 3,42$ MPa, onde a estrutura entra em colapso. Esse valor é 76,36% da carga crítica da simulação linear, evidenciando uma sensibilidade à imperfeição.

Pode-se observar que a estrutura imperfeita apresenta o comportamento de ponto limite e não mais o bifurcacional simétrico instável, como descrito no Capítulo anterior. O ponto limite P_s apresenta tangente nula e indica a perda de estabilidade da estrutura.

Figura 3.22 – Simulação geometricamente não linear de um vaso cilíndrico (AL5456-H111, fonte: autor).

Evidenciando a influência das imperfeições, o gráfico da Figura 3.23 exhibe o comportamento da estrutura para diferentes valores de imperfeição. É possível notar que quanto maior a imperfeição, menor a carga crítica correspondente, confirmando que as imperfeições atuam como gatilhos de esforços de flexão que impulsionam o aparecimento de grandes deslocamentos relativos aos modos de estabilidade [29]. Em outras palavras, tais desvios da geometria inicial provocam a falha por instabilidade em cargas menores que as teóricas.

Figura 3.23 – Comparação da influência na carga crítica para diferentes valores de imperfeição (fonte: autor).

Como no caso de 35% de imperfeição, ocorre o fenômeno de ponto limite, onde a estrutura perde sua estabilidade, grandes deformações pós críticas ocorrem e a presença de imperfeições geométricas gera cargas críticas inferiores às obtidas analiticamente. Quando ocorrer uma imperfeição equivalente ao valor da espessura, a carga crítica simulada vale 2,94 MPa, 66% da obtida pela análise linear, enquanto as cargas críticas das estruturas com imperfeições de 5% e 1% da espessura são 6% e 2% menores que a linear, respectivamente. Conforme o grau de imperfeição diminui, maior é o valor da carga crítica correspondente.

Para levantar a curva de sensibilidade à imperfeição da casca cilíndrica em questão, utiliza-se a equação (2.4), a lei de Koiter, a qual relaciona as cargas críticas de estruturas perfeitas e imperfeitas. A partir dessa equação, são geradas diversas curvas para vários valores de b_1 e os correspondentes valores de δ_1/h , representando as imperfeições. Essas curvas são comparadas com as cargas geradas pelas simulações lineares, não lineares e os respectivos graus de imperfeição, como mostrado no gráfico da Figura 3.24.

Figura 3.24 – Curva P_s/P_c vs. δ/h para a casca cilíndrica, (fonte: autor).

A curva, que representa as relações P_s/P_c obtidas das simulações, apresenta uma correspondência com a Lei de Koiter. Para um valor de $b_1 = -0,015$ o comportamento da estrutura simulada é coerente com o descrito pela lei de Koiter (2.4). Portanto, a simulação não linear é capaz de representar o comportamento da casca e estimativas das pressões críticas para a casca com diferentes imperfeições podem ser obtidas pela lei de Koiter ou pela simulação geometricamente não linear.

É possível, também, utilizar a equação (2.4) para obter as pressões críticas das estruturas imperfeitas, basta substituir na relação δ/h as imperfeições selecionadas e utilizar $b = -0,015$. Os resultados das simulações lineares (P_c), não lineares (P_s) e da equação (2.4) (P_{s1}) são exibidos e comparados na Tabela 3.

Tabela 3 – Comparação dos resultados das simulações lineares (P_c), das simulações não lineares (P_s) e a equação (2.4), P_{s1} .

Imperfeição	P_s (MPa)	P_{s1} (MPa)	P_s/P_c (MPa)	P_{s1}/P_c (MPa)
100% h	2,94	2,65	0,66	0,59
35% h	3,42	3,57	0,77	0,80
10% h	3,96	4,08	0,89	0,91
5% h	4,18	4,22	0,94	0,94
1% h	4,38	4,39	0,98	0,98

As pressões críticas para uma imperfeição de 35% da espessura são $P_s = 3,42$ MPa e

$P_{s1} = 3,57$ MPa, diferindo 23% e 30% da carga linear. Percebe-se que as relações entre P_s/P_c e P_{s1}/P_c apresentam coerência entre si, onde ocorrem pequenas diferenças para uma imperfeição da ordem da espessura, $P_s/P_c = 0,66$ e $P_{s1}/P_c = 0,59$. Enquanto, para imperfeições pequenas como 5% da espessura, as cargas $P_s = 4,18$ MPa e $P_{s1} = 4,22$ MPa, ambas diferem da carga linear 94% aproximadamente. Em outras palavras, é possível obter a carga crítica da estrutura com imperfeições tanto pela simulação não linear como pela equação (2.4), pois os resultados delas apresentam diferenças de até 7% em relação a carga da análise linear.

Outro fator que corrobora com a coerência dos resultados é que as casca cilíndricas axialmente comprimidas apresentam uma sensibilidade à imperfeição maior que as cascas comprimidas por pressão hidrostática [75]. Para o caso axialmente comprimido, o fator indicador da alta sensibilidade é $b = -1$. Enquanto, para o caso simulado de pressão hidrostática, o fator vale $b = -0,015$, indicando que a diferenças entre as cargas teóricas e experimentais são menores. Com isso, para imperfeições muito pequenas, a carga crítica analítica é utilizada como aproximação para a carga de colapso da estrutura e para uma imperfeição da ordem da espessura ($\delta_1/h = 1$), temos uma redução na pressão crítica analítica da ordem de 35%.

3.2.3 Comparação com dados experimentais

A fim de validar os resultados da ferramenta numérica e das simulações, foi realizada uma comparação com dados experimentais, onde imperfeições menores que a espessura foram utilizadas [34], [87], [88], [89]. Os resultados desses trabalhos são exibidos no gráfico da Figura 3.25, onde o eixo das abscisas é a relação h/D e as ordenadas são as relações das cargas experimentais pelas teóricas para cada vaso analisado. Neste gráfico foram incluídas as relações das simulações não lineares junto com os resultados produzidos na ferramenta numérica para comparação e validação desta última.

Figura 3.25 – Comparação entre dados experimentais e as simulações não lineares de um vaso cilíndrico (fonte: autor).

Pode-se observar que as diferenças entre teoria e testes experimentais, na carga crítica de cascas sujeitas à pressão externa uniforme, estão entre 1% e 40%. No entanto, alguns dos resultados obtidos da literatura são baseados em modelos aproximados, por exemplo, Windenburg e Trilling utilizam a equação (2.13) e, por esse motivo, uma discrepância maior entre teórico e experimental é notada e, também, surgem cargas experimentais maiores que as teóricas.

Para imperfeições menores que a espessura, o valor de referência para as diferenças entre teoria e experimentos é da ordem de 25% [87] e o resultado da simulação com 35% de imperfeição é compatível com esse valor.

Portanto, essa medida de imperfeição pode ser utilizada como referência para o dimensionamento. Caso a estrutura apresente imperfeições menores que 35% da espessura, a pressão crítica analítica é uma estimativa aceitável, enquanto, se as imperfeições forem maiores que 35%, uma retificação da geometria é recomendada.

3.3 Proposta de critério para projeto

Após as análises descritas anteriormente, é possível corrigir o coeficiente de segurança utilizado, baseando-se nas imperfeições e evitando super dimensionamentos. Aplica-se tal coeficiente nos cálculos analíticos realizados com a ferramenta numérica para que o veículo dimensionado tenha a resistência, massa e capacidade de realizar suas missões.

Caso tubos comerciais forem utilizados na composição do vaso de pressão, os valores de tolerância fornecida pelo fabricante desses tubos ou a tolerância de usinagem convencional

podem ser utilizados como referência para as imperfeições. Os valores de tolerância obtidos dos fabricantes são equivalentes às imperfeições de 35% e 5% da espessura [90], as quais geram as pressões críticas $P_{s35} = 3.42$ MPa e $P_{s5} = 4.18$ MPa, respectivamente.

Considerando as simulações não lineares, pode-se notar que um fator de segurança aceitável, sob o ponto de vista de projeto, equivale a um acréscimo de 35% no valor da pressão crítica da estrutura imperfeita. Essa proposta garante um dimensionamento para cascas seguro, considerando as tolerâncias de fabricação obtidas.

Como dito anteriormente, os fenômenos de instabilidade tem como característica grandes deformações e, para uma estrutura de um submersível, essas deformações causam danos ou a perda do veículo. Além disso, o veículo trabalha submerso e seu vaso de pressão também deve ser analisado sob o ponto de vista de vedação. A falha de vedação do vaso de pressão causaria danos, como por exemplo, curto circuito elétrico ou explosão de baterias, podendo causar a perda do veículo. Portanto, será considerado outro critério baseado na vedação estática e dinâmica, onde as imperfeições e as deformações da casca são limitadas pela excentricidade e a deformação limite que o sistema de vedação permite.

Segundo fabricantes de anéis do tipo o'ring [91] e retentores [92], os sistemas de vedação de um AUV, como o Pirajuba, executam suas funções até uma deformação (excentricidade no raio) máxima igual a 2,5% do raio do vaso. Utilizando o valor de 35% como referência para a imperfeição geométrica, as relações de pressão para esse caso valem $P_{s35}/P_c = 0,743$ e $P_{s35}/P_f = 0,798$. Portanto, propõe-se um aumento, menor que o sugerido anteriormente, de 25% na pressão crítica para garantir que o projeto de cascas cilíndricas não falhe sob o ponto de vista de vedação, estrutural ou de imperfeições.

Para exemplificar as análises descritas, é realizada uma comparação das pressões críticas obtidas pelas análises de escoamento, da instabilidade e do critério proposto para um mesmo vaso de pressão. As pressões críticas são calculadas a partir do vaso de pressão existente do AUV Pirajuba ($L = 840$ mm, $D_i = 188$ mm e $h = 6,35$ mm), onde a pressão crítica obtida pelo escoamento do material é calculada pela equação (A.50), a pressão crítica por instabilidade resulta da equação (2.10) e se aplica um aumento de 25% na carga de instabilidade para o critério relativo à vedação. Essa comparação pode ser observada na Tabela 4.

Tabela 4 – Comparação das pressões máximas por diferentes análises.

Análise	Pressão crítica (MPa)	Profundidade máxima (m)
Escoamento	23,31	2331
Instabilidade	8,87	887
Critério de vedação	7,09	709

Nessa tabela, são apresentadas as máximas pressões que cada análise fornece para dimensões definidas. Pela análise de escoamento, o vaso suportaria mais de 2300 metros

de profundidade, enquanto que, pelo critério de instabilidade, suportaria 887 metros. Para o caso de AUVs, o critério do escoamento não se aplica, pois mecanismo de falha é regido pela instabilidade. O critério de vedação é aplicado para o caso dos vasos de pressão submersos, garantindo vedação, resistência e que o veículo realize suas missões, com uma pequena redução na profundidade de trabalho.

Outra comparação é realizada com o objetivo de redimensionar a espessura do vaso de pressão existente no AUV Pirajuba para uma profundidade de cem metros através das três análises citadas: escoamento, instabilidade e critério relativo à vedação. Então, as espessuras redimensionadas, sem o coeficiente de segurança, são exibidas na Tabela 5.

Tabela 5 – Comparação das espessuras mínimas e pressões críticas para uma casca em alumínio.

Análise	Espessura (mm)	Pressão crítica (MPa)	Profundidade máxima (m)
Escoamento	1,64	1,10	110
Instabilidade	3	1,35	135
Critério de vedação	3,30	1,35	135

A Tabela 5 mostra as pressões críticas e as espessuras mínimas que a geometria e o material utilizado no vaso para suportar cem metros de profundidade. Nota-se que a análise de escoamento apresenta a menor espessura possível, porém não se aplica ao caso de AUVs como dito anteriormente. Os resultados da análise por instabilidade são uma espessura de 3 mm e uma pressão crítica que permitem o vaso operar até, aproximadamente, 135 metros de profundidade.

No entanto, os fenômenos de instabilidade estão sujeitos a imperfeições geométricas, as quais geram cargas críticas menores que as calculadas analiticamente. Por esse motivo, para se garantir a estanqueidade do vaso, aplica-se o critério de vedação, onde a casca redimensionada deve apresentar uma deformação máxima de 2,5 mm para uma carga equivalente à pressão crítica obtida pela análise de instabilidade. Posteriormente, foi realizada uma simulação para avaliar o critério de vedação, como pode ser visto no gráfico da Figura 3.26, onde as curvas das estruturas dimensionadas por estabilidade e pelo critério de vedação são exibidas, ambas com 35% de suas espessuras como imperfeição.

Figura 3.26 – Avaliação do critério proposto (fonte: autor).

Pode-se observar, neste gráfico, que a pressão crítica da estrutura com 35% de imperfeição, dimensionada pela análise de instabilidade, vale 3,42 MPa e apresenta uma deformação de 6,74 mm neste ponto limite. A casca redimensionada pelo critério de vedação apresenta uma deformação de 2,22 mm, inferior a 2,5% do raio da casca, para a mesma carga de 3,42 MPa. Portanto, essa nova estrutura garante a resistência, a estanqueidade e a operação do veículo em troca de um acréscimo na espessura e, conseqüentemente, um aumento menor que 1 kg, apenas, na massa total do veículo.

4 Análise da influência de enrijecedores no vaso de pressão de um AUV

Neste capítulo, serão apresentados métodos para aumentar a rigidez dos vasos de pressão através da utilização de elementos enrijecedores.

A obtenção da pressão crítica pelos métodos analíticos e dos elementos finitos realizadas no capítulo anterior são aplicadas em um vaso de pressão com enrijecedores convencionais e seus resultados são comparados com dados experimentais obtidos da literatura.

No entanto, o uso de enrijecedores convencionais nem sempre é viável em AUVs, não só pelo espaço comprometido nos vasos de pressão, mas também pela dificuldade e custo de manufatura envolvidos. Então, propõe-se investigar a substituição dos enrijecedores convencionais pelas cavernas da prateleira de eletrônica, estruturas metálicas removíveis no interior dos vasos responsáveis pela disposição dos equipamentos e circuitos eletrônicos embarcados. O potencial estrutural das mesmas ainda não foi investigado em nenhum trabalho relacionado ao projeto de AUVs. Neste capítulo, pretende-se realizar tal estudo a partir de prateleiras projetadas para o vaso de pressão do AUV Pirajuba.

4.1 Análise da casca com enrijecedores convencionais

Para avaliar o ganho de rigidez proporcionado enrijecedores convencionais à casca, adiciona-se 4 espaçados de 168 mm no vaso de pressão cilíndrico analisado no capítulo anterior, o qual é feito de alumínio com 4,75 mm de espessura.

A pressão crítica da nova estrutura, vaso e enrijecedores, é recalculada pelas equações (2.27) e (2.28), considerando que a geometria dos enrijecedores é similar à mostrada na Figura 2.5 e suas dimensões podem ser vistas na Tabela 6.

Tabela 6 – Geometria dos enrijecedores.

Parâmetros	Protótipo da caverna (mm)
h : espessura da casca	4,75
R : raio médio da casca	94
L_B : comprimento entre tampas	840
L_f : comprimento entre enrijecedores	168
d : altura do enrijecedor	10
h_w : espessura da alma do enrijecedor	6,38
f : largura do enrijecedor	6,38
h_f : espessura da flange do enrijecedor	2

A pressão crítica recalculada da estrutura é exibida na Tabela 7, junto com sua respectiva massa.

Tabela 7 – Pressões críticas e massas para o vaso enrijecido com $h = 4,75$ mm.

Configuração do vaso	Pressão Crítica (MPa)	Massa (kg)
4 enrijecedores, $L_f = 168$ mm	8,61	6,81

A configuração com 4 enrijecedores apresenta pressão crítica equivalente ao dobro da obtida para a casca não enrijecida. Tal ganho de 100%, permitiria que atingisse profundidades de 850 metros com segurança ou projetar um AUV mais versátil com mais sensores e instrumentos, apenas com um acréscimo de massa equivalente 200 gramas.

4.1.1 Análise linear de flambagem

Outra maneira de avaliar o ganho de rigidez que fornecido à casca pelos enrijecedores convencionais é através da análise linear de flambagem, a qual é realizada através de modelos de elementos finitos.

Foi realizada uma análise linear, através do software ANSYS, para o modelo do vaso com 4 enrijecedores, onde foram utilizados elementos hexaédricos com densidade de malha referente à espessura do vaso, uma condição de contorno simplesmente apoiada com deslocamento radial e o momento aplicado nas extremidades nulos, tendo uma delas o deslocamento longitudinal livre.

Como resultado se obteve uma pressão crítica $P_c = 10,297$ MPa e seu modo de instabilidade, como pode ser visto na Figura 4.27. Esse valor é 230,34% maior em relação à pressão crítica da casca sem enrijecedores $P_f = 4,4686$ MPa. Além disso, a pressão simulada é 19,6% maior que a calculada analiticamente, pois essa última considera uma penalidade devido ao efeito prejudicial das imperfeições iniciais.

Figura 4.27 – Análise linear de flambagem da casca com enrijecedores (fonte: autor).

4.1.2 Análise geometricamente não linear

Para investigar se é possível representar o comportamento real da casca com imperfeições e enrijecedores, são realizadas simulações geometricamente não lineares com as mesmas condições de contorno e de malha que na análise linear da seção anterior. Na análise não linear o primeiro modo de instabilidade é imposto no modelo de elementos finitos do vaso como imperfeição, porém com deslocamentos reduzidos a percentuais do valor da espessura, como mostrado na Figura 3.21.

Foi gerado um gráfico de pressão *vs.* deformação com os resultados das simulações para diferentes graus de imperfeição (0%h e 10%h), como exibido na Figura 4.28.

Figura 4.28 – Curvas de pressão pela deformação para a casca com enrijecedores com diferentes valores de imperfeição (fonte: autor).

A curva que representa a casca perfeita (0%h) é linear e apresenta carga crítica de 30,2 MPa. Para o caso com 10% da espessura como imperfeição, foi obtida uma pressão crítica de 9,45 MPa cuja diferença em relação a análise linear é de 8,36% menor.

Nota-se que a influência nas imperfeições é menor que no caso da casca não enrijecida, porém ainda não pode ser desprezada.

4.1.3 Comparação dos resultados para o enrijecedor convencional com dados experimentais da literatura

São comparadas as relações de pressão crítica da estrutura com e sem imperfeições (simulações não lineares e lineares) com relações de pressões experimentais e analíticas obtidas da literatura [93], [94], [95], [96]. Essas relações de pressão são utilizadas para gerar um gráfico de P_{exp}/P_{teo} vs. a razão $h/R * 100$, como mostrado na Figura 4.29.

Figura 4.29 – Comparação com dados experimentais obtidos na literatura (fonte: autor).

A configuração com 4 enrijecedores apresentou pressões críticas 8% menores que as simuladas linearmente. As diferenças entre cargas e o comportamento observados são similares aos obtidos dos trabalhos experimentais, onde ocorrem diferenças de 2% a 30% [96]. Portanto, as análises realizadas em vasos com enrijecedores convencionais são viáveis e utilizando essa configuração é possível projetar um veículo para maiores profundidades de operação ou reduzir a espessura do vaso de pressão para profundidade original e, ainda, minimiza-se o efeito das imperfeições inerentes às cascas.

4.2 Análise da casca com as cavernas da prateleira

Considera-se, a seguir, a estrutura interna ao vaso de pressão, que pode ser removível, ou seja, a mesma pode deslizar no interior do vaso devido à montagem ou a desmontagem do veículo. No AUV Pirajuba, a prateleira possui cavernas fabricadas em alumínio com 146,82 gramas, que estão representadas na Figura 4.30

Figura 4.30 – Prateleira de eletrônica e caverna do AUV Pirajuba (fonte: autor).

Para avaliar o ganho de rigidez que as cavernas da prateleira fornecem, são adicionadas 4 cavernas espaçadas 168 mm, ao vaso de pressão em alumínio de 4,75 mm de espessura.

Assim como no caso de enrijecedores convencionais, espera-se que as cavernas deslizantes contribuam para o aumento de rigidez do vaso, embora as mesmas não apresentem o mesmo grau de restrição à rotação e deslocamento radial da parede interna do vaso. Tais diferenças serão consideradas em análises por elementos finitos.

A seguir, as análises realizadas anteriormente, através do método dos elementos finitos, são aplicadas à casca com cavernas como enrijecedores em 3 configurações: a casca com 3 cavernas em duas disposições $L_f = 400$ mm e $L_f = 300$ mm, e com 4 cavernas ($L_f = 168$ mm), como pode ser visto na Figura 4.31.

Figura 4.31 – Configurações da casca: a) casca com 3 cavernas e 400 mm entre si, b) 3 cavernas com $L_f = 300$ mm e c) 4 cavernas com 168 mm entre si (fonte: autor).

4.2.1 Análise linear de flambagem

Para analisar o efeito das cavernas e a influência de seu material na resistência da casca, foi aplicado um modelo de elementos finitos para o vaso de pressão redimensionado (alumínio, $h = 4,75$ mm) e adicionado de cavernas. As cavernas são incluídas através de modelos CAD, onde o contato com a casca é definido de modo que apenas os deslocamentos circunferenciais das faces em contato sejam restringidos de modo a representar a realidade.

São analisadas as pressões críticas da casca para três materiais diferentes, como exibido na Tabela 8. Na parte inferior dessa Tabela são exibidas as pressões críticas analíticas para a casca em alumínio.

Tabela 8 – Pressões críticas para casca enrijecida pelas cavernas.

Material do enrijecedor	3 cavernas, $L_f = 400$ mm Pressão crítica (MPa)	3 cavernas, $L_f = 300$ mm Pressão crítica (MPa)	4 cavernas, $L_f = 168$ mm Pressão crítica (MPa)
Alumínio 5456-H111	6,20	6,70	8,15
AISI 316	7,32	8,61	11,86
Aço HY - 100	7,36	8,74	12,14
Vaso em Al5456-H111, P_{ci}	4,31	5,91	8,61

Comparando o uso do alumínio 5456-H111 com o aço AISI 316 para o caso de 3 cavernas

($L_f = 400$ mm), ocorre um aumento de 1,12 MPa na carga crítica, aproximadamente 15%, enquanto que para as configurações com 3 cavernas ($L_f = 300$ mm) e com 4 cavernas ($L_f = 168$ mm), ocorrem aumentos de, aproximadamente, 25% e um de 35% nas cargas críticas, respectivamente, devido ao fato do aço AISI 316 apresentar rigidez maior que o alumínio e, conseqüentemente, a casca com cavernas nesse material também apresenta maior rigidez.

A carga crítica aumenta cerca de 15% ao aproximar os enrijecedores da configuração com 3 cavernas, $L_f = 400$ mm, para a de $L_f = 300$ mm, ambas no aço HY-100. O número dos enrijecedores também aumenta a carga crítica, adicionando 4 cavernas em alumínio é possível obter um aumento de 3,86 MPa em relação a casca sem enrijecedores. Esse ganho equivale a aproximadamente 400 metros a mais na profundidade de operação ou um veículo com maior versatilidade nas missões, aumentando a massa da estrutura em um total de 587,28 gramas referente às 4 cavernas.

Comparando os resultados obtidos das equações (2.27) e (2.28) com os das simulações lineares, o caso com $L_f = 400$ mm e o com $L_f = 300$ mm são 32% e 12% menores, respectivamente, indicando uma sensibilidade à imperfeição. A configuração com 4 cavernas apresenta a carga teórica 4% maior que a da simulação linear.

As configurações com 3 e 4 cavernas, em alumínio, apresentam falha generalizada, porém com ganhos de até 283,5% na carga crítica, como ilustrado nas Figuras 4.32 e 4.33.

Figura 4.32 – Simulação do vaso enrijecido com 3 cavernas ($L_f = 300$ mm, fonte: autor).

Figura 4.33 – Simulação do vaso enrijecido com 4 cavernas ($L_f = 168$ mm, fonte: autor).

4.2.2 Análise geometricamente não linear

Foram realizadas simulações geometricamente não lineares para análise do comportamento da casca enrijecida na presença de imperfeições, onde nos modelos de elementos finitos se utilizou uma representação dos enrijecedores como faces na superfície interna da casca com os deslocamentos circunferenciais restringidos como mostrado na Figura 4.34.

Figura 4.34 – Modelo de elementos finitos do vaso enrijecido (fonte: autor).

Os modelos são aplicados nas configurações com 3 cavernas ($L_f = 400$ mm) e 4 cavernas com fatores percentuais da espessura (100%h, 35%h, 10%h e 5%h) representando imperfeições geométricas no diâmetro da casca, conforme ilustra a Figura 3.21. O comportamento não linear para cada grau de imperfeição da estrutura com 3 cavernas pode ser visto no gráfico da Figura 4.35.

Figura 4.35 – Simulação do vaso enrijecido (fonte: autor).

As curvas com 10% e 35% da espessura como imperfeição apresentam um comportamento de ponto limite, similar ao da casca sem enrijecedores, porém com cargas críticas maiores, ambas cerca de 225% maiores. Observa-se que, até 35% de h como imperfeição, quanto maior a imperfeição, menor a carga crítica em relação à teórica.

Por outro lado, para imperfeições da ordem da espessura (100% h), a carga crítica é igual a 8,80 MPa, 14% maior que o caso com 35% de h , onde o comportamento da casca se altera e as deformações são acompanhadas por um aumento na rigidez. Esse fenômeno é típico de estruturas com o comportamento bifurcacional simétrico estável e ocorre em casca enrijecidas por anéis de maneira similar [97]. Em outras palavras a casca se deforma entre os enrijecedores primeiramente e conforme a carga segue aumentando a casca continua se deformando até que o colapso generalizado ocorre a uma carga e uma deformação maiores.

A configuração com 3 cavernas ($L_f = 400$ mm) se encontra em uma situação em que pode se comportar como uma casca com ou sem enrijecedores. Para imperfeições menores que 35% da espessura, as cargas críticas são até 25% inferiores que a teórica com comportamento limite. Enquanto, se forem equivalentes a espessura, ocorre uma alteração no comportamento e a carga crítica é 15% apenas menor que a teórica, carga similar a do caso com 10% de imperfeição. Tal situação de comportamento pode implicar em acidentes como, falhas de vedação ou a perda do veículo. Então, o mesmo procedimento foi realizado para o caso com 4 cavernas e os resultados são exibidos na Figura 4.36.

Figura 4.36 – Simulação do vaso enrijecido (fonte: autor).

É possível notar que, para qualquer grau de imperfeição, a casca apresenta um comportamento similar ao bifurcacional simétrico estável, inclusive com os valores das pressões críticas maiores que os teóricos, cerca de 3%, como no caso de 35% de imperfeição com 29,34 MPa enquanto a linear de 29,2 MPa.

Nota-se um aumento na pressão crítica da casca com quatro cavernas quando comparado com o caso anterior, onde a pressão crítica é 322,77% maior para o caso de 10% de imperfeição. Neste caso, obtém-se um vaso que opera em profundidades máximas de 3000 metros com um aumento de apenas 587,28 gramas.

A sensibilidade à imperfeição das configurações estudadas se torna evidente ao relacionar os resultados das pressões críticas simuladas linearmente (P_{ec}) com as simuladas não linearmente (P_{es}) das estruturas imperfeitas, como mostrado na Tabela 9.

Tabela 9 – Comparação dos resultados da simulação linear (P_{ec}) e da simulação não linear (P_{es}).

	3 cavernas ($L_f = 400$ mm)	4 cavernas ($L_f = 168$ mm)
Imperfeição	Simulação não linear (P_{es} , MPa) - P_{es}/P_{ec}	Simulação não linear (P_{es} , MPa) - P_{es}/P_{ec}
100% h	8,80 - 0,86	29,20 - 0,99
35% h	7,71 - 0,75	28,93 - 1,01
10% h	9,09 - 0,88	29,34 - 1,03
5% h	9,55 - 0,93	29,30 - 1,02

O vaso sem enrijecedores apresenta o comportamento de ponto limite e cargas críticas 9% a 37% menores que a simulada linearmente (4,4686 MPa), as quais são proporcionais a grandeza das imperfeições.

No caso com 3 cavernas, cada grau de imperfeição apresenta uma carga crítica inferior à linear, indicando uma sensibilidade à imperfeição moderada. Os casos com 10% e 35% de imperfeição apresentam uma redução nas cargas críticas de 12% e 25%, respectivamente, e seus comportamentos são similares ao da casca sem enrijecedores. Enquanto, uma imperfeição de 100% da espessura provoca um aumento na rigidez da casca conforme ocorrem as deformações e a carga crítica, de 8,80 MPa, é similar a do caso com 10% de imperfeição, maior que a do caso com 35%.

Os resultados das simulações para a configuração com 4 cavernas mostram que qualquer grau de imperfeição implica em pressões críticas iguais ou maiores que a linear, evidenciando uma insensibilidade à imperfeição similar a de cascas enrijecidas convencionais. As cargas críticas para 10% e 100% de imperfeição são 29,2 MPa e 29,34 MPa, respectivamente, ambas cerca de 3% maior que a teórica.

O efeito do número de cavernas na casca é ilustrado no gráfico da Figura 4.37, onde as curvas para cascas com 35% da espessura como imperfeição e com diferentes números de cavernas são exibidas.

Figura 4.37 – Efeito do número de cavernas na casca (fonte: autor).

Nota-se que a configuração com três cavernas e $L_f = 400$ mm apresenta uma deformação máxima de 17,832 mm, 150% maior que com 4 cavernas, porém com uma carga crítica de 7,705 MPa, quatro vezes menor aproximadamente. Inicialmente, o comportamento das curvas com 4 e 5 cavernas são similares, mas as cargas críticas divergem com 28,9 MPa e 37,6 MPa, respectivamente. A configuração com 6 cavernas apresenta deformação máxima, de 12,048 mm, similar a da configuração com 4 cavernas, porém com uma carga crítica de 44,55 MPa, 150% maior.

No entanto, para evitar falhas por vedação o vaso de pressão de um AUV opera com deformações máximas da ordem de 2,5% do raio. Então, um número de cavernas maior que

4 não é necessário, pois os vasos com 4, 5 e 6 cavernas apresentam o mesmo comportamento para as deformações permissíveis.

4.2.3 Comparação das cavernas da prateleira com enrijecedores convencional

Para analisar comparativamente o aumento de rigidez fornecido por estruturas removíveis, realizou-se a simulação de 3 configurações diferentes: a) vaso com a adição de 4 enrijecedores convencionais (soldados), b) vaso com anéis removíveis, c) vaso com cavernas removíveis (como as da prateleira do AUV Pirajuba), como exibido na Figura 4.38.

Figura 4.38 – Modelos: a) casca com enrijecedores convencionais, b) casca com anéis removíveis, c) casca com 4 cavernas com $L_f = 168$ mm (fonte: autor).

Utilizando em todas as configurações a mesma casca, feita em alumínio de espessura 4,75 mm, incluem-se os enrijecedores convencionais com altura de 5 mm e espessura de 6,375 mm. No caso dos anéis removíveis, 4 foram incluídos com as mesmas dimensões dos enrijecedores convencionais em um conjunto de 5 componentes separados. Foram realizadas simulações para avaliar se o caso com anéis fornece uma resposta similar ao do caso convencional, onde foram investigados diferentes condições de contato do anel com a casca como o caso do anel soldado à casca, "*bonded*", e com um coeficiente de atrito $\mu = 0,2$, recomendado por fabricante [98]. Os resultados das simulações podem ser vistos no gráfico da Figura 4.39.

Figura 4.39 – Simulações da casca com enrijecedores convencionais e anéis removíveis (fonte: autor).

Os enrijecedores convencionais apresentam uma carga crítica de 26,20 MPa, aumento de 584% em relação a casca não enrijecida, com um comportamento linear anterior à carga crítica. Enquanto, foi obtido da representação dos anéis soldados, "bonded", uma carga crítica de 26,1 MPa, uma diferença da ordem de 1%, também, com o comportamento linear anterior à carga crítica. Considerando o caso com coeficiente de atrito a $\mu = 0,2$, ocorre um comportamento não linear próximo à carga crítica, 25,6 MPa, e uma diminuição de 4,82% na carga é notada em relação a dos convencionais. Portanto, afirma-se que as hipóteses consideradas são razoáveis neste caso e os anéis removíveis têm uma resposta similar aos enrijecedores convencionais para a situação de aplicação de um AUV, fornecendo rigidez e versatilidade ao veículo.

Analisando a casca com cavernas, aplicou-se diferentes condições no contato com a casca para avaliar se atuam como o enrijecedor convencional. Os tipos de contato utilizados foram a condição soldada, "bonded", e três coeficientes de atrito estático $\mu_1 = 0,02$, $\mu_2 = 0,2$, e $\mu_3 = 1,2$, referentes a 2%, 20% e 120% da carga no contato, uma vez que o software ANSYS aplica a relação $F = \mu R$ para a força aplicada, o coeficiente de atrito e a reação gerada no contato [85].

Esses coeficientes são utilizados partindo de uma situação de atrito muito baixa para uma além da realidade, observando a condição do atrito variar devido a pressão externa exercida e sua influência na carga crítica, considerando que o valor de atrito estático varia devido a tratamentos superficiais, como anodização, a composição química do material, entre outros.

As curvas de Pressão *vs.* Deformação para a casca com enrijecedores convencionais e com cavernas, obtidas através das simulações são apresentadas na Figura 4.40.

Figura 4.40 – Comparação entre a casca enrijecida com enrijecedores convencionais e cavernas da prateleira (fonte: autor).

As curvas para a casca com cavernas apresentam um comportamento não linear anterior a pressão crítica. Como visto acima, os enrijecedores convencionais apresentam uma carga crítica de 26,10 MPa. Enquanto, para a caverna com o contato modelado como soldado, a carga crítica obtida vale 8,70 MPa que é 33,3% da carga para o caso convencional. Modelando as faces de contato com um coeficiente de atrito pequeno $\mu_1 = 0,02$, a carga crítica obtida é 5,70 MPa, 65,60% da carga com a condição soldada e 24,84% da carga obtida para os convencionais. Considerando um coeficiente de atrito médio $\mu_2 = 0,2$, foi obtida uma carga crítica de 6,30 MPa, 9,6% maior que o caso anterior com $\mu_1 = 0,02$, porém ainda menor que a dos convencionais. Para um coeficiente de atrito alto, $\mu_3 = 1,2$, obtém-se uma carga crítica 71,26% menor que a dos convencionais, 7,5 MPa.

Observa-se que, como esperado, as simulações com as cavernas apresentam uma resposta não linear e com cargas críticas proporcionais ao atrito. Em outras palavras, um coeficiente de atrito maior apresenta uma restrição de deslocamentos maior e, conseqüentemente, maior rigidez.

Observa-se, também, que no caso com enrijecedores convencionais e com anéis removíveis, a geometria dessas estruturas é axissimétrica e fornece rigidez com um comportamento linear precedente à carga crítica. Ao analisar a geometria das cavernas utilizadas, não se observa a mesma simetria e a restrição dos movimentos da casca não é homogênea ao longo da circunferência, fornecendo um aumento de rigidez para a casca inferior aos outros casos com um comportamento não linear.

Para evidenciar o ganho que os enrijecedores fornecem à casca, foi gerado o gráfico da Figura 4.41 comparando o resultado da análise linear das curvas da caverna não enrijecida com as curvas do enrijecedor convencional, da caverna com o contato *bonded* e com coeficiente de atrito 0,2.

Figura 4.41 – Comparação entre a casca não enrijecida e cascas com diferentes enrijecedores (fonte: autor).

Nota-se que, como já dito, o enrijecedor convencional fornece um ganho de aumento de 584% em relação a casca não enrijecida, a qual vale 4,47 MPa. A caverna utilizada também fornece um aumento de rigidez para casca em ambas os tipos de contato: no caso *bonded* a pressão crítica 8,70 MPa é 194,7% maior que a carga da casca sem enrijecedores; no caso com coeficiente de atrito 0,2, a pressão crítica é 6,30 MPa é 140,9% maior que a carga da casca sem enrijecedores.

Portanto, é possível utilizar a caverna da prateleira como enrijecedor para uma casca, pois embora a casca com cavernas não apresente o mesmo aumento de rigidez que os enrijecedores convencionais, um comportamento similar ocorre para valores entre 55% e 85% das cargas críticas. Além disso, esse aumento é obtido com um acréscimo de massa da ordem de 10%, considerando que a casca com os convencionais possui 6,62 kg e com as cavernas 7,09 kg.

O aumento de rigidez gerado pela configuração com 4 cavernas, faz que a profundidade de operação seja o dobro em comparação com a casca não enrijecida, o que aumenta a versatilidade de missões de um veículo de pequeno porte e baixas profundidades, podendo-se colocar mais sensores embarcados

O aumento de rigidez gerado pela configuração com 4 cavernas é equivalente ao dobro da profundidade de operação da casca não enrijecida, o que aumenta a versatilidade de

missões de um veículo de pequeno porte e baixas profundidades, podendo-se colocar mais sensores embarcados. Além disso, evita-se as imperfeições devido a tensões residuais referentes ao processo de soldagem dos enrijecedores convencionais, as quais podem reduzir em até 30% a pressão crítica da casca enrijecida [27]. Outra vantagem é a facilidade na construção dos vasos de pressão, onde um tubo comercial adicionado de cavernas, como enrijecedores deslizantes, pode ser utilizado com ganhos estruturais e sem perda de funcionamento do veículo. Também se facilita a construção de estruturas mais complexas como uma ligação cilindro com um cone, pois o processo de fabricação desse conjunto com as cavernas deslizantes evita um número maior de soldagens.

5 Conclusões

O comportamento das cascas com e sem enrijecedores foi analisado, onde as hipóteses feitas para utilização das cavernas da prateleira como enrijecedores internos deslizantes foram avaliadas e a disposição junto com o número das cavernas utilizadas determinam o comportamento da estrutura enrijecida.

Pode-se obter aumento significativo de rigidez à flambagem através do uso de enrijecedores, mesmo que não convencionais. Para o caso estudado com cavernas, um aumento de cerca de 40% na pressão crítica é obtido apenas rearranjando-se a disposição de três cavernas dentro da casca e, com 4 cavernas, obtém-se uma carga crítica 4 vezes maior que a configuração com 3 cavernas e $L_f = 400$ mm. Embora utilizando um número maior de cavernas se obtém um ganho significativo de rigidez, um AUV opera com pequenas deformações e, neste caso, o vaso apresenta um comportamento similar com 4 ou mais cavernas, sendo desnecessário o uso de um número maior que 4 para o comprimento analisado. O comportamento da casca enrijecida com 4 ou mais cavernas deslizantes é similar ao tipo simétrico estável e insensível à imperfeição, enquanto a casca sem enrijecedores é de ponto limite e apresentam sensibilidade à imperfeição.

As propriedades dos materiais (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson, densidade) e as dimensões geométricas (comprimento, diâmetro e espessura) são parâmetros que influenciam o cálculo da pressão crítica de flambagem. Em particular, a análise mostra que os parâmetros geométricos e o módulo de elasticidade são significativos na determinação da carga crítica.

As opções que melhor atendem os objetivos de um vaso de pressão variam de acordo com a operação. Contudo, as ligas de alumínio se mostram a solução com melhor custo-benefício até certa profundidade. Esse material proporciona a resistência mecânica necessária com um peso relativamente pequeno. Também apresenta muitas possibilidades de tratamento e usinagem.

Resultados analíticos e aqueles baseados na aplicação do método de elementos finitos apresentaram significativa concordância, o que confirma a literatura. Alguns autores afirmam, inclusive, que os resultados analíticos apresentam melhor conformidade com dados experimentais, tanto nos formatos mais complexos como nos mais convencionais. Portanto, a ferramenta numérica se torna importante na redução de custos e na confiabilidade do projeto. Agregam ainda mais valor à ferramenta recursos de otimização e síntese. Logo, com uma ferramenta numérica é possível acelerar o processo de desenvolvimento de veículos não tripulados submarinos.

5.1 Sugestões de trabalhos futuros

Como uma das sugestões para o prosseguimento desta pesquisa, propõe-se a realização de ensaios experimentais com cascas enrijecidas pelas cavernas deslizantes com objetivo de validar os modelos empregados, levando-se em conta a margem de incerteza entre a previsão teórica e resultados experimentais conforme evidenciado na literatura e ilustrado nas figuras 3.25 e 3.29.

Outra linha de trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo analítico para o dimensionamento da casca com cavernas deslizantes, atuando como enrijecedores. Pode-se investigar a adaptação dos modelos analíticos de Kendrick [79] para as condições de restrição que as cavernas deslizantes aplicam na casca. Após a obtenção de expressões analíticas, pode-se prosseguir com a comparação em relação a resultados produzidos pelo método dos elementos finitos e aqueles produzidos por testes experimentais.

Sugere-se, também, investigar o efeito das imperfeições através de análises estruturais e de estabilidade dos vasos de pressão em outras formas geométricas adotadas em AUVs: cones e esferas, bem como em estruturas formadas pela união de formas esféricas cilíndricas e cônicas.

Por fim, são sugeridas análises de otimizações paramétrica, de forma e topológica do vaso de pressão com as restrições típicas de um AUV, a fim de minimizar a massa ou maximizar a carga crítica do vaso, como forma de redução de custos de projeto.

Referências

- 1 MOHSENI, K. Pulsatile vortex generators for low-speed maneuvering of small underwater vehicles. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 33, n. 16, p. 2209–2223, 2006. Citado na página 12.
- 2 GAFUROV, S. A.; KLOCHKOV, E. V. Autonomous unmanned underwater vehicles development tendencies. *Procedia Engineering*, Elsevier, v. 106, p. 141–148, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 12, 17 e 18.
- 3 MAKI, T.; URA, T.; SAKAMAKI, T. Auv navigation around jacket structures ii: map based path-planning and guidance. *Journal of Marine Science and Technology*, v. 17, n. 4, p. 523–531, 2012. Citado na página 12.
- 4 BOVIO, E.; CECCHI, D.; BARALLI, F. Autonomous underwater vehicles for scientific and naval operations. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 117–130, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.
- 5 CHYBA, M. Autonomous underwater vehicles. *Ocean Engineering*, Pergamon, v. 36, n. 1, p. 1, 2009. Citado na página 12.
- 6 BARROS, E. A. de; FREIRE, L. O.; DANTAS, J. L. Development of the pirajuba auv. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 43, n. 20, p. 102–107, 2010. Citado na página 12.
- 7 BARROS, E. de et al. New aspects in the pirajuba auv project. In: *ABCM (Ed.). COBEM 2011-21st International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 12.
- 8 NOGUEIRA, L. W. Projeto e análise estrutural do casco de um veículo submerso autônomo (auv). Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Mecânica- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.
- 9 TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. 1961. [S.l.: s.n.], 1961. Citado 17 vezes nas páginas 10, 11, 16, 19, 33, 84, 85, 88, 91, 95, 99, 100, 101, 107, 110, 111 e 115.
- 10 WYNN, R. B. et al. Autonomous underwater vehicles (auvs): Their past, present and future contributions to the advancement of marine geoscience. *Marine Geology*, Elsevier, v. 352, p. 451–468, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 11 CAMILLI, R. et al. Tracking hydrocarbon plume transport and biodegradation at deepwater horizon. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 330, n. 6001, p. 201–204, 2010. Citado na página 16.
- 12 NODLAND, W. et al. Spurv ii-an unmanned, free-swimming submersible developed for oceanographic research. In: IEEE. *OCEANS 81*. [S.l.], 1981. p. 92–98. Citado na página 16.
- 13 AGEEV, M. et al. Autonomous underwater robots: Systems and technologies. *by MD Ageev (Nauka, Moscow, 2005){in Russian}*, 2005. Citado na página 16.

- 14 SERRANI, A.; CONTE, G. Robust nonlinear motion control for auvs. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, IEEE, v. 6, n. 2, p. 33–38, 1999. Citado na página 16.
- 15 BLIDBERG, D. R.; JALBERT, J.; AGEEV, M. D. Some design considerations for a solar powered auv: Energy management and its impact on operational characteristics. In: CITESEER. *INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON UNMANNED UNTETHERED SUBMERSIBLE TECHNOLOGY*. [S.l.], 1997. p. 50–59. Citado na página 17.
- 16 ALLEN, B. et al. Remus: a small, low cost auv; system description, field trials and performance results. In: IEEE. *OCEANS'97. MTS/IEEE Conference Proceedings*. [S.l.], 1997. v. 2, p. 994–1000. Citado na página 17.
- 17 KANTOR, G. et al. Experiments in navigation and mapping with a hovering auv. In: SPRINGER. *Field and Service Robotics*. [S.l.], 2008. p. 115–124. Citado na página 17.
- 18 BOWEN, A. D. et al. The nereus hybrid underwater robotic vehicle for global ocean science operations to 11,000 m depth. In: IEEE. *OCEANS 2008*. [S.l.], 2008. p. 1–10. Citado na página 17.
- 19 BARRETT, D. S. *The design of a flexible hull undersea vehicle propelled by an oscillating foil*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1994. Citado na página 17.
- 20 ASAKAWA, K. et al. Design concept and experimental results of the autonomous underwater vehicle aqua explorer 2 for the inspection of underwater cables. *Advanced Robotics*, Taylor & Francis, v. 16, n. 1, p. 27–42, 2002. Citado na página 17.
- 21 GRIFFITHS, G. *Technology and applications of autonomous underwater vehicles*. [S.l.]: CRC Press, 2002. v. 2. Citado na página 17.
- 22 ALVAREZ, A. A. *Análise e modelagem da delaminação de materiais compósitos no processo de furação*. tese de Doutorado. Citado na página 18.
- 23 MARTINS, M. *Caracterização microestrutural-mecânica e resistência à corrosão do aço inoxidável super duplex ASTM A890/A890M Grau 6A*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado na página 18.
- 24 MOUGO, A. *Microfrseamento do aço superduplex: uma comparação mecanística com aços inoxidáveis austenítico e ferrítico para as forças de usinagem e avaliação da superfície usinada super duplex ASTM A890/A890M Grau 6A*. Tese (Doutorado) — Universidade Deferal do Rio de Janeiro, 20016. Citado na página 18.
- 25 HYAKUDOME, T. Design of autonomous underwater vehicle. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, v. 8, n. 1, p. 131–139, 2011. Citado na página 18.
- 26 BEEM, H. R.; TRIANTAFYLLOU, M. S. et al. Biomimetic design of an undulatory stingray auv fin. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERS. *The Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference*. [S.l.], 2012. Citado na página 18.
- 27 MACKAY, J. Structural analysis and design of pressure hulls: the state of the art and future trends. *Defense R&D Canada–Atlantic, Technical Memorandum*, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 18, 21, 22 e 73.

- 28 WULLSCHLEGER, L.; MEYER-PIENING, H.-R. Buckling of geometrically imperfect cylindrical shells—definition of a buckling load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 645–657, 2002. Citado na página 19.
- 29 BUSHNELL, D. Buckling of shells-pitfall for designers. *AIAA journal*, v. 19, n. 9, p. 1183–1226, 1981. Citado 5 vezes nas páginas 9, 19, 23, 30 e 49.
- 30 MAZZILLI, C. E. N. Sobre a instabilidade de estruturas elásticas sensíveis a imperfeições. *Dissertação de Mestrado apresentada a Escola Politécnica da USP*, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 19, 29 e 134.
- 31 REIS, A.; CAMOTIM, D. *Estabilidade estrutural*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 6 vezes nas páginas 9, 11, 19, 26, 31 e 109.
- 32 FLÜGGE, W. *Stresses in shells*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 20.
- 33 DONNELL, L. H. *Beams, plates and shells*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 1976. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 29 e 34.
- 34 WINDENBURG, D. F.; TRILLING, C. Collapse by instability of thin cylindrical shells under external pressure. *Trans. Asme*, v. 11, p. 819–825, 1934. Citado 5 vezes nas páginas 20, 34, 52, 106 e 108.
- 35 ALLEN, H. G.; BULSON, P. S. *Background to buckling*. [S.l.: s.n.], 1980. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 40.
- 36 ROBERTSON, A. The strength of tubular struts. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, JSTOR, v. 121, n. 788, p. 558–585, 1928. Citado na página 20.
- 37 CHEN, T. On introducing imperfection in the non-linear analysis of buckling of thin shell structures. *repository.tudelft.nl - Coordinates*, v. 51, p. 4–375754, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 30.
- 38 HOFF, N. J.; MADSEN, W. A.; MAYERS, J. Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells. *AIAA Journal*, v. 4, n. 1, p. 126–133, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- 39 ALMROTH, B. O. Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells. *AIAA Journal*, v. 4, n. 1, p. 134–140, 1966. Citado na página 20.
- 40 SIMITSES, G. J.; HODGES, D. H. *Fundamentals of structural stability*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2006. Citado na página 20.
- 41 KARMAN, T. V. The buckling of spherical shells by external pressure. *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, v. 6, n. 2, 2012. Citado na página 21.
- 42 KARMAN, T. v. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 8, n. 8, p. 303–312, 1941. Citado na página 21.
- 43 KOITER, W. T. *The stability of elastic equilibrium*. [S.l.], 1970. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.

- 44 CROLL, J. Towards simple estimates of shell buckling loads. *Der Stahlbau*, v. 44, p. 243–248, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.
- 45 SCHMIDT, H. Stability of steel shell structures: General report. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, v. 55, n. 1, p. 159–181, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- 46 HUTCHINSON, J. Axial buckling of pressurized imperfect cylindrical shells. *AIAA journal*, v. 3, n. 8, p. 1461–1466, 1965. Citado na página 21.
- 47 DINKLER, D.; SCHÄFER, U. Limit loads for cylindrical shells under combined actions. *Proc. Carrying capacity of steel shell structures*, 1997. Citado na página 21.
- 48 THOMPSON, J. M. T.; HUNT, G. W. *A general theory of elastic stability*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1973. Citado 9 vezes nas páginas 9, 21, 25, 27, 28, 32, 117, 118 e 120.
- 49 ROORDA, J. Stability of structures with small imperfections. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 91, n. 1, p. 87–106, 1965. Citado na página 21.
- 50 CALLADINE, C. R. *Theory of shell structures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. Citado na página 21.
- 51 SAMUELSON, L. A.; EGGWERTZ, S. *Shell stability handbook*. [S.l.]: CRC Press, 2003. Citado na página 21.
- 52 ROSS, C. T. *Pressure vessels: external pressure technology*. [S.l.]: Elsevier, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- 53 ARBOCZ, J.; JR, J. S. Future directions and challenges in shell stability analysis. *Thin-Walled Structures*, Elsevier, v. 40, n. 9, p. 729–754, 2002. Citado na página 22.
- 54 RAVN-JENSEN, K.; TVERGAARD, V. Effect of residual stresses on plastic buckling of cylindrical shell structures. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 26, n. 9-10, p. 993–1004, 1990. Citado na página 22.
- 55 YU, C.-I. et al. Effect of weld reinforcement on axial plastic buckling of welded steel cylindrical shells. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, Springer, v. 13, n. 2, p. 79–90, 2012. Citado na página 22.
- 56 KOITER, W. et al. Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness. *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, n. 6, p. 797 – 805, 1994. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768394900787>>. Citado na página 22.
- 57 ROSS, C.; HUMPHRIES, M. The buckling of corrugated circular cylinders under uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*, v. 17, n. 4, p. 259 – 271, 1993. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026382319390006V>>. Citado na página 22.
- 58 ROSS, C. T.; LITTLE, A. P. The buckling of a corrugated carbon fibre cylinder under external hydrostatic pressure. *Ocean Engineering*, v. 28, n. 9, p. 1247 – 1264, 2001. ISSN 0029-8018. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801800000391>>. Citado na página 22.

- 59 BŁACHUT, J.; GALLETLY, G. Buckling strength of imperfect steel hemispheres. *Thin-Walled Structures*, v. 23, n. 1, p. 1 – 20, 1995. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026382319500001T>>. Citado na página 22.
- 60 BŁACHUT, J. Optimally shaped torispheres with respect to buckling and their sensitivity to axisymmetric imperfections. *Computers Structures*, v. 29, n. 6, p. 975 – 981, 1988. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794988903239>>. Citado na página 22.
- 61 REITINGER, R.; RAMM, E. Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures. *Thin-Walled Structures*, v. 23, n. 1, p. 159 – 177, 1995. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026382319500010B>>. Citado na página 22.
- 62 DOW, D. A. *Buckling and postbuckling tests of ring-stiffened circular cylinders loaded by uniform external pressure*. [S.l.], 1965. Citado na página 22.
- 63 FRIEZE, P. A. The experimental response of flat-bar stiffeners in cylinders under external pressure. *Marine structures*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 213–230, 1994. Citado na página 22.
- 64 KENDRICK, S. The influence of shape imperfections and residual stress on the collapse of stiffened cylinders. In: *Proceedings of the Conference on Significance of Deviations from Design Shape*. [S.l.: s.n.], 1979. p. 25–35. Citado na página 22.
- 65 KENDRICK, S. Ring-stiffened cylinders under external pressure. *Shell Structures, Stability and Strength*, p. 57–95, 1985. Citado na página 22.
- 66 FILHO, A. A. *Elementos finitos: a base da tecnologia CAE*. [S.l.]: Editora Érica, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- 67 ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method*. [S.l.]: McGraw-hill London, 1977. v. 3. Citado na página 23.
- 68 HÜBNER, A. et al. Buckling of long steel cylindrical shells subjected to external pressure. *Thin-walled structures*, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 1–7, 2007. Citado na página 23.
- 69 MARAVEAS, C.; MIAMIS, K. Shell buckling evaluation of thin-walled steel tanks filled at low liquid level according to current design codes. In: *Proceedings of the Annual Stability Conference by Structural Stability Research Council, Missouri, USA*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 23.
- 70 MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Ansr-1. general purpose program for analysis of nonlinear structural response. 1975. Citado na página 24.
- 71 MONDKAR, D.; POWELL, G. Ansr ii analysis of nonlinear structural response user's manual, eerc 79/17. *University of California, Berkeley, July*, 1979. Citado na página 24.
- 72 BUSHNELL, D. Bosor4: Program for stress, buckling, and vibration of complex shells of revolution. *Structural Mechanics Software Series*, University Press of Virginia, v. 1, p. 11–131, 1977. Citado na página 24.

- 73 BUSHNELL, D. *BOSOR5: A Computer Program for Buckling of Elastic-plastic Complex Shells of Revolution Including Large Deflections and Creep*. [S.l.]: Computer Software Management and Information Center, 1974. Citado na página 24.
- 74 SCHAFER, B.; ÁDÁNY, S. Buckling analysis of cold-formed steel members using cufsm: conventional and constrained finite strip methods. In: *Eighteenth international specialty conference on cold-formed steel structures*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 39–54. Citado na página 24.
- 75 HUTCHINSON, J.; KOITER, W. Postbuckling theory. *Appl. Mech. Rev.*, v. 23, n. 12, p. 1353–1366, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 52.
- 76 MACKAY, J. Structural analysis and design of pressure hulls: the state of the art and future trends. *Defense R&D Canada–Atlantic, Technical Memorandum*, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.
- 77 KENDRICK, S. The buckling under external pressure of ring stiffened circular cylinders. *Trans. RINA*, v. 107, n. 1, 1965. Citado na página 36.
- 78 KENDRICK, S. *Externally pressurized vessels, in the Stress Analysis of Pressure vessels and pressure vessel components by SS Gill*. [S.l.]: Pergamon Press, 1970. Citado na página 36.
- 79 KENDRICK, S. Vessels to withstand external pressure. *Developments in Pressure Vessel Technology*, Applied Science Publishers, v. 4, p. 197–233, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 76.
- 80 PEGG, N. G.; SMITH, D. R. *PRHDEF-Stress and Stability Analysis of Ring Stiffened Submarine Pressure Hulls*. [S.l.], 1987. Citado na página 37.
- 81 FILHO, G. L. d. S. D. *Análise de tensões em vasos de pressão com carregamento externo uniforme (apreciação do trabalho "externally pressurized vessels" S. Kendrick)*. Citado na página 37.
- 82 BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. *Elementos de máquinas de Shigley*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2011. Citado na página 42.
- 83 RAMM, E.; STEGMÜLLER, H. The displacement finite element method in nonlinear buckling analysis of shells. In: *Buckling of shells*. [S.l.]: Springer, 1982. p. 201–235. Citado na página 47.
- 84 MANDAL, P.; CALLADINE, C. Buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 37, n. 33, p. 4509–4525, 2000. Citado na página 47.
- 85 ANSYS. *Structura Mechanics*. [S.l.], 2011. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 70.
- 86 ANSYS. *Command Reference for the Mechanical APDL*. [S.l.], 2009. Citado na página 47.
- 87 FRANO, R. L.; FORASASSI, G. Experimental evidence of imperfection influence on the buckling of thin cylindrical shell under uniform external pressure. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 239, n. 2, p. 193–200, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

- 88 STURM, R. *A study of the collapsing pressure of thin walled cylinders*. [S.l.], 1941. Citado na página 52.
- 89 CLEAVER, P. C. *The strength of tubes unde uniform external pressure*. [S.l.], 1956. Citado na página 52.
- 90 ALCOA. *Catalogo Perfis Estrudados*. [S.l.], 2008. Citado na página 54.
- 91 PARKER. *Manual de O'ring*. [S.l.], 1997. Citado na página 54.
- 92 VEDABRAS. *Manual prático de vedação*. [S.l.], 2012. Citado na página 54.
- 93 MACKAY, J. R. et al. Experimental investigation of the strength and stability of submarine pressure hulls with and without artificial corrosion damage. *Marine Structures*, v. 23, n. 3, p. 339 – 359, 2010. ISSN 0951-8339. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951833910000341>>. Citado na página 60.
- 94 SHEN, H.-s.; ZHOU, P.; CHEN, T.-y. Postbuckling analysis of stiffened cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. *Thin-Walled Structures*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 43–63, 1993. Citado na página 60.
- 95 ROSS, C.; JOHNS, T. Plastic axisymmetric collapse of thin-walled circular cylinders and cones under uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*, v. 30, n. 1–4, p. 35 – 54, 1998. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823197000311>>. Citado na página 60.
- 96 SELEIM, S.; ROORDA, J. Buckling behaviour of ring-stiffened cylinders; experimental study. *Thin-Walled Structures*, v. 4, n. 3, p. 203 – 222, 1986. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0263823186900030>>. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- 97 SELEIM, S.; ROORDA, J. Theoretical and experimental results on the post-buckling of ring-stiffened cylinders. *Journal of structural mechanics*, Taylor & Francis, v. 15, n. 1, p. 69–87, 1987. Citado na página 66.
- 98 SULCROMO. *Catalogo de revestimentos industriais*. [S.l.], 2008. Citado na página 69.
- 99 YOUNG, W. C.; BUDYNAS, R. G. *Roark's formulas for stress and strain*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2002. v. 7. Citado na página 116.

A Método de cálculo da pressão de flambagem

Para a análise da carga crítica foi adotada a equação (2.10) conforme descrito no Capítulo 1. A dedução dessa equação será dividida em três etapas, conforme [9]: modelagem da flexão de um arco com eixo circular, modelagem da flambagem de um anel esbelto, seguido da extrapolação do resultado para o caso de um tubo e a modelagem de uma casca cilíndrica e sua pressão crítica de flambagem sob uma pressão hidrostática.

A.1 Flexão de uma barra curva com eixo circular

Nesta primeira etapa, será apresentada a equação de deflexão de um arco esbelto. Essa equação será utilizada para a obtenção de um modelo simplificado do vaso de pressão de um AUV, onde esse vaso é representado como um anel esbelto e, posteriormente, representado como um tubo longo. Um exemplo será desenvolvido para ilustrar o uso dessa equação.

Na Figura A.42(a) é apresentado um arco $\widehat{AB}$ com centro em O e raio de curvatura R_0 . Esse arco sofre uma pequena flexão no plano de sua curvatura inicial sob o eixo neste plano. Após a deformação sobre o próprio plano, um novo raio R é dado em qualquer ponto com um ângulo θ em relação ao segmento $\overline{OA}$.

Figura A.42 – (a) Barra curva em estado deformado, (b) Detalhe do trecho mn (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

A equação a seguir mostra a relação entre a variação da curvatura, o respectivo momento fletor e a rigidez da barra EI :

$$EI \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = -M \quad (\text{A.1})$$

Onde E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young e I é o momento de inércia. Na equação (A.1) M é negativo por convenção, onde o momento que aumenta a curvatura do arco é tomado por negativo.

A variação da curvatura devido à flexão pode ser obtida ao considerar a hipótese de pequenos deslocamentos do elemento mn , definido por dois raios (Om e On) e um ângulo $d\theta$ como mostrado na Figura A.42 (a). O comprimento de arco ds desse elemento é dado pela multiplicação do raio pelo ângulo correspondente, logo:

$$ds = R_0 d\theta \quad (\text{A.2})$$

Consequentemente, o raio de curvatura do elemento é:

$$\frac{ds}{d\theta} = R_0 \quad (\text{A.3})$$

ou

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_0} \quad (\text{A.4})$$

Se assumirmos que a curvatura do elemento após a deformação é constante, o deslocamento tangencial pode ser desprezado, ou seja, o alongamento da linha de centro do arco é desprezível. Existe também o deslocamento w na direção radial que é positivo em direção ao centro. Assim, o inverso do raio de curvatura após a deformação é o quociente do ângulo $d\theta$ somado de uma variação ($\Delta d\theta$) pelo comprimento de arco ds somado de uma variação (Δds):

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{ds + \Delta ds} \quad (\text{A.5})$$

Onde $d\theta + \Delta d\theta$ representa o ângulo entre as seções normais às transversais em m_1 e n_1 e $ds + \Delta ds$ representa o comprimento de m_1n_1 .

Analogamente ao cálculo de $d\theta$, o ângulo entre a linha tangente à barra em m_1 e a perpendicular ao segmento Om é:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (\text{A.6})$$

Portanto, somando a segunda variação α na equação (A.6), obtém-se o ângulo ϕ em n_1 , que pode ser visto na Figura A.42(b):

$$\phi = \frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}ds \quad (\text{A.7})$$

Avaliando o ângulo ϕ , nota-se que o segundo termo representa a variação do ângulo α e equivale a $\Delta d\theta$. Logo:

$$\Delta d\theta = \frac{d^2w}{ds^2}ds \quad (\text{A.8})$$

Agora, comparando o comprimento dos elementos mn e m_1n_1 , observa-se que o ângulo α pode ser desprezado e é possível escrever o comprimento de m_1n_1 em função de w e R_0

$$ds_1 = (R_0 - w)d\theta \quad (\text{A.9})$$

Portanto, a variação do comprimento Δds após a deformação é igual ao deslocamento w multiplicado pelo ângulo $d\theta$ como mostrado:

$$\Delta ds = -wd\theta \quad (\text{A.10})$$

Isolando $d\theta$ na equação (A.4) e substituindo na equação (A.10), têm-se:

$$\Delta ds = -\frac{wds}{R_0} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo as equações (A.11) e (A.8) na equação (A.5), obtém-se:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta + \left(\frac{d^2w}{ds^2}\right)}{ds + \left(\frac{-wds}{R_0}\right)} \quad (\text{A.12})$$

Rearranjando os termos:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta + \left(\frac{d^2w}{ds^2}\right)}{ds \left(1 - \frac{w}{R_0}\right)} \quad (\text{A.13})$$

Desprezando os termos de maior ordem, pode-se reescrever a nova equação (A.13) da curvatura como:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{w}{R_0}\right) + \frac{d^2w}{ds^2} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo a equação (A.14) na equação (A.1) do momento, obtém-se a equação diferencial que rege a curva de deflexão de um arco de circunferência:

$$EI \left\{ \left[\frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{w}{R_0}\right) + \frac{d^2w}{ds^2} \right] - \frac{1}{R_0} \right\} = -M \quad (\text{A.15})$$

e simplificando,

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R_0^2} = -\frac{M}{EI} \quad (\text{A.16})$$

utilizando da relação

$$ds^2 = R_0^2 d\theta^2 \quad (\text{A.17})$$

reescreve-se a equação em A.16 para

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{MR_0^2}{EI} \quad (\text{A.18})$$

Essa é a equação diferencial para a deflexão de um barra curva e esbelta. Nota-se que para R_0 tendendo ao infinito, essa equação coincide com a de uma barra.

Para ilustrar a aplicação da equação (A.18), considera-se o caso de um anel esbelto sob pressão externa q como mostrado na Figura A.43(a).

Figura A.43 – (a) Anel esbelto sob compressão e (b) arco com extremidades articuladas (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

Para simplificar o problema, pode-se utilizar a simetria e considerar apenas um arco de ângulo 2α com extremidades articuladas. Esse arco pode flambar devido a pressão q e uma possível configuração deformada é mostrada na Figura A.43 (b) em linha tracejada. O ângulo θ representa a posição para calcular o deslocamento radial w e varia de zero a 2α .

A flambagem é um fenômeno que depende das propriedades do material, da geometria e do carregamento. Neste problema, quando o carregamento de pressão q ultrapassa um valor mínimo, conhecidos o material e a geometria, ocorre a flambagem. Essa pressão mínima pode ser encontrado através da equação (A.18), fazendo a seguinte alteração:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{SwR_0^2}{EI} \quad (\text{A.19})$$

Onde S é a força compressiva axial oriunda do momento fletor, $M = Sw$, e vale:

$$S = qR_0 \quad (\text{A.20})$$

Por conveniência, adota-se a variável k como:

$$k^2 = 1 + \frac{qR_0^3}{EI} \quad (\text{A.21})$$

Substituindo k na equação (A.19), obtém-se:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + wk^2 = 0 \quad (\text{A.22})$$

A solução para a equação (A.22) é conhecida e vale:

$$w = A \sin(k\theta) + B \cos(k\theta) \quad (\text{A.23})$$

Deve-se encontrar os valores das constantes A e B na equação (A.23) para que as condições das extremidades sejam respeitadas. Para a extremidade esquerda A_1 , onde $\theta = 0$, B se anula naturalmente. Já para a extremidade direita B_1 onde $\theta = 2\alpha$, tem-se:

$$A \sin(k2\alpha) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Ignorando a solução trivial ($A = 0$), a solução que torna nula a equação (A.24) deve respeitar a condição de inextensibilidade do arco. Essa condição determina que, na flexão, os deslocamentos por alongamento da linha de centro do arco são pequenos quando comparados com os deslocamentos de flexão. Portanto, o alongamento unitário (ϵ) da linha de centro é composto pela parcela do deslocamento tangencial e pela parcela do deslocamento radial, então, pode-se escrever:

$$\epsilon = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R_0} \quad (\text{A.25})$$

Substituindo a relação (A.2), pode-se rearranjar os termos da seguinte maneira:

$$\epsilon = \frac{1}{R_0} \left(\frac{dv}{d\theta} - w \right) \quad (\text{A.26})$$

Então, para um arco ideal com a linha de centro inextensível, ou seja, para que não ocorra a deformação, deve-se considerar:

$$\frac{dv}{d\theta} - w = 0 \quad (\text{A.27})$$

Logo, para garantir as condições de contorno e de inextensibilidade, a menor raiz que torna a equação (A.24) nula vale:

$$k = \frac{\pi}{\alpha} \quad (\text{A.28})$$

Então, substituindo a equação (A.28) na equação (A.21), obtém-se a pressão crítica para o arco:

$$q_{cr} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{EI}{R_0^3} \quad (\text{A.29})$$

Para o caso em que $\alpha = \pi/2$, a equação (A.29) assume valor da pressão crítica correspondente para um anel completo, como será mostrado na seção seguinte. Quando α se aproxima do valor de π , a pressão crítica tende a zero. Isso pode ser explicado porque as articulações do arco se sobrepõe em $\alpha = \pi$ e o anel completo formado fica livre para rotacionar como um corpo rígido através da única articulação remanescente.

A.2 Flambagem de aneis circulares e tubos longos sob pressão externa uniforme

A seguir é analisado um arco de circunferência uniformemente comprimido e ligeiramente defletido em relação ao formato original. Esse arco de circunferência será utilizado para definir a flambagem de um anel esbelto e, então, definir um modelo de tubo longo para os vasos de pressão de um Auv.

Utiliza-se somente o hemisfério superior do anel devido a simetria, como mostrado na Figura A.44. A linha tracejada representa a configuração indeformada e a linha contínua a configuração com pequenas deformações devido a ação de uma pressão q uniformemente distribuída.

Como $\overline{AB}$ e $\overline{OD}$ são os segmentos de reta que representam os eixos de simetria do anel deformado, pode-se substituir o hemisfério inferior por compressões longitudinais S e momentos fletores M nas seções em A e B. Aplicados a pressão q normal e uniforme por unidade de comprimento e o deslocamento w_o na direção radial em A e B, é possível obter o valor das forças S que valem:

$$S = q(R_0 - w_0) \quad (\text{A.30})$$

O valor do momento M é:

$$M = M_0 + q \overline{AO} \overline{AF} - \left(\frac{q}{2} \right) \overline{AC}^2 \quad (\text{A.31})$$

Figura A.44 – Arco circular sob pressão externa uniforme (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

A partir das relações trigonométricas dos triângulos AFC e CFO, calcula-se o segmento $\overline{OC}$ para, posteriormente, relacionar o momento com o deslocamento radial w .

$$\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AO}\overline{AF} \quad (\text{A.32})$$

ou

$$\frac{\overline{AC}}{2} - \overline{AO}\overline{AF} = \frac{1}{2}(\overline{OC}^2 - \overline{AO}^2) \quad (\text{A.33})$$

Utilizando das relações trigonométricas mostradas e desprezando os termos de ordem superior, pode-se reescrever a equação do momento:

$$M = M_0 + \frac{q}{2}R_0(\overline{OC}^2 - \overline{AO}^2) \quad (\text{A.34})$$

Da Figura A.44, observa-se que $\overline{AO} = R_0 - w_0$ e $\overline{OC} = R_0 - w$ e é possível substituí-los na equação (A.34)

$$M = M_0 + qR_0(w - w_0) \quad (\text{A.35})$$

Aplicando a equação (A.35) do momento, na equação diferencial de deflexão de um arco, equação (A.16), mostrada na seção anterior, pode-se escrever a equação diferencial

do estado de deformação do anel devido ao efeito de uma pressão lateral uniforme externa como segue:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{-R_0}{EI} [M_0 - qR_0 (w_0 - w)] \quad (\text{A.36})$$

Organizando os termos:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \left(1 + \frac{qR^3}{EI} \right) = \frac{-M_0 R^2 + qR^3 w_0}{EI} \quad (\text{A.37})$$

Integrando a equação (A.37) e substituindo os valores para k , equação (A.21), obtém-se o deslocamento radial dado por

$$w = A \operatorname{sen}(k\theta) + B \cos(k\theta) + \left(\frac{-M_0 R^2 + qR^3 w_0}{EI + qR^3} \right) \quad (\text{A.38})$$

Considerando as condições de contorno de simetria aplicadas, sabe-se que a derivada da deflexão em relação ao ângulo θ é igual a zero para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Então as constantes A e B podem ser definidas. Percebe-se que em $\theta = 0$ a constante A é igual a zero. Já para $\theta = \pi/2$:

$$B k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2} \right) = 0 \quad (\text{A.39})$$

A solução trivial para a equação (A.39) seria $B = 0$ ou $k = 0$, porém essa solução representa o movimento de corpo rígido, não de flambagem, e não convém neste caso. Portanto:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2} \right) = 0 \quad (\text{A.40})$$

Nesta situação, a menor solução diferente de zero e que satisfaz as condições de contorno ocorre para $(k\pi/2) = \pi$. Logo, $k = 2$ e substituindo-o na equação (A.21), o valor da pressão crítica de flambagem é obtido pela equação:

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R_o^3} \quad (\text{A.41})$$

Substituindo os valores das constantes de integração e a equação (A.41) de q_{cr} na equação (A.38), obtém-se a expressão para o cálculo da deflexão radial do anel:

$$w = \left(\frac{M_0 R_0^2}{EI} + w_0 \right) \frac{\cos(2\theta)}{4} - \frac{M_0 R_0^2}{4EI} + \frac{3w_0}{4} \quad (\text{A.42})$$

O deslocamento v relaciona o momento com a pressão de flambagem. Ele pode ser calculado ao utilizar a propriedade de deformação inextensional do anel. Então utilizando da equação (A.27), obtém-se:

$$v = - \int w d\theta \quad (\text{A.43})$$

Substituindo o valor de w , equação (A.42), na equação (A.43) e integrando em relação a θ , obtém-se o deslocamento v :

$$v = \left(\frac{M_0 R_0^2}{EI} + w_0 \right) \frac{\sin(2\theta)}{8} - \left(\frac{M_0 R_0^2}{4EI} - \frac{3w_0}{4} \right) \theta \quad (\text{A.44})$$

O deslocamento v se anula em $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ devido à condição de simetria imposta. Para $\theta = 0$, a equação se anula obviamente, mas para $\theta = \pi/2$ o segundo termo da equação (A.44) não se anula. Por esse motivo, deve-se igualar o segundo coeficiente entre parênteses a zero para que o deslocamento v seja nulo, logo;

$$\frac{M_0 R_0^2}{4EI} - \frac{3w_0}{4} = 0 \quad (\text{A.45})$$

Isolando M_0 na equação (A.45) e utilizando a equação (A.41) da pressão crítica, pode-se rearranjar os termos da seguinte maneira:

$$M_0 = \frac{3w_0 EI}{R_0^2} = q_{cr} w_0 R \quad (\text{A.46})$$

Substituindo M_0 nas equações (A.42) e (A.44), pode-se simplificá-las e reescrevê-las da seguinte forma:

$$w = w_0 \cos(2\theta) \quad (\text{A.47})$$

$$v = \frac{w_0}{2} \sin(2\theta) \quad (\text{A.48})$$

Os deslocamentos v e w , equações (A.47) e (A.48), do anel podem ser extrapolados para o caso de tubos longos (com razão de aspecto maior que dez, $L/D > 10$) e podem ser utilizados como modelo de representação dos vasos de pressão para um AUV.

Considera-se o anel em estudo um corte de espessura unitária de um cilindro longo. Utilizando a hipótese de deformação nula nos planos perpendiculares ao eixo do cilindro (estado plano de deformação), pode-se substituir o módulo de Young E por $E/(1 - \nu^2)$ e o momento de inércia I por $h^3/12$ na fórmula (A.41), onde ν é o coeficiente de Poisson e h a espessura. Calculando, assim, a pressão crítica de flambagem para um cilindro longo:

$$q_{cr} = \frac{E}{4(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^3 \quad (\text{A.49})$$

Essa equação é utilizada para calcular a pressão crítica enquanto a tensão de compressão relativa não ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, ou seja, o material ainda se encontra no regime linear elástico. Então, a tensão crítica pode ser calculada do seguinte modo:

$$\sigma_{cr} = \frac{q_{cr} R}{h} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 \quad (\text{A.50})$$

Caso entre no regime plástico, uma solução seria substituir o módulo de Young pelo módulo de elasticidade de transversal. Para garantir que tensão crítica permaneça no regime elástico, controla-se a relação $h/2R$, pois são parâmetros geométricos passíveis de serem alterados. Enquanto o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são características do material somente alterados trocando o próprio material.

A.3 Deformação de um elemento de casca

O vaso de pressão de um AUV apresenta características similares às do elemento estrutural casca, o que possibilita a utilização desse elemento como modelo de representação dos esforços no vaso.

A casca tem como característica uma espessura muito menor que seu comprimento e sua largura. Por isso pode ser representada por um estado bidimensional de tensão. Outra característica é sua forma geométrica definida por curvaturas. Se essas curvaturas forem revolucionadas por um eixo, é chamada de casca de revolução (cilindro, por exemplo).

Nesta seção será definido um modelo de cálculo dos esforços que a casca está sujeita. A casca pode sofrer a ação de diferentes tipos de esforços, por exemplo, uma pressão hidrostática. Esses esforços geram deformações na casca de onde serão definidas as tensões e, então, define-se os esforços em função das deformações.

A Figura A.45(a) mostra um elemento infinitesimal retirado de uma casca por um par de planos adjacentes, normais à superfície média e contendo suas curvaturas. Tomando os eixos x e y tangentes às curvaturas principais em O e o eixo z normal à superfície média, são nomeados R_x e R_y os raios de curvatura principais nos planos xz e yz , respectivamente. A espessura é considerada constante e denominada h .

Figura A.45 – (a) Elemento de casca, (b) vista do plano xz (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

Assume-se que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, normais à superfície média da casca, se mantêm indeformados e normais à superfície média da casca deformada. Considera-se que durante a flexão, as faces laterais do elemento ABCD rotacionam somente em relação as intersecções com a superfície média, ou seja, o segmento $\overline{BC}$, por exemplo, tem um centro de rotação coincidente com a superfície média como mostrado na Figura A.45 (b). Sendo R'_x e R'_y os raios de curvatura após a deformação, é possível dizer que as deformações nas direções x e y de uma camada fina a uma distância z da superfície média são:

$$\epsilon_x = \frac{-z}{1 - \frac{z}{R_x}} \left(\frac{1}{R'_x} - \frac{1}{R_x} \right) \quad (\text{A.51})$$

$$\epsilon_y = \frac{-z}{1 - \frac{z}{R_y}} \left(\frac{1}{R'_y} - \frac{1}{R_y} \right) \quad (\text{A.52})$$

Somados às rotações, as faces laterais sofrem deslocamentos paralelos entre si devido aos alongamentos da superfície média, ou seja, sofrem translações. Então, sabendo que as deformações nas direções x e y são ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente, pode-se dizer que o deslocamento em x de uma lâmina, como mostrado na da Figura A.45 (b), pode ser escrito como:

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \quad (\text{A.53})$$

Sabendo que l_1 e l_2 são:

$$l_1 = ds \left(1 - \frac{z}{R_x} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$l_2 = ds (1 + \epsilon_1) \left(1 - \frac{z}{R'_x} \right) \quad (\text{A.55})$$

Substituindo as equações (A.54) e (A.55) na equação (A.53), obtém-se:

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_1}{1 - \frac{z}{R_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{R_x}} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon_1) R'_x} \frac{1}{R_x} \right] \quad (\text{A.56})$$

Analogamente a direção x , é possível obter a deformação na direção y :

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_2}{1 - \frac{z}{R_y}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{R_y}} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon_2) R'_y} \frac{1}{R_y} \right] \quad (\text{A.57})$$

Assumindo que a espessura h do elemento é pequena quando comparada aos raios de curvatura, as relações z/R_x e z/R_y podem ser desprezadas por serem valores muito irrisórios em relação à unidade. Os efeitos do alongamento da superfície média, ϵ_1 e ϵ_2 , na curvatura também são desprezados, porém serão incluídos posteriormente. Portanto, as equações de deformação se tornam:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 - z \left[\frac{1}{R'_x} - \frac{1}{R_x} \right] = \epsilon_1 - \chi_x z \quad (\text{A.58})$$

$$\epsilon_y = \epsilon_2 - z \left[\frac{1}{R'_y} - \frac{1}{R_y} \right] = \epsilon_2 - \chi_y z \quad (\text{A.59})$$

Onde χ_x e χ_y são as alterações nas curvaturas. As equações (A.51) e (A.52) são utilizadas nas componentes de deformação para obter as expressões das tensões nas direções x e y . Então, assumindo um estado plano de tensão ($\sigma_z = 0$), onde não há tensões normais entre as camadas, apresenta-se as equações para as tensões:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\epsilon_1 + \nu \epsilon_2 - z (\chi_x + \nu \chi_y) \right] \quad (\text{A.60})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\epsilon_2 + \nu \epsilon_1 - z (\chi_y + \nu \chi_x) \right] \quad (\text{A.61})$$

Os esforços que atuam sobre cada face do elemento ABCD podem ser substituídos por esforços resultantes aplicados nos centroides das faces. Como a espessura do elemento é pequena, as faces laterais podem ser consideradas retângulos, garantindo que as forças resultantes atuem na superfície média do elemento. Novamente, a partir de um estado plano de tensão, obtém-se o esforço resultante por unidade de comprimento na direção x :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 - \nu \epsilon_2) \quad (\text{A.62})$$

a resultante na direção y :

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 - \nu \epsilon_1) \quad (\text{A.63})$$

o momento na direção x :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = -D (\chi_x + \nu \chi_y) \quad (\text{A.64})$$

o momento em y :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = -D (\chi_y + \nu \chi_x) \quad (\text{A.65})$$

onde D é a rigidez à flexão de placas (e cascas), dado por:

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.66})$$

Se as tensões de cisalhamento atuantes nas laterais do elemento forem adicionadas, é possível obter um caso de deformação mais próximo do caso completo. Considerando as componentes de τ_{xy} e τ_{xz} que atuam nas faces normais ao eixo x , tem-se a força cortante paralela ao eixo z :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (\text{A.67})$$

a força cortante paralela ao eixo y :

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{A.68})$$

e o momento paralelo ao eixo y :

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (\text{A.69})$$

Analogamente, para a face normal ao eixo y , tem-se a força cortante paralela ao eixo z :

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{A.70})$$

a força cortante paralela ao eixo x :

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (\text{A.71})$$

e o momento paralelo ao eixo x :

$$M_{xy} = -M_{yx} \quad (\text{A.72})$$

Para obter a relação da tensão de cisalhamento e sua torção, considera-se que o elemento assume um comportamento de placa, com isso se tem:

$$\tau_{xy} = -2Gz\chi_{xy} \quad (\text{A.73})$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \chi_{xy} \quad (\text{A.74})$$

Onde G é módulo de cisalhamento. Finalmente, completando as possíveis deformações da casca, adiciona-se a deformação por cisalhamento γ da superfície média e obtém-se:

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z\chi_{xy}) G \quad (\text{A.75})$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \frac{\gamma h E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.76})$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz = D(1 - \nu) \chi_{xy} \quad (\text{A.77})$$

Portanto, é possível escrever as forças resultantes e os momentos em termos com componentes de deformação da superfície média (ϵ_1 , ϵ_2 e γ) e termos que representam as alterações nas curvaturas (χ_x , χ_y e χ_{xy}).

A.4 Caso geral de deformação de uma casca cilíndrica

O vaso de pressão de um Auv pode ser modelado por elementos de casca de revolução em formato cilíndrico, conforme descrito na seção anterior. Nesta seção, será feito um estudo particular de cascas cilíndricas, onde serão definidos os esforços e as deformações em função de deslocamentos.

Serão obtidos os deslocamentos angulares de um elemento infinitesimal de casca, os quais serão utilizados para projetar os esforços nos eixos de referência e obter as equações diferenciais de equilíbrio da casca cilíndrica.

Figura A.46 – Referência de casca cilíndrica (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

Um cilindro de paredes finas, ou seja, com raio trinta vezes a espessura ($h/R = 1/30$), será objeto de estudo. Os eixos x , y , e z representam as direções da geratriz, da tangente e da normal à superfície média, respectivamente, antes da deformação, como exibido na Figura A.46. Para desenvolver as equações diferenciais dos deslocamentos u longitudinal, v circunferencial e w radial, que definem a deformação da casca cilíndrica em questão, será analisado um elemento da casca retirado por duas seções axiais adjacentes e duas seções perpendiculares ao eixo do cilindro (Figura A.47), como na análise feita na seção anterior.

Figura A.47 – (a) Forças resultantes, (b) momentos (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

Considerando pequenas deformações, a nova configuração pode apresentar variações nas direções principais. Após a deformação, admite-se o eixo z normal à superfície média deformada, o eixo x tangente à geratriz e o eixo y perpendicular ao plano XZ . Então, inicialmente, avalia-se o deslocamento angular dos lados BC e AB em relação aos lados opostos, OA e OC do elemento, respectivamente.

A rotação do lado BC em relação a OA pode ser dividida em três componentes relativas aos eixos x , y , e z , como mostrado na Figura A.48, onde os ângulos relativos a x estão em vermelho, os ângulos relativos a y estão em azul e os ângulos relativos a z estão em verde.

Figura A.48 – Ângulos de um elemento infinitesimal de uma casca cilíndrica (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

As rotações de OA e BC relativas ao eixo x ocorrem devidos aos deslocamentos v e w . Se v representa o deslocamento na direção circunferencial e R o raio da superfície média, a rotação correspondente do lado OA, em relação ao eixo x , é:

$$\alpha_{xoa} = \frac{v}{R} \quad (\text{A.78})$$

A rotação do lado BC, em relação ao eixo x , é:

$$\alpha_{xbc} = \frac{1}{R} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \quad (\text{A.79})$$

portanto, o movimento angular de BC, relativo a OA, devido a v é:

$$\alpha_x = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (\text{A.80})$$

analisando o deslocamento w , o lado OA rotaciona em relação ao eixo x pelo ângulo:

$$\beta_{xoa} = \frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (\text{A.81})$$

e o lado BC pelo ângulo:

$$\beta_{xbc} = \frac{\partial w}{R\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) dx \quad (\text{A.82})$$

A parcela de BC, relativo a OA, devido a w é:

$$\beta_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) dx \quad (\text{A.83})$$

A soma das equações (A.80) e (A.83) resulta no movimento angular relativo de BC em torno do eixo x com respeito a OA:

$$\gamma_x = \alpha_x + \beta_x = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{d^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx \quad (\text{A.84})$$

Devido à flexão da geratriz em planos axiais, ocorre uma rotação em relação ao eixo y que vem dada por:

$$\gamma_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (\text{A.85})$$

Assim como, devido à flexão em planos tangenciais, ocorre uma rotação em relação a z dada por:

$$\gamma_z = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (\text{A.86})$$

As equações (A.84), (A.85) e (A.86) são as três componentes da rotação do lado BC em relação a OA nos três eixos, como mostrado na Figura A.48.

Para o lado OC, existe um ângulo inicial θ devido a curvatura da casca cilíndrica. Esse ângulo sofre alterações devido aos deslocamentos v e w . Portanto, a rotação de OC em relação ao eixo x é:

$$\kappa_{xoc} = \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \quad (\text{A.87})$$

assim, a rotação correspondente à face AB é:

$$\kappa_{xab} = \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) d\theta \quad (\text{A.88})$$

logo, em vez do ângulo inicial $d\theta$, usamos a expressão para a rotação relativa:

$$\kappa_x = d\theta + d\theta \left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{R\partial\theta^2} \right) \quad (\text{A.89})$$

A rotação em torno do eixo y da face AB (Figura A.48) em relação a OC ocorre devido à torção do cilindro e vale:

$$\kappa_y = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta \quad (\text{A.90})$$

Os deslocamentos v e w são responsáveis, também, pela rotação em torno de z . Para o lado OC, o ângulo de rotação devido ao deslocamento v vale:

$$\kappa_{zvoc} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.91})$$

para o lado AB vale:

$$\kappa_{zvac} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{R\partial\phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) R d\phi \quad (\text{A.92})$$

logo, o deslocamento angular relativo de AB, devido a v , é:

$$\kappa_{zv} = \frac{\partial}{R\partial\phi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) R d\phi \quad (\text{A.93})$$

a contribuição do deslocamento w gera a rotação

$$\kappa_{zwoc} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.94})$$

para OC com respeito à plano axial e para a face AB

$$\kappa_{zwab} = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta \quad (\text{A.95})$$

Somando, novamente, as parcelas da rotação, obtém-se que o deslocamento angular (Figura A.48) relativo de AB, em torno do eixo z , em relação a OC é:

$$\kappa_z = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta \quad (\text{A.96})$$

Utilizando das equações (A.84), (A.85), (A.86), (A.89), (A.90) e (A.96), é possível obter as três equações de equilíbrio do elemento OABC ao projetar as forças atuantes nos eixos x , y e z . As forças na direção x , paralelas às resultantes N_x e N_{yx} , são consideradas inicialmente e projetadas no eixo x para obter:

$$F_x = \frac{\partial N_x}{\partial x} dx R d\theta \quad (\text{A.97})$$

$$F_{xy} = \frac{\partial N_{yx}}{\partial\phi} d\theta dx \quad (\text{A.98})$$

As forças na direção y , paralelas à N_y , terão componentes no eixo x relacionadas à rotação exibida na equação (A.96) e a rotação expressa pela flexão em planos tangenciais (A.86), respectivamente, portanto, tem-se:

$$F_y = -N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta \quad (\text{A.99})$$

$$F_{yx} = -N_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) d\theta R dx \quad (\text{A.100})$$

Finalmente, devido aos ângulos expressados pela flexão da geratriz em planos axiais (A.85) e pela equação (A.90), as forças paralelas a Q_x e a Q_y terão componentes no eixo x definidas por:

$$F_{qy} = -Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx \quad (\text{A.101})$$

$$F_{qx} = -Q_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) d\theta R dx \quad (\text{A.102})$$

Observando as forças externas atuantes no elemento, assume-se que só há uma única pressão normal e sua projeção no eixo x é nula. Então, somando as projeções de N_x , N_{yx} , N_y , Q_x e Q_y , obtém-se:

$$F_x + F_{xy} + F_y + F_{yx} + F_{qx} + F_{qy} = 0 \quad (\text{A.103})$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} dx R d\theta + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} dx d\theta - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx d\theta - N_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx R d\theta \\ - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx R d\theta - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx d\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Simplificando a equação (A.104) e sabendo que as projeções nos outros eixos ocorrem de modo análogo, pode-se montar as equações de equilíbrio para os três eixos do elementos:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \phi} - R Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - R N_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial \phi} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - R N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ - Q_y \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

$$\begin{aligned} R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \phi} + N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + R N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi^2} \right) \\ + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial v}{R \partial x} \right) + q R = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Utilizando o mesmo procedimento de projeções nos eixos, é possível obter as três equações do momento com respeito aos eixos x , y e z , ainda considerando pequenos deslocamentos:

$$R \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \phi} - R M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + R Q_y = 0 \quad (\text{A.108})$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \phi} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} + R M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - R Q_x = 0 \quad (\text{A.109})$$

$$\begin{aligned} M_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + R M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{yx} \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi^2} \right) \\ - M_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + R (N_{xy} - N_{yx}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

As equações (A.105) a (A.110) são conhecidas como as equações de equilíbrio de uma casca cilíndrica.

Para reduzir o número de variáveis, é possível isolar Q_x e Q_y nas equações (A.108) e (A.109) e substituí-las em (A.105), (A.106) e (A.110).

Considerando as equações dos esforços de um elemento de casca da seção A.3, é possível expressar as projeções dos esforços em função das deformações da superfície média (ϵ_1 , ϵ_2 e γ) e das alterações da curvatura (χ_x , χ_y e χ_{xy}). Então, as projeções podem ser escritas em função dos deslocamentos u , v e w :

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.111})$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{R \partial \theta} - \frac{w}{R} \quad (\text{A.112})$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.113})$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} \quad (\text{A.114})$$

$$\chi_y = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.115})$$

$$\chi_{xy} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (\text{A.116})$$

Deve-se salientar que nesta dedução não foi considerado o alongamento da superfície média do elemento. Porém para casos de instabilidade, como o de flambagem sob pressão hidrostática, esse alongamento deve ser considerado. Este detalhe será abordado na próxima seção.

A.5 Flambagem de uma casca cilíndrica sujeita a uma pressão hidrostática

Como dito anteriormente, será apresentada um modelo de cálculo para a pressão crítica de flambagem de uma casca cilíndrica.

Por motivos de peso e hidrodinâmica, os vasos de AUVs são usualmente cilíndricos com extremidades fechadas e são considerados curtos, pois apresentam uma relação comprimento pelo diâmetro menor que dez [34]. Portanto, a formulação apresentada na seção A.3 para tubos longos com as extremidades livres não pode ser aplicada diretamente. Por esse motivo, as equações de equilíbrio da seção anterior serão apresentadas em função dos deslocamentos u , v e w para um novo modelo de cálculo. Então, solucionando essas equações de equilíbrio, é possível encontrar a pressão crítica de flambagem.

Primeiramente, assume-se que todas as forças resultantes são pequenas, com exceção de N_y . Portanto, os termos em que as resultantes multiplicam as derivadas dos deslocamentos serão desprezados. Então, as equações (A.105), (A.106) e (A.107) de equilíbrio da casca simplificadas resultam em:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} + qR \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.117})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.118})$$

$$\frac{R \partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + R N_x \frac{R \partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta^2} \right) + qR = 0 \quad (\text{A.119})$$

De maneira análoga, os termos das equações de momento, que multiplicam as derivadas dos deslocamentos, também são insignificantes e serão desprezados. Então, as equações (A.108), (A.109) e (A.110) resultam em:

$$R \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + R Q_y = 0 \quad (\text{A.120})$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} - R Q_x = 0 \quad (\text{A.121})$$

$$M_{yx} + R (N_{xy} - N_{yx}) = 0 \quad (\text{A.122})$$

Para reduzir o número de variáveis e criar um sistema de equações com todas as incógnitas, isola-se Q_x e Q_y das equações (A.120) e (A.121), como na seção A.4. Substituindo-as na equação (A.119), as equações (A.117), (A.118) e (A.119) formam um novo sistema cuja solução particular caracteriza a casca cilíndrica em uma configuração circular e uniformemente comprimida na direção circunferencial. Portanto, nota-se que $\nu_0 = N_x = N_{xy} = M_x = M_y = M_{xy} = 0$ e

$$w_0 = \frac{R^2 q}{Eh} \quad (\text{A.123})$$

$$N_y = -qR \quad (\text{A.124})$$

Considerando apenas pequenos deslocamentos a partir do estado comprimido descrito, a resultante N_y sofre uma pequena variação (N'_y) e é rescrita como:

$$N_y = -qR + N'_y \quad (\text{A.125})$$

Durante a flambagem o alongamento da superfície média ocorre e deve ser inserido na formulação. Para isso, substitui-se N_y e q por $N_y(1 + \epsilon_1)$ e $q(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ respectivamente, obtendo, assim, um novo sistema de equações:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} + qR \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.126})$$

$$\frac{\partial N'_y}{\partial \theta} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.127})$$

$$\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_y}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} + N'_y - q \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{A.128})$$

Para auxiliar a representação das equações em função dos deslocamentos, três parâmetros são criados. O parâmetro ϕ_1 representando a pressão lateral que afeta a casca, o parâmetro ϕ_2 que representa a atuação da pressão axial e o parâmetro α que relaciona a espessura com o raio da casca.

$$\phi_1 = \frac{qR(1 - \nu^2)}{Eh} \quad (\text{A.129})$$

$$-\phi_2 = \frac{N_x(1 - \nu^2)}{Eh} \quad (\text{A.130})$$

$$\alpha = \frac{h^2}{12R^2} \quad (\text{A.131})$$

A análise de ϕ_1 e ϕ_2 indica que para atuação de uma pressão lateral somente, $\phi_2 = 0$, os valores de ϕ_1 são críticos [9]. Portanto, para o caso de pressão lateral apenas, o valor de m tende a 1, ou seja, a casca flambada tem uma meia onda de seno na direção longitudinal. Nota-se que o valor da pressão lateral aumenta conforme o comprimento do cilindro diminui, assim como, as ondas circunferenciais.

Quando $\phi_1 = 0$, nota-se valores críticos para ϕ_2 caracterizando a atuação de pressão axial apenas. Portanto, é possível constatar que, dados os valores de ϕ_1 e ϕ_2 , qualquer pressão axial será inversamente proporcional ao valor da pressão lateral. Assim como qualquer pressão lateral também será inversamente proporcional ao valor crítico da pressão axial.

São utilizadas as equações constitutivas seção (A.3) para representar os esforços resultantes em função das deformações e mudanças de curvatura. Tais deformações são escritas em função dos deslocamentos com as equações (A.111) a (A.116).

Substituindo as forças em função dos deslocamentos e os parâmetros criados nas equações (A.126), (A.127) e (A.128), obtêm-se as três equações diferenciais de equilíbrio que regem a flambagem do cilindro devido à pressão hidrostática:

$$R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu R \frac{\partial w}{\partial x} + R \phi_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{A.132})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{2} R \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + R^2 (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - R^2 \phi_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

$$\begin{aligned} & R \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \\ & - \alpha \left[\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + (2-\nu) R^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + R^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right] = \phi_1 \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ & + \phi_2 R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

Segundo Windenburg e Trilling [34] a melhor representação matemática para a casca cilíndrica sob pressão hidrostática é uma casca simplesmente apoiada. Então, utilizando o comprimento l e a x como coordenada longitudinal, as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} w \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

e

$$\begin{aligned} w \Big|_{x=l} &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

Para essas condições de contorno e carregamento, as soluções das equações (A.132), (A.133) e (A.134) para os deslocamentos u , v e w são conhecidas:

$$u = A \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.137})$$

$$v = B \cos(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.138})$$

$$w = C \sin(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (\text{A.139})$$

Portanto, durante a flambagem, a geratriz (eixo x) do cilindro irá defletir em m semi ondas de seno, enquanto suas circunferências estarão defletidas em n ondas, caracterizando o modo de flambagem, conforme a Figura A.49.

Figura A.49 – Cilindro que deflete em m semi ondas de seno longitudinais e n ondas circunferenciais (fonte: adaptado de Camotim [31]).

Substituindo as equações (A.137), (B.4) e (A.139) dos deslocamentos nas equações (A.132), (A.133) e (A.134), uma sistema linear homogêneo para as constantes da solução (A , B e C) é encontrado. A solução trivial desse sistema seria A , B e C nulos, porém este caso não convém por não caracterizar a flambagem. A outra solução é resolver o problema de autovalores, igualando o determinante do sistema a zero como em uma análise linear de estabilidade. A menor raiz do determinante é um dos autovalores e também a pressão de colapso da casca. A equação característica do sistema é:

$$C_1 + C_2\alpha = C_3\phi_1 + C_4\phi_2 \quad (\text{A.140})$$

onde

$$C_1 = (1 - \nu^2) \lambda^4 \quad (\text{A.141})$$

$$C_2 = (\lambda^2 + n^2)^4 - 2 [\nu\lambda^6 + 3\lambda^4n^2 + (4 - \nu)\lambda^2n^4 + n^6] + 2(2 - \nu)\lambda^2n^2 + n^4 \quad (\text{A.142})$$

$$C_3 = n^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - (3\lambda^3n^2 + n^4) \quad (\text{A.143})$$

$$C_4 = \lambda^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \lambda^2n^2 \quad (\text{A.144})$$

$$\lambda = \frac{m\pi R}{l} \quad (\text{A.145})$$

Conhecidas as dimensões da casca e assumidos valores para o modo de flambagem (m e n), percebe-se que a equação característica (A.140) representa uma relação linear de ϕ_1 e ϕ_2 .

Para o caso de um AUV de uma casca cilíndrica com extremidades fechadas submetidas a uma pressão hidrostática, é usual adotar a relação $\phi_2 = 0,5\phi_1$ e assumir uma casca fina [9]. Desprezando os termos pequenos, obtém-se a equação para a pressão crítica de flambagem:

$$q_{cr} = \frac{Eh}{R} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2} \left\{ \frac{1}{\left(n^2 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 + 1 \right)^2} + \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \left[n^2 + \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2 \right\} \quad (\text{A.146})$$

Timoshenko [9] recomenda a utilização de um valor para n que minimize a equação (2.10), obtendo a pressão crítica de flambagem para uma casca cilíndrica.

A.6 Deformação simétrica de uma casca esférica

Os vasos esféricos são outros tipos de vaso de pressão utilizados em AUVs. Assim como no caso dos cilindros, o modelo de cálculo para a pressão crítica de flambagem de uma casca esférica se aplica e, por isso, será estudado para definição dos esforços e deformações possíveis.

Nesta seção, serão obtidas as equações de equilíbrio através da definição dos ângulos entre as faces de um elemento infinitesimal de casca esférica e serão utilizados para projetar as forças resultantes, que atuam na casca, nos eixos de referência. As deformações principais da casca também serão obtidas com o auxílio das relações constitutivas mostradas na seção A.3.

Observa-se, na Figura A.50(a), que o segmento $\overline{O'E}$ define a simetria vertical da casca esférica. Um elemento OABC é retirado da casca por duas seções meridionais com ângulo $d\psi$ e duas superfícies normais aos meridianos e separadas do eixo de simetria por θ e $\theta + d\theta$. Considerando os eixos x e y tangentes em O e o eixo z na direção radial, como mostrado na Figura A.50(b), denomina-se u , v e w os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente. Os deslocamentos surgem devido a deformação simétrica da casca, sendo u e w função do ângulo θ somente e o desmantelo v nulo por simetria.

Existem dois ângulos que definem o elemento OABC: o ângulo $d\theta$ que representa a curvatura entre as faces OC e AB e o ângulo $d\psi$, entre OA e BC, que pode ser obtido pela rotação do plano de OA em relação aos eixos x e z pelos ângulos $d\psi \sin \theta$ e $d\psi \cos \theta$, respectivamente.

Figura A.50 – Elemento de casca esférica, forças e momentos atuantes (fonte: adaptado de Timoshenko [9]).

Para o caso de deformação simétrica, atuam na casca somente as projeções das forças nos eixos principais e os momentos em relação ao eixo y , como mostrado na Figura A.50(b). Para projetar os esforços no eixo x , assume-se as forças externas normais à casca e obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \theta} d\theta \right) R \sin(\theta + d\theta) d\psi - N_x R \sin \theta d\psi - \\ - N_y R d\theta \cos \theta d\psi - Q_x R \sin \theta d\psi d\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

Um procedimento análogo é feito para os outros eixos e, após algumas simplificações, obtém-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \theta} + (N_x - N_y) \cot \theta - Q_x = 0 \quad (\text{A.148})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \theta} + Q_x \cot \theta + N_x + N_y + qR = 0 \quad (\text{A.149})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \theta} + (M_x - M_y) \cot \theta - Q_x R = 0 \quad (\text{A.150})$$

Onde q é a pressão externa. As equações (A.148) até (A.150) representam a deformação de uma casca esférica devido a um carregamento simetricamente distribuído pela superfície externa, como uma pressão hidrostática.

Após as deformações de compressão simétrica, os ângulos entre as faces do elemento OABC sofrem alterações pequenas. As faces OC e AB, inicialmente com um ângulo $d\theta$, sofrem uma rotação em relação ao eixo y e vale:

$$\kappa = \frac{w}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \quad (\text{A.151})$$

Então, o ângulo entre as faces OC e AB após a deformação é:

$$\kappa_{def} = d\theta + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) d\theta \quad (\text{A.152})$$

Considerando as faces AO e BC, inicialmente com um ângulo $d\psi$, notam-se rotações em seus próprios planos durante a deformação por um ângulo igual a:

$$\eta = - \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \quad (\text{A.153})$$

Essa rotação da equação (A.153) gera componentes nos eixos x e z :

$$\eta_x = \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \cos\theta d\psi \quad (\text{A.154})$$

$$\eta_z = - \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \sin\theta d\psi \quad (\text{A.155})$$

Portanto, após a deformação, a posição final da face BC em relação a face AO pode ser obtida pela rotação da face AO ao redor dos eixos x e z pelos ângulos:

$$\eta_{bcx} = \sin\theta d\psi + \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \cos\theta d\psi \quad (\text{A.156})$$

$$\eta_{bcz} = \cos\theta d\psi - \left(\frac{u}{R} + \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \sin\theta d\psi \quad (\text{A.157})$$

Substituindo os ângulos iniciais $d\theta$, $\sin\theta d\psi$ e $\cos\theta d\psi$ pelos ângulos das equações (A.152), (A.156) e (A.157) nas equações (A.148) a (A.150), obtém-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial\theta} + (N_x - N_y) \cot\theta - Q_x + N_y \left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta} \right) - Q_x \left(\frac{w}{R} + \frac{d^2w}{Rd\theta^2} \right) = 0 \quad (\text{A.158})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial\theta} + Q_x \cot\theta + N_x + N_y + qR + N_x \left(\frac{du}{Rd\theta} + \frac{d^2w}{Rd\theta^2} \right) + N_y \left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta} \right) = 0 \quad (\text{A.159})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial\theta} + (M_x - M_y) \cot\theta - Q_x R + M_y \left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta} \right) = 0 \quad (\text{A.160})$$

Assim como na seção A.5, é possível isolar Q_x na equação (A.160) e substituí-lo nas equações (A.158) e (A.159). Dessa maneira, duas equações contendo N_x , N_y , M_x e M_y , são

obtidas. Utilizando as relações cinemáticas (seção A.3), é possível demonstrar as equações das deformações principais ϵ_1 e ϵ_2 através das características geométricas da casca:

$$\epsilon_1 = \frac{du}{Rd\theta} - \frac{w}{R} \quad (\text{A.161})$$

$$\epsilon_2 = \frac{u \cos \theta}{R \sin \theta} - \frac{w}{R} \quad (\text{A.162})$$

Assim como, pode-se utilizar as equações (A.152) e (A.156) para escrever as alterações da curvatura após a deformação:

$$\chi_x = \frac{d^2 w}{R^2 d\theta^2} - \frac{du}{R^2 d\theta} \quad (\text{A.163})$$

$$\chi_y = \left(\frac{u}{R^2} - \frac{dw}{R^2 d\theta} \right) \cot \theta \quad (\text{A.164})$$

A.7 Flambagem de uma casca esférica uniformemente comprimida

Um modelo de cálculo para a pressão crítica de flambagem para cascas esféricas será apresentado a seguir.

Se uma casca esférica for submetida a uma pressão externa uniforme, ela mantém sua forma e sofre uma compressão homogênea. A tensão compressiva neste caso vale

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} \quad (\text{A.165})$$

Onde q é a pressão por unidade de área, R o raio da esfera e h a espessura. Se o valor da pressão q for aumentado gradativamente, ao ultrapassar certo valor, a configuração de equilíbrio da esfera pode se tornar instável e a flambagem ocorre. Esse valor de pressão que caracteriza a passagem para um estado instável pode ser calculado, assumindo duas condições: a superfície da esfera é simétrica em relação ao diâmetro após a deformação e algumas adaptações nas equações de equilíbrio da seção anterior, apresentadas a seguir.

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, N_x e N_y nas equações (A.158) e (A.159) sofrem pequenas alterações N'_x e N'_y :

$$N_x = \frac{-qR}{2} + N'_x \quad (\text{A.166})$$

$$N_y = \frac{-qR}{2} + N'_y \quad (\text{A.167})$$

Utilizando as equações (A.161) a (A.164) e as substituindo nas equações (A.62) a (A.65) da seção A.3, é possível obter esses esforços em função dos deslocamentos u e w da seguinte maneira:

$$N'_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{Rd\theta} - \frac{w}{R} + \nu \left(\frac{u \cot \theta}{R} - \frac{w}{R} \right) \right] \quad (\text{A.168})$$

$$N'_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{u \cot \theta}{R} - \frac{w}{R} + \nu \left(\frac{du}{Rd\theta} - \frac{w}{R} \right) \right] \quad (\text{A.169})$$

$$M_x = -\frac{D}{R^2} \left[\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} + \nu \left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) \cot \theta \right] \quad (\text{A.170})$$

$$M_y = -\frac{D}{R^2} \left[\left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) \cot \theta + \nu \left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \right] \quad (\text{A.171})$$

Onde D é a rigidez à flexão de cascas dado pela equação (A.66).

As alterações devido ao alongamento da superfície média da casca também devem ser incluídas. Por esse motivo a pressão q é substituída por $q(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2)$. Os termos nas equações (A.158), (A.159) e (A.160) em que as derivadas dos deslocamentos são multiplicadas por N'_x , N'_y e Q_x podem ser desprezados por apresentarem valores pequenos quando comparados com a unidade. Com isso, obtém-se um novo sistema de equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial N'_x}{\partial \theta} + (N'_x - N'_y) \cot \theta - Q_x - \frac{qR}{2} \left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{Rd\theta} \right) = 0 \quad (\text{A.172})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \theta} + Q_x \cot \theta + N'_x + N'_y + qR \left(\frac{du}{Rd\theta} + \frac{u}{R} \cot \theta - \frac{2w}{R} \right) = 0 \quad (\text{A.173})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \theta} + (M_x - M_y) \cot \theta - Q_x R = 0 \quad (\text{A.174})$$

Isolando Q_x na equação (A.174) e substituindo nas equações (A.172) e (A.173), obtém-se duas equações resultantes contendo as variáveis N'_x , N'_y , M_x e M_y , analogamente à operação realizada na seção anterior.

Adota-se as notações α e ϕ para maior didática nas análises e comparações sob o ponto de vista físico:

$$\alpha = \frac{D(1 + \nu^2)}{R^2 Eh} = \frac{h^2}{12R^2} \quad (\text{A.175})$$

$$\phi = \frac{qR(1 + \nu^2)}{2Eh} \quad (\text{A.176})$$

Então, substituindo as equações (A.168) até (A.171), (A.175) e (A.176) nas equações (A.172) a (A.174), pode-se obter as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos u e w :

$$(1 + \alpha) \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \cot(\theta) \frac{du}{d\theta} - (\nu + \cot^2(\theta))u \right] - (1 + \nu) \frac{dw}{d\theta} + \alpha \left[\frac{d^3 w}{d\theta^3} + \cot(\theta) \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \left(\nu + \cot^2(\theta) \frac{dw}{d\theta} \right) \right] - \phi_e \left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) = 0 \quad (\text{A.177})$$

$$(1 + \nu) \left(\frac{du}{d\theta} + u \cot(\theta) - 2w \right) + \alpha \left[-\frac{d^3 u}{d\theta^3} - 2\cot(\theta) \frac{d^2 u}{d\theta^2} + (1 + \nu + \cot^2(\theta)) \frac{du}{d\theta} - \cot(\theta) (2 - \nu + \cot^2(\theta)) u - \frac{d^4 w}{d\theta^4} - 2\cot(\theta) \frac{d^3 w}{d\theta^3} + (1 + \nu + \cot^2(\theta)) \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \cot(\theta) (2 - \nu + \cot^2(\theta)) \frac{dw}{d\theta} \right] - \phi_e \left(-u \cot(\theta) - \frac{du}{d\theta} + 4w + \cot(\theta) \frac{dw}{d\theta} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) = 0 \quad (\text{A.178})$$

No entanto, considerando casca fina ($h/R < 1/30$), a notação α (A.175) é muito irrisória em comparação com a unidade, portanto, pode ser desprezada.

Timoshenko [9] aplica uma mudança de variável e utiliza das funções de Legendre para obter a solução das equações (A.177) e (A.178). Para que não ocorra o caso trivial, de maneira similar ao caso do cilindro, impõe-se que o determinante da matriz das equações deve ser diferente de zero, obtendo a seguinte equação:

$$(1 - \nu^2)\lambda_n + \alpha\lambda_n[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1 + \nu)^2] - \phi_e\lambda_n[\lambda_n + (1 + 3\nu)] = 0 \quad (\text{A.179})$$

Onde, $\lambda_n = n(n + 1) - 2$ e n é o grau das funções de Legendre. Evitando a solução trivial ($\lambda_n = 0$), onde $n = 1$ caracterizando um deslocamento de corpo rígido, assume-se que λ_n é diferente de zero e, portanto:

$$\phi_e = \frac{(1 - \nu^2)\lambda_n + \alpha\lambda_n[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1 + \nu)^2]}{\lambda_n + (1 + 3\nu)} \quad (\text{A.180})$$

Então, para qualquer valor de n , pode-se calcular ϕ_e e substituir seu valor na equação do parâmetro adimensional $\phi_e = \theta/2$ e encontrar a pressão externa correspondente. Para achar o mínimo de ϕ_e e, conseqüentemente, da pressão externa, iguala-se a zero sua derivada em relação a λ_n . Negligenciando os termos pequenos e de segunda ordem e substituindo os parâmetros adimensionais, obtém-se a equação da pressão crítica de flambagem

$$q_{cr} = \frac{2Et^2}{R^2 \sqrt{[3(1 - \nu^2)]}} \quad (\text{A.181})$$

Deve-se chamar atenção que essa expressão, obtida a partir da hipótese de deformação simétrica, apresenta todos os valores possíveis de ϕ_e e, com isso, sempre pode ser usada

para o cálculo da tensão crítica. Porém, análises experimentais mostraram que a equação A.179 fornece valores de pressão crítica de flambagem muito acima dos resultados reais e não foram observados sinais de instabilidade antes do colapso. Baseado nos resultados experimentais, uma explicação possível para essa diferença é a falta de homogeneidade no diâmetro, levando a não linearidade de imperfeições geométricas. Budynas e Young [99] também apresentam uma fórmula empírica para a "possível" pressão crítica de flambagem:

$$q_{cr} = 0,365E \left(\frac{t}{R} \right)^2 \quad (\text{A.182})$$

B Estabilidade estrutural: desenvolvimentos

B.1 Análise da estabilidade

O desenvolvimento matemático da análise de estabilidade será apresentado e, para sua ilustração, serão utilizados exemplos simples com um grau de liberdade, levando em conta a estrutura com e sem imperfeições geométricas.

B.1.1 Estabilidade de um estado de equilíbrio

Os fenômenos de instabilidade do tipo limite e bifurcacional são apresentados baseados em coordenadas generalizadas Q_i e em um parâmetro de carga generalizado λ [48]. Considerando um sistema conservativo, cujo equilíbrio pode ser definido pela função de energia potencial:

$$V(Q_i, \lambda) \quad (\text{B.1})$$

onde $i = 1$ a n . As equações de equilíbrio do sistema são obtidas ao igualar a zero a derivada da equação (B.1) em relação à Q_i :

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = V_i(Q_i, \lambda) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Passa-se a utilizar a notação indicial com somatórias de 1 a n , onde n é o número de graus de liberdade do sistema.

As variáveis Q_i^F e λ^F definem o estado fundamental (trajetória anterior ao ponto crítico), o qual é considerado de equilíbrio se satisfizer o sistema de equações (B.2), logo:

$$V_i(Q_i^F, \lambda^F) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Um estado perturbado, definido por $Q_i^F + q_i$ e $\lambda^F + \lambda_{inc}$, ocorre quando o estado fundamental recebe os incrementos q_i e λ_{inc} , respectivamente. A energia potencial total desse estado vale:

$$V_i(q_i, \lambda_{inc}) = V(Q_i^F + q_i, \lambda^F + \lambda_{inc}) \quad (\text{B.4})$$

Assim como a variação da energia entre o estado perturbado e o fundamental vale:

$$\Delta V = V(Q_i^F + q_i, \lambda^F + \lambda_{inc}) - V(Q_i^F, \lambda^F) = v(q_i, \lambda_{inc}) \quad (\text{B.5})$$

Essa variação pode ser expandida em série de Taylor:

$$v = \frac{1}{2!} V_{ij}^F q_i q_j + \frac{1}{3!} V_{ijk}^F q_i q_j q_k + \dots \quad (\text{B.6})$$

onde:

$$V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_F \quad (\text{B.7})$$

e

$$V_{ijk} = \left. \frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_F \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.6) se anula, mesmo com $\lambda_{inc} \neq 0$, quando não há variações nas deformações do sistema, em outras palavras, o incremento de deslocamento generalizado q_i é nulo.

A estabilidade do estado fundamental é representada pela forma quadrática [48], que contém a segunda derivada da energia potencial:

$$V_{quad} = \frac{1}{2!} V_{ij}^F q_i q_j \quad (\text{B.9})$$

A forma diagonalizada da equação (B.9) gera critérios para avaliar a estabilidade com esforços matemáticos menores [48]. Portanto, adota-se novas coordenadas para a diagonalização, conhecidas por coordenadas principais u_i :

$$q_i = \alpha_{ij} u_j \quad (\text{B.10})$$

com $|\alpha_{ij}| \neq 0$ e sua inversa:

$$u_i = \beta_{ij} q_j \quad (\text{B.11})$$

com $|\beta_{ij}| \neq 0$. Então, substituindo as equações (B.11) e (B.10), a equação (B.9) em função das novas coordenadas vale:

$$V_{quad} = \frac{1}{2!} V_{ij}^F q_i q_j = \frac{1}{2!} C_i u_i^2 \quad (\text{B.12})$$

Onde C_i são constantes arbitrárias. Escrevendo a nova equação da energia potencial, nas coordenadas principais, tem-se:

$$D(u_i, \lambda) = V(Q_i^F + \alpha_{ij} u_j, \lambda^F + \lambda_{inc}) = d(\alpha_{ij} u_j, \lambda_{inc}) \quad (\text{B.13})$$

Impondo que as coordenadas principais sejam ortogonais, a matriz $||\alpha_{ij}||$ tem os auto vetores de $||V_{ij}^F||$ em seus vetores coluna. Então, expande-se a equação (B.13) em série de Taylor da mesma maneira que na equação (B.6):

$$d = \frac{1}{2!} D_{ii}^F u_i^2 + \frac{1}{3!} D_{ijk}^F u_i u_j u_k + \dots \quad (\text{B.14})$$

com

$$D_{ii} = \frac{\partial^2 D}{\partial u_i^2} \Big|_F \quad (\text{B.15})$$

e

$$D_{ijk} = \frac{\partial^3 D}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_F \quad (\text{B.16})$$

A forma quadrática da equação (B.14) vale:

$$d = \frac{1}{2!} D_{ii}^F u_i^2 \quad (\text{B.17})$$

Igualando as equações (B.9), (B.12) e (B.17), nota-se que:

$$\frac{1}{2!} V_{ij}^F q_i q_j = \frac{1}{2!} C_i u_i^2 = \frac{1}{2!} D_{ii}^F u_i^2 \quad (\text{B.18})$$

As constantes $C_i = D_{ii}$ são conhecidas como coeficientes de estabilidade. Nota-se que uma avaliação desses coeficientes, nada mais é, que a análise da segunda derivada de energia potencial em função da coordenada generalizada. Um equilíbrio estável terá a segunda derivada da energia potencial positiva e todos os coeficientes de estabilidade positivos. Um equilíbrio instável terá a segunda derivada negativa e todos os coeficientes também. Quando a derivada de segunda ordem for nula ou existir pelo menos um coeficiente nulo, tem-se o caso crítico e analisa-se derivadas de maior ordem para obter uma conclusão sobre a estabilidade.

Considerando o caso crítico, utiliza-se termos de maior ordem da equação (B.14) para analisar sua estabilidade, tomando m apenas um coeficiente de estabilidade nulo, $C_r = 0$. Neste caso, ocorre um equilíbrio crítico distinto e a coordenada u_r é a coordenada crítica principal. Portanto, adota-se o índice $r = 1$ para $C_1 = 0$ e $r = s$ para $C_r \neq 0$, com $s \neq 1$.

A estabilidade desse estado crítico é avaliada pela equação (B.14) e fixando $\lambda = \lambda^C$ em todas as direções das coordenadas u_i . Por questões práticas, as coordenadas u_i são escritas na forma paramétrica $u_i = u_i(u_1)$ e a equação (B.14) resulta em:

$$d[u_i(u_1), 0] = D[u_i(u_1), 0] - D(0, 0) = d(u_1) \quad (\text{B.19})$$

desenvolvendo em série de potência de u_i . tem-se:

$$d(u_1) = d_1^C u_1 + \frac{1}{2!} d_{11}^C u_1^2 + \frac{1}{3!} d_{111}^C u_1^3 + \dots \quad (\text{B.20})$$

obtendo

$$d_1^C = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$d_{11}^C = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$d_{111}^C = D_{111}^C \quad (\text{B.23})$$

Se D_{111}^C for não nulo, o estado crítico distinto em análise é instável. Se, porém, $D_{111}^C = 0$, é necessário obter a derivada de quarta ordem. Se essa última derivada for positiva, o estado crítico em análise é estável. Por outro lado, se a derivada de quarta ordem for negativa, o estado crítico é instável. Se a quarta derivada ainda for nula, maiores ordens devem ser analisadas.

B.1.2 Estabilidade de uma trajetória de equilíbrio

Uma sequência de estados de equilíbrio caracteriza uma trajetória de equilíbrio, definida por:

$$D(u_i, \lambda) = 0 \quad (\text{B.24})$$

De modo geral, a solução dessa equação diferencial é complexa e, por isso, adota-se como alternativa a forma paramétrica das coordenadas:

$$u_i = u_i(r) \quad (\text{B.25})$$

$$\lambda = \lambda(r) \quad (\text{B.26})$$

Com um parâmetro de perturbação r para tornar viável a utilização do método das perturbações [48]. Para uma maior generalização, adota-se que o estado fundamental corresponda a um valor arbitrário de um parâmetro s . Então, utilizando as coordenadas incrementais q e λ_{inc} , escreve-se a nova função de energia potencial:

$$W(q_i, \lambda) = V[Q_i^F(s) + q_i, \lambda^F(s) + \lambda_{inc}] \quad (\text{B.27})$$

Com intuito de diagonalizar o estado fundamental ($W_{ij}(0,0)$), quando não existe incrementos, uma mudança de variável é realizada, assim como feita na obtenção da equação (B.12):

$$q_i = \alpha_{ij}(s)u_j \quad (\text{B.28})$$

Substituindo a equação (B.28) na (B.27) e igualando esta última a zero, obtém-se a transformação A :

$$A(u_i, \lambda) = V[Q_i^F(s) + \alpha_{ij}(s)u_j, \lambda^F(s) + \lambda_{inc}] \quad (\text{B.29})$$

que possui as seguintes propriedades:

$$A_i^F = A_i(0,0) = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$A_{ij}^F = A_{ij}(0,0) = 0 \quad (\text{B.31})$$

Substituindo as equações (B.25) e (B.26) na equação (B.29), obtém-se o sistema de equações das trajetórias de equilíbrio:

$$A(u_i(r), \lambda(r)) = 0 \quad (\text{B.32})$$

Essa equação pode ser resolvida pelo método das perturbações, basta derivá-la em relação a r tantas vezes forem necessárias e substituí-las no estado fundamental para obter informações sobre a estabilidade. A resolução dessa equação possibilita o cálculo de um conjunto de coeficientes que varia ao longo da trajetória, definindo sua estabilidade. O desenvolvimento da equação (B.32) depende do caso de estabilidade em análise, por esse motivo os possíveis desenvolvimentos serão apresentados conforme os casos de instabilidade forem descritos nas próximas seções.

Pode-se observar que um estado fundamental normal, ou seja, não crítico, tem o determinante de estabilidade não nulo:

$$\Delta^F = |D_{ii}^F| \neq 0 \quad (\text{B.33})$$

Por esse motivo, a solução da equação (B.32) é única, ou seja, por aquele estado de equilíbrio somente uma única trajetória passa. Outro detalhe é que se o determinante de estabilidade for negativo, o estado fundamental será instável.

B.1.3 Instabilidade por ponto limite (*snap-through*)

Seguindo o raciocínio da seção B.1, a derivação de primeira ordem da equação (B.32) resulta em:

$$A_{ij}^F \dot{u}_j^F + A_{\lambda i}^F \dot{\lambda}^F = 0 \quad (\text{B.34})$$

onde o ponto superscrito ($\dot{}$) representa diferenciação em relação a r .

A derivada de segunda ordem da equação (B.32) é:

$$(A_{ijk}^F \dot{u}_k^F + A_{\lambda ij}^F \dot{\lambda}^F) \dot{u}_j + A_{ij}^F \ddot{u}_j^F + (A_{\lambda ij}^F \dot{u}_j^F + A_{\lambda \lambda i}^F \dot{\lambda}^F) \dot{\lambda}^F + A_{\lambda i}^F \ddot{\lambda}^F = 0 \quad (\text{B.35})$$

Os casos de instabilidade são distinguidos através dos coeficientes diferenciais da equação (B.34), principalmente $A_{\lambda 1}$. Quando $A_{\lambda 1}$ for não nulo, ocorre o caso de ponto limite e da equação (B.34) se pode concluir que:

- Para $i = 1$:

$$A_{\lambda i}^C \dot{\lambda}^C = 0 \quad (\text{B.36})$$

e, portanto:

$$\dot{\lambda}^C = 0 \quad (\text{B.37})$$

- Para $i \neq 1$:

$$\dot{u}_j^C = 0 \quad (\text{B.38})$$

Com esse resultados, a equação (B.35) de segunda ordem fornecem:

$$\ddot{\lambda}^C = -\frac{A_{111}^C}{A_{\lambda 1}^C} \quad (\text{B.39})$$

e

$$\ddot{u}_j^C = -\frac{A_{111}^C A_{\lambda j}^C - A_{j11}^C A_{\lambda 1}^C}{A_{\lambda 1}^C A_{jj}^C} \quad (\text{B.40})$$

Um ponto limite surge no estado crítico quando $A_{111}^C \neq 0$. Como $A_{111}^C \neq 0$, somente uma trajetória cruza o ponto limite da estrutura, a qual tem estabilidade estável até este ponto e se torna instável após o mesmo.

O comportamento do tipo ponto limite será ilustrado por meio de um exemplo baseado na estrutura da Figura B.51, onde se mostra um arco representado por duas molas de rigidez K , comprimidas por uma força P , com o ângulo inicial α e um ângulo ϵ , relativo à imperfeição geométrica.

Figura B.51 – Arco simples (fonte: autor).

Considerando um grau de liberdade, a variável Q , somente as deformações simétricas são consideradas. A energia potencial total do sistema é obtida através da soma da energia elástica das molas com o trabalho realizado pela força P :

$$V_L(Q, P, \epsilon) = kR^2 \left\{ \frac{1}{\cos[\alpha(1-\epsilon)]} - \frac{1}{\cos Q} \right\}^2 - PR \left\{ \tan[\alpha(1-\epsilon)] - \tan Q \right\} \quad (\text{B.41})$$

Tomando os termos trigonométricos da equação anterior como séries de potência com apenas os primeiros termos, a nova equação da energia potencial total do sistema vale:

$$V_L(Q, P, \epsilon) = \frac{kR^2}{4} \left\{ [\alpha(1-\epsilon)]^4 - 2Q^2 [\alpha(1-\epsilon)]^2 + Q^4 \right\} - PR [\alpha(1-\epsilon) - Q] \quad (\text{B.42})$$

Tratando, primeiramente, do sistema perfeito, onde $\epsilon = 0$, a condição de equilíbrio para o sistema é:

$$\frac{\partial V_L}{\partial Q} = V_{L1} = 0 \quad (\text{B.43})$$

Então, derivando a equação (B.42) em relação a Q , obtém-se:

$$V_{L1} = kR^2 (-\alpha^2 Q + Q^3) + PR = 0 \quad (\text{B.44})$$

Isolando a carga P na equação (B.44), obtém-se a equação que rege a trajetória fundamental:

$$P_{Lim}(Q) = kRQ (\alpha^2 - Q^2) \quad (\text{B.45})$$

Essa equação é representada pela trajetória BC na Figura B.52, onde o arco parte do ponto B , sem carga, e segue até o ponto C quando assume um valor crítico.

Figura B.52 – Características do ponto limite imperfeito (fonte: autor).

É possível obter o ponto crítico da estrutura perfeita e se a trajetória fundamental apresenta estabilidade através da segunda derivada da energia potencial em relação a Q , que vale:

$$\frac{\partial^2 V_L}{\partial Q^2} = V_{L11} = kR^2 (3Q^2 - \alpha^2) \quad (\text{B.46})$$

Igualando a equação (B.46) a zero e isolando Q , obtém-se $Q = (\pm\alpha\sqrt{3})/3$ para o qual a carga é crítica e substituindo esse valor na equação (B.45) se obtém o valor dessa carga. A trajetória BC é estável até o ponto crítico, pois para valores de $0 < Q < (\pm\alpha\sqrt{3})/3$ a

equação é positiva. Quando essa trajetória cruza o ponto C se torna instável, pois valores de $Q > (\pm\alpha\sqrt{3})/3$ tornam a $V_{L11} < 0$. Esse comportamento também é exibido na Figura B.52, onde adota-se o padrão de linhas contínuas para indicar a estabilidade e tracejadas para a instabilidade.

A estabilidade do ponto crítico é obtida com auxílio da terceira derivada da energia potencial, pois neste ponto $V_{L11} = 0$:

$$V_{L111} = 6kR^2Q \quad (\text{B.47})$$

Essa equação assume valores não nulos para $Q = (\pm\alpha\sqrt{3})/3$ e, portanto, $V_{L111} \neq 0$, caracterizando a instabilidade nesses pontos.

Voltando na Figura B.52, nota-se o salto dinâmico que ocorre para uma configuração de equilíbrio G distante, ou seja, apresenta grandes deslocamentos. Neste caso, o arco agora estaria em uma configuração invertida, com $\alpha < 0$.

Se houver aumento de carga, a trajetória percorrida segue no sentido GH . No entanto, se ocorrer um alívio contínuo na carga, o arco se mantém invertido e percorre a trajetória GE . O ponto E também é um ponto crítico e o arco salta novamente até o ponto A e volta para a configuração original mostrada na Figura B.51.

Considerando, agora, o sistema imperfeito, a condição de equilíbrio também corresponde a equação (B.43), então, derivando a equação (B.42) em relação a Q , com $\epsilon \neq 0$, obtém-se:

$$V_{Li1} = kR \left\{ -Q [\alpha (1 - \epsilon)]^2 + Q^3 \right\} - PR \quad (\text{B.48})$$

Isolando P na equação (B.48), obtém-se a equação que rege a trajetória de equilíbrio do sistema:

$$P_{Li} = kR^2Q \left\{ [\alpha (1 - \epsilon)]^2 - Q^2 \right\} \quad (\text{B.49})$$

A carga limite, carga crítica do sistema imperfeito, ocorre quando P é estacionário em relação a variável Q . Derivando a equação (B.49) em relação a Q e igualando o resultado a zero, obtém-se o valor de Q para o qual P_{Li} é estacionário:

$$Q_L = \pm \frac{\alpha(1 - \epsilon)}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.50})$$

Substituindo a equação (B.50) na equação (B.49), obtém-se o valor da carga no ponto limite:

$$P^L = \frac{2}{3\sqrt{3}} kR\alpha^3 (1 - \epsilon)^3 = P^c (1 - \epsilon)^3 \quad (\text{B.51})$$

onde P^c é a carga crítica clássica do sistema perfeito. Considerando valores pequenos para ϵ , a equação (B.51) pode ser aproximada para:

$$P^L = P^c (1 - 3\epsilon) \quad (\text{B.52})$$

O comportamento da estrutura imperfeita apresenta uma relação linear entre sua carga limite e o parâmetro de imperfeição, como pode ser visto na equação (B.52). Por esse motivo, esse tipo de estrutura apresenta uma sensibilidade a imperfeição modesta apenas, como pode ser visto na Figura B.53. Vale ressaltar que, no ponto limite, $V_{111} = 0$ e este ponto é instável, assim como para a estrutura perfeita.

Figura B.53 – Características do ponto limite imperfeito (fonte: autor).

B.1.4 Instabilidade por bifurcação

Nesta seção são apresentados os casos de instabilidade que são conhecidos como pontos de bifurcação: assimétrico, simétrico instável e o simétrico estável.

Considerando os coeficientes de estabilidade de uma estrutura com comportamento bifurcacional, utiliza-se, novamente, a equação (B.34), a qual apresenta o coeficiente A_{λ_i} nulo, neste caso, e para que a equação (B.34) seja satisfeita, utiliza-se $i = 1$. Do contrário, quando $i \neq 1$, obtém-se:

$$A_{jj}^c u_j + A_{\lambda j}^c \dot{\lambda}^c \quad (\text{B.53})$$

ou

$$u_j = \frac{A_{\lambda j}^c \dot{\lambda}^c}{A_{jj}^c} \quad (\text{B.54})$$

e para a equação (B.35), da segunda variação, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[A_{\lambda\lambda 1}^c + A_{1jk}^c \left(\frac{A_{\lambda k}^c}{A_{kk}^c} \right) \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{jj}^c} \right) - 2A_{\lambda 1j}^c \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{jj}^c} \right) \right] (\dot{\lambda}^c)^2 \\ & + \left[2A_{\lambda 11}^c - 2A_{11j}^c \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{jj}^c} \right) \right] \dot{\lambda}^c + A_{111}^c = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

A equação anterior pode ser escrita como uma equação do segundo grau de $\dot{\lambda}^c$, pois as raízes desse polinômio representam as curvas que se encontram no ponto crítico:

$$a \left(\dot{\lambda}^c \right)^2 + b \dot{\lambda}^c + c = 0 \quad (\text{B.56})$$

onde:

$$a = A_{\lambda\lambda 1}^c + A_{1jk}^c \left(\frac{A_{\lambda k}^c}{A_{kk}^c} \right) \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{jj}^c} \right) - 2A_{\lambda 1j} \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{jj}^c} \right) \quad (\text{B.57})$$

$$b = 2A_{\lambda 11} - 2A_{11j} \left(\frac{A_{\lambda j}^c}{A_{kk}^c} \right) \quad (\text{B.58})$$

$$c = A_{111}^c \quad (\text{B.59})$$

Duas raízes distintas para a equação (B.56) são obtidas ao fazer $b^2 - 4ac > 0$. Neste caso, como dito anteriormente, surgem duas curvas com tangentes distintas no ponto crítico, conhecido ponto de bifurcação.

Considerando a influência da componente $c = A_{111}^c$ na equação (B.56), percebe-se que quando $A_{111}^c \neq 0$, $\dot{\lambda}^c \neq 0$, ou seja a tangente da curva no ponto de bifurcação não é nula e esse ponto é chamado de ponto de bifurcação assimétrica. Conforme descrito na seção B.1.1, $A_{111}^c = D_{111}^c \neq 0$ caracteriza um ponto de instabilidade, portanto o ponto de bifurcação assimétrica é instável.

B.1.4.1 Ponto de bifurcação assimétrico

O comportamento do tipo bifurcacional assimétrico será ilustrado por meio de um exemplo simples, o qual apresenta uma barra articulada, fixa a uma mola de rigidez equivalente $K_1 = kQ(1 - Q)$ e comprimida por uma força P , como a mostrada na Figura B.54. Essa barra tem um ângulo inicial relativo a imperfeição ϵ e Q é a variável do sistema.

Figura B.54 – Barra articulada: exemplo de comportamento assimétrico (fonte: autor).

A energia potencial total do sistema relaciona a energia de deformação da mola com a energia relativa ao carregamento e vale:

$$V_a(Q) = k \left[\frac{(Q - \epsilon)^2}{2} - \frac{(Q - \epsilon)^3}{3} \right] - Pl (\cos \epsilon - \cos Q) \quad (\text{B.60})$$

Considerando apenas o sistema perfeito com $\epsilon = 0$, a energia potencial resulta em:

$$V_a(Q) = k \left(\frac{Q^2}{2} - \frac{Q^3}{3} \right) - Pl (1 - \cos Q) \quad (\text{B.61})$$

A condição de equilíbrio para o sistema é $V_1 = 0$, então, derivando a equação anterior em relação a Q , obtém-se::

$$V_{a1} = kQ (1 - Q) - Pl \sin Q = 0 \quad (\text{B.62})$$

Uma solução para a equação (B.62) é $Q = 0$ que representa a trajetória fundamental da estrutura, outra solução é para $Q \neq 0$ que representa a curva pós crítica. Para o caso trivial ($Q = 0$), observa-se que a carga P não provoca nenhum deslocamento na estrutura para $0 < P < P_c$, como pode ser visto na Figura B.55. O ponto crítico e a estabilidade das trajetórias são obtidos através da segunda derivada da energia potencial:

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial Q^2} = V_{a11} = k - 2Qk - Pl \cos Q \quad (\text{B.63})$$

Iguala-se essa equação a zero e se isola P para obter o valor da carga crítica $P_c = k/l$. A trajetória de equilíbrio é estável até esse valor crítico devido ao fato de $Q = 0$ produzir valores positivos na equação (B.63). Após o ponto crítico, ocorre uma transição na estabilidade da trajetória fundamental, onde se torna instável ($V_{a11} < 0$) e a coordenada generalizada Q apresenta valores diferentes de zero, como pode ser visto na Figura B.55.

Considerando a curva pós crítica, outra solução da equação (B.62) de onde se isola P para obter:

$$P_{as}(Q) = \frac{k}{l} \left[\frac{Q(1-Q)}{\sin Q} \right] \quad (\text{B.64})$$

Substituindo essa equação na segunda variação da energia potencial (B.63), percebe-se que para $Q < 0$, $V_{a11} > 0$ e se tem estabilidade da estrutura, enquanto para $Q > 0$, $V_{a11} < 0$ é instável, como também pode ser visto na Figura B.55.

Voltando ao ponto crítico, sua estabilidade é obtida com auxílio da terceira derivada da energia potencial, uma vez que nesse ponto $V_{a11} = 0$:

$$V_{a111} = -2k + Pl \sin Q \quad (\text{B.65})$$

V_{111} é não nula e se tem um ponto de instabilidade do sistema.

Figura B.55 – Comportamento assimétrico (fonte: autor).

Voltando ao sistema imperfeito, uma aproximação é feita nos termos trigonométricos da equação (B.60) ao substituí-los pelos primeiros termos de suas expansões em série de potência. Portanto, a equação da energia potencial total resulta em:

$$V_{ai}(Q) = k \left[\frac{-Q^3}{3} + \frac{-Q^2}{2} + Q\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \right] - PL \left(\frac{Q^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \quad (\text{B.66})$$

A condição de equilíbrio para a equação (B.66) é:

$$V_{ai1} = k \left(-Q^2 + Q - \epsilon \right) - PLQ = 0 \quad (\text{B.67})$$

e isolando P , pode-se obter a curva que rege a trajetória de equilíbrio do sistema imperfeito.

No sistema imperfeito ($\epsilon \neq 0$), a análise da segunda variação da energia potencial auxilia na determinação o estado de equilíbrio da trajetória:

$$V_{ai11} = k(-2Q + 1) - PL \quad (\text{B.68})$$

Igualando a equação (B.68) a zero e isolando P , obtém-se a trajetória pós crítica da estrutura imperfeita:

$$P_{ais} = \frac{k}{L}(-2Q + 1) \quad (\text{B.69})$$

Na equação (B.69), o valor de Q que transforma P_{ais} em um valor estacionário, ou seja, quando ocorre a pressão crítica da estrutura, vale:

$$Q = \pm\sqrt{3} \quad (\text{B.70})$$

Neste caso, o equilíbrio no ponto crítico é instável, pois $V_{a111} \neq 0$. Um sistema nessas condições sob a influência de pequenas perturbações poderia se tornar instável dinamicamente, ou seja, sofrer o "*snap-throgh*".

Para estimar a influência das imperfeições na cara crítica da estrutura perfeita, utiliza-se uma aproximação da equação (B.64):

$$P_{as(apr)} = \frac{k}{L}(1 - Q) \quad (\text{B.71})$$

Então, substituindo a equação (B.70) na equação (B.71) e considerando $P^c = K/L$, os pontos limite assumem valores:

$$P_a^L = P_a^c(1 \pm \sqrt{3}) \quad (\text{B.72})$$

Conforme se analisa a equação (B.72), nota-se que a carga clássica sofre alterações consideráveis do parâmetro de imperfeição. No ramo estável da trajetória fundamental, percebe-se uma diminuição da carga crítica, a qual pode apresentar um comportamento limite, como pode ser visto na Figura B.56.

Figura B.56 – Exemplo de comportamento simétrico instável (fonte: autor).

Por outro lado, se a convenção utilizada permitir $\epsilon < 0$ é possível encontrar uma única trajetória totalmente estável, como pode ser visto na Figura B.56.

B.1.4.2 Ponto de bifurcação simétrico

Para o tipo de bifurcação simétrica, os coeficientes c e λ^c da equação (B.56) são nulos, ou seja, a tangente da trajetória fundamental no ponto crítico é nula. Portanto, a estabilidade desse ponto crítico depende da quarta variação de A^c , A_{1111}^{c*} , que vale:

$$A_{1111}^{c*} = A_{1111}^c - 3A_{11j}^c \left(\frac{A_{j11}^c}{A_{jj}^c} \right) \quad (\text{B.73})$$

Este tipo de ponto de bifurcação pode gerar uma trajetória estável ou instável, dependendo do sinal de A_{1111}^{c*} . A trajetória pós crítica que passa por um ponto de bifurcação simétrica é completamente estável na sua vizinhança se $A_{1111}^{c*} > 0$ e completamente instável se $A_{1111}^{c*} < 0$. Eventualmente, é possível que $A_{1111}^{c*} = 0$ e novas derivadas são utilizadas para obter informações sobre a estabilidade, porém esses casos não são comuns na área estrutural e não serão analisados aqui.

O comportamento do tipo bifurcacional simétrico instável será ilustrado por meio de um exemplo de estrutura simples, enquanto o caso simétrico estável será descrito qualitativamente por não se enquadrar nas situações dos vasos de pressão utilizados em AUVs.

A estrutura composta por uma barra rígida e uma mola de rigidez k , conforme exibido na Figura B.57, será usada como exemplo do comportamento simétrico instável. Assume-se que a mola mantém sua orientação horizontal conforme o sistema se desloca.

Figura B.57 – Exemplo de comportamento simétrico instável (fonte: autor).

A energia potencial total do sistema pode ser escrita como:

$$V_{si}(Q) = \frac{1}{2}KL^2(Q - \epsilon)^2 - PL \left[1 - (1 - Q^2)^{1/2} \right] \quad (\text{B.74})$$

A condição de equilíbrio para o sistema é $V_{si1} = 0$, então, derivando a equação (B.74) em relação a Q , obtém-se:

$$V_{si1} = kL^2(Q - \epsilon) - PLQ^2 (1 - Q^2)^{-1/2} = 0 \quad (\text{B.75})$$

Considerando o sistema perfeito ($\epsilon = 0$), existem duas soluções para a equação (B.75): a trivial, $Q = 0$, e a não trivial, $Q \neq 0$. No caso em que $Q = 0$, a trajetória fundamental coincide com o eixo da carga P , a qual acompanha a evolução da carga até que cruza um ponto crítico, como na Figura B.58. A estabilidade dessa trajetória e esse ponto crítico são obtidos através da segunda derivada da energia potencial em relação a Q :

$$V_{si11} = KL^2 - PL (1 - Q^2)^{-1/2} - PLQ^2 (1 - Q^2)^{-3/2} \quad (\text{B.76})$$

Quando $Q = 0$, isola-se P na equação (B.76) e se obtém o valor crítico, $P_{sic} = Kl$, que anula V_{si11} . A trajetória fundamental é estável até o ponto crítico P_{sic} porque qualquer valor $0 < P < P_c$ geram valores positivos em V_{si11} , ou pontos de mínimo. Após atravessar o ponto crítico, surgem os valores $V_{si11} < 0$, pontos de máximo, representando a instabilidade, como exibido na Figura B.58. No valor crítico P_{si}^c , $V_{si11} = 0$ e se procura informações sobre sua estabilidade através da derivada de terceira ordem da energia potencial:

$$V_{si111} = -3PLQ (1 - Q^2)^{-3/2} - 3PLQ^3 (1 - Q^2)^{-5/2} \quad (\text{B.77})$$

V_{si111} é nula quando $Q = 0$ e, então, informações sobre a estabilidade são obtidas através da derivada de quarta ordem:

$$V_{si1111} = 3PLQ(1 - Q^2)^{-3/2} - 18PLQ^2(1 - Q^2)^{-5/2} - 15PLQ^4(1 - Q^2)^{-7/2} \quad (\text{B.78})$$

Como a quarta variação da energia o potencial é negativa, $V_{si1111} = -3kL^2$ quando $Q = 0$, o ponto crítico é instável,

Analisando a outra solução da equação (B.75), quando $Q \neq 0$, é possível isolar P e obter a equação que rege curva pós crítica:

$$P_{sis}(Q) = kL(1 - Q^2)^{1/2} \quad (\text{B.79})$$

Substituindo a equação (B.79) na equação (B.76), pode-se notar que tanto para $Q > 0$ como $Q < 0$, $V_{si11} < 0$, então a trajetória pós crítica é totalmente instável, conforme é exibido na Figura B.58.

Figura B.58 – Comportamento simétrico instável (fonte: autor).

Considerando os sistemas imperfeitos ($\epsilon \neq 0$), a trajetória de equilíbrio imperfeita é única, ou seja, não existe mais a bifurcação no encontro de duas trajetórias. Essa trajetória é obtida de maneira similar à perfeita, isolando P na equação da condição de equilíbrio (B.75):

$$P_{sii}(Q, \epsilon) = kL(1 - Q^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\epsilon}{Q}\right) \quad (\text{B.80})$$

Como pode ser observado nas equações (B.77) e (B.78), as derivadas V_{si11} e V_{si111} não dependem do parâmetro de imperfeição ϵ , portanto, o ponto crítico e a trajetória secundária da estrutura imperfeita apresentam o mesmo comportamento instável da estrutura perfeita. Isto é, a estrutura apresenta um comportamento estável até um ponto crítico e instável após esse valor, transformando-se em um caso de ponto limite, ou seja, quando essas estruturas estão sob cargas próximas às críticas, podem se tornar instáveis e apresentar grandes deformações, como pode ser visto na Figura B.59. Esse tipo de estabilidade é chamada de meta-estabilidade. Para encontrar o valor da carga limite P^L neste caso, utiliza-se a segunda derivada da energia potencial total, equação (B.76), e isola-se a carga P :

$$P_{si}^L = kL (1 - Q^2)^{3/2} \quad (\text{B.81})$$

Para obter uma relação entre a carga limite e as imperfeições, iguala-se as cargas da condição de equilíbrio, equação (B.80), com a carga limite, equação (B.81), obtendo:

$$Q = \epsilon^{1/3} \quad (\text{B.82})$$

e se substitui esse resultado na equação (B.81), obtendo:

$$P_{si}^L(\epsilon) = P_c (1 - (\epsilon^{2/3}))^{3/2} \quad (\text{B.83})$$

Essa equação gera a curva de sensibilidade a imperfeição para a estrutura do tipo simétrica instável, cuja sensibilidade é considerável quando comparada com os outros tipos de instabilidade bifurcacional, como pode ser visto na Figura B.59

Figura B.59 – Ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: autor).

Uma ressalva deve ser feita, os casos de bifurcação simétrica têm essa nomenclatura devido a trajetória de pós-crítica ter tangente nula no ponto crítico. Portanto, não necessariamente ocorre simetria na curva e a terceira derivada normalmente é não nula.

B.1.4.3 Ponto de bifurcação simétrico estável

Considerando o comportamento simétrico estável, sua trajetória fundamental inicialmente estável e segue evoluindo cruzar uma trajetória pós-crítica no ponto crítico com tangente nula.

Figura B.60 – Comportamento de uma estrutura perfeita com ponto de bifurcação simétrico instável (fonte: autor).

Nota-se que a energia potencial tem um único ponto estacionário, conhecido como mínimo da região estável da trajetória fundamental, quando o carregamento é menor que o crítico. Conforme a carga ultrapassa o valor crítico, surgem dois mínimos e um máximo para a energia potencial, como mostrado na Figura B.60.

Analisando o ponto crítico, é possível conferir que sua estabilidade é estável e, portanto, não há possibilidade de ocorrer o "*snap-through*". Então, o sistema seguirá a trajetória de pós-crítica na direção em que ocorrer uma possível perturbação.

Este tipo de instabilidade, na presença de imperfeições, apresenta dois comportamentos: o primeiro crescente e estável, pois sempre se obtém valores positivos na segunda derivada da energia potencial; e o segundo é um ramo complementar que não apresenta interesse prático por não acontecer naturalmente, como podem ser vistos na Figura B.61. O primeiro comportamento ocorre na prática e não apresenta grande sensibilidade à imperfeição [30], ao contrário, apresenta um aumento na rigidez após o ponto crítico.

Figura B.61 – Ponto de bifurcação simétrico estável (fonte: autor).