RUBEN ANDRES SALAS VARELA

**Projeto Dinâmico de Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)
Utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT)**

São Paulo

2017

RUBEN ANDRES SALAS VARELA

**Projeto Dinâmico de Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)
Utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT)**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Doutor em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia de Controle e Automação
Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

**São Paulo
2017**

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Salas Varela, Ruben Andres

Projeto Dinâmico de Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)
Utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT) / R. A. Salas Varela --
versão corr. -- São Paulo, 2017.
364 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Piezoeletricidade 2.Topologia (Otimização) 3.Método dos Elementos
Finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus pela vida, pela saúde, pelos favores recebidos e pela maravilhosa oportunidade de seguir crescendo academicamente.

Ao orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pelo apoio e confiança depositada, pela sua paciência e empenho para a realização desse trabalho.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro através da bolsa de doutorado outorgada (processo nº 2011/19979-1).

Ao Prof. Dr. Rafael Moura pelos seus aportes na caracterização experimental e ao Prof. Dr. Marcílio Alves por pôr à disposição o GMSIE para a realização das experiências. Ao Prof. Dr. Linilson Padovese do LADIN e o técnico Jorge do LMR do PMI pela sua colaboração na parte de fabricação e ao MSc. David Gonzalez do LCE da UFSCar na parte de caracterização de materiais.

Ao Dr. Alexander Alvarez, pela sua contribuição na área de processamento de sinais e montagem. Ao Eng. Victor Romero, pelas discussões e colaborações na área de eletrônica e computação e pela boa convivência que me fez sentir sempre em casa. Aos membros do GMSIE, em especial ao Henrique, Leonardo, Vinícius e Pouria; ao Carlos Mario do Laboratório de Ultrassom e Eleir e Vanessa do LFS, pois sem sua ajuda não teria sido possível culminar a caracterização experimental.

Aos membros do grupo de pesquisa do Laboratório de Otimização de Sistemas Multifísicos (LOSM), pelas discussões e colaboração e o seu grande apoio em momentos muito difíceis.

Aos meus pais, Leyda e Gustavo, que na distância sempre estiveram comigo de mente e coração e que sempre me brindaram o seu amor e apoio incondicional. Aos meus irmãos, Sandra e Diego, que sempre tem acreditado em mim e à minha avó Lucia, pelas suas orações e os seus bons desejos, embora já não esteja conosco.

Aos que compartilharam comigo gratos momentos no Brasil: Alex, Beto, Jimmy, Lina Pérez, Lina Rayo, Luis Bernardo, Monna, Sebastián, Víctor e Yamid. Em especial ao Alex, Jimmy, Lina Rayo e Víctor pela amizade incondicional. À Erika, Carol e Mily pelo o seu grande apoio no momento mais crítico desse trabalho. Na Colômbia, à Silvia e Edward que estiveram comigo em momentos difíceis sem importar a distância. E finalmente, a todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Materiais piezocompósitos laminados são compostos por camadas de material piezelétrico, metálico e compósito (matriz epóxi com fibras de carbono ou de vidro), que possibilitam obter vantagens em relação aos materiais piezelétricos convencionais, permitindo obter características superiores que não podem ser conseguidas pelos seus componentes de forma isolada como, por exemplo, maior flexibilidade e resistência mecânica ou menor peso. Sob esse enfoque, este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA) que consistem basicamente em estruturas multicamadas, através do projeto da sua resposta transiente e harmônica visando aplicações dinâmicas. Entre as potenciais aplicações dessas estruturas, tem-se atuadores, motores, sonares e dispositivos de coleta de energia (*“energy harvester”*), sendo de muito interesse a melhora das suas características dinâmicas e o seu desempenho. O projeto dinâmico de uma EPLA é complexo, porém pode ser sistematizado utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT). O MOT é um método baseado na distribuição de material num domínio de projeto fixo com o objetivo de extremizar uma função de custo sujeita às restrições inerentes do problema, combinando algoritmos de otimização e de elementos finitos. A formulação de MOT para o projeto dinâmico de EPLA pretende determinar tanto a topologia ótima dos materiais nas diferentes camadas quanto o sinal de polarização do material piezelétrico e o ângulo da fibra na camada compósita, tendo como finalidade a maximização da amplitude de vibração em pontos determinados (em atuadores) ou da geração de energia elétrica a partir de excitações mecânicas (em coletores de energia). Além disso, é formulado um problema combinando os enfoques harmônico e transiente com o intuito de customizar a resposta da EPLA, de modo que, o nível da resposta seja o mesmo perante diferentes tipos de onda de excitação (transdutores multi-entrada). O trabalho inclui as etapas de projeto, simulação, fabricação e caracterização de protótipos.

Palavras Chave: Otimização Topológica, Estruturas Piezocompósitas Laminadas, Resposta Transiente, Atuadores Piezelétricos, Coletores de Energia Piezelétricos, Transdutores Piezelétricos Multi-Entrada.

ABSTRACT

Laminated piezocomposite materials are composed by layers of piezoelectric, metal and composite material (epoxy matrix with carbon or glass fiber), which have advantages over conventional piezoelectric materials, because of their superior characteristics, which cannot be achieved by any of its components isolated, for example, more flexibility and strength and less weight. Under this approach, this work aims at the development of Laminated Piezocomposite Structures (LAPS) what primarily consist of multi-layer structures, through the transient and harmonic response design aiming at dynamic applications. Among the potential applications of these structures it can be cited actuators, motors, sonar devices and energy harvester, being of great interest the improvement of its dynamic characteristics and performance. The dynamic design of a LAPS is complex however it can be systematized by using the Topology Optimization Method (TOM). The TOM is a method based on the distribution of material in a fixed design domain with the aim of extremizing a cost function subject to constraints inherent to the problem by means of combining the optimization algorithms and the finite element method (FEM). The TOM formulation for the LAPS dynamic project aims to determine together the optimal topology of the materials for different layers, the polarization sign of the piezoelectric material and the fiber angle of the composite layer, in order to maximize the vibration amplitude at certain points (in actuators), or the generation of electrical energy from mechanical excitations (in energy harvesters). In addition, a TOM problem combining harmonic and transient approaches is formulated with the purpose of customizing EPLA response so that the response level is the same for different excitation waveforms (multi-entry transducers). The work includes design, simulation, manufacturing and characterization of prototypes.

Keywords: Topology Optimization, Laminated Piezocomposite Structures, Transient Response, Piezoelectric Actuators, Piezoelectric Energy Harvesters, Multi-Entry Piezoelectric Transducers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)	35
Figura 2 – Procedimento típico do MOT no projeto de EPLA	39
Figura 3 – Condições de contorno e de carregamento nas EPLA	51
Figura 4 – Condições de contorno natural: (a) Problema elétrico; (b) Problema estrutural	54
Figura 5 – Condições de contorno e de carregamento nas EPLA quando acopladas com um elemento de impedância elétrica concentrada	57
Figura 6 – Condição de contorno natural no problema elétrico no caso de acoplamento com um elemento de impedância elétrica concentrada	58
Figura 7 – Modelo unidimensional de um atuador piezelétrico considerando parâmetros concentrados	62
Figura 8 – Modelo unidimensional de um coletor de energia piezelétrico considerando parâmetros concentrados	64
Figura 9 – Elemento de casca isoparamétrico de oito nós e o seu mapeamento entre as coordenadas globais, naturais e materiais	68
Figura 10 – Acoplamento entre camadas: (a) Deslocamentos ao longo da espessura sob a teoria de “<i>Layer Wise</i>”; (b) Adesão entre duas camadas	77
Figura 11 – Resposta transiente característica das EPLA: (a) Deslocamento; (b) Potencial elétrico; (c) Potência ativa em coletores de energia	84
Figura 12 – Comparação entre a função degrau e a função degrau com tempo de subida finito	86
Figura 13 – Modelo de amortecimento estrutural dependente das frequências naturais	89
Figura 14 – Definição de banda de potência média	90
Figura 15 – Comportamento típico das propriedades dielétricas em relação à frequência	92
Figura 16 – Impedância distribuída equivalente do circuito elétrico acoplado	97
Figura 17 – Modelo de parâmetros concentrados da equação elétrica de MEF	98
Figura 18 – Circuito equivalente do modelo de parâmetros concentrados da equação elétrica de MEF para a análise de transferência de potência	101

Figura 19 – Curva de transferência de potência relativa e de eficiência do sistema para o circuito equivalente do modelo de parâmetros concentrados.....	102
Figura 20 – Metodologia do trabalho proposto utilizando o MOT	108
Figura 21 – Comparação de número de variáveis por elemento entre métodos de interpolação de orientação de fibra em OT.....	115
Figura 22 – Problema de otimização no projeto de atuadores EPLA	121
Figura 23 – Customização da resposta no problema de otimização combinado para o projeto de atuadores EPLA	128
Figura 24 – Problema de otimização no projeto de coletores EPLA	130
Figura 25 – Customização da resposta em potência no problema de otimização combinado para o projeto de coletores EPLA	137
Figura 26 – Implementação das variáveis de projeto por elemento para o MOT em EPLA.....	146
Figura 27 – Problema de flexibilidade média para EPLA: (a) Atuador; (b) Coletor de energia excitado por força; (c) Coletor de energia excitado por deslocamento	157
Figura 28 – Imposição de simetria no problema de otimização de EPLA para atuação no plano.....	160
Figura 29 – Imposição de simetria no problema de otimização de EPLA para atuação fora do plano	162
Figura 30 – Regiões definidas pelos raios de filtro r_{2Dmin} e r_{3Dmin}	164
Figura 31 – Efeito do refinamento da malha sobre o conjunto N_e definido para a utilização do filtro de sensibilidades	165
Figura 32 – Função de penalização de ortogonalidade da fibra aplicada às variáveis de pseudo-orientação para $P_{Par}=1$	170
Figura 33 – Exemplo de aplicação da função de penalização de ortogonalidade da fibra para $P_{Parmax}=0,7$ e $P_{Parmin}=0,5$ e $b=0$	173
Figura 34 – Diagrama de fluxo para a implementação computacional do MOT para o projeto de EPLA	181
Figura 35 – Representação por pentes de Dirac da excitação e resposta para o problema adjunto em atuadores (a) Integral; (b) Ponderado.....	199
Figura 36 – Representação por pentes de Dirac da excitação e resposta para o problema adjunto em coletores de energia (a) Integral; (b) Ponderado.....	214

Figura 37 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para o problema combinado do atuador.....	220
Figura 38 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para o problema combinado do coletor de energia	220
Figura 39 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o atuador EPLA-ATA: (a) Problema original; (b) Problema resolvido pelo MOT aplicando a simetria em torno ao plano xz	232
Figura 40 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do atuador EPLA-ATA	234
Figura 41 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o atuador EPLA-AFF	236
Figura 42 – Distribuição das orientações da fibra para o problema do atuador EPLA-AFF.....	238
Figura 43 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do atuador EPLA-AFF	239
Figura 44 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o coletor de energia EPLA-CFA.....	242
Figura 45 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do coletor de energia EPLA-CFA	244
Figura 46 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do coletor de energia EPLA-CFA	249
Figura 47 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do coletor de energia EPLA-CFA	249
Figura 48 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do coletor de energia EPLA-CFA	250
Figura 49 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do coletor de energia EPLA-CFA	250
Figura 50 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do coletor de energia EPLA-CFA.....	251
Figura 51 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do coletor de energia EPLA-CFA.....	251
Figura 52 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-ATA.....	252

Figura 53 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-ATA.....	252
Figura 54 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do atuador EPLA-ATA	253
Figura 55 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do atuador EPLA-ATA	253
Figura 56 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do atuador EPLA-ATA	254
Figura 57 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do atuador EPLA-ATA	254
Figura 58 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-AFF	255
Figura 59 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-AFF	255
Figura 60 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do atuador EPLA-AFF	256
Figura 61 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do atuador EPLA-AFF	256
Figura 62 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do atuador EPLA-AFF	257
Figura 63 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do atuador EPLA-AFF	257
Figura 64 – Caracterização experimental do Alumínio: (a) Máquina de ensaio universal Instron 3369; (b) Extensômetro tipo clipe para medição de deformação axial e transversal	259
Figura 65 – Corpos de prova tipo “dog bone” ou gravata: (a) Geometria com dimensões em mm; (b) Corpos de prova utilizados no ensaio de tração.....	259
Figura 66 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 1.....	260
Figura 67 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 2 considerando a histerese do material.....	261
Figura 68 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 3 considerando a histerese do material.....	261
Figura 69 – Deformação transversal vs deformação longitudinal para o CDP 2.....	261
Figura 70 – Deformação transversal vs deformação longitudinal para o CDP 3.....	262

Figura 71 – Discos de alumínio utilizados para a estimativa da densidade de massa....	263
Figura 72 – Caracterização experimental do material piezelétrico: (a) Discos de cerâmica utilizados; (b) Equipamento de corte por jato da água Omax 2652A	264
Figura 73 – Caracterização experimental do PZT-5A: (a) Medidor de precisão de impedância Agilent 4294A; (b) Obtenção da curva de magnitude e fase da impedância para o disco 10	264
Figura 74 – Comparação das curvas de impedância numéricas e experimentais correspondentes ao disco 1: (a) Magnitude; (b) Fase	266
Figura 75 – Desenhos de fabricação dos protótipos EPLA: (a) Modelo CFA-I; (b) Modelo CFA-T	270
Figura 76 – Processo de fabricação dos protótipos de coletores de energia EPLA	271
Figura 77 – Protótipos EPLA fabricados	275
Figura 78 – Montagem experimental para a caracterização de EPLA	277
Figura 79 – Instalação da fita refletora nos transdutores e na base de suporte do shaker	278
Figura 80 – Processo de alinhamento do <i>shaker</i> , transdutor e laser	279
Figura 81 – Focalização do laser sobre os pontos de medição	280
Figura 82 – Circuitos utilizados na caracterização dos prototipos fabricados: (a) Circuito integral; (b) Circuito otimizado	282
Figura 83 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-I (<i>AInt</i>): (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada.....	283
Figura 84 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-I (<i>AInt</i>) em torno da primeira frequência de ressonância experimental: (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada	283
Figura 85 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-T (<i>AOpt</i>): (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada.....	286
Figura 86 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-T (<i>AOpt</i>) em torno da primeira frequência de ressonância experimental: (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada	287
Figura 87 – Comparação da resposta transiente para o protótipo <i>AInt1</i> com o modelo CFA-I modificado: (a) Deslocamento; (b) Velocidade; (c) Aceleração; (d) Voltagem.....	288

Figura 88 – Comparação da resposta transiente para os protótipos <i>AI_{nt}</i> e <i>AO_{pt}</i> do modelo EPLA-CFA: (a) Deslocamento imposto; (b) Deslocamento do coletor; (c) Voltagem	289
Figura 89 – Curvas de perdas mecânicas e dielétricas dependentes da frequência obtidas experimentalmente	291
Figura 90 – Hipóteses da teoria de placas de Reissner-Midlin: (a) Mecânica; (b) Cinemática.....	345
Figura 91 – Interpolação do campo de potencial elétrico.....	352
Figura 92 – Comportamento de uma componente do vetor de variáveis de projeto perante a função de penalização de variáveis de projeto intermediárias...	357
Figura 93 – Função de penalização para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro aplicada às variáveis de pseudo-densidade e pseudo-polarização.....	359
Figura 94 – Aproximação linear da função objetivo e definição de limites móveis	363

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistema de unidades adotado para a modelagem com MEF	106
Tabela 2 – Propriedades do Alumínio	223
Tabela 3 – Propriedades da Fibra de vidro em matriz epóxica	224
Tabela 4 – Propriedades do material piezelétrico PZT-4 para atuadores	224
Tabela 5 – Propriedades do material piezelétrico PZT-5A para coletores	225
Tabela 6 – Fatores de penalização utilizados no MOT no problema de atuadores.....	227
Tabela 7 – Fatores de penalização utilizados no MOT no problema de coletores de energia.....	228
Tabela 8 – Valores extremos e limite das variáveis de projeto.....	229
Tabela 9 – Características do microcomputador utilizado nas simulações	230
Tabela 10 – Dados do problema do atuador EPLA-ATA.....	233
Tabela 11 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do atuador EPLA-ATA.....	233
Tabela 12 – Dados do problema do atuador EPLA-AFF	237
Tabela 13 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do atuador EPLA-AFF.....	237
Tabela 14 – Dados do problema do coletor de energia EPLA-CFA	243
Tabela 15 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do coletor de energia EPLA-CFA	243
Tabela 16 – Análise assintótica do algoritmo <i>EPLADin</i>	247
Tabela 17 – Resultados das propriedades do Alumínio obtidas pelo ensaio de tração ..	262
Tabela 18 – Dados dos discos de Alumínio para a estimativa da densidade de massa ..	263
Tabela 19 – Resultados da caracterização do Alumínio	263
Tabela 20 – Dados dos discos de PZT-5A.....	265
Tabela 21 – Resultados da caracterização do PZT-5A	267
Tabela 22 – Caracterização geométrica e de pesos das camadas dos protótipos.....	272
Tabela 23 – Caracterização geométrica e de pesos das EPLA finais.....	274
Tabela 24 – Comparação dos resultados obtidos numérica e experimentalmente para o coletor de energia CFA-I na análise harmônica considerando como	

frequência de operação 50 Hz e uma excitação por deslocamento de 2×10^{-4} mm.....	284
Tabela 25 – Comparação dos resultados obtidos numérica e experimentalmente para o coletor de energia CFA-T na análise harmônica considerando como frequência de operação 50 Hz e uma excitação por deslocamento de 2×10^{-4} mm.....	287
Tabela 26 – Comparação dos resultados obtidos experimentalmente para os protótipos dos coletores de energia CFA-I (<i>AInt</i>) e CFA-T (<i>AOpt</i>) na análise transiente	290
Tabela 27 – Localização dos nós de um elemento de casca no sistema natural	341
Tabela 28 – Pontos e pesos para a quadratura Gaussiana (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970).	344
Tabela 29 – Pontos e pesos da quadratura Gaussiana e de Lobatto para 5 pontos de integração	355

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAEM	Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico
CDP	Corpo de Prova
CMOS	<i>Complementary Metal-Oxide-Semiconductor</i>
CVX	Otimizador baseado em programação convexa utilizado nesse trabalho
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EPLA	Estruturas Piezocompósitas Laminadas
ETM	Eletrotermomecânico (a)
FGM	<i>Functionally Graded Materials</i>
GDL	Grau de Liberdade
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método de Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MIAFIB	Modelo de Interpolação Autopenalizável da Orientação da Fibra
MILZEL	Modelo de Interpolação Linear das Impedâncias Elétricas
MOT	Método de Otimização Topológica
ODM	Otimização Discreta de Material
OFDN	Otimização de Fibra por Distribuição Normal
OT	Otimização Topológica
PCB	Parametrização por Codificação Binária
PEMAP-P	<i>Piezoelectric Material with Penalization and Polarization</i>
PFF	Parametrização por Funções de Forma
PLS	Programação Linear Sequencial
PQS	Programação Quadrática Sequencial
PVDF	Fluoreto de Polivinilideno
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Microstructure with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>
TOM	<i>Topology Optimization Method</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Operador de montagem de MEF
$\mathcal{A}$	Integral de ação
A_e	Área da fronteira do elemento finito
$\mathcal{A}_I$	Amplitude da resposta harmônica
A_ω	Fator de excitação harmônica
$\hat{A}_\omega$	Pseudo-fator de excitação harmônica
$A_{\omega_{\min}}$	Valor mínimo do fator de excitação harmônica
$A_{\omega_{\max}}$	Valor máximo do fator de excitação harmônica
$\hat{A}_{\omega_{\min}}^{\text{mov}}$	Limite móvel inferior do pseudo-fator de excitação harmônica
$\hat{A}_{\omega_{\max}}^{\text{mov}}$	Limite móvel superior do pseudo-fator de excitação harmônica
A_{im}	Matriz de funções de forma elementar
A_{vm}^G	Matriz de restrições de deslocamento entre camadas
A_{xz}^H	Matriz de acoplamento de potenciais elétricos
a_z	Coefficiente da função cúbica do tempo de execução
a_1	Coefficiente de amortecimento estrutural proporcional à massa
B	Susceptância elétrica
B_j^r, B_j^s	Derivadas das funções de forma em relação às variáveis do sistema natural r e s
B_{uam}	Matriz elementar de derivadas de funções de forma
$B_{\phi_{jz}}$	Matriz de interpolação piezelétrica
b_e	Comprimento do elemento finito no plano da casca
b_z	Coefficiente da função cúbica do tempo de execução
b_{1ij}	Matriz de coeficientes de amortecimento estrutural proporcional à rigidez
C	Capacitância elétrica, capacitor, função que define o filtro de sensibilidades
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\hat{C}, \hat{C}_w$	Variável de projeto do pseudo-capacitor
C_f	Número de camadas com material ortotrópico
C_p	Número de camadas piezelétricas
C_t	Número total de camadas

C_m^Σ	Flexibilidade média
$\hat{C}_{\min_w}^{\text{mov}}$	Vetor de limites móveis inferior da variável de projeto do pseudo-capacitor
$\hat{C}_{\max_w}^{\text{mov}}$	Vetor de limites móveis superior da variável de projeto do pseudo-capacitor
C_{ei}	Matriz diagonal da função do filtro de sensibilidades
$C_{d_{sm}}$	Matriz de amortecimento
$C_{C_{wq}}$	Matriz de capacitância elétrica concentrada
C_1^E	Tensor de módulo elástico obtido em campo elétrico constante
$[C_1^E]$	Matriz de módulo elástico obtido em campo elétrico constante
CP	Critério de convergência
c	Coseno do ângulo θ , velocidade da luz
c_i	Coefficiente da função quadrática do tempo de inicialização
c_2	Coseno do ângulo duplo
c_{1ij}	Matriz de coeficientes de amortecimento estrutural proporcional
D_i	Vetor de deslocamento elétrico
D_i^P	Vetor de deslocamento elétrico imposto
d_m	Vetor de deslocamento
$\dot{d}_m$	Vetor de velocidade
$\ddot{d}_m$	Vetor de aceleração
E_i	Vetor de campo elétrico
E_{1i}	Módulo de Young para materiais ortotrópicos
E_1	Módulo de Young para materiais isotrópicos
e	Elemento e -ésimo da discretização de MEF
$\hat{e}_i$	Vetor unitário
e_{0ijk}	Tensor piezelétrico
$[e_0]$	Matriz piezelétrica
F^D	Função objetivo dinâmica
F_I	Vetor de carga na notação estendida
$\mathcal{F}_I$	Vetor de forças de corpo estendido
F_{d_s}	Vetor de força
F_s^P	Vetor de forças pontuais prescritas
F^R	Função objetivo no tempo de subida

F^{τ}	Função objetivo transiente
F^{ω}	Função objetivo harmônica
F_{CCF}	Função de penalização da instabilidade de tabuleiro
F_{OBJ}^{lin}	Função objetivo linearizada do problema de otimização
F_{EPLA}^{MO}	Função multiobjetivo do problema de otimização
F_{POF}	Função de penalização da ortogonalidade da fibra
F_{OBJ}^A	Função objetivo no problema de otimização de atuadores
F_{OBJ}^C	Função objetivo no problema de otimização de coletores de energia
F_{OBJ}^+	Porção positiva da função objetivo
F_{OBJ}^-	Porção negativa da função objetivo
F_{PotEst}	Fator de potência estimada
F_{VPI}	Função de penalização das variáveis de projeto intermediárias
F_J^{ADJ}	Excitação do problema adjunto de sensibilidades
f_{b_i}	Vetor de forças de corpo
f	Elemento f -ésimo com material ortotrópico da discretização de MEF
f_e	Frequência de Nyquist
f_m	Frequência de amostragem
f_{exc}	Frequência de excitação da função harmônica
G	Condutância elétrica, função de restrição de deslocamento entre camadas, número de restrições de deslocamento entre camadas
G_m	Vetor de restrições de deslocamento
G_1	Módulo de cisalhamento para materiais isotrópicos
G_{IJ}^c	Matriz de condutância elétrica
G_{R_wq}	Matriz de condutância elétrica concentrada
$G_{\sigma_{wz}}$	Matriz de condutância elétrica distribuída
G_{1ij}	Módulo de cisalhamento para materiais ortotrópicos
g_{REST}	Restrição do problema de otimização
g_{REST}^{lin}	Restrição linearizada do problema de otimização
H	Número de restrições de potencial elétrico nos eletrodos, função Heaviside
$\mathcal{H}$	Densidade de entalpia elétrica, solução homogênea de uma EDO
H_i	Função de detecção das instabilidades de tabuleiro
H_{ei}	Fator de peso no filtro de sensibilidades

H_{jk}	Matriz diagonal de espessuras do elemento finito
H_{FRT}	Função Heaviside com tempo finito de subida
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev de primeira ordem, cujos elementos são funções contínuas com primeira derivada quadrado integrável no domínio Ω
h_e	Altura do elemento finito no plano da casca
h_k	Espessura do elemento finito no nó k .
I	Corrente elétrica
I_H	Índice de instabilidades de tabuleiro
I_P	Índice de ortogonalidade da fibra
I_R	Índice de variáveis de projeto intermediárias
I_r^p	Vetor de correntes elétricas pontuais prescritas
I_{ϕ_r}	Vetor global de correntes elétricas
i_s	Critério de estabilização da resposta transiente
J	Jacobiano
J_A	Jacobiano de área superficial
J_i	Densidade de corrente elétrica
J_s	Jacobiano de linha para uma fronteira
$[J]$	Matriz Jacobiana
$[J^*]$	Matriz inversa da matriz Jacobiana
j	Variável complexa
K	Rigidez da peça de trabalho ou peça atuada
$\mathcal{K}$	Densidade volumétrica de energia cinética
$K_{d_{sm}}$	Matriz de rigidez
$K_{d\phi_{sz}}$	Matriz de rigidez piezelétrica
$K_{\sigma_{rz}}$	Matriz de condutividade elétrica
$K_{\phi\phi_{rz}}$	Matriz de rigidez dielétrica
K_{ijMn}	Tensor de módulo elástico estendido
k_s	Fator de correção para a tensão cisalhante
L	Indutância elétrica, indutor
$\hat{L}, \hat{L}_w$	Variável de projeto do pseudo-indutor
$\mathcal{L}$	Função de densidade lagrangeana
L_I	Vetor “filtro” do problema de atuadores

$\hat{L}_{\min w}^{mov}$	Vetor de limites móveis inferior da variável de projeto do pseudo-indutor
$\hat{L}_{\max w}^{mov}$	Vetor de limites móveis superior da variável de projeto do pseudo-indutor
l_e	Mínima dimensão do elemento finito no plano da casca
M_p	Máxima ultrapassagem
$M_{d_{sm}}$	Matriz de massa
m	Número de passos de integração no tempo, massa
m_i	Função para o mapeamento das instabilidades de tabuleiro
n	Número total de nós da discretização de MEF
N	Número total de elementos da discretização de MEF
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
N_d	Número de ciclos de oscilação da resposta transiente
N_e	Conjunto definido para cada variável de projeto em que se aplica o filtro de sensibilidades
N_f	Número total de elementos com material ortotrópico
N_i	Vetor de funções de forma do elemento isoparamétrico, Número de variáveis de projeto na direção i
N_p	Número total de elementos com material piezelétrico
N_v	Número de modos de vibração
N_z	Número de circuitos acoplados
N_{eq}	Número de circuitos em paralelo equivalentes à impedância Z
N_{mp}	Número de ciclos em meio período de oscilação
N_{cam}	Número de elementos por camada, número de variáveis de projeto por camada
N_{iter}	Número da iteração atual
$N_{\Gamma_{Acum}}$	Número de modos de vibração que contribuem ao fator participação modal acumulada
N_{θ}	Número de ângulos presentes na camada compósita
$N_{\theta_{max}}$	Número de ângulos candidatos do modelo MIAFIB
N_{ϕ_z}	Vetor de funções de forma para o domínio elétrico
$\hat{n}_i$	Vetor normal unitário
n_{intf}	Número de nós interiores nas camadas ortotrópicas
$\odot_z$	Vetor nulo de dimensão z
$\odot_{ij}$	Matriz nula de dimensão $i \times j$

$\odot_{ije}$	Tensor nulo de ordem 3 de dimensão $i \times j \times e$
P_e	Fator de penalização da matriz piezelétrica
P_f	Fator de penalização da matriz de rotação
P_c	Fator de penalização da matriz de elasticidade
P_m	Fator de penalização da densidade de massa
P_γ	Fator de penalização da polarização do material piezelétrico
P_ϵ	Fator de penalização da matriz dielétrica
$P_{f_{\max}}$	Fator de penalização máximo da matriz de rotação
P_i^{exc}, P_j^P	Vetor de forças impostas
$\mathcal{P}$	Solução particular de uma EDO
P_{par}	Parâmetro de controle do paralelismo de fibras adjacentes
P_{ort}	Função de detecção da ortogonalidade da fibra
P_{ot}	Potência elétrica
P_{ot_a}	Potência elétrica ativa
P_{ot_r}	Potência elétrica reativa
P_{ot_s}	Potência elétrica aparente
$P_{\text{ot}_a}^R$	Potência ativa no tempo de subida
$\overline{P_{\text{ot}_a}^\tau}$	Potência média ativa em regime transiente
$\overline{P_{\text{ot}_{ca}}^\tau}$	Potência ativa média de num ciclo de excitação completo em regime transiente
$\overline{P_{\text{ot}_{mpa}}^\tau}$	Potência ativa média de meio período de excitação
$\overline{P_{\text{ot}_{Tda}}^\tau}$	Potência ativa média gerada num ciclo de oscilação da resposta transiente
$\overline{P_{\text{ot}_a}^\omega}$	Potência média ativa em regime harmônico
p	Elemento p -ésimo com material piezelétrico da discretização de MEF
Q	Carga elétrica, fator de qualidade
Q_i	Fator de qualidade do i -ésimo modo de vibração
Q_{ϕ_r}	Vetor de cargas elétricas
Q_r^p	Vetor de cargas elétricas pontuais prescritas
q_i^{Ap}	Vetor de força de tração superficial prescrita sobre A_e
q_i^{Sp}	Vetor de força de tração superficial prescrita sobre S_e
$\dot{q}^{\text{Sp}}$	Densidade de corrente elétrica prescrita sobre a área S_e
R	Resistência elétrica, resistor
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

$\hat{R}, \hat{R}_w$	Variável de projeto do pseudo-resistor
$\mathcal{R}$	Função Rayleighiana de amortecimento viscoso
R_I	Vetor de excitação para o cálculo da fração de participação modal
R_{p_j}	Valor da resposta no pico j -ésimo
R_{PT}	Potência transferida relativa
$\hat{R}_{\min_w}^{mov}$	Vetor de limites móveis inferior da variável de projeto do pseudo-resistor
$\hat{R}_{\max_w}^{mov}$	Vetor de limites móveis superior da variável de projeto do pseudo-resistor
r_{ei}	Distância entre os centróides dos elementos i -ésimo e e -ésimo.
r_{2Dmin}	Raio de abrangência do filtro na camada
r_{3Dmin}	Raio de abrangência do filtro entre camadas
S_e	Área da superfície do elemento finito
S_p	Máxima ultrapassagem porcentual
$S_i, \{S\}$	Vetor tensão mecânica
S_{ij}	Tensor de tensões de Cauchy
s_2	Seno do ângulo duplo
T	Período
T_n	Período natural
T_{exc}	Período de excitação da função harmônica
$T_{\varepsilon_{ba}}$	Matriz de transformação de deformações do sistema global para o natural
$T_{\theta_{cb}}$	Matriz de rotação
$T_{\phi_{ij}}$	Matriz de transformação de coordenadas para o potencial elétrico
s	Seno do ângulo θ
T_{exe}	Tempo de execução total
T_{ini}	Tempo de inicialização de dados
T_{iter}	Tempo de execução por iteração
t	Tempo ou instante de tempo pertencente ao estado transiente
t_f	Tempo de duração do estado transiente
t_I	Vetor de condições do contorno estendido
t_r	Tempo de pico
t_r	Tempo de subida
t_s	Tempo de estabilização
$\hat{t}_i$	Vetor tangencial unitário

t_i^P	Componentes prescritas de força superficial por unidade de área
t_{rH}	Tempo de subida da rampa ou da fase de subida
$\tan \delta_0$	Fator de perdas dielétricas ou fator de perda tangente
U_{ji}	Matriz de deslocamentos nodais
u_i	Vetor de deslocamento
u_s	Deslocamento no tempo de estabilização
u_i^P	Componentes de deslocamento prescritas
u_{i0}	Vetor de deslocamento no instante inicial
$\dot{u}_i$	Vetor de velocidade
$\dot{u}_{i0}$	Vetor de velocidade inicial
u_{ab}	Amplitude do pico ressonante correspondente à banda de potência média
u_{out}	Deslocamento de saída
u_{out}^P	Deslocamento de saída no tempo de pico
u_{out}^R	Deslocamento de saída no tempo de subida
u_{out}^S	Deslocamento de saída no tempo de estabilização
u_{out}^τ	Deslocamento de saída transiente
u_{out}^ω	Deslocamento de saída harmônico
u_i	Componentes nodais de deslocamento na direção x no elemento finito
V_{spie}, V_{pie}	Volume das camadas piezelétricas
V_{snp}	Volume das camadas não piezelétricas
Vn_i^k	Vetor normal ao plano da casca na direção no nó k
$V1_i^k$	Vetor tangencial ao plano casca na direção 1 no nó k
$V2_i^k$	Vetor tangencial ao plano da casca na direção 2 no nó k
V_τ	Amplitude da tensão elétrica no regime transiente
V_ω	Amplitude da tensão elétrica no regime harmônico
V_e	Volume do elemento finito
V_n	Vetor de volume dos elementos não piezelétricos
V_p	Vetor de volume dos elementos piezelétricos
V_{alu}, V_{fib}	Volume do substrato
V_{tot}	Volume total
$\mathcal{V}$	Densidade volumétrica de energia potencial
$\mathcal{V}_{cond}$	Densidade volumétrica de condução de energia elétrica

$\mathcal{V}_{\text{def}}$	Densidade volumétrica de energia potencial devida à deformação mecânica
$\mathcal{V}_{\text{ele}}$	Densidade volumétrica de energia potencial devida ao campo eletrostático
$\mathcal{V}_{\text{grav}}$	Densidade volumétrica de energia potencial devida ao campo gravitacional
$\mathcal{w}_i$	Componentes nodais de deslocamento na direção y no elemento finito
W_I	Vetor solução na notação estendida
w_C	Peso da função de flexibilidade média
w_D	Peso da função objetivo dinâmica
w_R	Peso da função objetivo no tempo de subida
$\bar{w}_i$	Peso i -ésimo normalizado da função objetivo
$\hat{w}$	Peso da porção negativa da função objetivo
w_τ	Peso da função objetivo transiente
w_ω	Peso da função objetivo harmônica
w_{CCF}	Peso da função de penalização da instabilidade de tabuleiro
w_{POF}	Peso da função de penalização de ortogonalidade da fibra
w_{VPI}	Peso da função de penalização das variáveis de projeto intermediárias
$\mathcal{w}_i$	Componentes nodais de deslocamento na direção z no elemento finito
X	Reatância elétrica
X_{ji}	Matriz de coordenadas nodais do elemento finito
x_i	Vetor de posição
$x_{,i}$	Variável x diferenciada na direção da coordenada i
$\dot{x}_i$	Variável x diferenciada em relação ao tempo
Y, Y_w	Admitância elétrica
$\mathcal{Y}_I$	Autovetor ou modo de vibração
$Y_{\sigma_{rz}}$	Matriz de admitância
Z	Impedância elétrica
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\hat{Z}, \hat{Z}_w$	Variável de projeto de pseudo-impedância
Z_S	Impedância do material piezelétrico
Z_{eq}	Impedância equivalente
Z_ϕ	Impedância distribuída
z_f	Número de iterações do problema de otimização
$\vec{1}_k$	Vetor de uns de dimensão k

Símbolos Gregos

α_f	Parâmetro de ponderação da força no método α -Generalizado
α_m	Parâmetro de ponderação da massa no método α -Generalizado
α_1	Coefficiente de amortecimento de Rayleigh proporcional à massa
α_{kj}	Matriz diagonal das rotações do k -ésimo vetor Vn_i ao redor do vetor $V2_i^0$
α_{δ_0}	Coefficiente da função de perdas dielétricas
β	Parâmetro que governa a estabilidade no método α -Generalizado
β_1	Coefficiente de amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez
β_{kj}	Matriz diagonal das rotações do k -ésimo vetor Vn_i ao redor do vetor $V1_i^0$
β_{δ_0}	Coefficiente da função de perdas dielétricas
Γ	Região onde é aplicada uma condição de contorno
Γ_D	Região onde é imposto um deslocamento elétrico
Γ_i	Fator de participação modal do i -ésimo modo de vibração
Γ_q	Região onde é imposta uma corrente elétrica ou eletrodo
Γ_t	Região onde é imposta uma força superficial
Γ_u	Região onde é imposto um deslocamento
Γ_ϕ	Região onde é imposta uma tensão elétrica
Γ_{Fi}	Fração de participação modal do i -ésimo modo vibração
Γ_{Acum}	Fator de participação modal acumulada
$\Gamma_{\Omega_{kl}}$	Fronteira do domínio k que compartilha com o domínio l
γ	Variável de projeto de pseudo-polarização, parâmetro que governa a estabilidade no método α -Generalizado, ângulo de fase
γ_p	Vetor de variáveis de projeto de pseudo-polarização
γ_{ij}	Deformações de cisalhamento
Δt	Intervalo de tempo por passo de integração
$\Delta \hat{\theta}_e$	Valor do limite móvel da e -ésima variável de pseudo-orientação
$\Delta \phi$	Diferença de potencial elétrico
$\Delta \phi^P$	Diferença de potencial elétrico prescrita
$\Delta \chi_a$	Valor do limite movel
δ_{ij}	Delta de Kronecker
∂	Operador diferencial parcial
δ	Operador variacional, decremento logarítmico, delta de Dirac

δ_0	Defasagem entre o campo elétrico e o de deslocamento elétrico
δ_{p_a}	Decremento logarítmico na curva de potência elétrica
δ_ϕ	Decremento logarítmico na curva de potencial elétrico
$\tan \delta_0$	Fator de perdas dielétricas ou fator de perda tangente
$\bar{\epsilon}_a$	Vetor deformação no sistema global
$\bar{\epsilon}_b$	Vetor deformação no sistema natural
ϵ_c	Vetor deformação no sistema natural
ϵ_{ii}	Deformações normais
ϵ_{ij}	Tensor de deformação Green-Lagrange linearizado
ϵ_{imn}	Símbolo de permutação
ϵ	Permissividade elétrica relativa, número próximo de zero
ϵ_0	Permissividade elétrica no vácuo
ϵ_0^ϵ	Tensor dielétrico obtido em deformação mecânica constante
$\{\epsilon\}$	Vetor deformação
$[\epsilon_0^\epsilon]$	Matriz dielétrica obtida em deformação mecânica constante
ζ	Coefficiente de amortecimento estrutural
ζ_i	Coefficiente de amortecimento estrutural do i -ésimo modo de vibração
η	Eficiência
η_x	Vetor de multiplicadores de Lagrange da restrição do potencial elétrico
θ_a^{CR}	Solução do problema adjunto ponderado de sensibilidade em atuadores
θ_c^{CR}	Solução do problema adjunto ponderado de sensibilidade em coletores
θ	Ângulo de orientação da fibra
$\hat{\theta}$	Variável de projeto de pseudo-orientação
$\hat{\theta}_f$	Vetor de variáveis de projeto de pseudo-orientação
θ_{relmax}	Ângulo máximo entre duas fibras adjacentes
$\hat{\theta}_{min}$	Valor mínimo que podem assumir as pseudo-orientações
$\hat{\theta}_{max}$	Valor máximo que podem assumir as pseudo-orientações
ϑ	Fator multiplicativo do limite móvel
κ	Coefficiente de Acoplamento Eletromecânico (CAEM)
Λ_i	Variável adjunta
Λ_I^τ	Variável adjunta do problema adjunto integral de sensibilidades
Λ_I^R	Variável adjunta do problema adjunto ponderado de sensibilidades

$\bar{\Lambda}_I^T$	Variável adjunta do problema adjunto integral no domínio adjunto
$\bar{\Lambda}_I^R$	Variável adjunta do problema adjunto ponderado no domínio adjunto
λ	Autovalor
λ_{ai}	Autovalor de antirressonância do modo i
λ_{ri}	Autovalor de ressonância do modo i
λ_0	Densidade de carga elétrica superficial prescrita
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
μ_ν	Multiplicador de Lagrange para a ν -ésima restrição de deslocamento, vetor de multiplicadores de Lagrange da restrição de deslocamento entre camadas
ν_{1ij}	Coeficiente de Poisson para materiais ortotrópicos
ν_1	Coeficiente de Poisson para materiais isotrópicos
ξ_d	Vetor de variáveis de projeto do problema combinado de coletores de energia
ρ	Variável de projeto de pseudo-densidade
ρ_e	Vetor de variáveis de projeto de pseudo-densidade
ρ_0	Densidade cargas volumétrica
ρ_1	Densidade de massa
ρ_∞	Parâmetro de dissipação de altas frequências no método α -Generalizado
$\rho_{\min}$	Valor mínimo que podem assumir as pseudo-densidades
Σ	Símbolo de somatória
σ	Condutividade elétrica
σ_0	Densidade de carga elétrica superficial prescrita
σ_{ii}	Tensões mecânicas normais
σ_{0ij}	Tensor de condutividade elétrica
τ	Tempo adjunto
τ_{ij}	Tensões mecânicas de cisalhamento
Υ	Ponderação da porção positiva da função objetivo
ϕ	Potencial elétrico
ϕ^P	Potenciais elétricos impostos
ϕ_m	Potencial elétrico na superfície média da casca
ϕ_o	Potencial elétrico inicial
ϕ_z	Vetor de potencial elétrico
$\dot{\phi}_z$	Vetor de variação temporal do potencial elétrico

Φ_{c_q}	Vetor de tensão elétrica nos capacitores acoplados
$\dot{\Phi}_{c_q}$	Vetor de variação temporal da tensão elétrica nos capacitores acoplados
$\bar{\Phi}_{m_k}$	Vetor de potenciais elétricos nodais da superfície média do elemento finito
Φ_{out}	Potencial elétrico de saída
φ_d, φ_d^w	Ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente
$\emptyset$	Diâmetro
χ	Variável de projeto
χ_a	Vetor de variáveis de projeto do problema de atuadores
χ_e	Vetor de variáveis de projeto por elemento
χ_a^{ASI}	Vetor de variáveis de projeto antissimétricas quando imposta a simetria
χ_a^{PRI}	Vetor de variáveis de projeto primárias quando imposta a simetria
χ_a^{SIM}	Vetor de variáveis de projeto simétricas quando imposta a simetria
χ_a^{SGL}	Vetor de variáveis de projeto singulares quando imposta a simetria
Ω	Domínio ou volume da EPLA
Ω_c	Domínio do circuito elétrico
Ω_f	Domínio de projeto fixo
Ω_i	Subdomínio ou volume da camada da EPLA
Ω_{pie}	Subdomínio de material piezelétrico
Ω_{snp}	Subdomínio de material não piezelétrico
Ω_c^{opt}	Domínio dos circuitos otimizáveis
Ψ_c	Vetor de variáveis de projeto do problema de coletores de energia
Ψ_d	Vetor de variáveis de projeto do problema combinado de atuadores
ω	Frequência angular
ω_a	Frequência angular de antirressonância, frequência angular antes da ressonância correspondente à banda de potência média
ω_b	Frequência angular depois da ressonância correspondente à banda de potência média
ω_d	Frequência de oscilação amortecida
ω_n	Frequência natural
ω_r	Frequência angular de ressonância
ω_{N_v}	Frequência natural do modo com maior amortecimento
ω_1	Primeira frequência natural

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	7
LISTA DE TABELAS.....	13
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	15
LISTA DE SÍMBOLOS.....	16
1 INTRODUÇÃO	33
1.1 Piezeletricidade e Materiais Piezelétricos.....	33
1.2 Materiais Piezocompósitos Laminados.....	34
1.3 Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)	35
1.4 Método de Otimização Topológica (MOT).....	38
1.5 Aplicação da OT em Transdutores Piezelétricos.....	39
1.6 Justificativa.....	42
1.7 Objetivo.....	44
1.7.1 Geral.....	44
1.7.2 Específicos	44
1.8 Contribuição Científica	45
1.9 Organização do texto	47
2 MODELAGEM DAS EPLA.....	48
2.1 Propriedades de Material.....	48
2.2 Equações de Equilíbrio.....	51
2.2.1 Forma Fraca ou Integral	52
2.2.2 Problema de Autovalor e Autovetor	55
2.2.3 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada	56
2.2.4 Resposta em Frequência	58
2.2.5 Equilíbrio Estático.....	59
2.3 Solução Unidimensional Transiente das Equações Diferenciais para Materiais Piezelétricos.....	61
2.3.1 Atuadores	61
2.3.2 Coletores de Energia	63
2.4 Formulação em Elementos Finitos	67

2.4.1	MEF para Atuadores EPLA.....	68
2.4.2	MEF para Coletores de Energia EPLA.....	72
2.4.2.1	<i>Modelagem dos Eletrodos</i>	75
2.4.3	Acoplamento entre Camadas	76
2.4.4	Resolução do Problema de MEF Transiente por um Método de Integração no Tempo.....	78
2.4.5	Parâmetros da Resposta Transiente.....	83
2.4.6	Função de Excitação no MEF Transiente	85
2.4.7	Modelagem de Perdas	87
2.4.7.1	<i>Modelagem de Perdas Mecânicas</i>	88
2.4.7.2	<i>Modelagem das Perdas Dielétricas</i>	91
2.4.8	Impedância do Circuito Elétrico Acoplado	93
2.4.8.1	<i>Impedância Distribuída Equivalente</i>	97
2.4.9	Solução do Problema de MEF Transiente Considerando o Processo de Descarga do Capacitor do Circuito Elétrico Acoplado	98
2.4.10	Transferência de Potência e Eficiência do Sistema	100
2.4.11	MEF para a Análise Modal	103
2.4.12	MEF para Resposta em Frequência	103
2.4.13	MEF para a Análise Estática.....	105
2.4.14	Sistema de Unidades Adotado no MEF	106
3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA (OT).....	107
3.1	Estado da Arte.....	108
3.2	Modelo de Material PEMP-P.....	111
3.2.1	Fatores de Penalização	112
3.3	Modelo de Interpolação Autopenalizável da Orientação da Fibra (MIAFIB)	113
3.4	Modelo de Interpolação Linear das Impedâncias Elétricas Acopladas em Coletores de Energia (MILZEL).....	119
3.5	Técnicas de Solução Para as Instabilidades Numéricas.....	120
3.6	Formulação do Problema de OT para Atuadores EPLA	121
3.6.1	Formulação do Problema para Atuadores no Domínio da Frequência	122
3.6.2	Formulação do Problema para Atuadores no Domínio do Tempo	123
3.6.3	Formulação Combinada do Problema Dinâmico para Atuadores	126

3.7	Formulação do Problema de OT para Coletores de Energia EPLA	130
3.7.1	Formulação do Problema para Coletores de Energia no Domínio da Frequência ..	131
3.7.2	Formulação do Problema para Coletores de Energia no Domínio do Tempo ...	133
3.7.3	Formulação Combinada do Problema Dinâmico para Coletores.....	136
3.8	Flexibilidade Média no Problema de OT para EPLA.....	141
4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	143
4.1	Método dos Elementos Finitos Piezelétrico para o MOT	143
4.2	Formulação do Problema de OT para EPLA na Forma Discreta	146
4.2.1	Comentários sobre a Notação dos Problemas de Otimização na Forma Discreta ...	147
4.2.2	Formulação Discreta do Problema Harmônico para Atuadores	150
4.2.3	Formulação Discreta do Problema Transiente para Atuadores.....	150
4.2.4	Formulação Discreta do Problema Combinado para Atuadores	151
4.2.5	Formulação Discreta do Problema Harmônico para Coletores de Energia	153
4.2.6	Formulação Discreta do Problema Transiente para Coletores de Energia.....	153
4.2.7	Formulação Discreta do Problema Combinado para Coletores de Energia	154
4.3	Flexibilidade Média no Problema de OT para EPLA na Forma Discreta..	156
4.4	Imposição de Simetria	159
4.4.1	Simetria para atuação no plano	160
4.4.2	Simetria para atuação fora do plano	161
4.5	Filtro de Sensibilidades	163
4.6	Penalização de Instabilidades Numéricas.....	167
4.7	Função de Penalização de Ortogonalidade da Fibra.....	168
4.8	Cálculo dos Pesos w de Ponderação da Função Objetivo.	174
4.9	Algoritmo de Otimização e Limites Móveis	177
4.10	Implementação Computacional do MOT para o Projeto de EPLA	180
5	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	182
5.1	Sensibilidade das Matrizes Constitutivas dos Problemas de MEF	182
5.1.1	Sensibilidade da Matriz de Condutância Elétrica para o Problema de OT em Coletores de Energia	186
5.2	Sensibilidade da Flexibilidade Média para o Problema Estático de OT	187

5.3	Sensibilidade do Problema Harmônico de OT para Atuadores.....	188
5.4	Sensibilidade do Problema Transiente de OT para Atuadores.....	191
5.5	Sensibilidade do Problema Combinado de OT para Atuadores	201
5.6	Sensibilidade do Problema Harmônico de OT para Coletores de Energia..	204
5.7	Sensibilidade do Problema Transiente de OT para Coletores de Energia..	206
5.8	Sensibilidade do Problema Combinado de OT para Coletores de Energia	216
5.9	Verificação das Sensibilidades Transientes Utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF).....	219
6	RESULTADOS.....	221
6.1	Parâmetros Considerados	223
6.1.1	Número de Camadas	223
6.1.2	Propriedades de Material	223
6.1.3	Coefficientes de Perdas	225
6.1.4	Fatores de Penalização.....	226
6.1.5	Valor Inicial e Limite das Variáveis de Projeto	229
6.1.6	Critério de Convergência.....	230
6.1.7	Capacidade computacional.....	230
6.1.8	Pós-processamento	230
6.2	Atuador EPLA-ATA.....	231
6.3	Atuador EPLA-AFF	235
6.4	Coletor de Energia EPLA-CFA.....	241
6.5	Custo Computacional	246
7	CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL	258
7.1	Propriedades de Material.....	258
7.1.1	Caracterização do Alumínio.....	258
7.1.2	Caracterização do Material Piezelétrico	263
7.2	Fabricação de EPLA.....	269
7.3	Caracterização de EPLA.....	275
7.3.1	Descrição do Protocolo de Medição.....	279
7.3.2	Análise Harmônica	282
7.3.3	Análise Transiente.....	288
7.3.4	Caracterização das Perdas	291

8 CONCLUSÕES	293
8.1 Trabalhos Futuros	295
8.1.1 EPLA em Geral	296
8.1.2 Atuadores EPLA	297
8.1.3 Coletores de Energia EPLA	298
8.1.4 Caracterização de Cerâmicas Piezelétricas	299
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	300
APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PIEZELETRICAS UTILIZANDO PRINCÍPIOS VARIACIONAIS	320
A.1 O Problema de Autovalor e Autovetor	327
A.2 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada.....	331
A.3 Resposta em Frequência.....	335
A.3.1 Caso Geral.....	336
A.3.2 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada	337
A.4 Equilíbrio Estático	338
APÊNDICE B – ELEMENTO DE CASCA ISOPARAMÉTRICO DE OITO NÓS	340
B.1 Interpolação do Campo de Deslocamentos.....	347
B.2 Interpolação do Campo de Deformações.....	349
B.3 Interpolação do Campo de Potencial Elétrico.....	352
B.4 Interpolação do Campo Elétrico	353
B.5 Cálculo das Tensões Mecânicas para EPLA	354
APÊNDICE C – FUNÇÕES DE PENALIZAÇÃO DE INSTABILIDADES NUMÉRICAS	356
C.1 Função de Penalização Para Eliminar as Variáveis de Projeto Intermediárias.....	356
C.2 Função de Penalização Para Evitar a Formação da Instabilidade de Tabuleiro.....	358
APÊNDICE D – PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL (PLS)	363

1 INTRODUÇÃO

1.1 Piezeletricidade e Materiais Piezelétricos

Certos materiais são denominados piezelétricos devido ao fato de possuir a propriedade de converter energia elétrica (potência e cargas elétricas) em energia mecânica (tensão e deformação mecânicas) e vice-versa. Ou seja, quando um material piezelétrico é submetido a um campo elétrico sofre alteração das suas dimensões e, no efeito inverso, quando o material piezelétrico experimenta uma deformação gera-se um campo elétrico. Exemplos desses materiais piezelétricos incluem o quartzo, o titanato de bário (BaTiO_3), o niobato de lítio (LiNbO_3), o titanato zirconato de chumbo (cerâmicas PZT) e o fluoreto de polivinilideno (PVDF).

Materiais piezelétricos têm sido utilizados amplamente no projeto de sensores e atuadores eletromecânicos, tais como ressonadores para equipamentos eletrônicos, transdutores de ultrassom, hidrofones e sonares e atualmente nas áreas de posicionamento e coleta de energia. Entre as potenciais aplicações, podem ser encontradas: sistemas ópticos de leitura de dispositivos de armazenagem de dados (CD, DVD ou HD), microscopia de varredura ou eletrônica, mecanismos de impressoras “*desk-jet*”; equipamentos para micro e nanomanipulação e nanometrologia (SARDAN *et al.*, 2008; SUN *et al.*, 2009), dispositivos acústicos (HASHIMOTO, 2011), coletores de energia de baixa potência (MAKKI; POPILIEV, 2011; NIMO *et al.*, 2011) e micromotores utilizados em mecânica de precisão ou aplicações médicas (SUN *et al.*, 2010).

Motores piezelétricos são atuadores acionados por uma ou mais entradas de tensão AC senoidal ajustadas nas suas frequências naturais. O movimento é gerado pela defasagem ou ortogonalidade nos modos de vibrar da estrutura (FRIEND; NAKAMURA; UEHA, 2005; KOC; CAGATAY; UCHINO, 2002), que são excitados pelas fontes de tensão com uma diferença de fase especificada, geralmente $\frac{\pi}{2}$. Além disso, possuem propriedades características, tais como: tempos de resposta reduzidos, alto torque, controle de deslocamento de alta resolução, alta relação potência/peso, construção simples e ausência de radiação eletromagnética, fazendo-os úteis em aplicações médicas (KOC; CAGATAY;

UCHINO, 2002; UCHINO; GINIEWICZ, 2003; WATSON; FRIEND; YEO, 2009). Uma revisão detalhada de motores piezelétricos pode ser encontrada em Spanner e Koc (2016).

Os denominados coletores de energia (“*Energy Harvesting Devices*” no inglês) são dispositivos capazes de coletar energia das vibrações do meio ambiente com a finalidade de convertê-la em energia elétrica útil para a alimentação de dispositivos portáteis de baixa potência. Assim, é possível aumentar a autonomia desses dispositivos, limitada pelo emprego de baterias com operação baseada em processos eletroquímicos (ANTON; SODANO, 2007; SODANO; INMAN; PARK, 2005). No projeto e fabricação de coletores de energia, têm sido considerados materiais compósitos com fibras piezelétricas (CHURCHILL *et al.*, 2003), sendo esses materiais concebidos inicialmente para aplicações de controle e supressão de vibrações aproveitando a sua vantagem de alta flexibilidade (SODANO; LLOYD; INMAN, 2006). Igualmente, a coleção de energia tem sido explorada utilizando nanofibras (CHEN *et al.*, 2010b; QIN; WANG; WANG, 2008), nanofilmes (PARK *et al.*, 2010) de natureza piezelétrica, micro-arranjos de material piezelétrico em dispositivos implantados em pessoas com deficiência auditiva (WANG *et al.*, 2011) ou materiais altamente flexíveis (CHANG, 2011). Além disso, tem sido considerado o acoplamento de coletores de energia com circuitos elétricos com o intuito de aprimorar a conversão de energia (CHAO, 2011; ROCHA *et al.*, 2010), aumentar a banda de frequência de operação e incrementar a potência gerada (HAGEDORN *et al.*, 2013) ou possibilitar que a coleção possa ser efetuada em voltagens maiores do que 100 V utilizando tecnologia CMOS (GASNIER *et al.*, 2014). Uma revisão sobre materiais piezelétricos e métodos de projeto para coletores de energia pode ser vista em Bowen *et al.* (2014) enquanto que uma discussão sobre circuitos acoplados a coletores de energia pode ser encontrada em Hehn e Manoli (2015).

1.2 Materiais Piezocompósitos Laminados

Materiais compósitos são fabricados artificialmente e constituídos por dois ou mais materiais física e/ou quimicamente diferentes, dispostos de uma forma adequada e com interfaces definidas. Além disso, as suas propriedades não podem ser obtidas por nenhum dos seus componentes de forma isolada (CHAWLA, 2001). Assim, o termo de materiais piezocompósitos é empregado para o resultado da combinação de um material piezelétrico (cerâmico ou polímero) e outro material não piezelétrico. Esses materiais possuem vantagens

de alto coeficiente de acoplamento eletromecânico (CAEM, ver APÊNDICE A) e baixa impedância acústica (SMITH, 1989). Além disso, mudando as frações de volume dos seus componentes, a forma das inclusões de material piezelétrico ou a topologia da célula unitária podem ser obtidas propriedades especiais. Aplicações comuns dos materiais piezocompósitos são os sonares e transdutores de ultrassom (ANANTHASURESH, 2003).

1.3 Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)

As estruturas piezocompósitas podem ser fabricadas na configuração de placas e cascas, sendo esses dispositivos conhecidos como transdutores piezelétricos laminados (REDDY, 2004a). Entre os dispositivos que utilizam esse tipo de estruturas podem ser citados os bilaminares constituídos tipicamente de uma base metálica coberta com camadas de material piezelétrico (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2009; TRAJKOV; KOPPE; GABBERT, 2006) e os piezocompósitos laminados de multicamadas formados por camadas alternadas de material piezelétrico, metálico e compósito (matriz epóxi com fibras de carbono ou de vidro, ver Figura 1), (REDDY, 2004a). De agora em diante no texto, os transdutores piezelétricos laminados serão denominados como Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA).

Figura 1 – Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA)

No projeto estático de EPLA têm sido utilizados enfoques analíticos e numéricos (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2009; TRAJKOV; KOPPE; GABBERT, 2006), chegando-se à conclusão que o desempenho do sistema é influenciado pela distribuição de material nas camadas piezelétricas, tendo que ser considerado num problema de otimização

desse tipo de estruturas, a quantidade, formato, tamanho, alocação do material, ângulo de fibra e localização ótima das piezocerâmicas de forma simultânea. As EPLAs têm sido utilizadas em aplicações de controle de vibração como nos trabalhos de Ray e Reddy (2004a, 2004b, 2005, 2013), onde não é considerada a distribuição de material piezelétrico ou a otimização das orientações das fibras nas camadas ortotrópicas. De outro lado, Fabien (2007) otimizou de forma paramétrica as orientações de fibra em volantes de inércia compósitos, levando em conta critérios de falha. No entanto, a orientação ótima das fibras em materiais compósitos tem sido tratada utilizando o critério de optimalidade (KHOSRAVI; SEDAGHATI, 2008; PEDERSEN, 2006; PIAT et al., 2011). Outras abordagens têm considerado a parametrização das variáveis de projeto utilizando as funções de forma do elemento finito (BRUYNEEL, 2011; GAO; ZHANG; DUYSINX, 2012), sendo que no trabalho de Gao, Zhang e Duysinx (2012) a parametrização faz com que o número de variáveis de projeto seja reduzido logaritmicamente.

Do mesmo modo, múltiplos trabalhos focaram na análise de EPLA com controle de malha fechada para supressão de vibrações (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2001; EDERY-AZULAY; ABRAMOVICH, 2006a, 2006b; KAPURIA; YASIN, 2010; PINTO CORREIA et al., 2002) e fazendo a validação experimental da modelagem (ZHANG; ZHANG; XIE, 2010). Além disso, as EPLA têm sido combinadas com técnicas de controle em aplicações particulares como redução de vibrações perante cargas de impacto de baixa energia (SARAVANOS; CHRISTOFOROU, 2002), cargas de natureza aleatória (TO; CHEN, 2007) e cargas explosivas (UYANIK; MECITOĞLU, 2009). Outros enfoques para a minimização de vibrações utilizaram algoritmos evolutivos para localizar piezocerâmicas em ailerons de veículos de corrida (BELLOLI; ERMANNI, 2007) e otimização paramétrica combinada com circuitos eletrônicos no mecanismo de leitura de um HD (SUN et al., 2009). Por outro lado, Wang, Quek e Ang (2004) estudaram a estabilidade dinâmica de EPLA em modelos de MEF considerando um sistema de controle de realimentação em velocidade e camadas de material ortotrópico, enquanto Varelis e Saravanos (2004, 2006) analisaram a flambagem de EPLA incluindo efeitos não lineares e o fenômeno de flambagem piezelétrico em placas e cascas.

Na literatura são encontrados diversos trabalhos com abordagens analíticas e experimentais visando aplicações de coleta de energia. Em Sodano, Park e Inman (2004) e Ng e Liao (2005) foram estudadas configurações ótimas de EPLA bilaminares e multi-camadas

para a maximização da potência gerada. Em Bayrashev, Robbins e Ziaie (2004) foram combinados materiais piezelétricos e magnetostritivos em EPLA. Outros trabalhos têm avaliado o desempenho de coletores acoplados com circuitos resistivos na análise harmônica e transiente (WANG; WU, 2012), considerado efeitos não lineares (STANTON et al., 2010; VON WAGNER, 2004), aplicado otimização de forma em coletores unilaminares (MUTHALIF; NORDIN, 2015) ou realizado otimização paramétrica para localização ótima dos eletrodos (PIÑEIRUA; DOARÉ; MICHELIN, 2015). Além disso, a modelagem com parâmetros concentrados tem sido considerada em aplicações biomédicas de baixa frequência como próteses de joelho (PLATT; FARRITOR; HAIDER, 2005).

De igual forma, enfoques analíticos e numéricos têm tratado com a otimização da eficiência da conversão de energia para EPLA desenvolvendo relações analíticas dependentes do fator de qualidade¹ e do CAEM (CHO et al., 2005a, 2005b; RICHARDS et al., 2004; ROUNDY et al., 2005). Em Mossi *et al.* (2005) e Yoon, Washington e Danak (2005) foram propostas EPLA pré-curvadas aprimorando o seu desempenho mediante otimização paramétrica, Benasciutti *et al.* (2010) propuseram formas trapezoidais em coletores de energia bilaminares com a finalidade de maximizar a potência elétrica gerada por unidade de volume. Posteriormente, El-Sabbagh e Baz (2011) otimizaram espessuras de múltiplos eletrodos em coletores bilaminares com formatos de viga em balanço e em discos com excitação nos apoios enquanto Wang e Lin (2013) trabalharam com formulações adimensionais e diferentes circuitos para determinar a configuração ótima para a extração e armazenagem de energia.

Seguidamente, Schoeftner e Buchberger (2013) combinaram otimização paramétrica e de forma em coletores unilaminares e compararam os resultados obtidos acoplando três tipos circuitos elétricos comumente usados para a retificação do sinal, Zhang, Hu e Tzou (2014) desenvolveram formulações analíticas lineares e não lineares para cascas piezelétricas submetidas à flexão e duplamente curvadas como anéis e cones sob regime harmônico. Recentemente, Zizys *et al.* (2015) aplicaram otimização de forma em coletores unilaminares operando na frequência de ressonância enquanto Huang Kim e Yoon (2015) avaliaram a influência de camadas piezelétricas parcialmente coladas em regime harmônico e transiente.

¹ O fator de qualidade é um parâmetro da EPLA que mede a relação entre a energia armazenada e a energia dissipada num ciclo.

1.4 Método de Otimização Topológica (MOT)

Uma abordagem aplicada no projeto de materiais e dispositivos piezelétricos é o Método de Otimização Topológica (MOT) sendo um método genérico e sistemático que tem recebido atenção da comunidade científica, já que esses dispositivos devem ter uma eficiência elevada na conversão de energia, tornando uma necessidade a aplicação de técnicas de otimização no seu projeto.

O MOT nasce como método sistemático com Bendsøe e Kikuchi (1988), sendo a implementação mais tradicional que combina o MEF com técnicas numéricas de otimização. O MOT é fundamentado na distribuição iterativa de material num domínio de projeto fixo com o objetivo de extremizar uma função custo sujeita às restrições inerentes do problema. O método compreende basicamente três etapas. Uma primeira etapa de análise onde é calculada a variável de estado ou resposta da estrutura, uma segunda onde são computadas as variações dessa resposta em relação às variáveis de projeto (cálculo de sensibilidades) e uma última etapa, denominada de otimização, onde são calculadas as variáveis de projeto que extremizam a função objetivo, com base nas sensibilidades (SIGMUND, 2000).

No módulo de análise são utilizadas diferentes técnicas numéricas como o MEF que permite tratar com estruturas complexas e irregulares. No módulo de otimização são empregadas técnicas de programação matemática como Programação Linear Sequencial (PLS, ou *SLP* em inglês), (DANTZIG; ORDEN; WOLFE, 1955); Programação Quadrática Sequencial (PQS), (WOLFE, 1959) ou o Método das Assíntotas Móveis (*“Method of Moving Asymptotes”* - MMA), (SVANBERG, 1987) sendo este último baseado em aproximações convexas. Entre os algoritmos mencionados anteriormente, a PLS tem sido aplicada na OT em trabalhos como Carbonari; Silva e Nishiwaki (2005); Carbonari; Silva e Paulino (2009); Iga *et al.* (2009); Rubio *et al.* (2009); Mello, Salas e Silva (2012). Entretanto, em trabalhos como Dahl, Jensen e Sigmund (2008); Paulino, Silva e Le (2009); Takezawa *et al.* (2010); Kiyono, Silva e Reddy (2012), é utilizado o MMA.

Na Figura 2 é mostrado o procedimento do MOT para o projeto de uma EPLA. Inicialmente são definidos o objetivo e as restrições do problema, logo são determinados o domínio fixo de projeto, as condições de contorno, e as regiões com material fixo ou vazio. O domínio de projeto é discretizado com elementos finitos e inicia-se o processo iterativo de

otimização, onde é adicionado e removido material de acordo com a informação das sensibilidades. Esse processo termina quando é atingido certo critério de convergência. Após a convergência, é realizada uma interpretação da topologia obtida com a finalidade de gerar uma geometria que possa ser fabricada e caracterizada posteriormente. Ao final, se o projeto é completo, são comparados os resultados obtidos numericamente e experimentalmente com o intuito de verificar tanto as especificações e restrições de projeto quanto avaliar o desempenho da EPLA.

Figura 2 – Procedimento típico do MOT no projeto de EPLA

1.5 Aplicação da OT em Transdutores Piezelétricos

A OT tem sido aplicada previamente em transdutores piezelétricos, sendo inicialmente aplicada no aumento do desempenho de materiais piezelétricos a nível microestrutural (SILVA; FONSECA; KIKUCHI, 1997, 1998), no projeto de atuadores flexensionais (SILVA

et al., 1999; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000), na maximização do CAEM com restrições na frequência de ressonância (SILVA; KIKUCHI, 1999). Kögl e Silva (2005) formularam o modelo de material PEMAP-P (*“PiezoElectric MAterial with Penalization and Polarization”*) para o material piezelétrico que introduz uma variável de projeto adicional para descrever a polarização de cada elemento em camadas piezelétricas. Posteriormente a OT foi estendida para a maximização de deslocamentos em pontos predeterminados da estrutura considerando simultaneamente sentido da polarização e distribuição de material piezelétrico em estruturas laminadas (KÖGL; SILVA, 2005), para o projeto de atuadores nas áreas de manipulação e posicionamento (CARBONARI; SILVA; NISHIWAKI, 2005, 2007), para o projeto de transdutores acústicos com o intuito de radiar som eficientemente (WADBRO; BERGGREN, 2006).

Além disso, a OT tem sido aplicada no projeto simultâneo de autovalores e maximização do coeficiente de acoplamento eletromecânico (HA; CHO, 2006), de transdutores considerando simultaneamente regime modal e harmônico (NAKASONE; SILVA, 2010), na localização ótima dos eletrodos em ressonadores do tipo “passa-banda” (DONOSO; BELLIDO, 2009), na maximização das amplitudes de vibração de modos específicos (SANCHEZ-ROJAS *et al.*, 2010) e no projeto de filtros modais (RUIZ; BELLIDO; DONOSO, 2016). Wang Tai e Quek (2006) focaram no aproveitamento do comportamento anisotrópico das EPLA com o objetivo de conseguir uma topologia ótima em estruturas compósitas com camadas de material piezelétrico e material fibroso de forma a controlar os modos de vibrar torcionais, porém estabelecendo um ângulo único das fibras para toda a camada piezelétrica.

Gibert e Austin (2004, 2007) introduziram a orientação do vetor de polarização do material piezelétrico como variável de projeto para aprimorar o desempenho em mecanismos flexíveis. Já Kang e Tong (2008a, 2008b) trabalharam no projeto sob regime estático considerando a otimização do valor da tensão elétrica de excitação com a distribuição de material piezelétrico em atuadores EPLA enquanto Kang e Wang (2010) aplicam a OT nos mesmos atuadores multi-camada com similar enfoque, incorporando restrições na energia consumida pelo transdutor e no volume de material. Kiyono, Silva e Reddy (2012) aplicaram OT utilizando um enfoque estático em transdutores, considerando a distribuição e polarização de material piezelétrico e a orientação das fibras de material compósito visando aplicações tanto em atuadores quanto em coletores de energia. Mello *et al.* (2014) projetaram atuadores e

sensores com OT combinando respostas da análise estática e modal numa função multiobjetivo com a finalidade de otimizar deslocamentos (no caso de atuadores) e diferenças de potencial elétrico (no caso de sensores) junto com a maximização da primeira frequência de ressonância para incrementar o intervalo de operação quase-estática da estrutura. Além disso, a OT tem sido aplicada no projeto de leitores de discos rígidos maximizando os deslocamentos, a rigidez e o valor da primeira frequência de ressonância (KIYONO *et al.*, 2014). Nos últimos anos, tem crescido o interesse no desenvolvimento de transdutores piezelétricos combinando o MOT com técnicas do controle aplicadas à minimização da radiação acústica em regime harmônico (ZHANG; KANG; LI, 2014), à supressão de vibrações em estruturas submetidas a cargas harmônicas (JOG, 2002), em regime transiente (ZHANG; KANG, 2014a), ou no espaço modal (ZHANG; KANG, 2014b), porém avaliando a resposta impulsiva do sistema (DA SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2015).

Na área de coleta de energia, os transdutores piezelétricos têm sido projetados com OT em regime estático considerando a maximização da conversão de energia (ZHENG; CHANG; GEA, 2009a) e no regime harmônico levando em conta o circuito elétrico acoplado ao dispositivo (RUPP, 2009; RUPP *et al.*, 2009), maximizando a eficiência utilizando a abordagem de OT baseado no método de “*level-set*” (CHEN *et al.*, 2010a), maximizando a potência elétrica num intervalo de frequência perante excitações randômicas (LIN; GEA; LIU, 2011) ou combinando OT e otimização de forma num segundo estágio do processo com validação experimental (LEE; YOUN, 2011a, 2011b). Vatanabe, Paulino e Silva (2012) maximizaram a potência elétrica utilizando o conceito de padrão de gradação no domínio de projeto e resolvendo o problema sob um enfoque harmônico enquanto Noh e Yoon (2012) consideraram cargas estáticas e harmônicas na maximização do CAEM, ambos os trabalhos acoplando um resistor à estrutura. Kim e Shin (2013) otimizaram coletores unilaminares em balanço, maximizando a voltagem de saída no único eletrodo e comparando os resultados obtidos quando utilizados diferentes materiais piezelétricos (PVDF, PZT-5H, PMN-PT e MFC) e Takezawa *et al.* (2014) projetam coletores de energia cuja resposta obedece a complexos modos de vibração. Recentemente, Kiyono, Silva e Reddy (2016) projetaram coletores de energia no domínio da frequência maximizando a potência num circuito resistivo e considerando restrições de tensão mecânica para os diferentes materiais das camadas.

1.6 Justificativa

Na atualidade, as EPLA têm experimentado um crescimento em aplicações de Engenharia, tanto no campo da atuação quanto nas áreas de sensores e coletores de energia. Assim, os métodos de projeto sistemáticos como Otimização Topológica (OT) contribuem para melhora dos projetos existentes e também para obter novos e mais eficientes dispositivos para diferentes aplicações. Consequentemente, o MOT pode ser aplicado para o projeto dinâmico de EPLA visando aplicações como: motores piezelétricos, sonares ou dispositivos de coleta de energia.

Transdutores piezelétricos são projetados usando enfoques harmônicos (KIYONO; SILVA; REDDY, 2016; RUPP et al., 2009; VATANABE; PAULINO; SILVA, 2012), estáticos (KANG; TONG, 2008a, 2008b; KANG; WANG, 2010), modais (DONOSO; BELLIDO, 2009; HA; CHO, 2006; RUIZ; BELLIDO; DONOSO, 2016; SANCHEZ-ROJAS et al., 2010) ou fazendo uma combinação deles (MELLO et al., 2014; NAKASONE; SILVA, 2010; NOH; YOON, 2012; ZHANG; KANG, 2014b). Contudo, excitações harmônicas são consideradas geralmente, sendo que na prática outros tipos de onda como quadradas ou triangulares são utilizadas.

Assim, o enfoque transiente mostra-se apropriado para modelar o comportamento das EPLA e, por sua vez, é encontrado que tal enfoque não tem sido amplamente utilizado no projeto de transdutores piezelétricos, sendo o trabalho de Zhang e Kang (2014a) o único trabalho encontrado até agora com uma formulação de otimização propriamente transiente. Com a análise transiente é possível fazer a modelagem com qualquer tipo de excitação periódica ou aperiódica, conhecer o tempo de resposta e de estabilização e quantificar os picos máximos de resposta.

Em contrapartida, o custo computacional pode ser elevado pela dependência da resposta com o tamanho da discretização do domínio e da dimensão tempo. Além disso, o tamanho do intervalo de tempo por passo e a metodologia de aplicação de métodos adjuntos afetam a precisão das sensibilidades na otimização como relatado por Jensen; Nakshatralla e Tortorelli (2014). No entanto, os poucos trabalhos de otimização realizados na análise transiente em geral (DAHL; JENSEN; SIGMUND, 2008; MELLO; SALAS; SILVA, 2012; ZHANG; KANG, 2014a) alentam para seguir trabalhando nesse tópico pouco explorado

criando metodologias de projeto novas (análise transiente propriamente dita) ou complementares (em combinação com outros tipos de enfoque como, por exemplo, o regime harmônico) às existentes em OT para customização da resposta segundo os requisitos de projeto.

Dado que, a distribuição de material de cada camada afeta o desempenho do transdutor, devem ser considerados simultaneamente a quantidade e alocação do material, ângulo de fibra das camadas compósitas e polarização ótima das piezocerâmicas no problema de otimização. Metodologias de OT aplicando esse tipo de considerações simultâneas foram desenvolvidas por Kiyono, Silva e Reddy (2012, 2016a) em regime estático e harmônico, porém não sob um enfoque transiente.

Apesar de que Zhang e Kang (2014a) trabalham com EPLAs em regime transiente, o seu trabalho combina técnicas de controle (que não foram abordadas neste trabalho) e OT utilizando somente como modelo de material o SIMP, predefinindo a polarização do material piezelétrico. Em relação aos circuitos acoplados, até agora não foram encontrados trabalhos de OT com circuitos RLC, ainda menos com formulações transientes, limitando as abordagens a regimes estáticos e harmônicos com EPLAs acopladas a circuitos puramente resistivos com parâmetros concentrados (KIYONO; SILVA; REDDY, 2016; RUPP, 2009; RUPP et al., 2009).

Para materiais compósitos existe a carência de formulações de OT com ângulos de fibra como variável contínua, pois as recentes abordagens têm focalizado em utilizar parametrizações que permitam contornar mínimos locais derivados de considerar o espaço de ângulos candidatos como um contínuo e, além disso, em estabelecer uma quantidade fixa ângulos candidatos por restrições nos processos de manufatura (BRUYNEEL, 2011; GAO; ZHANG; DUYSINX, 2012; KIYONO; SILVA; REDDY, 2017; LUND, 2009; STEGMANN; LUND, 2005). Esses trabalhos têm tratado problemas estáticos, harmônicos e de flambagem, não tendo conhecimento até a data de trabalhos de OT envolvendo otimização de orientações de fibra na análise transiente.

Desse modo, utilizando o MOT no projeto dinâmico de atuadores EPLA podem ser explorados diferentes tipos de função objetivo para obter movimentos com alta amplificação do deslocamento gerados a partir de modos de vibração complexos em frequências

especificadas e com maiores velocidades de resposta. De igual forma, em coletores EPLA podem ser obtidos maiores níveis de potência elétrica gerada pela eficiente conversão de energia mecânica para elétrica do material piezelétrico e o casamento da impedância acoplada à EPLA e, além disso, menores tempos de resposta. Sob esse enfoque tem-se a possibilidade de aproveitar as vantagens do comportamento anisotrópico dos materiais compostos fibrosos com relação tensão e deformação pouco intuitiva, modificando a orientação das fibras na matriz do material compósito com a finalidade de desenvolver EPLAs com melhores índices de desempenho que não seriam possíveis de conseguir com transdutores laminados comuns. Uma aplicação potencial para modos de vibrar complexos especificados é o projeto de motores piezelétricos enquanto que a maximização da conversão de energia é útil nos dispositivos de coleta de energia.

1.7 Objetivo

Os objetivos do trabalho de doutorado são mostrados a seguir.

1.7.1 Geral

- Desenvolver uma metodologia do projeto dinâmico (harmônico e transiente) de Estruturas Piezocompósitas Laminadas (EPLA) utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT) com a finalidade de projetar transdutores para aplicações potenciais orientadas às áreas de atuação ou coleta de energia.

1.7.2 Específicos

- Desenvolver um algoritmo baseado no MOT para projetar EPLAs, cujo alvo seja determinar simultaneamente nas diversas camadas, tanto a topologia ótima quanto o sinal de polarização do material piezelétrico e o ângulo da fibra na camada compósita, de maneira a aprimorar as características dinâmicas (por exemplo, a velocidade de resposta) de tais estruturas e considerando diferentes requisitos de projeto, domínios e condições de contorno sob regime

transiente como foco do trabalho e no regime harmônico com fins complementários e comparativos.

- Projetar atuadores EPLA em regime transiente visando à maximização das amplitudes de vibração em pontos específicos da estrutura e minimizando o seu tempo de resposta.
- Projetar coletores de energia EPLA em regime transiente apontando à maximização da sua potência ativa gerada quando acoplados a circuitos RLC em série, minimização do seu tempo de resposta e, de igual forma, otimizar a impedância elétrica acoplada como sendo representada pelo circuito RLC.
- Combinar os enfoques de projeto transiente e harmônico, para projetar atuadores e coletores EPLA que possam ser excitados com diferentes formas de onda com a finalidade de obter a mesma magnitude da resposta independente da forma da onda de entrada. Este objetivo é formulado com o intuito de mostrar a potencialidade de customização da resposta conforme o domínio de operação da EPLA
- Fabricar protótipos projetados pelo MOT e caracterizá-los experimentalmente de forma a validar o método e realimentar o processo de projeto.

1.8 Contribuição Científica

A proposta do trabalho consiste na aplicação sistemática do MOT para o projeto dinâmico genérico de EPLA envolvendo formulações puramente transientes e combinadas com enfoques harmônicos tradicionais, considerando simultaneamente na otimização a quantidade de material de cada camada, o ângulo da fibra na camada compósita, a localização e a polarização do material piezelétrico. Como caso particular em coletores de energia, os componentes da impedância elétrica acoplada ao sistema são tratados como variáveis de projeto com a finalidade de possibilitar o incremento na transferência de potência.

O projeto dinâmico de EPLA utilizando o MOT até agora tem tratado as otimizações anteriores de forma isolada em regime transiente (ZHANG; KANG, 2014a) ou simultâneas

mas em regime estático e harmônico (KIYONO; SILVA; REDDY, 2012, 2016), portanto, a contribuição científica deste trabalho fundamenta-se na realização daquelas otimizações conjuntamente considerando a excitação em regime transiente, explorando a vantagem do comportamento anisotrópico dos materiais compósitos dado pela orientação das fibras e permitindo distribuições de diferentes ângulos na mesma camada. A utilização do MOT visa obter EPLAs com características superiores em relação à maximização da amplitude de vibração, à eficiência na conversão de energia, à minimização do tempo de resposta, à magnitude da resposta independente da forma da excitação e ao ótimo casamento da impedância elétrica em coletores de energia. Particular atenção deve ser prestada na formulação inédita de customização da resposta de EPLAs sob diferentes formas de excitação não simultâneas (ver seções 3.6.3, 3.7.3, 4.2.4 e 4.2.7), proposta com a intenção de mostrar o grande potencial da OT combinando a análise transiente e harmônica, salientando que não existe um melhor enfoque e que eles podem ser complementares.

Além disso, é proposto um método original para a otimização da orientação das fibras nas camadas de material ortotrópico denominado neste trabalho MIAFIB (ver seção 3.3), baseado nas definições das funções seno e cosseno por séries de Taylor, que permitem fazer de maneira natural o método da continuação (ver seção 3.2.1) com o intuito de contornar mínimos locais. Igualmente é proposta uma função de penalização de ortogonalidade da fibra (ver seção 4.7) com a finalidade de garantir a continuidade da fibra de forma a facilitar posteriores processos de fabricação e poder ser usada em futuras formulações envolvendo restrições de tensão mecânica, as quais não foram tratadas neste trabalho.

No tópico de cálculo de sensibilidades transientes para sistemas de segunda ordem, foram aplicados conceitos de processamento de sinais discretos na solução do problema adjunto envolvendo pontos específicos de curvas de variáveis obtidas mediante métodos de integração no tempo (ver seções 5.4 e 5.7). O problema tinha sido proposto por Zhang e Kang (2014a) mostrando uma solução genérica aplicável para qualquer função objetivo. No entanto, a solução não é óbvia pelo fato de envolver operações com funções especiais como o delta de Dirac e a função Heaviside unitária, encontrando na literatura somente soluções para sistemas de primeira ordem elétricos e eletromagnéticos (BAKR; NIKOLOVA, 2004; BAKR; ZHAO; NIKOLOVA, 2009; NGUYEN; DEVGAN; NASTOV, 1998; ZHANG; BAKR, 2012).

Outras contribuições na área de modelagem de coletores de energia não menos importantes são: a utilização do conceito de impedância distribuída equivalente (ver seção 2.4.8) para contornar as instabilidades numéricas de modelos de MEF quando acoplados com circuitos elétricos e a inclusão de perdas dielétricas nas piezocerâmicas mediante o modelo de dispersão de banda larga de Debye (DJORDJEVIC et al., 2001; SVENSSON; DERMER, 2001), o qual pode ser usado em qualquer região do espectro da frequência (ver seção 2.4.7), sendo que nos trabalhos de OT é sempre considerado que o material piezelétrico possui impedância infinita.

A metodologia de projeto desenvolvida neste trabalho tem sido apresentada em vários eventos da comunidade científica (SALAS; SILVA, 2014; SALAS; SILVA; REDDY, 2014a, 2015a, 2015b, 2015c), os quais geraram dois artigos de conferência (SALAS; SILVA; REDDY, 2014b, 2015d) e foi submetido um artigo em periódico internacional (SALAS et al., [s.d.]) intitulado “*A Topology Optimization Formulation for Transient Design of Multi-entry Laminated Piezocomposite Energy Harvesting Devices Coupled With Electrical Circuit*”.

1.9 Organização do texto

Neste capítulo foi realizada uma introdução e uma revisão bibliográfica correspondente à piezeletricidade e a EPLA. Além disso, é apresentado o estado da arte sobre OT aplicado no projeto de transdutores piezelétricos e, igualmente, a sua aplicação no projeto de EPLA. No capítulo 2 é apresentada a modelagem de EPLA a partir de um enfoque contínuo e mediante o MEF. Em seguida, no capítulo 3 são mostrados aspectos teóricos do MOT e a formulação do problema de otimização considerando abordagens harmônica e transiente. No capítulo 4 e no capítulo 5 é descrita a implementação numérica do MOT e o cálculo de sensibilidades, respectivamente. Depois, no capítulo 6 são apresentados resultados obtidos com a implementação numérica descrita nos capítulos 4 e 5. O capítulo 7 contém a caracterização experimental dos materiais utilizados e dos protótipos fabricados. Finalmente, no capítulo 8 são mostradas as conclusões da tese e os trabalhos futuros. A dedução das equações de equilíbrio por métodos variacionais, os detalhes do MEF e do MOT são expostos nos apêndices do texto.

2 MODELAGEM DAS EPLA

Para a modelagem de uma EPLA deve ser considerada a interação simultânea de dois domínios físicos, um elétrico (representado por uma distribuição de potencial no volume) e um mecânico (constituído por um campo de deslocamentos na estrutura). Além disso, são levadas em conta restrições de deslocamento derivadas da utilização de múltiplas camadas na estrutura com a finalidade de garantir continuidade na resposta. Igualmente, os subíndices que acompanham as propriedades de material referem-se ao problema elétrico (0) e estrutural (1).

2.1 Propriedades de Material

Os três tipos de materiais utilizados na modelagem deste trabalho compreendem: piezelétricos de simetria hexagonal transversalmente isotrópicos no plano *1-2* e polarização na direção três (como PZT-4 ou PZT-8 na área de atuadores, e PZT-5A ou PZT-5H na área de sensoreamento), elásticos ortotrópicos (materiais compósitos, caso fibra de carbono com matriz de epóxi) e elásticos isotrópicos (caso alumínio). As propriedades de material, presentes na modelagem de EPLA são o tensor de módulo elástico (C_{ijkl}^E , obtido em campo elétrico constante), o tensor piezelétrico (e_{0ijk}) e o tensor dielétrico (ϵ_{0ij}^E , obtido em deformação mecânica constante).

Contudo, é possível escrever os tensores de ordem superior em tensores de ordem dois, aproveitando as simetrias dos tensores de tensão ($S_{ij} = S_{ji}$) e deformação ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$) e dos tensores constitutivos de módulo elástico ($C_{ijkl}^E = C_{jikl}^E = C_{klij}^E$), piezelétrico ($e_{0ijk} = e_{0ikj}$) e dielétrico ($\epsilon_{0ij}^E = \epsilon_{0ji}^E$). Para isso, são substituídos os índices *ij* ou *kl* por *p* ou *q* respectivamente, de modo que, os índices *i, j, k, l* tomam valores de 1 até 3 enquanto *p, q* variam entre 1 e 6, conforme a regra de redução de índices mostrada em IEEE (1988). Portanto, para material piezelétrico o tensor de módulo elástico e o tensor piezelétrico podem ser expressos na forma matricial como (KÖGL; BUCALEM, 2005a):

$$[C_1^E] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[e_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo que $C_{66} = \frac{C_{11}-C_{12}}{2}$. O tensor dielétrico é descrito por:

$$[\epsilon_0^\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A matriz de módulo elástico para materiais ortotrópicos pode ser calculada a partir dos módulos de Young (E_{1i}), dos módulos de cisalhamento (G_{1ij}) e dos coeficientes de Poisson (ν_{1ij}), levando em conta que as relações entre essas variáveis são:

$$G_{1ij} = \frac{E_{1i}}{2(1+\nu_{1ij})} \quad (4)$$

$$\nu_{1ij}E_{1j} = \nu_{1ji}E_{1i} \quad \forall i \neq j \quad (5)$$

Assim, a matriz de módulo elástico, considerando que a direção 1 é normal ao plano de isotropia (2-3), pode ser vista como (KAW, 2006):

$$[C_1^E] = \begin{bmatrix} \frac{1-v_{123}v_{132}}{E_{12}E_{13}\Delta} & \frac{v_{121}+v_{123}v_{131}}{E_{12}E_{13}\Delta} & \frac{v_{131}+v_{121}v_{132}}{E_{12}E_{13}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{121}+v_{123}v_{131}}{E_{12}E_{13}\Delta} & \frac{1-v_{113}v_{131}}{E_{11}E_{13}\Delta} & \frac{v_{132}+v_{112}v_{131}}{E_{11}E_{13}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{131}+v_{121}v_{132}}{E_{12}E_{13}\Delta} & \frac{v_{132}+v_{112}v_{131}}{E_{11}E_{13}\Delta} & \frac{1-v_{112}v_{121}}{E_{11}E_{12}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{113} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} E_{12} = E_{13} \\ \therefore v_{112} = v_{113} \\ G_{112} = G_{113} \end{matrix} \quad (6)$$

sendo que

$$\Delta = \frac{1-v_{112}v_{121}-v_{123}v_{132}-v_{113}v_{131}-2v_{113}v_{132}v_{121}}{E_{11}E_{12}E_{13}} \quad (7)$$

Para materiais isotrópicos, pelo fato de que o módulo de Young (E_1), o módulo de cisalhamento (G_1) e o coeficiente de Poisson (v_1) são constantes em todas as direções, tem-se (MASE; MASE, 1999):

$$[C_1^E] = \frac{E_1}{(1+v_1)(1-2v_1)} \begin{bmatrix} 1-v_1 & v_1 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1-v_1 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_1 & 1-v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v_1}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Com a redução de índices, os tensores de tensão e deformação na forma de vetor são:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \wedge \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

sendo σ_{ii} as tensões normais, τ_{ij} as tensões de cisalhamento, ε_{ii} as deformações normais e γ_{ij} as deformações de cisalhamento. Finalmente cabe lembrar que, para materiais elásticos tanto ortotrópicos quanto isotrópicos, os tensores piezelétrico e dielétrico são considerados nulos.

2.2 Equações de Equilíbrio

Na modelagem assume-se que as deformações são pequenas e que o campo elétrico e o campo estrutural podem ser modelados utilizando um enfoque linear e, além disso, que as estruturas são tridimensionais, podendo apresentar, não obstante, uma reduzida espessura. Assim, o sistema é dito acoplado, já que as equações que descrevem o problema apresentam acoplamento linear entre as suas variáveis independentes (IKEDA, 1996). Para a dedução das equações de equilíbrio, considera-se o sólido $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, contido no domínio de projeto fixo² Ω_f , mostrado na Figura 3. A estrutura analisada é um subdomínio do domínio Ω_f (logo $\Omega \subseteq \Omega_f$), que contém várias camadas de material linear que pode ser piezelétrico (Ω_1), compósito (Ω_2) ou isotrópico (Ω_3) e que pode ter ou não regiões vazias. As fronteiras do sistema analisado são compostas de dois pares de regiões não conectadas $\Gamma = \overline{\Gamma_\phi} \cup \overline{\Gamma_D} = \overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma_t}$, onde os subíndices fazem referência às condições de contorno, elétrica (ϕ e D , potencial e deslocamento elétrico) e estrutural (u e t , deslocamento e tensão mecânica).

Figura 3 – Condições de contorno e de carregamento nas EPLA

Igualmente, os subíndices ϕ e u referem-se às condições de fronteira essenciais (ou de Dirichlet) e as restantes (D e t) indicam as condições de fronteira naturais (ou de Neumann),

² Refere-se ao espaço geométrico fixo que contém a estrutura, compreendido pelos pontos de apoio e os pontos de aplicação dos carregamentos. Cabe salientar que os carregamentos podem ou não ser dependentes do projeto e não situar-se exatamente na fronteira do domínio.

(BATHE, 1996). As regiões Γ_ϕ e Γ_u podem ser sobrepostas ou completamente separadas, sendo também aplicável para as regiões Γ_D e Γ_t . A estrutura pode ser excitada por uma tensão elétrica ou diferença de potencial V (efeito piezelétrico direito) sendo distribuída em regiões consideradas como equipotenciais e que agem como eletrodos. Tais eletrodos localizam-se sobre as camadas de material piezelétrico (sendo que os efeitos elétricos são considerados desprezíveis em materiais não piezelétricos) e conformam um circuito elétrico, tendo assim potenciais elétricos impostos (ϕ^P) em lugares especificados.

Os apoios da estrutura agem como engastamentos ($u^P = 0$, em todas as direções). Além disso, existem outras condições de contorno do tipo elétrico (deslocamento elétrico imposto, D_i^P) e mecânico (forças superficiais por unidade de área, t_i^P , e deslocamentos impostos, u_i^P , sendo ambas as que podem originar o efeito piezelétrico reverso). O sobrescrito P faz referência às grandezas prescritas na modelagem. As equações de equilíbrio de cada um dos domínios são apresentadas a seguir, sendo que a sua dedução pode ser vista no APÊNDICE A. Cabe esclarecer, que as notações $x_{,i}$ e $\dot{x}_i$ apresentadas abaixo significam diferenciação na direção da coordenada i e diferenciação em relação ao tempo da variável x , respectivamente. Além disso, $\hat{n}_i$ representa um vetor unitário normal a uma superfície Γ .

2.2.1 Forma Fraca ou Integral

Para materiais piezelétricos, as equações constitutivas são (IEEE, 1988; IKEDA, 1996):

$$S_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \quad (10)$$

$$D_i = e_{0ijk} \varepsilon_{jk} + \epsilon_{0ij}^E E_j \quad (11)$$

em que S_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy, ε_{ij} é o tensor de deformação Green-Lagrange linearizado, D_i é o vetor de deslocamento elétrico e E_i é o campo elétrico. Do mesmo modo, as equações de equilíbrio na forma integral são (ver APÊNDICE A):

- Para o domínio elétrico: Lei de Gauss.

$$\int_0^t \int_{\Omega} [D_{i,i} - \rho_0] \delta \phi \, d\Omega \, dt = 0, \forall \delta \phi \in \overline{\delta \Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \phi \Big|_{(\Gamma_{\phi}, t)} = 0 \right\} \quad (12)$$

sendo que para materiais piezelétricos a densidade de cargas volumétrica é nula ($\rho_0 = 0$), pelo fato de que tais materiais são dielétricos e não possuem cargas elétricas livres.

- Para o domínio estrutural: Equação de Euler-Lagrange incluindo efeitos dissipativos e restrições de deslocamento entre camadas.

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{u}_i + c_{1ij} \dot{u}_j - S_{ij,j} - f_{bi}] \delta u_i \, d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = 0 \right\} \wedge \delta \mu_m \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{R} : \int_0^t \left(\sum_{m=1}^n G_m (\delta u_i) \delta \mu_m \right) dt = 0 \right\} \quad (13)$$

em que ρ_1 é a densidade de massa, f_{bi} são as forças de corpo, c_{1ij} é a matriz de coeficientes de amortecimento estrutural proporcional, G_m é a m -ésima restrição de deslocamento entre camadas definida pela eq.(520) e μ_m é o multiplicador de Lagrange para a m -ésima restrição

sendo $\mu_i = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_i$. Agora, tendo que:

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \quad (14)$$

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \quad (15)$$

as condições de contorno para o domínio elétrico são:

- Condição de contorno essencial: Voltagem imposta.

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_{\phi}, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \phi \Big|_{(\Gamma_{\phi}, t)} = \phi^p = V \right\} \quad (16)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 4): Deslocamento elétrico imposto.

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \text{ sobre } \Gamma_D \quad (17)$$

enquanto para o domínio estrutural, as condições de contorno são:

- Condição de contorno essencial: Deslocamento imposto.

$$u_i = u_i^p \text{ sobre } \Gamma_u, \quad \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = u_i^p \right\} \quad (18)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 4): Componentes de força superficial prescritas.

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \text{ sobre } \Gamma_t \quad (19)$$

Figura 4 – Condições de contorno natural: (a) Problema elétrico; (b) Problema estrutural

As condições iniciais são dadas por:

- Deslocamento inicial:

$$u_i = u_{i_0} \text{ em } \Omega, \quad \forall u_i \in U = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) : u_i \Big|_{(\Omega, 0)} = u_{i_0} \right\} \quad (20)$$

- Velocidade inicial:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i_0} \text{ em } \Omega, \quad \forall \dot{u}_i \in \dot{U} = \left\{ \dot{u}_i \in H^1(\Omega) : \dot{u}_i \Big|_{(\Omega, 0)} = \dot{u}_{i_0} \right\} \quad (21)$$

e como consequência do acoplamento entre os domínios elétrico e estrutural, a condição inicial adicional no domínio elétrico é (ver APÊNDICE A):

- Voltagem inicial:

$$\phi = \phi_o \text{ em } \Omega, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \phi \in H^1(\Omega): \phi \Big|_{(\Omega, 0)} = \phi_o \right\} \quad (22)$$

2.2.2 Problema de Autovalor e Autovetor

Considerando o problema de autovalor e autovetor (ver APÊNDICE A.1), as equações que regem o problema na notação estendida (BARNETT; LOTHE, 1975) para sistemas piezelétricos são:

$$- \int_0^t \left[\int_{\Omega} [K_{ijMn} y_{M,n}(x_i)]_{,i} d\Omega + + \mu_j \right] dt = \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \rho_1 y_j(x_i) d\Omega dt \forall x_i \in \Omega \quad (23)$$

$$- \left[\int_0^t t_j \delta W_j dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (24)$$

$$- \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0 \quad (25)$$

consistindo em calcular o parâmetro λ que forneça soluções não triviais para o sistema, sendo $\lambda = \omega^2$ um autovalor, y_j como o autovetor ou modo de vibração associado com o autovalor λ

correspondente e com $\mu_j = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_j$. Para esse problema a condição de contorno

estrutural é descrita por:

$$u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_u, \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) \times [0, \infty): u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = 0 \right\} \quad (26)$$

enquanto que as condições de contorno elétricas podem ser dois tipos:

- Voltagem nula nos eletrodos (ou condição de curto-circuito na região Γ_ϕ) para a condição de ressonância:

$$\phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_\phi, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \Phi \Big|_{(\Gamma_\phi, t)} = 0 \right\} \quad (27)$$

- Deslocamento elétrico nulo nos eletrodos (ou condição de circuito aberto na região Γ_ϕ) para a condição de antirressonância:

$$-D_i \hat{n}_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_\phi \quad (28)$$

2.2.3 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada

Neste caso, é analisado o sólido $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, contido no domínio de projeto fixo Ω_f , e conectado a um circuito elétrico de impedância elétrica equivalente Z como apresentado na Figura 5. O domínio Ω é idêntico ao mostrado na Figura 3 e descrito com detalhe no início da seção 2.2, porém as condições de contorno elétricas diferem pelo fato de circular uma densidade de corrente elétrica $\dot{q}$ pelos eletrodos do sistema (regiões Γ_q consideradas equipotenciais). A conexão entre o eletrodo do material piezelétrico e a impedância Z , faz necessário considerar a equação do circuito (YANG, 2009). Assim, é conformado um circuito elétrico simples, em que o subdomínio com material piezelétrico Ω_1 age como uma fonte de tensão com impedância finita conectada em série à impedância Z , que consome certa quantidade de potência. O modelo é considerado de forma geral, portanto, existe a possibilidade de ter regiões Γ_ϕ com tensões prescritas. O acoplamento da estrutura com a impedância Z modifica somente as equações do domínio elétrico (ver APÊNDICE A.2), portanto, na forma fraca as novas equações de equilíbrio são:

- Equação de continuidade da carga elétrica:

$$\int_0^t \int_\Omega [\dot{D}_i + J_i]_{,i} \delta\phi \, d\Omega \, dt = 0, \forall \delta\phi \in \overline{\delta\Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \phi \Big|_{(\Gamma_\phi, t)} = 0 \right\} \quad (29)$$

- Condição de contorno essencial: Voltagem imposta.

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_\phi, \quad \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \Phi \Big|_{(\Gamma_\phi, t)} = \phi^p = V \right\} \quad (30)$$

Figura 5 – Condições de contorno e de carregamento nas EPLA quando acopladas com um elemento de impedância elétrica concentrada

- Condição de contorno natural (ver Figura 6): Densidade de corrente elétrica sobre uma superfície ou eletrodo.

$$[\dot{D}_i + J_i] \hat{n}_i = -\dot{q} \text{ sobre } \Gamma_{\dot{q}} \quad (31)$$

sendo que, a corrente elétrica no sistema pode ser calculada integrando a eq.(31) sobre a superfície $\Gamma_{\dot{q}}$, de modo que:

$$\int_{\Gamma_{\dot{q}}} [\dot{D}_i + J_i] \hat{n}_i d\Gamma_{\dot{q}} = - \int_{\Gamma_{\dot{q}}} \dot{q} d\Gamma_{\dot{q}} = - \frac{\phi(\Gamma_{\dot{q}})}{Z} = -I \quad (32)$$

tendo que sobre $\Gamma_{\dot{q}}$, as variáveis ϕ , $\dot{q}$ ou I podem ser ou não prescritas, porém não simultaneamente. Além disso, as condições iniciais são:

- Voltagem inicial:

$$\phi = \phi_o \text{ em } \Omega, \forall \phi \in \dot{\phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi|_{(\Omega,0)} = \phi_o \right\} \quad (33)$$

Figura 6 – Condição de contorno natural no problema elétrico no caso de acoplamento com um elemento de impedância elétrica concentrada

2.2.4 Resposta em Frequência

A resposta em frequência (ver APÊNDICE A.3) na notação estendida (BARNETT; LOTHE, 1975), incluindo os efeitos de amortecimento estrutural e das restrições no campo de deslocamentos, é:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[-\omega^2 \rho_1 W_j + j\omega c_{1j} W_l - (K_{ijMn} W_{M,n})_{,i} - \mathcal{F}_j \right] \delta W_j^* d\Omega - \mu_j \delta W_j^* - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m^* \right] dt = 0, \forall \delta W_j^* \in$$

$$\overline{\delta W} = \left\{ W_j \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : W_l|_{(\Gamma_W, t)} = 0 \right\} \wedge \delta \mu_m^* \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{C} : \int_0^t \left(\sum_{m=1}^n G_m (\delta W_j^*) \delta \mu_m \right) dt = 0 \right\} \quad (34)$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ a variável complexa e ω a frequência de excitação. As condições de contorno podem ser escritas como:

- Condição de contorno essencial: Componentes de W_j prescritas.

$$W_j = W_j^p \text{ sobre } \Gamma_W, \forall W_j \in \mathcal{W} = \left\{ \mathcal{W} \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : W_j|_{(\Gamma_W, t)} = W_j^p \right\} \quad (35)$$

- Condição de contorno natural: Componentes de t_j prescritas.

$$\left[\int_0^t t_j \delta W_j^* dt \right]_{\Gamma} = \left[\int_0^t t_j^p \delta W_j^* dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (36)$$

em que t_j^p é definido conforme o caso, pelas seguintes expressões:

- Caso geral:

$$t_j^p = \begin{cases} S_{ij} \hat{n}_j & \text{sobre } \Gamma_t \quad J \leq i \\ -D_i \hat{n}_i & \text{sobre } \Gamma_D \quad J = i + 1 \end{cases} \quad (37)$$

- Acoplamento com um circuito elétrico externo de impedância equivalente Z :

$$t_j^p = \begin{cases} S_{ij} \hat{n}_j & \text{sobre } \Gamma_t \quad J \leq i \\ -\left[D_i - \frac{j}{\omega} J_i \right] \hat{n}_i & \text{sobre } \Gamma_q \quad J = i + 1 \end{cases} \quad (38)$$

sendo que a condição de contorno da eq.(38) sobre a superfície Γ_q pode ser dada na forma integral como:

$$\int_{\Gamma_q} -\left[D_i - \frac{j}{\omega} J_i \right] \hat{n}_i d\Gamma_q = \int_{\Gamma_q} q d\Gamma_q = -\frac{j}{\omega} \left[\frac{\Phi(\Gamma_q)}{Z} \right] = Q \quad (39)$$

sendo Q a carga elétrica e q a densidade de corrente elétrica. Nas relações anteriores δW_j^* e $\delta \mu_m^*$ são os complexos conjugados de δW_j e $\delta \mu_m$ respectivamente, pelo fato de que é utilizada a variável complexa $\mathcal{Y}_j(x_i)$ na formulação variacional (CHOI; KIM, 2005).

2.2.5 Equilíbrio Estático

As equações que governam o problema piezelétrico estático incluindo as restrições no campo de deslocamentos são (para a sua dedução ver APÊNDICE A.4):

- Para o domínio elétrico: Lei de Gauss.

$$\int_{\Omega} D_{i,i} \delta\phi \, d\Omega = 0, \forall \delta\phi \in \overline{\delta\Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi \Big|_{\Gamma_{\phi}} = 0 \right\} \quad (40)$$

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_{\phi}, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) : \Phi \Big|_{\Gamma_{\phi}} = \phi^p = V \right\} \quad (41)$$

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \text{ sobre } \Gamma_D \quad (42)$$

- Para o domínio estrutural: Equação de Equilíbrio de Elasticidade Linear considerando restrições de deslocamento entre camadas.

$$-\left[\int_{\Omega} (S_{ij,j} + f_{b,i}) \delta u_i \, d\Omega + \mu_i \delta u_i \right] - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) : u_i \Big|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \wedge$$

$$\delta \mu_m \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{R} : \sum_{m=1}^n G_m (\delta u_i) \delta \mu_m = 0 \right\} \quad (43)$$

$$u_i = u_i^p \text{ sobre } \Gamma_u, \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) : u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_i^p \right\} \quad (44)$$

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \text{ sobre } \Gamma_t \quad (45)$$

Uma medida da rigidez da EPLA pode ser calculada a partir da resposta estática mediante a flexibilidade média C_m^{Σ} (ou “*mean compliance*”) definida como (BENDSØE; SIGMUND, 2003):

$$C_m^{\Sigma} = \int_{\Omega} f_{b,i} u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^p u_i \, d\Gamma_t \quad (46)$$

sendo que, neste trabalho é considerado que as forças de corpo $f_{b,i}$ são nulas.

2.3 Solução Unidimensional Transiente das Equações Diferenciais para Materiais Piezelétricos

A solução dos sistemas de equações diferenciais apresentada a seguir é dada com o intuito de identificar o comportamento de sistemas piezelétricos considerando modelos de parâmetros concentrados. Assim, são mostrados os principais conceitos relacionados com a solução antes de desenvolver a formulação de MEF adotada neste trabalho. Os termos usados nesta seção desconhecidos até agora são:

m : Massa.

c : Amortecimento.

k_u : Rigidez estrutural.

$k_{u\phi}$: Coeficiente piezelétrico em unidades de força/voltagem.

$k_{\phi u}$: Coeficiente piezelétrico em unidades de carga elétrica/deslocamento

$k_{\phi\phi}$: Rigidez dielétrica.

F : Força.

Q : Carga elétrica

2.3.1 Atuadores

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares não homogêneas e com coeficientes constantes para um sistema piezelétrico (ver Figura 7), mostradas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u & k_{u\phi} \\ k_{\phi u} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (47)$$

em que a sua resposta unidimensional, utilizando uma solução do tipo $W = \mathcal{H}e^{\lambda t}$ para a solução homogênea e o método dos coeficientes indeterminados para a solução particular, pode ser vista como (ZILL, 1997):

Figura 7 – Modelo unidimensional de um atuador piezoelétrico considerando parâmetros concentrados

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H}_u \\ \mathcal{H}_\phi \end{Bmatrix} e^{\lambda t} + \begin{Bmatrix} \mathcal{P}_u \\ \mathcal{P}_\phi \end{Bmatrix} \quad (48)$$

sendo $\mathcal{H}_i$ os coeficientes da solução homogênea e $\mathcal{P}_i$ a solução particular segundo a forma do termo de forçamento (termo do lado direito da eq.(47)). O polinômio característico da equação homogênea é:

$$m\lambda^2 + c\lambda + \left[k_u - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{k_{\phi\phi}} \right] = 0 \quad (49)$$

cujas raízes são:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left[\frac{k_u}{m} - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}} \right]} \quad (50)$$

existindo três casos para a solução homogênea, sobreamortecida (radicando positivo), criticamente amortecida (radicando nulo) ou subamortecida (radicando negativo). Neste trabalho, o caso mais interessante é a solução subamortecida que pode ser vista como:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left[\omega_n^2 - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}} \right]} = -\frac{c}{2m} \pm j\omega_d \because \omega_n^2 = \frac{k_u}{m} \quad (51)$$

sendo ω_d a frequência de oscilação amortecida e ω_n a frequência natural de vibração. Assim, a solução homogênea é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_{\mathcal{H}} \\ \phi_{\mathcal{H}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H}_u \\ \mathcal{H}_\phi \end{Bmatrix} e^{\left(-\frac{c}{2m} \pm j\omega_d\right)t} = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[\begin{Bmatrix} \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_\phi \end{Bmatrix} \cos \omega_d t + \begin{Bmatrix} \mathcal{B}_u \\ \mathcal{B}_\phi \end{Bmatrix} \sin \omega_d t \right] \quad (52)$$

em que $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$ são constantes derivadas das condições iniciais. A solução particular considerando um degrau prescrito para o termo de forçamento é

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{P}_u \\ \mathcal{P}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & k_{u\phi} \\ k_{\phi u} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q^P \end{Bmatrix} = \frac{Q^P}{k_u k_{\phi\phi} - k_{u\phi} k_{\phi u}} \begin{Bmatrix} -k_{u\phi} \\ k_u \end{Bmatrix} \quad (53)$$

tendo que $F = 0$ e com a excitação aplicada unicamente no domínio elétrico. Assim, a solução completa para o sistema da eq.(47), considerando $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ e $\phi(0) = \frac{Q^P}{k_{\phi\phi}}$, é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ k_u \end{Bmatrix} - e^{-\zeta\omega_n t} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{k_{u\phi} k_{\phi u}}{k_{\phi\phi}} \end{Bmatrix} \right] R \cos(\omega_d t - \gamma) \begin{Bmatrix} Q^P \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} -k_{u\phi} \\ k_u \end{Bmatrix} \quad (54)$$

em que $\zeta = \frac{c}{c_c}$ com c_c como o fator de amortecimento crítico, $R = \sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}}$, $\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$,

$D = k_u k_{\phi\phi} - k_{u\phi} k_{\phi u}$ e levando em conta que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$. Deste modo, pode ser visto que a solução do problema corresponde a uma oscilação amortecida em torno do valor de estabilização $u = \frac{-k_{u\phi} Q^P}{D}$ no domínio estrutural e $\phi = \frac{k_u Q^P}{D}$ no domínio elétrico e com os parâmetros transientes da seção 2.4.5.

2.3.2 Coletores de Energia

O sistema de EDO 2x2 linear e com coeficientes constantes com uma impedância elétrica Z acoplada na equação elétrica é:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ k_{\phi u} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u & k_{u\phi} \\ 0 & (k_\sigma + Y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ I \end{Bmatrix} \quad (55)$$

em que $k_\sigma = \omega \tan \delta_0 k_{\phi\phi}$ é a condutividade elétrica que pela natureza do material piezelétrico é muito baixa (ver APÊNDICE A.2) e $Y = \frac{1}{Z}$ é a admitância ou inverso da impedância elétrica acoplada ao sistema (ver seção 2.4.8).

Figura 8 – Modelo unidimensional de um coletor de energia piezelétrico considerando parâmetros concentrados

O polinômio característico da equação homogênea é da forma:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_0 = 0 \quad (56)$$

com $a_2 = \frac{k_\sigma + Y}{k_{\phi\phi}} + \frac{c}{m}$, $a_1 = \frac{c(k_\sigma + Y)}{mk_{\phi\phi}} + \omega_n^2 - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}}$ e $a_0 = \frac{\omega_n^2(k_\sigma + Y)}{k_{\phi\phi}}$. Para o caso de oscilações subamortecidas, a solução buscada é aquela onde o discriminante da equação cúbica mostrada na eq.(56) é maior do que zero. O discriminante da equação cúbica é (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970; IRVING, 2004):

$$D = Q^3 + R^2 > 0 \therefore Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9} \wedge R = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{54} \quad (57)$$

o que implica que o polinômio característico possui uma raiz real (que deve ser negativa para que o sistema seja estável, que indica uma exponencial decrescente) e duas raízes complexas conjugadas que são:

$$\lambda_1 = S_1 + S_2 - \frac{a_2}{3} < 0 \quad (58)$$

$$\lambda_{2,3} = -\left(\frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{a_2}{3}\right) \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) \quad (59)$$

em que $S_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}}$ e $S_2 = \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}$. Assim, a solução homogênea é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_{\mathcal{H}} \\ \phi_{\mathcal{H}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_\phi \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} + e^{\Re[\lambda_2]t} \left[\begin{Bmatrix} \mathcal{B}_u \\ \mathcal{B}_\phi \end{Bmatrix} \cos(\Im[\lambda_2]t) + \begin{Bmatrix} \mathcal{C}_u \\ \mathcal{C}_\phi \end{Bmatrix} \sin(\Im[\lambda_2]t) \right] \quad (60)$$

em que as notações $\Re[\lambda_2]$ e $\Im[\lambda_2]$ referem-se à parte real e imaginária de λ_2 respectivamente, $\mathcal{A}_i, B_i, C_i$ são constantes derivadas das condições iniciais. A solução particular considerando um degrau prescrito para o termo forçante é:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{P}_u \\ \mathcal{P}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & k_{u\phi} \\ 0 & (k_\sigma + Y) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F^P \\ I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_u} & -\frac{k_{u\phi}}{k_u(k_\sigma + Y)} \\ 0 & \frac{1}{(k_\sigma + Y)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F^P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F^P}{k_u} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

sendo que $I = 0$ e com a excitação aplicada somente no domínio estrutural. Logo, a forma da solução do sistema da eq.(55), considerando $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ e $\phi(0) = \frac{F^P}{k_{u\phi}}$, é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_\phi \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} + e^{\Re[\lambda_2]t} \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_u \\ \mathcal{R}_\phi \end{Bmatrix} \cos(\Im(\lambda_2)t - \begin{Bmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\phi \end{Bmatrix}) + \frac{F^P}{k_u} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (62)$$

em que:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_\phi \end{Bmatrix} = - \left\{ \left(\frac{(\Re(\lambda_2))^2 + (\Im(\lambda_2))^2}{k_u} \right) \right\} \frac{F^P}{(\lambda_1 - \Re(\lambda_2))^2 + (\Im(\lambda_2))^2} \quad (63)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\phi \end{Bmatrix} = \tan^{-1} \left(\left(\left(\frac{(\lambda_1 - \Re(\lambda_2))\mathcal{A}_u - \Re(\lambda_2)\frac{F^P}{k_u}}{\frac{F^P}{k_u} + \mathcal{A}_u} \right) \right) \left(\frac{\lambda_1\mathcal{A}_\phi + \Re(\lambda_2)\left(\frac{F^P}{k_{u\phi}} - \mathcal{A}_\phi\right) + \left(\frac{k_\sigma + Y}{k_{\phi\phi}}\right)\frac{F^P}{k_{u\phi}}}{\frac{F^P}{k_{u\phi}} - \mathcal{A}_\phi} \right) \right) \frac{1}{\Im(\lambda_2)} \quad (64)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{R}_u \\ \mathcal{R}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\left(\frac{F^P}{k_u} + \mathcal{A}_u\right)}{\cos \gamma_u} \\ \frac{\left(\frac{F^P}{k_{u\phi}} - \mathcal{A}_\phi\right)}{\cos \gamma_\phi} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Assim, pode ser visto que a solução do domínio estrutural corresponde a uma oscilação amortecida em torno do valor de estabilização $u = \frac{F^P}{k_u}$ enquanto para o domínio elétrico a oscilação é ao redor de $\phi = 0$ ou alcançando um valor máximo e decaindo para zero, pois a equação elétrica corresponde a uma equação de vibração livre amortecida. Os parâmetros transientes da seção 2.4.5 podem ser estimados para o domínio estrutural, pois a solução para o deslocamento conserva o formato de um sistema de segunda ordem. Quando considerada uma impedância elétrica concentrada Z (como um circuito RLC em série), o sistema não enxerga diretamente a ressonância daquela impedância, pois a variável de estado do circuito RLC (ou seja, a corrente I que passa pelo circuito) fica implícita na equação elétrica. Se for necessário fazê-la explícita deve ser resolvido o sistema de EDO 3x3:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{I} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ k_{\phi u} & k_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & -1 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \\ \dot{I} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u & k_{u\phi} & 0 \\ 0 & k_\sigma & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

em que R, L, C_c são o resistor, o indutor e capacitor do circuito RLC, respectivamente. O polinômio característico deste sistema é:

$$\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (67)$$

com $a_4 = \frac{R}{L} + \frac{k_\sigma}{k_{\phi\phi}} + \frac{c}{m}$, $a_3 = \frac{R}{LC_c} + \frac{k_\sigma R}{k_{\phi\phi}L} + \frac{cR}{mL} + \frac{ck_\sigma}{mk_{\phi\phi}} + \omega_n^2 - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}}$, $a_2 = \frac{k_\sigma}{k_{\phi\phi}LC_c} + \frac{c}{mC_cL} + \frac{ck_\sigma R}{mk_{\phi\phi}L} + \frac{\omega_n^2 k_\sigma}{k_{\phi\phi}} + \frac{\omega_n^2 R}{L} - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}LC_c}$, $a_1 = \frac{ck_\sigma}{mk_{\phi\phi}C_cL} + \frac{\omega_n^2}{LC_c} - \frac{k_{u\phi}k_{\phi u}}{mk_{\phi\phi}} + \frac{\omega_n^2 k_\sigma R}{k_{\phi\phi}L}$ e $a_0 = \frac{\omega_n^2 k_\sigma}{k_{\phi\phi}LC_c}$, que não tem solução analítica, fato provado pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829 *apud* IRVING, 2004). Para oscilações subamortecidas, o polinômio característico deve ter uma raiz real (que para garantir estabilidade deve ser negativa, indicando uma exponencial decrescente) e dois pares de raízes complexas conjugadas. Portanto, a forma da solução é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_u \\ \mathcal{A}_\phi \\ \mathcal{A}_I \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \left[\sum_{i=2}^5 e^{\Re[\lambda_i]t} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_u \\ \mathcal{R}_\phi \\ \mathcal{R}_I \end{pmatrix}_i \cos \left(\Im(\lambda_i)t - \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\phi \\ \gamma_I \end{pmatrix}_i \right) \right] + \begin{Bmatrix} \frac{F^P}{k_u} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (68)$$

em que as soluções das variáveis ϕ e I tendem para zero quando $t \rightarrow \infty$.

2.4 Formulação em Elementos Finitos

A formulação desenvolvida na seção 2.2 (denominada forma variacional ou formulação fraca do problema) possibilita a utilização da tecnologia computacional para obter uma solução factível em termos de tempo, esforço e acurácia. Uma das técnicas de solução numérica aproximada é o MEF, que permite analisar e resolver diversos tipos de problemas físicos com ou sem acoplamento, decompondo o domínio do problema em vários subdomínios de geometria simples denominados individualmente como elementos finitos. Portanto, as condições de equilíbrio são estabelecidas para cada elemento finito, sendo posteriormente combinados para conformar um sistema de equações matricial (BATHE, 1996; CHOI; KIM, 2005; HUGHES, 1987).

A OT pode utilizar o MEF, já que é um método de análise robusto, confiável e genérico que permite tratar com estruturas complexas resultantes do processo de otimização. Desse modo, faz-se necessário expressar as equações de equilíbrio das EPLA na forma discreta utilizando os conceitos de elementos finitos. Dado que as EPLA possuem várias camadas que podem ser ou não de reduzida espessura e que os carregamentos podem estar fora do plano dessas camadas, é utilizado na modelagem um domínio tridimensional discretizado com elementos de casca isoparamétricos de oito nós. O elemento finito utilizado neste trabalho (ver Figura 9) é baseado na formulação dos elementos de casca degenerados (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970) considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de casca de primeira ordem (REDDY, 2004b) e levando em conta os efeitos piezelétricos (KÖGL; BUCALEM, 2005a, 2005b). A formulação do elemento finito pode ser vista no APÊNDICE B.

Neste trabalho, as letras n e N representam o número total de nós e de elementos da discretização respectivamente, enquanto o e -ésimo elemento é diferenciado pela letra e e C_t é o número total de camadas. Além disso, N_p é o número total de elementos com material piezelétrico sendo que o p -ésimo elemento piezelétrico é distinguido pela letra p e C_p é o número de camadas piezelétricas. De igual forma, N_f é o número total de elementos com material ortotrópico sendo referenciado o f -ésimo elemento ortotrópico pela letra f e com C_f como o número de camadas com material ortotrópico. Os GDL totais por elemento são 49,

tendo 40 estruturais (5 por nó representados pela variável de estado d_m^e) e 9 elétricos (1 por nó e 1 por elemento representados pela variável de estado ϕ_z^e).

Figura 9 – Elemento de casca isoparamétrico de oito nós e o seu mapeamento entre as coordenadas globais, naturais e materiais

Igualmente, serão tratados dois tipos de modelagem, conforme ao tipo de EPLA: atuador ou coletor de energia. Nos primeiros é fornecida certa diferença de potencial entre os eletrodos da estrutura, de modo a produzir deslocamentos ou transmitir forças em certos pontos do domínio. Já nos últimos a estrutura é excitada por forças ou deslocamentos prescritos em determinadas regiões com o objetivo de gerar certa diferença de potencial entre os eletrodos, capaz de alimentar um circuito externo com impedância elétrica equivalente Z . Em outras palavras, a EPLA gera determinado nível de potência elétrica que é consumida pela impedância Z .

2.4.1 MEF para Atuadores EPLA

Para um elemento e da discretização, considerando a eq.(501) e a eq.(517), obtém-se (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{V_e} A_{si}^T \rho_1 A_{im} dV_e \right] \ddot{d}_m^e + \left[\int_{V_e} \left(\alpha_1 A_{si}^T \rho_1 A_{im} + \beta_1 B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} \right) dV_e \right] \dot{d}_m^e + \\
& \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} dV_e \right] d_m^e + \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T e_{0ji} T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e \Bigg] \delta d_s^e + \\
& \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rk}}^T T_{\phi_{ki}}^T e_{0ij} T_{\theta_{jd}} T_{\varepsilon_{df}} B_{u_{fm}} dV_e \right] d_m^e - \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0pi}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e \Bigg] \delta \phi_r^e = \left\{ \int_{V_e} A_{si}^T f_{bi}^e dV_e + \right. \\
& \left. \int_{S_e} A_{si}^T q_i^{Sp} dS_e + \int_{A_e} A_{si}^T q_i^{Ap} dA_e + F_s^p \right\} \delta d_s^e + \left\{ \int_{V_e} N_{\phi_r} \rho_0 dV_e + \int_{S_e} N_{\phi_r} \sigma_0 dS_e + \int_{A_e} N_{\phi_r} \lambda_0 dA_e + Q_r^p \right\} \delta \phi_r^e
\end{aligned} \tag{69}$$

em que os subíndices i, k, p e q variam de 1 até 3, b, c, d e j de 1 até 5, a e f de 1 até 6, r e z de 1 até 9, m e s de 1 até 40. Os diferenciais dV_e , dS_e e dA_e correspondem ao diferencial de volume do elemento $Jdrdsdt$, ao diferencial de superfície J_sdrds e aos diferenciais das superfícies das fronteiras delimitadas por J_Adrdt e J_Adsdt , respectivamente (sendo J_s e J_A os Jacobianos de área superficial e de linha, respectivamente). A_{im} é a matriz de funções de forma para o domínio estrutural e N_{ϕ_r} é o vetor de funções de forma para o domínio elétrico (ver APÊNDICE B). α_1 e β_1 são os coeficientes de amortecimento de Rayleigh, q_i^{Sp} , q_i^{Ap} e F_s^p são os vetores de força de tração superficial prescritas sobre as áreas S_e e A_e e de forças pontuais prescritas sobre o elemento e , respectivamente. σ_0 , λ_0 são as densidades prescritas de carga elétrica superficial e linear e Q_r^p é o vetor de cargas elétricas pontuais prescritas. Considerando δd_s^e e $\delta \phi_r^e$ vetores arbitrários, podem ser eliminados da eq.(69), obtendo duas equações acopladas que são (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{V_e} A_{si}^T \rho_1 A_{im} dV_e \right] \ddot{d}_m^e + \left[\int_{V_e} \left(\alpha_1 A_{si}^T \rho_1 A_{im} + \beta_1 B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} \right) dV_e \right] \dot{d}_m^e + \\
& + \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} dV_e \right] d_m^e + \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T e_{0ji} T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e = \\
& \left\{ \int_{V_e} A_{si}^T f_{bi}^e dV_e + \int_{S_e} A_{si}^T q_i^{Sp} dS_e + \int_{A_e} A_{si}^T q_i^{Ap} dA_e + F_s^p \right\}
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\left[\int_{V_e} B_{\phi_{rk}}^T T_{\phi_{ki}}^T e_{0ij}^T T_{\theta_{jd}} T_{\varepsilon_{df}} B_{u_{fm}} dV_e \right] d_m^e + \left[- \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0pi}^e T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e = \left\{ \int_{V_e} N_{\phi_r} \rho_0 dV_e + \int_{S_e} N_{\phi_r} \sigma_0 dS_e + \int_{A_e} N_{\phi_r} \lambda_0 dA_e + Q_r^p \right\} \quad (71)$$

A forma matricial da eq.(70) e da eq.(71), levando em conta que o sobrescrito e faz referência ao e -ésimo elemento da discretização, é:

$$M_{d_{sm}}^e \ddot{d}_m^e + C_{d_{sm}}^e \dot{d}_m^e + K_{d_{sm}}^e d_m^e + K_{d\phi_{sz}}^e \phi_z^e = F_{d_s}^e \quad (72)$$

$$K_{\phi_{d_{rm}}}^e d_m^e + K_{\phi_{\phi_{rz}}}^e \phi_z^e = Q_{\phi_r}^e \quad (73)$$

em que m e s são os GDL estruturais e r e z os GDL elétricos elementares. A matriz de amortecimento elementar é dada por $C_{d_{sm}}^e = [\alpha_1 M_{d_{sm}}^e + \beta_1 K_{d_{sm}}^e]$ e na matriz de rigidez piezolétrica elementar é visto que $K_{\phi_{d_{rm}}}^e = K_{d\phi_{mr}}^{eT}$. Para o domínio de projeto considerado, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(601), o modelo de MEF piezolétrico acoplado é dado por (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} \\ K_{\phi_{d_{rm}}} & K_{\phi_{\phi_{rz}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{d_s} \\ Q_{\phi_r} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

em que (entre parênteses a dimensão da variável):

$M_{d_{sm}}$: Matriz global de massa ($5n \times 5n$).

$\ddot{d}_m$: Vetor global de aceleração ($5n$).

$C_{d_{sm}}$: Matriz global de amortecimento ($5n \times 5n$).

$\dot{d}_m$: Vetor global de velocidade ($5n$).

$K_{d_{sm}}$: Matriz global de rigidez ($5n \times 5n$).

d_m : Vetor global de deslocamento ($5n$).

$K_{d\phi_{sz}} = K_{\phi_{d_{zs}}}^T$: Matriz global de rigidez piezolétrica ($5n \times (n+N)$).

$K_{\phi_{\phi_{rz}}}$: Matriz global de rigidez dielétrica ($(n+N) \times (n+N)$).

ϕ_z : Vetor global de potencial elétrico ($n+N$).

F_{ds} : Vetor global de força ($5n$).

Q_{ϕ_r} : Vetor global de cargas elétricas ($n+N$).

s e m : GDL estruturais globais do modelo de MEF.

r e z : GDL elétricos globais do modelo de MEF.

Desse modo, as matrizes em função das relações constitutivas estão definidas como:

$$M_{d_{sm}} = \sum_{e=1}^N M_{d_{sm}}^e = \sum_{e=1}^N \left[\rho_1 \int_{V_e} A_{si}^T A_{im} dV_e \right]_e \quad (75)$$

$$K_{d_{sm}} = \sum_{e=1}^N K_{d_{sm}}^e = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_e} B_{usf}^T T_{\varepsilon fd}^T T_{\theta dj}^T C_{1jc}^E T_{\theta cb} T_{\varepsilon ba} B_{uam} dV_e \right]_e \quad (76)$$

$$C_{d_{sm}} = \sum_{e=1}^N C_{d_{sm}}^e = \sum_{e=1}^N \left[\alpha_1 M_{d_{sm}}^e + \beta_1 K_{d_{sm}}^e \right]_e \quad (77)$$

$$K_{\phi\phi_{rz}} = \sum_{e=1}^N K_{\phi\phi_{rz}}^e = \sum_{e=1}^N \left[- \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0pi}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \quad (78)$$

$$K_{d\phi_{sz}} = \sum_{e=1}^N K_{d\phi_{sz}}^e = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_e} B_{usf}^T T_{\varepsilon fd}^T T_{\theta dj}^T e_{0ji} T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \quad (79)$$

Igualmente, os vetores de carregamento global são calculados como:

$$F_{ds} = \sum_{e=1}^N F_{ds}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V_e} A_{si}^T f_{bi}^e dV_e + \int_{S_e} A_{si}^T q_i^{Sp} dS_e + \int_{A_e} A_{si}^T q_i^{Ap} dA_e + F_s^p \right\}_e \quad (80)$$

$$Q_{\phi_r} = \sum_{e=1}^N Q_{\phi_r}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V_e} N_{\phi_r} \rho_0 dV_e + \int_{S_e} N_{\phi_r} \sigma_0 dS_e + \int_{A_e} N_{\phi_r} \lambda_0 dA_e + Q_r^p \right\}_e \quad (81)$$

Nas equações (75) até (81), o operador A é o operador de montagem de matrizes e vetores de MEF (ver APÊNDICE B).

2.4.2 MEF para Coletores de Energia EPLA

Para um elemento e da discretização, a eq.(547), sem incluir as restrições de deslocamento entre camadas (para esse tópico ver a seção 2.4.3) pode ser expressa como (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{V_e} A_{si}^T \rho_1 A_{im} dV_e \right] \ddot{d}_m^e + \left[\int_{V_e} \left(\alpha_1 A_{si}^T \rho_1 A_{im} + \beta_1 B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} \right) dV_e \right] \dot{d}_m^e + \\
 & \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} dV_e \right] d_m^e + \left[\int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T e_{0_{ji}} T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e \delta d_s^e + \\
 & \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rk}}^T T_{\phi_{ki}}^T e_{0_{ij}}^T T_{\theta_{jd}} T_{\varepsilon_{df}} B_{u_{fm}} dV_e \right] \dot{d}_m^e - \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \varepsilon_{0_{pi}}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \dot{\phi}_z^e - \\
 & \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \omega \tan \delta_0 \varepsilon_{0_{pi}}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e + Y_{\sigma_{rz}}^e \right] \phi_z^e \delta \phi_r^e = \left\{ \int_{V_e} A_{si}^T f_{bi}^e dV_e + \int_{S_e} A_{si}^T q_i^{sp} dS_e + \right. \\
 & \left. \int_{A_e} A_{si}^T q_i^{ap} dA_e + F_s^p \right\} \delta d_s^e + \left\{ \int_{S_e} N_{\phi_r} \dot{q}^{sp} dS_e + I_r^p \right\} \delta \phi_r^e \quad (82)
 \end{aligned}$$

em que os subíndices i, k, p e q variam de 1 até 3, b, c, d e j de 1 até 5, a e f de 1 até 6, r e z de 1 até 9, m e s de 1 até 40. Os diferenciais dV_e , dS_e e dA_e correspondem ao diferencial de volume do elemento $J dr ds dt$, ao diferencial de superfície $J_s dr ds$ e aos diferenciais das superfícies das fronteiras delimitadas por $J_A dr dt$ e $J_A ds dt$, respectivamente (sendo J_s e J_A os Jacobianos de área superficial e de linha, respectivamente). O termo $\dot{q}^{sp}$ é a densidade de corrente elétrica prescrita sobre a área S_e e I_r^p é o vetor de correntes elétricas pontuais prescritas sobre o elemento e , respectivamente. ω é a frequência angular de oscilação do campo elétrico E_i e $\tan \delta_0$ é o fator de perdas dielétricas ou fator de perda tangente (ver APÊNDICE A). $Y_{\sigma_{rz}}^e$ é a matriz de admitância elementar de tamanho 9×9 , definida como:

$$Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & r \vee z \neq 9 \\ \frac{1}{\|z^e\|} & r \wedge z = 9 \end{cases} \quad (83)$$

em que o único valor não nulo corresponde à admitância equivalente $\left(\|Y^e\| = \frac{1}{\|Z^e\|}\right)$ do circuito acoplado entre os eletrodos do elemento e , ou seja, conectado no GDL elétrico $\Delta\phi$ que representa a diferença de potencial elétrico entre as superfícies superior e inferior do elemento, (ver APÊNDICE B). A notação $\|Z^e\|$ refere-se ao módulo³ da impedância do circuito acoplado no elemento e , pelo fato de que Z^e é um número complexo. Considerando δd_s^e e $\delta\phi_r^e$ vetores arbitrários, podem ser eliminados da eq.(82), obtendo duas equações acopladas que são:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{V_e} A_{si}^T \rho_1 A_{im} dV_e \right] \ddot{d}_m^e + \left[\int_{V_e} \left(\alpha_1 A_{si}^T \rho_1 A_{im} + \beta_1 B_{usf}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{uam} \right) dV_e \right] \dot{d}_m^e + \\ & + \left[\int_{V_e} B_{usf}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T C_{1_{jc}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{uam} dV_e \right] d_m^e + \left[\int_{V_e} B_{usf}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T e_{0ji} T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \phi_z^e = \\ & \left\{ \int_{V_e} A_{si}^T f_{bi}^e dV_e + \int_{S_e} A_{si}^T q_i^{Sp} dS_e + \int_{A_e} A_{si}^T q_i^{Ap} dA_e + F_s^p \right\} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} & \left[\int_{V_e} B_{\phi_{rk}}^T T_{\phi_{ki}}^T e_{0ij}^T T_{\theta_{jd}} T_{\varepsilon_{df}} B_{ufm} dV_e \right] \dot{d}_m^e + \left[- \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \varepsilon_{0pi}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right] \dot{\phi}_z^e + \\ & \left[- \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \omega \tan \delta_0 \varepsilon_{0pi}^E T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e + Y_{\sigma_{rz}}^e \right] \phi_z^e = \left\{ \int_{S_e} N_{\phi_r} \dot{q}^{Sp} dS_e + I_r^p \right\} \end{aligned} \quad (85)$$

Logo, levando em conta que o sobrescrito e faz referência ao e -ésimo elemento da discretização, a forma matricial da eq.(84) e da eq.(85), é:

$$M_{d_{sm}}^e \ddot{d}_m^e + C_{d_{sm}}^e \dot{d}_m^e + K_{d_{sm}}^e d_m^e + K_{d\phi_{sz}}^e \phi_z^e = F_{d_s}^e \quad (86)$$

$$K_{\phi_{d_{rm}}}^e \dot{d}_m^e + K_{\phi_{\phi_{rz}}}^e \dot{\phi}_z^e + (K_{\sigma_{rz}}^e + Y_{\sigma_{rz}}^e) \phi_z^e = I_{\phi_r}^e \quad (87)$$

em que m e s são os GDL estruturais e r e z os GDL elétricos elementares.

³ O operador módulo $|\cdot|$ do conjunto de números complexos $\mathbb{C}$ coincide com o operador da norma euclidiana $\|\cdot\|$ do conjunto de números reais $\mathbb{R}^2$. Portanto, neste trabalho será usado somente o símbolo $\|\cdot\|$, levando em conta que se o argumento for um número complexo $a + jb$, a operação indicada é o módulo $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Para o domínio de projeto considerado, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(601), o modelo de MEF piezelétrico acoplado é dado por (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi \phi_{rz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} \\ 0 & (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{d_s} \\ I_{\phi_r} \end{Bmatrix} \quad (88)$$

em que (entre parênteses a dimensão da variável):

$K_{\sigma_{rz}}$: Matriz global de condutividade elétrica $((n+N) \times (n+N))$.

$Y_{\sigma_{rz}}$: Matriz global de admitância $((n+N) \times (n+N))$.

$\dot{\phi}_z$: Vetor global de variação temporal do potencial elétrico $(n+N)$.

I_{ϕ_r} : Vetor global de correntes elétricas $(n+N)$.

As matrizes constitutivas $K_{\sigma_{rz}}$ e $Y_{\sigma_{rz}}$ são determinadas mediante:

$$K_{\sigma_{rz}} = \sum_{e=1}^N K_{\sigma_{rz}}^e = \sum_{e=1}^N \left[\omega \tan \delta_0 K_{\phi \phi_{rz}}^e \right]_e \quad (89)$$

$$Y_{\sigma_{rz}} = \sum_{e=1}^N Y_{\sigma_{rz}}^e = \sum_{e=1}^N \left[Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & r \neq z \vee r = z : (\phi_z \neq \Delta \phi^e \vee z \notin \Omega_c) \\ \left(\frac{1}{\|Z^e\|} \right)_{rz} & r = z : \phi_z = \Delta \phi^e, z \in \Omega_c \end{cases} \right]_e \quad (90)$$

em que $\Delta \phi^e$ faz referência ao grau elementar correspondente à diferença de potencial elétrico entre as superfícies superior e inferior do elemento e onde é acoplada uma impedância Z^e . Ω_c é o domínio do circuito elétrico representado pela quantidade N_z de circuitos diferentes se houverem. Neste caso $N_z = 1$ enquanto o domínio do circuito corresponde a uma única impedância Z (ver Figura 5). Do mesmo modo, o vetor global de correntes elétricas é calculado como:

$$I_{\phi_r} = \sum_{e=1}^N I_{\phi_r}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{S_e} N_{\phi_r} \dot{q}^{sp} dS_e + I_r^p \right\}_e \quad (91)$$

2.4.2.1 Modelagem dos Eletrodos

Para facilitar a modelagem de eletrodos no projeto de coletores de energia, é suposto que as superfícies das camadas de material piezelétrico são equipotenciais, ou seja, o GDL da diferença de potencial elétrico $\Delta\phi$ de todos os elementos dessa camada possui o mesmo valor. Assim, é introduzida na formulação de MEF uma matriz de acoplamento desses GDL mediante o método dos multiplicadores de Lagrange (com η_x como o vetor de multiplicadores de Lagrange de tamanho H), (BATHE, 1996). Logo para dois $\Delta\phi$ da mesma camada, o acoplamento pode ser expresso como:

$$\Delta\phi^y = \Delta\phi^{y+1} \quad (92)$$

contudo, a eq.(92) pode ser reescrita como (KIYONO, 2013):

$$A_z^y \phi_z^y - A_z^{y+1} \phi_z^{y+1} = A_z^{yh} (\phi_z^y - \phi_z^{y+1}) = 0 \quad (93)$$

sendo A_z^{yh} um vetor de acoplamento elementar de potenciais elétricos do y -ésimo elemento piezelétrico para a h -ésima restrição, considerando que o número total de restrições é simbolizado pela letra H . ϕ_z^y é o vetor de potenciais elétricos elementar de dimensão 9 (ver APÊNDICE B.3). Assim, os coeficientes do vetor A_z^{yh} são:

$$A_z^{yh} = [\odot_z \quad 1 \quad \odot_z \quad -1] \quad (94)$$

em que a notação $\odot_z$ representa um vetor nulo de dimensão z , que no caso possui um valor igual a 8. Assim, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(601), a matriz global de acoplamento de potenciais elétricos nas camadas piezelétricas é dada por:

$$A_{xz}^H = \bigcup_{h=1}^H [A_{xz}^{yh}]_h \quad (95)$$

sendo de tamanho $H \times (n+N)$. Portanto, a restrição implementada no MEF expressada em forma global é $A_{xz}^H \phi_z = 0$. Se forem acoplados todos os elementos piezelétricos de todas as camadas do sistema, o valor limite de H é $(N_p - C_p)$. Por fim, o modelo de MEF piezelétrico considerando acoplamento entre os $\Delta\phi$ de cada camada piezelétrica é (KIYONO, 2013):

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi \phi_{rz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & 0 \\ 0 & (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}}) & A_{rx}^H \\ 0 & A_{xz}^H & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ I_{\phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (96)$$

2.4.3 Acoplamento entre Camadas

Pelo fato de que as EPLA possuem múltiplas camadas de diferentes materiais, é preciso modelar o acoplamento entre camadas visando que o campo de deslocamentos conserve sua continuidade (ver eq.(518) e eq.(519)). Para esse propósito é utilizada a teoria “*Layer Wise*” ou de “*Zig-zag*” (KÖGL; BUCALEM, 2005b) na qual cada camada gera uma variação abrupta do campo de deslocamentos nas interfaces, embora o campo de deslocamento permaneça contínuo ao longo da espessura da EPLA, permitindo obter melhores resultados em termos de acurácia, porém, aumentando o custo computacional e com a vantagem de poder aplicar diferentes potenciais elétricos nas camadas piezelétricas. Para a implementação da teoria no modelo de elementos finitos, é considerado a perfeita adesão entre as camadas (ver APÊNDICE A) com o intuito de conservar a continuidade no campo de deslocamentos. Logo para duas camadas acopladas, o deslocamento de dois nós (identificados como *sup* e *inf*, ver Figura 10) que pertencem à interface é restringido de forma que:

$$u_i^{k_{sup}} \Big|_{t=-1} = u_i^{k_{inf}} \Big|_{t=1} \quad (97)$$

Avaliando A_{iq}^k para os nós envolvidos na restrição e lembrando que no k -ésimo nó a função de forma correspondente toma um valor unitário e no caso contrário é nula, a eq.(97) pode ser escrita como:

$$A_{iq}^{k_{sup}} \Big|_{t=-1} d_q^{k_{sup}} - A_{iq}^{k_{inf}} \Big|_{t=1} d_q^{k_{inf}} = A_{iq}^{k_g} (d_q^{k_{sup}} - d_q^{k_{inf}}) = 0 \quad (98)$$

sendo $A_{iq}^{k_g}$ a matriz de restrições nodal de deslocamento do k -ésimo nó para a g -ésima restrição, tendo que o número total de restrições é simbolizado pela letra G .

Figura 10 – Acoplamento entre camadas: (a) Deslocamentos ao longo da espessura sob a teoria de “Layer Wise”; (b) Adesão entre duas camadas

Novamente, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(601), a matriz global de restrições de deslocamento entre camadas é dada por:

$$A_{vm}^G = \underset{g=1}{\overset{G}{A}} \left[A_{vm}^{kg} \right]_g \quad (99)$$

sendo de tamanho $3G \times 5n$. Assim, a restrição implementada no MEF expressada em forma global é $A_{vm}^G d_m = 0$. O modelo de MEF piezelétrico considerando acoplamento entre camadas mediante o método dos multiplicadores de Lagrange (com μ_v como o vetor de multiplicadores de Lagrange de tamanho $3G$), (BATHE, 1996) é:

- No caso de atuadores EPLA:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\mu}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\mu}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{G^T} \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (100)$$

- No caso de coletores EPLA:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\mu}_v \\ \ddot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 & 0 & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\mu}_v \\ \dot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{G^T} & 0 \\ 0 & (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}}) & 0 & A_{rx}^{H^T} \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ I_{\phi_r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (101)$$

2.4.4 Resolução do Problema de MEF Transiente por um Método de Integração no Tempo

A operação das EPLA implica uma transformação de energia e, portanto, a resposta não ocorre imediatamente após a excitação, exibindo uma resposta transiente antes de alcançar a operação em estado estacionário. Como todo sistema físico, eles não podem seguir excitações súbitas de maneira instantânea, porém, é desejável que a resposta transiente seja rápida, amortecida e estável quando o sistema alcança o estado estacionário.

Neste trabalho, é desenvolvido o projeto dinâmico de EPLA utilizando o MOT, fazendo necessário o cálculo do histórico das variáveis de estado do sistema (deslocamento e potencial elétrico) através de um método de integração no tempo, com o objetivo de determinar os parâmetros que caracterizam a resposta transiente. Por tal motivo, foi implementado o método α -Generalizado de Chung e Hulbert (1993), o qual é uma variante do conhecido método de Newmark, que permite diminuir o ruído numérico na resposta sem afetar a acurácia, controlando continuamente o amortecimento logarítmico e minimizando a dissipação em baixas frequências. Aplicando a notação estendida (BARNETT; LOTHE, 1975) na eq.(100), pode ser visto que, o método resolve o problema para o sistema:

$$M_{IJ} \ddot{W}_J^\tau + C_{IJ} \dot{W}_J^\tau + K_{IJ} W_J^\tau = F_I^\tau \quad (102)$$

em que o sobrescrito τ faz referência ao problema transiente de MEF e encontrando uma função $W_J^\tau = W_J^\tau(t)$ que satisfaz as condições iniciais:

$$W_J^\tau(0) = W_{J_o}^\tau \quad (103)$$

$$\dot{W}_J^\tau(0) = \dot{W}_{J_o}^\tau \quad (104)$$

que, no casos de estudo (atuadores e coletores), são dadas por:

$$W_{J_o}^\tau = \begin{cases} d_{i_o} = d_{i_o}^p & J \leq i \\ \phi_{j_o} = \phi_j^p & i + 1 \leq J \leq i + j \end{cases} \quad (105)$$

$$\dot{W}_J^T = \begin{cases} \dot{d}_{i_o} = \dot{d}_i^P & J \leq i \\ \dot{\phi}_{j_o} = \begin{cases} \text{Não precisa ser prescrito} & \text{em atuadores} \\ \dot{\phi}_j^P & \text{em coletores} \end{cases} & i + 1 \leq J \leq i + j \end{cases} \quad (106)$$

em que o sobrescrito P faz referência à prescrição das condições iniciais. Assim, no início do transiente (subíndice o) a eq.(102) é modificada de acordo com as condições iniciais e, portanto, para os casos de estudo é obtido:

• **Para atuadores.** O sistema linear que deve ser resolvido no instante inicial é:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & A_{sv}^{G^T} \\ A_{vm}^G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{d_{s_o}} - C_{d_{sm}} \dot{d}_{m_o} - K_{d_{sm}} d_{m_o} - K_{d\phi_{sz}} \phi_{z_o} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (107)$$

em que se a condição inicial for dada sobre o potencial elétrico e o seu valor for diferente de zero, a estrutura apresentaria uma configuração deformada inicial pelo acoplamento derivado do efeito piezelétrico, caso contrário o deslocamento seria nulo. Lembrando que, na prática não é comum impor condições iniciais de carga elétrica e sim de potencial elétrico e, portanto da equação elétrica para atuadores (ver eq.(100)) tem-se:

$$Q_{\phi_{r_o}} = K_{\phi d_{rm}} d_{m_o} + K_{\phi \phi_{rz}} \phi_{z_o} \quad (108)$$

Assim, o campo de deslocamento inicial desconhecido pode ser calculado mediante uma análise estática (ver seção 2.4.13). Da mesma forma, se a configuração inicial deformada for conhecida, existirá um campo de potencial elétrico que pode ser determinado por uma análise estática prévia, mas se a estrutura estiver em repouso o potencial elétrico será nulo. Por outro lado, como os deslocamentos iniciais não nulos são transladados ao lado direito da equação na forma de forças elásticas de restituição, o multiplicador de Lagrange μ_v relativo ao acoplamento entre camadas é agora uma incógnita e representa o custo de obter o mesmo valor de aceleração em dois pontos da fronteira de camadas adjacentes, porém com as mesmas coordenadas.

• **Para coletores.** O sistema linear a resolver após aplicar as condições iniciais é:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & A_{sv}^G{}^T & 0 \\ 0 & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 & A_{rx}^H{}^T \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{m_o} \\ \dot{\phi}_{z_o} \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{d_{s_o}} - C_{d_{sm}}\dot{d}_{m_o} - K_{d_{sm}}d_{m_o} - K_{d\phi_{sz}}\phi_{z_o} \\ I_{\phi_{r_o}} - K_{\phi d_{rm}}\dot{d}_{m_o} - (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}})\phi_{z_o} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (109)$$

em que deve ser feita uma análise estática prévia se deslocamentos ou potenciais elétricos iniciais são diferentes de zero (ver seção 2.4.13), como explicado anteriormente para atuadores. Apesar disso, a equação elétrica permanece, pois a variação temporal inicial do potencial elétrico é uma incógnita pelo fato de considerar a equação em corrente elétrica (análoga à lei de correntes de Kirchhoff) quando acoplada ao sistema uma impedância elétrica Z (ver seção 2.4.2).

Do mesmo modo, como os deslocamentos e os potenciais elétricos iniciais não nulos são movimentados para o lado direito da equação estrutural na forma de forças elásticas de restituição e da equação do domínio elétrico na forma de correntes aplicadas, respectivamente; os multiplicadores de Lagrange μ_v e η_x são desconhecidos. Portanto, μ_v denota o custo associado ao acoplamento da aceleração entre pontos de camadas adjacentes enquanto η_x representa o custo por obter o mesmo valor de ϕ no eletrodo equipotencial ligado à impedância elétrica Z .

Para resolver numericamente a eq.(102) após o instante inicial, deve-se discretizar o problema, de modo que:

$$W_{j_{s+1}}^\tau = W_{j_s}^\tau + \Delta t \dot{W}_{j_s}^\tau + \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{W}_{j_s}^\tau + \beta \ddot{W}_{j_{s+1}}^\tau \right\} \quad (110)$$

$$\dot{W}_{j_{s+1}}^\tau = \dot{W}_{j_s}^\tau + \Delta t \left\{ (1 - \gamma) \ddot{W}_{j_s}^\tau + \gamma \ddot{W}_{j_{s+1}}^\tau \right\} \quad (111)$$

$$M_{IJ} \ddot{W}_{j_{s+1-\alpha_m}}^\tau + C_{IJ} \dot{W}_{j_{s+1-\alpha_f}}^\tau + K_{IJ} W_{j_{s+1-\alpha_f}}^\tau = F_{I_{s+1-\alpha_f}}^\tau \quad (112)$$

em que $s \in [0, 1, \dots, S - 1]$, sendo S o número de passos de integração, Δt o intervalo de tempo por passo e $\alpha_m, \alpha_f, \gamma$ e β os parâmetros que governam a estabilidade. De igual forma, tem-se que:

$$\ddot{W}_{J_{s+1-\alpha_m}}^\tau = \ddot{W}_{J_{s+1}}^\tau - \alpha_m (\ddot{W}_{J_{s+1}}^\tau - \ddot{W}_{J_s}^\tau) \quad (113)$$

$$\dot{W}_{J_{s+1-\alpha_f}}^\tau = \dot{W}_{J_{s+1}}^\tau - \alpha_f (\dot{W}_{J_{s+1}}^\tau - \dot{W}_{J_s}^\tau) \quad (114)$$

$$W_{J_{s+1-\alpha_f}}^\tau = W_{J_{s+1}}^\tau - \alpha_f (W_{J_{s+1}}^\tau - W_{J_s}^\tau) \quad (115)$$

$$F_{I_{s+1-\alpha_f}}^\tau = F_I^\tau (t_{s+1} - \alpha_f \Delta t) \quad (116)$$

Após as respectivas substituições na eq.(112), o vetor de aceleração $\ddot{W}_{J_{s+1}}^\tau$ para qualquer passo de integração $s+1$ posterior ao início do transiente pode ser calculado como:

$$\hat{M}_{IJ} \ddot{W}_{J_{s+1}}^\tau = F_{I_{s+1-\alpha_f}}^\tau - \hat{D}_{IJ} \ddot{W}_{J_s}^\tau - \hat{E}_{IJ} \dot{W}_{J_s}^\tau - K_{IJ} W_{J_s}^\tau \quad (117)$$

em que:

• **Para atuadores:**

$$\hat{M}_{IJ} = \begin{bmatrix} z_1 M_{d_{sm}} + z_2 (\gamma C_{d_{sm}} + z_3 K_{d_{sm}}) & z_2 z_3 K_{d\phi_{sz}} & z_2 z_3 A_{sv}^G{}^T \\ & z_2 z_3 K_{\phi d_{rm}} & 0 \\ & z_2 z_3 A_{vm}^G & 0 \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$\hat{D}_{IJ} = \begin{bmatrix} \alpha_m M_{d_{sm}} + z_2 (z_4 C_{d_{sm}} + z_5 K_{d_{sm}}) & z_2 z_5 K_{d\phi_{sz}} & z_2 z_5 A_{sv}^G{}^T \\ & z_2 z_5 K_{\phi d_{rm}} & 0 \\ & z_2 z_5 A_{vm}^G & 0 \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$\hat{E}_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} + z_2 K_{d_{sm}} & z_2 K_{d\phi_{sz}} & z_2 A_{sv}^G{}^T \\ & z_2 K_{\phi d_{rm}} & 0 \\ & z_2 A_{vm}^G & 0 \end{bmatrix} \quad (120)$$

• **Para coletores:**

$$\hat{M}_{IJ} = \begin{bmatrix} z_1 M_{d_{sm}} + z_2 (\gamma C_{d_{sm}} + z_3 K_{d_{sm}}) & z_2 z_3 K_{d\phi_{sz}} & z_2 z_3 A_{sv}^{G^T} & 0 \\ z_2 \gamma K_{\phi d_{rm}} & z_2 (\gamma K_{\phi\phi_{rz}} + z_3 (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}})) & 0 & z_2 z_3 A_{rx}^{H^T} \\ z_2 z_3 A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 z_3 A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$\hat{D}_{IJ} = \begin{bmatrix} \alpha_m M_{d_{sm}} + z_2 (z_4 C_{d_{sm}} + z_5 K_{d_{sm}}) & z_2 z_5 K_{d\phi_{sz}} & z_2 z_5 A_{sv}^{G^T} & 0 \\ z_2 z_4 K_{\phi d_{rm}} & z_2 (z_4 K_{\phi\phi_{rz}} + z_5 (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}})) & 0 & z_2 z_5 A_{rx}^{H^T} \\ z_2 z_5 A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 z_5 A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$\hat{E}_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} + z_2 K_{d_{sm}} & z_2 K_{d\phi_{sz}} & z_2 A_{sv}^{G^T} & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} + z_2 (K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}}) & 0 & z_2 A_{rx}^{H^T} \\ z_2 A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

e com:

$$z_1 = 1 - \alpha_m \quad (124)$$

$$z_2 = (1 - \alpha_f) \Delta t \quad (125)$$

$$z_3 = \Delta t \beta \quad (126)$$

$$z_4 = 1 - \gamma \quad (127)$$

$$z_5 = \Delta t \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \quad (128)$$

salientando que essa discretização no tempo permite ter solução do sistema linear da eq.(117) pois a matriz $\hat{M}_{IJ}$ chega a ser inversível ou não singular. No entanto, as condições de

convergência, para alcançar a precisão de segunda ordem e estabilidade incondicional, são dadas por (CHUNG; HULBERT, 1993):

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (129)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (130)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (131)$$

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (132)$$

em que $\rho_\infty \in [0, 1]$ é o parâmetro de dissipação de altas frequências fornecido pelo usuário. Se $\rho_\infty = 1$ não há dissipação enquanto se $\rho_\infty = 0$ ocorre máxima dissipação. Neste trabalho foi selecionado $\rho_\infty = 0$, portanto $\alpha_m = -1$, $\alpha_f = 0$, $\gamma = \frac{3}{2}$ e $\beta = 1$.

2.4.5 Parâmetros da Resposta Transiente

O comportamento da resposta transiente de deslocamento numa EPLA, quando submetida a um degrau como excitação, pode ser visto como um sistema de segunda ordem (ver Figura 11a), sendo essa resposta válida tanto para atuadores quanto coletores de energia (ver seção 2.3). Já para o potencial elétrico, a resposta apresenta o mesmo formato que para o deslocamento em atuadores enquanto que em coletores de energia, a resposta obedece a uma oscilação livre subamortecida (ver Figura 11b e seção 2.3). O envelope superior da curva de potencial elétrico pode ser visto como $\mathcal{F}_\phi e^{-\delta_\phi t}$, em que $\mathcal{F}_\phi$ depende das condições iniciais e δ_ϕ é o decremento logarítmico que depende do fator de amortecimento da curva de resposta (ver seção 2.3). A forma da resposta para a potência ativa Pot_a em coletores de energia é mostrada na Figura 11c, cujo envelope superior $\mathcal{F}_{P_a} e^{-\delta_{P_a} t}$ possui um decremento logarítmico $\delta_{P_a} = 2\delta_\phi$, pelo fato de que Pot_a é função quadrática do potencial elétrico (ver seção 2.4.8) e em que $\mathcal{F}_{P_a}$ depende das condições iniciais. A dedução da resposta unidimensional para atuadores e coletores de energia a partir das equações diferenciais é apresentada na seção 2.3.

Figura 11 – Resposta transiente característica das EPLA: (a) Deslocamento; (b) Potencial elétrico; (c) Potência ativa em coletores de energia

A resposta transiente de EPLA é caracterizada por quatro parâmetros medidos sobre a curva de deslocamento, que são (KUO, 1975; OGATA, 1997):

- **Tempo de pico ou “peak time” (t_p):** o instante de tempo necessário para que a resposta alcance o primeiro pico de ultrapassagem ou “*maximum overshoot*”. O tempo pico pode ser estimado quando conhecida a frequência natural do sistema (ω_n) e o coeficiente de amortecimento estrutural (ζ) mediante:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (133)$$

- **Máxima ultrapassagem ou “maximum overshoot” (M_p):** o máximo valor da resposta que ocorre no instante de tempo t_p medido a partir da resposta estacionária (u_s) e que representa a estabilidade relativa do sistema. O valor máximo de ultrapassagem pode ser calculado como:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (134)$$

• **Tempo de subida ou “*rise time*” (t_r):** o instante de tempo requerido para que a resposta alcance o seu valor final pela primeira vez sendo uma medida da velocidade do sistema. O tempo de subida está relacionado com o tempo de pico e o coeficiente de amortecimento estrutural pela equação:

$$t_r = t_p \left(1 - \frac{\cos^{-1}(\zeta)}{\pi} \right) \quad (135)$$

• **Tempo de estabilização ou “*settling time*” (t_s):** o tempo para que a resposta do sistema alcance e permaneça dentro de um intervalo (i_s) do valor final da resposta estacionária (u_s). Geralmente, i_s é estabelecido entre 2% e 5% conforme aos requisitos do projeto, permitindo avaliar o tempo de estabilização por meio de:

$$t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln \left(\frac{1}{i_s \sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (136)$$

Além disso, há uma relação entre a frequência natural do sistema ω_n e a frequência de oscilação real ω_d denominada frequência amortecida, tal que:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (137)$$

Finalmente o decremento logarítmico pode ser estimado com (CHOPRA, 1995):

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left(\frac{Rp_1}{Rp_{j+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (138)$$

em que Rp_j corresponde ao valor da resposta no pico j -ésimo.

2.4.6 Função de Excitação no MEF Transiente

A excitação no MEF transiente é feita utilizando a função degrau (ou Heaviside). A função degrau unitária matematicamente é definida como:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (139)$$

Contudo, excitações com esse formato em métodos numéricos como MEF para a análise transiente, podem ocasionar instabilidades na solução, pois a função degrau não é uma função suave e não tem derivada em $t = 0$, o que suporia que a excitação imprime uma energia infinita no sistema, fato que não assemelha à realidade. Assim, conforme pelo descrito em Chopra (1995), uma excitação súbita degrau pode ser substituída por uma função degrau com tempo finito de subida, ou seja, com uma rampa de duração limitada (fase de subida) seguida por uma função constante (fase constante), que pode ser expressa na forma unitária como:

$$H_{FRT}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{t}{t_{rH}} & \forall 0 \leq t \leq t_{rH} < \frac{T_n}{4} \text{ Fase de subida} \\ 1 & \forall t \geq t_{rH} \text{ Fase constante} \end{cases} \quad (140)$$

em que t_{rH} é o tempo de subida da rampa ou da fase de subida, tendo essa função por trechos melhor comportamento, pois é diferenciável no instante inicial (ver Figura 12).

Figura 12 – Comparação entre a função degrau e a função degrau com tempo de subida finito

Chopra (1995) estabelece que para $t_{rH} < \frac{T_n}{4}$ a estrutura “enxerga” $H_{FRT}(t)$ como uma excitação subitamente aplicada, ou seja como se fosse excitada pela função $H(t)$, sendo T_n o período natural. No entanto, H_{FRT} apresenta uma singularidade na sua derivada em $t = t_{rH}$

pois o limite quando $t \rightarrow t_{rH}$ não existe, pelo fato de que o limite lateral à esquerda ($t \rightarrow t_{rH} -$) é igual a $\frac{1}{t_{rH}}$ enquanto que o limite lateral à direita ($t \rightarrow t_{rH} +$) é nulo.

Uma forma de contornar esse problema neste trabalho, consiste em assumir o valor da derivada de H_{FRT} em $t = t_{rH}$ como sendo $\frac{1}{t_{rH}}$, dessa forma, não foi observado prejuízo na resposta final do sistema. De igual modo, o tempo total da fase de subida foi definido como $t_{rH} = 2\Delta t$, sendo que a excitação parte de um nível nulo em $t = 0$, aumenta ao 50% da excitação máxima em $t = \Delta t$ e chega no seu valor total em $t = t_{rH}$ (ver Figura 12).

2.4.7 Modelagem de Perdas

Para a modelagem de EPLA foram consideradas perdas tanto no domínio estrutural quanto no elétrico pelo fato de que as transformações de energia e processos envolvidos na realidade não são ideais ou reversíveis fazendo com que a modelagem seja mais realística. Contudo, as perdas estruturais e dielétricas são consideradas independentes enquanto a perda piezelétrica somente pode existir em acoplamento com as anteriores (MEZHERITSKY, 2004). Na literatura são encontrados vários trabalhos relacionados com perdas em materiais piezelétricos e compósitos laminados. Holland (1967) tratou as perdas dielétricas, estruturais e piezelétricas no domínio da frequência com coeficientes complexos encontrando restrições nos seus valores permissíveis. Lakes (1980) estudou as perdas mecânicas em sólidos piezelétricos concluindo que aquelas perdas dependem da geometria como resultado dos efeitos gerados pelas condições de contorno elétricas. Mumby e Yuan (1989) estudaram a dependência das propriedades dielétricas (incluindo as perdas) com a frequência e o volume da matriz epóxica em compósitos de fibra de vidro para aplicações eletrônicas. Uchino e Hirose (2001) propõem como medir separadamente os diferentes mecanismos de perdas, encontrando que em vibrações fora da frequência de ressonância a geração de calor é atribuída principalmente ao fator de perdas dielétricas ou fator de perda tangente $\tan \delta_0$.

Stoykov *et al.* (2003) formularam algoritmos transientes de MEF para tratar mecanismos de dispersão dielétrica em frequências menores a 1 MHz. Mezheritsky (2004) mostra o comportamento dos três tipos de perdas em relação à frequência em geometrias simples como barras e anéis. SAMAL *et al.* (2006a, 2006b) estudou o comportamento não

linear de piezocerâmicas submetidas a campos elétricos de baixa intensidade incluindo termos de dissipação não lineares na formulação variacional e resolvendo as equações resultantes pelo MEF. Igualmente, Samal, Seshu e Dutta (2007) desenvolveram uma formulação variacional para piezocerâmicas retangulares excitadas eletricamente, na qual incluem termos não lineares dissipativos de ordem quadrático e cúbico, e cujos resultados são comparados experimentalmente. Yadav *et al.* (2010) estudou a dependência das propriedades dielétricas em relação à frequência e temperatura em filmes finos do PVDF (Fluoreto de Polivinilideno).

Neste trabalho, são consideradas perdas mecânicas e dielétricas, porém perdas piezelétricas (derivadas do acoplamento entre os dois domínios) são negligenciadas. Não obstante, os fatores de perdas calculados incluirão efeitos do acoplamento piezelétrico, pois como apontado anteriormente tais efeitos coexistem.

2.4.7.1 Modelagem de Perdas Mecânicas

Conforme o proposto em Chowdhury e Dasgupta (2003) e Adhikari (2006, 2014), o coeficiente de amortecimento ζ é considerado uma função da frequência da forma:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{\omega} + \beta_1 \omega \right) \quad (141)$$

sendo α_1 e β_1 os coeficientes de amortecimento de Rayleigh (ver Figura 13) que podem ser calculados a partir das frequências de ressonância do sistema e os correspondentes coeficientes de amortecimento ζ do modo vibração associado. O amortecimento de Rayleigh torna-se sob este enfoque, um caso particular de amortecimento proporcional generalizado (ADHIKARI, 2006). A função de amortecimento pode ser encontrada pelo método dos mínimos quadrados, que faz com que o somatório do erro quadrático entre o valor observado e o estimado seja mínimo (PULIDO; SALAZAR, 2008), ou seja:

$$\min_{\alpha_1, \beta_1} R = \sum_{i=1}^{N_v} \left(\frac{1}{\omega_i} \zeta_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{\omega_i} + \beta_1 \omega_i \right) \right)^2 \quad (142)$$

Figura 13 – Modelo de amortecimento estrutural dependente das frequências naturais

sendo que R alcança um valor mínimo quando $\frac{dR}{d\alpha_1} = \frac{dR}{d\beta_1} = 0$. Portanto, para N_v modos de vibração o problema consiste em resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_v} \frac{1}{\omega_i} & N_v \\ N_v & \sum_{i=1}^{N_v} \omega_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N_v} \frac{\zeta_i}{\omega_i} \\ \sum_{i=1}^{N_v} \zeta_i \omega_i \end{Bmatrix} \quad (143)$$

em que ζ_i é o coeficiente de amortecimento do i -ésimo modo de vibração, que pode ser encontrado a partir do diagrama de resposta em frequência do deslocamento. Assim, aplicando o conceito de largura de banda de potência média (ver Figura 14) para cada pico de ressonância é visto que (CHOPRA, 1995):

$$\zeta_i = \frac{\omega_{bi} - \omega_{ai}}{2\omega_i} = \frac{\Delta\omega_i}{2\omega_i} = \frac{1}{2Q_i} \quad (144)$$

sendo $\Delta\omega_i$ a largura de banda em que se concentra a maior parte da potência do pico ressonante localizado em ω_i e com Q_i como o fator de qualidade. A amplitude nos extremos do intervalo corresponde a uma porção da amplitude do pico ressonante definido por $u_{ab} = \frac{u_i}{\sqrt{2}}$.

Figura 14 – Definição de banda de potência média

A quantidade de modos de vibração que devem ser escolhidos para fazer a regressão pode ser conhecida utilizando a fração de participação modal Γ_{Fi} do i -ésimo modo definida pela expressão (CHOPRA, 1995):

$$\Gamma_{Fi} = \frac{(\Gamma_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_v} (\Gamma_i)^2} \therefore \Gamma_i = \frac{W_i^\lambda R_i}{W_i^\lambda M_{IJ} W_i^\lambda} \quad (145)$$

em que Γ_i é o fator de participação do i -ésimo modo, W_i^λ é o i -ésimo modo de vibração e M_{IJ} é a matriz global de massa. R_i é o vetor de excitação que dependendo do tipo de EPLA tem a forma:

$$R_i = \begin{cases} \text{Em atuadores} & \begin{bmatrix} K_{d\phi_{sz}} \\ K_{\phi\phi_{rz}} \end{bmatrix} \{\phi_z^P\} \\ \text{Em coletores} & \begin{cases} \text{Excitação por carregamento} & F_i^P \\ \text{Excitação por movimento dos apoios} & M_{IJ} r_j^P \end{cases} \end{cases} \quad (146)$$

sendo que em atuadores as condições de contorno elétricas induzem momentos fletores na estrutura se o material piezelétrico estiver polarizado na direção perpendicular ao plano de isotropia (FULLER; ELLIOTT; NELSON, 1996). Isso quer dizer que modos de vibração complexos contribuem à resposta da estrutura. F_i^P são os carregamentos estruturais prescritos e r_j^P é um vetor de zeros exceto nos GDL dos apoios em que o deslocamento é imposto, sendo o seu valor unitário e conservando o sinal dependendo da direção do movimento. A excitação por deslocamento nos engastamentos pode ser possível quando utilizado um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. Calculado o fator de participação modal Γ_i , pode ser

determinado um fator de participação modal acumulada com a finalidade de estimar o número de modos que contribuem à resposta da estrutura. O fator acumulado de participação modal é definido como:

$$\Gamma_{\text{Acum}} = \sum_{i=1}^{N_v} \Gamma_{F_i} \quad (147)$$

com a propriedade de que se $N_v \rightarrow \infty \Rightarrow \Gamma_{\text{Acum}} \rightarrow 1$. Chowdhury e Dasgupta (2003) afirmam que para a maioria das estruturas, o número de modos significantes na resposta para obter pelo menos $\Gamma_{\text{Acum}} \geq 0,95$ é mínimo 3 e máximo 25. Assim, estabelecendo um limite inferior $\Gamma_{\text{Acum}}^{\min}$ é possível conhecer um número de modos $N_{\Gamma_{\text{Acum}}}: \Gamma_{\text{Acum}} \geq \Gamma_{\text{Acum}}^{\min}$ que contribuem à resposta. Porém o conjunto de modos $N_v \subseteq N_{\Gamma_{\text{Acum}}}$ levados em conta para o cálculo dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh são aqueles cuja fração de participação modal ultrapassa certo valor mínimo, ou seja, $\Gamma_{F_i} \geq \Gamma_F^{\min}$. Neste trabalho, $\Gamma_F^{\min} = 0,01$ e $\Gamma_{\text{Acum}}^{\min} = 0,7$, de modo que o esforço computacional não se veja incrementado drasticamente. Esta análise é válida tanto para atuadores quanto para coletores de energia.

2.4.7.2 Modelagem das Perdas Dielétricas

As propriedades dielétricas variam segundo os mecanismos dielétricos, que por sua vez, dependem da frequência de oscilação do campo elétrico (ver Figura 15) sendo esse fenômeno conhecido como dispersão dielétrica (STOYKOV et al., 2003). Nas EPLA são consideradas perdas dielétricas somente nos coletores de energia, pois as condições de contorno elétricas fazem com que o material piezelétrico não possa ser considerado com impedância infinita (TIERSTEN; SHAM, 1998). Além disso, os materiais usados para coletores de energia são de alta perda (como PZT-5A ou PZT-5H que possuem um fator de qualidade baixo e um amortecimento alto), caso contrário dos materiais usados para atuadores (como PZT-4 ou PZT-8 apresentam um amortecimento baixo e um fator de qualidade alto). Os coletores de energia EPLA neste trabalho operam em frequências menores do que 1 MHz e, portanto, o mecanismo principal de dispersão dielétrica é a condutividade iônica que somente introduz perdas no sistema.

Figura 15 – Comportamento típico das propriedades dielétricas em relação à frequência

Para modelar as perdas dielétricas é utilizado o modelo de dispersão de banda larga de Debye sugerido nos trabalhos de Djordjevic *et al.* (2001) e Svensson e Dermer (2001), o qual pode ser usado em qualquer região do espectro da frequência. Contudo, Koledintseva *et al.* (2005) afirma que o modelo de Debye se ajusta melhor aos mecanismos de dispersão em baixas frequências. Usando propriedades complexas e considerando o caso unidimensional, a permissividade elétrica relativa pode ser expressa como:

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j \tan \delta_0) \quad (148)$$

e aplicando o modelo de dispersão de Debye entre duas frequências ω_1 e ω_2 , tem-se:

$$\epsilon = \left(\epsilon'_\infty + \frac{\Delta\epsilon' \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \right) - j \left(\frac{\Delta\epsilon' \left(\frac{\pi}{2}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \quad (149)$$

em que:

$\epsilon'_\infty = \epsilon'(\infty)$: Permissividade real em altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$)

$\Delta\epsilon' = \epsilon'_0 - \epsilon'_\infty$: Mudança da permissividade real sendo $\epsilon'_0 = \epsilon'(\omega = 0)$

ϵ_0 : Constante de permissividade elétrica no vácuo

σ : Condutividade elétrica

Igualando as partes imaginárias e com as devidas substituições de variáveis, tem-se:

$$\tan \delta_0 = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\omega \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sigma \ln \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\epsilon_0 \Delta \epsilon'}}{\omega \left[\ln \left(\frac{(\omega_2) \left(1 + \frac{\epsilon_{\infty}'}{\Delta \epsilon'} \right)}{(\omega_1) \left(\frac{\epsilon_{\infty}'}{\Delta \epsilon'} \right)} \right) - \ln(\omega) \right]} \quad (150)$$

Logo, considerando que os termos diferentes da frequência ω são constantes para todo o espectro de interesse, pode ser ajustada uma função de perdas dielétricas cuja incerteza depende do número de pontos utilizados na aproximação, tal que:

$$\tan \delta_0 = \frac{\omega \left(\frac{\pi}{2} \right) + \alpha_{\delta_0}}{\omega [\beta_{\delta_0} - \ln(\omega)]} \quad (151)$$

sendo α_{δ_0} e β_{δ_0} os coeficientes da função de perdas dielétricas, em que o fator de perdas dielétricas $\tan \delta_0$ é medido nos picos de ressonância da função de resposta em frequência do potencial elétrico. Neste caso, a regressão é não linear e deve ser calculada utilizando ferramentas computacionais. De forma análoga, $\tan \delta_0$ pode ser medido utilizando o conceito de largura de banda de potência média (ver Figura 14) levando em conta neste caso que, o fator de perdas dielétricas é o valor inverso ao fator de qualidade. Portanto:

$$\tan \delta_{0i} = \frac{\omega_{bi} - \omega_{ai}}{\omega_i} = \frac{\Delta \omega_i}{\omega_i} = \frac{1}{Q_i} \quad (152)$$

2.4.8 Impedância do Circuito Elétrico Acoplado

As impedâncias equivalentes estudadas neste trabalho abrangem unicamente às dos circuitos RLC em série. Levando em conta que esse tipo de circuitos possui um resistor R , um indutor L e um capacitor C , a sua impedância equivalente é definida como (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2008):

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX \quad (153)$$

sendo X a reatância ou parte imaginária da impedância. A admitância desse circuito é:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z^*}{\|Z\|^2} = G + jB \quad (154)$$

sendo Z^* o complexo conjugado de Z , G a condutância (ou parte real de Y) e a susceptância B (ou parte imaginária de Y). Quando ligado o circuito RLC a uma fonte de voltagem ou de corrente, a potência total consumida pela impedância Z é de caráter complexo e o seu módulo é denominado potência aparente (Pot_s), sendo determinada mediante:

$$Pot_s = \phi I = \frac{\phi^2}{\|Z\|} = \|Y\| \phi^2 \quad (155)$$

lembrando que $\phi = I\|Z\| = \frac{I}{\|Y\|}$. A potência aparente possui duas parcelas, uma ativa Pot_a que representa a potência que dissipa o circuito em forma de calor ou trabalho e uma reativa Pot_r que se utiliza na formação dos campos elétricos e magnéticos dos seus componentes. A relação entre as potências antes mencionadas é dada por:

$$Pot_s^2 = Pot_a^2 + Pot_r^2 \quad (156)$$

e, além disso, existe um ângulo de defasagem φ_d entre a tensão e a corrente, calculado como:

$$\varphi_d = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{X}{R} \right) \quad (157)$$

com o qual, as potências ativa e reativa podem ser determinadas pelas expressões (YOUNG; FREEDMAN; FORD, 2008):

$$Pot_a = Pot_s \cos \varphi_d = \frac{\phi^2}{\|Z\|^2} R = (\phi\|Y\|)^2 R \therefore \cos \varphi_d = \frac{R}{\|Z\|} \quad (158)$$

$$Pot_r = Pot_s \sin \varphi_d = \frac{\phi^2}{\|Z\|^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = (\phi\|Y\|)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \therefore \sin \varphi_d = \frac{X}{\|Z\|} \quad (159)$$

Pelo fato de que a EPLA pode ser excitada com sinais variáveis no tempo (sinusoidais, quadradas, triangulares, etc.), a potência torna-se uma quantidade instantânea precisando desta forma, estimar um índice da geração de energia elétrica. Neste trabalho é adotada a potência média ativa como medida da quantidade de potência que pode ser dissipada pela impedância acoplada. A potência média ativa pode ser calculada para qualquer sinal como (DURNEY; HARRIS; ALLEY, 1982):

$$\overline{\text{Pot}}_a^{\tau} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\phi \|Y\|)^2 R dt \quad (160)$$

e no caso particular de que a EPLA for excitada com uma onda senoidal chega-se em:

$$\overline{\text{Pot}}_a^{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\phi \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \|Y\| \right)^2 R dt = \frac{1}{2} (\phi \|Y\|)^2 R \quad (161)$$

Na literatura referente à modelagem de transdutores piezelétricos acoplados com circuitos elétricos foi encontrado que os componentes dos circuitos são tratados como elementos de MEF de dois nodos tanto na análise transiente quanto harmônica (WANG; OSTERGAARD, 1999). As suas formulações são deduzidas a partir do balanço de carga elétrica em cada elemento e conectadas aos nós do eletrodo do material piezelétrico. Similar metodologia é empregada por Abe, Cardoso e Foggia (1998) para o acoplamento de circuitos elétricos e modelos de MEF 2D aplicado ao transiente de motores de passo e motores DC. Igualmente no domínio da frequência, têm sido considerados circuitos RL em série na modelagem com materiais piezelétricos para aplicações de controle ativo e passivo de vibrações (DE GODOY; TRINDADE, 2011; DOS SANTOS; TRINDADE, 2011) e coletores de energia (DE GODOY; TRINDADE, 2012), sendo inclusos na formulação variacional para a obtenção de equações de MEF acopladas. Outras abordagens têm tratado com circuitos não lineares em regime harmônico em que é parametrizada a relação entre corrente e voltagem por aproximações polinomiais empregando o método do balanço harmônico (RUPP; DUNN; MAUTE, 2010) enquanto Kumar *et al.* (2014) utilizou uma impedância de forma concentrada na otimização de forma de coletores de energia usando algoritmos genéticos.

Abordagens de impedâncias concentradas têm sido utilizadas igualmente no contexto de OT (KIYONO; SILVA; REDDY, 2016; RUPP, 2009; RUPP et al., 2009), sendo que no

trabalho de RUPP *et al.* (2009a) tem a possibilidade de considerar um valor concentrado de impedância elétrica na diagonal da matriz dielétrica de MEF ou de acoplar todos os GDL do eletrodo na equação de parâmetros concentrados do circuito, enquanto no trabalho de Kiyono; Silva; Reddy (2016) é considerado um único valor na diagonal da matriz dielétrica. Nos trabalhos citados anteriormente, são tratados circuitos puramente resistivos em regime estático ou no domínio da frequência, embora em RUPP *et al.* (2009a) seja apresentada a formulação para circuitos RLC em série. Porém não foi encontrado até agora problemas de estado transiente envolvendo otimização. Outra característica do trabalho de RUPP *et al.* (2009a) é manter a capacitância do sistema constante, fato alcançado pelo acoplamento em paralelo de um capacitor variável com a camada piezelétrica (cuja topologia muda no processo de otimização e, portanto a sua capacitância), podendo considerar que o circuito elétrico acoplado é um circuito RC em paralelo.

Com o enfoque do balanço de carga elétrica em cada elemento, as matrizes e vetores constitutivos dos componentes do circuito são constantes para o caso de regime harmônico. No entanto, na análise transiente a matriz que representa um componente elétrico é constante sempre que o intervalo de tempo por passo Δt não varie enquanto que os vetores de carregamento sempre são modificados a cada Δt independentemente do seu valor. Isto implica uma desvantagem desde o ponto de vista computacional, pois o vetor global de carregamento da equação de MEF deve ser montado em cada passo de integração incrementando o custo do cálculo. Além disso, a dependência com o Δt pode comprometer a precisão dos resultados quando este se faz muito pequeno.

Outra desvantagem está associada com a criação de novos GDL para cada elemento que compõe o circuito elétrico acoplado no caso de circuitos em série, aumentando o número de GDL que deve ser resolvido pelo MEF, sendo mais crítico na análise transiente do que na harmônica. Pelas razões antes expostas e outros problemas relacionados com o condicionamento numérico ao considerar impedâncias elétricas concentradas como descrito na seção 2.4.8.1, foi adotado um modelo de impedância distribuída equivalente para modelar o acoplamento entre os coletores de energia EPLA e o circuito RLC em série considerado no problema.

2.4.8.1 Impedância Distribuída Equivalente

A impedância elétrica do circuito acoplado à EPLA é modelada como um único valor que é somado na diagonal da matriz de admitância global $Y_{\sigma_{rz}}$ (ver eq.(90)). O valor soma-se no GDL elétrico compartilhado pelo domínio de projeto fixo Ω e domínio do circuito acoplado Ω_c , agindo como uma impedância concentrada. Contudo, se o valor da impedância Z for pelo menos quatro ordens de grandeza maior do que o máximo valor encontrado na diagonal da matriz de condutividade elétrica $K_{\sigma_{rz}}$, o condicionamento numérico do sistema é afetado, podendo não permitir resolver de forma satisfatória o problema de MEF.

Figura 16 – Impedância distribuída equivalente do circuito elétrico acoplado

Com a finalidade de evitar esse inconveniente, foi adotada uma estratégia que consiste na distribuição da impedância Z em todos os GDL elétricos elementares $\Delta\phi^e$ (único por elemento) que fazem parte do eletrodo do coletor de energia, aproveitando que ele é uma superfície equipotencial. Para isso, é encontrado um novo valor de impedância equivalente Z_{eq} considerando que existem N_{eq} circuitos acoplados em paralelo à estrutura (ver Figura 16), sendo $N_{eq} \leq N_p$, o número de elementos piezoelétricos que fazem parte do eletrodo (lembrando que N_p é o número total de elementos com material piezoelétrico). Neste trabalho, os coletores de energia somente possuem duas camadas, uma de substrato e outra de material piezoelétrico tendo assim, um único eletrodo na camada piezoelétrica e, portanto, $N_{eq} = N_p$. A impedância distribuída será referenciada como Z_ϕ e pode ser calculada para cada circuito acoplado, a partir de:

$$Z = \frac{1}{\sum_{e=1}^{N_p} \left(\frac{1}{Z_\phi} \right)_e} = \frac{1}{\frac{N_p}{Z_\phi}} = \frac{Z_\phi}{N_p} \therefore Z_\phi = N_p Z \Rightarrow Y_\phi = \frac{1}{N_p Z} \quad (162)$$

enquanto a matriz de admitância global para N_z circuitos acoplados é definida como:

$$Y_{\sigma_{rz}} = \frac{N}{A} Y_{\sigma_{rz}}^e = \frac{N}{A} \left[Y_{\sigma_{rz}}^e \right]_{rz} = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \left[\sum_{w=1}^{N_z} \frac{1}{\|Z^w\|} \right] \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \quad (163)$$

sendo Z^w a impedância correspondente ao w -ésimo circuito.

2.4.9 Solução do Problema de MEF Transiente Considerando o Processo de Descarga do Capacitor do Circuito Elétrico Acoplado

Para compreender melhor o processo de descarga do capacitor em coletores de energia, considere o modelo de parâmetros concentrados da Figura 17 que representa a equação elétrica do sistema. A fonte de corrente representa a corrente produzida pelos deslocamentos produzidos na estrutura perante a excitação mecânica (sejam forças ou deslocamento prescritos).

Figura 17 – Modelo de parâmetros concentrados da equação elétrica de MEF

A corrente será nula quando a resposta estrutural alcance o estado estacionário, pois a excitação depende da velocidade. Ou seja, tem decorrido um tempo de estabilização $t = t_s$ em que a frequência de oscilação da resposta elétrica muda de um valor ω_d não nulo para zero e,

portanto, a impedância elétrica do circuito acoplado já não é o valor dado pela eq.(153). Além disso, a matriz global de condutividade elétrica $K_{\sigma_{rz}}$ é nula, pois o termo $\omega \tan \delta_0 = 0$. Portanto, considerar a impedância acoplada ao sistema de forma concentrada, introduz uma singularidade no modelo de MEF da eq.(101). Assim, A equação de MEF elétrico dever ser modificada para que o sistema não se desequilibre, pois se continuar calculando a resposta transiente com o valor da impedância inicial, o circuito estaria consumindo uma potência muito maior do que a realmente é consumida.

O comportamento do sistema é semelhante a um circuito RC, em que a impedância do indutor é nula, o capacitor se comporta como uma fonte de voltagem cujo valor decai exponencialmente no tempo (processo de descarga do capacitor) e, a impedância Z se reduz ao resistor R . Para os instantes de tempo $t > t_s$, são criados N_z GDL elétricos que representam a tensão elétrica de cada capacitor C dos N_z circuitos acoplados enquanto a matriz de admitância global $Y_{\sigma_{rz}}$, considerando uma impedância distribuída equivalente de cada circuito, é calculada como:

$$Y_{\sigma_{rz}} = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} Y_{\sigma_{rz}}^e = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} \left[Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \left[\sum_{w=1}^{N_z} \frac{1}{R^w} \right] \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \right]_e \quad (164)$$

lembrando que $Z = R$ em cada circuito acoplado. Assim, o novo problema de MEF que deve ser resolvido, é:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\mu}_v \\ \ddot{\eta}_x \\ \ddot{\phi}_{cq} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi \phi_{rz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{C_{wq}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\mu}_v \\ \dot{\eta}_x \\ \dot{\phi}_{cq} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^G & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\sigma_{rz}} & 0 & A_{rx}^H & -G_{\sigma_{rq}}^T \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{\sigma_{wz}} & 0 & 0 & G_{R_{wq}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \\ \eta_x \\ \phi_{cq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ I_{\phi_r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (165)$$

em que (entre parênteses a dimensão da variável):

$C_{C_{wq}}$: Matriz global de capacitância elétrica concentrada ($N_z \times N_z$).

$G_{R_{wq}}$: Matriz global de condutância elétrica concentrada ($N_z \times N_z$).

$G_{\sigma_{wz}}$: Matriz global de condutância elétrica distribuída ($N_z \times (n+N)$).

ϕ_{C_q} : Vetor global de tensão elétrica nos capacitores acoplados (N_z).

$\dot{\phi}_{C_q}$: Vetor global de variação temporal da tensão elétrica nos capacitores acoplados (N_z).

q e w : GDL elétricos correspondentes a os capacitores acoplados variando desde 1 até N_z .

As matrizes $C_{C_{wq}}$ e $G_{R_{wq}}$ são matrizes diagonais calculadas mediante:

$$C_{C_{wq}} = \sum_{w=1}^{N_z} C_C^w = \sum_{w=1}^{N_z} \left[C_C^w = \begin{cases} 0 & \forall w \neq q \\ C^w & \forall w = q \end{cases} \right]_w \quad (166)$$

$$G_{R_{wq}} = \sum_{w=1}^{N_z} G_R^w = \sum_{w=1}^{N_z} \left[G_R^w = \begin{cases} 0 & \forall w \neq q \\ \frac{1}{R^w} & \forall w = q \end{cases} \right]_w \quad (167)$$

enquanto a matriz $G_{\sigma_{wz}}$ é calculada usando:

$$G_{\sigma_{wz}} = \sum_{w=1}^{N_z} G_{\sigma_z}^w = \sum_{w=1}^{N_z} \left[G_{\sigma_z}^w = \begin{cases} 0 & \forall z : \phi_z \neq \Delta\phi^e \\ \left(\frac{1}{N_p R^w} \right)_z & \forall z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \right]_w \quad (168)$$

sendo C^w e R^w os valores do capacitor e do resistor correspondente ao w -ésimo circuito, respectivamente.

2.4.10 Transferência de Potência e Eficiência do Sistema

A potência transferida ao circuito RLC e a eficiência do sistema podem ser calculadas considerando o modelo de parâmetros concentrados da Figura 18. Neste modelo é considerado que a impedância total do material piezelétrico Z_s vem dada pela impedância equivalente do arranjo em paralelo da capacitância $K_{\phi\phi}$ e o resistor que simula as perdas

dielétricas $\frac{1}{K_\sigma}$ (em que $K_\sigma = \omega \tan \delta_0 K_{\phi\phi}$), enquanto o circuito RLC em série possui uma impedância Z dada pela eq.(153). A impedância Z_S é calculada como:

$$Z_S = \frac{1}{\omega K_{\phi\phi}} \left(\frac{\tan \delta_0 - j}{1 + \tan^2 \delta_0} \right) = R_S + jX_S \quad (169)$$

sendo a sua resistência e a reatância:

$$R_S = \frac{\tan \delta_0}{\omega K_{\phi\phi}(1 + \tan^2 \delta_0)} \quad (170)$$

$$X_S = \frac{-1}{\omega K_{\phi\phi}(1 + \tan^2 \delta_0)} \quad (171)$$

Figura 18 – Circuito equivalente do modelo de parâmetros concentrados da equação elétrica de MEF para a análise de transferência de potência

A partir do circuito equivalente da Figura 18, a potência consumida em Z é:

$$\text{Pot}_Z = \left(K_{\phi d} \dot{d} \left(\frac{1}{1 + \frac{\|Z\|}{\|Z_S\|}} \right) \right)^2 \|Z\| \quad (172)$$

sendo que a potência Pot_Z é máxima quando $\|Z\| = \|Z_S\|$, ou seja:

$$R^2 + X^2 = R_S^2 + X_S^2 \quad (173)$$

implicando que a potência ativa Pot_a é maximizada quando a quantidade $X_S^2 - X^2$ é nula. Assim, a potência máxima em Z é:

$$Pot_{Z_{max}} = \frac{(K_{\phi d})^2 \|Z_S\|}{4} \quad (174)$$

e a potência transferida relativa ao valor máximo pode ser estimada com:

$$R_{PT} = \frac{Pot_Z}{Pot_{Z_{max}}} = \frac{4 \frac{\|Z\|}{\|Z_S\|}}{\left(1 + \frac{\|Z\|}{\|Z_S\|}\right)^2} \quad (175)$$

Agora, a eficiência do sistema é dada por:

$$\eta = \frac{Pot_Z}{Pot_Z + Pot_{Z_S}} = \frac{1}{1 + \frac{\|Z\|}{\|Z_S\|}} \quad (176)$$

sendo que na condição de máxima transferência de potência ($\|Z\| = \|Z_S\|$) a eficiência é somente do 50% (ver Figura 19). Consequentemente, a máxima transferência de potência não garante máxima eficiência e, portanto, o critério de projeto depende do tipo de aplicação (DURNEY; HARRIS; ALLEY, 1982; JONES, 1995).

Figura 19 – Curva de transferência de potência relativa e de eficiência do sistema para o circuito equivalente do modelo de parâmetros concentrados

2.4.11 MEF para a Análise Modal

O projeto dinâmico de EPLA com MOT proposto neste trabalho exige o cálculo das frequências naturais do sistema ω_n e dos modos de vibração associados. Por essa razão, foi implementada a análise modal de MEF, que corresponde à solução numérica do problema de autovalor e autovetor mostrado no APÊNDICE A. Essa análise pode ser formulada, a partir da eq.(533) e eq.(534), considerando o domínio de projeto e as modificações da eq.(600), como (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

$$\begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{gT} \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^g & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (177)$$

levando em conta que na ressonância, a condição de contorno elétrica é de potencial elétrico nulo nos eletrodos, (ver APÊNDICE A). Na notação estendida a eq.(177) pode ser vista da forma:

$$[K_{IJ} - \lambda M_{IJ}] W_j^\lambda = 0 \quad (178)$$

em que o sobrescrito $\lambda = \omega_n^2$ faz referência ao problema modal de MEF, sendo que para determinar W_j^λ não triviais, a condição necessária é:

$$\det([K_{IJ} - \lambda M_{IJ}]) = 0 \quad (179)$$

A análise anterior é válida para os coletores EPLA, pelo fato de que nem o circuito elétrico acoplado nem as restrições nos eletrodos das camadas piezelétricas incidem nos modos e frequências naturais de vibração do domínio estrutural.

2.4.12 MEF para Resposta em Frequência

Dado que é importante estabelecer as amplitudes de vibração nas EPLA quando elas vibrarem numa frequência de excitação especificada, é indispensável conhecer a resposta em

frequência do sistema mediante a análise harmônica. A resposta nessa análise pertence ao domínio do conjunto dos números complexos, cuja interpretação determina a amplitude e o ângulo de fase para cada frequência angular de excitação ω . A formulação neste trabalho, considerando a forma da resposta da eq.(557) e aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(601) na eq.(558), é (ver APÊNDICE A e APÊNDICE B):

• **Para atuadores.** Considerando, além disso, a Figura 3 e a eq.(600), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M_{d_{sm}} + j\omega C_{d_{sm}} + K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{g^T} \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (180)$$

• **Para coletores.** Levando em conta igualmente a Figura 5 e a eq.(563), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M_{d_{sm}} + j\omega C_{d_{sm}} + K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{g^T} & 0 \\ K_{\phi d_{rm}} & K_{\phi\phi_{rz}} - \frac{j}{\omega}(K_{\sigma_{rz}} + Y_{\sigma_{rz}}) & 0 & A_{rx}^{H^T} \\ A_{vm}^g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (181)$$

em que $\omega = 2\pi f$ com f como a frequência de excitação em kHz (ver unidades da modelagem na seção 2.4.14) e a matriz $Y_{\sigma_{rz}} \in \mathbb{C}$, portanto:

$$Y_{\sigma_{rz}} = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} Y_{\sigma_{rz}}^e = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} \left[Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & r \neq z \vee r = z : (\phi_z \neq \Delta\phi^e \vee z \notin \Omega_c) \\ \left(\frac{1}{Z^e}\right)_{rz} & r = z : \phi_z = \Delta\phi^e, z \in \Omega_c \end{cases} \right]_e \quad (182)$$

Considerando uma impedância elétrica distribuída no eletrodo, $Y_{\sigma_{rz}}$ fica como:

$$Y_{\sigma_{rz}} = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} Y_{\sigma_{rz}}^e = \underset{e=1}{\overset{N}{A}} \left[Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\sum_{w=1}^{N_z} \left(\frac{1}{Z_{\phi}} \right)_w \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \right]_e \quad (183)$$

Como em atuadores, a equação matricial no domínio elétrico para coletores permanece na forma de carga elétrica Q . Na notação estendida a eq.(180) e a (181) são vistas como:

$$K_{IJ}^{\varpi} W_J^{\varpi} = F_I^{\varpi} \quad (184)$$

em que o sobrescrito ϖ faz referência ao problema harmônico de MEF.

2.4.13 MEF para a Análise Estática

A resposta estática é utilizada no projeto dinâmico de EPLA com MOT para avaliar a rigidez da EPLA mediante o termo denominado flexibilidade média ou “*mean compliance*” (ver seção 2.2.5) e que no caso dos coletores de energia, não leva em conta as impedâncias elétricas acopladas ao sistema. Discretizando a eq.(570) e a eq.(573) e considerando as modificações da eq.(600), o problema de MEF estático tem a forma:

- Para atuadores EPLA:

$$\begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^G{}^T \\ K_{\phi_{d_{rm}}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (185)$$

- Para coletores EPLA:

$$\begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^G{}^T & 0 \\ K_{\phi_{d_{rm}}} & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 & A_{rx}^H{}^T \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (186)$$

sendo que na notação estendida em ambos os casos pode ser expresso como:

$$K_{IJ}^{\Sigma} W_J^{\Sigma} = F_I^{\Sigma} \quad (187)$$

em que o sobrescrito Σ faz referência ao problema estático de MEF.

2.4.14 Sistema de Unidades Adotado no MEF

Neste trabalho foi adotado um sistema de unidades incomum com a finalidade de atenuar o mal condicionamento numérico derivado da utilização do Sistema Internacional (SI) para a expressar a magnitude dos termos envolvidos na análise de MEF e evitar, desse modo, instabilidades na solução. O sistema de unidades adotado é mostrado na Tabela 1.

Tabela 1 – Sistema de unidades adotado para a modelagem com MEF

Grandeza	Unidade SI	Unidade Adotada
Deslocamento	m	mm
Tempo	s	ms
Massa	kg	kg
Força	N	kN
Frequência	Hz	kHz
Frequência Angular	rad	krad/s
Carga Elétrica	C	μC
Corrente Elétrica	A	mA
Tensão Elétrica	V	MV
Impedância e Resistência Elétrica	Ω	G Ω
Indutância	H	MH
Capacitância	F	pF
Potência	W	kW

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA (OT)

Neste capítulo, são apresentados aspectos teóricos do MOT e a formulação do problema de otimização considerando duas abordagens: harmônica e transiente. A metodologia sistemática do trabalho proposto (ver Figura 20) trata o problema do projeto dinâmico genérico de EPLA com o MOT tendo como requisitos condições de contorno, modo e frequência de vibração, assim como a condição implícita da diminuição do tempo de resposta. Na otimização é considerando simultaneamente a quantidade de material de cada camada, o ângulo da fibra na camada compósita, a localização e a polarização do material piezelétrico. Como caso particular em coletores de energia, os componentes da impedância elétrica acoplada ao sistema são tratados como variáveis de projeto com a finalidade de que a transferência de potência elétrica gerada pelo material piezelétrico seja maximizada.

A gama de possibilidades é extensa, no entanto, neste trabalho se apresenta uma formulação com o intuito de atingir os requisitos descritos anteriormente, baseada na maximização da amplitude de vibração em pontos determinados (em atuadores) ou da geração de potência elétrica a partir de excitações mecânicas (em coletores de energia). O resultado esperado da aplicação do MOT ao processo de projeto é obter uma EPLA com maiores amplitudes de vibração, alta eficiência na conversão de energia, menor tempo de resposta, e um ótimo casamento da impedância elétrica no caso de coletores de energia.

O enfoque principal é o regime transiente (ver seções 3.6.2 e 3.7.2), porém é mostrado o enfoque harmônico (ver seções 3.6.1 e 3.7.1) com fins comparativos e é permitida a combinação desses dois regimes de excitação para alcançar certos objetivos de projeto (ver seções 3.6.3 e 3.7.3). No problema combinado, se aborda o projeto de EPLAS excitadas com diferentes formatos de onda e com a mesma magnitude da resposta independente do formato da excitação, levando em conta que as atuações nesses regimes não são simultâneas. A relação da energia de excitação entre os dois domínios envolvidos é caracterizada por um fator de excitação harmônico que será explicado convenientemente. A finalidade dessa formulação é mostrar que as respostas, harmônica e transiente, estão vinculadas de modo que a modificação de uma delas influencia a outra e vice-versa.

Figura 20 – Metodologia do trabalho proposto utilizando o MOT

3.1 Estado da Arte

A origem da OT remonta ao trabalho de Michell (1904), surgindo como método computacional destinado a projetar estruturas ótimas seguindo critérios de custo com Bendsøe e Kikuchi (1988), tratando nos seus inícios o problema da maximização da rigidez com restrição de volume de material. O trabalho de Michell (1904) é considerado o primeiro em OT de estruturas e foi retomado por Nagtegaal e Prager (1973); Prager (1974, 1978); Strang e Kohn (1983), entre outros. A introdução do conceito de materiais compósitos, com a finalidade de relaxar o problema de otimização discreto, estimulou o desenvolvimento de otimização em meios contínuos com trabalhos como Cheng (1981); Cheng e Olhoff (1982);

Lurie, Cherkaev e Fedorov (1982a, 1982b); Kohn e Strang (1986a, 1986b, 1986c). Pelo fato de que o problema de otimização na forma discreta não apresenta solução, têm sido utilizados enfoques de relaxação como em Bendsøe e Kikuchi (1988), onde é introduzido o método da homogeneização, técnica na qual o material adotado é um tipo de microestrutura parametrizada. Para uma revisão detalhada da teoria e implementação do método da homogeneização recomenda-se Hassani e Hinton (1998a, 1998b, 1998c).

Bendsøe (1989) introduz o modelo de material “*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*” (SIMP), denominado assim em Rozvany, Zhou e Birker (1992) ou método das densidades, que igualmente, permite a relaxação do problema de otimização mediante a parametrização das propriedades do material com relação à densidade. Uma revisão sobre o SIMP e a sua comparação com outros esquemas de interpolação de material é encontrada em Rozvany (2001). Suzuki e Kikuchi (1991) comprovaram a base matemática do MOT reproduzindo o resultado analítico obtido por Michell (1904) e implementaram alguns exemplos de otimização estrutural de maximização da rigidez com restrição de volume. Díaz e Bendsøe (1992) formularam o problema de maximização da rigidez em estruturas elásticas submetidas a cargas múltiplas não simultâneas e Thomsen (1992) ampliou o método para estruturas fabricadas com mais de um material.

Outros problemas tratados aplicando o MOT, na área estrutural, são: Projeto por impacto (HAJELA; LEE, 1994; MAYER; KIKUCHI; SCOTT, 1996), vibração em estruturas contínuas e restrições na frequência (ACHTZIGER; KOCVARA, 2008; MA; KIKUCHI; CHENG, 1995; XIE; STEVEN, 1996), estruturas com cargas de flambagem (NEVES; RODRIGUES; GUEDES, 1995), estruturas com restrições de tensão mecânica (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010; DUYSINX; BENDSØE, 1998), placas e discos submetidos à carga estática ou em vibração livre (KROG; OLHOFF, 1999), estruturas sob cargas periódicas (NISHIWAKI *et al.*, 2000), maximização de frequências de ressonância em placas (PEDERSEN, 2000), estruturas sujeitas a cargas dependentes do projeto (CHEN; KIKUCHI, 2001; DU; OLHOFF, 2004a, 2004b; HAMMER; OLHOFF, 2000; ZHENG; CHANG; GEA, 2009b). Recentemente, De Leon *et al.* (2015) trataram o problema de restrição de tensão mecânica em mecanismos flexíveis, Takezawa *et al.* (2016) propuseram a otimização de materiais amortecedores para a redução de vibrações no regime harmônico e Kiyono *et al.* (2016) apresentam uma nova formulação da norma p com o intuito de contornar o problema de concentração de tensões em regime estático.

O MOT tem sido aplicado em outras áreas do conhecimento, além dos problemas estruturais, entre os quais podem ser citados: Materiais e transdutores piezelétricos (KANG; WANG, 2010; KIYONO; SILVA; REDDY, 2012; KÖGL; SILVA, 2005; NAKASONE; SILVA, 2010; SILVA et al., 1999; SILVA; FONSECA; KIKUCHI, 1998; WADBRO; BERGGREN, 2006; ZHENG; CHANG; GEA, 2009a), projeto de mecanismos flexíveis (FRECKER et al., 1997; KOGISO et al., 2008; LARSEN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1997; NISHIWAKI et al., 1998; SIGMUND, 1997; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000), projeto de sistemas e dispositivos eletromagnéticos (BYUN et al., 2000; BYUN; LEE; PARK, 2004; YOO; KIKUCHI, 2000), construção de imagens de objetos sob influência de campos elétricos (CHUNG; CHEON; HAHN, 2000), microsistemas ETM (MOULTON; ANANTHASURESH, 2001; RUBIO et al., 2009; SARDAN et al., 2008; SIGMUND, 2001a, 2001b; YIN; ANANTHASURESH, 2002), projeto de reatores nucleares (ALLAIRE; CASTRO, 2001), projeto de motores de indução (WANG; KANG; NOH, 2004), projeto de dispositivos ópticos (JENSEN; SIGMUND, 2004, 2005), materiais com gradação funcional (FGM), (CARBONARI; SILVA; PAULINO, 2009; PAULINO; SILVA, 2005; PAULINO; SILVA; LE, 2009), microsistemas atuados eletrostaticamente (RAULLI; MAUTE, 2005), projeto de células de carga (TAKEZAWA *et al.*, 2010), interação fluido-térmica em sistemas com convecção forçada (YOON, 2010), interação fluido-estrutura em sistemas ETM (YOON, 2012) e levando em conta na formulação restrições de tensão mecânica (YOON, 2014).

Na literatura, são encontrados poucos trabalhos utilizando o MOT em problemas de estado transiente em geral, entre os quais se citam: Otimização de estruturas sob cargas dinâmicas aplicando o critério de optimalidade (MIN *et al.*, 1999), otimização de propriedades de material em problemas termoelásticos (TURTELTAUB, 2001), otimização de estruturas projetadas para impacto (PEDERSEN, 2004), projeto de atuadores térmicos e mecanismos de ajuste por pressão (“*snap-fit*”), (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004), projeto de materiais compósitos destinados a suportar cargas dinâmicas (TURTELTAUB, 2005), projeto de estruturas “*band-gap*” (DAHL; JENSEN; SIGMUND, 2008), projeto de microsistemas ETM com maximização simultânea do deslocamento e da velocidade de resposta (MELLO; SALAS; SILVA, 2012) e projeto de estruturas piezelétricas com controle ativo para a minimização de vibrações (ZHANG; KANG, 2014a).

Um recente trabalho de Lee e Park (2015) mostra a aplicação do MOT em estruturas com não linearidade geométrica e de material em regime transiente, porém a otimização é

feita mediante o método das cargas estáticas equivalentes e, desse modo, a complexidade do problema é reduzida pela solução de vários subproblemas de otimização linear em regime estático até alcançar um critério de convergência. Não obstante, o método das cargas estáticas equivalentes já tinha sido aplicado na análise transiente linear (JANG et al., 2012; KANG; CHOI; PARK, 2001).

3.2 Modelo de Material PEMAP-P

Quando aplicado o MOT ao projeto EPLA é requerido que a formulação do problema considere diferentes tipos de variáveis de projeto pelo fato de que são considerados processos simultâneos de otimização tanto na topologia quanto na polarização do material piezelétrico. Por essa razão, neste trabalho é adotado o modelo de Material “*PiezoElectric MAterial with Penalization and Polarization*” ou simplesmente PEMAP-P proposto por Kögl e Silva (2005). Nas EPLA, o material (que pode variar entre sólido e vazio) em cada ponto do domínio é representado pelas pseudo-densidades (ρ) e a polarização (que pode variar entre polarização positiva e negativa) pelas pseudo-polarizações (γ , chamadas assim neste trabalho) mediante a função discreta:

$$\chi(\Omega) = \begin{cases} \rho(\Omega) \begin{cases} 1, & \text{Material Sólido} \\ 0, & \text{Vazio} \end{cases} \\ \gamma(\Omega) \begin{cases} 1, & \text{Polarização Positiva} \\ 0, & \text{Polarização Negativa} \end{cases} \end{cases} \quad (188)$$

Contudo, o problema da distribuição de material e da polarização governada por uma função degrau (distribuição discreta) é mal-posto e com múltiplos mínimos locais. Assim, a eq.(188) requer que seja aproximada por funções contínuas durante o processo de otimização (distribuição contínua), de modo que o problema de otimização permita ser relaxado e possa ser obtida uma solução. O modelo de material PEMAP-P é fundamentado no modelo de material SIMP (“*Simple Isotropic Material with Penalization*”), também denominado modelo de material “fictício” ou “artificial” e igualmente método das densidades (BENDSØE, 1989; MLEJNEK, 1992; ZHOU; ROZVANY, 1991).

O modelo PEMAP-P estabelece o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio, a partir da pseudo-densidade e a propriedade do material base, e igualmente,

introduz uma segunda variável de projeto (pseudo-polarização) com a finalidade de descrever a polarização de cada ponto do material piezelétrico (KÖGL; SILVA, 2005). A finalidade da OT, utilizando o modelo de material PEMP-P é encontrar uma distribuição ótima do material mediante o controle simultâneo da densidade (tanto em materiais piezelétricos quanto não piezelétricos) e da polarização (somente em materiais piezelétricos) em cada elemento finito, portanto, as propriedades do material dependem da pseudo-densidade e da pseudo-polarização em cada elemento da discretização. O vetor que contém as variáveis de projeto é denominado χ_e , assim, o modelo pode ser expresso como:

$$\chi_e = \begin{Bmatrix} \rho_e \\ \gamma_e \end{Bmatrix} \quad (189)$$

$$\rho_1 = \rho_e^{P_m} \rho_1^o \quad (190)$$

$$C_{1ij}^E = \rho_e^{P_c} C_{1ij}^o \quad (191)$$

$$\epsilon_{0ij}^\epsilon = \rho_e^{P_\epsilon} \epsilon_{0ij}^o \quad (192)$$

$$e_{0ij} = \rho_e^{P_e} (2\gamma_e - 1)^{P_\gamma} e_{0ij}^o \quad (193)$$

em que ρ_e, γ_e são variáveis de projeto descrevendo a pseudo-densidade do elemento ($\rho_e \in [0,1]$), a pseudo-polarização do elemento ($\gamma_e \in [0,1]$); ρ_1^o é a densidade de massa do material base; $C_{1ij}^o, \epsilon_{0ij}^o, e_{0ij}^o$ são as matrizes do material base de elasticidade, de permissividade e de piezeletricidade; $P_m, P_c, P_\epsilon, P_e, P_\gamma$ são os fatores de penalização que permitem transformar o problema de otimização de natureza contínua num problema de natureza discreta e com P_γ sendo número ímpar inteiro. Para materiais não piezelétricos as matrizes ϵ_{0ij}^o e e_{0ij}^o são nulas.

3.2.1 Fatores de Penalização

Os valores dos fatores de penalização (P_i) ou penalizadores devem ser estabelecidos de modo que conduzam à redução das densidades intermediárias ou problema das escalas de

cinza e, além disso, evitem que as soluções finais resultem em mínimos locais (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999, 2003; ROZVANY; ZHOU; BIRKER, 1992). A magnitude dos fatores de penalização deve ser apropriada, já que se forem utilizados valores próximos de 1 aparecem escalas de cinza que dificultam a adequada interpretação dos resultados. No entanto, ao trabalhar com valores altos, como 10, surgem instabilidades numéricas, problemas de convergência e tendência do problema a retornar a sua natureza discreta (limitação dos valores de χ somente a 0 ou 1), (LAU; DU; LIM, 2001).

Em problemas piezelétricos, não existe uma regra definida para estabelecer o valor dos fatores de penalização, recorrendo a enfoques empíricos de tentativa e erro como visto em Kögl e Silva (2005); Kiyono, Silva e Reddy (2012) e Kiyono (2013). Nesses trabalhos, para contornar os mínimos locais é utilizado o método da continuação, onde o processo de otimização é iniciado com todos os penalizadores iguais a 1, incrementando esse valor ao longo das iterações até que cada fator alcance o seu valor máximo. Kim *et al.* (2010) formula a hipótese de que, no domínio piezelétrico, os fatores de penalização podem ser calculados a partir de condições necessárias derivadas de um problema analítico simples, cujos resultados podem ser extrapolados com certo grau de incerteza a modelos mais complexos. No entanto, no trabalho de Amstutz (2011) o cálculo dos fatores de penalização no domínio elástico é feito de forma exata via derivada topológica. Os valores utilizados para fatores de penalização neste trabalho podem ser vistos na seção 6.1.4.

3.3 Modelo de Interpolação Autopenalizável da Orientação da Fibra (MIAFIB)

Nos primeiros trabalhos de otimização de orientações de fibra foram abordados problemas de minimização de deslocamentos máximos, a maximização de frequências de ressonância e da rigidez, tendo como variáveis de projeto o ângulo de orientação e espessura das camadas e utilizando restrições de volume, tensão mecânica, valores na frequência natural de modos especificados ou carga crítica de flambagem (BRUYNEEL; FLEURY, 2002; SOARES *et al.*, 1995; SOARES; SOARES; MATEUS, 1995). Luo e Gea (1998) relataram que existe influência dos campos de tensão e deformação mecânica na solução do problema de orientação de fibras pelo fato de que podem existir ângulos que aumentem ou diminuam desproporcionadamente a rigidez de um ponto específico em relação a toda a estrutura. A

formulação desse trabalho é baseada em energia e o problema de otimização é resolvido pelo critério de optimalidade com o ângulo de orientação da fibra como variável de projeto.

Diversos trabalhos encontrados também utilizam o critério de optimalidade como Pedersen (2006); Khosravi e Sedaghati (2008) e Piat *et al.* (2011). No entanto, o ângulo de fibra tem sido tratado como variável de projeto discreta com algoritmos genéticos, pela sua vantagem de aumentar a probabilidade de encontrar um ponto ótimo global sem demandar o cálculo das sensibilidades (CONCEIÇÃO, 2006; KELLER, 2010; KIM; KIM; HONG, 1999; WALKER; SMITH, 2003), embora já tenha sido discutida a desvantagem desse tipo de algoritmos em OT quando utilizado um grande número de variáveis (SIGMUND, 2011).

Outros trabalhos focaram no emprego dos parâmetros de laminação como variáveis de projeto com a finalidade de otimizar indiretamente a orientação de ângulos discretos nas camadas do compósito, abordando problemas como flambagem utilizando algoritmos genéticos (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004), maximização da rigidez incluindo critérios de falha (IJSELMUIDEN; ABDALLA; GÜRDAL, 2008), flambagem com carregamentos simultâneos (DE FARIA, 2015) e perante cargas de impacto (BOHRER; DE ALMEIDA; DONADON, 2015). Stegmann e Lund (2005) propõem um modelo de material para compósitos nomeado “Otimização Discreta de Material” (ODM), que considera a variação do ângulo ponto-a-ponto e que reduz o problema de mínimos locais derivado da utilização direta do ângulo como variável de projeto, embora a quantidade de variáveis de projeto por elemento aumente linearmente com o número de ângulos candidatos. Mais tarde, Lund (2009) aplicou o ODM no problema de flambagem de estruturas laminadas. Topal (2009) otimizou frequências naturais e cargas críticas de flambagem, enquanto Lindgaard e Lund (2011) trabalharam em flambagem não linear. Ambos os trabalhos utilizam o ângulo de fibra como variável de projeto contínua.

Bruyneel (2011) parametriza as variáveis de projeto de orientação da fibra usando as funções de forma do elemento finito isoparamétrico de 4 nós, nomeando esse esquema “Parametrização por Funções de Forma” (PFF). No entanto, Gao, Zhang e Duysinx (2012) estendem a formulação do PFF para qualquer número de ângulos candidatos de modo que, o número de variáveis envolvidas no problema de otimização é reduzido logaritmicamente sendo esse método conhecido como “Parametrização por Codificação Binária” (PCB). Além disso, nos trabalhos de Kiyono; Silva e Reddy (2012, 2016) foram utilizados simultaneamente

os modelos de material PEMP-P e ODM em EPLAs considerando um regime estático e harmônico, respectivamente. Recentemente, Kiyono Silva e Reddy (2017) propuseram o modelo “Otimização de Fibra por Distribuição Normal” (OFDN) que utiliza a normalização dos pesos dos ângulos candidatos de Stegmann e Lund (2005), porém calculando esses pesos com uma função de distribuição normal possibilitando ter qualquer número de ângulos candidatos utilizando uma única variável de projeto por elemento. Contudo, a curva de distribuição normal é penalizada com um fator que decresce ao longo das iterações e cujo valor mínimo depende da precisão do computador utilizado. Além disso, é aplicado um filtro espacial para garantir a continuidade da fibra com a finalidade de facilitar o processo de manufatura.

Figura 21 – Comparação de número de variáveis por elemento entre métodos de interpolação de orientação de fibra em OT

Uma desvantagem importante nas formulações baseadas em parametrizações é a quantidade de variáveis de projeto por elemento. Nas formulações como a ODM (STEGMANN; LUND, 2005) e a PCB (GAO; ZHANG; DUYSINX, 2012), o número de variáveis de projeto depende do número de ângulos candidatos incidindo negativamente no custo computacional. No caso do modelo ODM a dependência é linear enquanto que para o

modelo PCB o número de variáveis segue um esquema logarítmico (ver Figura 21). Como visto anteriormente, existe um déficit de formulações de OT com ângulos de fibra como variável contínua, pois as abordagens baseadas em parametrizações permitem contornar o problema do mínimo local e estabelecem uma quantidade fixa de ângulos candidatos com múltiplas variáveis de projeto por elemento. Apesar disso, não se tem conhecimento até a data de nenhuma aplicação de OT envolvendo otimização de orientações de fibra na análise transiente.

Assim, neste trabalho é proposto um modelo de interpolação de orientação da fibra que permita obter distribuições de diferentes ângulos na mesma camada ortotrópica e controlar a precisão de tais ângulos, sendo esse modelo baseado na definição das funções seno e cosseno por séries de Taylor (THOMAS; FINNEY, 1996):

$$s = \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (194)$$

$$c = \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \quad (195)$$

em que é considerado que o ângulo $\theta \in]-\pi, \pi[$ tem sentido físico. Com a finalidade de evitar instabilidades numéricas no processo de otimização, é introduzida uma variável que parametriza θ_f em relação ao número π , de modo que:

$$\theta = \pi \hat{\theta} \therefore \hat{\theta} \in]-1, 1[\quad (196)$$

sendo $\hat{\theta}$ a variável de projeto contínua de orientação da fibra, chamada neste trabalho como pseudo-orientação e com a característica de ser única por cada elemento finito da camada ortotrópica (ver Figura 21). A função θ exclui os extremos do intervalo no seu domínio pelo fato de que embora $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$ sejam fisicamente equivalentes à orientação $\theta = 0$, constituem múltiplos mínimos das funções seno e cosseno. Consequentemente, a busca de um ângulo ótimo θ^* pode resultar num mínimo local da função objetivo do problema de otimização (STEGMANN; LUND, 2005). Os valores extremos do intervalo podem ser calculados de acordo à precisão requerida no ângulo da fibra θ de acordo à expressão:

$$\theta = \frac{\pi}{180 \times 10^b} \lfloor 180 \times 10^b \hat{\theta} + 0,5 \rfloor \therefore -1 < \hat{\theta} < 1 \quad (197)$$

sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a notação correspondente à função piso e b o número de casas decimais desejadas para o ângulo θ quando for expresso em graus, adotando neste trabalho $b = 0$, ou seja, o domínio de θ é o conjunto dos números inteiros $\theta = \{\theta : \theta \in \mathbb{Z} \wedge -179^\circ \leq \theta \leq 179^\circ\}$. Alternativamente para a variável de pseudo-orientação $\hat{\theta}$, os valores extremos do seu domínio podem ser determinados por:

$$\hat{\theta} = \frac{\lfloor \hat{\theta} \times 10^b + 0,5 \rfloor}{180 \times 10^b} \therefore -180^\circ < \theta < 180^\circ \quad (198)$$

Assim, o objetivo da OT, utilizando o modelo de material MIAFIB é encontrar uma distribuição ótima do material ortotrópico mediante o controle simultâneo da densidade e da orientação da fibra em cada elemento finito da camada do substrato, deste modo, o tensor de módulo elástico depende das variáveis de projeto de pseudo-densidade e pseudo-orientação. Assim, o modelo de material MIAFIB para o tensor de módulo elástico de um elemento finito com material ortotrópico combinado com o modelo SIMP pode ser expresso como:

$$C_{1ij}^E = \rho_e^{P_c} T_{\theta ik}^T C_{1km}^O T_{\theta mj} \quad (199)$$

sendo $T_{\theta mj}$ a matriz de rotação, definida como (COOK, 1995):

$$T_{\theta mj} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (200)$$

em que:

$$c = \cos \theta = \sum_{P_f=0}^{P_{fmax}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f)!} (\pi \hat{\theta})^{2P_f} \quad (201)$$

$$s = \sin \theta = \sum_{P_f=0}^{P_{f\max}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f+1)!} (\pi\hat{\theta})^{2P_f+1} \quad (202)$$

sendo P_f o fator de penalização do modelo de material MIAFIB que assume valores inteiros entre 0 e $P_{f\max}$. O modelo é considerado autopenalizável pelo fato de que sua definição é baseada numa série convergente em que a variável de projeto de pseudo-orientação encontra-se elevada a certa potência inteira em cada termo. Portanto, é possível contornar mínimos locais incluindo progressivamente no processo de otimização, um número predefinido de termos da série do seno e cosseno no cálculo da matriz de rotação $T_{\theta_{mj}}$. Esse processo é semelhante ao método da continuação utilizado nas variáveis de pseudo-densidade como descrito na seção 3.2.1. Além disso, o modelo MIAFIB pode ser combinado com uma função de penalização de ortogonalidade da fibra proposta também neste trabalho (ver seção 4.7) para garantir a continuidade da fibra.

A vantagem do modelo MIAFIB em relação a outros esquemas de interpolação consiste em que para um determinado número b de casas decimais é preciso somente avaliar como máximo na iteração atual $N_{\theta_{\max}} = 360 \times 10^b - 1$ vezes a matriz de $T_{\theta_{mj}}$. O número N_{θ} é conhecido em cada iteração, pois os ângulos resultantes $\theta = \pi\hat{\theta}$ da iteração anterior são organizados de forma ascendente. Assim, a matriz $T_{\theta_{mj}}$ não é calculada N_f vezes igual ao número de elementos finitos afetados pelo modelo MIAFIB poupando esforço computacional, lembrando que existe uma única variável de projeto por orientação de fibra. Cabe salientar que, com 3 ou 4 termos das eq.(201) e eq.(202), a estimativa do valor da função $\sin \theta$ ou $\cos \theta$ é de menos do que 10% do valor exato, porém para uma maior precisão no cálculo das sensibilidades é necessário adicionar mais termos (ver seção 6.1.4), não obstante, sempre é utilizado o mesmo número de termos em todo o processo de otimização. Por fim, o novo vetor χ_a de variáveis de projeto é:

$$\chi_a = \begin{Bmatrix} \rho_e \\ \gamma_e \\ \hat{\theta}_e \end{Bmatrix} \quad (203)$$

3.4 Modelo de Interpolação Linear das Impedâncias Elétricas Acopladas em Coletores de Energia (MILZEL)

Os circuitos acoplados a EPLAs em aplicações de colheita de energia têm-se limitado à exploração de circuitos puramente resistivos com parâmetros concentrados e em regimes estáticos e harmônicos (KIYONO; SILVA; REDDY, 2016; RUPP, 2009; RUPP et al., 2009) não sendo encontrado até agora problemas de estado transiente envolvendo OT nem utilizando circuitos RLC nesse contexto. Contudo, RUPP *et al.* (2009a) formula a possibilidade de considerar um valor concentrado de impedância elétrica na diagonal da matriz dielétrica de MEF ou de acoplar todos os GDL do eletrodo na equação de parâmetros concentrados do circuito enquanto no trabalho de Kiyono; Silva; Reddy (2016) é considerado um único valor na diagonal da matriz dielétrica.

Não obstante, em RUPP *et al.* (2009a) cabe ressaltar dois fatos importantes: a sua formulação é generalizada para circuitos RLC em série, mas não é mostrada essa configuração nos resultados numéricos e o circuito acoplado em realidade é um circuito RC em paralelo, sendo o resistor interpolado por uma função não linear procurando a maximizar a potência gerada enquanto a função do capacitor é manter a capacitância do sistema constante, evitando assim que a camada piezelétrica fique completamente coberta de material, ou seja, sem ser afetada pelo processo de otimização. Neste trabalho não são utilizados elementos de impedância “*dummies*” para contornar essa dificuldade, ao invés disso, são formuladas restrições de volume de material na camada piezelétrica (ver seção 4.2).

Em coletores de energia, os valores dos componentes do circuito elétrico acoplado são de ordens de grandeza muito diferentes. Enquanto os resistores podem ser da ordem de dezenas ou centenas de $k\Omega$, os indutores podem estar na faixa de centenas de μH e os capacitores no intervalo de centenas de pF. Portanto, realizar processos de otimização com ordens de grandeza discrepantes pode ocasionar instabilidades numéricas no algoritmo utilizado, dificultando chegar numa solução factível (RUPP, 2009; RUPP et al., 2009). Deste modo, é proposto um modelo de interpolação linear de tais variáveis de projeto, com a forma:

$$Z = (Z_{\max} - Z_{\min})\hat{Z} + Z_{\min} \therefore \hat{Z} = \hat{R}, \hat{L}, \hat{C} \quad (204)$$

em que Z representa um elemento de impedância elétrica do circuito acoplado podendo ser um resistor R , um indutor L ou um capacitor C . $Z_{\max}$ e $Z_{\min}$ são os valores máximo e mínimo da impedância representada por Z e $\hat{Z} \in [0,1]$ é a variável de projeto de pseudo-impedância, chamada assim neste trabalho. Do mesmo modo, $\hat{Z}$ pode representar um pseudo-resistor $\hat{R}$, um pseudo-indutor $\hat{L}$ ou um pseudo-capacitor $\hat{C}$. O valor de $R_{\min}$ é definido sempre $R_{\min} > 0$, pois não existem na prática, circuitos reais puramente indutivos ou capacitivos. O vetor de variáveis de projeto para coletores de energia com N_z circuitos acoplados será:

$$\psi_c = \begin{Bmatrix} \chi_e \\ \hat{R}_w \\ \hat{L}_w \\ \hat{C}_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_e \\ \gamma_e \\ \hat{\theta}_e \\ \hat{R}_w \\ \hat{L}_w \\ \hat{C}_w \end{Bmatrix} \quad (205)$$

lembrando que o índice w varia entre 1 e N_z .

3.5 Técnicas de Solução Para as Instabilidades Numéricas

A implementação do MOT origina instabilidades numéricas que são amplamente descritas em Sigmund e Petersson (1998) e Bendsøe e Sigmund (2003). A dependência da malha e o problema da instabilidade de tabuleiro podem ser contornados mediante a adição de restrições locais (POULSEN, 2002, 2003) com a finalidade de controlar diretamente o contato entre cantos dos elementos finitos.

Outros enfoques utilizam funções agindo como filtro diretamente nas sensibilidades (ANDREASSEN et al., 2011; SIGMUND, 2001c). Igualmente, as escalas de cinza podem ser suprimidas pela adequada seleção dos fatores de penalização como mencionado anteriormente na seção 3.2.1 ou pela modificação da função objetivo com termos penalizadores (ANANTHASURESH, 2003; YIN; ANANTHASURESH, 2002). Essas técnicas serão mostradas com maior detalhamento nas seções 4.5 e 4.6.

3.6 Formulação do Problema de OT para Atuadores EPLA

No projeto de atuadores EPLA devem ser considerados requisitos cinemáticos e estruturais dependendo do domínio da solução. Os requisitos cinemáticos estão associados com a maximização das amplitudes de vibração enquanto que os estruturais perseguem a continuidade da estrutura de modo a garantir certa rigidez no sistema (ver seção 3.8). Neste trabalho, foram implementados separadamente os problemas harmônico e transiente visando uma formulação combinada (ver seção 3.6.3) com a finalidade de aproveitar as vantagens destas abordagens.

Figura 22 – Problema de otimização no projeto de atuadores EPLA

Ambas as formulações são baseadas no modelo da Figura 22, sendo que o subdomínio com material piezelétrico é $\Omega_{pie} = \Omega_1$ enquanto o subdomínio com material não piezelétrico é $\Omega_{snp} = \Omega_2 \cup \Omega_3$. A notação Ω_{spie}^{min} , Ω_{snp}^{min} e Ω_{spie}^{max} , Ω_{snp}^{max} corresponde aos volumes mínimos e máximos desejados para as camadas piezelétricas e não piezelétricas, respectivamente. A variável de projeto é a função vetorial $\chi = \{\rho \quad \gamma \quad \hat{\theta}\}^T$ cujas componentes são a função ρ de

pseudo-densidade do material, a função γ de pseudo-polarização e a função $\hat{\theta}$ de pseudo-orientação (ver seções 3.2 e 3.3). A formulação aqui apresentada trata com atuadores EPLA com uma única excitação elétrica e um único deslocamento de saída, no entanto, pode ser estendida para problemas de múltiplas excitações elétricas ou múltiplos deslocamentos de saída.

3.6.1 Formulação do Problema para Atuadores no Domínio da Frequência

Os requisitos cinemáticos consistem em maximizar a amplitude do deslocamento em pontos específicos da estrutura ao longo de certa direção (projeto de modo de vibração), quando uma diferença de potencial da forma $\Delta\phi = \Delta\phi_{in}^{\omega}(V_{\omega}, \omega) = V_{\omega}e^{j\omega t}$ é aplicada sobre as camadas de material piezelétrico. Tanto a amplitude do sinal elétrico V_{ω} quanto à frequência de excitação ω , são parâmetros de entrada independentes das variáveis de projeto. Os requisitos estruturais consistem em garantir certa rigidez à estrutura, dado que o objeto manipulado (peça de trabalho ou peça atuada) exerce uma reação que afeta todo o sistema. O requerimento estrutural pode ser atingido maximizando a rigidez da EPLA, de modo que, seja alcançada a continuidade de material no sistema (ver seção 3.8).

Assim, o problema de projeto consiste em distribuir material (piezelétrico e não piezelétrico) num domínio fixo e simultaneamente estabelecer a polarização do material piezelétrico e a orientação das fibras do material ortotrópico, de modo que sejam maximizadas as amplitudes de deslocamento $\|u_{out}^{\omega}\|$ em pontos específicos da estrutura e a rigidez do sistema. Além disso, são levadas em conta as restrições de algumas áreas do domínio de projeto que podem ser vazias ou de material sólido sendo, portanto, regiões não otimizáveis (ver Figura 22). Ao mesmo tempo, podem existir restrições na quantidade de material piezelétrico e não piezelétrico. Dessa forma, o problema de otimização para o projeto de atuadores EPLA no domínio da frequência é definido como:

$$\max_{\chi} F_{OBJ}^{A\omega} = w_{\omega} \|u_{out}^{\omega}(\chi, \Delta\phi)\|^2 - w_c \ln \left(C_m^{\Sigma}(\chi, t_i^{\Sigma p}) \right) = w_{\omega} u_{i_{out}}^{\omega} u_{i_{out}}^{\omega} - w_c \ln \left(\int_{\Gamma_t} t_i^{\Sigma p} u_{i_{out}}^{\Sigma} d\Gamma_t \right) \quad (206)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{\text{spie}}^{\min} \leq \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{\text{pie}} \leq \Omega_{\text{spie}}^{\max} & (\text{Restrição de volume do mat. piezelétrico}) \\ \Omega_{\text{snp}}^{\min} \leq \int_{\Omega_{\text{np}}} \rho d\Omega_{\text{np}} \leq \Omega_{\text{snp}}^{\max} & (\text{Restrição de volume do mat. não piezelétrico}) \\ 0 \leq \rho \leq 1 & (\text{Restrições de caixa para as}) \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & (\text{variáveis de projeto}) \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \\ \text{Equações de equilíbrio harmônico} & (\text{eq.(34) a eq.(36)}) \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & (\text{eq.(40) a eq.(45)}) \end{array} \right. \quad (207)$$

sendo utilizado na eq.(206) o fato de que $\|u_i^{\bar{\omega}}\| = \sqrt{u_i^{\bar{\omega}} u_i^{\bar{\omega}*}}$ e, por sua vez, que o operador norma ($\|\cdot\|$) permite a conversão da resposta do sistema ($u_i^{\bar{\omega}} = y_i e^{j\omega t}$) da natureza complexa para o domínio dos números reais. O termo C_m^{Σ} é a flexibilidade média ou parâmetro de rigidez do sistema calculado a partir da resposta estática (ver seção 3.8). A função $\ln(x)$ é utilizada para diminuir o efeito de diferentes ordens de grandeza dos termos envolvidos na função objetivo. A restrição de volume atua como limitante da quantidade de material piezelétrico e não piezelétrico na EPLA, (ver Figura 22) e os termos $\int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{\text{pie}}$ e $\int_{\Omega_{\text{np}}} \rho d\Omega_{\text{np}}$ são os volumes de material obtidos depois da otimização e dependem dos valores das variáveis de projeto de pseudo-densidade (ρ). Portanto, a energia fornecida ao sistema é limitada pela quantidade de material piezelétrico alocado na EPLA. $w_{\bar{\omega}}$ e w_C são pesos que ponderam a relevância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8).

3.6.2 Formulação do Problema para Atuadores no Domínio do Tempo

No problema transiente, os requisitos cinemáticos consistem em maximizar a amplitude do deslocamento u_{out}^{τ} num intervalo de tempo t_f , em pontos específicos da estrutura ao longo de certa direção, quando sobre as camadas de material piezelétrico é aplicada uma diferença de potencial representada por:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{\text{in}}^{\tau}(t) = \begin{cases} V_{\tau} & \forall 0 \leq t_p \leq t \leq t_f \leq t_s \leq \frac{T_{\text{exc}}}{2} \\ 0 & \forall t > t_f \end{cases} \quad (208)$$

que corresponde a um formato de degrau, podendo simular o comportamento de uma onda quadrada se for periódica, em que a amplitude V_τ e o tempo t_f são parâmetros de entrada independente das variáveis de projeto. Se a excitação fosse um ciclo completo de uma onda quadrada com frequência $f_{exc} = \frac{1}{T_{exc}}$ (ver Figura 22), é desejável que a duração da resposta transiente dada por t_s seja menor o igual $\frac{T_{exc}}{2}$, para que no meio ciclo restante o sistema comece desde as condições de repouso e a sua resposta seja da mesma magnitude, mas no sentido oposto. As ondas quadradas são usualmente utilizadas em eletrônica em aplicações em que são necessários pulsos ou transições de níveis de sinal sem passar por estágios intermediários sendo facilmente geradas pela superposição de harmônicos de frequência ímpar. A amplitude da tensão elétrica V_τ da excitação degrau no regime transiente é o valor RMS⁴ da excitação no regime harmônico dada por:

$$V_\tau = \frac{V_\omega}{\sqrt{2}} \quad (209)$$

em que V_ω é a amplitude da tensão elétrica no regime harmônico. Assim, é fornecida a mesma quantidade de energia de entrada para ambos os regimes e os resultados são comparáveis.

Dado que a resposta no tempo de um EPLA é de segunda ordem (ver seção 2.3), o valor de t_f deve ser maior do que o instante de tempo t_p em que se produz o primeiro pico da resposta ou “*maximum overshoot*” (ver Figura 22), com a finalidade de que a função objetivo opere simultaneamente sobre amplitude de vibração e a velocidade de resposta do sistema caracterizada pelo tempo de subida t_r . Estabelecendo $t_f \geq t_p$ é possível caracterizar toda a resposta transiente e, portanto, t_f pode ser menor que o tempo de estabilização t_s diminuindo dessa forma a complexidade de cálculo. A maximização da velocidade de resposta é abordada de forma indireta, pelo fato de que a maximização da área sob a curva de deslocamento no tempo, não garante que o tempo de subida t_r seja minimizado. O tempo t_f para o problema de otimização em atuadores é calculado neste trabalho como:

$$t_f = \min\left(\frac{4.75\pi}{\omega_1}, \frac{T_{exc}}{2}\right) \quad (210)$$

⁴ RMS (Root Mean Square) ou valor eficaz é definido como o valor de tensão elétrica continua que produz a mesma potência que sua análoga alternada.

sendo ω_1 a frequência fundamental calculada a partir do problema de autovalor formulado pelas eq.(23) a eq.(28) e considerada que não depende das variáveis de projeto. O requisito estrutural é, como no problema harmônico, garantir certa rigidez à estrutura que permita obter a continuidade de material no sistema e atuar sobre a peça de trabalho, podendo esse requisito ser alcançado pela maximização da rigidez da EPLA (ver seção 3.8).

Portanto, o problema de projeto consiste em distribuir material (piezelétrico e não piezelétrico) num domínio fixo e, ao mesmo tempo, estabelecer a polarização do material piezelétrico e a orientação das fibras do material ortotrópico, com o intuito de que sejam maximizadas as amplitudes de deslocamento transiente u_{out}^T num intervalo de tempo t_f , em pontos específicos da estrutura e ao longo de certa direção. Igualmente, a solução do problema de otimização aponta junto com o objetivo anterior, à maximização da velocidade de resposta da EPLA e da rigidez da estrutura. Quando incluído o estado transiente no projeto de EPLA com MOT, a otimização é realizada desde o instante em que se inicia a excitação até um instante de tempo determinado. Assim, é empregado todo o intervalo de tempo tanto para maximizar a amplitude de deslocamento quanto para aprimorar a velocidade de resposta, apesar de que esta última seja maior quando comparada com outros tipos de atuação (como a eletrotermomecânica, por exemplo). Deste modo, o problema de otimização para o projeto de atuadores EPLA no domínio do tempo é proposto como:

$$\begin{aligned} \max_{\chi} F_{OBJ}^A = & w_{\tau} \left[\int_0^{t_f} u_{out}^T(t, \chi, \Delta\phi) dt \right]^2 + w_R [u_{out}^R(t_r, \chi, \Delta\phi)]^2 - w_C \ln C_m^{\Sigma}(\chi, t_i^{\Sigma p}) = \\ & w_{\tau} \left[\int_0^{t_f} u_{i, out}^T \hat{e}_i dt \right]^2 + w_R [u_{i, out}^T \hat{e}_i(t_r)]^2 - w_C \ln \left(\int_{\Gamma_t} t_i^{\Sigma p} u_{i, out}^{\Sigma} d\Gamma_t \right) \end{aligned} \quad (211)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{pie} \leq \Omega_{spie} & \text{(Restrição de volume do mat. piezelétrico)} \\ \int_{\Omega_{np}} \rho d\Omega_{np} \leq \Omega_{snp} & \text{(Restrição de volume do mat. não piezelétrico)} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \text{(Restrições de} \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{caixa para as} \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \text{variáveis de projeto)} \\ \text{Equações de equilíbrio transiente} & \text{(eq.(12), eq.(13), eq.(16) a eq.(22))} \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & \text{(eq.(40) a eq.(45))} \end{array} \right. \quad (212)$$

em que $u_{i\text{out}}^\tau$ são as componentes do deslocamento de saída no regime transiente, $\hat{e}_i$ é um vetor unitário na direção de maximização do deslocamento e $u_{\text{out}}^R = u_{\text{out}}^\tau(t_r)$ é o deslocamento no tempo de subida t_r . O termo integral maximiza a área sob a curva de deslocamento no tempo, agindo simultaneamente sobre a amplitude de vibração e sobre a inclinação inicial da curva delimitada entre $t = 0$ e o tempo de subida $t = t_r$ sem garantir que a velocidade de resposta seja aumentada. Portanto, é incluso o segundo termo da função objetivo que maximiza de forma indireta a velocidade de resposta da EPLA, pois não há uma dependência explícita do tempo de resposta em relação às variáveis de projeto. A ideia é que u_{out}^R seja explicitamente maximizado, de modo que, uma variação na inclinação da curva por causa de um aumento no deslocamento em $t = t_r$ conduza a uma redução no tempo de resposta. Não obstante, conhecendo o primeiro pico da resposta é possível estimar u_{out}^R mediante a expressão:

$$u_{\text{out}}^R = \frac{u_{\text{out}}^P}{1+M_p} = \frac{u_{\text{out}}^P}{1+e^{-\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}} \quad (213)$$

em que $u_{\text{out}}^P = u_{\text{out}}^\tau(t_p)$ é o deslocamento no tempo de pico t_p . O termo C_m^Σ é minimizado visando à continuidade de material na EPLA incidindo no aumento da rigidez do sistema (ver seção 3.8). Como no problema harmônico, são utilizadas restrições de volume segundo o tipo de material da EPLA. w_τ , w_R e w_C são pesos que ponderam a relevância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8).

3.6.3 Formulação Combinada do Problema Dinâmico para Atuadores

Aproveitando as vantagens da abordagem harmônica e transiente é possível formular um problema de otimização que permita customizar a resposta do atuador EPLA com a finalidade de mostrar que as respostas, harmônica e transiente, estão relacionadas de modo que a variação de uma delas influencia a outra e vice-versa. A formulação apresentada é uma possível de infinitas possibilidades conforme as necessidades de projeto. Neste problema, as EPLAS são excitadas eletricamente com diferentes formatos de onda, uma onda senoidal de frequência especificada ω (tratada como um problema de regime harmônico) e uma excitação do tipo degrau (abordada como um problema de regime transiente), que simula uma onda

quadrada (formato que além da sinusoidal é comumente encontrada em eletrônica) de meio período e com igual frequência do que a onda senoidal (ver Figura 23). A formulação visa à maximização das amplitudes de vibração da EPLA na frequência ω , e, ao mesmo tempo, que o nível da resposta transiente estabilizada seja igual à amplitude das vibrações do movimento harmônico (ver Figura 23), salientando que, as excitações não são aplicadas simultaneamente. Deste modo, os atuadores EPLA resultantes serão “multi-entrada” em que a diferença entre a energia utilizada no regime harmônico e no regime transiente é conhecida.

Além disso, os requisitos estruturais são mantidos de modo a garantir certa rigidez no sistema (ver seção 3.8) e são conservadas as restrições de volume tanto para materiais piezelétricos quanto não piezelétricos. É desejável que, a duração da resposta transiente dada por t_s seja menor ou igual $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, assim que no meio ciclo seguinte o sistema comece desde as condições estacionárias e a sua resposta seja da mesma magnitude, porém no sentido contrário. Contudo, não existe uma restrição sobre o tempo de estabilização t_s , prevendo que a limitação do domínio viável do problema impeça encontrar uma solução satisfatória. As amplitudes da tensão elétrica na análise transiente e harmônica são dadas respectivamente por:

$$V_\tau = \frac{V_{exc}}{\sqrt{2}} \quad (214)$$

$$V_\omega = A_\omega V_{exc} \quad (215)$$

em que V_{exc} é o valor da voltagem elétrica de excitação independente das variáveis de projeto e A_ω é uma variável de projeto escalar introduzida com o objetivo de controlar a diferença da energia utilizada entre os domínios envolvidos. A variável escalar A_ω modifica a eq.(35) de condições de contorno essencial, fazendo que:

$$W_J = A_\omega W_J^p \text{ sobre } \Gamma_W, \quad \forall W_J \in \mathcal{W} = \left\{ \mathcal{W} \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : W_J \Big|_{(\Gamma_W, t)} = A_\omega W_J^p \right\} \quad (216)$$

sendo A_ω denominado neste trabalho como fator de excitação harmônica. No entanto, a ordem de grandeza da variável A_ω não é conhecida a priori, podendo isso causar instabilidades numéricas no algoritmo de otimização se houverem grandes discrepâncias

quando comparada com as ordens de grandeza das outras variáveis de projeto envolvidas no problema. Assim, é proposto um modelo de interpolação linear definido como:

$$A_{\omega} = (A_{\omega_{\max}} - A_{\omega_{\min}})\hat{A}_{\omega} + A_{\omega_{\min}} \quad (217)$$

em que $A_{\omega_{\min}}$ e $A_{\omega_{\max}}$ são os limites inferior e superior para A_{ω} , de modo que, a excitação no modelo harmônico não seja nula ou infinita e $\hat{A}_{\omega} \in [0,1]$ é uma variável de projeto escalar denominada pseudo-fator de excitação harmônica.

Figura 23 – Customização da resposta no problema de otimização combinado para o projeto de atuadores EPLA

Deste modo, o problema de projeto consiste em distribuir material (piezelétrico e não piezelétrico) e, igualmente, estabelecer a polarização do material piezelétrico e a orientação das fibras do material ortotrópico, com o intuito de:

- Maximizar as amplitudes de deslocamento $\|u_{out}^{\omega}\|$ no regime harmônico em pontos específicos da estrutura ao longo de certa direção.
- Maximizar as amplitudes de deslocamento transiente u_{out}^{τ} num intervalo de tempo t_f , nos mesmos pontos e direções especificados no domínio harmônico.

- Minimizar o tempo de resposta de forma indireta mediante a maximização do deslocamento transiente no tempo de subida u_{out}^R .
- Maximizar a rigidez da EPLA mediante a minimização da flexibilidade média C_m^Σ (ver seção 3.8)
- Controlar a energia da excitação através do fator de excitação harmônica A_ω , visando que o deslocamento de estabilização $u_{out}^S = u_{out}^R$ do problema transiente seja igual à amplitude de vibração do problema harmônico $\|u_{out}^\omega\|$.

O problema de otimização pode ser descrito como:

$$\max_{\psi} F_{OBJ}^{AD} = w_\omega \|u_{out}^\omega\|^2 + w_\tau \left[\int_0^{t_f} u_{out}^\tau dt \right]^2 + w_R u_{out}^R{}^2 - w_C \ln(C_m^\Sigma) - w_D \left[\left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^R} \right)^2 - 1 \right]^2 \quad (218)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{pie} \leq \Omega_{spie} & \text{(Restrição de volume do mat. piezelétrico)} \\ \int_{\Omega_{np}} \rho d\Omega_{np} \leq \Omega_{snp} & \text{(Restrição de volume do mat. não piezelétrico)} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{(Restrições de} \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \text{caixa para} \\ 0 \leq \hat{A}_\omega \leq 1 & \text{as variáveis} \\ & \text{de projeto)} \\ \text{Equações de equilíbrio transiente} & \text{(eq.(12), eq.(13), eq.(16) a eq.(22))} \\ \text{Equações de equilíbrio harmônico} & \text{(eq.(34), eq.(36) e eq.(216))} \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & \text{(eq.(40) a eq.(45))} \end{array} \right. \quad (219)$$

em que a variável de projeto é a função vetorial $\psi = \{\chi \ \hat{A}_\omega\}^T = \{\rho \ \gamma \ \hat{\theta} \ \hat{A}_\omega\}^T$, cuja componente $\hat{A}_\omega$ é uma variável escalar da função do fator de excitação harmônica (ver eq.(217)). Consequentemente, o controle da diferença da energia pode ser possível, com a minimização do termo $\left[\left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^R} \right)^2 - 1 \right]^2$, sendo desejável que seja nulo. Além disso, os pesos w_ω , w_τ , w_R , w_C e w_D ponderam a relevância de cada objetivo na função F_{obj}^{AD} e devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8). Os termos restantes foram explicados nas seções 3.6.1 e 3.6.2.

Neste trabalho, foram propostos separadamente dois problemas baseados no modelo da Figura 24 (harmônico e transiente), visando uma formulação combinada com o intuito de aproveitar as vantagens das abordagens anteriores (ver seção 3.7.3). A impedância Z é equivalente à de um circuito elétrico RLC, sendo que os seus elementos constitutivos podem agir como variáveis de projeto. O subdomínio com material piezelétrico é $\Omega_{\text{pie}} = \Omega_1$ enquanto o subdomínio com material não piezelétrico é $\Omega_{\text{snp}} = \Omega_2 \cup \Omega_3$. Os termos $\Omega_{\text{spie}}^{\min}, \Omega_{\text{snp}}^{\min}$ e $\Omega_{\text{spie}}^{\max}, \Omega_{\text{snp}}^{\max}$ se referem aos volumes mínimos e máximos desejados para as camadas piezelétricas e não piezelétricas, respectivamente. Cabe lembrar que a notação Ω_c é o domínio do circuito elétrico representado pela quantidade N_z de circuitos. A variável de projeto é a função vetorial $\psi = \{\chi \quad \hat{R} \quad \hat{L} \quad \hat{C}\}^T = \{\rho \quad \gamma \quad \hat{\theta} \quad \hat{R} \quad \hat{L} \quad \hat{C}\}^T$, cujas componentes são a função ρ de pseudo-densidade do material, a função γ de pseudo-polarização, a função $\hat{\theta}$ de pseudo-orientação e as funções $\hat{R}, \hat{L}$ e $\hat{C}$ de pseudo-impedância dos componentes do circuito RLC (ver seções 3.2 à 3.4). Não são impostas restrições de tensão mecânica devido à sua alta complexidade derivada do grande número de restrições altamente não lineares que devem ser introduzidas na formulação do problema (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010). A formulação proposta aborda coletores de energia EPLA com uma única excitação mecânica e um único eletrodo para a saída de potência elétrica, contudo, tal formulação pode ser estendida para problemas de múltiplas excitações mecânicas ou múltiplos eletrodos.

3.7.1 Formulação do Problema para Coletores de Energia no Domínio da Frequência

Os requisitos de demanda de potência elétrica consistem em maximizar a potência ativa média $\overline{\text{Pot}}_a^{\omega}$ consumida pela impedância Z , quando uma força harmônica aplicada $P_i^{\text{exc}} = P_{i\text{in}}^{\omega}(P_i^{\omega}, \omega) = P_i^{\omega} e^{j\omega t}$ age num ponto específico da estrutura numa certa direção. Tanto as componentes P_i^{ω} da excitação quanto a sua frequência ω , são parâmetros de entrada independentes das variáveis de projeto. Os requisitos estruturais consistem em garantir certa rigidez à estrutura com a finalidade de evitar a formação de ilhas de material nas camadas. O requerimento estrutural pode ser atingido maximizando a rigidez da EPLA, de modo que, seja garantida a continuidade de material no sistema (ver seção 3.8). Portanto, o problema de projeto consiste em distribuir material (piezelétrico e não piezelétrico) num domínio fixo e simultaneamente estabelecer a polarização do material piezelétrico e a orientação das fibras

do material ortotrópico, de modo que seja maximizada a magnitude da potência ativa média $\overline{\text{Pot}}_a^\omega$. Além disso, são levadas em conta as restrições de algumas áreas do domínio de projeto que podem ser vazias ou de material sólido sendo, portanto, regiões não otimizáveis (ver Figura 24). Os elementos constitutivos do circuito RLC podem ser considerados variáveis de projeto conforme aos requisitos do projeto, salientando que não existem restrições que condicionem o casamento de impedâncias ou a máxima transferência de potência, fatores que incidem na eficiência do sistema (DURNEY; HARRIS; ALLEY, 1982; JONES, 1995).

A formulação proposta também é válida se a excitação for efetuada por um deslocamento harmônico prescrito $u_i^p = u_{i\text{in}}^\omega(u_i^\omega, \omega) = u_i^\omega e^{j\omega t}$ agindo num ponto específico da estrutura numa certa direção, como no caso de uma de uma excitação com um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. Dessa forma, o problema de otimização para o projeto de coletores EPLA no domínio da frequência é definido como:

$$\begin{aligned} \max_{\psi} F_{\text{OBJ}}^{\text{C}\omega} &= w_\omega \overline{\text{Pot}}_a^\omega(\psi, \phi_{\text{out}}^\omega(\psi, P_i^{\text{exc}}), Y(\psi, \omega)) - w_C \ln \left(C_m^\Sigma(\psi, t_i^{\Sigma p}) \right) = \\ &w_\omega \left[\frac{1}{2} (\|\phi_{\text{out}}^\omega\| \|Y\|)^2 R \right] - w_C \ln \left(\int_{\Gamma_t} t_i^{\Sigma p} u_{i\text{out}}^\Sigma d\Gamma_t \right) \end{aligned} \quad (220)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{\text{pie}} \leq \Omega_{\text{spie}} & \text{(Restrição de volume do mat. piezelétrico)} \\ \int_{\Omega_{\text{np}}} \rho d\Omega_{\text{np}} \leq \Omega_{\text{snp}} & \text{(Restrição de volume do mat. não piezelétrico)} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{(Restrições de caixa para as} \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \text{variáveis de projeto)} \\ 0 \leq \hat{R} \leq 1 & \text{(Restrições de} \\ 0 \leq \hat{L} \leq 1 & \text{caixa para os} \\ 0 \leq \hat{C} \leq 1 & \text{componentes do circuito)} \\ \text{Equações de equilíbrio harmônico} & \text{(eq.(34) a eq.(36))} \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & \text{(eq.(40) a eq.(45))} \end{array} \right. \quad (221)$$

sendo o potencial elétrico $\phi_{\text{out}}^\omega = \phi^\omega \Big|_{\Gamma_q}$, em que a notação $\Big|_{\Gamma_q}$ significa ϕ^ω que deve ser avaliado sobre a superfície Γ_q que age como eletrodo e $\|\cdot\|$ o operador norma. O termo C_m^Σ é a

flexibilidade média ou parâmetro de rigidez do sistema calculado a partir da resposta estática (ver seção 3.8), sendo que a função $\ln(x)$ é utilizada para diminuir o efeito de diferentes ordens de grandeza dos termos envolvidos na função objetivo. Como no problema de projeto de atuadores, a restrição de volume atua como limitante da quantidade de material piezelétrico e não piezelétrico na EPLA, (ver Figura 24) logo, a potência elétrica gerada pelo sistema é limitada pela máxima quantidade de material piezelétrico disponível. w_{π} e w_C são pesos que ponderam a relevância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8).

3.7.2 Formulação do Problema para Coletores de Energia no Domínio do Tempo

Os requisitos de demanda de potência elétrica consistem em maximizar a potência ativa média $\overline{Pot}_a^{\tau}$ consumida pela impedância Z , num intervalo de tempo t_f , quando uma força aplicada num ponto específico do domínio age sobre a estrutura, ao longo de certa direção. A força aplicada é caracterizada por

$$P_i^{exc} = P_{i_{in}}^{\tau}(t) = \begin{cases} P_i^{\tau} & \forall 0 \leq t_p \leq t \leq t_f \leq t_s \leq \frac{T_{exc}}{2} \\ 0 & \forall \frac{T_{exc}}{2} \leq t \leq T_{exc} \end{cases} \quad (222)$$

que obedece a um formato de degrau, podendo simular o comportamento de uma onda quadrada em que as componentes de P_i^{τ} e o período $T_{exc} = \frac{1}{f_{exc}}$ da mesma são parâmetros de entrada independente das variáveis de projeto (ver Figura 24). As componentes P_i^{τ} da excitação degrau são consideradas como o valor RMS das componentes da excitação no regime harmônico, ou seja:

$$P_i^{\tau} = \frac{P_i^{\omega}}{\sqrt{2}} \quad (223)$$

fornecendo assim, a mesma quantidade de energia de entrada para ambos os regimes para que os resultados sejam comparáveis. O requisito estrutural é, de novo, garantir certa rigidez à estrutura com o intuito de evitar a formação de ilhas de material nas camadas mediante a maximização da rigidez da estrutura. Como apontado no problema transiente de atuadores,

quando incluído o estado transiente no projeto de EPLA, a otimização aproveita todo o intervalo de tempo para maximizar o objetivo, sendo neste caso a potência ativa média $\overline{\text{Pot}}_a^\tau$. Contudo, a velocidade de resposta pode ser afetada como explicado na seção 3.6.2, sendo adicionado um termo na função objetivo que maximize a inclinação inicial da curva delimitada entre $t = 0$ e o tempo de subida $t = t_r$. Assim, é possível minimizar indiretamente t_r , melhorando a resposta dinâmica da estrutura. A formulação apresentada aqui é igualmente válida se a excitação for efetuada por um deslocamento prescrito da forma:

$$u_i^P = u_{i\text{in}}^\tau(t) = \begin{cases} u_i^\tau & \forall 0 \leq t_p \leq t \leq t_f \leq t_s \leq \frac{T_{\text{exc}}}{2} \\ 0 & \forall \frac{T_{\text{exc}}}{2} \leq t \leq T_{\text{exc}} \end{cases} \quad (224)$$

em que $u_i^\tau = \frac{u_i^{\overline{\omega}}}{\sqrt{2}}$ para que os resultados sejam comparáveis. A excitação por deslocamento prescrito pode ser originada quando utilizado um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. O problema de otimização para o projeto de coletores EPLA no domínio do tempo é proposto como:

$$\begin{aligned} \max_{\psi} F_{\text{OBJ}}^{\text{C}\tau} &= w_\tau \overline{\text{Pot}}_a^\tau(t, \psi, \phi_{\text{out}}^\tau(t, \psi, P_i), Y(\psi, \omega_d)) + w_R \text{Pot}_a^R(t_r, \psi, \phi_{\text{out}}^\tau(t_r, \psi, P_i), Y(\psi, \omega_d)) - \\ &w_C \ln \left(C_m^\Sigma(\psi, t_i^{\Sigma p}) \right) = w_\tau \left[\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\phi_{\text{out}}^\tau \|Y\|)^2 R dt \right] + w_R \text{Pot}_a^I(t_r) - w_C \ln \left(\int_{\Gamma_t} t_i^{\Sigma p} u_{i\text{out}}^\Sigma d\Gamma_t \right) \end{aligned} \quad (225)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{\text{pie}} \leq \Omega_{\text{spie}} & \text{(Restrição de volume do mat. piezelétrico)} \\ \int_{\Omega_{\text{np}}} \rho d\Omega_{\text{np}} \leq \Omega_{\text{snp}} & \text{(Restrição de volume do mat. não piezelétrico)} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \text{(Restrições de} \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{caixa para as} \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \text{variáveis de projeto)} \\ 0 \leq \hat{R} \leq 1 & \text{(Restrições de} \\ 0 \leq \hat{L} \leq 1 & \text{caixa para os} \\ 0 \leq \hat{C} \leq 1 & \text{componentes do circuito)} \\ \text{Equações de equilíbrio transiente} & \text{(eq.(13), eq.(18) a eq.(21), eq.(29) a eq.(33))} \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & \text{(eq.(40) a eq.(45))} \end{array} \right. \quad (226)$$

sendo $\phi_{\text{out}}^\tau = \phi^\tau \Big|_{\Gamma_q}$, em que a notação $\Big|_{\Gamma_q}$ significa ϕ^τ que deve ser avaliado sobre a superfície Γ_q que age como eletrodo. $\text{Pot}_a^R = \text{Pot}_a^\tau(t_r)$ é a potência ativa instantânea avaliada no tempo t_r . A admitância Y é avaliada na frequência de oscilação ω_d (ver seção 2.4.5), porquanto a excitação é um degrau (ver seção 2.4.6), sendo que $\omega_d = 0$ quando o deslocamento chega na condição de estabilização em $t = t_s$ (ver seção 2.4.9). O tempo é independente do vetor de variáveis de projeto ψ , sendo t_f um parâmetro de entrada escolhido para o problema de coletores de energia mediante a expressão:

$$t_f = \min\left(\frac{4.25\pi}{\omega_1}, t_s, \frac{T_{\text{exc}}}{2}\right) \quad (227)$$

sendo ω_1 a frequência fundamental calculada a partir do problema de autovalor formulado pelas eq.(23) a eq.(28) e considerada que não depende das variáveis de projeto. Assim, o primeiro pico da resposta sempre é observado (ver Figura 11 e Figura 24), fazendo possível a caracterização de toda a resposta transiente. Portanto, t_f pode ser menor que o tempo de estabilização t_s e diminuir a complexidade de cálculo.

Por outro lado, a maximização da velocidade de resposta é abordada indiretamente, pois a maximização da área sob a curva de potencial elétrico no tempo, não garante que o tempo de subida t_r diminua. Além disso, a impedância acoplada pode influenciar no tempo de resposta, sendo desejável que a sua ressonância seja várias ordens de grandeza maior do que a frequência de oscilação. Se o produto RC dos componentes do circuito crescer o suficiente, o sistema teria um comportamento semelhante a um sistema de primeira ordem cuja velocidade de resposta é conhecida por ser lenta. Contudo, não existem restrições no problema de otimização para o produto RC tentando, dessa forma, diminuir a complexidade do problema. Assim, é acrescentado o segundo termo da função objetivo, de forma análoga ao problema de projeto de atuadores no regime transiente (ver seção 3.6.2). O termo Pot_a^R pode ser calculado a partir da resposta no tempo de pico t_p por:

$$\text{Pot}_a^R = \text{Pot}_a^\tau(t_r) = \left[\left[\frac{\phi_{\text{out}}^\tau(t_p)}{1+M_p} \right] \|Y(\omega_d)\| \right]^2 R = \left[\left[\frac{\phi_{\text{out}}^\tau(t_p)}{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}} \right] \|Y(\omega_d)\| \right]^2 R \quad (228)$$

A rigidez do sistema é maximizada por meio da minimização do termo C_m^Σ com a finalidade de obter continuidade de material na EPLA (ver seção 3.8). Igualmente, são utilizadas restrições de volume segundo o tipo de material da EPLA. w_τ , w_R e w_C são pesos que ponderam a importância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8).

3.7.3 Formulação Combinada do Problema Dinâmico para Coletores

O problema combinado aproveita os enfoques anteriores com a finalidade de projetar coletores que gerem o mesmo nível de potência ativa independente da forma da onda da excitação (ver Figura 25), porém tais excitações não são aplicadas de forma simultânea. Além disso, é desejável que a velocidade de resposta no caso transiente seja maximizada para aproveitar as componentes do sinal de alta frequência. As componentes da força de excitação na análise transiente e harmônica são dadas nessa ordem por:

$$P_i^\tau = \frac{P_i^{\text{exc}}}{\sqrt{2}} \quad (229)$$

$$P_i^\omega = A_\omega P_i^{\text{exc}} \quad (230)$$

em que P_i^{exc} são as componentes de força de excitação independente das variáveis de projeto e A_ω é uma variável de projeto escalar introduzida com a finalidade de controlar a diferença da energia utilizada entre os domínios envolvidos e definida pela interpolação linear da eq.(217). A variável A_ω é nomeada nesse trabalho como fator de excitação harmônica que depende, por sua vez, da variável normalizada $\hat{A}_\omega$ e modifica a eq.(38) de condições de contorno natural, tendo que:

$$\left[\int_0^t t_J^p \delta W_J^* dt \right]_\Gamma = 0 \therefore t_J^p = \begin{cases} A_\omega S_{ij} \hat{n}_j & \text{sobre } \Gamma_t \quad J \leq i \\ - \left[D_i - \frac{j}{\omega} J_i \right] \hat{n}_i & \text{sobre } \Gamma_q \quad J = i + 1 \end{cases} \quad (231)$$

Se a excitação for por deslocamento prescrito o fator de excitação harmônica modifica a eq.(35) de condições de contorno essencial como visto na eq.(216) e as componentes do deslocamento de excitação na análise transiente e harmônica são dadas respectivamente por:

$$u_i^\tau = \frac{u_i^P}{\sqrt{2}} \quad (232)$$

$$u_i^\varpi = A_\varpi u_i^P \quad (233)$$

em que u_i^P são as componentes de deslocamento de excitação prescrito e independente das variáveis de projeto.

Figura 25 – Customização da resposta em potência no problema de otimização combinado para o projeto de coletores EPLA

Consequentemente, os coletores EPLA resultantes serão “multi-entrada” e, desse modo, a diferença entre a energia utilizada no regime harmônico e no regime transiente é conhecida. Os requisitos estruturais são mantidos de modo a garantir certa rigidez no sistema (ver seção 3.8). Além disso, são conservadas as restrições de volume tanto para materiais piezelétricos quanto não piezelétricos. Deste modo, o problema de projeto consiste em distribuir material (piezelétrico e não piezelétrico) e, igualmente, estabelecer a polarização do material piezelétrico e a orientação das fibras do material ortotrópico, com o intuito de:

- Maximizar a magnitude potência ativa média $\overline{\text{Pot}}_a^\varpi$ no regime harmônico
- Maximizar a potência ativa média transiente $\overline{\text{Pot}}_a^\tau$ num intervalo de tempo t_f .

- Minimizar o tempo de resposta de forma indireta mediante a maximização da potência instantânea ativa no tempo de subida Pot_a^R .
- Maximizar a rigidez da EPLA mediante a minimização da flexibilidade média C_m^Σ (ver seção 3.8).
- Controlar a energia da excitação através da variável A_ω , de modo que, a potência ativa média $\overline{Pot}_a^\tau$ de meio período de excitação do problema transiente (ou seja, calculada entre o intervalo $t = \left[0, \frac{T}{2}\right]$ com $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, ver Figura 25) seja equivalente à potência média ativa do problema harmônico $\overline{Pot}_a^\omega$. Doravante, a potência ativa média de meio período de excitação será referenciada com $\overline{Pot}_{mpa}^\tau$. Além disso, é desejável que, a duração da resposta transiente dada por t_s seja menor o igual $\frac{T}{2}$, assim que no meio ciclo seguinte o sistema gere a mesma quantidade de potência. Contudo, não existe uma restrição sobre o tempo de estabilização t_s , prevendo que a limitação do domínio viável do problema impeça encontrar uma solução satisfatória. De acordo aos requisitos anteriores, o problema de otimização é formulado como:

$$\max_{\xi} F_{OBJ}^{CD} = w_\omega \overline{Pot}_a^\omega + w_\tau \overline{Pot}_a^\tau + w_R Pot_a^R - w_C \ln(C_m^\Sigma) - w_D \left[\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{\overline{Pot}_{mpa}^\tau} - 1 \right]^2 \quad (234)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega_p} \rho d\Omega_{pie} \leq \Omega_{spie} & \text{(Restrição de volume do mat. piezelétrico)} \\ \int_{\Omega_{np}} \rho d\Omega_{np} \leq \Omega_{snp} & \text{(Restrição de volume do mat. não piezelétrico)} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{(Restrições de caixa para as variáveis de projeto)} \\ -1 < \hat{\theta} < 1 & \\ 0 \leq \hat{A}_\omega \leq 1 & \\ 0 \leq \hat{R} \leq 1 & \text{(Restrições de caixa para os componentes do circuito)} \\ 0 \leq \hat{L} \leq 1 & \\ 0 \leq \hat{C} \leq 1 & \\ \text{Equações de equilíbrio transiente} & \text{(eq.(13), eq.(18) a eq.(21), eq.(29) a eq.(33))} \\ \text{Equações de equilíbrio harmônico} & \text{(eq.(34) eq.(35) e eq.(216))} \\ \text{Equações de equilíbrio estático} & \text{(eq.(40) a eq.(45))} \end{array} \right. \quad (235)$$

em que a variável de projeto é a função vetorial $\xi = \{\rho \quad \gamma \quad \hat{\theta} \quad \hat{R} \quad \hat{L} \quad \hat{C} \quad \hat{A}_\omega\}^T$, sendo a componente $\hat{A}_\omega$ uma variável escalar da função do fator de excitação harmônica como definido na eq.(217). Consequentemente, o controle da diferença da energia é abordado com a minimização do termo $\left[\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{\overline{Pot}_{mpa}^\tau} - 1 \right]^2$, sendo desejável que adquira um valor nulo. w_ω , w_τ , w_R , w_C e w_D são pesos que ponderam a relevância de cada objetivo na função F_{obj}^{CD} e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8). Os termos restantes foram esclarecidos nas seções 3.7.1 e 3.7.2.

Não obstante, pode ser proibitivo o custo do cálculo $\overline{Pot}_{mpa}^\tau$ no regime transiente se for selecionado $t_f = t_s$, sendo adotada uma estratégia para estimá-la a partir da potência ativa média $\overline{Pot}_a^\tau = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\phi \|Y\|)^2 R dt$ para $t_f \leq \frac{T}{2}$ e a potência ativa média gerada num ciclo de oscilação da resposta transiente $\overline{Pot}_{Tda}^\tau = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} (\phi \|Y\|)^2 R dt$ e, desse modo, reduzir a complexidade do problema.

Sabendo que o período de oscilação da resposta transiente tem duração de $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, a quantidade de ciclos que há entre $t = 0$ até $t = t_f$ é:

$$N_d = \frac{t_f}{T_d} \quad (236)$$

enquanto a quantidade de ciclos que haverá em meio período de excitação será:

$$N_{mp} = \frac{\pi}{\omega T_d} \quad (237)$$

Além disso, como a potência ativa instantânea Pot_a depende quadraticamente do potencial elétrico (ver seção 2.4.8), o decremento logarítmico da potência ativa é $\delta_{P_a} = 2\delta_\phi$, sendo δ_ϕ o decremento logarítmico da curva de potencial elétrico (ver Figura 24). Assim, poderia ser considerando que para um tempo t qualquer, a potência instantânea é da forma:

$$Pot_a^\tau = \mathcal{A} e^{-2\delta_\phi \left(\left\lfloor \frac{t}{T_d} - 1 \right\rfloor \right)} \sin^2(\omega_d t) \quad (238)$$

sendo $[\cdot]$ a notação correspondente à função teto e $\mathcal{A}$ uma constante. Logo, para um instante de tempo $0 \leq t \leq T_d$ tem-se que $\text{Pot}_a^\tau = \mathcal{A} \sin^2(\omega_d t)$, para $T_d < t \leq 2T_d$ é obtido um valor de $\text{Pot}_a^\tau = \mathcal{A} e^{-2\delta_\phi} \sin^2(\omega_d t)$, da mesma forma para $2T_d < t \leq 3T_d$ é alcançado um valor de $\text{Pot}_a^\tau = \mathcal{A} e^{-4\delta_\phi} \sin^2(\omega_d t)$, e assim sucessivamente. Portanto, é possível calcular a potência ativa média para qualquer instante de tempo como uma soma ponderada da integral da potência instantânea entre $0 \leq t \leq T_d$, ou seja:

$$\overline{\text{Pot}}_a^\tau = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\phi \|Y\|)^2 R dt = \frac{1}{t_f} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor N_d \rfloor} e^{-2\delta_\phi(k-1)} + \mathcal{B} e^{-2\delta_\phi \lfloor N_d \rfloor} \right) \int_0^{T_d} ((\phi \|Y\|)^2 R) dt \quad (239)$$

sendo $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ as notações correspondentes às funções piso e teto, respectivamente, e $\mathcal{B} \in [0,1]$ um fator que pondera os ciclos incompletos dado por:

$$\mathcal{B} = \frac{\int_0^{\mathcal{X} T_d} \sin^2(\omega_d t) dt}{\int_0^{T_d} \sin^2(\omega_d t) dt} = \mathcal{X} - \frac{\sin 4\pi \mathcal{X}}{4\pi} \quad (240)$$

em que $\mathcal{X} = N_d - \lfloor N_d \rfloor$. Conforme a eq.(239), a estimativa da potência ativa média de meio período $\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^\tau$ expressa como uma soma ponderada da integral da potência instantânea entre $0 \leq t \leq T_d$, é:

$$\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^\tau = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (\phi \|Y\|)^2 R dt = \frac{2}{T} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor N_{\text{mp}} \rfloor} e^{-2\delta_\phi(k-1)} + \mathcal{B} e^{-2\delta_\phi \lfloor N_{\text{mp}} \rfloor} \right) \int_0^{T_d} ((\phi \|Y\|)^2 R) dt \quad (241)$$

Apesar disso, em cada iteração do processo de otimização é calculado $\overline{\text{Pot}}_a^\tau$ no intervalo $t = [0, t_f]$ em que geralmente $t_f \neq T_d$, logo o termo $\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^\tau$ pode ser obtido combinando a eq.(239) e a eq.(241), de modo que:

$$\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^\tau = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (\phi \|Y\|)^2 R dt = F_{\text{PotEst}} \overline{\text{Pot}}_a^\tau \quad (242)$$

em que o fator de potência estimada F_{PotEst} é uma constante que não depende das variáveis de projeto e definido por:

$$F_{\text{PotEst}} = \frac{2t_f}{T} \left[\frac{\sum_{k=1}^{|N_{\text{mp}}|} e^{-2\delta_\phi([k-1])} + \mathcal{B}e^{-2\delta_\phi|N_{\text{mp}}|}}{\sum_{k=1}^{|N_d|} e^{-2\delta_\phi([k-1])} + \mathcal{B}e^{-2\delta_\phi|N_d|}} \right] \quad (243)$$

3.8 Flexibilidade Média no Problema de OT para EPLA

As soluções dos problemas de OT formulados anteriormente podem apresentar topologias descontínuas na forma de ilhas ou porções de material desconexas com membros da mesma ou de outras camadas da EPLA. Matematicamente essas estruturas satisfazem o objetivo da otimização, mas não podem ser concebidas na realidade. Assim, é imperativo para alcançar uma solução viável impor requisitos estruturais de modo a garantir a continuidade da estrutura da EPLA. Tais requisitos podem ser atingidos com a avaliação da flexibilidade média no regime estático como medida da rigidez da estrutura. A flexibilidade média pode ser quantificada como (BENDSØE; SIGMUND, 2003):

$$C_m^\Sigma(\chi, t_i^{\Sigma p}) = \int_{\Gamma_t} t_i^p u_i(\chi) d\Gamma_t \quad (244)$$

que é equivalente ao trabalho efetuado pelas componentes de força superficial t_i^p aplicada sobre alguma região Γ_t do domínio Ω (ver Figura 22e Figura 24) e negligenciando as forças de corpo devido à reduzida massa das EPLA. As componentes de t_i^p são consideradas unitárias na direção de um deslocamento de referência $u_{i_{mc}}$ escolhido convenientemente:

- **Em atuadores:** na direção perpendicular ao deslocamento de saída $u_{i_{out}}$.
- **Em coletores com excitação por força:** na direção perpendicular às componentes de força imposta $P_{i_{in}}$.
- **Em coletores com excitação por deslocamento:** na direção perpendicular às componentes de máximo deslocamento $u_{i_{max}}$ resultado da prescrição do deslocamento $u_{i_{in}}^p$. Ou seja, no

ponto onde é alcançado o maior deslocamento em magnitude quando aplicado o deslocamento prescrito correspondente.

Dado que as componentes de força superficial são constantes e não dependem das variáveis de projeto, a EPLA será mais rígida quando os deslocamentos produzidos por essa excitação mecânica forem mínimos. Portanto, maximizar a rigidez da EPLA equivale a minimizar a flexibilidade média da estrutura. Esclarecimentos adicionais sobre a seleção de do deslocamento de referência $u_{j_{mc}}$ podem ser vistos na seção 4.3.

Além da minimização da flexibilidade média, outra abordagem (que não será utilizada neste trabalho) é a utilização de uma mola de rigidez K conhecida que representa a rigidez de uma peça atuada, sendo que, a topologia ótima da EPLA dependerá desse parâmetro K . (BENDSØE; SIGMUND, 2003; SIGMUND, 2001a). Para o caso de atuadores EPLA, a mola seria ligada nos pontos onde for desejável maximizar as amplitudes do deslocamento e agindo na mesma direção da maximização. Já para coletores de energia, a mola seria localizada no ponto e orientada na direção de máximo deslocamento (em magnitude) que alcançar a estrutura perante a excitação mecânica respectiva (forças impostas ou deslocamentos prescritos).

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas as implementações numéricas do problema de MOT para o projeto dinâmico de EPLA. Além disso, são mostradas as técnicas utilizadas para contornar os problemas de instabilidade numérica inerentes ao MOT e uma descrição da implementação computacional do MOT.

4.1 Método dos Elementos Finitos Piezelétrico para o MOT

O modelo de MEF aplicando o modelo de material da eq.(190) à eq.(193) e da eq.(199) pode ser expresso como:

- No caso de atuadores EPLA (eq.(100)):

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}}(\chi_a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m(\chi_a) \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\mu}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}}(\chi_a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m(\chi_a) \\ \dot{\phi}_z \\ \dot{\mu}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}}(\chi_a) & K_{d\phi_{sz}}(\chi_a) & A_{sv}^G{}^T \\ K_{\phi d_{rm}}(\chi_a) & K_{\phi\phi_{rz}}(\chi_a) & 0 \\ A_{vm}^G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m(\chi_a) \\ \phi_z(\chi_a) \\ \mu_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ Q_{\phi_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (245)$$

- No caso de coletores EPLA (eq.(101)) e, além disso, considerando a eq.(204):

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}}(\psi_c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_m(\psi_c) \\ \ddot{\phi}_z \\ \ddot{\mu}_v \\ \ddot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}}(\psi_c) & 0 & 0 & 0 \\ K_{\phi d_{rm}}(\psi_c) & K_{\phi\phi_{rz}}(\psi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_m(\psi_c) \\ \dot{\phi}_z(\psi_c) \\ \dot{\mu}_v \\ \dot{\eta}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{sm}}(\psi_c) & K_{d\phi_{sz}}(\psi_c) & A_{sv}^G{}^T & 0 \\ 0 & (K_{\sigma_{rz}}(\psi_c) + Y_{\sigma_{rz}}(\psi_c)) & 0 & A_{rx}^H{}^T \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m(\psi_c) \\ \phi_z(\psi_c) \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ds} \\ I_{\phi_r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (246)$$

em que a matriz de amortecimento é dada por $C_{d_{sm}}(\chi_a) = [\alpha_1 M_{d_{sm}}(\chi_a) + \beta_1 K_{d_{sm}}(\chi_a)]$ e tanto a matriz de restrições de deslocamento entre camadas A_{vm}^G quanto a matriz de acoplamento de potenciais elétricos nas camadas piezelétricas A_{xz}^H não dependem do vetor de variáveis de projeto. Além disso, os vetores de carregamento global F_{ds} , Q_{ϕ_r} e I_{ϕ_r} podem depender das variáveis de projeto conforme o tipo de excitação da EPLA (ver capítulo 5). O vetor de variáveis de projeto para atuadores é $\chi_a = \{\rho_e \quad \gamma_e \quad \hat{\theta}_e\}^T$ enquanto para coletores é $\psi_c = \{\rho_e \quad \gamma_e \quad \hat{\theta}_e \quad \hat{R}_w \quad \hat{L}_w \quad \hat{C}_w\}^T$. O vetor χ_a tem dimensão $N + N_p + N_f$, sendo $\dim(\rho_e) = N$, $\dim(\gamma_e) = N_p$ e $\dim(\hat{\theta}_e) = N_f$. Já para o vetor ψ_c , a sua dimensão é $N + N_p + N_f + 3N_z$ com $\dim(\hat{Z}_w) = N_z$. Assim, as matrizes constitutivas que dependem das variáveis de projeto estão definidas como:

$$M_{d_{sm}} = \frac{1}{A} \left[\rho_e^{P_m} \rho_1^0 \int_{V_e} A_{si}^T A_{im} dV_e \right]_e \quad (247)$$

$$K_{d_{sm}} = \frac{1}{A} \left[\rho_e^{P_c} \int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T (\hat{\theta}_e, P_f) C_{1_{jc}}^0 T_{\theta_{cb}} (\hat{\theta}_e, P_f) T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} dV_e \right]_e \quad (248)$$

$$C_{d_{sm}} = \frac{1}{A} [\alpha_1 M_{d_{sm}}^e + \beta_1 K_{d_{sm}}^e]_e \quad (249)$$

$$K_{\phi_{\phi_{rz}}} = \frac{1}{A} \left[\rho_e^{P_e} \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0_{pi}}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \quad (250)$$

$$K_{d\phi_{sz}} = \frac{1}{A} \left[\rho_e^{P_e} (2\gamma_e - 1)^{P_\gamma} \int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T (\hat{\theta}_e, P_f) \epsilon_{0_{ji}}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \quad (251)$$

$$K_{\sigma_{rz}} = \frac{1}{A} \left[\rho_e^{P_e} \omega \tan \delta_0 \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0_{pi}}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \quad (252)$$

$$Y_{\sigma_{rz}} = \frac{1}{A} \left[Y_{\sigma_{rz}}^e = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \left[\sum_{w=1}^{N_z} Y_w(\hat{R}_w, \hat{L}_w, \hat{C}_w) \right] \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \right]_e \quad (253)$$

em que as variáveis de projeto ρ_e e γ_e são constantes dentro do elemento finito podendo então sair do operador integral. O termo da w -ésima admitância $Y_w = Y_w(\hat{R}, \hat{L}, \hat{C})$ depende do domínio do problema, sendo que para o domínio harmônico é calculado como:

$$Y_w^\omega(\hat{R}_w, \hat{L}_w, \hat{C}_w) = \frac{1}{Z_w^\omega} = \frac{1}{[(R_{\max} - R_{\min})\hat{R}_w + R_{\min}] + j\left[\omega[(L_{\max} - L_{\min})\hat{L}_w + L_{\min}] - \frac{1}{\omega[(C_{\max} - C_{\min})\hat{C}_w + C_{\min}]}\right]} \quad (254)$$

enquanto no domínio transiente é igual ao módulo do valor complexo encontrado na eq.(254):

$$Y_w^t(\hat{R}_w, \hat{L}_w, \hat{C}_w) = \|Y_w^\omega\| = \frac{1}{\|Z_w^\omega\|} \quad (255)$$

A matriz global de rigidez piezelétrica $K_{d\phi_{sz}}$ poderia depender da variável de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$ se o material piezelétrico possuísse fibras como os MFC (WILLIAMS et al., 2002). Porém, os materiais piezelétricos usados nesse trabalho são transversalmente isotrópicos, ou seja, há isotropia no plano perpendicular à direção de polarização e, portanto não existem fibras e a matriz $T_{\theta_{dj}}^T$ é igual à matriz identidade.

Da mesma forma, é considerado que ω não depende das variáveis de projeto para ambos os casos, harmônico (sendo ω a frequência da excitação um valor constante) e transiente (em que $\omega = \omega_d$, sendo $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ a frequência amortecida e ω_n a frequência natural). A dependência de ω com as variáveis de projeto, se originaria quando modelados coletores EPLA no domínio transiente, pelo fato de que a frequência da voltagem fornecida à impedância Z é a frequência amortecida ω_d em que vibra a estrutura. Portanto, a atualização das variáveis de projeto no domínio de projeto a cada iteração da otimização modificaria as frequências naturais ω_n . A sensibilidade dessa dependência deveria ser calculada mediante o problema de autovalor de MOT que não será abordado aqui porquanto aumentaria consideravelmente a complexidade do cálculo e o custo computacional (ver seção 8.1).

4.2 Formulação do Problema de OT para EPLA na Forma Discreta

O problema de otimização proposto é não linear, mas com a PLS (ver APÊNDICE D) ele é aproximado mediante sucessivos subproblemas de otimização linear para chegar a uma solução ótima. Assim, o método exige que a função objetivo e as restrições sejam funções lineares em relação às variáveis de projeto (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). A PLS foi escolhida neste trabalho, por ser um método simples de programar e com um custo computacional reduzido, pois requer somente o cálculo das primeiras derivadas (ou sensibilidades, ver capítulo 5) da função objetivo e as restrições em relação às variáveis de projeto.

Para ser obtida uma solução numérica do problema de otimização, deve ser adotado um modelo para os campos das variáveis de projeto. Esses campos definem as variáveis de projeto ρ_e, γ_e e $\hat{\theta}_e$, sendo utilizada neste trabalho a implementação de variável de projeto por elemento (ver Figura 26). Nessa implementação, os graus de liberdade do elemento estão interpolados por funções de forma quadráticas (eq.(576) a eq.(578)), enquanto as variáveis de projeto ρ_e, γ_e e $\hat{\theta}_e$ são uniformes dentro do elemento. Já para o problema de coletores EPLA são adicionadas as variáveis de projeto dos componentes do circuito RLC acoplado ao elemento finito. Esta implementação não garante a continuidade do campo da variável de projeto (RAHMATALLA; SWAN, 2004), porém, essa desvantagem tem sido contornada com a aplicação de filtros e restrições de perímetro como descrito em Sigmund e Petersson (1998) e Eschenauer e Olhoff (2001). O elemento finito utilizado para discretizar o domínio é o elemento de casca isoparamétrico de oito nós (ver APÊNDICE B).

Figura 26 – Implementação das variáveis de projeto por elemento para o MOT em EPLA

Para resolver o problema de otimização, a função objetivo e as restrições são linearizadas em torno de $x = x_o$, utilizando uma série de Taylor de primeira ordem:

$$F_{OBJ}^{lin} \cong \left[\frac{dF_{OBJ}}{dx_i} \right]_{x_i=x_{i_o}} (x_i - x_{i_o}) + F_{OBJ} \Big|_{x_i=x_{i_o}} \quad (256)$$

$$g_{REST}^{lin} \cong \left[\frac{dg_{REST}}{dx_i} \right]_{x_i=x_{i_o}} (x_i - x_{i_o}) + g_{REST} \Big|_{x_i=x_{i_o}} \quad (257)$$

sendo x_i um vetor de variáveis de projeto qualquer (aproximação em torno de $\chi_a = \chi_{a_o}$ em atuadores e em torno de $\psi_c = \psi_{c_o}$ em coletores) e em que os coeficientes que acompanham ao vetor de variáveis de projeto são as derivadas (ou sensibilidades, ver capítulo 5) da função objetivo F_{obj} e da restrição g_{rest} em relação à cada variável de projeto. Os termos $F_{OBJ} \Big|_{x_i=x_{i_o}}$ e $\left[\frac{dF_{OBJ}}{dx_i} \right]_{x_i=x_{i_o}} (x_{i_o})$ são negligenciados já que são constantes que não influenciam o processo de otimização, enquanto que $g_{REST} \Big|_{x_i=x_{i_o}}$ e $\left[\frac{dg_{REST}}{dx_i} \right]_{x_i=x_{i_o}} (x_{i_o})$ não podem ser desconsiderados, pois a aproximação da restrição pode ser muito imprecisa.

4.2.1 Comentários sobre a Notação dos Problemas de Otimização na Forma Discreta

Os problemas de otimização propostos neste trabalho possuem uma notação comum, a qual é resumida nesta seção com a finalidade de facilitar a leitura do texto. As variáveis em comum são:

- L_I no caso do problema de atuadores EPLA é um vetor de tamanho $6n+N+3G$, que contém zeros exceto na posição do GDL na direção de u_{out} e cujo valor é unitário. Cabe lembrar que u_{out} , é o deslocamento de saída que requer ser maximizado.
- $V_{spie}^{min}, V_{snp}^{min}$ e $V_{spie}^{max}, V_{snp}^{max}$ correspondem aos valores dos volumes mínimos e máximos desejados para as camadas piezelétricas e não piezelétricas, respectivamente.

- $\rho_{\min_e}^{\text{mov}}, \gamma_{\min_p}^{\text{mov}}, e$ e $\rho_{\max_e}^{\text{mov}}, \gamma_{\max_p}^{\text{mov}}, \hat{\theta}_{\max_f}^{\text{mov}}$ são os vetores que contêm os limites móveis inferior e superior para cada tipo de variável de projeto por elemento (ver Figura 26).
- $\hat{R}_{\min_w}^{\text{mov}}, \hat{L}_{\min_w}^{\text{mov}}, \hat{C}_{\min_w}^{\text{mov}}$ e $\hat{R}_{\max_w}^{\text{mov}}, \hat{L}_{\max_w}^{\text{mov}}, \hat{C}_{\max_w}^{\text{mov}}$ são os vetores que contêm os limites móveis inferior e superior para cada variável de projeto de pseudo-impedância (ver Figura 26).
- $\rho_{\min}$ é o valor mínimo que podem assumir as pseudo-densidades de cada elemento finito para evitar singularidades no problema de MEF.
- Não é necessário definir um valor $\gamma_{\min}$, já que se $\gamma_p = 0$ é obtido um elemento piezelétrico com polarização negativa em relação ao sistema de referência utilizado e, além disso, a matriz piezelétrica de elementos finitos $K_{\phi d_{rm}}$ não faz parte da diagonal das matrizes globais de MEF da notação estendida (ver eq.(100) e eq.(101)), portanto não é afetada a estabilidade do sistema linear de MEF.
- $\hat{\theta}_{\min}, \hat{\theta}_{\max}$ são os valores mínimo e máximo calculados que podem assumir as pseudo-orientações de cada elemento finito para contornar os múltiplos pontos extremos das funções seno e cosseno. O cálculo de $\hat{\theta}_{\min}$ e $\hat{\theta}_{\max}$ pode ser feito usando a eq.(198).
- $\hat{R}_{\min}, \hat{L}_{\min}, \hat{C}_{\min}$ e $\hat{R}_{\max}, \hat{L}_{\max}, \hat{C}_{\max}$ são os valores mínimos e máximos admissíveis das pseudo-impedâncias de cada componente do circuito acoplado (ver seção 3.4).
- O produto $\{\mathbf{V}_p \quad \mathbf{V}_n\} \begin{Bmatrix} \rho_p \\ \odot_n \end{Bmatrix}$ é o volume das camadas piezelétricas enquanto $\{\mathbf{V}_p \quad \mathbf{V}_n\} \begin{Bmatrix} \odot_p \\ \rho_n \end{Bmatrix}$ é o volume das camadas não piezelétricas, sendo ρ_p o vetor de variáveis de projeto de elementos piezelétricos de tamanho N_p , ρ_n o vetor de variáveis de projeto de elementos não piezelétricos de tamanho $(N - N_p)$ e $\odot_i$ é um vetor nulo de dimensão i .
- Apesar de que Ha e Cho (2006) consideram desnecessárias as restrições de volume em problemas de piezeletricidade, elas são impostas com a finalidade de ajudar na convergência do método, de modo que, sejam obtidas soluções 0–1 que facilitem a interpretação do resultado para posteriores processos de fabricação. Contudo, seria desejável negligenciar

essas restrições com o intuito de alcançar volumes ótimos para cada tipo de material, porém não é garantido que possam ser obtidos melhores desempenhos da função objetivo.

- A potência ativa média em coletores no domínio da frequência é calculada como:

$$\overline{\text{Pot}}_a^\omega = \frac{1}{2} \|W_I^\omega\| G_{IJ}^c \|W_J^\omega\| \quad (258)$$

enquanto no domínio do tempo é usada a expressão:

$$\overline{\text{Pot}}_a^\tau = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^\tau(t) G_{IJ}^c W_J^\tau(t) dt \quad (259)$$

sendo G_{IJ}^c denominada neste trabalho como matriz de condutância elétrica e definida por:

$$G_{IJ}^c = \begin{cases} \left(\frac{\cos \varphi_d^w}{\|Z^w\|} \right)_{IJ} & I = J: I \in (\Omega \cap \Omega_c) \\ 0 & I \neq J \vee I = J: I \notin (\Omega \cap \Omega_c) \end{cases} \quad (260)$$

sendo Z^w e φ_d^w a impedância e o ângulo de defasagem correspondente ao w -ésimo circuito acoplado ao GDL I , respectivamente.

- As formulações dos problemas de otimização para coletores de energia são válidas tanto para excitações por forças impostas quanto por deslocamentos prescritos como apontado na formulação contínua (ver seção 3.7). Além disso, não são inclusas restrições de tensão mecânica pelo fato de que elas envolvem quantidades de natureza local, com valores máximos movimentando-se ao longo do domínio durante o processo de otimização. Embora existam enfoques alternativos como restrições de tipo integral, o custo computacional pode ser proibitivo porquanto a restrição é avaliada em cada elemento finito do domínio. Contudo, a implementação desse tipo de restrições pode ser sugerida como trabalho futuro.

- Nos problemas de abordagens combinadas, $A_{\varpi_{\min}}, A_{\varpi_{\max}}$ são os valores mínimo e máximo que pode admitir a variável escalar A_{ϖ} para evitar que a excitação no problema de MEF harmônico seja nula ou infinita enquanto $\hat{A}_{\varpi_{\min}}^{\text{mov}}, \hat{A}_{\varpi_{\max}}^{\text{mov}}$ são os limites móveis inferior e superior do pseudo-fator de excitação harmônica $\hat{A}_{\varpi}$.

- O termo flexibilidade média $C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma$ é calculado de acordo com o problema estático de MEF descrito na seção 4.3.

4.2.2 Formulação Discreta do Problema Harmônico para Atuadores

O problema no domínio da frequência na forma discreta utilizando a notação estendida tem a forma:

$$\max_{\chi_a} F_{OBJ}^{A\omega lin} \cong \left[\frac{dF_{OBJ}^{A\omega}}{d\chi_a} \right]_{\chi_a=\chi_{a_0}} \chi_a = \left[W_\omega \frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\psi_a} - W_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\chi_a} \right]_{\chi_a=\chi_{a_0}} \chi_a \because \begin{cases} u_{out}^\omega = L_I W_I^\omega \\ C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma \end{cases} \quad (261)$$

$$\text{tal que} \begin{cases} V_{spie}^{min} \leq \{V_p \quad V_n\} \begin{Bmatrix} \rho_p \\ \odot_n \end{Bmatrix} \leq V_{spie}^{max} \\ V_{snp}^{min} \leq \{V_p \quad V_n\} \begin{Bmatrix} \odot_p \\ \rho_n \end{Bmatrix} \leq V_{snp}^{max} \\ 0 \leq \rho_{min} \leq \rho_{min_e}^{mov} \leq \rho_e \leq \rho_{max_e}^{mov} \leq 1 \\ 0 \leq \gamma_{min_p}^{mov} \leq \gamma_p \leq \gamma_{max_p}^{mov} \leq 1 \\ -1 < \hat{\theta}_{min} \leq \hat{\theta}_{min_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_f \leq \hat{\theta}_{max_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_{max} < 1 \\ K_{IJ}^\omega(\chi_a) W_J^\omega(\chi_a) = F_I^\omega \\ K_{IJ}^\Sigma(\chi_a) W_J^\Sigma(\chi_a) = L_I^\Sigma \end{cases} \quad (262)$$

4.2.3 Formulação Discreta do Problema Transiente para Atuadores

O problema no domínio do tempo na forma discreta utilizando a notação estendida tem a forma:

$$\max_{\chi_a} F_{OBJ}^{A\tau lin} \cong \left[\frac{dF_{OBJ}^{A\tau}}{d\chi_a} \right]_{\chi_a=\chi_{a_0}} \chi_a = \left[\left[2W_\tau \left[\sum_{k=0}^m [(u_{out}^\tau)_k + (u_{out}^\tau)_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \right] \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(\frac{du_{out}^\tau}{d\chi_a} \right)_k + \left(\frac{du_{out}^\tau}{d\chi_a} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] + 2W_R u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\chi_a} - W_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\chi_a} \right]_{\chi_a=\chi_{a_0}} \chi_a \because \begin{cases} u_{out}^\tau = L_I W_I^\tau \\ u_{out}^R = L_I W_I^\tau(t_r) \\ \Delta t = \frac{t_f}{m} \\ C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma \end{cases} \quad (263)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{spie}}^{\min} \leq \{\forall_p \quad \forall_n\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_p \\ \odot_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{spie}}^{\max} \\ V_{\text{snp}}^{\min} \leq \{\forall_p \quad \forall_n\} \left\{ \begin{array}{l} \odot_p \\ \rho_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{snp}}^{\max} \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{\min_e}^{\text{mov}} \leq \rho_e \leq \rho_{\max_e}^{\text{mov}} \leq 1 \\ 0 \leq \gamma_{\min_p}^{\text{mov}} \leq \gamma_p \leq \gamma_{\max_{ep}}^{\text{mov}} \leq 1 \\ -1 < \hat{\theta}_{\min} \leq \hat{\theta}_{\min_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_f \leq \hat{\theta}_{\max_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_{\max} < 1 \\ M_{IJ}(\chi_a) \ddot{W}_J^T(\chi_a) + C_{IJ}(\chi_a) \dot{W}_J^T(\chi_a) + K_{IJ}(\chi_a) W_J^T(\chi_a) = F_I^T \\ K_{IJ}^{\Sigma}(\chi_a) W_J^{\Sigma}(\chi_a) = L_I^{\Sigma} \end{array} \right. \quad (264)$$

em que a integral da eq.(211) é resolvida utilizando a regra trapezoidal sendo m o número de passos de integração. Uma primeira estimativa do tempo t_f é feita através da análise modal de MEF do domínio de projeto fixo completamente sólido, com o ângulo das fibras nulo e seguindo as recomendações descritas na seção 3.6.2. Para as iterações restantes, t_f é calculado com a eq.(210) com a finalidade de prevenir a aparição de ruído numérico na resposta, originado por considerar Δt muito reduzidos. O termo $u_{\text{out}}^R = L_I W_I^T(t_r)$ é calculado conforme a eq.(213), pelo fato de que quando discretizado o tempo em m passos de integração, não é garantido que exista $r \in \mathbb{N}: t_r = r\Delta t$, ou seja, um número inteiro r que multiplicado pelo intervalo de tempo por passo Δt retorne o valor t_r . Contudo, t_p encontra-se no primeiro pico da resposta com certo grado de incerteza que depende de Δt . Portanto:

$$u_{\text{out}}^R = \frac{u_{\text{out}}^P}{1+M_p} = \frac{L_I W_I^T(t_p)}{1+M_p} = \frac{L_I W_I^T(t_p)}{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}} \quad (265)$$

4.2.4 Formulação Discreta do Problema Combinado para Atuadores

Nesta abordagem, é modificado o vetor de variáveis de projeto pelo fato da variável $\hat{A}_{\varpi}$ ser adicionada ao problema mediante uma interpolação linear (ver seção 3.6.3). Portanto, o novo vetor de variáveis de projeto é expresso como:

$$\psi_d = \left\{ \begin{array}{l} \chi_a \\ \hat{A}_{\varpi} \end{array} \right\} \quad (266)$$

em que ψ_d tem dimensão $N + N_p + N_f + 1$. Assim, o problema combinado na forma discreta pode ser visto como:

$$\begin{aligned} \max_{\chi_a, \hat{A}_w} F_{\text{OBJ}}^{\text{AD}} \Big|_{\psi_d = \psi_{d_0}} &\cong \left[\frac{dF_{\text{OBJ}}^{\text{AD}}}{d\psi_d} \right]_{\psi_d = \psi_{d_0}} \psi_d = \left[\left[W_w \frac{d(\|u_{\text{out}}^w\|^2)}{d\psi_d} + 2W_\tau \left[\sum_{k=0}^m [(u_{\text{out}}^\tau)_k + (u_{\text{out}}^\tau)_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \right] \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(\frac{du_{\text{out}}^\tau}{d\psi_d} \right)_k + \left(\frac{du_{\text{out}}^\tau}{d\psi_d} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] + \right. \right. \\ &2W_R u_{\text{out}}^R \frac{du_{\text{out}}^R}{d\psi_d} - W_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\psi_d} - 4W_D \left(\frac{\|u_{\text{out}}^w\|}{(u_{\text{out}}^R)^2} \right) \left[\left(\frac{\|u_{\text{out}}^w\|}{u_{\text{out}}^R} \right)^2 - 1 \right] \left[\frac{d(\|u_{\text{out}}^w\|)}{d\psi_d} - \left(\frac{\|u_{\text{out}}^w\|}{u_{\text{out}}^R} \right) \frac{du_{\text{out}}^R}{d\psi_d} \right] \Big|_{\psi_d = \psi_{d_0}} \right] \psi_d \therefore \begin{cases} u_{\text{out}}^w = L_I W_I^w \\ u_{\text{out}}^\tau = L_I W_I^\tau \\ u_{\text{out}}^R = L_I W_I^\tau(t_r) \\ \Delta t = \frac{t_f}{m} \\ C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma \end{cases} \end{aligned} \quad (267)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{spie}}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_p \\ \odot_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{spie}}^{\max} \\ V_{\text{snp}}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{array}{l} \odot_p \\ \rho_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{snp}}^{\max} \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{\min_e}^{\text{mov}} \leq \rho_e \leq \rho_{\max_e}^{\text{mov}} \leq 1 \\ 0 \leq \gamma_{\min_p}^{\text{mov}} \leq \gamma_p \leq \gamma_{\max_p}^{\text{mov}} \leq 1 \\ -1 < \hat{\theta}_{\min} \leq \hat{\theta}_{\min_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_{fe} \leq \hat{\theta}_{\max_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_{\max} < 1 \\ 0 \leq \hat{A}_{\omega_{\min}}^{\text{mov}} \leq \hat{A}_\omega \leq \hat{A}_{\omega_{\max}}^{\text{mov}} \leq 1 \\ K_{IJ}^w(\psi_d) W_J^w(\psi_d) = F_I^w \\ M_{IJ}(\psi_d) \ddot{W}_J^\tau(\psi_d) + C_{IJ}(\psi_d) \dot{W}_J^\tau(\psi_d) + K_{IJ}(\psi_d) W_J^\tau(\psi_d) = F_I^\tau \\ K_{IJ}^\Sigma(\psi_d) W_J^\Sigma(\psi_d) = L_I^\Sigma \end{array} \right. \quad (268)$$

A variável A_w é uma variável de projeto escalar contida no vetor solução W_J^w , que multiplica os GDL onde a diferença de potencial for prescrita. Assim W_J^w é redefinido para o problema conforme a notação estendida como:

$$W_J^w(A_w) = \begin{cases} d_i & J \leq i \\ \phi_j^L = \bar{\phi}_{m_j} & i+1 \leq J \leq i+j \\ \phi_k^P = A_w \Delta \phi^P & i+j+1 \leq J \leq i+j+k \end{cases} \quad (269)$$

em que os sobrescritos L e P fazem referência aos GDL elétricos livres e prescritos, respectivamente. $\bar{\phi}_{m_j}$ é o vetor de potenciais elétricos nodais da superfície média da casca e $\Delta \phi^P$ é o vetor de GDL que representa a diferença de potencial elétrico prescrita entre as

superfícies superior e inferior da casca considerando que em tais superfícies existem eletrodos e são equipotenciais (ver APÊNDICES B.3 e B.4). Cabe lembrar que a dependência de A_{ϖ} com $\hat{A}_{\varpi}$ é dada pela eq.(217).

4.2.5 Formulação Discreta do Problema Harmônico para Coletores de Energia

Para coletores, o problema no domínio da frequência na forma discreta é:

$$\max_{\psi_c} F_{OBJ}^{C\varpi_{lin}} \cong \left[\frac{dF_{OBJ}^{C\varpi}}{d\psi_c} \right]_{\psi_c=\psi_{c_0}} \psi_c = \left[\left[w_{\varpi} \frac{d\overline{Pot}_a^{\varpi}}{d\psi_c} - w_c \left(\frac{1}{C_m^{\Sigma}} \right) \frac{dC_m^{\Sigma}}{d\psi_c} \right] \right]_{\psi_c=\psi_{c_0}} \psi_c \therefore \begin{cases} \overline{Pot}_a^{\varpi} = \frac{1}{2} \|W_I^{\varpi}\| G_{IJ}^c \|W_J^{\varpi}\| \\ C_m^{\Sigma} = L_I^{\Sigma} W_I^{\Sigma} \end{cases} \quad (270)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{l} V_{spie}^{\min} \leq \{\forall_p \quad \forall_n\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_p \\ \odot_n \end{array} \right\} \leq V_{spie}^{\max} \\ V_{snp}^{\min} \leq \{\forall_p \quad \forall_n\} \left\{ \begin{array}{l} \odot_p \\ \rho_n \end{array} \right\} \leq V_{snp}^{\max} \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{\min_e}^{mov} \leq \rho_e \leq \rho_{\max_e}^{mov} \leq 1 \\ 0 \leq \gamma_{\min_p}^{mov} \leq \gamma_p \leq \gamma_{\max_p}^{mov} \leq 1 \\ -1 < \hat{\theta}_{\min} \leq \hat{\theta}_{\min_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_f \leq \hat{\theta}_{\max_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_{\max} < 1 \\ \hat{R}_{\min} \leq \hat{R}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{R}_w \leq \hat{R}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{R}_{\max} \\ \hat{L}_{\min} \leq \hat{L}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{L}_w \leq \hat{L}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{L}_{\max} \\ \hat{C}_{\min} \leq \hat{C}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{C}_w \leq \hat{C}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{C}_{\max} \\ K_{IJ}^{\varpi}(\psi_c) W_J^{\varpi}(\psi_c) = F_I^{\varpi} \\ K_{IJ}^{\Sigma}(\psi_c) W_J^{\Sigma}(\psi_c) = L_I^{\Sigma} \end{array} \right. \quad (271)$$

4.2.6 Formulação Discreta do Problema Transiente para Coletores de Energia

Para o problema de coletores no domínio do tempo na forma discreta tem-se que:

$$\max_{\psi_c} F_{OBJ}^{C\tau_{lin}} \cong \left[\frac{dF_{OBJ}^{C\tau}}{d\psi_c} \right]_{\psi_c=\psi_{c_0}} \psi_c = \left[\left[w_{\tau} \frac{d\overline{Pot}_a^{\tau}}{d\psi_c} + w_R \frac{dPot_a^R}{d\psi_c} - w_c \left(\frac{1}{C_m^{\Sigma}} \right) \frac{dC_m^{\Sigma}}{d\psi_c} \right] \right]_{\psi_c=\psi_{c_0}} \psi_c \therefore \begin{cases} \overline{Pot}_a^{\tau} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^{\tau}(t) G_{IJ}^c W_J^{\tau}(t) dt \\ Pot_a^R = W_I^{\tau}(t_r) G_{IJ}^c W_J^{\tau}(t_r) \\ C_m^{\Sigma} = L_I^{\Sigma} W_I^{\Sigma} \end{cases} \quad (272)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{spie}}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_p \\ \odot_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{spie}}^{\max} \\ V_{\text{snp}}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{array}{l} \odot_p \\ \rho_n \end{array} \right\} \leq V_{\text{snp}}^{\max} \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{\min_e}^{\text{mov}} \leq \rho_e \leq \rho_{\max_e}^{\text{mov}} \leq 1 \\ 0 \leq \gamma_{\min_p}^{\text{mov}} \leq \gamma_p \leq \gamma_{\max_{ep}}^{\text{mov}} \leq 1 \\ -1 < \hat{\theta}_{\min} \leq \hat{\theta}_{\min_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_f \leq \hat{\theta}_{\max_f}^{\text{mov}} \leq \hat{\theta}_{\max} < 1 \\ \hat{R}_{\min} \leq \hat{R}_{\min_w}^{\text{mov}} \leq \hat{R}_w \leq \hat{R}_{\max_w}^{\text{mov}} \leq \hat{R}_{\max} \\ \hat{L}_{\min} \leq \hat{L}_{\min_w}^{\text{mov}} \leq \hat{L}_w \leq \hat{L}_{\max_w}^{\text{mov}} \leq \hat{L}_{\max} \\ \hat{C}_{\min} \leq \hat{C}_{\min_w}^{\text{mov}} \leq \hat{C}_w \leq \hat{C}_{\max_w}^{\text{mov}} \leq \hat{C}_{\max} \\ M_{IJ}(\psi_c) \ddot{W}_J^T(\psi_c) + C_{IJ}(\psi_c) \dot{W}_J^T(\psi_c) + K_{IJ}(\psi_c) W_J^T(\psi_c) = F_I^T \\ K_{IJ}^Z(\psi_c) W_J^Z(\psi_c) = L_I^Z \end{array} \right. \quad (273)$$

em que a integral da eq.(225) é resolvida utilizando a regra trapezoidal. Para a primeira estimativa do tempo t_f é realizada uma análise modal de MEF do domínio de projeto fixo completamente sólido, com o ângulo das fibras nulo e logo usando a eq.(227). Para as iterações restantes, t_f é determinado pela mesma eq.(227) com o fim de evitar a aparição de ruído numérico na resposta, causado quando considerado Δt muito pequenos. Contudo, o tempo da análise no problema de otimização deve ser selecionado de modo que $t_f \leq t_s$ como o intuito de diminuir o custo computacional e a complexidade do problema. Caso contrário, deverá ser usado o enfoque descrito na seção 2.4.9 para o cálculo da resposta transiente devido a que após $t_f > t_s$ a vibração da estrutura cessa e o capacitor da impedância elétrica acoplada inicia o seu ciclo de descarga. A potência instantânea no tempo de subida $\text{Pot}_a^R = W_I^T(t_r) G_{IJ}^c W_J^T(t_r)$ é calculada segundo a eq.(228), pelas mesmas razões expostas na seção 4.2.3 para o cálculo do deslocamento no mesmo instante e, logo:

$$\text{Pot}_a^R = \frac{\text{Pot}_a^P}{(1+M_p)^2} = \frac{W_I^T(t_p) G_{IJ}^c W_J^T(t_p)}{(1+M_p)^2} = \frac{W_I^T(t_p) G_{IJ}^c W_J^T(t_p)}{\left(1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right)}\right)^2} \quad (274)$$

4.2.7 Formulação Discreta do Problema Combinado para Coletores de Energia

Neste problema, o vetor de variáveis de projeto é modificado quando adicionada a variável $\hat{A}_{\omega}$. Assim, o novo vetor de variáveis de projeto é dado por:

$$\xi_d = \left\{ \begin{matrix} \psi_c \\ \hat{A}_\omega \end{matrix} \right\} \quad (275)$$

em que ξ_d tem dimensão $N + N_p + N_f + 3N_z + 1$. Assim, o problema combinado para atuadores na forma discreta é formulado como:

$$\begin{aligned} \max_{\psi_c, \hat{A}_\omega} F_{OBJ}^{CDlin} &\cong \left[\frac{dF_{OBJ}^{CD}}{d\xi_d} \right]_{\xi_d=\xi_{d0}} \xi_d = \left[w_\omega \frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\xi_d} + w_\tau \frac{d\overline{Pot}_a^\tau}{d\xi_d} + w_R \frac{dPot_a^R}{d\xi_d} - w_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\xi_d} - \right. \\ &\left. 2 \frac{w_D}{Pot_{mpa}^\tau} \left[\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{Pot_{mpa}^\tau} - 1 \right] \left[\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\xi_d} - \left(\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{Pot_{mpa}^\tau} \right) \frac{dPot_{mpa}^\tau}{d\xi_d} \right] \right]_{\xi_d=\xi_{d0}} \xi_d \cdot \begin{cases} \overline{Pot}_a^\omega = \frac{1}{2} \|W_I^\omega\| G_{IJ}^c \|W_J^\omega\| \\ \overline{Pot}_a^\tau = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^\tau(t) G_{IJ}^c W_J^\tau(t) dt \\ Pot_a^R = W_I^\tau(t_r) G_{IJ}^c W_J^\tau(t_r) \\ C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma \\ \overline{Pot}_{mpa}^\tau = F_{PotEst} \overline{Pot}_a^\tau \end{cases} \quad (276) \end{aligned}$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{aligned} &V_{spie}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{matrix} \rho_p \\ \odot_n \end{matrix} \right\} \leq V_{spie}^{\max} \\ &V_{snp}^{\min} \leq \{V_p \quad V_n\} \left\{ \begin{matrix} \odot_p \\ \rho_n \end{matrix} \right\} \leq V_{snp}^{\max} \\ &0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_{\min_e}^{mov} \leq \rho_e \leq \rho_{\max_e}^{mov} \leq 1 \\ &0 \leq \gamma_{\min_p}^{mov} \leq \gamma_p \leq \gamma_{\max_p}^{mov} \leq 1 \\ &-1 < \hat{\theta}_{\min} \leq \hat{\theta}_{\min_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_{fe} \leq \hat{\theta}_{\max_f}^{mov} \leq \hat{\theta}_{\max} < 1 \\ &\hat{R}_{\min} \leq \hat{R}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{R}_w \leq \hat{R}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{R}_{\max} \\ &\hat{L}_{\min} \leq \hat{L}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{L}_w \leq \hat{L}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{L}_{\max} \\ &\hat{C}_{\min} \leq \hat{C}_{\min_w}^{mov} \leq \hat{C}_w \leq \hat{C}_{\max_w}^{mov} \leq \hat{C}_{\max} \\ &0 \leq \hat{A}_{\omega\min}^{mov} \leq \hat{A}_\omega \leq \hat{A}_{\omega\max}^{mov} \leq 1 \\ &K_{IJ}^\omega(\xi_d) W_J^\omega(\xi_d) = F_I^\omega(\xi_d) \\ &M_{IJ}(\xi_d) \ddot{W}_J^\tau(\xi_d) + C_{IJ}(\xi_d) \dot{W}_J^\tau(\xi_d) + K_{IJ}(\xi_d) W_J^\tau(\xi_d) = F_I^\tau \\ &K_{IJ}^\Sigma(\xi_d) W_J^\Sigma(\xi_d) = L_I^\Sigma \end{aligned} \right. \quad (277)$$

No caso dos coletores de energia EPLA, existem dois tipos de carregamento, pois a excitação pode ser efetuada pela imposição de forças em postos especificados da estrutura ou por deslocamentos dos apoios como no caso de uma excitação com um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. No caso de excitação por imposição de força, a variável A_ω está presente no vetor de carga estendido F_I^ω , que multiplica os GDL onde forças mecânicas forem prescritas. Portanto, F_I^ω é redefinido para o problema segundo a notação estendida como:

$$F_I^\omega(A_\omega) = \begin{cases} F_{ds} = \begin{cases} A_\omega P_j^P & s = j \in P_j^P \\ 0 & s \neq j \in P_j^P \end{cases} & I \leq s \\ I_{\phi_r} & I \geq s + 1 \end{cases} \quad (278)$$

em que o sobrescrito P faz referência aos GDL estruturais em que houverem forças prescritas. Neste trabalho, não são prescritas correntes elétricas logo o vetor global de correntes elétricas I_{ϕ_r} é nulo. Já para o caso de excitação por prescrição de deslocamento, a variável A_ω está contida no vetor solução W_J^ω , que multiplica os GDL onde deslocamentos forem prescritos. Assim W_J^ω é redefinido para o problema conforme a notação estendida como:

$$W_J^\omega(A_\omega) = \begin{cases} d_i^L = d_i & J \leq i \\ d_j^P = A_\omega u_j^P & i + 1 \leq J \leq i + j \\ \phi_k & i + j + 1 \leq J \leq i + j + k \end{cases} \quad (279)$$

em que os sobrescritos L e P fazem referência aos GDL estruturais livres e prescritos, respectivamente e u_i^P é o vetor de deslocamentos impostos nodais. Lembrando de novo que, a dependência de A_ω com $\hat{A}_\omega$ vem dada pela eq.(217).

4.3 Flexibilidade Média no Problema de OT para EPLA na Forma Discreta

A resposta estática é utilizada no projeto de EPLA com MOT para avaliar a rigidez da EPLA mediante o termo denominado flexibilidade média (ver seção 3.8), que na forma discreta é dado por.

$$C_m^\Sigma = L_I^\Sigma W_I^\Sigma \quad (280)$$

Porém, neste trabalho a flexibilidade média calculada corresponde à camada do substrato (camada de material não piezelétrica) conservando as condições de contorno dos apoios e negligenciando as restrições de deslocamento, em razão de que o material do substrato geralmente possui maior resistência mecânica para suportar em maior proporção as cargas estruturais que o resto da EPLA. Igualmente, no caso dos coletores de energia são desconsideradas as impedâncias elétricas acopladas ao sistema (ver Figura 27).

Figura 27 – Problema de flexibilidade média para EPLA: (a) Atuador; (b) Coletor de energia excitado por força; (c) Coletor de energia excitado por deslocamento

Nas EPLA, o material piezoeletrico apresenta uma rigidez igual o maior do que nos materiais utilizados nos substratos (alumínio ou fibra de carbono com matriz de epóxi) enquanto a sua resistência mecânica pode ser consideravelmente baixa diminuindo o nível de cargas que pode ser suportado. Assim, é possível que se forem inclusas todas as camadas para o cálculo do termo da eq.(280), o algoritmo de otimização possa dar preferência à distribuição de material com maior rigidez, sendo isso indesejável.

Assim, o problema estático de MEF para a avaliação da flexibilidade média é redefinido tanto para atuadores quanto coletores EPLA como (ver Figura 27):

$$\begin{bmatrix} K_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} \\ K_{\phi_{d_{rm}}} & K_{\phi_{\phi_{rz}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{ds} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (281)$$

sendo que na notação estendida em ambos os casos pode ser expresso mediante:

$$K_{IJ}^{\Sigma} W_J^{\Sigma} = L_I^{\Sigma} \quad (282)$$

com L_I^{Σ} de dimensão $(6n + N)$ definido na direção de um deslocamento de referência $u_{i_{mc}}$ escolhido convenientemente como pode ser visto na ver Figura 27 conforme o caso:

- **Para atuadores:** na direção perpendicular ao vetor de deslocamento de saída $u_{j_{out}}$

$$L_I^{\Sigma} = \begin{cases} L_{ds} = \begin{cases} 1 & s \parallel i \in u_{i_{mc}} \wedge s \perp j \in u_{j_{out}} \\ 0 & s \perp i \in u_{i_{mc}} \wedge s \parallel j \in u_{j_{out}} \end{cases} & I \leq s \\ 0 & I \geq s + 1 \end{cases} \quad (283)$$

- **Para coletores com excitação por força:** na direção perpendicular ao vetor de força imposta $P_{j_{in}}$.

$$L_I^{\Sigma} = \begin{cases} L_{ds} = \begin{cases} 1 & s \parallel i \in u_{i_{mc}} \wedge s \perp j \in P_{j_{in}} \\ 0 & s \perp i \in u_{i_{mc}} \wedge s \parallel j \in P_{j_{in}} \end{cases} & I \leq s \\ 0 & I \geq s + 1 \end{cases} \quad (284)$$

- **Para coletores com excitação por deslocamento:** na direção perpendicular ao vetor de máximo deslocamento em magnitude $u_{j_{max}}$ quando aplicado o deslocamento prescrito $u_{i_{in}}^P$.

$$L_I^{\Sigma} = \begin{cases} L_{ds} = \begin{cases} 1 & s \parallel i \in u_{i_{mc}} \wedge s \perp j \in u_{j_{max}} \\ 0 & s \perp i \in u_{i_{mc}} \wedge s \parallel j \in u_{j_{max}} \end{cases} & I \leq s \\ 0 & I \geq s + 1 \end{cases} \quad (285)$$

4.4 Imposição de Simetria

Em determinados casos do projeto de EPLA, pode ser necessário obter uma topologia simétrica em relação a algum plano do domínio fixo de projeto, possibilitando consequentemente, a redução do custo computacional. Não obstante, a simetria não ocorre naturalmente devido a problemas numéricos derivados da aproximação de primeira ordem da PLS. Para garantir uma estrutura simétrica, devem-se modificar as sensibilidades (e, portanto, a função objetivo e as restrições), conforme o mapeamento da situação requerida. Assim, precisa-se de um mapeamento que garanta durante todo o processo de otimização, que as pseudo-densidades ρ_e ou pseudo polarizações⁵ $\hat{\theta}_e$ dos elementos finitos simétricos possuam o mesmo valor, e ao mesmo tempo, as pseudo-polarizações γ_e adquiram valores iguais ou opostos em relação ao plano de simetria ou antissimetria, respectivamente.

O mapeamento das variáveis de projeto consiste inicialmente em calcular a distância perpendicular desde o centroide de cada elemento até o plano de simetria ou antissimetria (ver Figura 28 e Figura 29). Logo, são comparadas as distâncias obtidas entre os elementos que possuem as mesmas coordenadas paralelas a ditos planos, estabelecendo que, dois elementos são simétricos (ou antissimétricos) se tiverem a mesma distância perpendicular calculada anteriormente. Se o plano de simetria (ou antissimetria) cruzar o centroide do elemento, tal entidade não é simétrica (ou antissimétrica) com nenhum outro elemento do domínio. Efetivado o mapeamento, são modificadas a função objetivo e as restrições do problema de otimização, conforme aos requisitos de projeto. A função objetivo é redefinida a partir de um

vetor de variáveis de projeto primárias $\chi_a^{\text{PRI}} = \begin{pmatrix} \rho_e^{\text{PRI}} \\ \gamma_e^{\text{PRI}} \\ \hat{\theta}_e^{\text{PRI}} \end{pmatrix}$, (variáveis de projeto de elementos que

possuem simetria ou antissimetria em relação a um plano) e um vetor de variáveis de projeto

singulares $\chi_a^{\text{SGL}} = \begin{pmatrix} \rho_e^{\text{SGL}} \\ \gamma_e^{\text{SGL}} \\ \hat{\theta}_e^{\text{SGL}} \end{pmatrix}$, (variáveis de projeto de elementos cujo centroide passa ou é

contido pelo plano de simetria ou antissimetria). O mesmo procedimento é também aplicado sobre as restrições de volume do problema.

⁵ Se um plano qualquer formar um ângulo θ com o eixo x positivo, o plano simétrico em relação ao dito eixo irá formar um ângulo $-\theta$. Consequentemente a sensibilidade correspondente seria subtraída.

Deste modo, o algoritmo de otimização somente calculará o conjunto de variáveis de projeto primárias (e não simétricas quando houver) e atualizará o conjunto das variáveis de projeto simétricas e antissimétricas de acordo com o mapeamento originado pelos planos de simetria e antissimetria. Neste trabalho, foram considerados dois tipos de simetria: para atuação no plano e para atuação fora do plano que contém o domínio fixo de projeto. Nos exemplos seguintes são considerados atuadores, porém a metodologia pode ser expandida para coletores de energia conforme o caso.

4.4.1 Simetria para atuação no plano

Considere o projeto de EPLA com atuação no plano da Figura 28, em que é pretendido maximizar o deslocamento $F_{OBJ} = u_{out}$ na direção indicada, polarizando a camada 1 positivamente enquanto a camada 2 negativamente, para garantir que somente se efetua o deslocamento no plano xy .

Figura 28 – Imposição de simetria no problema de otimização de EPLA para atuação no plano

O plano vertical divide a topologia resultante em duas metades exatamente iguais, por sua vez, o plano horizontal estabelece que as camadas 1 e 2 obtenham idêntica topologia, porém polarização oposta. O vetor de variáveis de projeto original χ_a têm dimensão 96, enquanto as variáveis de projeto primárias χ_a^{PRI} são aquelas em preto e em azul correspondentes às camadas 1 e 2, que no caso da Figura 28 tem dimensão 32. Neste exemplo, as variáveis singulares χ_a^{SGL} não existem pelo fato de que o plano de simetria vertical não passa pelo centroide de nenhum elemento finito. Assim, a linearização da função objetivo F_{OBJ} caso existam as variáveis de projeto singulares, converte-se em (em notação matricial):

$$F_{\text{OBJ}}^{\text{lin}} = \left[\left(\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{PRI}}} + \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{SIM}}} \right) \left(\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{PRI}}} - \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{ASI}}} \right) \left(\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{PRI}}} - \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{SIM}}} \right) \right] \bigg|_{\chi_a = \chi_{a_0}} \begin{pmatrix} \rho_e^{\text{PRI}} \\ \gamma_e^{\text{PRI}} \\ \theta_e^{\text{PRI}} \end{pmatrix} + \left[\left(\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{SGL}}} \quad \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{SGL}}} \quad \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{SGL}}} \right) \right] \bigg|_{\chi_a = \chi_{a_0}} \begin{pmatrix} \rho_e^{\text{SGL}} \\ \gamma_e^{\text{SGL}} \\ \theta_e^{\text{SGL}} \end{pmatrix} \quad (286)$$

em que $\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{PRI}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{PRI}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{PRI}}}$ são os vetores de sensibilidades da função objetivo em relação as variáveis de projeto primárias, $\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{SIM}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{ASI}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{SIM}}}$ são os vetores de sensibilidades da função objetivo em relação as variáveis de projeto simétricas e antissimétricas, respectivamente (variáveis de projeto em laranja e verde correspondentes aos elementos das camadas 1, 2 e 3 da Figura 28) e $\frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\rho_e^{\text{SGL}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\gamma_e^{\text{SGL}}}, \frac{dF_{\text{OBJ}}}{d\theta_e^{\text{SGL}}}$ são os vetores de sensibilidades em relação as variáveis de projeto singulares (variáveis de projeto correspondentes aos elementos cujo centroide passa ou é contido pelos planos de simetria). Com o mapeamento de simetria, o algoritmo somente calcularia a terceira parte das variáveis originais, diminuindo, portanto, o custo computacional

4.4.2 Simetria para atuação fora do plano

Para o projeto da EPLA com atuação fora do plano, considere o problema da Figura 29, em que é requerido maximizar o deslocamento $F_{\text{OBJ}} = u_{\text{out}}$ na direção indicada. Para alcançar esse objetivo, ambas as camadas piezelétricas 1 e 2 são polarizadas negativamente (para obter deslocamento no sentido contrário devem ser polarizadas positivamente), de modo a garantir que o deslocamento se produz fora do plano xy .

Figura 29 – Imposição de simetria no problema de otimização de EPLA para atuação fora do plano

Os planos laranja e verde dividem a topologia resultante em duas metades exatamente iguais, em relação aos planos xy e xz respectivamente, sendo que o plano verde estabelece idêntica polarização para as camadas 1 e 2. Para este exemplo, as variáveis de projeto primárias χ_a^{PRI} são aquelas em preto e em azul correspondentes às camadas 1 e 2 que no caso da Figura 29 tem dimensão 32 enquanto que as variáveis singulares χ_a^{SGL} não existem já que o plano de simetria vertical não passa pelo centroide de nenhum elemento finito. Além disso, o vetor de variáveis de projeto original χ_a têm dimensão 96. Portanto, a linearização da função objetivo F_{OBJ} transforma-se em (em notação matricial):

$$F_{OBJ}^{lin} = \left[\left(\frac{dF_{OBJ}}{d\rho_e^{PRI}} + \frac{dF_{OBJ}}{d\rho_e^{SIM}} \right) \left(\frac{dF_{OBJ}}{d\gamma_e^{PRI}} + \frac{dF_{OBJ}}{d\gamma_e^{SIM}} \right) \left(\frac{dF_{OBJ}}{d\theta_e^{PRI}} - \frac{dF_{OBJ}}{d\theta_e^{SIM}} \right) \right] \bigg|_{\chi_a = \chi_{a_0}} \begin{pmatrix} \rho_e^{PRI} \\ \gamma_e^{PRI} \\ \theta_e^{PRI} \end{pmatrix} + \left[\left(\frac{dF_{OBJ}}{d\rho_e^{SGL}} \right) \left(\frac{dF_{OBJ}}{d\gamma_e^{SGL}} \right) \left(\frac{dF_{OBJ}}{d\theta_e^{SGL}} \right) \right] \bigg|_{\chi_a = \chi_{a_0}} \begin{pmatrix} \rho_e^{SGL} \\ \gamma_e^{SGL} \\ \theta_e^{SGL} \end{pmatrix} \quad (287)$$

em que $\frac{dF_{OBJ}}{dy_e^{SIM}}$ é o vetor de sensibilidades da função objetivo em relação as variáveis de projeto de pseudo-polarização simétricas (variáveis de projeto em laranja e verde correspondentes aos elementos das camadas 1 e 3 da Figura 29).

4.5 Filtro de Sensibilidades

O filtro tem a finalidade de assegurar a obtenção de uma solução factível para o problema de otimização, evitar a formação de instabilidades conhecidas como instabilidades de tabuleiro e contornar o problema de dependência da malha. O filtro utilizado é baseado em sensibilidades, ou seja, depois do seu cálculo em cada elemento, elas são modificadas com base nas médias ponderadas das sensibilidades em relação às variáveis de projeto das vizinhanças. No caso do projeto de EPLA com o MOT, as sensibilidades filtradas correspondem às variáveis de projeto ρ_e , γ_e e $\hat{\theta}_e$ com uma aplicação do filtro de forma diferente.

No campo das pseudo-densidades ρ_e , é aplicado um filtro que aplica uma ponderação para as sensibilidades dos elementos que pertencem à mesma camada e outra para os elementos das camadas adjacentes. Isto é feito com o intuito de contornar as instabilidades de tabuleiro dentro da própria camada que pertence o elemento e para evitar a formação de ilhas de material que não tenham apoio de nenhuma camada adjacente, ou seja, material que estaria livre no espaço.

Para as variáveis de pseudo-polarização γ_e e de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$, o filtro somente é aplicado dentro da camada piezelétrica ou ortotrópica conforme o caso, com a finalidade de impedir a variação abrupta do domínio polarizado ou contribuir com a continuidade da fibra do material ortotrópico, respectivamente, o que facilitaria futuros processos de fabricação. A aplicação da mesma ponderação para todo o domínio de forma tridimensional, levaria a que a mesma topologia fosse reproduzida em todas as camadas sem importar o seu tipo de material, fato que restringiria o espaço de solução do problema de otimização.

A vizinhança de cada elemento é definida por uma dimensão característica ou raio de abrangência como mostrado na Figura 30, que para o caso de filtragem dentro da camada

(aplicado na camada preta) é identificado como r_{2Dmin} e para o caso de filtro entre camadas (aplicado num elemento da camada preta e que abrange elementos da camada amarela) é nomeado r_{3Dmin} .

Figura 30 – Regiões definidas pelos raios de filtro r_{2Dmin} e r_{3Dmin}

A função que define o filtro para uma variável de projeto χ_e (ρ_e , γ_e ou $\hat{\theta}_e$) é dada por (ANDREASSEN et al., 2011; SIGMUND, 2007):

$$C = \frac{1}{\chi_e \left(\sum_{i \in N_e} H_{ei} \right)} \sum_{i \in N_e} H_{ei} \chi_i \quad (288)$$

onde N_e é um conjunto definido para cada variável de projeto χ_e , esclarecendo que a função do filtro é aplicada separadamente para ρ_e , γ_e ou $\hat{\theta}_e$, ou seja, não existe ponderação entre elas. N_e está composto por i elementos, cujo centroide localiza-se a uma distância do e -ésimo elemento, menor do que o raio do filtro r_{nDmin} correspondente. O valor de r_{2Dmin} é definido conforme o projeto como:

$$r_{2Dmin} = \max \left(6, \left\lceil \frac{6}{l_e} \right\rceil l_e \right) [\text{mm}] \because l_e = \min(b_e, h_e) \quad (289)$$

sendo l_e a mínima dimensão no plano da casca do elemento finito isoparamétrico com b_e e h_e como o seu comprimento e sua altura e $[\cdot]$ a notação correspondente à função teto. Enquanto r_{3Dmin} é calculado como:

$$r_{3Dmin} = \frac{1}{10} [10\max(h_k) + 0,5] [\text{mm}] \quad (290)$$

sendo h_k a espessura da k -ésima camada (tendo um total de C_t camadas) e $[\cdot]$ a notação correspondente à função piso. H_{ei} é um fator de peso determinado por:

$$H_{ei} = \begin{cases} r_{2Dmin} - r_{ei}, & \text{se } r_{ei} < r_{2Dmin} \wedge z_e = z_i \\ 0, & \text{se } r_{ei} \geq r_{2Dmin} \wedge z_e = z_i \\ r_{3Dmin} - r_{ei}, & \text{se } r_{ei} < r_{3Dmin} \wedge \chi_e \in \rho_e \wedge z_e \neq z_i \\ 0, & \text{se } r_{ei} \geq r_{3Dmin} \wedge \chi_e \in \rho_e \wedge z_e \neq z_i \end{cases} \quad (291)$$

com $r_{ei} = \Delta(i, e)$ como a distância entre os centroides dos elementos i -ésimo e e -ésimo, e por sua vez, z_e e z_i como as coordenadas na direção z do centroide do e -ésimo e o i -ésimo elemento, respectivamente.

Figura 31 – Efeito do refinamento da malha sobre o conjunto N_e definido para a utilização do filtro de sensibilidades

Os pesos estabelecidos por H_{ei} são independentes da malha, já que se a malha for refinada, somente se produziria um incremento no número de lugares em que H_{ei} seria avaliada (ver Figura 31), (GUEST; PREVOST; BELYTSCHKO, 2004). O termo H_{ei} pode ser visto como uma matriz da forma:

$$H_{ei} = \begin{bmatrix} H_{ei}^p & 0 & 0 \\ 0 & H_{ei}^y & 0 \\ 0 & 0 & H_{ei}^{\hat{\theta}} \end{bmatrix} \quad (292)$$

sendo uma matriz de dimensão $(N+N_p+N_f) \times (N+N_p+N_f)$, em que cada submatriz H_{ei}^x representa a ponderação das sensibilidades para o tipo de variável χ_e . De igual forma, a função de filtro pode ser transformada numa matriz diagonal com componentes dadas por:

$$C_{ei} = \begin{cases} 0 & \forall e \neq i \\ \frac{H_{ej}\chi_j}{\chi_i H_{ik} \vec{1}_k} & \forall e = i \wedge \chi_i \neq 0 \end{cases} \quad (293)$$

em que não é levado em conta a convenção da somatória sobre os índices e e i . Assim, o produto $H_{ej}\chi_j$ representa o produto escalar entre a e -ésima fila da matriz H_{ei} e o vetor de variáveis de projeto χ_j e, do mesmo modo, o produto $\chi_i H_{ik} \vec{1}_k$ representa o escalar da i -ésima variável de projeto χ_i vezes o produto interno entre a i -ésima fila da matriz H_{ik} e um vetor de uns de dimensão k , simbolizado por $\vec{1}_k$.

Consequentemente, numerador e denominador da fração da eq.(293) são escalares e, portanto, é computado um único valor na diagonal da matriz C_{ei} . Para evitar a divisão por uma variável χ_i nula (lembrando o caso das variáveis de pseudo-polarização γ_e ou de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$), χ_i é substituído por $\rho_{\min}$ ou um número pequeno positivo como recomendado em (ANDREASSEN et al., 2011). Finalmente, as sensibilidades modificadas pelo filtro são calculadas como:

$$\widehat{\frac{dF_{OBJ}}{d\chi_e}} = C_{ei} \frac{dF_{OBJ}}{d\chi_i} \quad (294)$$

4.6 Penalização de Instabilidades Numéricas

As instabilidades numéricas de escalas de cinza e de tabuleiro podem ser contornadas mediante funções de penalização, as quais afetam diretamente a função objetivo do problema de otimização (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). A função multiobjetivo no problema de projeto de EPLA na forma discreta incluindo as funções de penalização de instabilidades numéricas é:

$$F_{EPLA}^{MO} = F_{OBJ}^{lin} - w_{VPI}F_{VPI} - w_{CCF}F_{CCF} - w_{POF}F_{POF} \quad (295)$$

cujos objetivos na otimização são:

- Maximização da função F_{OBJ}^{lin} para atuadores ou coletores, seja no domínio da frequência ou no domínio do tempo, conforme o caso.
- Minimização da função F_{VPI} para eliminar as variáveis de projeto intermediárias.
- Minimização da função F_{CCF} para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro.
- Minimização da função F_{POF} para limitar a aparição de fibras ortogonais entre variáveis de projeto adjacentes.

e em que as restrições do problema não sofrem nenhuma alteração, w_{VPI} , w_{CCF} e w_{POF} são pesos no domínio dos números reais positivos que ponderam a relevância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa (ver seção 4.8).

A aproximação da função objetivo pela PLS (ver APÊNDICE D) depende das sensibilidades em relação às variáveis de projeto, assim a sensibilidade da função multiobjetivo será:

$$\frac{dF_{EPLA}^{MO}}{d\chi_a} = \frac{dF_{OBJ}^{lin}}{d\chi_a} - w_{VPI} \frac{dF_{VPI}}{d\chi_a} - w_{CCF} \frac{dF_{CCF}}{d\chi_a} - w_{POF} \frac{dF_{POF}}{d\chi_a} \quad (296)$$

As funções F_{VPI} e F_{CCF} e as suas sensibilidades são mostradas no APÊNDICE C, pelo fato de que não são contribuições originais deste trabalho enquanto a função F_{POF} constitui uma contribuição própria do trabalho, sendo explicada na seção 4.7. A utilização da função F_{VPI} é justificada toda vez que, a penalização do modelo de material PEMAP-P (ver seção 6.1.4) não garante a obtenção de topologias $0-1$ no final do processo de otimização (contendo somente material sólido ou vazio) deixando sempre valores intermediários. No entanto, esses valores intermediários não são admissíveis pelo fato de que são necessários contornos bem definidos na topologia para futuras operações de pós-processamento. Os fatores de penalização poderiam ser aumentados excessivamente, não obstante, o problema de otimização retornaria à sua natureza discreta sendo, desse modo, mal-posto e com múltiplos mínimos locais como apontado na seção 3.2. Assim, a função F_{VPI} tem como objetivo levar as variáveis de projeto intermediárias para valores próximos de 0 ou 1 .

Por outro lado, a função F_{CCF} é utilizada em todo o processo de otimização com a finalidade de prevenir a aparição da instabilidade de tabuleiro nos campos das variáveis de pseudo-densidade ρ_e e de pseudo-polarização γ_e , especialmente quando desligado o filtro de sensibilidades nas últimas iterações do processo de otimização. A desativação do filtro tem como finalidade contribuir à eliminação das escalas de cinza presentes na topologia (objetivo atribuído principalmente à função F_{VPI}), porém, pode ser causada a recorrência de instabilidades de tabuleiro se essa ação for realizada de forma prematura. Consequentemente, a função F_{CCF} é inclusa na função multiobjetivo com o intuito de evitar tal recorrência.

4.7 Função de Penalização de Ortogonalidade da Fibra

O modelo de interpolação da fibra MIAFIB não tem limitação para as transições entre arranjos de materiais ortotrópicos, sendo que transições abruptas podem ocasionar pontos de concentração de tensão mecânica levando à estrutura a uma condição de falha (ver Figura 32). Além disso, a complexidade no processo de fabricação pode ver-se incrementada. Neste trabalho, não foram tratadas restrições de restrição mecânica pelos motivos explicados nas seções 3.7 e 4.2.1, porém a aplicação desta abordagem está prevista em trabalhos futuros.

Assim, o termo $w_{\text{POF}}F_{\text{POF}}$ é acrescentado na função objetivo em todo o processo de otimização quando o peso $w_{\text{POF}} \neq 0$, com a finalidade de prevenir a aparição de fibras ortogonais entre variáveis de projeto adjacentes de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$. Por outro lado, a mesma função pode ser utilizada para controlar o paralelismo da solução, se for desejável limitar o espaço de solução do problema de otimização. A função F_{POF} é definida como

$$F_{\text{POF}} = \left(\sum_{f=1}^{n_{\text{intf}}} (6P_{\text{par}} - P_{\text{ort}})_f \right)^2 = \left(6P_{\text{par}}n_{\text{intf}} - \sum_{f=1}^{n_{\text{intf}}} (P_{\text{ort}})_f \right)^2 \quad (297)$$

sendo n_{intf} o número de nós interiores (nós que não pertencem à fronteira do domínio fixo de projeto) presentes nas camadas ortotrópicas do domínio de projeto e P_{ort} uma função expressa por:

$$P_{\text{ort}}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) = v_1^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + v_2^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3) + v_3^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_4) + v_4^2(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3) + v_5^2(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_4) + v_6^2(\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) \quad (298)$$

em que onde $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4 \in]-1,1[$ são as variáveis de projeto de pseudo-orientação (ver seção 3.3) em torno do nó interior considerado, sendo que nos nós pertencentes às fronteiras do domínio de projeto, P_{ort} não é avaliada. Já, a função v_i está dada por:

$$v_i(\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b) = \cos(\pi\hat{\theta}_a) \cos(\pi\hat{\theta}_b) + \sin(\pi\hat{\theta}_a) \sin(\pi\hat{\theta}_b) = \cos(\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b)) = \left[\sum_{P_f=0}^{P_{f\text{max}}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f)!} (\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b))^{2P_f} \right] \quad (299)$$

sendo v_i o produto escalar ou produto interior quando considerado $\pi\hat{\theta}_a$ e $\pi\hat{\theta}_b$ como sendo vetores unitários e em que foi utilizada a aproximação por séries de Taylor das funções seno e cosseno como no modelo de interpolação MIAFIB (ver seção 3.3). $\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b$ representam duas variáveis de projeto de pseudo-orientação, em torno de um nó interior n_{intf} , conforme o mapeamento da Figura 32.

Figura 32 – Função de penalização de ortogonalidade da fibra aplicada às variáveis de pseudo-orientação para $P_{\text{par}}=1$

A função F_{POF} avaliada num nó interior n_{intf} é uma medida da ortogonalidade entre as variáveis de projeto $\hat{\theta}_i$ ao redor de tal nó, sendo indesejável que alcance valores como os observados nos casos da Figura 32 diferenciados por um retângulo vermelho tracejado. Por outra parte, o termo $P_{\text{par}} \in [0,1]$ é um escalar que controla o paralelismo da solução, em que se for nulo são permitidos arranjos de material ortotrópico completamente perpendiculares entre si enquanto que o valor unitário corresponderia às soluções com todas as fibras paralelas. Deste modo, P_{par} pode ser interpretado como o quadrado do cosseno do máximo ângulo entre duas fibras adjacentes imposto na solução, ou seja:

$$P_{\text{par}} = \cos^2 \left(\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b) \right) \quad (300)$$

e, portanto, o ângulo máximo entre duas fibras adjacentes que deveria aparecer na solução é:

$$\theta_{\text{relmax}} = \pi \hat{\theta}_{\text{relmax}} = \frac{\pi}{180 \times 10^b} \left\lfloor \frac{180 \times 10^b}{\pi} \cos^{-1}(\sqrt{P_{\text{par}}}) + 0.5 \right\rfloor \quad (301)$$

sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a notação correspondente à função piso e b o número de casas decimais desejadas para o ângulo θ quando for expresso em graus (Neste trabalho $b=0$, ver seção 3.3). Isto quer dizer que, se for desejável uma solução com um ângulo máximo entre fibras adjacentes de $\theta = 30^\circ$ logo $P_{\text{par}} = 0,75$. No entanto, pode ocorrer que por condicionamento numérico não seja possível alcançar exatamente o valor de θ_{relmax} , porém um valor muito próximo, pelo fato de que os ângulos candidatos no problema são dados pela precisão do espaço de solução (ver eq.(197) e eq.(301)). O valor máximo da função penalizadora F_{POF} para $N_{\text{cam}} = N_x N_y$ variáveis de projeto por camada, C_f camadas ortotrópicas (variáveis de projeto $\hat{\theta}_e$) é:

$$F_{\text{POF}}^{\text{max}} = 6C_f(N_x - 1)(N_y - 1) = 6C_f n_{\text{intf}} \therefore n_{\text{intf}} = (N_x - 1)(N_y - 1) \quad (302)$$

valor obtido quando existe uma alternância entre fibras perpendiculares nas camadas ortotrópicas (com $P_{\text{par}} = 1$, sendo análogo a um tabuleiro de xadrez). N_i é o número de variáveis de projeto na direção i quando considerada uma malha regular nas camadas. Assim, o objetivo da otimização é minimizar o valor dessa função de modo que o arranjo de material em torno do nó considerado evite que fibras adjacentes sejam ortogonais e, além disso, que a solução apresente uma certa porção de regiões paralelas.

A função F_{POF} é ponderada na função objetivo da eq.(295) mediante o peso w_{POF} , sendo determinado por tentativa e erro para cada projeto, prevendo variações abruptas ou comportamentos inesperados na função objetivo e com uma estimativa inicial de 0,1. Contudo, na seção 4.8 é mostrado um esquema iterativo para o cálculo dos pesos que ponderam a função objetivo com dependência em relação aos valores dos seus termos. No entanto, existe uma desvantagem quando utilizado um peso fixo em todas as iterações para ponderar o termo F_{POF} . Se F_{POF} não for completamente nulo quando minimizado, um valor de excessivo de w_{POF} em relação a os outros pesos de ponderação da função objetivo (ver seção 4.8) pode causar variações abruptas nas variáveis de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$ enquanto para valores reduzidos a função objetivo pode estagnar num mínimo local. Apesar disso, mesmo que w_{POF} for variável, há a possibilidade que a solução fique confinada num mínimo local se P_{par} for constante ao longo das iterações.

Assim, foi adotada uma estratégia para contornar tanto mínimos locais quanto comportamentos abruptos da função objetivo, variando os parâmetros w_{POF} e P_{par} conforme o número de iterações e o valor da função objetivo. Logo, para w_{POF} na k -ésima iteração do processo de otimização, tem-se:

$$(w_{POF})_k = \begin{cases} (w_{POF})_0 & k \leq 0.05z_f \\ w_{POF}^{\min} \leq (\psi)_k \left[\frac{(F_{POF})_k}{(F_{POF})_{k-1}} \right] (w_{POF})_0 \leq (w_{POF}^{\max})_k & k > 0.05z_f \end{cases} \therefore \begin{cases} w_{POF}^{\min} = 0,1(w_{POF})_0 \\ (w_{POF}^{\max})_k \text{ (ver eq.(304))} \\ (r)_k \text{ (ver eq.(305))} \end{cases} \quad (303)$$

em que z_f é o número máximo de iterações esperado e os valores dos parâmetros ψ , $w_{POF}^{\min}$ e $w_{POF}^{\max}$ determinados por experimentação numérica Ψ é um fator que amplifica o peso $(w_{POF})_k$ no caso que em duas iterações consecutivas seja obtido $(w_{POF}^{\max})_k$ e $(F_{POF})_k \leq (F_{POF})_{k-1}$. Na condição de que $(F_{POF})_k = (F_{POF})_{k-1}$ existe a possibilidade de alcançar um mínimo local e por tal motivo $(w_{POF})_k$ e $(w_{POF}^{\max})_k$ são incrementados. Como pode ser visto, ψ e $w_{POF}^{\max}$ são dependentes do número de iterações e do valor da função objetivo, portanto:

$$(w_{POF}^{\max})_k = \begin{cases} 10(w_{POF})_0 & k \leq 0.05z_f \\ 1,2(w_{POF}^{\max})_{k-1} & k > 0.05z_f \wedge (w_{POF})_k = (w_{POF})_{k-1} \wedge (F_{POF})_k \leq (F_{POF})_{k-1} \\ (w_{POF}^{\max})_{k-1} & \text{qualquer outro caso} \end{cases} \quad (304)$$

$$(\psi)_k = \begin{cases} 1,1 & k > 0.05z_f \wedge (w_{POF})_k = (w_{POF})_{k-1} \wedge (F_{POF})_k \leq (F_{POF})_{k-1} \\ 1 & \text{qualquer outro caso} \end{cases} \quad (305)$$

Já na k -ésima iteração do processo de otimização, o parâmetro de controle do paralelismo da solução P_{par} é definido como:

$$(P_{par})_k = \begin{cases} p_{par}^{\max} & k \leq 0.05z_f \\ \max \left(0,95(P_{par})_{k-1}, p_{par}^{\min} \right) & k > 0.05z_f \wedge (w_{POF})_k = (w_{POF})_{k-1} \wedge (F_{POF})_k \leq (F_{POF})_{k-1} \\ (P_{par})_{k-1} & \text{qualquer outro caso} \end{cases} \therefore \begin{cases} p_{par}^{\min} = 0,7 \\ p_{par}^{\max} = 0,5 \end{cases} \quad (306)$$

sendo que com os valores limites adotados para P_{par} , são esperados ângulos máximos entre fibras adjacentes no intervalo dos números naturais $\theta_{\text{relmax}} \in \mathbb{N} : \theta_{\text{relmax}} = \{33, 34, 35 \dots, 45\}$. Para estimar a porção ortogonal da solução (ou paralela desde outro ponto de vista) é criado um índice de ortogonalidade dado por:

$$I_P = \frac{F_{\text{FOP}}}{(F_{\text{FOP}}^{\text{max}})^2} \in [0, 1] \quad (307)$$

em que F_{FOP} e $F_{\text{FOP}}^{\text{max}}$ são dados pelas eq.(297) e (302), respectivamente. O índice de ortogonalidade I_P indica a porcentagem estimada de variáveis de projeto adjacentes $\hat{\theta}_i$ cujo ângulo relativo ultrapassa θ_{relmax} , ou dito de outra forma, indica a porcentagem $1 - I_P$ de variáveis de projeto adjacentes $\hat{\theta}_i$ cujo ângulo relativo é menor do que θ_{relmax} . Para ilustrar esta metodologia, na Figura 33 é observada uma solução do problema proposto na seção 4.4.2 mostrado na Figura 29 considerando 50 elementos finitos e solução com ângulos discretos (parâmetro $b=0$). A solução apresenta um máximo ângulo relativo entre fibras adjacentes de $\theta_{\text{relmax}} = 37^\circ$, sendo que no final das iterações $P_{\text{par}} = 0,665$, ou seja, é esperado $\theta_{\text{relmax}} = 35^\circ$ e com um índice de ortogonalidade de 5,48%. Assim, pode ser visto que por causa da aproximação discreta da solução θ_{relmax} é dois graus maior do que o ângulo máximo calculado pela eq.(301).

Figura 33 – Exemplo de aplicação da função de penalização de ortogonalidade da fibra para $P_{\text{Parmax}}=0,7$ e $P_{\text{Parmin}}=0,5$ e $b=0$

A sensibilidade da função F_{CCF} , é dada por:

$$\frac{dF_{\text{POF}}}{d\chi_a} = \frac{d}{d\chi_a} \left[\left(6P_{\text{par}}n_{\text{intf}} - \sum_{f=1}^{n_{\text{intf}}} (P_{\text{ort}})_f \right)^2 \right] = -2 \left(6P_{\text{par}}n_{\text{intf}} - \sum_{f=1}^{n_{\text{intf}}} (P_{\text{ort}})_f \right) \left(\sum_{f=1}^{n_{\text{intf}}} \left(\frac{dP_{\text{ort}}}{d\chi_a} \right)_f \right) \quad (308)$$

em que a sensibilidade $\frac{dF_{\text{POF}}}{d\chi_a}$ é um vetor de dimensão $N+N_p+N_f$ pelo fato de que:

$$\frac{dF_{\text{POF}}}{d\chi_a} = \left\{ \odot_N \quad \odot_{N_p} \quad \frac{dF_{\text{POF}}}{d\hat{\theta}_e} \right\} \quad (309)$$

lembrando que F_{POF} não depende das variáveis de projeto pseudo-densidade ρ_e e de pseudo-polarização γ_e . Enquanto, a sensibilidade da função P_{ort} é:

$$\frac{dP_{\text{ort}}}{d\chi_a} = 2v_1 \frac{dv_1}{d\chi_a} + 2v_2 \frac{dv_2}{d\chi_a} + 2v_3 \frac{dv_3}{d\chi_a} + 2v_4 \frac{dv_4}{d\chi_a} + 2v_5 \frac{dv_5}{d\chi_a} + 2v_6 \frac{dv_6}{d\chi_a} \quad (310)$$

em que conforme aos argumentos da função v_i , as sensibilidades são determinadas por:

$$\frac{dv_i(\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b)}{d\hat{\theta}_a} = -\pi \sin \left(\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b) \right) = \pi \sin \left(\pi(\hat{\theta}_b - \hat{\theta}_a) \right) = \left[\sum_{P_f=0}^{P_{f\text{max}}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f+1)!} \left(\pi(\hat{\theta}_b - \hat{\theta}_a) \right)^{2P_f+1} \right] \quad (311)$$

$$\frac{dv_i(\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b)}{d\hat{\theta}_b} = \pi \sin \left(\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b) \right) = \left[\sum_{P_f=0}^{P_{f\text{max}}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f+1)!} \left(\pi(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_b) \right)^{2P_f+1} \right] \quad (312)$$

4.8 Cálculo dos Pesos w de Ponderação da Função Objetivo.

Os parâmetros w_i da função objetivo são escolhidos visando que o valor final da função objetivo esteja no intervalo entre 1 e 100 com a finalidade de obter um melhor comportamento numérico do algoritmo de otimização e aumentar a probabilidade de sucesso

do MOT. Tradicionalmente os termos são escolhidos de forma que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, porém, podem

existir termos de diferentes ordens de grandeza, utilizando em ocasiões a função $\ln(x)$ para contornar essa situação. Não obstante, esse enfoque não garante que a função objetivo esteja entre 1 e 100, intervalo às vezes recomendado em algoritmos de otimização (SVANBERG, 1987, 2001) para um melhor comportamento numérico e evitar erros de truncamento em termos de ordens de grandeza muito grandes ou muito pequenos (caso 10^{100} ou 10^{-100}).

Para explicar o método, será utilizada a função objetivo do problema com um maior número de termos incluindo as funções de penalização de instabilidades numéricas explicadas na seção 4.6 e no APÊNDICE C que para o caso, é qualquer das funções dos problemas combinados. A forma do problema é:

$$F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}} = w_{\varpi} F^{\varpi} + w_{\tau} F^{\tau} + w_R F^R - w_C \ln(C_m^{\Sigma}) - w_D F^D - w_{\text{VPI}} F_{\text{VPI}} - w_{\text{CCF}} F_{\text{CCF}} - w_{\text{POF}} F_{\text{POF}} \quad (313)$$

em que as funções tomadas separadamente são todas positivas, portanto a somatória dos termos positivos de $F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}}$ continuará sendo positiva enquanto a somatória dos termos negativos de $F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}}$ será igualmente negativa. Se forem selecionados pesos arbitrários tal que

$$w_i \geq 1, \text{ com pesos normalizados } \bar{w}_i = \left(\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right) < 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1, \text{ de modo que } 1 \leq F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}} \leq$$

100, logo para a eq.(313):

$$\left[\sum_{i=1}^8 w_i \right] F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}} = [w_{\varpi} F^{\varpi} + w_{\tau} F^{\tau} + w_R F^R - w_C \ln(C_m^{\Sigma}) - w_D F^D - w_{\text{VPI}} F_{\text{VPI}} - w_{\text{CCF}} F_{\text{CCF}} - w_{\text{POF}} F_{\text{POF}}] \quad (314)$$

que quando maximizada é equivalente a maximizar a função $F_{\text{OBJ}}^{\text{MO}}$, pois a multiplicação por uma constante não afeta o processo de otimização. Seja:

$$F_{OBJ}^+ = \sum_{i=1}^{n^+} w_i^+ F_i^+ = w_{\varpi} F^{\varpi} + w_{\tau} F^{\tau} + w_R F^R \quad (315)$$

$$F_{OBJ}^- = \widehat{w} \sum_{i=1}^{n^-} \widehat{w}_i^- F_i^- = \widehat{w} (w_C \ln(C_m^{\Sigma}) + w_D F^D + w_{VPI} F_{VPI} + w_{CCF} F_{CCF} + w_{POF} F_{POF}) \quad (316)$$

sendo $n^+ = 3$ e $n^- = 5$ para o caso analisado. A função objetivo é então:

$$F_{OBJ}^{MO} = F_{OBJ}^+ - F_{OBJ}^- = F_{OBJ}^+ - \widehat{w} \sum_{i=1}^{n^-} \widehat{w}_i^- F_i^- = F_{OBJ}^+ - \sum_{i=1}^{n^-} w_i^- F_i^- \therefore w_i^- = \widehat{w} \widehat{w}_i^- \quad (317)$$

portanto, o peso $\widehat{w} > 0$ para a k -ésima iteração do processo de otimização será:

$$(\widehat{w})_k = \min \left(\gamma \frac{F_{OBJ}^+}{\sum_{i=1}^{n^-} \widehat{w}_i^- F_i^-}, \widehat{w}_{\max} \right)_k \quad (318)$$

em que $\gamma \in]0,1[$ é a ponderação da função positiva F_{OBJ}^+ , sendo recomendado para facilitar o cálculo que, $1 \leq \widehat{w}_i^- \leq 10$ e $\widehat{w}_i^- = 1$ se F_{OBJ}^- possuir somente um termo. O termo $\widehat{w}_{\max}$ é o peso obtido quando F_{OBJ}^{MO} alcança um valor mínimo $(F_{OBJ}^{MO})_{\min}$ determinado pelo usuário.

Assim, sua estimativa vem dada por:

$$(\widehat{w}_{\max})_k = \left(\frac{F_{OBJ}^+ - (F_{OBJ}^{MO})_{\min}}{\sum_{i=1}^{n^-} w_i^- F_i^-} \right)_k \quad (319)$$

sendo que neste trabalho $(F_{OBJ}^{MO})_{\min} = 1$. Afinal, o peso ponderado total para cada termo da função negativa F_{OBJ}^- na k -ésima iteração será calculado como:

$$(w_i^-)_k = (\hat{w}\hat{w}_i^-)_k \quad (320)$$

Outro enfoque de otimização multiobjetivo com pesos adaptativos pode ser visto em Zhu, Zhang and Fatikow (2014).

4.9 Algoritmo de Otimização e Limites Móveis

No projeto de EPLA, o problema de otimização é não linear e, portanto, algoritmos capazes de manejar grande número de restrições e variáveis de projeto de maneira eficiente são necessários para conseguir resolvê-los. A PLS (ver APÊNDICE D) foi algoritmo de otimização escolhido neste trabalho, pelo fato de ser um método simples de programar e com um custo computacional reduzido, pois requer somente o cálculo das primeiras derivadas (ou sensibilidades, ver capítulo 5) da função objetivo e as restrições em relação às variáveis de projeto. Para alcançar uma solução, o problema é aproximado mediante sucessivos subproblemas de otimização linear requerendo que a função objetivo e as restrições sejam funções lineares em relação às variáveis de projeto (HAFTKA; GÜRDAL, 1992).

Outro fator que foi levado em conta para a seleção da PLS como algoritmo de otimização é a experiência previa com problemas transientes (MELLO; SALAS; SILVA, 2012; SALAS; MELLO, 2011) onde a PLS obteve sucesso na solução do problema proposto. Além disso, em Salas (2012) foi observado que, na otimização de uma função objetivo integral empregando o algoritmo MMA em sistemas de primeira ordem em regime transiente, a maximização da área sob a curva é ponderada com maior relevância ao invés da minimização do tempo de resposta sendo a convergência lenta e apresentando em alguns casos instabilidades numéricas. Entre os algoritmos de PLS mais comuns podem-se citar o método SIMPLEX (DANTZIG; ORDEN; WOLFE, 1955) e o algoritmo KARMAKAR (KARMAKAR, 1984). No software MATLAB® encontra-se implementada, além do SIMPLEX, a rotina LIPSOL ou “*Linear-programming Interior-Point SOLvers*” (ZHANG, 1998) que é o algoritmo predefinido na função “*linprog*”. Alguns dos trabalhos encontrados na literatura empregando a PLS são Carbonari, Silva e Nishiwaki (2005); Kögl e Silva (2005); Gibert e Austin (2007); Carbonari, Silva e Paulino (2009); Donoso e Bellido (2009), Nakasone e Silva (2010) e Mello, Salas e Silva (2012). Contudo, neste trabalho foi empregado o algoritmo CVX ou “*Matlab Software for Disciplined Convex Programming*”

(GRANT; BOYD, 2014, 2008), o qual é uma distribuição para MATLAB baseada em programação convexa. Quando usado o CVX, a cada iteração do processo de otimização, é construído o problema linear como um caso particular do problema convexo (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Até agora, não se encontrou nenhum trabalho que use o algoritmo CVX no contexto de OT.

Neste trabalho, para determinar os limites móveis se empregou uma metodologia baseada na mudança de sinal da diferença de cada variável de projeto entre duas iterações consecutivas sendo que todos os valores dos parâmetros envolvidos foram obtidos por experimentação numérica. Seja $(\chi_a)_k$ o vetor de variáveis de projeto da k -ésima iteração do processo de otimização, logo o valor do limite móvel correspondente é determinado por:

$$(\Delta\chi_a)_k = \begin{cases} \Delta\chi_{a_{\max}} & k \leq 2 \\ \min(\vartheta_{\max}(\Delta\chi_a)_{k-1}, \Delta\chi_{a_{\max}}) & [\text{sign}((\chi_a)_{k-2} - (\chi_a)_{k-3})][\text{sign}((\chi_a)_{k-1} - (\chi_a)_{k-2})] > 0 \\ \max(\vartheta_{\min}(\Delta\chi_a)_{k-1}, \Delta\chi_{a_{\min}}) & [\text{sign}((\chi_a)_{k-2} - (\chi_a)_{k-3})][\text{sign}((\chi_a)_{k-1} - (\chi_a)_{k-2})] \leq 0 \end{cases} \quad (321)$$

em que $\Delta\chi_{a_{\min}}, \Delta\chi_{a_{\max}}$ são os valores mínimo e máximo dos limites móveis, $\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}$ são os fatores multiplicativos mínimo e máximo e $\text{sign}(x)$ é a função sinal. Os fatores multiplicativos ϑ foram configurados como:

$$\vartheta = \begin{cases} \vartheta_{\min} & 0,5 \\ \vartheta_{\max} & \begin{cases} 1,7 & \text{Para atuadores} \\ 1,4 & \text{Para coletores de energia} \end{cases} \end{cases} \quad (322)$$

enquanto os valores extremos dos limites móveis para todas as variáveis de projeto excetuando as variáveis de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$ são:

$$\Delta\chi_a = \begin{cases} \Delta\chi_{a_{\min}} & 10^{-7} \\ \Delta\chi_{a_{\max}} & \begin{cases} 0,03 & \text{No problema harmônico de coletores e no problema combinado (atuadores e coletores)} \\ 0,035 & \text{No problema harmônico de atuadores e no problema transiente (atuadores e coletores)} \end{cases} \end{cases} \quad (323)$$

Consequentemente os limites móveis são calculados com:

$$(\chi_{\max a}^{\text{mov}})_k = \min((\chi_a + \Delta\chi_a)_k, \chi_{\max}) \quad (324)$$

$$(\chi_{\min a}^{\text{mov}})_k = \max((\chi_a - \Delta\chi_a)_k, \chi_{\min}) \quad (325)$$

Pelo fato de que a precisão das variáveis de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$ depende do parâmetro b (ver seção 3.3), o cálculo dos limites móveis da forma anteriormente explicada pode levar para um mínimo local. Se $b=0$, $\Delta\chi_{a\min}$ equivale a uma variação mínima de $1,8 \times 10^{-5}$ graus, sendo que os ângulos possíveis na solução encontram-se no domínio dos números inteiros. Assim, se em duas iterações a variável de projeto $\hat{\theta}_e$ alcançar o mesmo valor, o limite móvel $\Delta\chi_a = \Delta\chi_{a\min}$, e portanto, o seu valor não mudaria nas restantes iterações do processo de otimização. Para contornar essa situação, é definida uma estratégia que consiste em fazer com que os limites móveis $\Delta\chi_a$ calculados previamente para as variáveis $\hat{\theta}_e$ na eq.(321), variem linearmente conforme o número de iterações do processo de otimização, ou seja:

$$(\Delta\hat{\theta}_e)_k = \begin{cases} \left(1 - \frac{k}{2z_f}\right) \Delta\chi_a & \hat{\theta}_e \in \chi_a \wedge (k \leq 2 \vee [\text{sign}((\chi_a)_{k-2} - (\chi_a)_{k-3})][\text{sign}((\chi_a)_{k-1} - (\chi_a)_{k-2})] > 0) \\ \left(\frac{\Delta\chi_{a\max}}{2}\right) + \left(\frac{10^{b-1}}{36} - \frac{\Delta\chi_{a\max}}{2}\right) \frac{k}{z_f} & \hat{\theta}_e \in \chi_a \wedge (k \geq 2 \wedge [\text{sign}((\chi_a)_{k-2} - (\chi_a)_{k-3})][\text{sign}((\chi_a)_{k-1} - (\chi_a)_{k-2})] \leq 0) \end{cases} \quad (326)$$

em que z_f é o número máximo de iterações esperado. Considerando $k = z_f$, o termo $\frac{10^{b-1}}{36}$ equivale a impor como variação mínima $\Delta\hat{\theta}_{e\min} = \frac{5 \times 10^{b-1}}{180}$ (ou seja, 0,5 graus se $b=0$), enquanto a variação máxima é de $\Delta\hat{\theta}_{e\max} = \frac{\Delta\chi_{a\max}}{2}$.

No caso em que problema combinado de otimização não apresente solução ou a convergência veja-se comprometida, os limites móveis para o pseudo-fator de excitação harmônica $\hat{A}_\omega$ podem ser redefinidos convenientemente como descrito a seguir. Se na k -ésima iteração, o fator $(R^D)_k = \left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^R}\right)_k \neq 1$ no problema combinado de atuadores ou $(R^D)_k = \left(\sqrt{\frac{\text{Pot}_a^\omega}{\text{Pot}_{mpa}^\tau}}\right)_k \neq 1$ no problema combinado de coletores de energia (pelo fato de que a potência depende quadraticamente da voltagem) e dado que os sistemas tratados aqui são lineares (ou

seja, se a magnitude da excitação fosse duplicada a resposta também será afetada nesse fator), o valor da variável A_{ϖ} necessário na iteração $k+1$ para que $R^D = 1$, pode ser visto como:

$$(A_{\varpi})_{k+1} = \left(\frac{A_{\varpi}}{R^D}\right)_k = (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})(\hat{A}_{\varpi} + \hat{B}_{\varpi}^*)_k + A_{\varpi_{\min}} \quad (327)$$

em que $\hat{B}_{\varpi}$ é um fator de correção para a variável $\hat{A}_{\varpi}$. Assim, o fator de correção é calculado a cada iteração como:

$$(\hat{B}_{\varpi}^*)_k = \frac{\left(\frac{A_{\varpi}}{R^D}\right)_k - A_{\varpi_{\min}}}{A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}}} - (\hat{A}_{\varpi})_k \quad (328)$$

e os novos limites móveis são calculados pelas expressões:

$$(\hat{A}_{\varpi_{\max}}^{\text{mov}})_k = \min\left((\hat{A}_{\varpi} + \hat{B}_{\varpi}^* + \Delta\hat{A}_{\varpi})_k, 1\right) \quad (329)$$

$$(\hat{A}_{\varpi_{\min}}^{\text{mov}})_k = \max\left((\hat{A}_{\varpi} + \hat{B}_{\varpi}^* - \Delta\hat{A}_{\varpi})_k, 0\right) \quad (330)$$

em que $\Delta\hat{A}_{\varpi}$ é o limite móvel calculado originalmente pela eq.(321) para a variável $\hat{A}_{\varpi}$.

4.10 Implementação Computacional do MOT para o Projeto de EPLA

Neste trabalho, foi implementado um software na linguagem MATLAB® denominado *EPLADin*, com o objetivo de projetar EPLAs com o MOT para aplicações potenciais nas áreas de atuação ou coleta de energia considerando três abordagens: harmônica, transiente e combinada. O diagrama de fluxo do software implementado é mostrado na Figura 34, em que são distinguidos três módulos: um módulo de análise que calcula a resposta do sistema, um módulo de otimização que calcula a função objetivo e as restrições, determina as sensibilidades e faz o tratamento de instabilidades numéricas; e um módulo de pós-processamento que realiza uma interpretação do resultado obtido com o MOT para posteriores processos de fabricação e validação experimental.

Figura 34 – Diagrama de fluxo para a implementação computacional do MOT para o projeto de EPLA

5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade fornece os gradientes da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto, necessários para a linearização dos problemas de otimização e para a sua solução com a PLS. Neste capítulo, é apresentado o cálculo das sensibilidades para todos os problemas de otimização propostos na forma discreta no capítulo 4.

5.1 Sensibilidade das Matrizes Constitutivas dos Problemas de MEF

As sensibilidades das matrizes constitutivas em relação ao vetor de variáveis de projeto $\chi_a = \{\rho_e \quad \gamma_e \quad \hat{\theta}_e\}^T$ são:

$$\frac{dM_{dsm}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dM_{dsm}}{d\rho_e} \\ \frac{dM_{dsm}}{d\gamma_e} \\ \frac{dM_{dsm}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} N \\ A \end{matrix} \left[P_m \rho_e^{P_m-1} \rho_1^0 \int_{V_e} A_{si}^T A_{im} dV_e \right]_e \\ \odot_{smN_p} \\ \odot_{smN_f} \end{bmatrix}^T \quad (331)$$

$$\frac{dK_{dsm}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{dsm}}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{dsm}}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{dsm}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} N \\ A \end{matrix} \left[P_c \rho_e^{P_c-1} \int_{V_e} B_{usf}^T T_{\varepsilon}^T T_{fd}^T T_{\theta}^T C_{1jc}^0 T_{\theta cb} T_{\varepsilon ba} B_{uam} dV_e \right]_e \\ \odot_{smN_p} \\ \begin{matrix} N_f \\ A \end{matrix} \left[\rho_e^{P_c} \int_{V_e} \left(B_{usf}^T T_{\varepsilon}^T T_{fd}^T \frac{dT_{\theta dj}^T}{d\hat{\theta}_e} C_{1jc}^0 T_{\theta cb} T_{\varepsilon ba} B_{uam} + B_{usf}^T T_{\varepsilon}^T T_{fd}^T T_{\theta}^T C_{1jc}^0 \frac{dT_{\theta cb}^T}{d\hat{\theta}_e} T_{\varepsilon ba} B_{uam} \right) dV_e \right]_e \end{bmatrix}^T \quad (332)$$

$$\frac{dC_{dsm}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dC_{dsm}}{d\rho_e} \\ \frac{dC_{dsm}}{d\gamma_e} \\ \frac{dC_{dsm}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \left(\alpha_1 \frac{dM_{dsm}}{d\rho_e} + \beta_1 \frac{dK_{dsm}}{d\rho_e} \right) \\ \odot_{smN_p} \\ \beta_1 \frac{dK_{dsm}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T \quad (333)$$

$$\frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{N}{A} \left[P_e \rho_e^{P_e-1} \int_{V_e} B_{\phi_{rq}}^T T_{\phi_{qp}}^T \epsilon_{0pi}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \\ \odot_{rzN_p} \\ \odot_{rzN_f} \end{bmatrix}^T \quad (334)$$

$$\frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{N}{A} \left[P_e \rho_e^{P_e-1} (2\gamma_e - 1)^{P_\gamma} \int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T \epsilon_{0ji}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \\ \frac{N_p}{A} \left[2P_\gamma \rho_e^{P_e} (2\gamma_e - 1)^{P_\gamma-1} \int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T T_{\theta_{dj}}^T \epsilon_{0ji}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \\ \frac{N_f}{A} \left[\rho_e^{P_e} (2\gamma_e - 1)^{P_\gamma} \int_{V_e} B_{u_{sf}}^T T_{\varepsilon_{fd}}^T \frac{dT_{\theta_{dj}}^T}{d\hat{\theta}_e} \epsilon_{0ji}^0 T_{\phi_{ik}} B_{\phi_{kz}} dV_e \right]_e \end{bmatrix}^T \quad (335)$$

$$\frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\rho_e} & \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\gamma_e} & \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \tan \delta_0 \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\rho_e} & \odot_{rzN_p} & \odot_{rzN_f} \end{bmatrix} \quad (336)$$

$$\frac{dA_{vm}^G}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{vm}^G}{d\rho_e} & \frac{dA_{vm}^G}{d\gamma_e} & \frac{dA_{vm}^G}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \odot_{vmN} & \odot_{vmN_p} & \odot_{vmN_f} \end{bmatrix} \quad (337)$$

$$\frac{dA_{xz}^H}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{xz}^H}{d\rho_e} & \frac{dA_{xz}^H}{d\gamma_e} & \frac{dA_{xz}^H}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \odot_{xzN} & \odot_{xzN_p} & \odot_{xzN_f} \end{bmatrix} \quad (338)$$

sendo s e m os GDL estruturais globais, r e z os GDL elétricos globais, v os GDL estruturais globais com restrições de deslocamento no modelo de MEF e x os GDL elétricos que pertencem aos eletrodos da EPLA. A notação $\odot_{ije}$ representa um tensor nulo de ordem 3 de dimensão $i \times j \times e$. Como pode ser visto, somente a matriz piezelétrica $K_{d\phi_{sz}}$ possui derivada não nula em relação às pseudo-polarizações γ_e e as matrizes de restrições de deslocamento entre camadas A_{vm}^G e de acoplamento de potenciais elétricos nas camadas piezelétricas A_{xz}^H não dependem das variáveis de projeto. Neste trabalho, $\frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\hat{\theta}_e} = \odot_{szN_f}$ pois os materiais piezelétricos tratados aqui não possuem fibras por serem transversalmente isotrópicos (possuem isotropia no plano perpendicular à direção de polarização). A sensibilidade da matriz de rotação em relação à variável de projeto de pseudo-orientação é:

$$\frac{dT_{\theta_{cb}}}{d\theta_e} = \pi \begin{bmatrix} -s_2 & s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ s_2 & -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -2c_2 & 2c_2 & -2s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -c \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \end{bmatrix} \quad (339)$$

em que c e s vêm dados por a eq.(201) e a eq.(202), respectivamente e c_2, s_2 por:

$$c_2 = \cos(2\theta) = \sum_{P_f=0}^{P_{fmax}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f)!} (2\pi\hat{\theta})^{2P_f} \quad (340)$$

$$s_2 = \sin(2\theta) = \sum_{P_f=0}^{P_{fmax}} \frac{(-1)^{P_f}}{(2P_f+1)!} (2\pi\hat{\theta})^{2P_f+1} \quad (341)$$

Usando os resultados anteriores, as sensibilidades das matrizes constitutivas em relação ao vetor de variáveis de projeto $\psi_c = \{\rho_e \quad \gamma_e \quad \hat{\theta}_e \quad \hat{R}_w \quad \hat{L}_w \quad \hat{C}_w\}^T$ são:

$$\frac{dM_{dsm}}{d\psi_c} = \left[\frac{dM_{dsm}}{d\chi_a} \quad \frac{dM_{dsm}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dM_{dsm}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dM_{dsm}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dM_{dsm}}{d\chi_a} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \right] \quad (342)$$

$$\frac{dK_{dsm}}{d\psi_c} = \left[\frac{dK_{dsm}}{d\chi_a} \quad \frac{dK_{dsm}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dK_{dsm}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dK_{dsm}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dK_{dsm}}{d\chi_a} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \right] \quad (343)$$

$$\frac{dC_{dsm}}{d\psi_c} = \left[\frac{dC_{dsm}}{d\chi_a} \quad \frac{dC_{dsm}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dC_{dsm}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dC_{dsm}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dC_{dsm}}{d\chi_a} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \quad \odot_{smN_z} \right] \quad (344)$$

$$\frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\psi_c} = \left[\frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\chi_a} \quad \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dK_{\phi\phi_{rz}}}{d\chi_a} \quad \odot_{rzN_z} \quad \odot_{rzN_z} \quad \odot_{rzN_z} \right] \quad (345)$$

$$\frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\psi_c} = \left[\frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\chi_a} \quad \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dK_{d\phi_{sz}}}{d\chi_a} \quad \odot_{szN_z} \quad \odot_{szN_z} \quad \odot_{szN_z} \right] \quad (346)$$

$$\frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\psi_c} = \left[\frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\chi_a} \quad \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\hat{R}_w} \quad \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\hat{L}_w} \quad \frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\hat{C}_w} \right] = \left[\frac{dK_{\sigma_{rz}}}{d\chi_a} \quad \odot_{rzN_z} \quad \odot_{rzN_z} \quad \odot_{rzN_z} \right] \quad (347)$$

$$\frac{dA_{vm}^G}{d\psi_c} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{vm}^G}{d\chi_a} & \frac{dA_{vm}^G}{d\hat{R}_w} & \frac{dA_{vm}^G}{d\hat{L}_w} & \frac{dA_{vm}^G}{d\hat{C}_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{vm}^G}{d\chi_a} & \odot_{vmN_z} & \odot_{vmN_z} & \odot_{vmN_z} \end{bmatrix} \quad (348)$$

$$\frac{dA_{xz}^H}{d\psi_c} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{xz}^H}{d\chi_a} & \frac{dA_{xz}^H}{d\hat{R}_w} & \frac{dA_{xz}^H}{d\hat{L}_w} & \frac{dA_{xz}^H}{d\hat{C}_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{xz}^H}{d\chi_a} & \odot_{xzN_z} & \odot_{xzN_z} & \odot_{xzN_z} \end{bmatrix} \quad (349)$$

$$\frac{dY_{\sigma rz}}{d\psi_c} = \begin{bmatrix} \frac{dY_{\sigma rz}}{d\chi_a} \\ \frac{dY_{\sigma rz}}{d\hat{R}_w} \\ \frac{dY_{\sigma rz}}{d\hat{L}_w} \\ \frac{dY_{\sigma rz}}{d\hat{C}_w} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \left[\odot_{xzN_\chi} \because N_\chi = N + N_p + N_f \right] \\ N_p \left[\frac{dY_{\sigma rz}^e}{d\hat{R}_w} = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \sum_{w=1}^{N_z} \frac{dY_w}{d\hat{R}_w} \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \end{matrix} \\ N_p \left[\frac{dY_{\sigma rz}^e}{d\hat{L}_w} = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \sum_{w=1}^{N_z} \frac{dY_w}{d\hat{L}_w} \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \\ N_p \left[\frac{dY_{\sigma rz}^e}{d\hat{C}_w} = \begin{cases} 0 & \forall (r \neq z \vee r = z : \phi_z \neq \Delta\phi^e) \\ \left(\frac{1}{N_p} \sum_{w=1}^{N_z} \frac{dY_w}{d\hat{C}_w} \right)_{rz} & \forall r = z : \phi_z = \Delta\phi^e \end{cases} \end{matrix} \right]_e^T \quad (350)$$

As sensibilidades $\frac{dY_{\sigma rz}}{d\hat{Z}_w} \because \hat{Z} = \hat{R}, \hat{L}, \hat{C}$ são calculadas de acordo ao domínio do problema, sendo identificadas com o sobrescrito ϖ para o regime harmônico enquanto o sobrescrito τ é utilizado para o regime transiente. Logo:

$$\frac{dY_w}{d\hat{R}_w} = \begin{cases} \frac{dY_w^\varpi}{d\hat{R}_w} = \begin{cases} -\frac{1}{(Z_w^\varpi)^2} (R_{\max} - R_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{opt} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{opt} \end{cases} \\ \frac{dY_w^\tau}{d\hat{R}_w} = \begin{cases} -\frac{\cos \varphi_d}{\|Z_w^\varpi\|^2} (R_{\max} - R_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{opt} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{opt} \end{cases} \end{cases} \quad (351)$$

$$\frac{dY_w}{d\hat{L}_w} = \begin{cases} \frac{dY_w^\varpi}{d\hat{L}_w} = \begin{cases} -\frac{j\omega}{(Z_w^\varpi)^2} (L_{\max} - L_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{opt} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{opt} \end{cases} \\ \frac{dY_w^\tau}{d\hat{L}_w} = \begin{cases} -\frac{\omega \sin \varphi_d}{\|Z_w^\varpi\|^2} (L_{\max} - L_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{opt} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{opt} \end{cases} \end{cases} \quad (352)$$

$$\frac{dY_w}{d\tilde{C}_w} = \begin{cases} \frac{dY_w^\omega}{d\tilde{C}_w} = \begin{cases} -\frac{j}{\omega[(C_{\max}-C_{\min})\tilde{C}_w+C_{\min}]Z_w^\omega)^2} (C_{\max} - C_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{\text{opt}} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{\text{opt}} \end{cases} \\ \frac{dY_w^\tau}{d\tilde{C}_w} = \begin{cases} -\frac{\sin \varphi_d}{\omega[(C_{\max}-C_{\min})\tilde{C}_w+C_{\min}]\|Z_w^\omega\|^2} (C_{\max} - C_{\min}) & \forall w \in \Omega_c^{\text{opt}} \\ 0 & \forall w \notin \Omega_c^{\text{opt}} \end{cases} \end{cases} \quad (353)$$

sendo $\Omega_c^{\text{opt}} \subseteq \Omega_c$ o domínio dos circuitos otimizáveis, ou seja, o conjunto de circuitos que fazem parte de processo de otimização tendo os seus componentes como variáveis de projeto interpolados pelo modelo MILZEL (ver seção 3.4) e em que:

$$\cos \varphi_d = \frac{(R_{\max}-R_{\min})\tilde{R}_w+R_{\min}}{\left\|[(R_{\max}-R_{\min})\tilde{R}_w+R_{\min}] + j\left[\omega[(L_{\max}-L_{\min})\tilde{L}_w+L_{\min}] - \frac{1}{\omega[(C_{\max}-C_{\min})\tilde{C}_w+C_{\min}]}\right]\right\|} \quad (354)$$

$$\sin \varphi_d = \frac{\omega[(L_{\max}-L_{\min})\tilde{L}_w+L_{\min}] - \frac{1}{\omega[(C_{\max}-C_{\min})\tilde{C}_w+C_{\min}]}}{\left\|[(R_{\max}-R_{\min})\tilde{R}_w+R_{\min}] + j\left[\omega[(L_{\max}-L_{\min})\tilde{L}_w+L_{\min}] - \frac{1}{\omega[(C_{\max}-C_{\min})\tilde{C}_w+C_{\min}]}\right]\right\|} \quad (355)$$

5.1.1 Sensibilidade da Matriz de Condutância Elétrica para o Problema de OT em Coletores de Energia

As sensibilidades $\frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c}$ para o problema de coletores de energia são:

$$\frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} = \left[\frac{dG_{IJ}^c}{d\rho_e} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\gamma_e} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\theta_e} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{R}_w} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{L}_w} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{C}_w} \right] = \left[\odot_{IJN} \quad \odot_{IJN_p} \quad \odot_{IJN_f} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{R}_w} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{L}_w} \quad \frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{C}_w} \right] \quad (356)$$

em que as sensibilidades não nulas de $\frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c}$ são determinadas tanto para o regime harmônico quanto transiente utilizando:

$$\frac{dG_{IJ}^c}{d\tilde{R}_w} = \begin{cases} -\frac{\cos(2\varphi_d)}{\|Z_w^\omega\|^2} (R_{\max} - R_{\min}) & I = J \wedge w \in \Omega_c^{\text{opt}} \\ 0 & I \neq J \vee (I = J \wedge w \notin \Omega_c^{\text{opt}}) \end{cases} \quad (357)$$

$$\frac{dG_{IJ}^c}{d\hat{L}_w} = \begin{cases} -\frac{\omega \sin(2\varphi_d)}{\|Z_w^{\bar{\omega}}\|^2} (L_{\max} - L_{\min}) & I = J \wedge w \in \Omega_c^{\text{opt}} \\ 0 & I \neq J \vee (I = J \wedge w \notin \Omega_c^{\text{opt}}) \end{cases} \quad (358)$$

$$\frac{dC_{IJ}^c}{d\hat{C}_w} = \begin{cases} -\frac{\sin(2\varphi_d)}{\omega[(C_{\max} - C_{\min})\hat{C}_w + C_{\min}]\|Z_w^{\bar{\omega}}\|^2} (C_{\max} - C_{\min}) & I = J \wedge w \in \Omega_c^{\text{opt}} \\ 0 & I \neq J \vee (I = J \wedge w \notin \Omega_c^{\text{opt}}) \end{cases} \quad (359)$$

5.2 Sensibilidade da Flexibilidade Média para o Problema Estático de OT

A sensibilidade do termo flexibilidade média vem dada por:

$$\frac{dC_m^{\Sigma}}{d\chi_a} = L_I^{\Sigma} \frac{dW_I^{\Sigma}}{d\chi_a} \quad (360)$$

Da equação de equilíbrio, eq.(282), obtém-se:

$$\frac{dW_I^{\Sigma}}{d\chi_a} = -K_{IJ}^{\Sigma -1} \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\chi_a} W_K^{\Sigma} \quad (361)$$

em que o termo $\frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\chi_a}$ pode ser calculado com:

$$\frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\hat{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N \\ A \\ N_p \\ A \\ N_f \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{d_{sm}}^e}{d\rho_e} & \frac{dK_{d_{\phi_{sz}}}^e}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{\phi_{d_{rm}}}^e}{d\rho_e} & \frac{dK_{\phi_{\phi_{rz}}}^e}{d\rho_e} \\ 0 & \frac{dK_{d_{\phi_{sz}}}^e}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{\phi_{d_{rm}}}^e}{d\gamma_e} & 0 \\ \frac{dK_{d_{sm}}^e}{d\hat{\theta}_e} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_e \quad (362)$$

Dado que K_{JK}^{Σ} tem dimensão $(6n + N) \times (6n + N)$, a sua sensibilidade $\frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\chi_a}$ tem dimensão $(6n + N) \times (6n + N) \times (N + N_p + N_f)$. Assim, é recomendável calcular o produto

$\frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\chi_a} W_K^\Sigma$ para evitar tratar com termos multidimensionais. Esse produto pode ser calculado como:

$$\frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\chi_a} W_K^\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\rho_e} W_K^\Sigma \\ \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\gamma_e} W_K^\Sigma \\ \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\theta_e} W_K^\Sigma \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} N \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{d_{sm}}^e}{d\rho_e} d_m^e \Sigma + \frac{dK_{d_{\phi_{sz}}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\Sigma} \right] \\ \left[\frac{dK_{\phi_{d_{rm}}^e}{d\rho_e} d_m^e \Sigma + \frac{dK_{\phi_{\phi_{rz}}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\Sigma} \right] \end{matrix} \\ \begin{matrix} N_p \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{d_{\phi_{sz}}^e}}{d\gamma_e} \phi_z^{e\Sigma} \right] \\ \left[\frac{dK_{\phi_{d_{rm}}^e}}{d\gamma_e} d_m^e \Sigma \right] \end{matrix} \\ \begin{matrix} N_f \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{d_{sm}}^e}{d\theta_e} d_m^e \Sigma \right] \\ \odot_{rN_f} \end{matrix} \end{bmatrix}^T \quad (363)$$

em que a notação $\odot_{ie}$ representa uma matriz nula de dimensão $i \times e$. Substituindo a eq.(361) na eq.(360) tem-se:

$$\frac{dC_m^\Sigma}{d\chi_a} = -L_I^\Sigma K_{IJ}^{\Sigma-1} \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\chi_a} W_K^\Sigma \quad (364)$$

e aproveitando o fato de que $W_J^\Sigma = K_{IJ}^{\Sigma-1} L_I^\Sigma$, a sensibilidade fica:

$$\frac{dC_m^\Sigma}{d\chi_a} = -W_I^\Sigma \frac{dK_{IJ}^\Sigma}{d\chi_a} W_J^\Sigma \quad (365)$$

5.3 Sensibilidade do Problema Harmônico de OT para Atuadores

Como $u_{out}^\omega = L_I W_I^\omega \in \mathbb{C}$, a norma é dada por:

$$\|u_{out}^\omega\| = \|\Re[u_{out}^\omega] + j\Im[u_{out}^\omega]\| = \sqrt{(\Re[L_I W_I^\omega])^2 + (\Im[L_I W_I^\omega])^2} \quad (366)$$

em que as notações $\Re[u_{out}^\omega]$ e $\Im[u_{out}^\omega]$ referem-se à parte real e imaginária de u_{out}^ω , respectivamente. A sensibilidade da função objetivo $F_{obj}^{A\omega}$ por diferenciação direta é:

$$\frac{dF_{obj}^{A\bar{\omega}}}{d\chi_a} = \left[2w_{\bar{\omega}} \left[\Re[L_I W_I^{\bar{\omega}}] \Re \left[\frac{d(L_I W_I^{\bar{\omega}})}{d\chi_a} \right] + \Im[L_I W_I^{\bar{\omega}}] \Im \left[\frac{d(L_I W_I^{\bar{\omega}})}{d\chi_a} \right] \right] - w_C \left(\frac{1}{C_m^{\bar{\omega}}} \right) \frac{dC_m^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} \right] \quad (367)$$

Da equação de equilíbrio, eq.(184), obtém-se:

$$K_{IJ}^{\bar{\omega}} \frac{dW_J^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} = \frac{dF_I^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} - \frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} W_J^{\bar{\omega}} = -\frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} W_J^{\bar{\omega}} \quad (368)$$

A sensibilidade $\frac{dF_J^{\bar{\omega}}}{d\chi_a}$ depende do tipo de excitação da EPLA. Portanto, se a excitação for por carga elétrica esse termo será nulo (pelo fato de que o termo de carregamento é independente das variáveis de projeto), mas se for por potencial elétrico terá componentes diferentes de zero unicamente nos GDL onde a diferença de potencial for prescrita. As sensibilidades não nulas são desconhecidas, desse modo, o sistema deve ser resolvido de forma reduzida com o fim de encontrar as sensibilidades dos GDL livres (CHOI; KIM, 2005).

Assim, no caso dos atuadores EPLA $\frac{dF_J^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} = 0$ nos GDL livres. O termo $\frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\chi_a}$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\chi_a} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\rho_e} \\ \frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\gamma_e} \\ \frac{dK_{IJ}^{\bar{\omega}}}{d\bar{\theta}_e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N \\ A \\ e=1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{\bar{\omega}sm}^e}{d\rho_e} & \frac{dK_{d\phi_{sz}}^e}{d\rho_e} & 0 \\ \frac{dK_{\phi d_{rm}}^e}{d\rho_e} & \frac{dK_{\phi\phi_{rz}}^e}{d\rho_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_e^T + \begin{bmatrix} N_p \\ A \\ e=1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dK_{d\phi_{sz}}^e}{d\gamma_e} & 0 \\ \frac{dK_{\phi d_{rm}}^e}{d\gamma_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_e^T + \begin{bmatrix} N_p \\ A \\ e=1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{\bar{\omega}sm}^e}{d\bar{\theta}_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_e^T \quad (369)$$

sendo os termos $\frac{dK_{\bar{\omega}sm}^e}{d\rho_e}$, $\frac{dK_{\bar{\omega}sm}^e}{d\bar{\theta}_e}$ calculados como:

$$\frac{dK_{\bar{\omega}sm}^e}{d\rho_e} = -\omega^2 \frac{dM_{dsm}^e}{d\rho_e} + j\omega \frac{dC_{dsm}^e}{d\rho_e} + \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} = (-\omega^2 + j\omega\alpha_1) \frac{dM_{dsm}^e}{d\rho_e} + (1 + j\omega\beta_1) \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} \quad (370)$$

$$\frac{dK_{\omega sm}^e}{d\theta_e} = -\omega^2 \frac{dM_{dsm}^e}{d\theta_e} + j\omega \frac{dC_{dsm}^e}{d\theta_e} + \frac{dK_{dsm}^e}{d\theta_e} = (1 + j\omega\beta_1) \frac{dK_{dsm}^e}{d\theta_e} \quad (371)$$

Pelo fato de que a sensibilidade $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\chi_a}$ tenha dimensão $(6n + N + 3G) \times (6n + N + 3G) \times (N + N_p + N_f)$ é recomendável calcular o produto $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\chi_a} W_J^{\omega}$ para evitar tratar com termos multidimensionais, sendo esse produto calculado como:

$$\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\chi_a} W_J^{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\rho_e} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\gamma_e} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\theta_e} W_J^{\omega} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \begin{bmatrix} \frac{dK_{\omega sm}^e}{d\rho_e} d_m^e \omega + \frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\omega} \\ \frac{dK_{\phi d rm}^e}{d\rho_e} d_m^e \omega + \frac{dK_{\phi \phi rz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\omega} \end{bmatrix}_e \\ \odot_{vN} \\ \begin{bmatrix} N_p \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \begin{bmatrix} \frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\gamma_e} \phi_z^{e\omega} \\ \frac{dK_{\phi d rm}^e}{d\gamma_e} d_m^e \omega \end{bmatrix}_e \\ \odot_{vN_p} \\ \begin{bmatrix} N_f \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \begin{bmatrix} \frac{dK_{\omega sm}^e}{d\theta_e} d_m^e \omega \end{bmatrix}_e \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \end{bmatrix}^T \quad (372)$$

Substituindo as eq.(280), eq.(365) e eq.(368) na eq.(367) tem-se:

$$\frac{dF_{obj}^{A\omega}}{d\chi_a} = 2w_{\omega} \left[\Re[L_I W_I^{\omega}] \Re \left[\Lambda_J^{A\omega} \frac{dK_{JK}^{\omega}}{d\chi_a} W_K^{\omega} \right] + \Im[L_I W_I^{\omega}] \Im \left[\Lambda_J^{A\omega} \frac{dK_{JK}^{\omega}}{d\chi_a} W_K^{\omega} \right] \right] + w_c \left(\frac{1}{L_I^{\Sigma} W_I^{\Sigma}} \right) \left[W_J^{\Sigma} \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\chi_a} W_K^{\Sigma} \right] \quad (373)$$

que possibilita utilizar o método adjunto para o cálculo das sensibilidades, denominando o termo $\Lambda_J^{A\omega}$ como vetor adjunto harmônico. O método adjunto é denominado como o método da carga fictícia ou carga virtual. Neste método as sensibilidades são avaliadas diretamente pela formulação de um problema adjunto que elimina as sensibilidades implícitas, reduzindo assim o custo computacional quando o número de variáveis de projeto é maior do que o número de restrições (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). A solução do problema adjunto recai no cálculo do vetor adjunto harmônico definido pela expressão:

$$K_{IJ}^{\omega} \Lambda_j^{A\omega} = -L_I \quad (374)$$

e que permite determinar completamente a sensibilidade no domínio da frequência.

5.4 Sensibilidade do Problema Transiente de OT para Atuadores

A sensibilidade da função objetivo $F_{obj}^{A\tau}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{obj}^{A\tau}}{d\chi_a} = & 2w_{\tau} \left[\int_0^{t_f} u_{out}^{\tau} dt \right] \left[\int_0^{t_f} \frac{du_{out}^{\tau}}{d\chi_a} dt \right] + 2w_R u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\chi_a} - w_{\Sigma} \left(\frac{1}{C_m^{\Sigma}} \right) \frac{dC_m^{\Sigma}}{d\chi_a} = \\ & 2w_{\tau} \left[\int_0^{t_f} L_I W_I^{\tau} dt \right] \left[\int_0^{t_f} L_J \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a} dt \right] + 2 \frac{w_R L_I W_I^{\tau}(t_p)}{\left(1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2} \right)^2} \right)} \frac{d(L_J W_J^{\tau}(t_p))}{d\chi_a} - w_C \left(\frac{1}{C_m^{\Sigma}} \right) \frac{dC_m^{\Sigma}}{d\chi_a} \end{aligned} \quad (375)$$

O termo $\frac{dW_I^{\tau}}{d\chi_a}$ é obtido com a derivação da equação de equilíbrio piezelétrico (eq.(102))

em relação à variável de projeto χ_e , deste modo é obtido:

$$M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} + K_{IJ} \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a} = \frac{dF_I^{\tau}}{d\chi_a} - \frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^{\tau} - \frac{dC_{IJ}}{d\chi_a} \dot{W}_J^{\tau} - \frac{dK_{IJ}}{d\chi_a} W_J^{\tau} \quad (376)$$

com as condições iniciais $\left. \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\dot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} \right|_{t=0} = 0$, porquanto no instante inicial W_J^{τ} e $\dot{W}_J^{\tau}$ são

independentes das variáveis de projeto χ_a . As matrizes M_{IJ} , C_{IJ} e K_{IJ} e os vetores $\ddot{W}_J^{\tau}$, $\dot{W}_J^{\tau}$ e W_J^{τ} são conhecidos do MEF enquanto as sensibilidades das matrizes M_{IJ} , C_{IJ} e K_{IJ} em relação às

variáveis de projeto são dadas na seção 5.1. Assim, poderia ser resolvida a sensibilidade $\frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_e}$

com a finalidade de ser substituída na eq.(375) e realizar a integração no intervalo do tempo

transiente e, por outro lado, determinar a sensibilidade $\frac{d(L_J W_J^{\tau}(t_p))}{d\chi_a}$ para calcular

completamente a sensibilidade $\frac{dF_{obj}^{A\tau}}{d\chi_a}$. O processo de cálculo das sensibilidades por esse

método é denominado método direto e deve ser repetido para cada componente do vetor de

variáveis de projeto χ_a , consumindo tempo excessivo e tornando-o um método custoso, portanto, será utilizado o método adjunto.

Para calcular a sensibilidades desconhecidas dos termos transientes da função objetivo $F_{obj}^{A\tau}$ (primeiro e segundo termo do lado direito da eq.(375)) pelo método adjunto é proposta uma função lagrangeana para cada um desses termos introduzindo um número de variáveis adjuntas Λ_i equivalentes à quantidade de equações de equilíbrio h_i que governam o problema (HAFTKA; GÜRDAL, 1992), de modo que:

$$\mathcal{L} = \int_0^{t_f} \left(F_{obj} + \sum_{i=0}^N \Lambda_i h_i \right) dt \quad (377)$$

sendo h_i da forma $h_i = 0$. Assim, para calcular a sensibilidade desconhecida do primeiro termo do lado direito da eq.(375) é proposta a função lagrangeana da forma:

$$\mathcal{L}^{A\tau}(u_{out}^\tau, \Lambda_I^{A\tau}, \chi_a) = \int_0^{t_f} \left(u_{out}^\tau + \Lambda_I^{A\tau} (F_I^\tau - M_{IJ} \ddot{W}_J^\tau - C_{IJ} \dot{W}_J^\tau - K_{IJ} W_J^\tau) \right) dt \quad (378)$$

em que o deslocamento de saída $u_{out}^\tau = L_I W_I^\tau$ e a variável adjunta $\Lambda_I^{A\tau} = \{\Lambda_S^{d\tau} \quad \Lambda_r^{\phi\tau} \quad \Lambda_v^{\mu\tau}\}$ tem dimensão $(6n + N + 3G)$. A diferenciação de $\mathcal{L}^{A\tau}$ de em relação ao vetor χ_a conduz a:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{A\tau}}{d\chi_a} &= \int_0^{t_f} \left(\frac{du_{out}^\tau}{d\chi_a} + \Lambda_I^{A\tau} \left(\frac{dF_I^\tau}{d\chi_a} - \frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau - \frac{dC_{IJ}}{d\chi_a} \dot{W}_J^\tau - \frac{dK_{IJ}}{d\chi_a} W_J^\tau \right) - \Lambda_I^{A\tau} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^\tau}{d\chi_a} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\chi_a} + K_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} \right) \right) dt = \\ &= \int_0^{t_f} (\Lambda_I^{A\tau} R_{Ia}) dt + \int_0^{t_f} \left(L_J \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} - \Lambda_I^{A\tau} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^\tau}{d\chi_a} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\chi_a} + K_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (379)$$

em que o termo R_{Ia} é definido como:

$$R_{Ia} = \frac{dF_I^\tau}{d\chi_a} - \frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau - \frac{dC_{IJ}}{d\chi_a} \dot{W}_J^\tau - \frac{dK_{IJ}}{d\chi_a} W_J^\tau \quad (380)$$

no qual é recomendado calcular os produtos $\frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau$, $\frac{dC_{IJ}}{d\chi_a} \dot{W}_J^\tau$ e $\frac{dK_{IJ}}{d\chi_a} W_J^\tau$ para evitar tratar com termos multidimensionais (tensores de ordem maior do que 2). Os produtos anteriores são dados por:

$$\frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dM_{IJ}}{d\rho_e} \ddot{W}_J^\tau \\ \frac{dM_{IJ}}{d\gamma_e} \ddot{W}_J^\tau \\ \frac{dM_{IJ}}{d\hat{\theta}_e} \ddot{W}_J^\tau \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dM_{dsm}^e}{d\rho_e} \ddot{d}_m^e \tau \end{bmatrix}_e \\ \odot_{rN} \\ \odot_{vN} \\ \begin{bmatrix} \odot_{IN_p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \odot_{IN_f} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (381)$$

$$\frac{dK_{IJ}}{d\chi_a} W_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dK_{IJ}}{d\rho_e} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\gamma_e} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\hat{\theta}_e} W_J^\tau \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} d_m^e \tau + \frac{dK_{d\phi_{sz}}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\tau} \\ \frac{dK_{\phi_{rm}}^e}{d\rho_e} d_m^e \tau + \frac{dK_{\phi_{rz}}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\tau} \end{bmatrix}_e \\ \odot_{vN} \\ \begin{bmatrix} N_p \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{d\phi_{sz}}^e}{d\gamma_e} \phi_z^{e\tau} \\ \frac{dK_{\phi_{rm}}^e}{d\gamma_e} d_m^e \tau \end{bmatrix}_e \\ \odot_{vN_p} \\ \begin{bmatrix} N_f \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dK_{dsm}^e}{d\hat{\theta}_e} d_m^e \tau \end{bmatrix}_e \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \end{bmatrix}^T \quad (382)$$

$$\frac{dC_{IJ}}{d\chi_a} \dot{W}_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dC_{IJ}}{d\rho_e} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\gamma_e} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\hat{\theta}_e} \dot{W}_J^\tau \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\alpha_1 \frac{dM_{dsm}^e}{d\rho_e} + \beta_1 \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} \right) \dot{d}_m^e \tau \end{bmatrix}_e \\ \odot_{rN} \\ \odot_{vN} \\ \begin{bmatrix} \odot_{IN_p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_f \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \frac{dK_{dsm}^e}{d\hat{\theta}_e} \dot{d}_m^e \tau \end{bmatrix}_e \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \end{bmatrix}^T \quad (383)$$

Como explicado na seção 5.3, a sensibilidade $\frac{dF_I^\tau}{d\chi_a}$ depende do tipo de excitação do atuador EPLA. Porquanto a excitação é por potencial elétrico $\frac{dF_I^\tau}{d\chi_a} = 0$ nos GDL livres enquanto $\frac{dF_I^\tau}{d\chi_a} \neq 0$ nos GDL onde a diferença de potencial for prescrita. Integrando por partes na eq.(379), o termo $\int_0^{t_f} \Lambda_I^{A\tau} M_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} dt$ duas vezes, o termo $\int_0^{t_f} \Lambda_I^{A\tau} C_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} dt$ somente uma vez e coletando os termos em $\frac{dW_J^\tau}{d\chi_a}$ e em $\frac{dW_I^\tau}{d\chi_a}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{A\tau}}{d\chi_a} = & \int_0^{t_f} (\Lambda_I^{A\tau} R_{Ia}) dt - \int_0^{t_f} (\ddot{\Lambda}_I^{A\tau} M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{A\tau} C_{IJ} + \Lambda_I^{A\tau} K_{IJ} - L_J) \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} dt - \left[\Lambda_I^{A\tau} M_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} + \right. \\ & \left. (-\dot{\Lambda}_I^{A\tau} M_{IJ} + \Lambda_I^{A\tau} C_{IJ}) \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} \right]_0^{t_f} \end{aligned} \quad (384)$$

lembrando que no instante inicial $\left. \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} \right|_{t=0} = \left. \frac{dW_I^\tau}{d\chi_a} \right|_{t=0} = 0$. Logo a fim de eliminar os termos presentes no tempo final deve-se impor:

$$\Lambda_I^{A\tau}(t_f) M_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} = 0 \quad (385)$$

$$(-\dot{\Lambda}_I^{A\tau}(t_f) M_{IJ} + \Lambda_I^{A\tau}(t_f) C_{IJ}) \frac{dW_J^\tau}{d\chi_a} = 0 \quad (386)$$

sendo essas condições homogêneas e equivalentes às restrições de variacional fixo nos extremos pois as sensibilidades $\frac{dW_J^\tau}{d\chi_a}$ e $\frac{dW_I^\tau}{d\chi_a}$ podem não ser nulas em $t = t_f$. Dado que as matrizes de MEF são simétricas e, portanto $M_{IJ} = M_{JI}^T$, $C_{IJ} = C_{JI}^T$, $K_{IJ} = K_{JI}^T$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_m^{d\tau}(t_f) \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} \Lambda_m^{d\tau}(t_f) \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} \quad (387)$$

$$-\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_m^{d\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{d_{sm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_m^{d\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \end{Bmatrix} \quad (388)$$

chegando na conclusão que não existem condições em $t = t_f$ sobre $\Lambda_z^{\phi\tau}, \Lambda_v^{\mu\tau}$ e sua primeira derivada. Por outro lado, com a finalidade de anular o segundo termo da eq.(384) pode ser visto que a variável adjunta deve satisfazer a condição:

$$\ddot{\Lambda}_I^{A\tau} M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{A\tau} C_{IJ} + \Lambda_I^{A\tau} K_{IJ} = L_J \quad (389)$$

sendo a eq.(389) o problema adjunto de valor final. Deste modo, para torná-lo um problema de valor inicial e resolvê-lo por um método de integração no tempo, deve-se fazer uma substituição de variável dada por (DAHL; JENSEN; SIGMUND, 2008):

$$\tau = t_f - t \quad (390)$$

que será denominado tempo adjunto. Consequentemente:

$$\bar{\Lambda}_I^{A\tau}(\tau) = \Lambda_I^{A\tau}(t_f - t) \quad (391)$$

$$\dot{\bar{\Lambda}}_I^{A\tau}(\tau) = -\dot{\Lambda}_I^{A\tau}(t_f - t) \quad (392)$$

$$\ddot{\bar{\Lambda}}_I^{A\tau}(\tau) = \ddot{\Lambda}_I^{A\tau}(t_f - t) \quad (393)$$

Aplicando a mudança de variável na eq.(389) e dado que as matrizes de MEF são simétricas e, deste modo $M_{IJ} = M_{IJ}^T, C_{IJ} = C_{IJ}^T, K_{IJ} = K_{IJ}^T$, o problema adjunto converte-se em:

$$M_{IJ} \ddot{\bar{\Lambda}}_J^{A\tau} + C_{IJ} \dot{\bar{\Lambda}}_J^{A\tau} + K_{IJ} \bar{\Lambda}_J^{A\tau} = L_I \Bigg|_{t_f - \tau} \quad (394)$$

nomeado neste trabalho problema adjunto integral, pois abrange todo o intervalo de tempo considerado no transiente. Para resolver o problema adjunto integral, foi adaptado o método

α -Generalizado de Chung e Hulbert (1993), sendo o termo de força adjunta $F_I^{ADJA\tau} =$

$L_I \Big|_{t_f-\tau}$ constante para todo instante do tempo adjunto τ . Assim, no início do transiente adjunto

integral ($\tau = 0$, portanto $t = t_f$) a eq.(394) é modificada de acordo com as condições iniciais adjuntas (eq.(387) e eq.(388)) sendo obtido:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{G^T} \\ 0 & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \end{Bmatrix} \Big|_{\tau=0} = \begin{Bmatrix} L_{d_s} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (395)$$

em que L_{d_s} é um vetor de tamanho $5n$, que contém zeros exceto na posição do GDL na

direção de u_{out} e cujo valor é unitário e $\bar{\Lambda}_z^{\phi\tau} \Big|_{\tau=0} = 0$ pois $K_{\phi\phi_{rz}} \neq 0$. Se a equação

$K_{\phi\phi_{rz}} \bar{\Lambda}_z^{\phi\tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0$, o vetor adjunto $\bar{\Lambda}_z^{\phi\tau}$ é não nulo. O vetor adjunto $\bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \Big|_{\tau=0}$ relativo à

equação do acoplamento entre camadas representa o custo de obter o mesmo no vetor adjunto

$\ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \Big|_{\tau=0}$ em dois pontos da fronteira de camadas adjacentes, porém com as mesmas

coordenadas.

A formulação da sensibilidade de um ponto específico da resposta transiente tinha sido proposto por Zhang e Kang (2014a) mostrando uma solução genérica aplicável para qualquer função objetivo. No entanto, a solução não é óbvia pelo fato de envolver operações com funções especiais como o delta de Dirac e a função Heaviside unitária, encontrando na literatura somente soluções para sistemas de primeira ordem elétricos e eletromagnéticos (BAKR; NIKOLOVA, 2004; BAKR; ZHAO; NIKOLOVA, 2009; NGUYEN; DEVGAN; NASTOV, 1998; ZHANG; BAKR, 2012). Assim, para o termo $u_{out}^{R^2} = (u_{out}^{\tau}(t_r))^2$ que envolve o valor do deslocamento no tempo de subida, é possível obter a sua sensibilidade a partir de uma função lagrangeana, de tal modo que:

$$\mathcal{L}^{AR}(u_{out}^R, \chi_a) = \int_0^{t_f} \left(\delta(t - t_r) u_{out}^{\tau}{}^2 + \Lambda_I^{AR} (F_I^{\tau} - M_{IJ} \ddot{W}_J^{\tau} - C_{IJ} \dot{W}_J^{\tau} - K_{IJ} W_J^{\tau}) \right) dt \quad (396)$$

lembrando que $u_{out}^R = u_{out}^{\tau}(t_r)$, aproveitando a propriedade de filtragem do delta de Dirac (ZILL, 1997) que permite expressar $u_{out}^R{}^2 = \int_0^{t_f} \delta(t - t_r) u_{out}^{\tau}{}^2 dt$ e, em que o novo vetor de variáveis adjuntas $\Lambda_I^{AR} = \{\Lambda_s^{dR} \quad \Lambda_r^{\phi R} \quad \Lambda_v^{\mu R}\}$ tem dimensão $(6n + N + 3G)$. Aplicando a definição da eq.(265) para u_{out}^R pelas razões expostas na seção 4.2.3, $\mathcal{L}^{AR}$ pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}^{AR}(u_{out}^P, \chi_a) = \int_0^{t_f} \left[\delta(t - t_p) \left[\frac{u_{out}^{\tau}}{1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right)}} \right]^2 + \Lambda_I^{AR} (F_I^{\tau} - M_{IJ} \ddot{W}_J^{\tau} - C_{IJ} \dot{W}_J^{\tau} - K_{IJ} W_J^{\tau}) \right] dt \quad (397)$$

cuja diferenciação em relação ao vetor de variáveis de projeto χ_a e aproveitando resultados anteriores, produz:

$$\frac{d\mathcal{L}^{AR}}{d\chi_a} = \int_0^{t_f} (\Lambda_I^{AR} R_{Ia}) dt + \int_0^{t_f} \left[\delta(t - t_p) \left[\frac{2L_I W_I^{\tau} L_J \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a}}{\left(1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right)}\right)^2} - \Lambda_I^{AR} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} + K_{IJ} \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a} \right) \right] \right] dt \quad (398)$$

sendo R_{Ia} definido pela eq.(380). Fazendo as respectivas integrações por partes e coletando os termos em $\frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a}$ e em $\frac{d\ddot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{AR}}{d\chi_a} = & \int_0^{t_f} (\Lambda_I^{AR} R_{Ia}) dt - \int_0^{t_f} \left[\ddot{\Lambda}_I^{AR} M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{AR} C_{IJ} + \Lambda_I^{AR} K_{IJ} - \delta(t - t_p) \left[\frac{2L_I W_I^{\tau} L_J}{\left(1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right)}\right)^2} \right] \frac{dW_J^{\tau}}{d\chi_a} \right] dt - \\ & \left[\Lambda_I^{AR} M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} + (-\dot{\Lambda}_I^{AR} M_{IJ} + \Lambda_I^{AR} C_{IJ}) \frac{d\dot{W}_J^{\tau}}{d\chi_a} \right]_0^{t_f} \end{aligned} \quad (399)$$

Aplicando de novo a mudança de variável da eq.(390) na eq.(399) e levando em conta que as matrizes de MEF são simétricas, o problema adjunto neste caso é:

$$M_{IJ}\ddot{\bar{\Lambda}}_J^{AR} + C_{IJ}\dot{\bar{\Lambda}}_J^{AR} + K_{IJ}\bar{\Lambda}_J^{AR} = \delta(\tau+t_p - t_f) \left[\frac{2u_{out}^T}{\left(1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} L_J \right] \Bigg|_{t_f-\tau} \quad (400)$$

nomeado neste trabalho problema adjunto ponderado, pois a excitação adjunta existe num único instante de tempo dentro do intervalo do tempo transiente considerado, sendo as suas condições iniciais no domínio do tempo adjunto τ :

$$\left. \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_m^{dR} \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi R} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu R} \end{pmatrix} \right|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi R}(\tau=0) \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu R}(\tau=0) \end{pmatrix} \quad (401)$$

$$\left. \begin{pmatrix} \dot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi R} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_v^{\mu R} \end{pmatrix} \right|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi R}(\tau=0) \\ \dot{\bar{\Lambda}}_v^{\mu R}(\tau=0) \end{pmatrix} \quad (402)$$

Deste modo, no início do transiente adjunto ponderado ($\tau = 0$ que equivale a $t = t_f$) a eq.(400) é modificada conforme as condições iniciais adjuntas (eq.(387) e eq.(388)) sendo obtido:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^G{}^T \\ 0 & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 \\ A_{vm}^G & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \end{pmatrix} \right|_{\tau=0} = \delta(t_p - t_f) \left(\frac{2u_{out}^T}{\left(1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} \begin{pmatrix} L_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Bigg|_{t_f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (403)$$

sendo $\delta(t_p - t_f) = 0$, pois $\delta(x) = 0$ quando $x \neq 0$, logo no instante adjunto $\tau = 0$,

$$\left. \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \end{pmatrix} \right|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Consequentemente, a excitação do problema adjunto ponderado da}$$

eq.(400) pode ser representada por um pente de Dirac⁶ (BAKR; ZHAO; NIKOLOVA, 2009) com um único valor não nulo (ver Figura 35). Deste modo, pode ser considerado que a resposta transiente obtida por um método de integração no tempo é equivalente a adquirir simultaneamente um sinal discreto e suas duas primeiras derivadas (também em forma discreta) com uma frequência de amostragem de $f_m = \frac{1}{\Delta t}$, podendo teoricamente obter um sinal sem distorção com uma frequência de $f_e = \frac{f_m}{2}$, sendo f_e a frequência de Nyquist (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999).

Consequentemente, a excitação do problema adjunto ponderado é (ver Figura 35):

$$F_J^{\text{ADJAR}} = \delta(\tau + t_p - t_f) \left[\frac{2u_{\text{out}}^\tau}{\left(1 + e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} L_J \right] \Big|_{t_f - \tau} = \begin{cases} \left[\frac{2u_{\text{out}}^p}{\left(1 + e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} L_J \right] & \tau = t_f - t_p \\ 0 & \forall \tau \neq t_f - t_p \end{cases} \quad (404)$$

Figura 35 – Representação por pentes de Dirac da excitação e resposta para o problema adjunto em atuadores (a) Integral; (b) Ponderado

A solução do problema adjunto da eq.(400) é da forma (ZILL, 1997):

⁶ Um pente de Dirac é uma sequência de deltas de Dirac separados por intervalos regulares Δt .

$$\Lambda_I^{AR}(t) = \Lambda_I^{AR}(t)H(t - t_p) \quad (405)$$

sendo $H(t)$ a função unitária degrau ou Heaviside (ver seção 2.4.6), que faz com que $\Lambda_I^{AR}(t)$ seja definido por trechos, logo:

$$\Lambda_I^{AR}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < t_p \\ \Lambda_I^{AR}(t) & \forall t \geq t_p \end{cases} \quad (406)$$

Aplicando a solução do problema adjunto ponderado ao termo $\int_0^{t_f} (\Lambda_I^{AR} R_{Ia}) dt$ da eq.(399) é obtido:

$$\int_0^{t_f} (\Lambda_I^{AR} R_{Ia}) dt = \int_0^{t_f} (\Lambda_I^{AR} R_{Ia}(t) H(t - t_p)) dt = \int_0^{t_f} (\Theta_a^{AR}(t) H(t - t_p)) dt \therefore \Theta_a^{AR} = \Lambda_I^{AR} R_{Ia} \quad (407)$$

sendo o termo resultante a representação da convolução de duas funções (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999):

$$\Theta_a^{AR}(t) * H(t) = (\Theta_a^{AR} * H)(t) = \int_0^{t_f} (\Theta_a^{AR}(t) H(t - t_p)) dt \quad (408)$$

em que o operador $*$ denota a convolução de Θ_a^{AR} e H . Contudo, os termos Θ_a^{AR} e H resultantes da aplicação do método α -Generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993) não são estritamente funções contínuas, como apontado anteriormente e, portanto, poderiam ser vistas como sequências de valores discretos ou pentes de Dirac. Assim, a eq.(408), não representaria a convolução contínua de Θ_a^{AR} e H , senão a convolução discreta ou convolução soma (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999) dada por:

$$\Theta_a^{AR}(t) * H(t) = \sum_{k=0}^m \Theta_a^{AR}([k]\Delta t) H([k - p]\Delta t) = \sum_{k=p}^m \Theta_a^{AR}([k]\Delta t) \quad (409)$$

em que a notação $[k]$ corresponde ao k -ésimo passo de integração, sendo m o número de passos de integração, $\Delta t = \frac{t_f}{m}$ o intervalo de tempo por passo e $p\Delta t = t_p$ é o tempo de pico (ver seção 2.4.5). Como visto anteriormente, para instantes de tempo $t < t_p$ os termos da eq.(409) são nulos e, portanto o cálculo da sensibilidade para o problema adjunto ponderado é somente necessário para instantes de tempo adjunto $\tau \geq t_f - t_p$. Assim, a sensibilidade $\frac{dF_{obj}^{A\tau}}{d\chi_a}$ pode ser completamente determinada, onde deve ser utilizada a regra trapezoidal para as integrais envolvidas, logo:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{obj}^{A\tau}}{d\chi_a} = & 2w_\tau \left[\sum_{k=0}^m [(L_I W_I^\tau)_k + (L_I W_I^\tau)_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \right] \left[\sum_{k=0}^m [(\Lambda_I^{A\tau} R_{Ia})_k + (\Lambda_I^{A\tau} R_{Ia})_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \right] + \\ & w_R \left[\sum_{k=p}^m \Theta_a^{AR}([k]\Delta t) \right] + w_C \left(\frac{1}{L_I^\Sigma W_I^\Sigma} \right) \left[W_J^\Sigma \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\chi_a} W_K^\Sigma \right] \end{aligned} \quad (410)$$

A verificação da implementação da sensibilidade transiente contida na integral calculada na eq.(410) é feita por o MDF mediante a expressão (ver seção 5.9):

$$\frac{\Delta F_{obj}^{A\tau}}{\Delta \chi_a} = L_I \left[\sum_{a=1}^{N+N_p+N_f} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{W_I^\tau(\chi_a + \Delta \chi_a)_k - W_I^\tau(\chi_a)_k}{\Delta \chi_a} + \frac{W_I^\tau(\chi_a + \Delta \chi_a)_{k+1} - W_I^\tau(\chi_a)_{k+1}}{\Delta \chi_a} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] \right]_a = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta F_{obj}^{A\tau}}{\Delta \chi_1} \\ \frac{\Delta F_{obj}^{A\tau}}{\Delta \chi_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta F_{obj}^{A\tau}}{\Delta \chi_{N+N_p+N_f}} \end{array} \right\}^T \quad (411)$$

em que $N + N_p + N_f$ é o número de variáveis de projeto, $\Delta \chi_a$ é a excitação da a -ésima variável de projeto e, do mesmo modo, a integração no tempo é feita aplicando-se a regra trapezoidal.

5.5 Sensibilidade do Problema Combinado de OT para Atuadores

A sensibilidade da função objetivo F_{OBJ}^{AD} pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{OBJ}^{AD}}{d\psi_d} &= \left[\frac{dF_{OBJ}^{AD}}{d\chi_a} \quad \frac{dF_{OBJ}^{AD}}{d\hat{A}_\omega} \right] = W_\omega \frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\psi_d} + 2W_\tau \left[\sum_{k=0}^m [(u_{out}^\tau)_k + (u_{out}^\tau)_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \right] \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(\frac{du_{out}^\tau}{d\psi_d} \right)_k + \left(\frac{du_{out}^\tau}{d\psi_d} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] + \\ & 2W_R u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\psi_d} - W_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\psi_d} - 4W_D \left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{(u_{out}^R)^2} \right) \left[\left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^R} \right)^2 - 1 \right] \left[\frac{d(\|u_{out}^\omega\|)}{d\psi_d} - \left(\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^R} \right) \frac{du_{out}^R}{d\psi_d} \right] \end{aligned} \quad (412)$$

em que:

$$\frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\psi_d} = \left[\frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\chi_a} \quad \frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[2 \left[\Re[L_I W_I^\omega] \Re \left[\Lambda_I^{A\omega} \frac{dK_{JK}^\omega}{d\psi_a} W_K^\omega \right] + \Im[L_I W_I^\omega] \Im \left[\Lambda_I^{A\omega} \frac{dK_{JK}^\omega}{d\psi_a} W_K^\omega \right] \right] \quad \frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\hat{A}_\omega} \right] \quad (413)$$

$$\left(\frac{du_{out}^\tau}{d\psi_d} \right)_k = \left(\left[\frac{du_{out}^\tau}{d\chi_a} \quad \frac{du_{out}^\tau}{d\hat{A}_\omega} \right] \right)_k = ([\Lambda_I^{A\tau} R_{Ia} \quad 0])_k \quad (414)$$

$$2u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\psi_d} = \left[2u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\chi_a} \quad 2u_{out}^R \frac{du_{out}^R}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[\sum_{k=p}^m \left(\Lambda_I^{AR}([k]\Delta t) R_{Ia}([k]\Delta t) \right) \quad 0 \right] = \quad (415)$$

$$\frac{dC_m^\Sigma}{d\psi_d} = \left[\frac{dC_m^\Sigma}{d\chi_a} \quad \frac{dC_m^\Sigma}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[-W_I^\Sigma \frac{dK_{IJ}^\Sigma}{d\chi_a} W_J^\Sigma \quad 0 \right] \quad (416)$$

em que somente é desconhecida a sensibilidade $\frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\hat{A}_\omega}$ da eq.(413) que pode ser encontrada a partir de:

$$\frac{d(\|u_{out}^\omega\|^2)}{d\hat{A}_\omega} = 2 \left[\Re[L_I W_I^\omega] \Re \left[\frac{d(L_I W_I^\omega)}{d\hat{A}_\omega} \right] + \Im[L_I W_I^\omega] \Im \left[\frac{d(L_I W_I^\omega)}{d\hat{A}_\omega} \right] \right] \quad (417)$$

sendo que da equação de equilíbrio (eq.(184)) é obtido o sistema:

$$K_{IJ}^\omega \frac{dW_J^\omega}{d\hat{A}_\omega} = - \frac{dK_{IJ}^\omega}{d\hat{A}_\omega} W_J^\omega = 0 \quad (418)$$

pelo fato de $\frac{dK_{IJ}^\omega}{d\hat{A}_\omega} = 0$. Assim, é necessário trabalhar com o sistema completo (que não reduzido) pelo fato de precisar o valor das sensibilidades tanto nos GDL livres quanto

prescritos. Para alcançar esse objetivo, é tratado o sistema como se fosse de MEF com condições de contorno de Dirichlet (ou seja, valores conhecidos da variável de estado em alguma região do domínio). A variável de estado análoga neste problema é $\frac{dW_I^{\omega}}{d\hat{A}_{\omega}}$, a qual tem derivada explícita somente nos GDL elétricos restritos, portanto:

$$\frac{dW_J^{\omega}}{d\hat{A}_{\omega}} = \begin{cases} \frac{dd_i}{d\hat{A}_{\omega}} & J \leq i \\ \frac{d\phi_j^L}{d\hat{A}_{\omega}} = \frac{d\bar{\phi}_{mj}}{d\hat{A}_{\omega}} & i + 1 \leq J \leq i + j \\ \frac{d\phi_k^P}{d\hat{A}_{\omega}} = (A_{\omega_{\max}} - A_{\omega_{\min}})\Delta\phi^P & i + j + 1 \leq J \leq i + j + k \end{cases} \quad (419)$$

logo para o resolver sistema $K_{IJ}^{\omega} \frac{dW_J^{\omega}}{d\hat{A}_{\omega}} = 0$, K_{IJ}^{ω} deve ser modificada nas filas e nas colunas dos GDL associados com os GDL elétricos prescritos. Se P representar um GDL elétrico prescrito, então a matriz de rigidez modificada é:

$$\overline{K}_{IJ}^{\omega} = \begin{cases} K_{PP}^{\omega} = 1 & I = J = P \\ K_{IP}^{\omega} = 0 & I \neq P \\ K_{PJ}^{\omega} = 0 & J \neq P \end{cases} \quad (420)$$

e o vetor de força análogo, que no sistema original da eq.(418) é nulo, modifica-se para:

$$\overline{F}_I^{\omega} = \begin{cases} (A_{\omega_{\max}} - A_{\omega_{\min}})\Delta\phi^P & I = P \\ -(A_{\omega_{\max}} - A_{\omega_{\min}})K_{IP}^{\omega}\Delta\phi^P & I \neq P \end{cases} \quad (421)$$

assim, $\frac{dW_J^{\omega}}{d\hat{A}_{\omega}}$ é calculado resolvendo o sistema:

$$\overline{K}_{IJ}^{\omega} \frac{dW_J^{\omega}}{d\hat{A}_{\omega}} = \overline{F}_J^{\omega} \quad (422)$$

lembrando que $\Delta\phi^P$ representa a diferença de potencial elétrico prescrita entre as superfícies superior e inferior da casca considerando-as como eletrodos equipotenciais (ver APÊNDICES B.3 e B.4).

5.6 Sensibilidade do Problema Harmônico de OT para Coletores de Energia

A diferenciação da função $F_{OBI}^{C\overline{\omega}}$ em relação às variáveis de projeto conduz a:

$$\frac{dF_{OBI}^{C\overline{\omega}}}{d\psi_c} = w_{\overline{\omega}} \frac{d\overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} - w_c \left(\frac{1}{C_m^{\overline{\omega}}} \right) \frac{dC_m^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} \quad (423)$$

lembrando que $\overline{Pot}_a^{\overline{\omega}} = \frac{1}{2} \|W_I^{\overline{\omega}}\| G_{IJ}^c \|W_J^{\overline{\omega}}\|$ com $G_{IJ}^c \in \mathbb{R}$, a sensibilidade $\frac{d\overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{d\psi_c}$ é dada por:

$$\frac{d\overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} = \frac{\partial \overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{\partial \psi_c} + \frac{\partial \overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{\partial \|W_I^{\overline{\omega}}\|} \frac{d\|W_I^{\overline{\omega}}\|}{d\psi_c} \quad (424)$$

sendo a parte explícita igual a:

$$\frac{\partial \overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{\partial \psi_c} = \frac{1}{2} \|W_I^{\overline{\omega}}\| \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} \|W_J^{\overline{\omega}}\| \quad (425)$$

em que a sensibilidade $\frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c}$ é determinada pelas eq.(356) à eq.(359). Utilizando resultados anteriores, a parte implícita pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \overline{Pot}_a^{\overline{\omega}}}{\partial \|W_I^{\overline{\omega}}\|} \frac{d\|W_I^{\overline{\omega}}\|}{d\psi_c} = \left[\Re[W_I^{\overline{\omega}}] G_{IJ}^c \Re \left[\frac{dW_J^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} \right] + \Im[W_I^{\overline{\omega}}] G_{IJ}^c \Im \left[\frac{dW_J^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} \right] \right] \quad (426)$$

e pela equação de equilíbrio, eq.(184), obtém-se:

$$K_{IJ}^{\overline{\omega}} \frac{dW_J^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} = \frac{dF_I^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} - \frac{dK_{IJ}^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} W_J^{\overline{\omega}} = - \frac{dK_{IJ}^{\overline{\omega}}}{d\psi_c} W_J^{\overline{\omega}} \quad (427)$$

em que a sensibilidade $\frac{dF_I^{\overline{\omega}}}{d\psi_c}$ depende do tipo de excitação da EPLA. Deste modo, se a excitação for por força mecânica esse termo será nulo (pois os carregamentos não dependem das variáveis de projeto), mas se for por deslocamentos impostos existirão componentes diferentes de zero unicamente nos GDL onde o deslocamento for prescrito. Como as sensibilidades não nulas são desconhecidas, o sistema deve ser resolvido de forma reduzida com a finalidade de determinar as sensibilidades dos GDL livres (CHOI; KIM, 2005).

No caso dos coletores de energia EPLA podem ocorrer ambas as situações, pois a excitação pode ser efetuada pela imposição de forças em postos especificados da estrutura ou por deslocamentos dos apoios como no caso de uma excitação com um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. A sensibilidade $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\psi_c}$ tem dimensão $(6n + N + 3G + H) \times (6n + N + 3G + H) \times (N + N_p + N_f + 3N_z)$, sendo recomendado calcular o produto $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\psi_c} W_J^{\omega}$ para evitar operações com termos multidimensionais excessivamente custosas em termos de tempo computacional. Deste modo, o termo $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\psi_c} W_J^{\omega}$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\psi_c} W_J^{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\rho_e} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\gamma_e} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{\theta}_e} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{R}_w} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{L}_w} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{C}_w} W_J^{\omega} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} N \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{\omega sm}^e}{d\rho_e} d_m^e \varpi + \frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\varpi} \right] \\ \left[\frac{dK_{\phi d rm}^e}{d\rho_e} d_m^e \varpi + \frac{dK_{\phi \phi rz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\varpi} \right] \end{matrix} \right]_e \\ \odot_{vN} \\ \odot_{xN} \\ \left[\begin{matrix} N_p \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\gamma_e} \phi_z^{e\varpi} \right] \\ \left[\frac{dK_{\phi d rm}^e}{d\gamma_e} d_m^e \varpi \right] \end{matrix} \right]_e \\ \odot_{vN_p} \\ \odot_{xN_p} \\ \left[\begin{matrix} N_f \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \left[\frac{dK_{\omega sm}^e}{d\hat{\theta}_e} d_m^e \varpi \right] \end{matrix} \right]_e \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \\ \odot_{xN_f} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{R}_w} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{L}_w} W_J^{\omega} \\ \frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{C}_w} W_J^{\omega} \end{bmatrix}^T \quad (428)$$

em que os produtos $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{R}_w} W_J^{\omega}$, $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{L}_w} W_J^{\omega}$, $\frac{dK_{IJ}^{\omega}}{d\hat{C}_w} W_J^{\omega}$ têm a forma:

$$\frac{dK_{IJ}^{\varpi}}{d\hat{Z}_w} W_J^{\varpi} = -\frac{j}{\omega} \begin{bmatrix} \odot_{sN_z} \\ \text{A}_{w=1}^{N_z} \left[\frac{dY_{\sigma_{rz}}^e}{d\hat{Z}_w} \phi_z^{e\varpi} \right]_w \\ \odot_{vN_z} \\ \odot_{xN_z} \end{bmatrix} \therefore \hat{Z} = \hat{R}, \hat{L}, \hat{C} \quad (429)$$

Substituindo as eq.(280), eq.(365), eq.(424) à eq.(427) na eq.(423), é obtido:

$$\frac{dF_{OBJ}^{C\varpi}}{d\psi_c} = w_{\varpi} \left[\frac{1}{2} \|W_I^{\varpi}\| \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} \|W_J^{\varpi}\| + \Re \left[\Lambda_I^{C\varpi} \frac{dK_{IJ}^{\varpi}}{d\psi_c} W_J^{\varpi} \right] + \Im \left[\Lambda_I^{C\varpi} \frac{dK_{IJ}^{\varpi}}{d\psi_c} W_J^{\varpi} \right] \right] + w_c \left(\frac{1}{L_I^{\Sigma} W_I^{\Sigma}} \right) \left[W_J^{\Sigma} \frac{dK_{JK}^{\Sigma}}{d\psi_c} W_K^{\Sigma} \right] \quad (430)$$

em que o vetor adjunto harmônico $\Lambda_J^{C\varpi}$ poder ser calculado resolvendo o problema adjunto:

$$K_{IJ}^{\varpi} \Lambda_J^{\varpi} = -G_{IJ}^c W_J^{\varpi} \quad (431)$$

5.7 Sensibilidade do Problema Transiente de OT para Coletores de Energia

A sensibilidade da função objetivo $F_{OBJ}^{C\tau}$ em relação às variáveis de projeto é:

$$\frac{dF_{OBJ}^{C\tau}}{d\psi_c} = w_{\tau} \frac{d\overline{Pot}_a^{\tau}}{d\psi_c} + w_R \frac{dPot_a^R}{d\psi_c} - w_C \left(\frac{1}{C_m^{\Sigma}} \right) \frac{dC_m^{\Sigma}}{d\chi_a} = \quad (432)$$

notando que $\overline{Pot}_a^{\tau} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^{\tau}(t) G_{IJ}^c W_J^{\tau}(t) dt$ e a sua sensibilidade $\frac{d\overline{Pot}_a^{\tau}}{d\psi_c}$ contém duas parcelas, uma explícita e outra implícita, logo:

$$\frac{d\overline{Pot}_a^{\tau}}{d\psi_c} = \frac{\partial \overline{Pot}_a^{\tau}}{\partial \psi_c} + \frac{\partial \overline{Pot}_a^{\tau}}{\partial W_I^{\tau}} \frac{dW_I^{\tau}}{d\psi_c} \quad (433)$$

em que a parte explícita é calculada por meio de:

$$\frac{\partial \overline{\text{Pot}}_a^\tau}{\partial \psi_c} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^\tau(t) \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau(t) dt = \frac{1}{t_f} \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau \right)_k + \left(W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] \quad (434)$$

e a sensibilidade $\frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c}$ é determinada pelas eq.(356) à eq.(359). Para a sensibilidade implícita é necessário propor um problema adjunto com o intuito de diminuir o custo computacional partindo da função lagrangeana:

$$\mathcal{L}^{C\tau}(W_I^\tau, \Lambda_I^{C\tau}, \psi_c) = \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{t_f} W_I^\tau G_{IJ}^c W_J^\tau + \Lambda_I^{C\tau} (F_I^\tau - M_{IJ} \ddot{W}_J^\tau - C_{IJ} \dot{W}_J^\tau - K_{IJ} W_J^\tau) \right) dt \quad (435)$$

em que a variável adjunta $\Lambda_I^{C\tau} = \{\Lambda_S^{d\tau} \quad \Lambda_r^{\phi\tau} \quad \Lambda_v^{\mu\tau} \quad \Lambda_x^{\eta\tau}\}$ tem dimensão $(6n + N + 3G + H)$ e foi utilizado $\overline{\text{Pot}}_a^\tau = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} W_I^\tau(t) G_{IJ}^c W_J^\tau(t) dt$. A derivada de $\mathcal{L}^{C\tau}$ em relação ao vetor de variáveis de projeto ψ_c é:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{C\tau}}{d\psi_c} = & \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{t_f} W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau + \frac{2}{t_f} W_I^\tau G_{IJ}^c \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} + \Lambda_I^{C\tau} \left(\frac{dF_I^\tau}{d\psi_c} - \frac{dM_{IJ}}{d\psi_c} \ddot{W}_J^\tau - \frac{dC_{IJ}}{d\psi_c} \dot{W}_J^\tau - \frac{dK_{IJ}}{d\psi_c} W_J^\tau \right) - \right. \\ & \left. \Lambda_I^{C\tau} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + K_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right) \right) dt = \frac{\partial \overline{\text{Pot}}_a^\tau}{\partial \psi_c} + \int_0^{t_f} \Lambda_I^{C\tau} R_{Ic} dt + \int_0^{t_f} \left(\left(\frac{2}{t_f} W_I^\tau G_{IJ}^c \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right) - \right. \\ & \left. \Lambda_I^{C\tau} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + K_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (436)$$

definindo R_{Ic} como:

$$R_{Ic} = \frac{dF_I^\tau}{d\psi_c} - \frac{dM_{IJ}}{d\psi_c} \ddot{W}_J^\tau - \frac{dC_{IJ}}{d\psi_c} \dot{W}_J^\tau - \frac{dK_{IJ}}{d\psi_c} W_J^\tau \quad (437)$$

em que a sensibilidade $\frac{dF_I^\tau}{d\psi_c}$ depende do tipo de excitação da EPLA como explicado na seção

5.6. Assim, $\frac{dF_I^\tau}{d\psi_c} = 0$ se a excitação for por força mecânica pelo fato de que os carregamentos não dependem das variáveis de projeto. Por outro lado, se a excitação for por deslocamentos

impostos $\frac{dF_I^\tau}{d\psi_c} = 0$ nos GDL livres enquanto $\frac{dF_I^\tau}{d\psi_c} \neq 0$ nos GDL onde o deslocamento for prescrito. No caso dos coletores de energia EPLA podem ocorrer ambas as situações, pois a excitação pode ser efetuada pela imposição de forças em postos especificados da estrutura ou por deslocamentos dos apoios como no caso de uma excitação com um gerador de vibrações mecânicas ou “*shaker*”. Os termos multidimensionais de R_{Ic} na eq.(437) são calculados como:

$$\frac{dM_{IJ}}{d\psi_c} \ddot{W}_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau \\ \frac{dM_{IJ}}{d\tilde{R}_w} \ddot{W}_J^\tau \\ \frac{dM_{IJ}}{d\tilde{L}_w} \ddot{W}_J^\tau \\ \frac{dM_{IJ}}{d\tilde{C}_w} \ddot{W}_J^\tau \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{dM_{IJ}}{d\chi_a} \ddot{W}_J^\tau \\ \odot_{IN_z} \\ \odot_{IN_z} \\ \odot_{IN_z} \end{bmatrix}^T \quad (438)$$

$$\frac{dK_{IJ}}{d\psi_c} W_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dK_{IJ}}{d\rho_e} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\gamma_e} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\theta_e} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{R}_w} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{L}_w} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{C}_w} W_J^\tau \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \left[\begin{array}{c} \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} d_m^{e\tau} + \frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\tau} \\ \omega_d \tan \delta_0 \frac{dK_{\phi\phi rz}^e}{d\rho_e} \phi_z^{e\tau} \end{array} \right]_e \\ \odot_{vN} \\ \odot_{xN} \\ \begin{bmatrix} N_p \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \left[\begin{array}{c} \frac{dK_{d\phi sz}^e}{d\gamma_e} \phi_z^{e\tau} \end{array} \right]_e \\ \odot_{rN_p} \\ \odot_{vN_p} \\ \odot_{xN_p} \\ \begin{bmatrix} N_f \\ A \end{bmatrix}_{e=1} \left[\begin{array}{c} \frac{dK_{dsm}^e}{d\theta_e} d_m^{e\tau} \end{array} \right]_e \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \\ \odot_{xN_f} \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{R}_w} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{L}_w} W_J^\tau \\ \frac{dK_{IJ}}{d\tilde{C}_w} W_J^\tau \end{bmatrix}^T \quad (439)$$

em que os produtos $\frac{dK_{IJ}}{d\hat{R}_w} W_J^\tau, \frac{dK_{IJ}}{d\hat{L}_w} W_J^\tau, \frac{dK_{IJ}}{d\hat{C}_w} W_J^\tau$ têm a forma

$$\frac{dK_{IJ}}{d\hat{Z}_w} W_J^\tau = \begin{bmatrix} \odot_{sN_z} \\ A \sum_{w=1}^{N_z} \left[\frac{dY_{\sigma_{rz}}^e}{d\hat{Z}_w} \phi_z^{e\tau} \right]_w \\ \odot_{vN_z} \\ \odot_{xN_z} \end{bmatrix} \therefore \hat{Z} = \hat{R}, \hat{L}, \hat{C} \quad (440)$$

$$\frac{dC_{IJ}}{d\psi_c} \dot{W}_J^\tau = \begin{bmatrix} \frac{dC_{IJ}}{d\rho_e} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\gamma_e} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\hat{\theta}_e} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\hat{R}_w} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\hat{L}_w} \dot{W}_J^\tau \\ \frac{dC_{IJ}}{d\hat{C}_w} \dot{W}_J^\tau \end{bmatrix}^\tau = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} N \\ A \sum_{e=1}^N \left[\left(\alpha_1 \frac{dM_{dsm}^e}{d\rho_e} + \beta_1 \frac{dK_{dsm}^e}{d\rho_e} \right) \dot{d}_m^{e\tau} \right] \\ \frac{dK_{\phi d_{rm}}^e}{d\rho_e} \dot{d}_m^{e\tau} + \frac{dK_{\phi \phi_{rz}}^e}{d\rho_e} \dot{\phi}_z^{e\tau} \end{array} \right]_e \\ \odot_{vN} \\ \odot_{xN} \\ \odot_{sN_p} \\ \left[\begin{array}{c} N_p \\ A \sum_{e=1}^{N_p} \left[\frac{dK_{\phi d_{rm}}^e}{d\gamma_e} \dot{d}_m^{e\tau} \right]_e \end{array} \right] \\ \odot_{vN_p} \\ \odot_{xN_p} \\ \left[\begin{array}{c} N_f \\ A \sum_{e=1}^{N_f} \left[\beta_1 \frac{dK_{dsm}^e}{d\hat{\theta}_e} \dot{d}_m^{e\tau} \right]_e \end{array} \right] \\ \odot_{rN_f} \\ \odot_{vN_f} \\ \odot_{xN_f} \\ [\odot_{IN_z}] \\ [\odot_{IN_z}] \\ [\odot_{IN_z}] \end{array} \right]^\tau \quad (441)$$

logo de resultados anteriores (ver seção 5.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{C\tau}}{d\psi_c} &= \frac{\partial \overline{Pot}_a^\tau}{\partial \psi_c} + \int_0^{t_f} \Lambda_I^{C\tau} R_{Ic} dt - \int_0^{t_f} \left(\ddot{\Lambda}_I^{C\tau} M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{C\tau} C_{IJ} + \Lambda_I^{C\tau} K_{IJ} - \frac{2}{t_f} W_I^\tau G_{IJ}^c \right) \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} dt - \\ &\left[\Lambda_I^{C\tau} M_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} + \left(-\dot{\Lambda}_I^{C\tau} M_{IJ} + \Lambda_I^{C\tau} C_{IJ} \right) \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right]_0^{t_f} \end{aligned} \quad (442)$$

lembrando de novo que, no instante inicial $\left. \frac{dW_I^\tau}{d\psi_c} \right|_{t=0} = \left. \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right|_{t=0} = 0$ e com a finalidade de eliminar os termos presentes no tempo final é imposto que $\Lambda_I^{C\tau}(t_f)M_{IJ} \frac{dW_I^\tau}{d\psi_c} = (-\dot{\Lambda}_I^{C\tau}(t_f)M_{IJ} + \Lambda_I^{C\tau}(t_f)C_{IJ}) \frac{dW_I^\tau}{d\psi_c} = 0$, sendo essas condições homogêneas e equivalentes às restrições de variacional fixo nos extremos pois as sensibilidades $\frac{dW_I^\tau}{d\psi_c}$ e $\frac{dW_J^\tau}{d\psi_c}$ podem não ser nulas em $t = t_f$.

No caso de coletores de energia EPLA, a matriz de MEF M_{IJ} é simétrica e, portanto $M_{IJ} = M_{JI}^T$, enquanto as matrizes C_{IJ} e K_{IJ} não apresentam simetria e dessa forma $C_{IJ} \neq C_{JI}^T$, $K_{IJ} \neq K_{JI}^T$ (ver eq.(246)). Assim, as condições em $t = t_f$ levando em conta a simetria das matrizes são:

$$\begin{bmatrix} M_{dsm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_m^{d\tau}(t_f) \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} \Lambda_m^{d\tau}(t_f) \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} \quad (443)$$

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} M_{dsm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_m^{d\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{dsm} & K_{\phi d_{sz}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\phi \phi_{rz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore \\ & \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_m^{d\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \dot{\Lambda}_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \Lambda_m^{d\tau}(t_f) \\ \Lambda_z^{\phi\tau}(t_f) \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Lambda_v^{\mu\tau}(t_f) \\ \Lambda_x^{\eta\tau}(t_f) \end{Bmatrix} \quad (444) \end{aligned}$$

e por conseguinte, não existem condições em $t = t_f$ para $\Lambda_v^{\mu\tau}$, $\Lambda_v^{\eta\tau}$ e sua primeira derivada e do mesmo modo para $\Lambda_z^{\phi\tau}$. Assim, a condição que deve ser satisfeita pela variável adjunta é tal que:

$$\ddot{\Lambda}_I^{C\tau}M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{C\tau}C_{IJ} + \Lambda_I^{C\tau}K_{IJ} = \frac{2}{t_f}W_I^\tau G_{IJ}^c \quad (445)$$

Agora, fazendo a substituição de variável do tempo adjunto $\tau = t_f - t$ e lembrando que G_{IJ}^c é também simétrica (ver eq.(260)), o problema transiente adjunto que deve ser resolvido com o método α -Generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993) é:

$$M_{IJ} \ddot{\bar{\Lambda}}_J^{C\tau} + C_{IJ}^T \dot{\bar{\Lambda}}_J^{C\tau} + K_{IJ}^T \bar{\Lambda}_J^{C\tau} = \frac{2}{t_f} G_{IJ}^c W_J^\tau \bigg|_{t_f-\tau} \quad (446)$$

sendo referenciado neste trabalho como problema adjunto integral e em que foi aplicado $\dot{\bar{\Lambda}}_I^{C\tau} C_{IJ} = C_{IJ}^T \dot{\bar{\Lambda}}_J^{C\tau}$ e $\dot{\bar{\Lambda}}_I^{C\tau} K_{IJ} = K_{IJ}^T \dot{\bar{\Lambda}}_J^{C\tau}$ pois C_{IJ} e K_{IJ} não são matrizes simétricas (ver eq.(246)). O

termo de força adjunta $F_I^{ADJC\tau} = \frac{2}{t_f} G_{IJ}^c W_J^\tau \bigg|_{t_f-\tau}$ não é constante pelo fato de que depende da

resposta transiente da variável de estado W_J^τ mapeada no tempo adjunto τ . O sistema linear que deve ser resolvido no início do transiente adjunto integral ($\tau = 0$, portanto $t = t_f$) de acordo com as condições iniciais adjuntas (eq.(443) e eq.(444)) é:

$$\begin{bmatrix} M_{d_{sm}} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^{G^T} & 0 \\ 0 & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 & A_{rx}^{H^T} \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \\ \bar{\Lambda}_x^{\eta\tau} \end{Bmatrix} \bigg|_{\tau=0} = \frac{2}{t_f} G_{IJ}^c W_J^\tau \bigg|_{\tau=0} = \frac{2}{t_f} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{rz}^\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_m \\ \phi_z \\ \mu_v \\ \eta_x \end{Bmatrix} \bigg|_{\tau=0} \quad (447)$$

em que G_{rz}^ϕ é uma submatriz de G_{IJ}^c (ver eq.(260)) que envolve somente os GDL elétricos, o

vetor adjunto $\bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \bigg|_{\tau=0}$ representa o custo associado ao acoplamento do vetor adjunto $\ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \bigg|_{\tau=0}$

entre pontos de camadas adjacentes enquanto $\bar{\Lambda}_x^{\eta\tau} \bigg|_{\tau=0}$ representa o custo por obter o mesmo

valor de $\dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi\tau} \bigg|_{\tau=0}$ no eletrodo equipotencial ligado à impedância elétrica Z .

Para a sensibilidade $\frac{d\text{Pot}_a^R}{d\psi_c}$ é empregado um procedimento análogo ao descrito na seção 5.4 e a definição dada na eq.(274), portanto a função lagrangeana para este problema é:

$$\mathcal{L}^{CR}(\text{Pot}_a^R, \chi_a) = \int_0^{t_f} \left(\delta(t - t_r) \text{Pot}_a^\tau + \Lambda_I^{CR} (F_I^\tau - M_{IJ} \ddot{W}_J^\tau - C_{IJ} \dot{W}_J^\tau - K_{IJ} W_J^\tau) \right) dt \quad (448)$$

notando que a potência instantânea no tempo de subida é $\text{Pot}_a^R = \text{Pot}_a^\tau(t_r)$, aproveitando que $\text{Pot}_a^R = \int_0^{t_f} \delta(t - t_r) \text{Pot}_a^\tau dt$ pela propriedade de filtragem do delta de Dirac (ZILL, 1997) e, em que o novo vetor de variáveis adjuntas $\Lambda_I^{CR} = \{\Lambda_s^{dR} \quad \Lambda_r^{\phi R} \quad \Lambda_v^{\mu R} \quad \Lambda_x^{\eta R}\}$ tem dimensão $(6n + N + 3G + H)$. Logo, conforme com o descrito na seção 4.2.6, $\mathcal{L}^{CR}$ pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}^{CR}(\text{Pot}_a^P, \chi_a) = \int_0^{t_f} \left[\delta(t - t_p) \left[\frac{W_I^\tau(t_p) G_{IJ}^c W_J^\tau(t_p)}{\left(\frac{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}}{2} \right)^2} + \Lambda_I^{CR} (F_I^\tau - M_{IJ} \ddot{W}_J^\tau - C_{IJ} \dot{W}_J^\tau - K_{IJ} W_J^\tau) \right] \right] dt \quad (449)$$

sendo a sua diferenciação em relação ao vetor de variáveis de projeto ψ_c como:

$$\frac{d\mathcal{L}^{CR}}{d\psi_c} = \frac{W_I^\tau(t_p) \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau(t_p)}{\left(\frac{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}}{2} \right)^2} + \int_0^{t_f} \Lambda_I^{CR} R_{Ic} dt + \int_0^{t_f} \left[\delta(t - t_p) \left[\frac{2W_I^\tau G_{IJ}^c \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c}}{\left(\frac{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}}{2} \right)^2} - \Lambda_I^{CR} \left(M_{IJ} \frac{d\ddot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + C_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + K_{IJ} \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right) \right] \right] dt \quad (450)$$

com R_{Ic} definido pela eq.(437). Aproveitando resultados anteriores é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{CR}}{d\psi_c} &= \frac{\frac{\partial \text{Pot}_a^P}{\partial \psi_c}}{\left(\frac{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}}{2} \right)^2} + \int_0^{t_f} \Lambda_I^{CR} R_{Ic} dt - \int_0^{t_f} \left[\ddot{\Lambda}_I^{CR} M_{IJ} - \dot{\Lambda}_I^{CR} C_{IJ} + \Lambda_I^{CR} K_{IJ} - \delta(t - t_p) \left[\frac{2W_I^\tau G_{IJ}^c}{\left(\frac{1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}}{2} \right)^2} \right] \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right] dt - \\ &\left[\Lambda_I^{CR} M_{IJ} \frac{d\dot{W}_J^\tau}{d\psi_c} + \left(-\dot{\Lambda}_I^{CR} M_{IJ} + \Lambda_I^{CR} C_{IJ} \right) \frac{dW_J^\tau}{d\psi_c} \right]_0^{t_f} \end{aligned} \quad (451)$$

Levando em conta a mudança de variável da eq.(390) na eq.(451) e a simetria das matrizes de MEF, o problema adjunto é descrito por:

$$M_{IJ}\ddot{\bar{\Lambda}}_J^{CR} + C_{IJ}^T\dot{\bar{\Lambda}}_J^{CR} + K_{IJ}^T\bar{\Lambda}_J^{CR} = \delta(\tau+t_p - t_f) \left[\frac{2G_{IJ}^c W_J^T}{\left(1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} \right] \Big|_{t_f-\tau} \quad (452)$$

referenciado neste trabalho como problema adjunto ponderado, pois a excitação adjunta é não nula somente num instante de tempo dentro do intervalo do tempo transiente considerado (ver Figura 36), sendo as suas condições iniciais no domínio do tempo adjunto τ :

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\Lambda}_m^{dR} \\ \bar{\Lambda}_z^{\phi R} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu R} \\ \bar{\Lambda}_x^{\eta R} \end{array} \right\} \Big|_{\tau=0} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu R}(\tau=0) \\ \bar{\Lambda}_x^{\eta R}(\tau=0) \end{array} \right\} \quad (453)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_v^{\mu\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_x^{\eta\tau} \end{array} \right\} \Big|_{\tau=0} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi R}(\tau=0) \\ \dot{\bar{\Lambda}}_v^{\mu R}(\tau=0) \\ \dot{\bar{\Lambda}}_x^{\eta R}(\tau=0) \end{array} \right\} \quad (454)$$

Portanto, o sistema linear que deve ser resolvido no início do transiente adjunto ponderado ($\tau = 0$, ou seja $t = t_f$) de acordo com as condições iniciais adjuntas (eq.(453) e eq.(454)) é:

$$\left[\begin{array}{cccc} M_{dsm} & K_{d\phi_{sz}} & A_{sv}^G{}^T & 0 \\ 0 & K_{\phi\phi_{rz}} & 0 & A_{rx}^H{}^T \\ A_{vm}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xz}^H & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\bar{\Lambda}}_m^{d\tau} \\ \dot{\bar{\Lambda}}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \\ \bar{\Lambda}_x^{\eta\tau} \end{array} \right\} \Big|_{\tau=0} = \delta(t_p - t_f) \left[\frac{2G_{IJ}^c W_J^T}{\left(1+e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right)^2} \right] \Big|_{t_f} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (455)$$

sendo $\delta(t_p - t_f) = 0$, pelo fato de $\delta(x) = 0$ quando $x \neq 0$, e por conseguinte, no instante

adjunto $\tau = 0$, $\left. \begin{Bmatrix} \ddot{\Lambda}_m^{\text{d}\tau} \\ \dot{\Lambda}_z^{\phi\tau} \\ \bar{\Lambda}_v^{\mu\tau} \\ \bar{\Lambda}_x^{\eta\tau} \end{Bmatrix} \right|_{\tau=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$. A excitação do problema adjunto ponderado pode ser vista

como (ver Figura 36):

$$F_J^{\text{ADJCR}} = \delta(\tau + t_p - t_f) \left[\frac{2G_{IJ}^c W_J^T}{\left(1 + e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}\right)^2} \right] \bigg|_{t_f - \tau} = \begin{cases} \frac{2G_{IJ}^c W_J^T(t_p)}{\left(1 + e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}\right)^2} & \tau = t_f - t_p \\ 0 & \forall \tau \neq t_f - t_p \end{cases} \quad (456)$$

Figura 36 – Representação por pentes de Dirac da excitação e resposta para o problema adjunto em coletores de energia (a) Integral; (b) Ponderado

Aplicando a solução do problema adjunto ponderado da eq. (452) no termo $\int_0^{t_f} (\Lambda_I^{\text{CR}} R_{Ic}) dt$ da eq.(451) e cuja forma é $\Lambda_I^{\text{CR}}(t) = \Lambda_I^{\text{CR}}(t)H(t - t_p)$, obtém-se:

$$\int_0^{t_f} (\Lambda_I^{\text{CR}} R_{Ic}) dt = \int_0^{t_f} (\Theta_c^{\text{CR}}(t)H(t - t_p)) dt = \Theta_c^{\text{CR}}(t) * H(t) \therefore \Theta_c^{\text{CR}} = \Lambda_I^{\text{CR}} R_{Ic} \quad (457)$$

em que o operador $*$ denota a convolução de Θ_c^{CR} e H . De forma análoga ao problema adjunto ponderado de atuadores (ver seção 5.4), os termos Θ_c^{CR} e H resultantes da aplicação do método α -Generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993) não são estritamente funções contínuas e, conseqüentemente, poderiam ser vistas como sequências de valores discretos ou pentes de Dirac. Logo, a convolução discreta ou convolução suma (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999) de Θ_c^{CR} e H é expressa como:

$$\Theta_c^{CR}(t) * H(t) = \sum_{k=0}^m \Theta_c^{CR}([k]\Delta t)H([k-p]\Delta t) = \sum_{k=p}^m \Theta_c^{CR}([k]\Delta t) \quad (458)$$

em que a notação $[k]$ corresponde ao k -ésimo passo de integração, sendo m o número de passos de integração, $\Delta t = \frac{t_f}{m}$ o intervalo de tempo por passo e $p\Delta t = t_p$ é o tempo de pico (ver seção 2.4.5). Como visto anteriormente, para instantes de tempo $t < t_p$ os termos da eq.(458) são nulos e, portanto o cálculo da sensibilidade para o problema adjunto ponderado é somente necessário para instantes de tempo adjunto $\tau \geq t_f - t_p$. Por fim, a sensibilidade $\frac{dF_{OBJ}^{C\tau}}{d\psi_c}$ utilizando a regra trapezoidal nas integrais contidas é:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{OBJ}^{C\tau}}{d\psi_c} = & \frac{w_\tau}{t_f} \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_I^\tau + \Lambda_I^{C\tau} R_{Ic} \right)_k + \left(W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_I^\tau + \Lambda_I^{C\tau} R_{Ic} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] + w_R \left[\frac{W_I^\tau(t_p) \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau(t_p)}{\left(1 + e^{-\left(\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2} \right)^2} \right)} + \right. \\ & \left. \left[\sum_{k=p}^m \Theta_c^{CR}([k]\Delta t) \right] \right] + w_C \left(\frac{1}{L_I^\Sigma W_I^\Sigma} \right) \left[W_J^\Sigma \frac{dK_{JK}^\Sigma}{d\chi_a} W_K^\Sigma \right] \quad (459) \end{aligned}$$

com ζ como o coeficiente de amortecimento estrutural independente das variáveis de projeto.

5.8 Sensibilidade do Problema Combinado de OT para Coletores de Energia

A sensibilidade da função objetivo F_{OBj}^{CD} é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{OBj}^{CD}}{d\xi_d} &= \left[\frac{dF_{OBj}^{CD}}{d\psi_c} \quad \frac{dF_{OBj}^{CD}}{d\hat{A}_\omega} \right] = w_\omega \frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\xi_d} + \frac{w_\tau}{t_f} \left[\sum_{k=0}^m \left[\left(\frac{dPot_a^\tau}{d\xi_d} \right)_k + \left(\frac{dPot_a^\tau}{d\xi_d} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \right] + w_R \frac{dPot_a^R}{d\xi_d} - \\ &w_C \left(\frac{1}{C_m^\Sigma} \right) \frac{dC_m^\Sigma}{d\psi_d} - 2 \frac{w_D}{Pot_{mpa}^\tau} \left[\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{Pot_{mpa}^\tau} - 1 \right] \left[\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\xi_d} - \left(\frac{\overline{Pot}_a^\omega}{Pot_{mpa}^\tau} \right) \frac{dPot_{mpa}^\tau}{d\xi_d} \right] \end{aligned} \quad (460)$$

em que:

$$\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\xi_d} = \left[\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\psi_c} \quad \frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[\left[\frac{1}{2} \|W_I^\omega\| \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} \|W_J^\omega\| + \Re \left[\Lambda_I^{C\omega} \frac{dK_{IJ}^\omega}{d\psi_c} W_J^\omega \right] + \Im \left[\Lambda_I^{C\omega} \frac{dK_{IJ}^\omega}{d\psi_c} W_J^\omega \right] \right] \quad \frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\hat{A}_\omega} \right] \quad (461)$$

$$\left(\frac{dPot_a^\tau}{d\xi_d} \right)_k = \left(\left[\frac{dPot_a^\tau}{d\psi_c} \quad \frac{dPot_a^\tau}{d\hat{A}_\omega} \right] \right)_k = \left(\left[\left(W_I^\tau \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau + \Lambda_I^{C\tau} R_{Ic} \right) \quad 0 \right] \right)_k \quad (462)$$

$$\frac{dPot_a^R}{d\xi_d} = \left[\frac{dPot_a^R}{d\psi_c} \quad \frac{dPot_a^R}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[\left(\frac{W_I^\tau(t_p) \frac{dG_{IJ}^c}{d\psi_c} W_J^\tau(t_p)}{\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\left(\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} \right)} \right)^2 + \left[\sum_{k=p}^m \Theta_c^{CR}([k]\Delta t) \right] \right)} \right) \quad 0 \right] \quad (463)$$

$$\frac{dC_m^\Sigma}{d\xi_d} = \left[\frac{dC_m^\Sigma}{d\psi_c} \quad \frac{dC_m^\Sigma}{d\hat{A}_\omega} \right] = \left[-W_I^\Sigma \frac{dK_{IJ}^\Sigma}{d\psi_c} W_J^\Sigma \quad 0 \right] \quad (464)$$

$$\frac{d\overline{Pot}_{mpa}^\tau}{d\xi_d} = F_{PotEst} \left[\frac{d\overline{Pot}_a^\tau}{d\psi_c} \quad \frac{d\overline{Pot}_a^\tau}{d\hat{A}_\omega} \right] = F_{PotEst} \left[\frac{d\overline{Pot}_a^\tau}{d\psi_c} \quad 0 \right] \quad (465)$$

com F_{PotEst} dado pela eq.(243) e sendo apenas desconhecida a sensibilidade $\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\hat{A}_\omega}$, a qual pode ser expressa como:

$$\frac{d\overline{Pot}_a^\omega}{d\hat{A}_\omega} = \left[\Re[W_I^\omega] G_{IJ}^c \Re \left[\frac{dW_J^\omega}{d\hat{A}_\omega} \right] + \Im[W_I^\omega] G_{IJ}^c \Im \left[\frac{dW_J^\omega}{d\hat{A}_\omega} \right] \right] \quad (466)$$

em que o cálculo do termo $\frac{dW_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi}$ depende do tipo de excitação do coletor de energia EPLA (ver seção 4.2.7):

• **Para coletores com excitação por força:** quando diferenciada eq.(184) para encontrar o termo $\frac{dW_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi}$, a sensibilidade $\frac{dF_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi}$ não é nula enquanto $\frac{dK_{IJ}^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = 0$, e consequentemente:

$$\frac{dW_I^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = K_{IJ}^{\varpi-1} \frac{dF_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} \quad (467)$$

em que:

$$\frac{dF_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})F_J^\varpi = \begin{cases} \frac{dF_{ds}}{d\hat{A}_\varpi} = \begin{cases} (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})P_j^P & s = j \in P_j^P \\ 0 & s \neq j \in P_j^P \end{cases} & J \leq s \\ 0 & J \geq s + 1 \end{cases} \quad (468)$$

que é equivalente ao vetor de carregamento do MEF harmônico do problema combinado multiplicado pela diferença $(A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})$ sempre que não sejam prescritas correntes elétricas ($I_{\phi_r} = 0$, ver seção 4.2.5), como é o caso. Assim, o sistema da eq.(467), pode ser resolvido aproveitando o resultado do MEF no domínio da frequência, de modo que:

$$\frac{dW_I^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})K_{IJ}^{\varpi-1}F_J^\varpi = (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})W_I^\varpi \quad (469)$$

• **Para coletores com excitação por deslocamento:** da equação de equilíbrio (eq.(184)) é obtido o sistema:

$$K_{IJ}^\varpi \frac{dW_J^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = -\frac{dK_{IJ}^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} W_J^\varpi = 0 \quad (470)$$

pelo fato de $\frac{dK_{IJ}^\varpi}{d\hat{A}_\varpi} = 0$. Portanto, é necessário trabalhar com o sistema completo (que não reduzido) pelo fato de precisar o valor das sensibilidades tanto nos GDL livres quanto prescritos. Assim, é tratado o sistema como se fosse de MEF com condições de contorno de Dirichlet (ou seja, valores conhecidos da variável de estado em alguma região do domínio). A

variável de estado análoga neste problema é $\frac{dW_I^{\varpi}}{d\hat{A}_{\varpi}}$, a qual tem derivada explícita somente nos GDL estruturais prescritos, deste modo:

$$\frac{dW_J^{\varpi}}{d\hat{A}_{\varpi}} = \begin{cases} \frac{dd_i^L}{d\hat{A}_{\varpi}} & J \leq i \\ \frac{dd_j^P}{d\hat{A}_{\varpi}} = (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})u_j^P & i + 1 \leq J \leq i + j \\ \frac{d\phi_k}{d\hat{A}_{\varpi}} & i + j + 1 \leq J \leq i + j + k \end{cases} \quad (471)$$

sendo que para o resolver sistema homogêneo $K_{IJ}^{\varpi} \frac{dW_J^{\varpi}}{d\hat{A}_{\varpi}} = 0$, K_{IJ}^{ϖ} deve ser modificada nas filas e nas colunas dos GDL associados com os GDL estruturais prescritos. Se P for um GDL estrutural prescrito, a matriz de rigidez modificada seria calculada como:

$$\overline{K}_{IJ}^{\varpi} = \begin{cases} K_{PP}^{\varpi} = 1 & I = J = P \\ K_{IP}^{\varpi} = 0 & I \neq P \\ K_{PJ}^{\varpi} = 0 & J \neq P \end{cases} \quad (472)$$

e o vetor de força análogo, que no sistema original da eq.(470) é nulo, transforma-se em:

$$\overline{F}_I^{\varpi} = \begin{cases} (A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})u_P^P & I = P \\ -(A_{\varpi_{\max}} - A_{\varpi_{\min}})K_{IP}^{\varpi}u_P^P & I \neq P \end{cases} \quad (473)$$

Finalmente, $\frac{dW_I^{\varpi}}{d\hat{A}_{\varpi}}$ é calculado resolvendo o sistema:

$$\overline{K}_{IJ}^{\varpi} \frac{dW_J^{\varpi}}{d\hat{A}_{\varpi}} = \overline{F}_J^{\varpi} \quad (474)$$

lembrando que u_P^P representa um deslocamento prescrito no GDL P .

5.9 Verificação das Sensibilidades Transientes Utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF)

A verificação das sensibilidades feita nesta seção corresponde aos problemas combinados nos que são inclusos termos tanto da análise transiente quanto harmônica. O custo computacional do cálculo das sensibilidades no problema de EPLA aumenta com o número de elementos da malha de MEF, e no caso de problemas de otimização envolvendo termos da análise transiente, com o número de passos de integração no tempo (ver seções 5.4 e 5.7). A verificação consiste em rodar uma iteração de dois problemas combinados de otimização calculando tanto a sensibilidade analítica quanto a sensibilidade pelo MDF, sendo um projeto de atuador e outro de coletor de energia. Os problemas selecionados foram o atuador EPLA-AFF (ver Figura 41) e o coletor de energia EPLA-CFA (Figura 44), sendo considerado neste último, substrato com material ortotrópico com a finalidade de verificar a implementação, mesmo que não fosse possível obter um resultado satisfatório como explicado na seção 6.3.

A malha é de 32 elementos por camada, lembrando o número de camadas definido para cada problema (ver seção 6.1.1). O valor inicial é de natureza randômica e é feito utilizando as funções de MATLAB *randi* e *RandStream* de modo que, a distribuição de números aleatórios não se repita entre sessões de abertura do software. O vetor de sensibilidades comparado corresponde aos problemas combinados das seções 5.5 e 5.8 em relação ao vetor de variáveis de projeto ψ_d no caso de atuadores e ξ_d no caso de coletores de energia. O número de passos de integração e de termos de aproximação do método MIAFIB (ver seção 3.3) foram tais que a diferença entre a sensibilidade calculada analiticamente e pelo MDF apresente uma diferença menor ou igual do que 5% pelo menos em 90% das variáveis de projeto. É possível alcançar uma diferença menor do que 5% em todas as variáveis de projeto, porém o custo computacional desse cálculo pode ser proibitivo, pelo fato de que deve ser sucessivamente incrementado o número de passos de integração, até alcançar a diferença percentual desejada. Na Figura 37 e na Figura 38 são mostradas as verificações da sensibilidade para o problema combinado do atuador e do coletor de energia, respectivamente. No problema do atuador foram observadas 9 de 173 variáveis de projeto com uma diferença maior do que 5% enquanto que para o coletor de energia foram encontradas 11 de 132, todas as variáveis, em ambos os casos, pertencentes ao vetor de variáveis de projeto de pseudo-

densidade ρ_e . Esse fato pode ser atribuído à alta dependência da análise transiente com a discretização da malha de MEF e o tamanho de passo utilizado no método de integração no tempo, sendo esperado que para um número suficiente de passos de integração e malhas mais finas o valor da sensibilidade pelo MDF se aproxime do valor calculado analiticamente. As outras variáveis de projeto apresentaram valores que alguns casos eram iguais até nas 5 primeiras casas decimais.

Figura 37 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para o problema combinado do atuador

Figura 38 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para o problema combinado do coletor de energia

6 RESULTADOS

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos com o software *EPLADin*, cuja implementação foi explicada nos capítulos 4 e 5. Foram propostos três problemas de EPLA resolvidos por um enfoque harmônico transiente e combinado, sendo o processo de otimização aplicado num domínio de projeto regular. Os três problemas são:

- Atuador em torção simétrica fora do plano com substrato de alumínio (EPLA-ATA)
- Atuador em flexão fora do plano com substrato de material ortotrópico (EPLA-AFF)
- Coletor em flexão fora do plano com substrato de alumínio (EPLA-CFA)

sendo que a expressão fora do plano faz referência ao plano em que se encontra contida a casca. Assim, neste trabalho foram resolvidos 9 problemas de otimização (3 por caso) cujos resultados foram confrontados de maneira quantitativa incluindo o desempenho do modelo denominado integral, que corresponde ao domínio de projeto fixo cheio completamente com material sólido. Além disso, os modelos são identificados conforme o enfoque de otimização utilizado como EPLA-MOD- X ou simplesmente MOD- X , em que X pode ser H para harmônico, T para transiente, C para combinado e I para o modelo integral. As características confrontadas comuns aos problemas de atuadores e coletores foram: tempo de subida (t_r), tempo de estabilização (t_s), frequência de oscilação amortecida em regime transiente ($f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$), volume do substrato (V_{alu} ou V_{fib} , conforme o caso), volume do material piezelétrico (V_{pie}), volume total (V_{tot}), número de iterações do processo de otimização (z_f) e tempo de execução total (T_{exe}), tempo de execução por iteração (T_{iter}) e o tempo de inicialização de dados (T_{ini}). O detalhamento em relação aos tempos de execução e custo computacional é dado na seção 6.5.

As características específicas comparadas no caso de atuadores foram: deslocamento de estabilização (u_{out}^S , lembrando que $u_{out}^S = u_{out}^R$), máxima ultrapassagem porcentual ($S_p = 100M_p$), amplitude do deslocamento harmônico ($\|u_{out}^\omega\|$) e a relação $\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^S}$. O termo $\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_{out}^S}$ foi

criado como índice de desempenho para medir se os níveis de resposta no regime harmônico e transiente são iguais conforme os objetivos do problema de otimização da eq.(218) e eq.(219), sendo desejável que a sua magnitude seja unitária ou muito próxima.

Já nos problemas de coletores de energia foram comparadas as características específicas: valores dos componentes do circuito RLC, potência ativa média gerada em meio período de excitação ($\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau}$), potência ativa média gerada por ciclo em regime transiente ($\overline{\text{Pot}}_{\text{ca}}^{\tau}$), potência ativa média por ciclo em regime harmônico ($\overline{\text{Pot}}_{\text{a}}^{\omega}$), a relação entre potências geradas $\frac{\overline{\text{Pot}}_{\text{a}}^{\omega}}{\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau}}$, potência transferida relativa do coletor ao circuito ($R_{\text{PT}}^{\omega}, R_{\text{PT}}^{\tau}$) e a eficiência do sistema coletor-circuito ($\eta^{\omega}, \eta^{\tau}$), em que os sobrescritos ω, τ referem-se ao domínio harmônico e transiente, respectivamente.

Igualmente, o termo $\frac{\overline{\text{Pot}}_{\text{a}}^{\omega}}{\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau}}$ foi criado como índice de desempenho para comparar as potências médias ativas geradas no regime harmônico e transiente segundo os objetivos do problema de otimização da eq.(234) e eq.(235), sendo desejável que a sua magnitude seja 1 ou valor muito próximo. A potência transferida relativa (ver seção 2.4.10) é medida com a finalidade de determinar o grau de casamento de impedâncias entre o material piezelétrico e o circuito RLC representado como uma impedância Z (ver seção 2.4.8), lembrando na condição de máxima transferência de potência, as impedâncias são iguais apesar de que a eficiência do sistema é somente 50% (DURNEY; HARRIS; ALLEY, 1982; JONES, 1995). Ou seja, máxima transferência de potência não garante máxima eficiência e, portanto, o critério de projeto depende do tipo de aplicação.

Para os resultados de orientações de fibra são comparados: o número de ângulos presentes na solução (N_{θ} , lembrando que $N_{\theta_{\text{max}}} = 359$ é o número de ângulos candidatos do modelo MIAFIB, ver seção 3.3), o índice de ortogonalidade da fibra I_p , que mede a proporção estimada de orientações de fibra adjacentes cujo ângulo relativo ultrapassa θ_{relmax} (ver seção 4.7). Os resultados mostrados são obtidos das topologias filtradas, se não for especificado o contrário enquanto os encontrados em parênteses e os relacionados com número de iterações e custo computacional correspondem aos alcançados com as topologias otimizadas. As flechas em parênteses ao lado das características anteriores, indicam a tendência desejada no problema de otimização.

6.1 Parâmetros Considerados

Nesta seção se fará uma compilação dos parâmetros usados para resolver numericamente os problemas de otimização propostos neste trabalho. Alguns dos parâmetros, como por exemplo, pesos das funções de penalização e o tempo do estado transiente, variam de acordo com o tipo de problema analisado e são especificados no seu próprio enunciado.

6.1.1 Número de Camadas

Todas as estruturas modeladas como atuadores são compostas por 3 camadas, sendo que as camadas piezelétricas inferior e superior são referenciadas como camadas 1 e 3, respectivamente; enquanto a camada intermediária do substrato é referenciada com o número 2. Já para os coletores de energia, as estruturas possuem somente duas camadas sendo a camada inferior do substrato referenciada com o número 1, enquanto a camada superior ou camada 2 é a camada piezelétrica.

6.1.2 Propriedades de Material

As camadas de substrato podem ser camadas de alumínio (material isotrópico, ver Tabela 2) ou camadas de fibra de vidro em matriz epóxica (material ortotrópico, ver Tabela 3) enquanto as camadas piezelétricas para atuadores são consideradas de PZT-4 (ver Tabela 4) e para coletores de energia são consideradas de PZT-5A (ver Tabela 5).

Tabela 2 – Propriedades do Alumínio

Propriedade (Unidade SI)	Valor
Densidade (kg/m ³)	2520,110
Módulo de Young (GPa)	69,489
Coefficiente de Poisson	0,307

Tabela 3 – Propriedades da Fibra de vidro em matriz epóxica

Propriedade (Unidade SI)		Valor
Densidade (kg/m ³)		1500
Módulo de Young (GPa)	E ₁	53,78
	E ₂	17,93
	E ₃	17,93
Módulo de Cisalhamento (GPa)	G ₁₂	8,93
	G ₁₃	8,93
	G ₂₃	3,44
Coeficiente de Poisson	ν_{12}	0,25
	ν_{13}	0,25
	ν_{23}	0,34

Tabela 4 – Propriedades do material piezelétrico PZT-4 para atuadores

Propriedade (Unidade SI)		Valor
Densidade (kg/m ³)		7500
Constantes Elásticas (GPa)	C ₁₁ ^E	139
	C ₁₂ ^E	77,8
	C ₁₃ ^E	74,3
	C ₃₃ ^E	115
	C ₄₄ ^E	25,6
	C ₆₆ ^E	30,6
Constantes Piezelétricas (C/m ²)	e ₃₁	-5,2
	e ₃₃	15,1
	e ₁₅	12,7
Constantes Dielétricas (F/m)	ϵ_{11}^E	728,10 ϵ_0
	ϵ_{33}^E	636,35 ϵ_0

As propriedades do alumínio e do material piezelétrico para coletores foram obtidas experimentalmente (ver seções 7.1.1 e 7.1.2, respectivamente). Já para o material ortotrópico e o material piezelétrico para atuadores, foram utilizadas as propriedades encontradas em

Kiyono, Silva e Reddy (2012) e Kiyono (2013) e Sherman e Butler (2007), respectivamente. A constante dielétrica no vácuo é considerada como $8,854187817 \times 10^{-12}$, valor tomado de Mohr Taylor e Newell (2008).

Tabela 5 – Propriedades do material piezelétrico PZT-5A para coletores

Propriedade (Unidade SI)		Valor
Densidade (kg/m ³)		7511,439
Constantes Elásticas (GPa)	C_{11}^E	141,215
	C_{12}^E	83,781
	C_{13}^E	77,027
	C_{33}^E	131,707
	C_{44}^E	15,486
	C_{66}^E	28,717
Constantes Piezelétricas (C/m ²)	e_{31}	-0,442
	e_{33}	11,611
	e_{15}	18,096
Constantes Dielétricas (F/m)	ϵ_{11}^E	$1858,594\epsilon_0$
	ϵ_{33}^E	$817,738\epsilon_0$

6.1.3 Coeficientes de Perdas

Para calcular os coeficientes das funções de perdas podem ser utilizados dados estimados ou experimentais. Se possuir dados experimentais, podem ser calculadas funções conforme ao descrito na seção 2.4.7, caso contrário pode ser efetuado o esquema a seguir. No início do método e antes de começar a distribuição iterativa de material é feita uma análise modal (ver seção 2.4.11) com todas as pseudo-densidades iguais a 1 (considerando o domínio de projeto inteiramente sólido), as pseudo-polarizações como definidas pelo projeto (ou seja, 0 para o eletrodo negativo e 1 para o eletrodo positivo) e as pseudo-orientações com valor igual a 0 (com todas as fibras orientadas ao longo de uma direção de um dos eixos do sistema de coordenadas). As variáveis de projeto restantes não incidem na análise modal e, portanto, não são consideradas. Com os resultados da análise modal são calculados as frações de

participação modal de cada modo e o fator acumulado de participação modal (ver seção 2.4.7).

Tendo definidos os valores extremos tanto para o coeficiente de amortecimento ζ quanto para o fator de perdas dielétricas $\tan \delta_0$, pode ser feita uma regressão para estimar os coeficientes das funções de perdas. Para a função de amortecimento estrutural pode ser suposto inicialmente uma variação linear em que na frequência fundamental o amortecimento é $\zeta_{\min}$ enquanto no modo com a maior frequência ω_{N_v} do conjunto N_v em que $\Gamma_{F_i} \geq \Gamma_F^{\min}$ o amortecimento é $\zeta_{\max}$. Calculados os amortecimentos supostos para as outras frequências de ressonância do conjunto N_v pode ser resolvido o sistema da eq.(143) para encontrar os coeficientes de amortecimento α_1 e β_1 . Neste trabalho, se não possuir dados experimentais, pode-se adotar $\zeta_{\min} = 0.001$ e $\zeta_{\max} = 0.06$.

Por outro lado, para a função de perdas dielétricas é suposto que numa frequência próxima de zero, a perda dielétrica é $\tan \delta_{0\max}$ enquanto na frequência ω_{N_v} a perda dielétrica é $\tan \delta_{0\min}$. Assim, a partir da eq.(151) pode ser resolvido um sistema de equações 2×2 , em que as incógnitas são os coeficientes da função de perdas dielétricas α_{δ_0} e β_{δ_0} . Neste trabalho, quando não se possuem dados experimentais é suposto que $\tan \delta_{0\min} = 10^{-5}$ e $\tan \delta_{0\max} = 0,5$ ou o valor especificado pelo fabricante. Cabe lembrar, que os coeficientes de perdas são utilizados tanto na análise harmônica quanto na transiente (ver seções 2.4.4 e 2.4.12) e são mantidos constantes durante todo o processo de otimização. Os valores mínimos e máximos para ζ e δ_0 recomendados aqui foram obtidos por experimentação numérica, de modo que, as funções de perdas obtidas forem coerentes com o comportamento dos modelos adotados neste trabalho (ver seção 2.4.7).

6.1.4 Fatores de Penalização

Levando em conta a hipótese proposta por Kim *et al.* (2010) de que os fatores de penalização podem ser determinados a partir de uma condição intrínseca (de que os penalizadores devem ser maiores do que 1) e uma condição dependente do objetivo, foram encontrados vários conjuntos de fatores de penalização segundo o enfoque do problema de otimização (harmônico, transiente e combinado) e a aplicação da EPLA (atuadores e coletores

de energia), (ver Tabela 6 e Tabela 7). Para os fatores de penalização excetuando o fator de penalização da polarização do material piezelétrico (P_γ) e o fator de penalização do modelo de fibra MIAFIB foram avaliadas todas as combinações entre 1 e 5 resolvendo o problema de otimização com uma discretização de 32 elementos por camada e um valor inicial das variáveis de projeto randômico (ver seção 6.1.5). Como condição adicional o fator de penalização da densidade de massa (P_m) foi definido sempre menor que o fator de penalização da matriz de elasticidade (P_e) com a finalidade de evitar modos de vibração espúrios em regiões com pseudo-densidade ρ_e próximas de zero, fato descrito por Pedersen (2000).

Tabela 6 – Fatores de penalização utilizados no MOT no problema de atuadores

Descrição	Valor			
	Mín.	Máx.		
		Harm.	Trans.	Comb.
Fator de penalização da densidade de massa (P_m)	1		1	
Fator de penalização da matriz de elasticidade (P_e)	1,5	2		3
Fator de penalização da matriz dielétrica (P_ϵ)		4	1	4
Fator de penalização da matriz piezelétrica (P_e)	1	5	3	5
Fator de penalização da polarização do material piezelétrico (P_γ)			1	
Fator de penalização da matriz de rotação ($P_{f_{\max}}$).	2		16	

Desse modo, foi selecionada a combinação que produzisse o menor índice de variáveis de projeto intermediárias I_R , dado por:

$$I_R = \frac{F_{VPI}}{F_{VPI}^{\max}} \in [0,1] \quad (475)$$

em que F_{VPI} é o valor da função de penalização para eliminar as variáveis de projeto intermediárias dado pela eq.(634) e $F_{VPI}^{\max}$ o valor máximo dessa função calculada pela eq.(636), (ver APÊNDICE C.1). Esse índice mede a porcentagem de variáveis intermediárias na solução final e, portanto, é pensado que o conjunto de penalizadores selecionado aumentaria a probabilidade de sucesso na redução das escalas de cinza em modelos com maior discretização. Para o fator de penalização P_γ é necessário um número inteiro ímpar adotando assim um valor de 1. Os fatores de penalização seguem um esquema de continuação

no MOT, sendo incrementados a cada iteração em um valor de 0,15 começando desde um valor mínimo até um valor máximo.

Tabela 7 – Fatores de penalização utilizados no MOT no problema de coletores de energia

Descrição	Valor			
	Mín.	Máx.		
		Harm.	Trans.	Comb.
Fator de penalização da densidade de massa (P_m)	1	3	4	1
Fator de penalização da matriz de elasticidade (P_c)	1,5	4		5
Fator de penalização da matriz dielétrica (P_e)		1	3	4
Fator de penalização da matriz piezelétrica (P_e)	1	5	1	2
Fator de penalização da polarização do material piezelétrico (P_γ)			1	
Fator de penalização da matriz de rotação ($P_{f_{\max}}$).	2		16	

Para determinar os valores extremos de penalização do modelo de fibra MIAFIB foi considerado um balanço entre a precisão das funções trigonométricas envolvidas, as sensibilidades da matriz ortotrópica $\frac{dT_{\theta_{cb}}}{d\theta_e}$ (ver seções 3.3 e 5.1) e a capacidade do modelo de contornar mínimos locais. Assim, o valor inicial de $P_{f_{\max}} = 2$ permite que o algoritmo consiga sair de valores iniciais que potencialmente possam ser mínimos locais (por exemplo, todas as $\hat{\theta}_e = 0$). Já com $P_{f_{\max}} = 7$, as sensibilidades não ultrapassam uma diferença de 10% em relação a aquelas calculadas pelo MDF e o valor final de $P_{f_{\max}} = 16$ faz com que as séries das funções seno e cosseno convirjam para o valor exato.

Assim, o valor inicial neste trabalho para $P_{f_{\max ini}}$ é 2 enquanto que o valor final é $P_{f_{\max fin}}$ é 16 (ver Tabela 6 e Tabela 7). Logo na iteração inicial, as séries das funções trigonométricas são calculadas com $P_{f_{\max ini}} + 1$ termos que são incrementados ao longo da otimização até alcançar $P_{f_{\max fin}} + 1$ termos. Os termos são adicionados conforme ao comportamento do resíduo entre o número da iteração atual N_{iter} do processo de otimização e a parte inteira do inverso do incremento do fator de penalização ΔP_f , ou seja:

$$\text{MOD}(N_{iter}, [1/\Delta P_f]) \begin{cases} \text{se} = 0 & \min(P_{f_{\max}} + 1, P_{f_{\max fin}}) \\ \text{se} \neq 0 & P_{f_{\max}} \end{cases} \quad (476)$$

em outras palavras, se N_{iter} é múltiplo da parte inteira de $1/\Delta P_f$ então $P_{f_{max}}$ deve ser incrementado numa unidade sem ultrapassar $P_{f_{maxfin}}$, caso contrário permanecerá sem alteração. O incremento ΔP_f no problema harmônico é de 0,15 enquanto para o problema transiente e combinado é de 0,2.

6.1.5 Valor Inicial e Limite das Variáveis de Projeto

O valor inicial é de natureza randômica e é feito utilizando as funções de MATLAB *randi* e *RandStream* de modo que, a distribuição de números aleatórios não se repita entre sessões de abertura do software. No valor inicial randômico são impostos limites com o intuito de evitar instabilidades numéricas no MEF, mas no decorrer da otimização as variáveis de projeto podem alcançar os valores limite da Tabela 8.

Tabela 8 – Valores extremos e limite das variáveis de projeto

Descrição	Valor Inicial		Valor Limite			
	Mín.	Máx.	Mín.			Máx.
			Harm.	Trans.	Comb.	
Pseudo-densidades (ρ).	0,1	1	1×10^{-16}	1×10^{-8}	5×10^{-9}	1
Pseudo-polarizações (γ)	0,3	0,7		0		1
Pseudo-impedâncias ($\hat{R}, \hat{L}, \hat{C}$)	0,001	1		0		1
Resistores (em k Ω)	0,1	100		0,1		100
Indutores (em μ H)	10	1000		10		1000
Capacitores (em pF)	10	560		10		560
Pseudo-fator de excitação harmônica ($\bar{A}_{\omega}$)	0,001	1			0,001	1
Fator de excitação harmônica (A_{ω})						
Atuadores		1	N/A			1
Coletores de Energia	0,1	120			0,1	120

Se for utilizado um valor inicial uniforme, o valor inicial das pseudo-polarizações (γ) deve ser diferente de 0,5 com a finalidade de não originar uma polarização nula desde o início da otimização que permita a aparição de instabilidades numéricas no método. Para os valores extremos dos componentes do circuito acoplado em coletores de energia foram utilizados valores disponíveis comercialmente, lembrando que a partir de esses valores as variáveis de projeto de pseudo-impedância ($\hat{R}, \hat{L}, \hat{C}$) são interpoladas linearmente (ver seção 3.4).

6.1.6 Critério de Convergência

Neste trabalho, é considerado que o algoritmo do MOT alcançou a convergência quando o critério de parada CP em duas iterações consecutivas $k-1$ e k é igual ou menor a um valor pequeno especificado, o qual foi selecionado para ser 10^{-4} . O critério de parada a cada iteração é calculado com a expressão:

$$(CP)_k = \left(\frac{\ln\left(\left|\frac{(F_{OBJ})_k}{(F_{OBJ})_{k-1}}\right|\right)}{\ln\left(\left|\frac{(F_{OBJ})_k}{(F_{OBJ})_k}\right|\right)} \right)_k \leq 10^{-4} \forall k \geq 2 \quad (477)$$

6.1.7 Capacidade computacional

As características do microcomputador utilizado nas simulações são mostradas na Tabela 9. O custo computacional de cada simulação foi avaliado empregando os comandos *tic* e *toc* de MATLAB.

Tabela 9 – Características do microcomputador utilizado nas simulações

Descrição	Valor (Unidade)
Processador	Intel Core i7 5930K @ 3.5 GHz-15MB Cachê
Sistema operacional	Windows 10 Education @ 64 bits
Unidade de disco rígida	Kingston HyperX SSD 480Gb SATA III
Memória RAM	64 GB HyperX DDR4 Kingston
Placa de vídeo	EVGA Geforce GTX970 DDR5 4GB

6.1.8 Pós-processamento

As topologias resultantes do processo de otimização (ou topologias otimizadas) são submetidas a um pós-processamento, em que são filtradas as variáveis de projeto de pseudo-densidade com valores maiores ou iguais a 0,8, independentemente da polarização, caso das

camadas piezelétricas. As topologias resultantes do pós-processamento são chamadas de topologias 0-1 ou filtradas. Para o cálculo do histórico da resposta na estrutura resultante, o tempo considerado na otimização é amplificado conservando o mesmo tamanho de passo Δt aplicando um ciclo de uma onda quadrada com a frequência de excitação equivalente ao imposto no regime harmônico.

Com a finalidade de fabricar protótipos e caracterizá-los experimentalmente, as topologias filtradas obtidas na etapa de pós-processamento do MOT são submetidas a um processo de interpretação de forma em que os contornos externos e internos da estrutura são suavizados. Esse processo permite eliminar os cantos vivos das topologias 0-1 e concentradores geométricos de tensões mecânicas indesejáveis. O algoritmo de interpretação de forma é baseado no trabalho de Ma *et al.* (2006) que desenvolveram um método de interpretação com o intuito de construir protótipos a partir de resultados de otimização multietapa. Esse algoritmo foi adaptado por Salas (2012) para interpretar resultados do MOT aplicado a microsistemas eletrotermomecânicos em regime transiente e cuja implementação foi aplicada neste trabalho.

6.2 Atuador EPLA-ATA

Considere o projeto de um atuador EPLA no domínio fixo de projeto mostrado na Figura 39, o qual é excitado com uma diferença de potencial V_{in} e cujo objetivo é maximizar as amplitudes de deslocamento u_{out} nos extremos livres do domínio. Na figura mencionada anteriormente, são definidas as dimensões do domínio de projeto e as condições de carregamento, contorno e iniciais para o problema. Além disso, estão especificados os materiais e espessuras de cada camada e a polarização das camadas piezelétricas para o modelo integral.

As condições de simetria do problema estão dadas em relação ao plano horizontal xy e vertical xz . Porquanto o atuador deve agir fora do plano xy , a polarização e topologia das camadas 1 e 3 devem ser exatamente iguais com o intuito de amplificar as componentes de deslocamento fora desse plano. Adicionalmente, é esperada uma topologia simétrica em relação ao plano xz . Assim, aproveitando a simetria em torno do plano xz o atuador é modelado como exposto na Figura 39b enquanto a simetria em relação ao plano xy é atingida

conforme ao mapeamento descrito na seção 4.4.2. O problema da flexibilidade média é resolvido com o carregamento unitário L_I^Σ na direção do deslocamento de referência u_{mc} . Os dados adicionais para a realização do processo de otimização encontram-se na Tabela 10 e na Tabela 11.

Figura 39 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o atuador EPLA-ATA: (a) Problema original; (b) Problema resolvido pelo MOT aplicando a simetria em torno ao plano xz

Na Figura 40 são mostradas as topologias filtradas e interpretadas das camadas do atuador EPLA-ATA. Além disso, são mostradas as polarizações resultantes das camadas 1 e 3 do atuador que possuem material piezelétrico, observando a mesma polarização para ambas as camadas de modo a garantir o movimento fora do plano. Pode ser notado que as topologias são bem definidas e não apresentam nenhuma região com instabilidade de tabuleiro enquanto os índices de avaliação de instabilidades numéricas foram menores do que 0,2% (I_R e I_H , ver APÊNDICE C). Isso leva à conclusão de que as soluções para contornar as instabilidades numéricas foram bastante efetivas, uma vez que o processo de geração de uma topologia filtrada é facilitado. Adicionalmente pode ser apontado, que as restrições de simetria funcionaram adequadamente na otimização nas variáveis de topologia e de polarização.

A respeito do desempenho dos 4 atuadores comparados, o modelo ATA-H obteve melhores características relacionadas com as amplitudes de vibração e o volume de material utilizado enquanto o modelo ATA-C obteve melhores características relacionadas com a velocidade de resposta e a relação de deslocamento $\frac{\|u_{out}^\omega\|}{u_s^\omega}$ mais próxima de 1 como desejado

no problema de otimização (ver seções 3.6.3 e 4.2.4). Já para o modelo ATA-T, os desempenhos se mostraram em segunda posição em relação às características de velocidade de resposta e material utilizado.

Tabela 10 – Dados do problema do atuador EPLA-ATA

Descrição (Unidade)		Enfoque de Otimização		
		Harmônico	Transiente	Combinado
				Harmônico
Amplitude da tensão elétrica (V_{in} em V)		100	$\frac{100}{\sqrt{2}} = 70,7$	$100A_{\omega}^*$
				Transiente
				70,7
Frequência da excitação (em Hz)			100	
Tempo transiente (t_f em ms)			1,8	
Número de passos de integração (m)			30	
Malha	Total de elementos (N)		2646	
	Total de nós (n)		8319	
	Elementos por camada (N_{cam})		882 (42x21)	
Coeficientes da função de amortecimento	α_1		$8,465 \times 10^{-2}$	
	β_1		$1,165 \times 10^{-4}$	
Coeficientes da função de perdas dielétricas	α_{δ_0}		3,947	
	β_{δ_0}		157422,679	
Restrição de volume (%)			$0,65 \leq V_{alu} \leq 0,75$	
			$0,8 \leq V_{pie} \leq 0,85$	
*Amplitude de V_{in} no problema harmônico com A_{ω} como variável de projeto. No regime transiente do problema combinado a amplitude de V_{in} não é alterada.				

Tabela 11 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do atuador EPLA-ATA

Enfoque de Otimização	w_{ω}	w_{τ}	w_R	w_C	w_D	w_{VPI}	w_{CCF}	Υ
Harmônico	1×10^9	N/A		1		1×10^4	300	0,995
Transiente	N/A	2×10^6	8×10^6	1	N/A	60	0,6	0,98
Combinado	1×10^8	1×10^7	2×10^7	9×10^6	1×10^{11}	2×10^3	3×10^3	0,995

■ PZT (↑)		■ PZT (↓)		■ Alumínio		Resultados: Melhor desempenho, Segundo melhor desempenho	
INTEGRAL		MOT HARMÔNICO		MOT TRANSIENTE		MOT COMBINADO

$t_r(\mu s)(\downarrow)$	503,92	483,88		214,11 (225,44)		70,40 (70,37)	
$t_s(ms)(\downarrow)$	72,356	87,42		70,73 (76,867)		7,887 (8,704)	
$f_d(kHz)(\uparrow)$	0,557	0,539		1,264 (1,158)		1,377 (1,568)	
$\ u_{out}^{\omega}(\mu m)(\uparrow)$	11,672	12,613 (13,022)		2,547		0,724 (0,672)	
$u_{out}^S(\mu m)(\uparrow)$	8,120	8,802		1,812 (1,787)		0,709 (0,672)	
$\ u_{out}^{\omega}\ /u_{out}^S(\approx 1)$	1,437	1,433		1,406		1,021 (1,000- $A_{\omega}=0,727$)	
$S_p(\%)(\downarrow)$	47,00	70,89		21,58 (20,17)		26,95 (37,38)	
$V_{alu}(\%)(\downarrow)$	100	72,2 (72,2)		74,9 (74,9)		74,8 (74,9)	
$V_{pie}(\%)(\downarrow)$	100	83,6 (83,6)		84,9 (84,9)		84,9 (85,0)	
$V_{tot}(\%)(\downarrow)$	100	79,8 (79,8)		81,6 (81,6)		81,6 (81,6)	
$Z_f(\downarrow)$		32		46		40	
$T_{exe}(h)(\downarrow)$		0,344		5,208		4,860	
$T_{iter}(\min)(\downarrow)$	N/A	0,639		6,790		7,286	
$T_{ini}(s)(\downarrow)$		9,442		9,980		10,080	

Figura 40 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do atuador EPLA-ATA

O modelo ATA-C reduziu 86,0% o tempo de subida (portanto aumenta a velocidade de resposta), 89,1% o tempo de estabilização e 18,4% o volume de material utilizado enquanto aumentou 2,47 vezes a frequência de oscilação no regime transiente, comparado com o modelo integral. Igualmente, o enfoque combinado forneceu a relação $\frac{\|U_h\|}{U_s}$ mais próxima de 1 de todas as topologias consideradas, resultado que pode ser atribuído à variável de projeto A_{ω} introduzida para garantir o mesmo nível de resposta independente da forma da excitação. Porém, a amplitude da excitação elétrica de entrada no regime harmônico se vê reduzida num 27,3% (ver Tabela 10). Além disso, comparado com o modelo ATA-I, o modelo ATA-H reportou as maiores amplitudes de deslocamento aumentando a oscilação em 8,1% no regime harmônico e 8,4% no regime transiente. O modelo ATA-T reduziu a máxima

ultrapassagem em 54,1% e obteve os mesmos desempenhos de material utilizado que o modelo ATA-C. No entanto, os baixos desempenhos das otimizações envolvendo análise transiente (ATA-T e ATA-C) em relação às amplitudes de vibração podem ser devidos à ponderação do otimizador pelos outros objetivos como a velocidade de resposta, pois essa é a consequência quando utilizadas funções multiobjetivo. Além disso, a configuração da topologia obtida sugere um aumento da rigidez à torção da estrutura que se traduz em baixos deslocamentos e tempos de estabilização reduzidos. Contudo, um ajuste dos pesos de ponderação da função objetivo possibilitaria obter melhores resultados.

Em relação ao custo computacional, é observado que as simulações no problema transiente e combinado requerem, para chegar a um resultado, aproximadamente 11 vezes mais tempo por iteração do que suas análogas no domínio harmônico. O custo computacional do cálculo das sensibilidade, no projeto de EPLA utilizando o MOT com enfoque transiente, aumenta com o número de elementos na discretização do domínio de projeto e, além disso, com o número de passos de integração no tempo. Por tal motivo, deve ser procurada uma solução de compromisso entre a discretização no espaço físico (domínio) e a dimensão tempo, com a finalidade de obter uma topologia num tempo razoável em prejuízo da precisão das sensibilidade (ver seção 6.5). Contudo, como estratégia para reduzir o custo computacional pode ser utilizado o resultado do problema harmônico como valor inicial para os problemas transiente e combinado, não obstante, esse procedimento não garante obter uma rápida convergência, pois é possível que no início da otimização, a função objetivo esteja num mínimo local. Outra possibilidade é executar a otimização numa discretização menor e projetar o resultado sobre uma malha de MEF mais fina.

6.3 Atuador EPLA-AFF

Seja o projeto de um atuador EPLA com material ortotrópico (Fibra de vidro com matriz epóxica, ver Tabela 3) como substrato no domínio fixo de projeto mostrado na Figura 41, o qual é excitado com uma diferença de potencial V_{in} e cujo objetivo é maximizar as amplitudes de deslocamento u_{out} no extremo livre do domínio. Nessa figura são definidas as dimensões do domínio de projeto e as condições de carregamento, contorno e iniciais para o problema. Do mesmo modo, na mesma figura estão especificados os materiais e espessuras de cada camada e a polarização das camadas piezelétricas para o modelo integral. O plano

horizontal xy e vertical xz definem a simetria do problema conforme ao exposto na seção 4.4.2. Pelo fato de o atuador agir fora do plano xy , a polarização e topologia das camadas 1 e 3 devem ser exatamente iguais com o intuito de amplificar as componentes de deslocamento fora desse plano. Ao mesmo tempo, é esperada uma topologia simétrica em relação ao plano xz . O problema da flexibilidade média é resolvido com o carregamento unitário L_1^Σ na direção do deslocamento de referência u_{mc} . Os dados adicionais necessários para o processo de otimização são mostrados na Tabela 12 e na Tabela 13.

Figura 41 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o atuador EPLA-AFF

Na Figura 42 são mostradas as distribuições de fibra para o atuador EPLA-AFF obtidas pela inclusão do modelo MIAFIB no problema de otimização, considerando para o modelo integral (AFF-I) uma distribuição uniforme de orientações de fibra paralelas ao eixo coordenado x (0°). Na Figura 43 são mostradas as topologias filtradas e interpretadas das camadas da estrutura e, igualmente, são mostradas as polarizações resultantes das camadas 1 e 3 do atuador que possuem material piezelétrico, conservando a mesma polarização para ambas as camadas garantindo assim, o movimento fora do plano. As topologias não apresentam nenhuma região com instabilidade de tabuleiro sendo os índices de avaliação de instabilidades numéricas menores do que 0,5% (I_R e I_H , ver APÊNDICE C). Pode-se concluir que as soluções para contornar as instabilidades numéricas foram bastante eficazes, sendo facilitado o processo de geração de uma topologia 0-1. Além disso, as restrições de simetria

funcionaram adequadamente na otimização tanto para a topologia quanto para a polarização e orientações de fibra.

Tabela 12 – Dados do problema do atuador EPLA-AFF

Descrição (Unidade)		Enfoque de Otimização		
		Harmônico	Transiente	Combinado
				Harmônico
Amplitude da tensão elétrica (V_{in} em V)		100	$\frac{100}{\sqrt{2}} = 70,7$	$100A_{\varpi}^*$
				Transiente
				70,7
Frequência da excitação (em Hz)			60	
Tempo transiente (t_f em ms)			5	
Número de passos de integração (m)			25	
Malha	Total de elementos (N)		3456	
	Total de nós (n)		10803	
	Elementos por camada (N_{cam})		1152 (48x24)	
Coeficientes da função de amortecimento	α_1		$4,686 \times 10^{-2}$	
	β_1		$2,831 \times 10^{-4}$	
Coeficientes da função de perdas dielétricas	α_{δ_0}		3,951	
	β_{δ_0}		157597,301	
Restrição de volume (%)			$0,65 \leq V_{fib} \leq 0,75$	
			$0,8 \leq V_{pie} \leq 0,85$	
Ângulo relativo máximo esperado entre fibras adjacentes (em graus para $P_{par} = 0,665$)			35°	
*Amplitude de V_{in} no problema harmônico com A_{ϖ} como variável de projeto. No regime transiente do problema combinado a amplitude de V_{in} não é alterada.				

Tabela 13 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do atuador EPLA-AFF

Enfoque de Otimização	w_{ϖ}	w_t	w_R	w_C	w_D	w_{VPI}	w_{CCF}	w_{POF}	Y
Harmônico	1×10^7	N/A		1		10	300	20	0,995
Transiente	N/A	5×10^5	5×10^6	1	N/A	$1,8 \times 10^4$	7×10^3	1000	0,99
Combinado	1×10^7	7×10^6	7×10^7	1×10^{10}	1×10^{12}	300	120	1200	0,995

Figura 42 – Distribuição das orientações da fibra para o problema do atuador EPLA-AFF

Comparando o desempenho dos 4 atuadores considerados, o modelo integral (AFF-I) apresentou o menor tempo de subida, portanto a melhor velocidade de resposta, fato que pode ser atribuído à redução da rigidez à flexão dos dispositivos otimizados toda vez que, na maximização da área sob a curva de deslocamento, o algoritmo de otimização pode priorizar o aumento do nível do deslocamento ao invés da inclinação dessa curva, afetando indiretamente a velocidade de resposta das estruturas otimizadas. Por outro lado, confrontando com o modelo AFF-I, o modelo AFF-C diminuiu o tempo de estabilização em 2,1% (sendo o seu amortecimento é 2,61 vezes maior) e a máxima ultrapassagem em 33,9% seguido do modelo AFF-T com uma redução de 8,2% nesse item. Entretanto o modelo AFF-H forneceu a mínima quantidade de material utilizada alcançando a maior amplitude de deslocamento harmônico com 20,4% material a menos do que o modelo AFF-I.

Em relação ao desempenho da frequência de oscilação amortecida nos modelos AFF-T e AFF-C, foi notado que a diminuição nessa frequência obedece à localização de material do substrato em regiões afastadas dos apoios e, adicionalmente, à interpretação da topologia obtida do MOT, já que a presença de elementos com densidades próximas de zero pode modificar a resposta pela aparição de modos de vibração espúrios, como relatado por Pedersen (2000). Deste modo, foi observado após o processo de interpretação, que a

frequência de oscilação amortecida ω_d nos modelos AFF-T e AFF-C se viu reduzida em 14,8% e 29,9%, respectivamente.

■ PZT (↑) ■ PZT (↓)		■ Fibra de Vidro		Resultados: Melhor desempenho, Segundo melhor desempenho			
INTEGRAL		MOT HARMÔNICO		MOT TRANSIENTE		MOT COMBINADO

$t_r(\text{ms})(\downarrow)$	0,705	0,806		1,065 (0,945)		1,865 (1,350)	
$t_s(\text{ms})(\downarrow)$	143,92	146,73		148,92 (148,96)		140,90 (146,254)	
$f_d(\text{Hz})(\uparrow)$	368,75	312,50		244,69 (287,16)		137,50 (196,15)	
$\ u^o_{out}\ (\mu\text{m})(\uparrow)$	16,37	17,08 (18,57)		16,86		12,84 (13,67)	
$u^S_{out}(\mu\text{m})(\uparrow)$	11,23	11,05		12,25 (14,93)		12,74 (13,69)	
$\ u^o_{out}\ /\ u^S_{out}(\approx 1)$	1,457	1,546		1,376		1,008 (1,000- $A_{\omega}=0,736$)	
$S_p(\%)(\downarrow)$	64,30	81,73		59,02 (52,28)		42,53 (47,64)	
$V_{aln}(\%)(\downarrow)$	100	70,0 (69,9)		74,8 (74,8)		72,2 (72,2)	
$V_{pie}(\%)(\downarrow)$	100	84,4 (84,3)		84,2 (84,2)		84,9 (85,0)	
$V_{tot}(\%)(\downarrow)$	100	79,6 (79,5)		81,1 (81,1)		80,7 (80,7)	
$N_{\theta}/N_{\theta\text{max}}$	1/359	85 (98)/359		143 (164)/359		99 (145)/359	
$I_p(\%)(\downarrow)$	0	10,22		10,13		7,76	
$C^{\Sigma}_m(N^{\circ}\text{mm})(\downarrow)$	154,94	614,31 (615,22)		214,03 (214,03)		192,52 (193,26)	
$Z_f(\downarrow)$		31		36		40	
$T_{exe}(\text{h})(\downarrow)$	N/A	0,354		5,736		6,668	
$T_{iter}(\text{min})(\downarrow)$		0,677		9,553		9,997	
$T_{ini}(\text{s})(\downarrow)$		14,076		14,225		14,853	

Figura 43 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do atuador EPLA-AFF

Além disso, o modelo AFF-C obteve o maior deslocamento transiente final, sendo seguido pelo modelo AFF-T, enquanto o modelo AFF-H apresentou o menor valor entre todos os modelos avaliados. No entanto, o modelo AFF-H aumentou a amplitude de deslocamento harmônico em 4,3% sendo o melhor desempenho encontrado. Com referência à relação $\frac{\|U_h\|}{U_s}$,

o modelo AFF-C mostrou o valor mais próximo de 1, como proposto no problema de otimização (ver seções 3.6.3 e 4.2.4). Contudo, no regime harmônico desse problema, a energia que dever ser fornecida ao sistema deve ser 26,4% menor para alcançar esses resultados (ver Tabela 12).

A respeito dos resultados envolvendo as variáveis de orientações de fibra, foi observado que a rigidez do substrato não foi reduzida por nenhum modelo otimizado comparada com a apresentada pelo modelo AFF-I com todas as orientações de fibra iguais a 0° . Apesar disso, não poder ser afirmado que a distribuição da fibra alcançada pelos modelos otimizados não incidiu nos resultados das características avaliadas, pois como poder ser visto na Figura 43, o modelo integral somente obteve melhores desempenhos em duas características, o tempo de subida e a frequência de oscilação amortecida. Não obstante, na Figura 42, pode ser notado que a aplicação do modelo MIAFIB em conjunto com a função de penalização de ortogonalidade da fibra F_{POF} forneceu um padrão de continuidade da fibra com índices de ortogonalidade menores do que 11% e com até 40% das diferentes orientações dos ângulos candidatos possíveis (ver seções 3.3 e 4.7).

Uma dificuldade associada à otimização de orientações de fibra com o modelo MIAFIB, é a dependência da convergência com a rigidez da camada compósita (que no caso de camadas com a mesma área recai no valor da espessura) e, além disso, com os elementos de baixa densidade. Testes prévios aos resultados desta seção mostraram para atuadores, uma melhor convergência do problema de otimização para altas relações de espessura entre as camadas piezelétricas e a camada substrato, o que se traduz numa menor espessura da camada compósita.

No entanto, para o problema de coletores de energia não foi possível obter um resultado satisfatório mesmo que a espessura da camada ortotrópica fosse reduzida, tendo elevados índices de instabilidades de tabuleiro e escalas de cinza. Esse fato pode ser explicado desde ponto de vista energético como proposto por Luo e Gea (1998), que avaliaram um fator de energia que compara a relação entre a energia de deformação de cada elemento finito com material ortotrópico e a energia de deformação da estrutura completa. Assim, uma orientação de fibra pode originar uma região extremamente flexível ou rígida conforme a formulação do elemento finito.

Dito de outra forma, para a otimização de objetivos relacionados com a rigidez da estrutura como a flexibilidade média (ver seções 3.8 e 4.3), um ângulo de fibra pode fornecer por si mesmo uma rigidez fictícia ao sistema independente de se o elemento finito possuir ou não material, provocando que o otimizador dê preferência às variáveis de pseudo-orientação, ao invés de modificar as variáveis de projeto de pseudo-densidade originando instabilidades numéricas na solução (ver seção 3.5). No caso do atuador EPLA-AFF, a presença de duas camadas piezelétricas somando 1,4 mm de espessura, fornece uma maior rigidez que a camada de substrato ortotrópica, podendo obter resultados satisfatórios como os mostrados aqui. Contudo, foi notado que os pesos de ponderação das funções de penalização de instabilidades numéricas tiveram que ser aumentados quando utilizado o modelo de interpolação de fibra MIAFIB com a finalidade de diminuir a sua probabilidade de aparição (ver Tabela 13).

Quanto ao custo computacional, é notado que as simulações no problema transiente e combinado requerem, para alcançar um resultado, quase entre 14 e 15 vezes mais tempo por iteração do que suas análogas no domínio harmônico, embora uma análise mais detalhada é apresentada na seção 6.5.

6.4 Coletor de Energia EPLA-CFA

Para o projeto de coletor de energia EPLA-CFA considere o domínio fixo de projeto mostrado na Figura 44, cujo objetivo é maximizar a potência elétrica ativa Pot_a gerada na camada piezelétrica quando aplicado um deslocamento prescrito u_{in} na direção z da base oscilante e consumida pela impedância elétrica Z que representa um circuito RLC em série. Igualmente, na mesma figura são especificadas as dimensões do domínio de projeto e as condições de carregamento, contorno e iniciais para o problema. Da mesma forma, estão especificados os materiais e espessuras de cada camada e a polarização da camada piezelétrica para o modelo integral. Além disso, é esperada uma topologia simétrica em relação ao plano xz e o problema da flexibilidade média é resolvido com o carregamento unitário L_I^Σ na direção do deslocamento de referência u_{mc} . Os dados adicionais necessários para o processo de otimização são mostrados na Tabela 14 e na Tabela 15.

Figura 44 – Domínio de projeto, condições de carregamento, contorno e iniciais para o coletor de energia EPLA-CFA

Na Figura 45 são mostradas as topologias filtradas e interpretadas das camadas da estrutura junto com as polarizações resultantes da camada 2 do coletor que possui material piezelétrico, observando que a única topologia combinando polarizações opostas é a CFA-H. As restrições de simetria foram satisfeitas e as topologias resultantes não apresentam regiões com instabilidades de tabuleiro. Os índices de avaliação de instabilidades numéricas foram menores do que 0,4% (I_R e I_H , ver APÊNDICE C), sendo facilitado o processo de geração de topologias 0-1.

A comparação dos resultados da Figura 45 mostra que o caso CFA-H e o CFA-T são 1,5 e 1,9 vezes mais rápidos do que o modelo CFA-I, respectivamente enquanto que no enfoque combinado o tempo de resposta diminuiu 1,2%. O CFA-T apresentou o menor tempo de subida, ou seja, a melhor velocidade de resposta, o qual pode ser atribuído ao aumento da rigidez à flexão, mesmo que quando maximizada a área sob a curva de potência ativa, o algoritmo de otimização pode priorizar a inclinação da curva ao invés do aumento da tensão de pico, afetando indiretamente a energia gerada pela estrutura.

O modelo CFA-T também obteve a maior potência ativa média gerada em meio período de excitação, seguido pelo modelo CFA-H, enquanto que CFA-C apresentou o menor valor entre todos os modelos avaliados. O baixo desempenho neste item de CFA-C pode ser atribuído à possibilidade de que a solução seja um mínimo local.

Tabela 14 – Dados do problema do coletor de energia EPLA-CFA

Descrição (Unidade)		Enfoque de Otimização		
		Harmônico	Transiente	Combinado
				Harmônico
Amplitude do deslocamento de excitação (u_{in} em mm)		0,1	$\frac{0,1}{\sqrt{2}} = 0,707$	$0,1A_{\omega}^*$
				Transiente
		0,707		
Frequência da excitação (em Hz)		50		
Tempo transiente (t_f em ms)		8,4		
Número de passos de integração (m)		35		
Resistor (R em $k\Omega$)		1		
Indutor (L em mH)		1		
Capacitor (C em pF)		560		
Malha	Total de elementos (N)	3600		
	Total de nós (n)	11162		
	Elementos por camada (N_{cam})	1800 (60x30)		
Coeficientes da função de amortecimento	α_1	$3,092 \times 10^{-2}$		
	β_1	$3,251 \times 10^{-3}$		
Coeficientes da função de perdas dielétricas	α_{δ_0}	-344,584		
	β_{δ_0}	-69260,673		
Restrição de volume (%)		$0,8 \leq \forall_{alu} \leq 0,85$		
		$0,75 \leq \forall_{pie} \leq 0,8$		
*Amplitude de u_{in} no problema harmônico com A_{ω} como variável de projeto. No regime transiente do problema combinado a amplitude de u_{in} não é alterada.				

Tabela 15 – Pesos de ponderação da função objetivo para o problema do coletor de energia EPLA-CFA

Enfoque de Otimização	w_{ω}	w_{τ}	w_R	w_C	w_D	w_{VPI}	w_{CCF}	Υ
Harmônico	7×10^{12}	N/A		1		2.5	2×10^{-6}	0,995
Transiente	N/A	1×10^{10}	2×10^{10}	1	N/A	150	1	0,99
Combinado	1×10^8	100	50	1×10^8	1×10^{14}	34	3×10^{-5}	0,99

<div><div></div> PZT (↑)</div> <div><div></div> PZT (↓)</div>		<div><div></div> Alumínio</div>	Resultados: <div>Melhor desempenho</div> , <div>Segundo melhor desempenho</div>		
INTEGRAL		MOT HARMÔNICO		MOT TRANSIENTE	MOT COMBINADO

$t_r(\text{ms})(\downarrow)$	0,423	0,282		0,224 (0,224)	0,428 (0,435)
$t_s(\text{ms})(\downarrow)$	30,11	45,19		24,35 (24,56)	21,48 (21,994)
$f_d(\text{Hz})(\uparrow)$	251,05	268,91		390,93 (406,07)	110,78 (113,75)
$R(\text{k}\Omega)$	1	100		100	100
$L(\mu\text{H})$	1000	1000		602,59	670,66
$C(\text{pF})$	560	560		123,58	496,23
$\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\omega}(\text{nW})(\uparrow)$	$2,95 \times 10^{-3}$	0,077 (0,077)		$5,71 \times 10^{-3}$	7,368 (7,367)
$\overline{\text{Pot}}_a^{\tau}(\text{nW})(\uparrow)$	13,0	300,14		437,10 (92,55)	7,682 (7,372)
$\overline{\text{Pot}}_a^{\omega} / \overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau} (\approx 1)$	$2,27 \times 10^{-4}$	$2,56 \times 10^{-4}$		$1,31 \times 10^{-5}$	0,959 (0,999 - A_{ω} =8,54)
$\overline{\text{Pot}}_{\text{ca}}^{\tau}(\mu\text{W})(\uparrow)$	0,049	1,146		0,989	0,030
$R^{\omega}_{\text{PT}}(\%)(\uparrow)$	9,46	12,71		2,74	9,93
$R^{\tau}_{\text{PT}}(\%)(\uparrow)$	8,63	15,52		2,55	8,92
$\eta^{\omega}(\%)(\uparrow)$	2,42	3,29		0,69	2,55
$\eta^{\tau}(\%)(\uparrow)$	2,21	4,04		0,64	2,28
$V_{\text{alu}}(\%)(\downarrow)$	100	85,0 (85,0)		84,4 (84,5)	84,6 (84,5)
$V_{\text{pie}}(\%)(\downarrow)$	100	80,0 (80,0)		78,8 (79,1)	80,0 (80,0)
$V_{\text{tot}}(\%)(\downarrow)$	100	82,5 (82,5)		81,6 (81,8)	82,3 (82,3)
$Z_f(\downarrow)$		80		60	60
$T_{\text{exe}}(\text{h})(\downarrow)$	N/A	10,805		39,122	41,632
$T_{\text{iter}}(\text{min})(\downarrow)$		8,100		39,117	41,627
$T_{\text{ini}}(\text{s})(\downarrow)$		17,854		18,434	18,971

Figura 45 – Comparação das topologias resultantes do MOT para o problema do coletor de energia EPLA-CFA

No entanto, a abordagem CFA-C alcançou a relação de potência gerada $\frac{\overline{\text{Pot}}_a^{\omega}}{\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau}}$ mais próxima de 1, conforme desejado (ver seções 3.7.3 e 4.2.7) podendo concluir que a aproximação da estimativa da potência média transiente gerada em meio ciclo de excitação $\overline{\text{Pot}}_{\text{mpa}}^{\tau}$ a partir de poucos ciclos da resposta foi adequado (ver seção 3.7.3). Contudo, a excitação de deslocamento da base oscilante é aumentada 8,54 vezes (ver Figura 45).

Além disso, foi observado que para atingir uma relação de potência unitária no modelo CFA-C o otimizador age de forma diferente para os regimes envolvidos. Dado que na análise harmônica a impedância é fixa, o único caminho para o otimizador é aumentar a amplitude da voltagem de excitação através da variável A_{ω} . Já para o regime transiente, o otimizador reduz a frequência de oscilação amortecida ω_d , pois afeta diretamente o valor da impedância acoplada e simultaneamente aumenta as amplitudes de vibração. Não obstante, foi notado que um decaimento considerável da frequência de oscilação originava estruturas desconexas, tendo que, conseqüentemente, acrescentar um maior valor para o peso ponderado w_C da função de flexibilidade média.

Um fato que afeta os resultados é a interpretação da topologia obtida do MOT, em particular nos enfoques de otimização envolvendo análise transiente porquanto a remoção dos elementos de baixa densidade e a redistribuição da impedância nos elementos filtrados (ver seção 2.4.8.1) pode modificar a resposta substancialmente. Deste modo, foi observado que nos modelos CFA-T e CFA-C depois da interpretação, a frequência de oscilação amortecida ω_d caiu 3,73% e 2,61% enquanto que a amplitude da resposta da voltagem foi incrementada por um fator de 2,33 e num 1,57%, respectivamente. As mudanças na resposta de voltagem são mais críticas pelo fato de que a potência gerada depende do quadrado dessa resposta. Contudo, uma variação considerável da frequência de oscilação pode afetar igualmente a potência, pois depende do seu valor inverso (ver seção 2.4.8).

O modelo CFA-H gera 15,9% mais potência por ciclo completo do que o modelo CFA-T, embora a frequência de oscilação seja menor para o primeiro caso. Isso pode ser devido ao amortecimento estrutural, pois para o caso transiente é 15,6% maior. A abordagem transiente forneceu a quantidade mínima de material utilizado, no entanto, a abordagem harmônica forneceu as melhores eficiências e transferências de potência, seguida do modelo CFA-C. Isto ocorre porque a impedância da camada piezelétrica é maior na medida em que a frequência de oscilação diminui e o casamento de impedância aumenta. Com referência ao custo computacional, é notado que o enfoque de otimização transiente e combinado requerem aproximadamente 5 vezes mais tempo por iteração para chegar a um resultado, do que a otimização utilizando somente análise harmônico. Para melhor detalhamento sobre este tópico é recomendado ver a seção 6.5.

6.5 Custo Computacional

O custo computacional de cada problema de otimização pode ser medido pelos tempos de execução das implementações desenvolvidas neste trabalho, sendo de utilidade para o planejamento e obtenção de resultados. A complexidade algorítmica de um software de MOT para os enfoques discutidos (harmônico, transiente e combinado) podem ser aproximados assintoticamente pela expressão:

$$T_{\text{exe}} \in z_f * T_{\text{iter}} (\in \mathcal{O}(a_z N^3 + b_z N^2)) + T_{\text{ini}} (\in \mathcal{O}(c_i N^2)) \quad (478)$$

em que z_f é o número de iterações do processo de otimização definido pelo usuário se o critério de convergência não é alcançado (ver seção 6.1.6), N é o número total de elementos da discretização de MEF, T_{iter} e T_{ini} são as funções que representa, o tempo de execução por iteração e de inicialização de dados, respectivamente. a_z, b_z e c_i são coeficientes que dependem do número de passos de integração, iterações do algoritmo otimizador (neste caso CVX, ver seção 4.9), número de vezes que as matrizes de MEF (ver seção 2.4) e das sensibilidades (ver seção 5.1) devem ser montadas e o número de sistemas lineares da forma $A_{ij}x_j = b_i$ que devem ser resolvidos. A notação $\mathcal{O}$ é utilizada em análise de algoritmos para definir um limite assintótico superior ou o pior caso para o tempo de execução de um algoritmo (GOODRICH; TAMASSIA, 2010). Neste caso, pode ser afirmado que o tempo de execução total T_{exe} é proporcional a N^3 , sendo recomendado CORMEN et al. (2009) para uma explicação mais detalhada.

Uma análise assintótica foi feita no software *EPLADin* com o objetivo de determinar os coeficientes a_z, b_z e c_i , considerando m como o número de passos de integração, p o número de passos do problema adjunto ponderado de sensibilidades (ver seções 5.4 e 5.7) e k o número de iterações do otimizador (ver Tabela 16), lembrando que m é definido pelo usuário, p depende da posição do primeiro pico da resposta na resposta transiente enquanto k depende do tipo otimizador utilizado (linear, quadrático, convexo). O coeficiente a_z que inclui m , leva em conta o custo da solução do MEF e o cálculo de sensibilidades, sendo $m \geq 2$ para o regime transiente e $m = 1$ para o regime harmônico. A diferença de 8 no valor constante para a_z nos casos harmônico e combinado é devido ao número de problemas adjuntos harmônicos que devem ser resolvidos na otimização, tendo que resolver somente um

problema para atuadores e dois para coletores de energia por causa da implementação envolvendo matrizes complexas (ver seções 5.3e 5.6), sendo que no caso transiente é resolvido o mesmo número de problemas adjuntos sem distinção entre atuadores e coletores. O coeficiente b_z indica que as matrizes de MEF e das sensibilidades devem ser montadas $b_z z_f$ vezes enquanto que o valor de l para c_i se refere à inicialização de todos os dados antes que o ciclo iterativo do MOT comece.

Tabela 16 – Análise assintótica do algoritmo *EPLADin*

Enfoque de Otimização		a_z	b_z	c_i
Harmônica	Atuador	$k+28$	5	1
	Coletor	$k+36$		
Transiente		$4m+p+k+8$		
Combinado	Atuador	$4m+p+k+32$	9	1
	Coletor	$4m+p+k+40$		

Considerando como exemplo o caso do coletor EPLA-CFA e assumindo valores de $z_f=100$, $m=35$, $p=4$ e $k=10$, é inferido que um algoritmo de MOT usando análise transiente pode tomar até 3,52 vezes mais tempo do que um algoritmo análogo utilizando análise harmônica. Assintoticamente, um enfoque combinado tardará 4,22 vezes mais quando comparado como um enfoque harmônico enquanto comparado com o seu análogo transiente, o tempo de execução total se verá incrementado em aproximadamente 20%. Cabe salientar que nesta análise não são levadas em conta operações tais como geração de gráficos ou leitura e escritura de arquivos em discos rígidos.

De igual forma, uma experiência numérica foi realizada para estimar os tempos de execução das implementações desenvolvidas neste trabalho em MATLAB®, utilizando diferentes discretizações e ciclos paralelizados *parfor* de 10 fios de execução ou “*threads*” lembrando que a pior estimativa é sem paralelização do código. As características do microcomputador empregado nas simulações podem ser vistas Tabela 9. Com os dados obtidos duas regressões foram feitas, uma cúbica para o tempo de execução por iteração T_{iter} e uma quadrática para o tempo de inicialização de dados T_{ini} , negligenciando os termos constantes na regressão cúbica pelo fato de que tais termos são da ordem de femtosegundos. Os resultados das regressões para os casos de estudo considerados neste trabalho (EPLA-

CFA, EPLA-ATA e EPLA-AFF) são mostrados desde a Figura 46 até Figura 63 sendo incluídas as topologias filtradas obtidas após o processo de otimização.

De acordo com os resultados das regressões tomando de novo como exemplo o coletor EPLA-CFA, pode ser visto que a implementação transiente pode tomar 2,63 vezes mais tempo do que a implementação harmônica. Além disso, a implementação de enfoque combinado tardará assintoticamente 3,49 vezes mais comparada com a implementação harmônica enquanto que o tempo de execução será incrementado em torno de 33% quando comparada com a implementação transiente. Para obter melhores resultados na aproximação de tempo de execução são requeridos mais dados com o objetivo de reduzir a incerteza. Contudo como uma primeira aproximação, fornece uma ideia da ordem de complexidade do algoritmo e uma estimativa da discretização que poderia ser adotada, e assim, evitar tempos proibitivos em simulações.

Os tempos de inicialização para discretizações menores do que 600 elementos apresentam grande variabilidade, fato que pode ser atribuído aos tempos de retardo ou “*delay*” entre chamadas de funções, incertezas nos tempos de execução da geração de gráficos e de leitura e escritura de arquivos em discos rígidos. No entanto, a caracterização de tais fatores está além do âmbito deste trabalho de doutorado. O tempo de inicialização de dados é desprezível quando comparado com o tempo de execução $z_f * T_{iter}$ em discretizações menores do que 4000 elementos finitos, lembrando que a ordem de complexidade de T_{ini} é menor do que a ordem de complexidade de T_{iter} .

Figura 46 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 47 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 48 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 49 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 50 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 51 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do coletor de energia EPLA-CFA

Figura 52 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-ATA

Figura 53 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-ATA

Figura 54 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do atuador EPLA-ATA

Figura 55 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do atuador EPLA-ATA

Figura 56 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do atuador EPLA-ATA

Figura 57 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do atuador EPLA-ATA

Figura 58 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-AFF

Figura 59 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização harmônico do atuador EPLA-AFF

Figura 60 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização transiente do atuador EPLA-AFF

Figura 61 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização transiente do atuador EPLA-AFF

Figura 62 – Custo computacional de uma iteração do problema de otimização combinado do atuador EPLA-AFF

Figura 63 – Custo computacional da inicialização de dados do problema de otimização combinado do atuador EPLA-AFF

7 CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL

Neste capítulo será mostrada a caracterização experimental de alguns protótipos de EPLA considerados neste trabalho. Uma primeira parte da caracterização será focada na obtenção de propriedades dos materiais utilizando testes destrutivos e não destrutivos. A segunda parte se centrará na fabricação dos protótipos de EPLA, e finalmente, serão apresentados os resultados alcançados nos testes experimentais e a sua comparação com a implementação de MEF desenvolvida neste trabalho.

7.1 Propriedades de Material

Os materiais utilizados na fabricação dos protótipos de EPLA foram Alumínio 1100 e Cerâmicas PZT-5A, informações dadas via comunicação pessoal (13-27 de novembro de 2015) pelo MSc. Ernesto David Gonzalez Cruz do Laboratório de Caracterização Estrutural (LCE/DEMa) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), quem praticou análise química por centelha e microscopia eletrônica de varredura (MEV) com espectroscopia de energia dispersiva (EDS) em amostras de materiais de propriedade do Laboratório de Otimização de Sistemas Multifísicos (LOSM). Os testes foram feitos porque não se tinha conhecimento da designação dos materiais, encontrando na análise química uma rápida resposta que permitisse, a partir de tal designação, coletar propriedades de diferentes fabricantes e ter referência da sua magnitude e ordens de grandeza. Posterior à identificação dos materiais, foram selecionados os ensaios adequados para a obtenção das propriedades. A metodologia e resultados são descritos a seguir.

7.1.1 Caracterização do Alumínio

Para a caracterização do Alumínio foram feitos testes de tração numa máquina de ensaios universal Instron 3369 (ver Figura 64a) com extensômetros tipo clipe (“*clip-gauges*”, ver Figura 64b) para medição de deformação axial e transversal. Os ensaios foram realizados em regime quase estático utilizando uma taxa de deformação de $1 \times 10^{-5}/s$ e uma velocidade

as máquina de 2×10^{-3} mm/s (DAVIS, 2004). A máquina encontra-se localizada no Laboratório do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas da USP (GMSIE-USP).

Figura 64 – Caracterização experimental do Alumínio: (a) Máquina de ensaio universal Instron 3369; (b) Extensômetro tipo clipe para medição de deformação axial e transversal

Figura 65 – Corpos de prova tipo “dog bone” ou gravata: (a) Geometria com dimensões em mm; (b) Corpos de prova utilizados no ensaio de tração

Os corpos de prova (CDP) utilizados foram do tipo “*dog bone*” ou gravata conforme a norma técnica ASTM E8/E8M – 09 (ASTM INTERNATIONAL, 2009) cortados com jato de água de uma chapa com espessura nominal de 0,7 mm e cuja dimensões geométricas podem ser vistas na Figura 65. O corte dos CDP foi realizado no Laboratório de Mecânica de Rochas do Departamento de Minas e Petróleo da USP (LMR-USP). Três CDP foram submetidos ao ensaio de tração, sendo utilizado o primeiro CDP para determinar a tensão de escoamento e os dois restantes testados sob condições de carregamento cíclico (que não fadiga porquanto a taxa de deformação é baixa) na região linear até uma carga selecionada previamente. O ensaio cíclico consiste de 10 ciclos de carga-descarga entre um valor de 0 até um carregamento equivalente a 2/3 da carga que originou a tensão de escoamento no primeiro CDP. Deste modo, é diminuída a incerteza no valor da propriedade medida, pois é levada em conta a histerese do material. Além disso, nos CDP 2 e 3 foi utilizado um extensômetro para medir simultaneamente a deformação axial e transversal (portanto, para o CDP 1 não foi determinado o coeficiente de Poisson). Assim, as propriedades de material determinadas nesses ensaios foram o Módulo de Young (E_{Alu}) e o Coeficiente de Poisson (ν_{Alu}).

Figura 66 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 1

Na Figura 66 até a Figura 68 são mostradas as curvas de tensão vs deformação de Engenharia para os três CDP, cuja inclinação (na região linear, no caso do CDP 1) é o Módulo de Young E_{Alu} enquanto que na Figura 69 e na Figura 70 são mostradas as curvas de deformação transversal (ϵ_T) vs deformação longitudinal (ϵ_L) sendo o módulo da inclinação o Coeficiente de Poisson ν_{Alu} . Os resultados obtidos para as propriedades de material e suas respectivas incertezas a partir das regressões dos dados experimentais podem ser observados na Tabela 17.

Figura 67 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 2 considerando a histerese do material

Figura 68 – Curva tensão vs deformação de Engenharia para o CDP 3 considerando a histerese do material

Figura 69 – Deformação transversal vs deformação longitudinal para o CDP 2

Figura 70 – Deformação transversal vs deformação longitudinal para o CDP 3

Com a finalidade de alimentar as simulações foram calculados valores médios tendo como resultado final para $E_{\text{Alu}} = (69,489 \pm 0,068)$ GPa e para $\nu_{\text{Alu}} = 0,307 \pm 0,001$

Tabela 17 – Resultados das propriedades do Alumínio obtidas pelo ensaio de tração

CDP	E_{Alu} (GPa)	ΔE_{Alu}	ν_{Alu}	$\Delta \nu_{\text{Alu}}$
1	62,407	0,193	N/A	
2	69,523	0,042	0,3145	0,0005
3	69,454	0,093	0,2995	0,0016
Média	69,489	0,068	0,3070	0,0010

Igualmente foi estimada a densidade de massa ρ_{Alu} com dados de 7 discos de diâmetro e espessura nominal $\varnothing_{\text{Alu}} = 20$ mm e $t_{\text{Alu}} = 0,7$ mm, respectivamente cortados com jato de água (ver Figura 71). A massa m_{Alu} foi determinada com uma balança digital e o volume do disco V_{Alu} foi calculado com base nos dados geométricos. A incerteza para as dimensões geométricas é de 0,001 mm enquanto que para a massa é de 0,00001 g. Os dados dos discos foram reportados na Tabela 18 salientando que as diferenças ao respeito das dimensões geométricas são devidas às incertezas no processo de corte com o jato no caso do diâmetro e a não uniformidade no processo de laminação da chapa por parte do fabricante no caso da espessura. O valor médio alcançado para a densidade de massa é $\rho_{\text{Alu}} = (2520,110 \pm 3,617)$ kg/mm³. Todos os intervalos de confiança foram calculados no nível de 95%. O resumo da caracterização do alumínio pode ser encontrado na Tabela 19, sendo esses valores de

propriedades utilizados nos substratos dos casos de estudo EPLA-ATA e EPLA-CFA (ver seções 6.2 e 6.4).

Tabela 18 – Dados dos discos de Alumínio para a estimativa da densidade de massa

Disco	$\varnothing_{\text{Alu}}$ (mm)	t_{Alu} (mm)	m_{Alu} (g)	V_{Alu} (mm ³)	ρ_{Alu} (kg/mm ³)
1	19,907	0,742	0,59415	230,938	2572,774
2	19,912	0,755	0,59527	235, 113	2531,841
3	19,870	0,760	0,59392	235,596	2520,929
4	19,887	0,757	0,59402	235,216	2525,418
5	19,862	0,752	0,59502	232,844	2555,446
6	19,909	0,786	0,59393	244,675	2427,425
7	19,850	0,761	0,59133	235,413	2511,880
Média	19,885	0,759	0,59395	235,684	2520,110

Figura 71 – Discos de alumínio utilizados para a estimativa da densidade de massa

Tabela 19 – Resultados da caracterização do Alumínio

Propriedade (Unidade)	Valor	Erro Absoluto (Δ)	Erro Relativo (% Δ)
E_{Alu} (GPa)	69,489	0,068	0,097%
ν_{Alu}	0,3070	0,0010	0,3335%
ρ_{Alu} (kg/mm ³)	2520,110	3,617	0,144%

7.1.2 Caracterização do Material Piezelétrico

Para a obtenção das propriedades das cerâmicas piezelétricas, se cortaram 16 discos de diâmetro e espessura nominal $\varnothing_{\text{Cer}} = 20$ mm e $t_{\text{Cer}} = 1$ mm (ver Figura 72), respectivamente cortados com máquina de corte por jato da água Omax 2652A no Laboratório de Mecânica de

Rochas do Departamento de Minas e Petróleo da USP (LMR-USP). A massa m_{Alu} foi determinada com uma balança digital e o volume do disco V_{Alu} foi calculado com base nos dados geométricos. A incerteza para as dimensões geométricas é de 0,001 mm enquanto que para a massa é de 0,00001 g, sendo os dados resumidos na Tabela 20.

Figura 72 – Caracterização experimental do material piezelétrico: (a) Discos de cerâmica utilizados; (b) Equipamento de corte por jato da água Omax 2652A

Foram adquiridas curvas de magnitude e fase da impedância para todos os discos com um medidor de precisão de impedância (ou simplesmente impedômetro) Agilent 4294A do Laboratório de Ultrassom do Departamento de Mecatrônica e Sistemas Mecânicos (PMR-USP). Para a conexão dos discos de cerâmicas com o impedômetro foi utilizado um fio esmaltado de cobre calibre AWG 32 ($\varnothing_f = 0,2019$ mm, considerando o recobrimento $\varnothing_f = 0,22$ mm) e a faixa de frequência analisada foi desde 1 kHz até 3 MHz (ver Figura 73).

Figura 73 – Caracterização experimental do PZT-5A: (a) Medidor de precisão de impedância Agilent 4294A; (b) Obtenção da curva de magnitude e fase da impedância para o disco 10

O procedimento para a obtenção das propriedades da cerâmica piezelétrica é fundamentado no trabalho de Kiyono, Pérez e Silva (2016), que minimiza o erro quadrático entre as curvas de condutância e resistência elétrica (ajuste das curvas por mínimos

quadrados), obtidas experimental e numericamente utilizando um método de otimização baseado em gradientes e o MMA como algoritmo otimizador (SVANBERG, 1987), sendo possível obter as curvas de condutância e resistência elétrica a partir das curvas de impedância elétrica aquisitadas. Além disso, a modelagem é feita com um elemento 2D axissimétrico e as propriedades de material são expressas na forma complexa e agem como variáveis de projeto.

Tabela 20 – Dados dos discos de PZT-5A

Disco	$\varnothing_{\text{Cer}}$ (mm)	t_{Cer} (mm)	m_{Cer} (g)	V_{Cer} (mm ³)	ρ_{Cer} (kg/mm ³)
1	19,627	1,036	2,35013	313,359	7499,810
2	19,607	1,039	2,36601	313,793	7540,034
3	19,660	1,030	2,34492	312,584	7501,730
4	19,678	1,028	2,35044	312,724	7516,015
5	19,674	1,027	2,35551	312,277	7543,009
6	19,716	1,046	2,39658	319,260	7506,674
7	19,696	1,049	2,37946	319,442	7448,796
8	19,652	1,034	2,35163	313,567	7499,616
9	19,699	1,026	2,36208	312,614	7555,894
10	19,742	1,028	2,36637	314,639	7520,899
11	19,388	1,031	2,27394	304,371	7470,947
12	19,569	1,023	2,29375	307,750	7453,294
13	19,666	1,051	2,39420	319,178	7501,153
14	19,657	1,048	2,40328	318,119	7554,664
15	19,688	1,028	2,34620	312,814	7500,308
16	19,722	1,038	2,39924	317,155	7564,879
Média	19,652	1,035	2,35836	313,969	7511,439

O problema de otimização sem restrição para a minimização do erro quadrático entre as curvas experimental e numérica de condutância G e resistência R , é formulado como:

$$\min_{p_i} \Delta_{GR} = \sum_{j=1}^{n_\omega} \left[\left(\log G_j^{\text{exp}}(p_i) - \log G_j^{\text{num}}(p_i) \right)^2 + \left(\log R_j^{\text{exp}}(p_i) - \log R_i^{\text{num}}(p_i) \right)^2 \right] \quad (479)$$

em que a função $\log(x)$ é utilizada para normalizar os valores, n_ω é o número de subintervalos utilizados na discretização da frequência e p_i é o vetor de variáveis de projeto que considera como variáveis de projeto independentes tanto a parte real quanto a complexa das propriedades de material da cerâmica.

Figura 74 – Comparação das curvas de impedância numéricas e experimentais correspondentes ao disco 1: (a) Magnitude; (b) Fase

Neste trabalho foram feitas algumas modificações para chegar numa solução do problema proposto por Kiyono, Pérez e Silva (2016), pelo fato de que no intervalo de frequências trabalhado (1 kHz-3 MHz) não foi possível alcançar a convergência do problema original. Assim, foi utilizado como algoritmo otimizador a rotina LIPSOL ou “*Linear-programming Interior-Point SOLvers*” (ZHANG, 1998) que é o algoritmo predefinido na função “*linprog*” do software MATLAB® com limites móveis baseados na mudança de sinal da diferença de cada variável de projeto entre duas iterações consecutivas do processo de otimização (ver seção 4.9). Adicionalmente, os valores iniciais das variáveis de projeto das propriedades reais foram os reportados para o PZT-5A em Sherman e Butler (2007) enquanto que para as propriedades de material complexas foram assumidos valores randômicos. Na Figura 74 podem ser observados os resultados alcançados para o disco 1 com a implementação deste trabalho.

Tabela 21 – Resultados da caracterização do PZT-5A

Propriedade (Unidade)		Valor	Erro Absoluto (Δ)	Erro Relativo ($\% \Delta$)
Constantes Elásticas (GPa)	$C_{11}^E_{\text{Cer}}$	141,215	0,758	0,537%
	$C_{12}^E_{\text{Cer}}$	83,781	1,320	1,575%
	$C_{13}^E_{\text{Cer}}$	77,027	0,504	0,655%
	$C_{33}^E_{\text{Cer}}$	131,707	0,604	0,459%
	$C_{44}^E_{\text{Cer}}$	15,486	1,040	6,715%
Constantes Piezelétricas	e_{31}_{Cer}	-0,442	0,210	47,446%
(C/m ²)	e_{33}_{Cer}	11,611	0,420	3,621%
	e_{15}_{Cer}	18,096	0,976	5,394%
Constantes Dielétricas	$\epsilon_{11}^E_{\text{Cer}}$	1858,594 ϵ_0	270,571 ϵ_0	14,558%
(F/m)	$\epsilon_{33}^E_{\text{Cer}}$	817,738 ϵ_0	15,926 ϵ_0	1,948%
ρ_{Cer} (kg/mm ³)		7511,439	3,617	0,107%
$\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12}$ (MOHR; TAYLOR; NEWELL, 2008)				

Posterior ao ajuste das curvas dos 16 discos de cerâmica piezelétrica por mínimos quadrados foram obtidos valores médios e intervalos de confiança de 95% somente para os valores reais das propriedades (ver Tabela 21) e, além disso, foi determinado o valor da densidade de massa utilizando os dados da Tabela 20, com um procedimento análogo aplicado aos discos de alumínio (ver seção 7.1.1). Cabe esclarecer que, o intervalo de confiança de um nível de 95% quer dizer que se a experiência é realizada 100 vezes, a média das propriedades de 95 testes é encontrada nesse intervalo. Ou seja, não significa que o valor da propriedade se encontra nesse intervalo com uma probabilidade de 95%. Se for desejado diminuir o intervalo de confiança e o erro associado deve ser aumentado o tamanho das amostras (PULIDO; SALAZAR, 2008). Na Tabela 21 são registrados os dados correspondentes à caracterização do material piezelétrico com os seus erros experimentais, sendo esses valores de propriedades utilizados na camada piezelétrica do problema do coletor de energia EPLA-CFA (ver seção 6.4).

As propriedades reais que possuem grandes erros absolutos (como $e_{31_{\text{Cer}}}$ e $\epsilon_{11_{\text{Cer}}}^e$) indicam uma alta variabilidade (o coeficiente de variação é 96,8% e 29,7%, respectivamente) tendo grande incerteza no valor fornecido. O restante das propriedades apresentadas na Tabela 21 possui um coeficiente de variação e um erro relativo menor do que 15%. No entanto, as propriedades complexas que estão associadas com os coeficientes de perdas (ver seção 2.4.7) apresentaram coeficientes de variação maiores do que 20% e em alguns casos ultrapassando o 100%, o que sugere que a metodologia adotada por Kiyono, Pérez e Silva (2016) é efetiva somente em pequenos intervalos de frequência. Assim, essa metodologia poderia ser aprimorada incluindo na formulação o modelo de dispersão de banda larga de Debye sugerido nos trabalhos de Djordjevic *et al.* (2001) e Svensson e Dermer (2001), o qual pode ser usado em qualquer região do espectro da frequência.

Finalmente, quatro fatos importantes devem ser salientados após a caracterização das cerâmicas piezelétricas:

- A permissividade elétrica complexa é altamente dependente da frequência. A parte real da permissividade elétrica apresenta menor variação que a parte imaginária. Ou seja, para intervalos grandes de frequência é quase constante, sendo mais confiáveis os dados obtidos do processo experimental (ver Figura 15).

- A parte imaginária da permissividade elétrica tem maiores variações em relação à frequência, pelo fato de que ela pode apresentar vários picos ao longo do espectro (ver Figura 15). Portanto, a aproximação das curvas por mínimos quadrados dá um valor “médio” para usar nas simulações e não um valor real ou próximo do real da propriedade. Desse modo, uma solução para contornar essa situação é escolher intervalos menores de frequência para a caracterização. Contudo, é possível estimar valores para a parte complexa utilizando a resposta em frequência do sistema e, assim, obter uma expressão analítica no espectro de frequência analisado utilizando o modelo de dispersão de banda larga de Debye (DJORDJEVIC *et al.*, 2001; SVENSSON; DERMER, 2001), como apontado anteriormente (ver seção 2.4.7.2).
- Outras fontes de erros nas medições provêm das incertezas na espessura da cerâmica e no medidor de impedância, da resistência elétrica adicionada pelos fios elétricos utilizados para levantar as curvas no impedômetro e das incertezas no processo de corte por jato da água e polimento dos discos.
- Se forem precisas experiências com esse mesmo material depois de transcorrido um período de 2 ou 3 anos, recomenda-se fazer novos testes, pois as variações de condições de temperatura e umidade na armazenagem podem contribuir à mudança no valor das propriedades, especialmente nas piezelétricas.

7.2 Fabricação de EPLA

Neste trabalho, seis protótipos de coletores de energia foram construídos. Três coletores correspondem ao modelo CFA-I (modelo integral) e os três restantes ao modelo CFA-T (modelo otimizado considerando um regime transiente). Foram escolhidos esses protótipos, em razão da disponibilidade das matérias primas de propriedade do Laboratório de Otimização de Sistemas Multifísicos (LOSM). De igual forma, os coletores fabricados foram acoplados aos seus respectivos circuitos RLC, para a caracterização experimental seguindo um protocolo especialmente desenvolvido para as medições (ver seção 7.3). O processo de fabricação é mostrado na Figura 76 compreendeu as seguintes etapas:

• **Geração dos desenhos de fabricação.** O processo de fabricação foi iniciado com a geração dos desenhos CAD para a fabricação. Além de mostrar as dimensões e forma de montagem, os desenhos tiveram como finalidade a quantificação das matérias primas indispensáveis para a obtenção dos protótipos. Os desenhos são mostrados na Figura 75.

Figura 75 – Desenhos de fabricação dos protótipos EPLA: (a) Modelo CFA-I; (b) Modelo CFA-T

• **Corte de substratos e de camadas piezelétricas.** O processo foi realizado utilizando a técnica de corte por jato da água com o equipamento do LMR (PMI-USP). As maiores dificuldades se apresentaram no corte das cerâmicas piezelétricas, pois deve ser configurada adequadamente a pressão do jato para que não danifique a cerâmica no instante do início do corte. Contudo, para contornar esse inconveniente foi colocada uma chapa de madeira aglomerada como material de sacrifício que permitisse dar suficiente rigidez e o processo de corte fosse efetuado sem fragmentar a cerâmica.

Figura 76 – Processo de fabricação dos protótipos de coletores de energia EPLA

O corte da cerâmica também foi tentado com uma chapa de acrílico de sacrifício, apresentando em ocasiões fragmentação da cerâmica em regiões com mudanças abruptas de direção do contorno, porém os melhores resultados do corte foram obtidos utilizando a madeira aglomerada como material de sacrifício. A fixação entre a cerâmica piezelétrica e o material de sacrifício é feita através de uma fita de dupla face. Com a técnica do corte por jato de água não foi possível cortar espessuras de cerâmicas menores do que 1 mm, podendo sugerir para trabalhos futuros o corte a laser, levando em conta que as regiões próximas do corte do laser são afetadas termicamente. Já para o alumínio, o processo de corte não apresentou nenhum problema.

- **Polimento das camadas cortadas.** Após o processo de corte, é necessário remover os cantos vivos das camadas produzidos por dita operação. O polimento foi efetuado com um mototool Dremel 3000 e diferentes discos que incluíram lixas de diferentes granulações. Além disso, para a limpeza das superfícies após o polimento, foi utilizado acetona e álcool com ajuda de uma esponja de aço inoxidável e um pano suave.

Tabela 22 – Caracterização geométrica e de pesos das camadas dos protótipos

Protótipo	Material da Camada	Propriedade (Unidade)	Valor	Erro Absoluto (Δ)	Erro Relativo ($\% \Delta$)
AInt	Alumínio	Comprimento (mm)	79,735	0,026	0,033
		Largura (mm)	29,085	0,013	0,044
		Espessura (mm)	0,722	0,005	0,693
		Massa (g)	4,244	0,169	3,978
	PZT-5A	Comprimento (mm)	59,982	0,019	0,032
		Largura (mm)	29,487	0,491	1,664
		Espessura (mm)	1,059	0,007	0,654
		Massa (g)	14,734	0,001	0,007
AOpt	Alumínio	Comprimento (mm)	79,627	0,123	0,154
		Largura (mm)	29,715	0,015	0,050
		Espessura (mm)	0,731	0,004	0,595
		Massa (g)	4,047	0,014	0,339
	PZT-5A	Comprimento (mm)	47,783	0,302	0,633
		Largura (mm)	29,523	0,207	0,700
		Espessura (mm)	1,050	0,014	1,307
		Massa (g)	10,996	0,003	0,026

• **Caracterização geométrica e pesagem das camadas.** Com as camadas devidamente polidas, foram identificadas e caracterizadas geometricamente e obtidos os seus pesos com ajuda de uma balança digital. Isto foi feito com a finalidade de quantificar a massa que se perde pelo processo de corte e polimento das camadas, pois as suas dimensões não são exatamente iguais às registradas nos desenhos de fabricação. Essa estimativa pode dar uma ideia das incertezas associadas aos processos de obtenção de camadas que podem influenciar os resultados da caracterização experimental. No entanto, uma adição de material sistemática pode minimizar as perdas de massa originadas nos processos de corte e polimento. Além disso, foram calculados valores médios para serem fornecidos nas simulações comparativas. Os valores médios obtidos foram registrados na Tabela 22, em que os protótipos são diferenciados pela nomenclatura *AInt* para o modelo integral CFA-I e *AOpt* para o modelo otimizado CFA-T. A medida do comprimento inclui o material adicional que permite a montagem dos protótipos na base do shaker (ver seção 7.3.1), e as dimensões para *AOpt* correspondem às máximas.

- **Colagem das camadas.** O processo de colagem foi realizado no Laboratório de Dinâmica e Instrumentação (LADIN-USP), e compreendeu três subetapas: preparação, colagem e cura. A preparação das camadas consistiu da remoção de resíduos de pó com álcool, esponja de aço inoxidável e um pano suave e o desenho de marcas de alinhamento com um punção para facilitar a colagem entre camadas. Além disso, as regiões das camadas que não fazem parte da interface alumínio-cerâmica derivada da colagem foram cobertas com fita crepe. O processo de colagem começou com a preparação da cola epóxi utilizando duas seringas de 5 ml, utilizando neste caso o produto Araldite Profissional. Sobre as superfícies de cada camada a ser colada foi colocada uma camada de cola epóxi com um pincel e cada cerâmica foi posicionada no seu respectivo substrato de alumínio. O conjunto substrato-cerâmica foi fixado com abraçadeiras de nylon de 2,5 mm x 150 mm, tomando a precaução de não impor uma pressão de aperto excessiva pelo fato de que pode ser produzida flambagem na cerâmica. Finalmente, as EPLAS preliminares foram submetidas a um processo de cura numa bomba de vácuo BVP/2.0A por 48 horas a uma pressão manométrica de -600 mmHg. A cura em bomba de vácuo elimina as bolhas de ar, fazendo com que a camada de cola epóxi fique uniforme aumentando as possibilidades de alcançar maiores valores de resistência mecânica e à fadiga.

- **Polimento da EPLA obtida:** Após o processo de cura, foram removidas as abraçadeiras de nylon e, igualmente, os resíduos de cola epóxi e fita crepe. Nesta operação foram utilizados um mototool Dremel 3000, discos de polimento e lixas de granulações finas, um estilete de precisão, acetona ou álcool e um pano suave.

- **Caracterização geométrica e pesagem da EPLA.** Foram dadas designações para as EPLA obtidas, com a finalidade de identificá-las na caracterização experimental. Posteriormente, foram caracterizadas geometricamente e obtidos os seus pesos com ajuda de uma balança digital. Com a pesagem, se quantificou a massa adicionada pelo processo de colagem, porquanto nas simulações de MEF não é levada em conta a camada de cola epóxi. No entanto, testes preliminares de colagem mostraram que a camada de cola epóxi possui uma espessura entre 0,1 e 0,3 mm. Novamente, a estimativa obtida permite considerar a existência de incertezas associadas aos processos de colagem que fazem com que existam diferenças entre os resultados derivados das simulações e os fornecidos pela caracterização experimental. A partir dos dados produzidos pela caracterização foram calculados valores médios, os quais são apresentados na Tabela 23. A massa total que inclui as conexões elétricas leva em conta a massa da cola condutiva de prata utilizada na interface eletrodo-eletrofito.

Tabela 23 – Caracterização geométrica e de pesos das EPLA finais

Protótipo	Propriedade (Unidade)	Valor
AInt	Espessura Total (mm)	1,950
	Espessura da camada de cola epóxi (mm)	0,169
	Massa EPLA sem incluir conexões elétricas (g)	19,329
	Massa da camada de cola epóxi (g)	0,351
	Massa total incluindo conexões elétricas (g)	19,943
AOpt	Espessura Total (mm)	1,969
	Espessura da camada de cola epóxi (mm)	0,188
	Massa EPLA sem incluir conexões elétricas (g)	15,313
	Massa da camada de cola epóxi (g)	0,269
	Massa total incluindo conexões elétricas (g)	15,927

• **Instalação das conexões elétricas.** Os protótipos EPLA fabricados precisam ser acoplados aos seus correspondentes impedâncias (ver seção 7.3.1) mediante uma conexão de tipo elétrico. Contudo, fazer um processo de solda com estanho de um fio elétrico sobre o eletrodo da cerâmica, pode adicionar o suficiente calor como para alcançar a temperatura de Curie e despolarizar a cerâmica perdendo as suas propriedades piezelétricas e requerendo bastante habilidade para fazer a operação. Assim, optou-se por realizar um processo que não adicionasse calor à EPLA utilizando cola epóxi condutiva e eletrofita de cobre. O procedimento seguido foi o seguinte: foram cortados segmentos de eletrofita de cobre de 20 mm x 5 mm x 0,2 mm (produzida por Eletrofitas, indústria brasileira, a espessura de 0,2 mm é obtida por remoção do polímero isolante) e soldados num extremo com um fio esmaltado calibre AWG 32 (ver Figura 75) de 500 mm empregando solda de estanho. Após essa operação a eletrofita foi colada no eletrodo da cerâmica utilizando uma cola epóxi condutiva de prata CW2400, prévia marcação com um estilete de precisão dos locais de posicionamento da eletrofita. Desse modo, o calor é adicionado à eletrofita e não à cerâmica piezelétrica evitando, portanto, a sua despolarização. As EPLA foram submetidas a um novo processo de cura da cola epóxi a temperatura ambiente por 24 horas, sendo que o conjunto prensado com uma morsa eacrílico de modo a garantir a fixação da eletrofita ao eletrodo. Um pouco de vaselina líquida é colocado entre a eletrofita e oacrílico para impedir que se produza a cola entre eles. Cabe ressaltar que um aperto excessivo da morsa poderia originar a falha na cerâmica piezelétrica.

Figura 77 – Protótipos EPLA fabricados

• **Obtenção dos protótipos finais.** Por fim, foi retirada a morsa e oacrílico passado o tempo de 24 horas de cura da cola epóxi condutiva. Em seguida, foram removidos os resíduos de cola epóxi e de vaselina. De modo a garantir que a cola condutiva não faça um curto circuito entre a cerâmica e o substrato, foi utilizado um mototool com um disco de lixa 400 para remover os possíveis resíduos nos cantos das camadas. A Figura 77 mostra o resultado final do processo de fabricação descrito anteriormente.

7.3 Caracterização de EPLA

Os protótipos de coletores de energia foram caracterizados seguindo um protocolo de medição utilizando os seguintes equipamentos:

- Microcomputador Intel Core i7 950 @ 3.07GHz e 16Gb de RAM
- Placa de aquisição National Instruments NI-PCIE-6341 Série X
- Bloco de terminais National Instruments BNC 2110
- Vibrômetro laser Polytec OFV-5000
- Fita refletiva
- Gerador de vibrações ou *shaker* Veb RObotron-Messelektronik
- Amplificador Cignus PP800
- Tripé Manfrotto
- Cabos BNC e conectores em formato “T”
- Cabo com ponta de prova tipo “banana”
- Protoboard com jacarés para conexão

- Pontas de prova
- Resistores variáveis de 0-2 k Ω e 0-200 k Ω
- Capacitores e indutores (valores vários)
- Fio esmaltado de cobre calibre AWG 32
- Balança digital
- Paquímetro
- Micrômetro
- Nível
- Régua
- Multímetro
- Alicates
- Chaves de fenda
- Chaves tipo Allen
- Punção
- Óculos de segurança

A montagem experimental utilizada nas medições pode ser vista na Figura 78, em que a caracterização consiste em obter a tensão elétrica gerada e o deslocamento de certo ponto da estrutura a partir de um deslocamento imposto no formato de onda sinusoidal (regime harmônico) ou de onda quadrada (regime transiente) por um *shaker*. A amplitude de vibração imposta depende dos valores de tensão, corrente elétrica e frequência, aplicados sobre o *shaker* e está limitada por um fim de curso que evita impor tensões e correntes elevadas. Do mesmo modo, a massa vibrante do shaker pode interferir com o sistema pelo fato de que pode entrar em ressonância e amplificar as amplitudes de vibração no conjunto *shaker*-transdutor e não sobre o coletor diretamente.

O sinal de excitação é gerado por sequências discretas de voltagem mediante um código do software MATLAB® e transferido desde uma placa de aquisição de dados para um amplificador. O amplificador transmite dito sinal elétrico ao *shaker*, sendo esse último o responsável de convertê-lo em deslocamento na sua base excitando finalmente o transdutor montado nela através de um suporte com parafusos tipo Allen (ver Figura 79). O suporte é composto por duas placas de alumínio de 9 mm que se unem ao *shaker* por dois parafusos laterais. Além disso, o suporte possui dois parafusos centrais que reduzem a possibilidade de

que o material alocado entre as placas de alumínio vibre e se comporte como uma estrutura independente no decorrer da experiência, alterando dessa forma os resultados. Para medir o deslocamento imposto na base do shaker é posicionado um laser apontando o seu feixe para o suporte, o qual possui uma fita refletiva colada na sua superfície e que faz com que o feixe seja refletido para o próprio módulo laser (ver Figura 79). O vibrômetro fornece o sinal de velocidade na forma de potencial elétrico e é enviado para uma placa de aquisição configurada na taxa de amostragem adequada conforme o caso.

Figura 78 – Montagem experimental para a caracterização de EPLA

Simplificadamente, o funcionamento do vibrômetro se baseia no princípio de Doppler, medindo a difusão de um laser (classe II He-Ne) incidente numa superfície. O sinal medido pelo vibrômetro é de velocidade, mas o deslocamento pode ser obtido indiretamente pela expressão:

$$A_s[\text{mm}] = \frac{A_v[\text{V}] \zeta_v \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} / \text{V} \right]}{2\pi f[\text{Hz}]} \quad (480)$$

em que A_s denota a amplitude de deslocamento, A_v a amplitude do sinal de velocidade, ζ_v a sensibilidade do sensor do vibrômetro e f a frequência. O potencial fornecido pelo laser deve ser multiplicado por um fator de conversão tensão-velocidade ζ_v , ajustado no próprio vibrômetro em 10 mm/s/V para a análise harmônica e 50 mm/s/V para a análise transiente.

Figura 79 – Instalação da fita refletora nos transdutores e na base de suporte do shaker

Assim, o aparato experimental fica montado dessa maneira: um microcomputador com uma placa de aquisição de dados (age como gerador de funções e como dispositivo de coleção de dados) ligado a um amplificador, que por sua vez, repassa o sinal elétrico para o *shaker* que faz com que a estrutura coletora de energia vibre. O material piezelétrico gera uma tensão elétrica que é consumida por circuito RLC em série acoplado eletricamente à estrutura e montado num protoboard. Os valores dos componentes do circuito são configurados conforme o projeto (ver seção 7.3.1) e, a tensão elétrica entre os terminais do circuito RLC é lida pela placa de aquisição. A placa de aquisição é limitada a uma leitura de dados pico a pico máxima de 20 V sendo adicionado um circuito de proteção ou segurança para evitar sobrecargas (ver Figura 78).

7.3.1 Descrição do Protocolo de Medição

Conforme o protocolo planejado, foram identificados os pontos de medição nos transdutores fabricados, escolhendo preferencialmente aqueles que apresentarem os maiores deslocamentos nas simulações prévias de MEF. Assim, o ponto de interesse para as medições de deslocamento nos protótipos é localizado na metade do extremo livre da estrutura como pode ser visto na Figura 79 até a Figura 81. Posteriormente, foi colocada fita refletiva sobre os pontos selecionados previamente e sobre a placa que serve de suporte para as peças no *shaker* (ver Figura 79) e o *shaker* foi submetido a um processo de alinhamento com um nível (ver Figura 80).

Figura 80 – Processo de alinhamento do *shaker*, transdutor e laser

Após os procedimentos anteriores, foram efetuadas marcas com um punção nos transdutores com a finalidade de facilitar a montagem no *shaker*. Assim, os coletores foram posicionados inicialmente no *shaker*, sem apertar demasiado os parafusos da placa de suporte e, usando um nível e um paquímetro, foi feito o alinhamento. Logo de alinhamento, os transdutores foram presos definitivamente no *shaker* através dos parafusos da placa de suporte, foi posicionado o laser do vibrômetro com os controles de posição do tripé e realizada a focalização dos feixes conforme o caso. Além disso, foi verificado o alinhamento do laser (ver Figura 81).

Figura 81 – Focalização do laser sobre os pontos de medição

Para o levantamento da curva de resposta em frequência baseada nos deslocamentos do transdutor e nas voltagens geradas na camada piezelétrica, as experiências deveram ser realizadas duas vezes para cada protótipo, pelo fato de que se tinha somente disponibilidade de um vibrômetro. Para o caso da medição da voltagem gerada o laser foi colocado apontando na direção do suporte do *shaker* para aquisitar a amplitude de deslocamento imposta e a voltagem gerada é medida entre os terminais do circuito elétrico acoplado ao sistema e enviada para a placa de aquisição (ver Figura 78). Já para a medição do deslocamento no transdutor, foram enviados os mesmos sinais de excitação aquisitadas anteriormente para conservar a amplitude e o laser foi posicionado no ponto de maior deslocamento conforme as simulações prévias de MEF (ver Figura 91). Com o sistema corretamente posicionado, foi ligado o bloco de terminais BNC à entrada da placa de aquisição e com a ajuda de cabos BNC foram conectados os equipamentos responsáveis pelos sinais de interesse (o *shaker* é ligado ao amplificador e, por sua vez, o amplificador a um canal de saída do bloco de terminais BNC).

Para a medição da tensão elétrica gerada, foram ligados os fios de cobre que saem do transdutor aos jacarés de um cabo coaxial cujo outro extremo possui pontas de prova tipo banana, as quais foram conectadas a um protoboard. Logo, foi ajustado o resistor variável com ajuda de uma chave de fenda e um multímetro e montado em série com os outros

componentes do circuito (ver Figura 82). Dois circuitos foram considerados, o acoplado com o modelo CFA-I (circuito integral) e com o modelo CFA-T (circuito otimizado) que correspondem aos protótipos fabricados (ver seções 6.4 e 7.2). A montagem dos circuitos é mostrada na Figura 82, ressaltando que para o circuito otimizado foi utilizado um arranjo em paralelo de 3 capacitores comerciais cerâmicos de 100 pF, 18 pF e 5,6 pF obtendo um valor de 123,6 pF, cuja diferença com o valor requerido (123,58 pF) é menor do que 1%. Já para o indutor do mesmo circuito, foi construído um componente sob encomenda por parte da empresa Transformadores Líder (Rua das Andradas 440, Santa Efigênia, SP), pela dificuldade de encontrar indutores comerciais que possibilitassem conformar uma indutância equivalente do valor precisado (602,59 μ H).

Depois dos procedimentos explicados anteriormente e com a ajuda do software MATLAB® foi configurada a taxa de amostragem pelo menos 6 vezes maior do que a frequência máxima a ser aquiritada. O número de ciclos executados no regime transiente foi de 100 com um período de 2 s enquanto no regime harmônico a aquisição se estendeu por 205 ciclos para cada frequência considerada. Dois intervalos de frequência foram aquiritados no regime harmônico, entre 25 e 75 Hz (50 Hz é a frequência de operação dos coletores nesse regime) e entre 150 Hz e 3 KHz (em que se podem ser encontrados os dois primeiros modos de vibração de flexão) com um passo de 1 Hz. Antes de executar o processo de aquisição propriamente dito, foram realizadas várias aquisições de dados com o sistema em repouso de forma a caracterizar o ruído presente na experiência e ser levado em conta no tratamento dos dados.

A amplitude de excitação na base do *shaker* no regime harmônico é de 2×10^{-4} mm enquanto que para a análise transiente oscila entre 0,2 e 0,4 mm dependendo do ciclo considerado do sinal quadrado (negativo ou positivo). As medições foram feitas selecionando um protótipo ao acaso, começando pela mínima frequência e efetuadas, quando possível, em horários onde não estiveram ligadas outras máquinas à rede elétrica com o intuito de minimizar o ruído de 60 Hz e vibrações transferidas à estrutura do prédio por máquinas rotativas (tornos), impondo carregamentos elevados ou súbitos (máquina de ensaios universal ou de impacto) ou cargas alternativas (testes de fadiga).

Figura 82 – Circuitos utilizados na caracterização dos protótipos fabricados: (a) Circuito integral; (b) Circuito otimizado

Em razão de que foram necessárias várias sessões de medição, tentou-se reproduzir as mesmas condições para todas as experiências, fazendo-as nos mesmos horários. Os dados adquiridos foram salvos em formato *.mat de MATLAB® para o posterior processamento deles, onde foi realizado um processo de filtragem com a finalidade de remover o ruído, offset e tendência dos dados. Com os sinais filtrados, foi calculada a média das amplitudes do sinal para determinar deslocamento ou voltagem gerado segundo o caso.

7.3.2 Análise Harmônica

Os resultados experimentais do modelo integral foram comparados com simulações de MEF do software *EPLADin* desenvolvido neste trabalho e o software COMSOL Multiphysics®. O software COMSOL® neste caso foi usado para validar o MEF implementação. Na Figura 83 é observada a resposta em frequência do coletor EPLA-CFA-I, onde também são incluídas as respostas numéricas obtidas com o software *EPLADin* e com o software COMSOL Multiphysics® enquanto na Figura 84 é mostrada a resposta em frequência em torno da primeira frequência de ressonância experimental. No software COMSOL® foi utilizado um elemento sólido de 8 nós considerando 4 elementos ao longo da espessura (COMSOL, 2012), pois tal elemento possui uma formulação mais próxima do elemento de casca implementado neste trabalho (ver APÊNDICE B).

Figura 83 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-I (AInt): (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada

Figura 84 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-I (AInt) em torno da primeira frequência de ressonância experimental: (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada

Os resultados apresentaram diferenças que podem ser atribuídas às imperfeições dos materiais utilizados como tensões residuais de processos de obtenção do material ou de fabricação das EPLA (ver seção 7.2), espessura da camada epóxi, e da camada de cola condutiva utilizada no eletrodo, às diferenças na quantidade de solda de estanho, imperfeições no alinhamento das camadas, ressonância da massa oscilante do *shaker*, perdas nos fios que conduzem os sinais, condições de contorno não uniformes, e incertezas nos aparelhos elétricos envolvidos na geração, medição e aquisição do sinal. Contudo, as diferenças máximas entre os dados experimentais e os obtidos pelo software *EPLADin* para as frequências de ressonância são de 28% para a primeira e 14,8% para a segunda. Não obstante, maiores diferenças foram apresentadas nos itens de voltagem gerada e potência média ativa cujas diferenças são da ordem de 5,23 e 26,92 vezes, respectivamente, observando que a diferença apresentada na potência cresce quadraticamente em relação à voltagem (ver Tabela 24).

Tabela 24 – Comparação dos resultados obtidos numérica e experimentalmente para o coletor de energia CFA-I na análise harmônica considerando como frequência de operação 50 Hz e uma excitação por deslocamento de 2×10^{-4} mm

Característica (Unidade)		Modelo				
		Numérico		Experimental		
		EPLADin	COMSOL	AInt1	AInt2	AInt3
Voltagem (mV)		0,878	0,616	4,319	4,598	4,414
Potência ativa média (fW)		0,012	0,006	0,285	0,323	0,298
Frequência modo de flexão 1 (Hz)		275	292	198	198	198
Frequência modo de flexão 2 (kHz)	Estrutural	1,727	1,828	1,374	1,339	1,463
	Elétrica				1,332	1,471

Embora, o espectro de frequência entre 25 e 75 Hz pôde ser afetado por outras máquinas ligadas à rede ou com movimentos mecânicos oscilatórios ou aplicando carregamentos súbitos. De igual forma, foi possível identificar uma fonte de erro nas medições, sendo uma máquina de ensaios de fadiga responsável por vibrações no prédio em torno dos 30 Hz, podendo induzir vibrações noutros móveis e máquinas do laboratório em que se realizaram as experiências. Em relação à comparação dos resultados numéricos com o software COMSOL, as variações são devidas às diferenças das formulações dos elementos

finitos, toda vez que no elemento sólido são levados em conta os efeitos na direção da espessura. Por exemplo, no elemento de casca é assumido que a tensão normal em direção normal ao plano da casca é nulo, não sendo assim no elemento sólido do COMSOL (COMSOL, 2012).

Na faixa de frequência entre 400 Hz e 1 kHz, foram encontrados picos inesperados que podem ser atribuídos à pouca reprodutibilidade da condição de contorno imposta pelas placas de suporte de alumínio (Figura 79 e Figura 80), pois podem ocorrer desalinhamentos e deslocamentos relativos no momento da fixação e, de igual forma, podem existir deformações induzidas pelo aperto das placas e dos parafusos centrais sobre o substrato do protótipo. Assim, o material alocado entre as placas pode comportar-se como uma estrutura oscilante independente com as suas próprias ressonâncias, e cuja vibração pode produzir interferência construtiva ou destrutiva com o sinal de vibração da base do *shaker* e do deslocamento do protótipo alterando dessa forma os resultados.

Já os picos no final do espectro depois dos 2 kHz podem ser atribuídos à oscilação induzida pela condição de contorno e pela vibração de porções de material das camadas dos protótipos parcialmente descoladas por efeito de falha por cisalhamento à fadiga da camada epóxi. Um cálculo aproximado do número de ciclos atingidos pela estrutura no decorrer da experiência aponta a um valor superior a 2×10^6 ciclos, sendo que o fabricante reporta que para valores entre 10^6 e 10^7 ciclos de trabalho e adequado processo de cura a resistência à cisalhamento em fadiga pode ver-se reduzida num 80%. Portanto, é encontrada uma causa adicional das incertezas e grandes diferenças entre os resultados numéricos e experimentais.

Entretanto, Huang, Kim e Yoon (2015) tinham reportado comportamentos semelhantes em simulações de MEF de EPLAs com material piezelétrico parcialmente colado propositalmente em várias proporções, observando picos inesperados de antirressonância na resposta em frequência e decaimento da amplitude da resposta tanto no regime harmônico quanto transiente. Os fatos atribuídos às diferenças, erros e incertezas entre os resultados numéricos e experimentais explicados anteriormente para os protótipos *Alnt* são igualmente aplicáveis aos protótipos *AOpt* e estendidos aos resultados obtidos no regime transiente (ver 7.3.3).

Na Figura 85 é mostrada a resposta em frequência do coletor EPLA-CFA-T, que apresenta um comportamento semelhante nas faixas de frequência de 400 Hz e 1 kHz e maiores que 2 kHz, excetuando no protótipo *AOpt2* cuja segunda ressonância a flexão é encontrada em torno dos 2,5 kHz. Já na Figura 86 é mostrada a resposta em frequência em torno da primeira frequência de ressonância experimental.

O resumo dos dados dos protótipos otimizados é dado na Tabela 25. As diferenças máximas entre os dados experimentais e os obtidos pelo software *EPLADin* para as frequências de ressonância são de 58,8% para a primeira e 7,1% para a segunda. Cabe ressaltar que as diferenças entre as frequências de ressonância de um mesmo modo podem ser devidas ao acoplamento de todos os equipamentos elétricos e eletrônicos utilizados nas experiências e às condições de contorno elétricas nos eletrodos, que pelo método de fabricação desenvolvido neste trabalho não garante uniformidade, podendo incidir a vibração dos cabos, da eletrofita e da solda de estanho. Por outro lado, as diferenças em relação à voltagem gerada e potência média ativa são 9,5 e 89,2 vezes, respectivamente, notando novamente que a diferença na potência gerada cresce quadraticamente em relação à voltagem.

Figura 85 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-T (*AOpt*): (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada

Figura 86 – Resposta em frequência do coletor de energia EPLA-CFA-T (*AOpt*) em torno da primeira frequência de ressonância experimental: (a) Magnitude logarítmica; (b) Magnitude normalizada

Tabela 25 – Comparação dos resultados obtidos numérica e experimentalmente para o coletor de energia CFA-T na análise harmônica considerando como frequência de operação 50 Hz e uma excitação por deslocamento de 2×10^{-4} mm

Característica (Unidade)		Modelo			
		Numérico EPLADin	Experimental		
			AOpt1	AOpt2	AOpt3
Voltagem (mV)		0,550	5,095	5,217	5,010
Potência ativa média (fW)		0,023	1,956	2,051	1,892
Frequência modo de flexão 1 (Hz)		410	171	174	169
Frequência modo	Estrutural	1,483	1,722	2,536	1,738
de flexão 2 (kHz)	Elétrica		1,719		1,742

Finalmente, comparando somente os resultados experimentais com a finalidade de avaliar o resultado do processo de otimização, pode ser visto que as voltagens foram maximizadas até 20,8% e a potência ativa média gerada foi incrementada até 7,2 vezes em relação aos menores valores apresentados nos modelos integrais (ver Tabela 24 e Tabela 25).

7.3.3 Análise Transiente

Dado que a camada de cola epóxi não é levada em conta no modelo de MEF e que a excitação do *shaker* no regime transiente não é igual a uma onda quadrada, os modelos de MEF transiente não podem ser comparados diretamente. Contudo, pode ser estabelecida a influência da cola epóxi por um estudo paramétrico afetando as propriedades de material até que as curvas se superponham. Assim, realizando o ajuste da curva para o protótipo *AInt1*, foi obtido um fator para a densidade de massa do alumínio de $F_\rho = 14$ (a densidade do PZT não é alterada), um fator para a permissividade elétrica de $F_\epsilon = 3,7$, um fator para o coeficiente de amortecimento estrutural de $F_\zeta = 0,5$ e um fator para o coeficiente de perdas dielétricas de $F_\delta = 0,2$.

Figura 87 – Comparação da resposta transiente para o protótipo *AInt1* com o modelo CFA-I modificado: (a) Deslocamento; (b) Velocidade; (c) Aceleração; (d) Voltagem

Indiretamente pode ser estimado o efeito da rigidez da EPLA produzido pela camada de cola epóxi considerando que a frequência de oscilação foi igualada entre os modelos experimental e numérico ($\omega_{\text{dnum}} = \omega_{\text{dexp}}$) quando efetuada a sobreposição das curvas de resposta. Levando em conta o anterior e tomando as propriedades de material e da estrutura de forma concentrada tem-se:

$$\sqrt{\frac{(1-(F\zeta_{\text{num}})^2)k_u}{(F\rho_{\text{alu}}t_{\text{alu}}+\rho_{\text{cer}}t_{\text{cer}})A}} = \sqrt{\frac{(1-\zeta_{\text{exp}}^2)F_k k_u}{(\rho_{\text{alu}}t_{\text{alu}}+\rho_{\text{cer}}t_{\text{cer}}+\rho_{\text{epo}}t_{\text{epo}})A}} \quad (481)$$

sendo ρ_{epo} , t_{epo} a densidade ($1,17 \text{ g/cm}^3$, fornecida pelo fabricante) e espessura da cola epóxi (ver Tabela 23). Assumindo que os fatores $(1-(F\zeta_{\text{num}})^2)$ e $(1-\zeta_{\text{exp}}^2)$ são muito próximos de 1, o fator de efeito da rigidez F_k pode ser calculado como:

$$F_k \approx \frac{(\rho_{\text{alu}}t_{\text{alu}}+\rho_{\text{cer}}t_{\text{cer}}+\rho_{\text{epo}}t_{\text{epo}})}{F\rho_{\text{alu}}t_{\text{alu}}+\rho_{\text{cer}}t_{\text{cer}}} = 0,292 \quad (482)$$

portanto, a rigidez foi reduzida aproximadamente 70% por causa da colagem com a cola epóxi. De igual forma, poder ser deduzido que o processo de colagem incrementou a capacitância do sistema ao redor de 4 vezes ($F_\epsilon=3,7$).

Figura 88 – Comparação da resposta transiente para os protótipos *AInt* e *AOpt* do modelo EPLA-CFA: (a) Deslocamento imposto; (b) Deslocamento do coletor; (c) Voltagem

Na Figura 88 é mostrada uma comparação das curvas obtidas experimentalmente para todos os protótipos fabricados, na que pode ser vista a diferença da excitação imposta pelo

shaker (ver Figura 88a), constituindo uma causa de erro nas medições, já que não foi possível manter o mesmo nível de excitação para todos os protótipos. Esse erro não depende do usuário podendo assim, inferir desgaste mecânico nos componentes do *shaker* (pois possui uma mola para retorno à posição inicial), contato elétrico deficiente nas conexões de entrada e internas do dispositivo ou saturação da sua bobina. As diferenças entre as excitações dos modelos *AInt* e *AOpt* podem alcançar valores próximos de 2 vezes, afetando-se a reprodutibilidade da experiência

Tabela 26 – Comparação dos resultados obtidos experimentalmente para os protótipos dos coletores de energia CFA-I (*AInt*) e CFA-T (*AOpt*) na análise transiente

Característica (Unidade)	Modelo					
	Integral			Otimizado		
	AInt1	AInt2	AInt3	AOpt1	AOpt2	AOpt3
f_d (Hz)	147,82	233,42	149,90	177,82	178,22	174,06
Z (M Ω)	1,923	1,218	1,896	7,243	7,227	7,400
$\overline{Pot}_{mpa}^t$ (pW)	0,246	0,180	0,268	0,207	0,111	0,553
$\overline{Pot}_{ca}^t$ (pW)	0,695	0,410	0,813	0,570	0,348	1,280
V_{mp}^{Pmax} (V)	0,207	0,176	0,205	0,071	0,040	0,094
V_c^{Pmax} (V)	0,430	0,338	0,462	0,172	0,088	0,224
u_{mpin}^{Pmax} (mm)	0,184	0,196	0,189	0,142	0,100	0,145
u_{cin}^{Pmax} (mm)	0,366	0,384	0,428	0,294	0,246	0,304
u_{mpout}^{Pmax} (mm)	0,193	0,192	0,191	0,148	0,130	0,144
u_{cout}^{Pmax} (mm)	0,395	0,385	0,422	0,275	0,276	0,306
ζ	2,01%	1,61%	1,90%	3,35%	2,41%	1,74%
$\tan \delta_0$	0,30%	0,17%	0,32%	0,38%	0,59%	0,29%

Na Tabela 26, são mostrados os valores obtidos experimentalmente para todos os protótipos, registrando valores de frequência de oscilação amortecida em regime transiente (f_d), impedância (Z), potência ativa média gerada em meio período de excitação ($\overline{Pot}_{mpa}^t$), potência ativa média gerada por ciclo em regime transiente ($\overline{Pot}_{ca}^t$), coeficiente de amortecimento estrutural (ζ), coeficiente de perdas dielétricas ($\tan \delta_0$), máxima voltagem gerada ($V_{mp}^{Pmax}, V_c^{Pmax}$), máximo deslocamento imposto ($u_{mpin}^{Pmax}, u_{cin}^{Pmax}$) e máximo

deslocamento no coletor ($u_{\text{mpout}}^{\text{Pmax}}$, $u_{\text{cout}}^{\text{Pmax}}$) considerando meio período e o ciclo completo, respectivamente. Apesar das diferenças nos valores de deslocamento de excitação pode ser notado que nos protótipos otimizados, a potência ativa gerada foi maximizada entre 14,6% e 25,4% em média considerando meio período e o ciclo completo de excitação, e a voltagem foi incrementada entre 60,6% e 65%, respectivamente. Outros fatos importantes para ressaltar é que foram alcançados níveis de potência maiores, mesmo que os coeficientes de amortecimento e de perdas dielétricas apresentassem um incremento de 36,1% e 59,6%, respectivamente.

7.3.4 Caracterização das Perdas

Aproveitando os dados fornecidos pelas experiências e utilizando os conceitos mostrados na seção 2.4.7, foram quantificados os fatores de perdas tanto no domínio estrutural quanto no elétrico a partir dos dados dos protótipos *AIInt*. As curvas de perdas obtidas podem ser vistas na Figura 89, notando uma maior dispersão dos dados experimentais de amortecimento estrutural do que para o fator de perdas dielétricas.

Figura 89 – Curvas de perdas mecânicas e dielétricas dependentes da frequência obtidas experimentalmente

Além disso, não foram considerados os dados dos picos ressonantes entre 400 Hz e 1 kHz pelo fato de que tais dados não correspondem propriamente à vibração do protótipo pelo deslocamento imposto na base do *shaker*. Esses dados podem ser atribuídos à vibração independente do material alocado entre as placas de suporte de alumínio (Figura 79 e Figura 80) que produzem interferência construtiva ou destrutiva com o sinal de vibração da base do *shaker* e do deslocamento do protótipo como apontado anteriormente.

As curvas obtidas aqui foram incluídas na modelagem do problema EPLA-CFA (ver seção 6.4), sendo que para um melhor ajuste e redução de incertezas recomenda-se obter mais valores do espectro de frequência, pois a dependência entre as perdas e a frequência é altamente não linear. A curva obtida para o amortecimento estrutural foi:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{(3,092 \pm 1,272) \times 10^{-2}}{\omega} + (3,251 \pm 3,355) \times 10^{-3} \omega \right) \quad (483)$$

em que $\alpha_1 = 3,092 \times 10^{-2}$ e $\beta_1 = 3,251 \times 10^{-3}$. Já para o fator de perdas dielétricas foi obtido:

$$\tan \delta_0 = \frac{\omega \left(\frac{\pi}{2} \right) - (344,584 \pm 149992,395)}{\omega [(-69260,673 \pm 30227979,086) - \ln(\omega)]} \quad (484)$$

sendo $\alpha_{\delta_0} = -344,584$ e $\beta_{\delta_0} = -69260,673$. Apesar do grande erro para os parâmetros da α_{δ_0} e β_{δ_0} , a curva apresenta uma adequada aproximação do fator de perdas no intervalo 0 e 400 Hz (0 e 2,513 krad/s).

8 CONCLUSÕES

O MOT foi aplicado na otimização do projeto de atuadores e coletores de energia EPLA considerando três enfoques: harmônico, transiente e combinado. Os exemplos mostraram que a velocidade de resposta e as amplitudes de deslocamento de saída foram maximizadas, apresentando melhores resultados na otimização transiente na maioria dos casos. A melhora nas características dinâmicas das EPLA estudadas é atribuída ao fato de que a otimização dinâmica utiliza todo o tempo transiente para maximizar a resposta progressivamente.

O problema combinado de enfoque dinâmico é proposto neste trabalho com o intuito de customizar a resposta da EPLA, de modo que, o nível de resposta seja mantido perante diferentes formas da entrada. O nível de energia poderia ser diferente para cada excitação, porém com a otimização, é determinada a proporção desse nível em relação a uma entrada de referência. O caso combinado no caso de atuadores atendeu o objetivo de igualar os deslocamentos de saída no regime harmônico e transiente numa proporção de 1,021 e 1,008 para os atuadores com substrato metálico e ortotrópico, respectivamente. Contudo, a velocidade de resposta foi melhorada somente no caso do atuador com substrato metálico em 86%, piorando em 2,65 para o caso de substrato com material fibroso. Já para coletores de energia no problema combinado, foi alcançada uma relação de potências médias geradas no regime harmônico e transiente de 96% em detrimento da velocidade de resposta que decaiu 1,2%.

A função objetivo do tipo integral utilizada no problema de otimização transiente não garante que a maximização do deslocamento (em atuadores) ou da potência ativa gerada (em coletores de energia) e a minimização do tempo de subida sejam atingidas simultaneamente, dado que o problema de otimização dinâmico procura a maximização da área sob a curva no tempo da variável de estado (deslocamento ou voltagem) sendo sujeito imperativamente a satisfazer as equações de equilíbrio. Deste modo, o problema de otimização pode conduzir num resultado em que a solução harmônica apresente uma maior velocidade de resposta embora o nível da resposta da variável de estado seja menor do que o obtido pelo enfoque transiente. Não obstante, a carência de formulações explícitas para a velocidade de resposta

do sistema faz com que se deva recorrer a abordagens indiretas como a maximização da variável de estado no tempo de subida, de modo que, a otimização modifique a inclinação inicial da curva delimitada entre $t = 0$ e o tempo de subida $t = t_r$ onde a resposta alcança o valor final pela primeira vez (ver seção 2.4.5). Contudo, uma adequada seleção dos pesos de ponderação da função objetivo aumenta a possibilidade de atingir tais objetivos de forma simultânea.

O modelo de interpolação de orientações de fibra MIAFIB se comportou de forma aceitável em atuadores, pois mesmo que a rigidez do substrato não conseguisse ser menor do que o modelo integral contribuiu na maximização dos deslocamentos, especialmente nos enfoques transiente e combinado em que se obtiveram melhoras de 9,1% e 13,5% no deslocamento de estabilização, respectivamente. Não obstante, se mostrou efetivo desde o ponto de vista computacional, pois reduz o número de vezes em que a matriz de rotação deve ser avaliada em cada iteração do MOT pelo mapeamento da quantidade de orientações de fibra presentes na iteração anterior. Apesar disso, não foram melhoradas as velocidades de resposta para nenhum caso otimizado, situação que pode ser revertida pelo ajuste dos pesos de ponderação dos termos da função objetivo. Igualmente, a função de penalização de ortogonalidade da fibra contribuiu na continuidade da distribuição das orientações de fibra apresentando índices de ortogonalidade da fibra menores do que 11% para todos os casos otimizados.

O modelo de interpolação para impedâncias elétricas acopladas MILZEL se mostrou eficaz no processo de otimização, pelo fato de conseguir contornar as instabilidades numéricas derivadas de considerar variáveis de projeto representadas pelos componentes do circuito com diferentes ordens de grandeza. Os resultados do MOT aplicado ao projeto de coletores de energia sugerem que ondas diferentes das sinusoidais poderiam gerar maiores quantidades de potência elétrica embora com menores níveis transferência de potência e eficiência. Esses fatores poderiam ser considerados em formulações de trabalhos futuros visando melhores desempenhos.

Além disso, as considerações na modelagem de EPLA fizeram com que a modelagem fosse mais realística, particularmente, no regime transiente que considerou a excitação com outro tipo de onda (quadrada) diferente às tradicionalmente utilizadas (sinusoidais) e no modo de coleção de energia em todos os regimes dinâmicos em que foi adotado o modelo de perdas

dielétricas e de impedância distribuída, que inclui a mudança do valor de impedância acoplada quando a estrutura alcança o nível estacionário. Do mesmo modo, tanto em atuadores quanto coletores no regime transiente, a modelagem foi aprimorada com a forma de excitação de entrada que não considera entradas súbitas e a utilização do modelo de amortecimento dependente da frequência baseado no fator de participação modal dos modos de vibração.

Finalmente, cabe destacar que a formulação adotada para a resolução do problema de MOT em cada enfoque foi adequada. No entanto, a alta dependência dos resultados com o intervalo de tempo por passo de integração na solução do problema transiente, aumentou o custo computacional com relação ao seu semelhante harmônico. O problema transiente apresenta uma taxa de convergência menor do que seu similar harmônico, podendo isso ser atribuído à precisão das sensibilidades, pelo fato de que elas dependem da discretização da dimensão tempo.

Adicionalmente, pode ser notado que o incremento da discretização do MEF sem fazer uma adequada seleção dos parâmetros envolvidos, faz com que as iterações do MOT e a solução de cada passo de integração na análise transiente resultem bastante custosas, mesmo que o hardware disponível execute um maior número de MIPS (Milhões de Instruções por Segundo). Ou seja, não é eficiente resolver um problema incrementando somente a potência computacional (em outras palavras, resolver o problema por “força bruta”). Portanto, é recomendado encontrar um balanço entre todos os parâmetros que afetam o tempo de execução total do algoritmo de MOT.

8.1 Trabalhos Futuros

Os trabalhos futuros foram agrupados conforme a aplicação de EPLA, tendo propostas que podem ser aplicáveis para qualquer tipo de estrutura, e outras específicas para o caso de atuadores e coletores de energia.

8.1.1 EPLA em Geral

- **Otimização de EPLA considerando restrições no tempo de estabilização da resposta transiente.** Como visto nos resultados, o tempo de estabilização t_s da resposta transiente nem sempre é $t_s \leq \frac{T_{exc}}{2}$. Aplicações como posicionamento de precisão ou sensoreamento nas áreas de acústica poderiam requerer que a resposta se estabilize num tempo determinado. Esse problema poderia ser abordado com a inclusão do problema de otimização modal do autovalor (determinação das ω_n) pelo fato de que o tempo de estabilização t_s depende da frequência natural ω_n excitada, como visto na eq.(136).

- **Otimização de orientações de fibra em substratos ortotrópicos com considerações de energia.** Como descrito Luo e Gea (1998), uma orientação de fibra pode induzir uma rigidez fictícia no sistema, fato relatado neste trabalho e que em particular impossibilitou ter resultados satisfatórios em aplicações de coleta de energia com substratos ortotrópicos. Uma nova formulação poderia penalizar aquelas variáveis de projeto de baixa densidade com a finalidade de forçar ao otimizador encontrar distribuições próximas a topologias *0-1* ou quantificar a energia de deformação aportada à estrutura controlando o seu nível máximo para diminuir os efeitos espúrios de rigidez causada pela orientação de fibra. A formulação baseada em energia poderia tornar o resultado do problema de otimização independente da influência da espessura da casca.

- **Otimização de EPLA em regime transiente com excitação por ondas triangulares.** Na área de instrumentação em ocasiões são requeridas variações lineares do sinal de entrada ou saída, além disso, a geração de ondas sinusoidais de baixa frequência é usualmente feita a partir de ondas triangulares, portanto, projetos com customização da resposta perante esse tipo de ondas poderiam ser abordados desde um enfoque transiente, podendo ser estendido para qualquer tipo de forma de excitação.

- **Redução do custo computacional de algoritmos de OT envolvendo formulações transientes de EPLA.** O crescente aumento da capacidade de processamento tem levado à ideia de que melhores computadores podem reduzir o custo computacional, especialmente na comunidade científica fora da área de ciências de computação. Como foi visto neste trabalho, estimativas da ordem de complexidade algorítmica de implementações de software de OT

podem ajudar a identificar as tarefas mais custosas, focar esforços no seu aprimoramento (modificações na implementação ou paralelização do código) e fazer um melhor planejamento na aquisição de resultados. Assim, a aplicação de técnicas padronizadas de programação em algoritmos poderia contribuir a abordar problemas pouco explorados em OT como análise não linear sem importar a linguagem de programação.

8.1.2 Atuadores EPLA

- **Otimização de transdutores EPLA combinadas com técnicas de controle.** As formulações de atuadores e coletores de energia podem ser combinadas com técnicas de controle para aplicações como supressão de vibrações ou controle de posição. As formulações poderiam incluir a interação com circuitos elétricos ou eletrônicos com componentes excitados pela energia gerada no material piezelétrico, como os transformadores, ou por fontes de voltagem externas como os amplificadores operacionais. O projeto com OT poderia levar em conta qualquer tipo de distúrbio tornando potencial a análise transiente para a abordagem desse problema.
- **Otimização de atuadores EPLA com múltiplas excitações e múltiplas saídas simultâneas e não simultâneas.** Múltiplas excitações podem gerar movimentos interessantes num ponto ou em diferentes pontos da estrutura. Esse enfoque poderia ser utilizado no projeto de motores piezelétricos considerando diferentes tipos de excitações ou o conceito de transdutores multi-entrada, tratado neste trabalho.
- **Otimização de atuadores EPLA em regime harmônico e/ou transiente com considerações de fadiga.** Atuadores EPLA apresentam pequenos deslocamentos e tensões mecânicas baixas, porém um regime da carga alternante aplicado num elevado número de ciclos poderia levar à falha por fadiga. O fenômeno de fadiga tem sido pouco explorado em OT, podendo inicialmente considerar o projeto como um problema de otimização com restrição de tensão equivalente ou formulações baseadas em dano acumulativo.

8.1.3 Coletores de Energia EPLA

- **Otimização de coletores EPLA com considerações de eficiência e transferência de potência ao circuito acoplado.** A formulação poderia levar em conta restrições no nível de casamento de impedâncias, pois o material piezelétrico não se comporta como uma fonte de voltagem ideal. Assim, seria possível aumentar a eficiência do sistema ou a transferência de potência conforme o projeto, evitando assim desperdícios de energia gerada. Além disso, poderiam ser consideradas restrições desde o ponto de vista exergético, introduzindo conceitos termodinâmicos de energia disponível que não têm sido explorados em coletores de energia.
- **Otimização de coletores EPLA com múltiplos eletrodos.** Usualmente o eletrodo é considerado como uma superfície equipotencial. No entanto, a possibilidade de contar com múltiplos eletrodos num mesmo coletor possibilitaria o acoplamento de diferentes impedâncias alimentadas com diferentes níveis de tensão.
- **Otimização de coletores EPLA com restrições de tensão.** A formulação desenvolvida neste trabalho pode ser estendida ao problema de projeto com restrições de tensão ainda em aberto. A formulação precisaria levar em conta diferentes critérios de falha segundo o tipo de material, e não necessariamente deve ser limitada ao regime estático podendo ser estendida ao problema de fadiga baseado em tensão equivalente ou dano acumulativo.
- **Otimização de coletores EPLA levando em conta a interação dos circuitos de interfase de extração e armazenagem de energia.** Vários circuitos elétricos ou eletrônicos têm sido propostos para a extração e armazenagem, sendo que a interação do acoplamento entre tais circuitos e a estrutura do coletor afeta o desempenho do sistema. A OT ainda não tem sido aplicada ao projeto de coletores de energia levando em conta o sistema de extração e armazenagem da energia gerada, o que conduziria à obtenção de transdutores mais eficientes.

8.1.4 Caracterização de Cerâmicas Piezelétricas

• **Determinação das propriedades de materiais piezelétricos considerando modelos de perdas dependentes da frequência.** A metodologia de caracterização de cerâmicas piezelétricas baseada nas suas curvas de impedância pode ser melhorada com a inclusão de modelos de perdas dependentes da frequência tanto no domínio estrutural quanto no elétrico. Quando consideradas perdas constantes de qualquer tipo no material piezelétrico a formulação fica limitada a pequenos intervalos de frequência, aumentando as incertezas nas propriedades conforme o intervalo de frequência aumenta. No domínio estrutural poderia ser considerado o modelo de amortecimento proporcional generalizado (ADHIKARI, 2006, 2014) enquanto que no domínio elétrico poderia ser considerado o modelo de dispersão de banda larga de Debye (DJORDJEVIC *et al.*, 2001; SVENSSON; DERMER, 2001). Lembrando que, as perdas estruturais e dielétricas podem ser consideradas independentes pelo fato de que a perda piezelétrica coexiste em acoplamento com as anteriores (MEZHERITSKY, 2004).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABE, N. M.; CARDOSO, J. R.; FOGGIA, A. Coupling electric circuit and 2D-FEM model with dommel's approach for transient analysis. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 34, n. 5, p. 3487–3490, 1998.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. 9th. ed. New York: Dover Publications, 1970.
- ACHTZIGER, W.; KOCVARA, M. Structural topology optimization with eigenvalues. **Siam Journal on Optimization**, v. 18, n. 4, p. 1129–1164, 2008.
- ADHIKARI, S. Damping modelling using generalized proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**, v. 293, n. 1–2, p. 156–170, 2006.
- ADHIKARI, S. **Structural Dynamic Analysis with Generalized Damping Models: Identification**. 1st. ed. Hoboken, NJ: JohnWiley & Sons, 2014.
- AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, n. 3, p. 419–451, 1970.
- ALLAIRE, G.; CASTRO, C. A new approach for the optimal distribution of assemblies in a nuclear reactor. **Numerische Mathematik**, v. 89, n. 1, p. 1–29, 2001.
- AMSTUTZ, S. Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 6, p. 755–765, 2011.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, n. 3, p. 407–420, 2010.
- ANANTHASURESH, G. K. **Optimal Synthesis Methods for MEMS**. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- ANDREASSEN, E. et al. Efficient topology optimization in Matlab using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 1, p. 1–16, 2011.
- ANTON, S. R.; SODANO, H. A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). **Smart Materials & Structures**, v. 16, n. 3, p. R1–R21, 2007.
- ASTM INTERNATIONAL. **ASTM E8/E8M - 09 Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials**. West Conshohocken, PAASTM International., , 2009.
- BAKR, M. H.; NIKOLOVA, N. K. An Adjoint Variable Method for Time-Domain Transmission-Line Modeling With Fixed Structured Grids. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 52, n. 2, p. 554–559, 2004.
- BAKR, M. H.; ZHAO, P.; NIKOLOVA, N. K. Adjoint first order sensitivities of transient responses and their applications in the solution of inverse problems. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 57, n. 7, p. 2137–2146, 2009.
- BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 9, p. 713–718, 2001.

- BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators. **Smart Materials & Structures**, v. 17, n. 3, 2008.
- BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. Multilayer higher order piezolaminated smart composite shell finite element and its application to active vibration control. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 20, n. 4, p. 425–441, 2009.
- BARLOW, J. Optimal stress locations in finite element models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. 2, p. 243–251, 1976.
- BARNETT, D. M.; LOTHE, J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. **Physica Status Solidi B-Basic Research**, v. 67, n. 1, p. 105–111, 1975.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 1st. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice-Hall, 1996.
- BAYRASHEV, A.; ROBBINS, W. P.; ZIAIE, B. Low frequency wireless powering of microsystems using piezoelectric-magnetostrictive laminate composites. **Sensors and Actuators a-Physical**, v. 114, n. 2–3, p. 244–249, 2004.
- BELLOLI, A.; ERMANNI, P. Optimum placement of piezoelectric ceramic modules for vibration suppression of highly constrained structures. **Smart Materials and Structures**, v. 16, n. 5, p. 1662–1671, 2007.
- BENASCIUTTI, D. et al. Vibration energy scavenging via piezoelectric bimorphs of optimized shapes. **Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems**, v. 16, n. 5, p. 657–668, 2010.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, n. 9–10, p. 635–654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. 1st. ed. Berlin: Springer, 2003.
- BOHRER, R. Z. G.; DE ALMEIDA, S. F. M.; DONADON, M. V. Optimization of composite plates subjected to buckling and small mass impact using lamination parameters. **Composite Structures**, v. 120, p. 141–152, 2015.
- BORRVALL, T. Topology optimization of elastic continua using restriction. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 8, n. 4, p. 351–385, 2001.
- BORRVALL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization using regularized intermediate density control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 37–38, p. 4911–4928, 2001.
- BOWEN, C. R. et al. Piezoelectric and ferroelectric materials and structures for energy harvesting applications. **Energy & Environmental Science**, v. 7, n. 1, p. 25–44, 2014.
- BRUYNEEL, M. SFP-a new parameterization based on shape functions for optimal material selection: Application to conventional composite plies. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 1, p. 17–27, 2011.
- BRUYNEEL, M.; FLEURY, C. Composite structures optimization using sequential convex

- programming. **Advances in Engineering Software**, v. 33, n. 7–10, p. 697–711, 2002.
- BURGOYNE, C. J.; CRISFIELD, M. A. Numerical-integration strategy for plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 1, p. 105–121, 1990.
- BYUN, J. K. et al. Inverse problem application of topology optimization method with mutual energy concept and design sensitivity. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 36, n. 4, p. 1144–1147, 2000.
- BYUN, J. K.; LEE, J. H.; PARK, I. H. Node-based distribution of material properties for topology optimization of electromagnetic devices. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 40, n. 2, p. 1212–1215, 2004.
- CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Design of piezoelectric multi-actuated microtools using topology optimization. **Smart Materials & Structures**, v. 14, n. 6, p. 1431–1447, 2005.
- CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. **Smart Materials & Structures**, v. 16, n. 1, p. 207–220, 2007.
- CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design: a multiphysics topology optimization approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 77, n. 3, p. 301–336, 2009.
- CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. 1st. ed. Englewood Cliffs, N. Y.: Prentice-Hall, 1976.
- CAUGHEY, T. K.; OKELLY, M. E. J. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. **Journal of Applied Mechanics**, v. 32, n. 3, p. 583–588, 1965.
- CHANG, J. J. Modeling and Analysis of Piezo-Elastica Energy Harvester in Computer Hard Disk Drives. **Magnetics, IEEE Transactions on**, v. 47, n. 7, p. 1862–1867, 2011.
- CHAO, P. C. P. Energy harvesting electronics for vibratory devices in self-powered sensors. **IEEE Sensors Journal**, v. 11, n. 12, p. 3106–3121, 2011.
- CHAWLA, K. K. **Composite Materials: Science and Engineering**. 2nd. ed. Berlin: Springer, 2001.
- CHEN, B. C.; KIKUCHI, N. Topology optimization with design-dependent loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 1, p. 57–70, 2001.
- CHEN, S. K. et al. A level set approach for optimal design of smart energy harvesters. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 37–40, p. 2532–2543, 2010a.
- CHEN, X. et al. 1.6 v nanogenerator for mechanical energy harvesting using PZT nanofibers. **Nano Letters**, v. 10, n. 6, p. 2133–2137, 2010b.
- CHENG, K. T. On non-smoothness in optimal-design of solid, elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 8, p. 795–810, 1981.
- CHENG, K. T.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal-design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 2, p. 153–169, 1982.
- CHO, J. et al. Optimization of electromechanical coupling for a thin-film PZT membrane: I. Modeling. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 15, n. 10, p. 1797–1803, 2005a.

- CHO, J. et al. Optimization of electromechanical coupling for a thin-film PZT membrane: II. Experiment. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 15, n. 10, p. 1804–1809, 2005b.
- CHOI, K. K.; KIM, N. H. **Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1: Linear Systems**. 1st. ed. Berlin: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 1st. ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1995.
- CHOWDHURY, I.; DASGUPTA, S. P. Computation of Rayleigh damping coefficients for large systems. **Electronic Journal of Geotechnical Engineering**, v. 8C, 2003.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 1993.
- CHUNG, Y. S.; CHEON, C.; HAHN, S. Y. Reconstruction of dielectric cylinders using FDTD and topology optimization technique. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 36, n. 4, p. 956–959, 2000.
- CHURCHILL, D. L. et al. **Strain energy harvesting for wireless sensor networks** Smart Structures and Materials 2003 Conference. **Anais...**San Diego, CA: 2003
- COMSOL. **Structural Mechanics Module User's Guide**.COMSOL Multiphysics V.4.3, , 2012.
- CONCEIÇÃO, C. A. A hierarchical genetic algorithm with age structure for multimodal optimal design of hybrid composites. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 31, n. 4, p. 280–294, 2006.
- COOK, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. 1st. ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1995.
- COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. New York, NY: John Wiley & Sons Inc, 2001.
- CORMEN, T. H. et al. **Introduction to algorithms**. 3rd. ed. Cambridge, Mass: MIT Press, 2009.
- DA SILVEIRA, O. A. A.; FONSECA, J. S. O.; SANTOS, I. F. Actuator topology design using the controllability Gramian. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 51, n. 1, p. 145–157, 2015.
- DAHL, J.; JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension. Design of filters and pulse modulators. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, n. 6, p. 585–595, 2008.
- DANTZIG, G. B.; ORDEN, A.; WOLFE, P. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 5, n. 2, p. 183–195, 1955.
- DAVIS, J. R. **Tensile Testing**. 2nd. ed. Materials Park, OH: ASTM International., 2004.
- DE FARIA, A. R. Optimization of composite structures under multiple load cases using a discrete approach based on lamination parameters. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 104, n. 9, p. 827–843, 2015.
- DE GODOY, T. C.; TRINDADE, M. A. Modeling and analysis of laminate composite plates with embedded activepassive piezoelectric networks. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, n. 2, p. 194–216, 2011.

- DE GODOY, T. C.; TRINDADE, M. A. Effect of Parametric Uncertainties on the Performance of a Piezoelectric Energy Harvesting Device. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 34, n. 2, p. 552–560, 2012.
- DE LEON, D. M. et al. Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 52, n. 5, p. 929–943, 2015.
- DIAZ, A. R.; BENDSØE, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. **Structural Optimization**, v. 4, n. 1, p. 17–22, 1992.
- DJORDJEVIC, A. R. et al. Wideband Frequency-Domain Characterization of FR-4 and Time-Domain Causality. v. 43, n. 4, p. 662–667, 2001.
- DONOSO, A.; BELLIDO, J. C. Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 38, n. 4, p. 347–356, 2009.
- DOS SANTOS, H. F. L.; TRINDADE, M. A. Structural vibration control using extension and shear active-passive piezoelectric networks including sensitivity to electrical uncertainties. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 33, n. 3, p. 287–301, 2011.
- DU, J.; OLHOFF, N. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - Part I: New computational approach for 2D problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 27, n. 3, p. 151–165, 2004a.
- DU, J.; OLHOFF, N. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - Part II: Algorithm and examples for 3D problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 27, n. 3, p. 166–177, 2004b.
- DURNEY, C. H.; HARRIS, L. D.; ALLEY, C. L. **Electric Circuits: Theory and Engineering Applications**. 1st. ed. New York, NY: CBS College Publishing, 1982.
- DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, n. 8, p. 1453–1478, 1998.
- EDERY-AZULAY, L.; ABRAMOVICH, H. Active damping of piezo-composite beams. **Composite Structures**, v. 74, n. 4, p. 458–466, 2006a.
- EDERY-AZULAY, L.; ABRAMOVICH, H. Augmented damping of a piezo-composite beam using extension and shear piezoceramic transducers. **Composites Part B: Engineering**, v. 37, n. 4–5, p. 320–327, 2006b.
- EL-SABBAGH, A.; BAZ, A. Maximization of the harvested power from piezoelectric bimorphs with multiple electrodes under dynamic excitation. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 11, p. 1232–1241, 2011.
- ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. **Applied Mechanics Reviews**, v. 54, n. 4, p. 331–390, 2001.
- FABIEN, B. C. The influence of failure criteria on the design optimization of stacked-ply composite flywheels. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 6, p. 507–517, 2007.
- FRECKER, M. I. et al. Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 119, n. 2, p. 238–245, 1997.
- FRIEND, J.; NAKAMURA, K.; UEHA, S. A traveling-wave, modified ring linear piezoelectric microactuator with enclosed piezoelectric elements - The “scream” actuator.

- IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 52, n. 8, p. 1343–1353, 2005.
- FULLER, C. R.; ELLIOTT, S. J.; NELSON, P. A. **Active Control of Vibration**. 1st. ed. London: Academic Press, 1996.
- GAO, T.; ZHANG, W.; DUYSINX, P. A bi-value coding parameterization scheme for the discrete optimal orientation design of the composite laminate. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 91, n. 1, p. 98–114, 2012.
- GASNIER, P. et al. An autonomous piezoelectric energy harvesting IC based on a synchronous multi-shot technique. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, v. 49, n. 7, p. 1561–1570, 2014.
- GIBERT, J. M.; AUSTIN, E. M. **Inclusion of piezoelectric polarization in the design of a flextensional actuator** Smart Structures and Materials 2004: Modeling, Signal Processing, and Control. **Anais...**2004
- GIBERT, J. M.; AUSTIN, E. M. Demonstration of optimizing piezoelectric polarization in the design of a flextensional actuator. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 6, p. 471–480, 2007.
- GOODRICH, M.; TAMASSIA, R. **Data structures and algorithms in Java**. New York, NY: JohnWiley & Sons, 2010.
- GRANT, M.; BOYD, S. **CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1**. Disponível em: <<http://cvxr.com/cvx>>.
- GRANT, M. C.; BOYD, S. P. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In: **Lecture Notes in Control and Information Sciences**. 1st Ed ed. London: Springer-Verlag Limited, 2008. v. 371p. 95–110.
- GUEST, J. K.; PREVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238–254, 2004.
- HA, Y.; CHO, S. Design sensitivity analysis and topology optimization of eigenvalue problems for piezoelectric resonators. **Smart Materials & Structures**, v. 15, n. 6, p. 1513–1524, 2006.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3rd. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
- HAGEDORN, F. et al. Impedance matching for broadband piezoelectric energy harvesting. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 476, p. 12083, 2013.
- HAJELA, P.; LEE, E. Topological optimization of rotorcraft subfloor structures for crashworthiness considerations. **Advances in Structural Optimization**, p. 131–142, 1994.
- HAMMER, V. B.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 2, p. 85–92, 2000.
- HASHIMOTO, K. Y. Demands of highly piezoelectric materials for radio frequency acoustic wave devices. **Physica Status Solidi (A) Applications and Materials Science**, v. 208, n. 5, p. 1084–1092, 2011.
- HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure. **Computers & Structures**, v. 69, n. 6, p. 707–717, 1998a.

- HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization equations. **Computers & Structures**, v. 69, n. 6, p. 719–738, 1998b.
- HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria. **Computers & Structures**, v. 69, n. 6, p. 739–756, 1998c.
- HEHN, T.; MANOLI, Y. **CMOS Circuits for Piezoelectric Energy Harvesters**. 1st. ed. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2015. v. 38
- HOLLAND, R. Representation of Dielectric, Elastic, and Piezoelectric Losses by Complex Coefficients. **IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics**, v. 14, n. 1, p. 18–20, 1967.
- HUANG, B.; KIM, H. S.; YOON, G. H. Modeling of a partially debonded piezoelectric actuator in smart composite laminates. **Smart Materials and Structures**, v. 24, n. 7, p. 75013, 2015.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. 1st. ed. Englewood Cliffs, N. Y.: Prentice-Hall, 1987.
- IEEE ULTRASONICS FERROELECTRICS AND FREQUENCY CONTROL SOCIETY; AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE. **IEEE Standard on Piezoelectricity**New York, NYANSI/IEEE Std 176-1987, , 1988.
- IGA, A. et al. Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, n. 11–12, p. 2721–2732, 2009.
- IJSSELMUIDEN, S. T.; ABDALLA, M. M.; GÜRDAL, Z. Implementation of Strength-Based Failure Criteria in the Lamination Parameter Design Space. **AIAA Journal**, v. 46, n. 7, p. 1826–1834, 2008.
- IKEDA, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. 1st. ed. Oxford, Oxfordshire: Oxford University Press, 1996.
- IRVING, R. S. **Integers, Polynomials, and Rings: A Course in Algebra**. 1st. ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2004.
- JANG, H. H. et al. Dynamic Response Topology Optimization in the Time Domain Using Equivalent Static Loads. **AIAA Journal**, v. 50, n. 1, p. 226–234, 2012.
- JENSEN, J. S.; NAKSHATRALA, P. B.; TORTORELLI, D. A. On the consistency of adjoint sensitivity analysis for structural optimization of linear dynamic problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 5, p. 831–837, 2014.
- JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization: low-loss waveguide bends. **Applied Physics Letters**, v. 84, n. 12, p. 2022–2024, 2004.
- JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Topology optimization of photonic crystal structures: a high-bandwidth low-loss T-junction waveguide. **Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics**, v. 22, n. 6, p. 1191–1198, 2005.
- JOG, C. S. Topology Design of Structures Subjected To Periodic Loading. **Journal of Sound and Vibration**, v. 253, n. 3, p. 687–709, 2002.
- JOHNK, C. T. A. **Engineering Electromagnetic Fields and Waves**. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1988.
- JONES, M. H. **A Practical Introduction to Electronic Circuits**. 3rd. ed. New York, NY:

Cambridge University Press, 1995.

KANG, B. S.; CHOI, W. S.; PARK, G. J. Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement. **Computers and Structures**, v. 79, n. 2, p. 145–154, 2001.

KANG, Z.; TONG, L. Y. Integrated optimization of material layout and control voltage for piezoelectric laminated plates. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 19, n. 8, p. 889–904, 2008a.

KANG, Z.; TONG, L. Y. Topology optimization-based distribution design of actuation voltage in static shape control of plates. **Computers & Structures**, v. 86, n. 19–20, p. 1885–1893, 2008b.

KANG, Z.; WANG, X. M. Topology optimization of bending actuators with multilayer piezoelectric material. **Smart Materials & Structures**, v. 19, n. 7, 2010.

KAPURIA, S.; YASIN, M. Y. Active vibration suppression of multilayered plates integrated with piezoelectric fiber reinforced composites using an efficient finite element model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 16, p. 3247–3265, 2010.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear-programming. **Combinatorica**, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.

KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials**. 2nd. ed. Boca Ratón, FL: Taylor & Francis Group, LLC, 2006.

KELLER, D. Optimization of ply angles in laminated composite structures by a hybrid, asynchronous, parallel evolutionary algorithm. **Composite Structures**, v. 92, n. 11, p. 2781–2790, 2010.

KHOSRAVI, P.; SEDAGHATI, R. Design of laminated composite structures for optimum fiber direction and layer thickness, using optimality criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, n. 2, p. 159–167, 2008.

KIM, C.; SHIN, J. W. Topology Optimization of Piezoelectric Materials and Application to the Cantilever Beams for Vibration Energy Harvesting. **International Journal of Precision Engineering and Manufacturing**, v. 14, n. 11, p. 1925–1931, 2013.

KIM, J.-S.; KIM, C.-G.; HONG, C.-S. Optimum design of composite structures with ply drop using genetic algorithm and expert system shell. **Composite Structures**, v. 46, n. 2, p. 171–187, 1999.

KIM, J. E. et al. Multi-physics interpolation for the topology optimization of piezoelectric systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 49–52, p. 3153–3168, 2010.

KIYONO, C. Y. **Projeto de Transdutores Piezocompósitos de Casca Multi-Camada Utilizando o Método de Otimização Topológica**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2013.

KIYONO, C. Y. et al. On the optimization of HDD arms with piezoelectric actuation. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 88, p. 118–127, 2014.

KIYONO, C. Y. et al. A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design. **Composite Structures**, v. 156, p. 10–19, 2016.

KIYONO, C. Y.; PÉREZ, N.; SILVA, E. C. N. Determination of full piezoelectric complex parameters using gradient-based optimization algorithm. **Smart Materials and Structures**, v. 25, n. 2, p. 25019, 2016a.

- KIYONO, C. Y.; PÉREZ, N.; SILVA, E. C. N. Determination of full piezoelectric complex parameters using gradient-based optimization algorithm. **Smart Materials and Structures**, v. 25, n. 2, p. 25019, 2016b.
- KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. Design of laminated piezocomposite shell transducers with arbitrary fiber orientation using topology optimization approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 90, n. 12, p. 1452–1484, 2012.
- KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. Optimal design of laminated piezocomposite energy harvesting devices considering stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 105, n. 12, p. 883–914, 2016.
- KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. A novel fiber optimization method based on Normal Distribution function with continuously varying fiber path. **Composite Structures**, v. 160, p. 503–515, 2017.
- KOC, B.; CAGATAY, S.; UCHINO, K. A piezoelectric motor using two orthogonal bending modes of a hollow cylinder. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 49, n. 4, p. 495–500, 2002.
- KOGISO, N. et al. Robust topology optimization for compliant mechanisms considering uncertainty of applied loads. **Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing**, v. 2, n. 1, p. 96–107, 2008.
- KÖGL, M.; BUCALEM, M. L. A family of piezoelectric MITC plate elements. **Computers & Structures**, v. 83, n. 15–16, p. 1277–1297, 2005a.
- KÖGL, M.; BUCALEM, M. L. Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements. **Computers & Structures**, v. 83, n. 15–16, p. 1153–1163, 2005b.
- KÖGL, M.; SILVA, E. C. N. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators. **Smart Materials & Structures**, v. 14, n. 2, p. 387–399, 2005.
- KOHN, R. V; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, I. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 113–137, 1986a.
- KOHN, R. V; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, II. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 39, n. 2, p. 139–182, 1986b.
- KOHN, R. V; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, III. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 39, n. 3, p. 353–377, 1986c.
- KOLEDINTSEVA, M. Y. et al. Wide-band Lorentzian media in the FDTD algorithm. **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, v. 47, n. 2, p. 392–399, 2005.
- KROG, L. A.; OLHOFF, N. Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. **Computers & Structures**, v. 72, n. 4–5, p. 535–563, 1999.
- KUMAR, A. et al. Finite element analysis of vibration energy harvesting using lead-free piezoelectric materials: A comparative study. **Journal of Asian Ceramic Societies**, v. 2, n. 2, p. 138–143, 2014.
- KUO, B. C. **Automatic Control Systems**. 3rd. ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1975.
- LAKES, R. Shape-Dependent Damping in Piezoelectric Solids. **IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics**, v. 27, n. 4, p. 208–213, 1980.

- LANCZOS, C. **Variational Principles of Mechanics**. 4th. ed. New York: Dover Publications, 1986.
- LARSEN, U. D.; SIGMUND, O.; BOUWSTRA, S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v. 6, n. 2, p. 99–106, 1997.
- LAU, G. K.; DU, H. J.; LIM, M. K. Techniques to suppress intermediate density in topology optimization of compliant mechanisms. **Computational Mechanics**, v. 27, n. 5, p. 426–435, 2001.
- LEE, H.-A.; PARK, G.-J. Nonlinear dynamic response topology optimization using the equivalent static loads method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 283, p. 956–970, 2015.
- LEE, P. C. Y.; LIU, N. H.; BALLATO, A. Thickness vibrations of a piezoelectric plate with dissipation. **Ieee Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 51, n. 1, p. 52–62, 2004.
- LEE, S.; YOUN, B. D. A design and experimental verification methodology for an energy harvester skin structure. **Smart Materials and Structures**, v. 20, n. 5, p. 57001, 2011a.
- LEE, S.; YOUN, B. D. A New Piezoelectric Energy Harvesting Design Concept: Multimodal Energy Harvesting Skin. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 58, n. 3, p. 629–645, 2011b.
- LI, Y.; SAITOU, K.; KIKUCHI, N. Topology optimization of thermally actuated compliant mechanisms considering time-transient effect. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, n. 11, p. 1317–1331, 2004.
- LIN, Z. Q.; GEA, H. C.; LIU, S. T. Design of piezoelectric energy harvesting devices subjected to broadband random vibrations by applying topology optimization. **Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao**, v. 27, n. 5, p. 730–737, 2011.
- LINDGAARD, E.; LUND, E. A unified approach to nonlinear buckling optimization of composite structures. **Computers & Structures**, v. 89, n. 3–4, p. 357–370, 2011.
- LIU, B.; HAFTKA, R. T.; TROMPETTE, P. Maximization of buckling loads of composite panels using flexural lamination parameters. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1–2, p. 28–36, 2004.
- LUND, E. Buckling topology optimization of laminated multi-material composite shell structures. **Composite Structures**, v. 91, n. 2, p. 158–167, 2009.
- LUO, J. H.; GEA, H. C. Optimal bead orientation of 3D shell/plate structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 31, n. 1, p. 55–71, 1998.
- LURIE, K. A.; CHERKAEV, A. V.; FEDOROV, A. V. Regularization of optimal-design problems for bars and plates, part 1. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 37, n. 4, p. 499–522, 1982a.
- LURIE, K. A.; CHERKAEV, A. V.; FEDOROV, A. V. Regularization of optimal-design problems for bars and plates, part 2. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 37, n. 4, p. 523–543, 1982b.
- MA, Z. D. et al. Experimental validation and prototyping of optimum designs obtained from topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 31, n. 5, p. 333–343, 2006.
- MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H. C. Topological design for vibrating structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 121, n. 1–4, p. 259–280,

1995.

MAKKI, N.; POP-ILIEV, R. Piezoelectric power generation in tires. **SPIE**, n. May, p. 1–2, 2011.

MASE, G. T.; MASE, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. 2nd. ed. Boca Ratón, FL: CRC Press, 1999.

MAYER, R. R.; KIKUCHI, N.; SCOTT, R. A. Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 8, p. 1383–1403, 1996.

MEIROVITCH, L. **Computational Methods in Structural Dynamics**. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1980.

MEIROVITCH, L. **Methods of Analytical Dynamics**. 3rd. ed. Mineola, N. Y.: Dover Publications, 2003.

MELLO, L. A. M. et al. Design of quasi-static piezoelectric plate based transducers by using topology optimization. **Smart Materials and Structures**, v. 23, n. 2, p. 25035, 2014.

MELLO, L. A. M.; SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N. On response time reduction of electrothermomechanical MEMS using topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 247, p. 93–102, 2012.

MEZHERITSKY, A. V. Elastic, Dielectric, and Piezoelectric Losses in Piezoceramics. v. 51, n. 6, p. 695–707, 2004.

MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **Philosophical Magazine**, v. 8, n. 43–48, p. 589–597, 1904.

MIN, S. et al. Optimal topology design of structures under dynamic loads. **Structural Optimization**, v. 17, n. 2, p. 208–218, 1999.

MLEJNEK, H. P. Some aspects of the genesis of structures. **Structural Optimization**, v. 5, n. 1–2, p. 64–69, 1992.

MOHR, P. J.; TAYLOR, B. N.; NEWELL, D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. **Reviews of Modern Physics**, v. 80, n. 2, p. 633–730, 2008.

MOSSI, K. et al. Harvesting energy using a thin unimorph prestressed bender: geometrical effects. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 16, n. 3, p. 249–261, 2005.

MOULTON, T.; ANANTHASURESH, G. K. Micromechanical devices with embedded electro-thermal-compliant actuation. **Sensors and Actuators a-Physical**, v. 90, n. 1–2, p. 38–48, 2001.

MUMBY, S. J.; YUAN, J. Dielectric properties of FR-4 laminates as a function of thickness and the electrical frequency of the measurement. **Journal of Electronic Materials**, v. 18, n. 2, p. 287–292, 1989.

MUTHALIF, A. G. A.; NORDIN, N. H. D. Optimal piezoelectric beam shape for single and broadband vibration energy harvesting: Modeling, simulation and experimental results. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 54–55, p. 417–426, 2015.

NAGTEGAAL, J. C.; PRAGER, W. Optimal layout of a truss for alternative loads. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 15, n. 7, p. 583–592, 1973.

NAILLON, M.; COURSAINT, R. H.; BESNIER, F. Analysis of piezoelectric structures by a finite element method. **Acta Electronica**, v. 25, n. 4, p. 341–362, 1983.

- NAKASONE, P. H.; SILVA, E. C. N. Dynamic design of piezoelectric laminated sensors and actuators using topology optimization. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 21, n. 16, p. 1627–1652, 2010.
- NEVES, M. M.; RODRIGUES, H.; GUEDES, J. M. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. **Structural Optimization**, v. 10, n. 2, p. 71–78, 1995.
- NG, T. H.; LIAO, W. H. Sensitivity analysis and energy harvesting for a self-powered piezoelectric sensor. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 16, n. 10, p. 785–797, 2005.
- NGUYEN, T. V.; DEVGAN, A.; NASTOV, O. J. **Adjoint Transient Sensitivity Computation in Piecewise Linear Simulation** Design Automation Conference, 1998. Proceedings. **Anais...**San Francisco, CA: IEEE, 1998Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/724519/>>
- NIMO, A. et al. A device for 3D energy harvesting. **SPIE Newsroom**, p. 3–5, 2011.
- NISHIWAKI, S. et al. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 42, n. 3, p. 535–559, 1998.
- NISHIWAKI, S. et al. Topological design considering flexibility under periodic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 1, p. 4–16, 2000.
- NOH, J. Y.; YOON, G. H. Topology optimization of piezoelectric energy harvesting devices considering static and harmonic dynamic loads. **Advances in Engineering Software**, v. 53, p. 45–60, 2012.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 3rd. ed. New York: Prentice-Hall, 1997.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2nd. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice-Hall, 1999.
- PARK, K. IL et al. Piezoelectric BaTiO₃ thin film nanogenerator on plastic substrates. **Nano Letters**, v. 10, n. 12, p. 4939–4943, 2010.
- PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. Design of functionally graded structures using topology optimization. **Functionally Graded Materials VIII**, v. 492–493, p. 435–440, 2005.
- PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N.; LE, C. H. Optimal design of periodic functionally graded composites with prescribed properties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 38, n. 5, p. 469–489, 2009.
- PEDERSEN, C. B. W. Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 6–8, p. 653–678, 2004.
- PEDERSEN, N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 20, n. 1, p. 2–11, 2000.
- PEDERSEN, N. L. On design of fiber-nets and orientation for eigenfrequency optimization of plates. **Computational Mechanics**, v. 39, n. 1, p. 1–13, 2006.
- PIAT, R. et al. Minimal compliance design for metal-ceramic composites with lamellar microstructures. **Acta Materialia**, v. 59, n. 12, p. 4835–4846, 2011.
- PIÑEIRUA, M.; DOARÉ, O.; MICHELIN, S. Influence and optimization of the electrodes position in a piezoelectric energy harvesting flag. **Journal of Sound and Vibration**, v. 346, n. 1, p. 200–215, 2015.

- PINTO CORREIA, I. F. et al. Active control of axisymmetric shells with piezoelectric layers: A mixed laminated theory with a high order displacement field. **Computers and Structures**, v. 80, n. 27–30, p. 2265–2275, 2002.
- PLATT, S. R.; FARRITOR, S.; HAIDER, H. On low-frequency electric power generation with PZT ceramics. **IEEE-ASME Transactions on Mechatronics**, v. 10, n. 2, p. 240–252, 2005.
- POMEZANSKI, V.; QUERIN, O. M.; ROZVANY, G. I. N. CO-SIMP: Extended SIMP algorithm with direct Corner Contact Control. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, n. 2, p. 164–168, 2005.
- POULSEN, T. A. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 24, n. 5, p. 396–399, 2002.
- POULSEN, T. A. A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 57, n. 6, p. 741–760, 2003.
- PRAGER, W. A note on discretized michell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 3, p. 349–355, 1974.
- PRAGER, W. Nearly optimal design of trusses. **Computers & Structures**, v. 8, n. 3–4, p. 451–454, 1978.
- PULIDO, H. G.; SALAZAR, R. DE LA V. **Análisis y Diseño de Experimentos**. 2nd. ed. México, D. F.: McGraw-Hill Interamericana Editores S.A. de C.V., 2008. v. 1
- QIN, Y.; WANG, X.; WANG, Z. L. Microfibre-nanowire hybrid structure for energy scavenging. **Nature**, v. 451, n. February, p. 809–13, 2008.
- RAHMATALLA, S. F.; SWAN, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 27, n. 1–2, p. 130–135, 2004.
- RAULLI, M.; MAUTE, K. Topology optimization of electrostatically actuated microsystems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, n. 5, p. 342–359, 2005.
- RAY, M. C.; REDDY, J. N. Optimal control of thin circular cylindrical laminated composite shells using active constrained layer damping treatment. **Smart Materials & Structures**, v. 13, n. 1, p. 64–72, 2004a.
- RAY, M. C.; REDDY, J. N. Performance of piezoelectric fiber-reinforced composites for active structural-acoustic control of laminated composite plates. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 51, n. 11, p. 1477–1490, 2004b.
- RAY, M. C.; REDDY, J. N. Active control of laminated cylindrical shells using piezoelectric fiber reinforced composites. **Composites Science and Technology**, v. 65, n. 7–8, p. 1226–1236, 2005.
- RAY, M. C.; REDDY, J. N. Active damping of laminated cylindrical shells conveying fluid using 1-3 piezoelectric composites. **Composite Structures**, v. 98, p. 261–271, 2013.
- REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**. 2nd. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004a.
- REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. New York: Oxford University Press, 2004b.
- REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3rd. ed. New York:

McGraw-Hill, 2006.

RICHARDS, C. D. et al. Efficiency of energy conversion for devices containing a piezoelectric component. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 14, n. 5, p. 717–721, 2004.

ROCHA, J. G. et al. Energy Harvesting From Piezoelectric Materials Fully Integrated in Footwear. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 57, n. 3, p. 813–819, 2010.

ROUNDY, S. et al. Improving power output for vibration-based energy scavengers. **IEEE Pervasive Computing**, v. 4, n. 1, p. 28–36, 2005.

ROZVANY, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 90–108, 2001.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, v. 4, n. 3–4, p. 250–252, 1992.

RUBIO, W. M. et al. Topology optimized design, microfabrication and characterization of electro-thermally driven microgripper. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 20, n. 6, p. 669–681, 2009.

RUIZ, D.; BELLIDO, J. C.; DONOSO, A. Design of piezoelectric modal filters by simultaneously optimizing the structure layout and the electrode profile. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, n. 4, p. 715–730, 2016.

RUPP, C. J. **Topology Optimization for Wave Propagation and Vibration Phenomena in Elastic and Piezoelectric Solids**. Boulder, CO: University of Colorado, 2009.

RUPP, C. J. et al. Design of Piezoelectric Energy Harvesting Systems: A Topology Optimization Approach Based on Multilayer Plates and Shells. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 20, n. 16, p. 1923–1939, 2009.

RUPP, C. J.; DUNN, M. L.; MAUTE, K. Analysis of piezoelectric energy harvesting systems with non-linear circuits using the harmonic balance method. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 21, n. 14, p. 1383–1396, 2010.

SALAS, R. A. et al. A Topology Optimization Formulation for Transient Design of Multi-entry Laminated Piezocomposite Energy Harvesting Devices Coupled With Electrical Circuit. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 1–37, [s.d.].

SALAS, R. A. **Projeto de microsistemas eletrotermomecânicos (ETM) utilizando o método de otimização topológica (MOT) considerando a resposta térmica transiente**. (Dissertação de Mestrado). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012.

SALAS, R. A.; MELLO, L. A. M. **Design of Electrothermomechanical (ETM) MEMS Using Topology Optimization Method Considering the Thermal Transient Response** 21th International Congress of Mechanical Engineering COBEM. **Anais...**Natal-RN: 2011

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N. **Dynamic Design of Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Using Topology Optimization Method**Kô's, 2014.

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Designed for Topology Optimization Considering Simultaneously Harmonic and Transient Responses**São Paulo, 2014a.

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Designed for Topology Optimization Considering Simultaneously Harmonic and Transient Responses**Blucher Material Science Proceedings. **Anais...**São Paulo: Blucher, 2014bDisponível em: <<http://www.proceedings.blucher.com.br/article-details/laminated->

piezocomposites-structures-laps-designed-for-topology-optimization-considering-simultaneously-harmonic-and-transient-responses-10773>

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Topology Optimization Applied to the Dynamic Design of the Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Used for purposes of Energy Harvesting**Sydney, 2015a.

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Dynamic Design Using Topology Optimization of Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) with Coupled Electric Circuits for Energy Harvesting Purposes**San Diego, CA, 2015b.

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Designed for Topology Optimization Considering the Transient Response**Rio de Janeiro, 2015c.

SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. **Laminated Piezocomposites Structures (LAPS) Designed for Topology Optimization Considering the Transient Response**XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais...**Rio de Janeiro: SWGE, 2015dDisponível em: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/>>

SAMAL, M. K. et al. Nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields: Part-I: 3-D finite element formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 6, p. 1422–1436, 2006a.

SAMAL, M. K. et al. Nonlinear behaviour of piezoceramics under weak electric fields. Part-II: Numerical results and validation with experiments. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 6, p. 1437–1458, 2006b.

SAMAL, M. K.; SESHU, P.; DUTTA, B. K. An analytical formulation in 3D domain for the nonlinear response of piezoelectric slabs under weak electric fields. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 14–15, p. 4656–4672, jul. 2007.

SANCHEZ-ROJAS, J. L. et al. Modal optimization and filtering in piezoelectric microplate resonators. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 20, n. 5, 2010.

SARAVANOS, D. A.; CHRISTOFOROU, A. P. Low-energy impact of adaptive cylindrical piezoelectric-composite shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 8, p. 2257–2279, 2002.

SARDAN, O. et al. Rapid prototyping of nanotube-based devices using topology-optimized microgrippers. **Nanotechnology**, v. 19, n. 49, 2008.

SCHOEFTNER, J.; BUCHBERGER, G. A contribution on the optimal design of a vibrating cantilever in a power harvesting application - Optimization of piezoelectric layer distributions in combination with advanced harvesting circuits. **Engineering Structures**, v. 53, p. 92–101, 2013.

SHERMAN, C. H.; BUTLER, J. L. **Transducer and arrays for underwater sound**. 1st. ed. New York, NY: Springer Science+Business Media, 2007.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997.

SIGMUND, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. **Philosophical Transactions of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences**, v. 358, n. 1765, p. 211–227, 2000.

SIGMUND, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I: one-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n.

49–50, p. 6577–6604, 2001a.

SIGMUND, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part II: two-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 49–50, p. 6605–6627, 2001b.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001c.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 4–5, p. 401–424, 2007.

SIGMUND, O. On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 5, p. 589–596, 2011.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998.

SILVA, E. C. N. et al. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 172, n. 1–4, p. 241–271, 1999.

SILVA, E. C. N.; FONSECA, J. S. O.; KIKUCHI, N. Optimal design of piezoelectric microstructures. **Computational Mechanics**, v. 19, n. 5, p. 397–410, 1997.

SILVA, E. C. N.; FONSECA, J. S. O.; KIKUCHI, N. Optimal design of periodic piezocomposites. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 159, n. 1–2, p. 49–77, 1998.

SILVA, E. C. N.; KIKUCHI, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization. **Smart Materials & Structures**, v. 8, n. 3, p. 350–364, 1999.

SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Topology optimization design of flextensional actuators. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 47, n. 3, p. 657–671, 2000.

SMITH, W. A. **The role of piezocomposites in ultrasonic transducers** 1989 Ultrasonics Symposium. **Anais...**Montreal: Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium, 1989Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=67088>>

SOARES, C. M. M. et al. A discrete model for the optimal design of thin composite plate-shell type structures using a two-level approach. **Composite Structures**, v. 30, n. 2, p. 147–157, 1995.

SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M.; MATEUS, H. C. A model for the optimum design of thin laminated plate-shell structures for static, dynamic and buckling behaviour. **Composite Structures**, v. 32, n. 1–4, p. 69–79, 1995.

SODANO, H. A.; INMAN, D. J.; PARK, G. Comparison of piezoelectric energy harvesting devices for recharging batteries. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 16, n. 10, p. 799–807, 2005.

SODANO, H. A.; LLOYD, J.; INMAN, D. J. An experimental comparison between several active composite actuators for power generation. **Smart Materials & Structures**, v. 15, n. 5, p. 1211–1216, 2006.

SODANO, H. A.; PARK, G.; INMAN, D. J. Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. **Strain**, v. 40, n. 2, p. 49–58, 2004.

SPANNER, K.; KOC, B. Piezoelectric Motors, an Overview. **Actuators**, v. 5, n. 1, p. 6, 2016.

- STANTON, S. C. et al. Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification. **Journal of Applied Physics**, v. 108, n. 7, p. 0–9, 2010.
- STEGMANN, J.; LUND, E. Discrete material optimization of general composite shell structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 14, p. 2009–2027, 2005.
- STOYKOV, N. S. et al. Finite-element time-domain algorithms for modeling linear Debye and Lorentz dielectric dispersions at low frequencies. **IEEE transactions on bio-medical engineering**, v. 50, n. 9, p. 1100–1107, 2003.
- STRANG, G.; KOHN, R. V. Hencky-Prandtl nets and constrained Michell trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 36, n. 2, p. 207–222, 1983.
- SUN, D. M. et al. A piezoelectric linear ultrasonic motor with the structure of a circular cylindrical stator and slider. **Smart Materials & Structures**, v. 19, n. 4, p. 9, 2010.
- SUN, H. et al. Vibration suppression of a hard disk driver actuator arm using piezoelectric shunt damping with a topology-optimized PZT transducer. **Smart Materials & Structures**, v. 18, n. 6, p. 13, 2009.
- SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A homogenization method for shape and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 3, p. 291–318, 1991.
- SVANBERG, K. The Method of Moving Asymptotes - A new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 2, p. 359–373, 1987.
- SVANBERG, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. **Siam Journal on Optimization**, v. 12, n. 2, p. 555–573, 2001.
- SVENSSON, C.; DERMER, G. E. Time domain modeling of lossy interconnects. **IEEE Transactions on Advanced Packaging**, v. 24, n. 2, p. 191–196, 2001.
- TAKEZAWA, A. et al. Topology optimization for designing strain-gauge load cells. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, n. 3, p. 387–402, 2010.
- TAKEZAWA, A. et al. Design methodology of piezoelectric energy-harvesting skin using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 2, p. 281–297, 2014.
- TAKEZAWA, A. et al. Topology optimization of damping material for reducing resonance response based on complex dynamic compliance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 365, p. 230–233, 2016.
- THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L. **Calculus and Analytic Geometry**. 9th. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996.
- THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials. **Structural Optimization**, v. 5, n. 1–2, p. 108–115, 1992.
- TIERSTEN, H. F.; SHAM, T. L. On the necessity of including electrical conductivity in the description of piezoelectric fracture in real materials. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 45, n. 1, p. 1–3, 1998.
- TO, C. W. S.; CHEN, T. Optimal control of random vibration in plate and shell structures with distributed piezoelectric components. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 49, n. 12, p. 1389–1398, 2007.

- TOPAL, U. Multiobjective optimization of laminated composite cylindrical shells for maximum frequency and buckling load. **Materials and Design**, v. 30, n. 7, p. 2584–2594, 2009.
- TRAJKOV, T. N.; KOPPE, H.; GABBERT, U. Vibration control of a funnel-shaped shell structure with distributed piezoelectric actuators and sensors. **Smart Materials & Structures**, v. 15, n. 4, p. 1119–1132, 2006.
- TURTELTAUB, S. Optimal material properties for transient problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, n. 2, p. 157–166, 2001.
- TURTELTAUB, S. Optimal non-homogeneous composites for dynamic loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, n. 2, p. 101–112, 2005.
- UCHINO, K.; GINIEWICZ, J. **Micromechatronics**. New York: Marcel Dekker, 2003.
- UCHINO, K.; HIROSE, S. Loss Mechanisms in Piezoelectrics: How to Measure Different Losses Separately. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, v. 48, n. 1, p. 307–321, 2001.
- UYANIK, H.; MECITOĞLU, Z. Active vibration control of a laminated composite plate subjected to blast load. **ircraft Engineering and Aerospace Technology**, v. 81, n. 4, p. 308–315, 2009.
- VARELIS, D.; SARAVANOS, D. A. Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 5–6, p. 1519–1538, 2004.
- VARELIS, D.; SARAVANOS, D. A. Coupled mechanics and finite element for non-linear laminated piezoelectric shallow shells undergoing large displacements and rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 66, n. 8, p. 1211–1233, 2006.
- VATANABE, S. L.; PAULINO, G. H.; SILVA, E. C. N. Influence of pattern gradation on the design of piezocomposite energy harvesting devices using topology optimization. **Composites Part B-Engineering**, v. 43, n. 6, p. 2646–2654, 2012.
- VON WAGNER, U. Non-linear longitudinal vibrations of non-slender piezoceramic rods. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 673–688, 2004.
- VUJANOVIC, B. D.; JONES, S. W. **Variational Methods in Nonconservative Phenomena**. 1st. ed. Londres: Academic Press, 1989.
- WADBRO, E.; BERGGREN, M. Topology optimization of an acoustic horn. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 1–3, p. 420–436, 2006.
- WALKER, M.; SMITH, R. E. A technique for the multiobjective optimisation of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, v. 62, n. 1, p. 123–128, 2003.
- WANG, J. S.; OSTERGAARD, D. F. **Finite Element-Electric Circuit Coupled Simulation Method for Piezoelectric Transducer** Ultrasonics Symposium, 1999. Proceedings. 1999 IEEE. **Anais...**1999
- WANG, Q.; WU, N. Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. **Smart Materials and Structures**, v. 21, n. 8, p. 85013, 2012.
- WANG, S. Y.; KANG, J.; NOH, J. Topology optimization of a single-phase induction motor for rotary compressor. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 40, n. 3, p. 1591–1596, 2004.
- WANG, S. Y.; QUEK, S. T.; ANG, K. K. Dynamic stability analysis of finite element

modeling of piezoelectric composite plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 3–4, p. 745–764, 2004.

WANG, S. Y.; TAI, K.; QUEK, S. T. Topology optimization of piezoelectric sensors/actuators for torsional vibration control of composite plates. **Smart Materials & Structures**, v. 15, n. 2, p. 253–269, 2006.

WANG, X.; LIN, L. Dimensionless optimization of piezoelectric vibration energy harvesters with different interface circuits. **Smart Materials and Structures**, v. 22, n. 8, p. 85011, 2013.

WANG, Z. G. et al. A Micropower Miniature Piezoelectric Actuator for Implantable Middle Ear Hearing Device. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 58, n. 2, p. 452–458, 2011.

WATSON, B.; FRIEND, J.; YEO, L. Piezoelectric ultrasonic resonant motor with stator diameter less than 250 μm : the Proteus motor. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 19, n. 2, p. 22001, 2009.

WILLIAMS, R. B. et al. **Manufacturing and Mechanics-Based Characterization of Macro Fiber Composite Actuators**. Proceedings of IMECE2002 Adaptive Structures and Materials Systems. **Anais...** New Orleans, LA: ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition., 2002Disponível em: <<http://link.aip.org/link/ASMECP/v2002/i36258/p79/s1&Agg=doi>>

WOLFE, P. The Simplex Method for quadratic programming. **Econometrica**, v. 27, n. 3, p. 382–398, 1959.

WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. 2nd. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. 1st. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers & Structures**, v. 58, n. 6, p. 1067–1073, 1996.

YADAV, V. et al. **The Effect of Frequency and Temperature on Dielectric Properties of Pure Poly Vinylidene Fluoride (PVDF) Thin Films** Proceedings of the International MultiConference of Enginners and Computer Scientists. **Anais...** Hong Kong: 2010Disponível em: <<http://www.doaj.org/doaj?func=fulltext&aId=550438>>

YANG, J. **Special Topics in the Theory of Piezoelectricity**. 1st. ed. New York, NY: Springer Science+Business Media, Inc., 2009.

YIN, L. Z.; ANANTHASURESH, G. K. A novel topology design scheme for the multi-physics problems of electro-thermally actuated compliant micromechanisms. **Sensors and Actuators a-Physical**, v. 97–8, p. 599–609, 2002.

YOO, J.; KIKUCHI, N. Topology optimization in magnetic fields using the homogenization design method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 10, p. 1463–1479, 2000.

YOON, G. H. Topological design of heat dissipating structure with forced convective heat transfer. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 24, n. 6, p. 1225–1233, 2010.

YOON, G. H. Topological layout design of electro-fluid-thermal-compliant actuator. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 209–212, p. 28–44, 2012.

YOON, G. H. Stress-based topology optimization method for steady-state fluid-structure interaction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 278, p. 499–523, 2014.

- YOON, H. S.; WASHINGTON, G.; DANAK, A. Modeling, optimization, and design of efficient initially curved piezoceramic unimorphs for energy harvesting applications. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 16, n. 10, p. 877–888, 2005.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, L. **Sears and Zemansky's University Physics : With Modern Physics**. 12th. ed. San Francisco: Pearson Addison-Wesley, 2008.
- ZHANG, X. F.; HU, S. D.; TZOU, H. S. A generic double-curvature piezoelectric shell energy harvester: Linear/nonlinear theory and applications. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 26, p. 7286–7298, 2014.
- ZHANG, X.; KANG, Z. Dynamic topology optimization of piezoelectric structures with active control for reducing transient response. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 281, n. 1, p. 200–219, 2014a.
- ZHANG, X.; KANG, Z.; LI, M. Topology optimization of electrode coverage of piezoelectric thin-walled structures with CGVF control for minimizing sound radiation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 5, p. 799–814, 2014.
- ZHANG, X. P.; KANG, Z. Topology optimization of piezoelectric layers in plates with active vibration control. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 25, n. 6, p. 697–712, 2014b.
- ZHANG, Y. Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the matlab environment. **Optimization Methods & Software**, v. 10, n. 1, p. 1–31, 1998.
- ZHANG, Y.; BAKR, M. H. **Transient adjoint sensitivity analysis exploiting FDTD** IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. **Anais...**Montreal, Canada: IEEE, 2012Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6259375/>>
- ZHANG, Y.; ZHANG, X.; XIE, S. Adaptive vibration control of a cylindrical shell with laminated PVDF actuator. **Acta Mechanica**, v. 210, n. 1–2, p. 85–98, 2010.
- ZHENG, B.; CHANG, C. J.; GEA, H. C. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 38, n. 1, p. 17–23, 2009a.
- ZHENG, B.; CHANG, C. J.; GEA, H. C. Topology optimization with design-dependent pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 38, n. 6, p. 535–543, 2009b.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1–3, p. 309–336, 1991.
- ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, n. 2, p. 152–158, 2001.
- ZHU, B.; ZHANG, X.; FATIKOW, S. A multi-objective method of hinge-free compliant mechanism optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 3, p. 431–440, 2014.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **Finite Element Method - The Basis**. 5th. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 1
- ZILL, D. G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications**. 6th. ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing, 1997.
- ZIZYS, D. et al. Segmentation of a vibro-shock cantilever-type piezoelectric energy harvester operating in higher transverse vibration modes. **Sensors**, v. 16, n. 1, p. 1–14, 2015.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PIEZELÉTRICAS UTILIZANDO PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

O princípio de Hamilton aplicado no domínio contínuo Ω (ver Figura 3) tem a forma:

$$\delta \mathcal{A} = \delta \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}, \dot{u}_i) d\Omega dt = 0 \quad (485)$$

em que $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ e δ representam a integral de ação, a função de densidade lagrangeana e o operador variacional, respectivamente. As variáveis de estado (definidas como as funções incógnitas do sistema) a serem determinadas a partir da estacionaridade da integral de ação são o campo escalar de voltagem ϕ e o campo vetorial de deslocamentos u_i . A função de densidade lagrangeana para o volume contínuo Ω é:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} \quad (486)$$

sendo $\mathcal{K}$ a densidade volumétrica de energia cinética e $\mathcal{V}$ a densidade volumétrica de energia potencial em presença de forças conservativas. A densidade de energia cinética em função da velocidade $\dot{u}_i$ do sistema, pode ser expressa como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho_1 \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (487)$$

sendo ρ_1 a densidade de massa. A densidade de energia potencial presente no corpo devido a forças conservativas possui três parcelas, uma devida à deformação mecânica ($\mathcal{V}_{\text{def}}$), outra por causa do campo gravitacional ($\mathcal{V}_{\text{grav}}$) e uma última quando submetido à ação de um campo eletrostático ($\mathcal{V}_{\text{ele}}$). Assim, a densidade de energia potencial e a parcela devida à deformação têm a forma:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{def}} + \mathcal{V}_{\text{grav}} + \mathcal{V}_{\text{ele}} \quad (488)$$

$$\mathcal{V}_{\text{def}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) \quad (489)$$

lembrando que o tensor de deformação Green-Lagrange linearizado é $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$ e dado por:

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (490)$$

e, por sua vez, E_i é o campo elétrico, C_{ijkl}^E é o tensor de módulo elástico de ordem 4 (obtido em campo elétrico constante) e e_{0ijk} é o tensor piezoeletrico de ordem 3 (o qual é o tensor de acoplamento entre os domínios envolvidos no fenômeno de piezeletricidade). A densidade de energia potencial gravitacional vem dada por:

$$\mathcal{V}_{\text{grav}} = -f_{bi}u_i \quad (491)$$

onde f_{bi} são as forças de corpo. Enquanto a parcela devida à energia eletrostática é:

$$\mathcal{V}_{\text{ele}} = \frac{1}{2}E_i \left(\epsilon_{0ij}^E \phi_{,j} - e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) + \rho_0 \phi \quad (492)$$

em que ϕ é a voltagem e ϵ_{0ij}^E é o tensor dielétrico de ordem 2 (obtido em deformação mecânica constante) e o termo $\rho_0 \phi$ representa o “trabalho elétrico” efetuado pela densidade de cargas volumétrica ρ_0 , através de uma voltagem ϕ (o que seria análogo ao trabalho mecânico efetuado por uma força de corpo, ver eq.(491)). Cabe lembrar que, o campo elétrico E_i está relacionado com a voltagem ϕ por:

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (493)$$

pelo fato de que o campo E_i é irrotacional. Cabe lembrar que sob a hipótese de um campo elétrico quase estático e irrotacional, a permeabilidade magnética no vácuo μ_0 é considerada desprezível e, portanto, a velocidade da luz infinita ($\mu_0 \rightarrow 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \rightarrow \infty$). Desse modo a resposta no domínio elétrico é instantânea perante mudanças no domínio estrutural pelo fato de que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas (velocidade da luz) é maior do que nas ondas mecânicas (velocidade do som num meio material), (CAUGHEY; OKELLY, 1965). Desse modo, a função de densidade lagrangeana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_1 \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) + f_{bi} u_i - \frac{1}{2} E_i \left(\epsilon_{0ij}^E \phi_{,j} - e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) - \rho_0 \phi \quad (494)$$

somando os termos segundo e quarto do lado direito da eq.(494) tem-se que:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) + \frac{1}{2} E_i \left(\epsilon_{0ij}^E \phi_{,j} - e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) = \frac{1}{2} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{0ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \epsilon_{0ij}^E E_i E_j \right) \quad (495)$$

sendo $\mathcal{H}$ denominada densidade de entalpia elétrica, conforme o padrão do IEEE para piezeletricidade (IEEE, 1988). A análise feita aqui chega ao mesmo resultado utilizando somente considerações energéticas que envolvem a ação de campos conservativos. Portanto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_1 \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{0ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \epsilon_{0ij}^E E_i E_j \right) + f_{bi} u_i - \rho_0 \phi \quad (496)$$

logo para um sistema conservativo, envolvendo efeitos mecânicos, elétricos e piezelétricos, a condição de estacionaridade na integral de ação conduz a:

$$\delta \mathcal{A}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}, \dot{u}_i) = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\rho_1 \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) \delta \varepsilon_{ij} + f_{bi} \delta u_i + \left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) \delta E_i - \rho_0 \delta \phi \right] d\Omega dt = 0 \quad (497)$$

integrando por partes os termos em $\delta \dot{u}_i$, $\delta \varepsilon_{ij}$ e $\delta E_i = -\delta \phi_{,i}$ e aplicando o teorema da divergência (THOMAS; FINNEY, 1996) nos termos correspondentes com as condições de contorno obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} = & \int_0^t \int_{d\Omega} \left[\left[-\frac{d}{dt} (\rho_1 \dot{u}_i) + \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right)_{,j} + f_{bi} \right] \delta u_i + \left[\left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right)_{,i} - \rho_0 \right] \delta \phi \right] d\Omega dt + \\ & \left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \left[\int_0^t \left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) \hat{n}_i \delta \phi dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (498) \end{aligned}$$

sendo $\hat{n}_i$ um vetor unitário normal à superfície Γ que envolve o volume Ω , $\delta \phi$ e δu_i representam respectivamente, um campo de voltagens e de deslocamento virtuais, admissíveis, arbitrários, invariáveis no tempo e que satisfazem a condição de contorno de

Dirichlet homogênea em cada domínio físico. Para materiais piezelétricos, as equações constitutivas são (IEEE, 1988; IKEDA, 1996):

$$S_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \quad (499)$$

$$D_i = e_{0ijk} \varepsilon_{jk} + \epsilon_{0ij}^E E_j \quad (500)$$

em que S_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy e D_i é o vetor de deslocamento elétrico. Com as considerações anteriores e sob a suposição de que cada domínio Ω_i é sólido com material linear, homogêneo, ortotrópico (ρ_1 constante em cada domínio Ω_i , porém C_{ijkl}^E e ϵ_{0ij}^E com propriedades diferentes numa direção preferencial) e com as fronteiras do domínio invariáveis no tempo (deve ser lembrado que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$); a eq.(498) converte-se em:

$$\delta \mathcal{A} = \int_0^t \int_{\Omega} \left[[-\rho_1 \ddot{u}_i + S_{ijj} + f_{bi}] \delta u_i + [D_{i,i} - \rho_0] \delta \phi \right] d\Omega dt + \left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{u}_j \delta u_j d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t S_{ij} \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \left[\int_0^t D_i \hat{n}_i \delta \phi dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (501)$$

Dado que $\delta \phi$ e δu_i são arbitrários e os variacionais tratados aqui são de extremo fixo (nulos quando avaliados nos extremos), esses termos devem ser nulos separadamente. Assim, as condições de contorno são derivadas de:

$$\left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t S_{ij} \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \left[\int_0^t D_i \hat{n}_i \delta \phi dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (502)$$

Agora, tendo que:

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \quad (503)$$

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \quad (504)$$

para o domínio elétrico, as condições de contorno (terceiro termo da eq.(502)) são:

- Condição de contorno essencial: Voltagem imposta.

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_\phi, \quad \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \Phi \Big|_{(\Gamma_\phi, t)} = \phi^p = V \right\} \quad (505)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 4): Deslocamento elétrico imposto.

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \text{ sobre } \Gamma_D \quad (506)$$

e para o domínio estrutural, as condições de contorno (segundo termo da eq.(502)) são:

- Condição de contorno essencial: Deslocamento imposto.

$$u_i = u_i^p \text{ sobre } \Gamma_u, \quad \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = u_i^p \right\} \quad (507)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 4): Componentes de força superficial prescritas.

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \text{ sobre } \Gamma_t \quad (508)$$

As condições iniciais (primeiro termo da eq.(502)) são dadas por:

- Deslocamento inicial:

$$u_i = u_{i_0} \text{ em } \Omega, \quad \forall u_i \in U = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) : u_i \Big|_{(\Omega, 0)} = u_{i_0} \right\} \quad (509)$$

- Velocidade inicial:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i_0} \text{ em } \Omega, \quad \forall \dot{u}_i \in \dot{U} = \left\{ \dot{u}_i \in H^1(\Omega) : \dot{u}_i \Big|_{(\Omega, 0)} = \dot{u}_{i_0} \right\} \quad (510)$$

Além disso, dado que $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(u_i(t))$, o acoplamento entre os domínios elétrico e estrutural faz com que $E_i(t) = E_i(\phi(t))$ e $D_i(t) = D_i(\varepsilon_{ij}(t), E_i(t))$ e, portanto, seja requerida uma condição inicial sobre o campo escalar de voltagens da forma:

$$\phi = \phi_0 \text{ em } \Omega, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi \Big|_{(\Omega, 0)} = \phi_0 \right\} \quad (511)$$

Assim, as equações de equilíbrio na sua forma integral são:

- Para o domínio elétrico: Lei de Gauss.

$$\int_0^t \int_{\Omega} [D_{i,i} - \rho_0] \delta \phi \, d\Omega \, dt = 0, \forall \delta \phi \in \overline{\delta \Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \phi \Big|_{(\Gamma_{\phi}, t)} = 0 \right\} \quad (512)$$

lembrando que os materiais piezelétricos são dielétricos e, portanto, não possuem cargas elétricas livres. Assim, $\rho_0 = 0$.

- Para o domínio estrutural: Equação de Euler-Lagrange.

$$\int_0^t \int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{u}_i - S_{ij,j} - f_{b,i}] \delta u_i \, d\Omega \, dt = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = 0 \right\} \quad (513)$$

Se houver termos dissipativos no domínio estrutural, poderia ser construída uma função Rayleighiana de amortecimento viscoso de forma a ser inclusa no lado direito da eq.(485) como trabalho das forças não conservativas, expressa como (CAUGHEY; OKELLY, 1965; HUGHES, 1987; MEIROVITCH, 2003):

$$\mathcal{R} = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} c_{1ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \, d\Omega \, dt = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(a_1 \rho_1 + b_{1ij} C_{ijkl}^E \right) \dot{u}_k \dot{u}_l \right] \, d\Omega \, dt \quad (514)$$

obedecendo a um amortecimento estrutural proporcional tanto à densidade massa quanto à densidade de rigidez do sistema, sendo governado pelos coeficientes a_1 e b_{1ij} . Desse modo, a equação de equilíbrio é obtida a partir de (VUJANOVIC; JONES, 1989):

$$\delta \mathcal{A} = -\delta \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}, \dot{u}_i) \, d\Omega \, dt + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} \quad (515)$$

Assim, o termo dissipativo poder ser expresso como:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{u}_i} = \int_0^t \int_{\Omega} [a_1 \rho_1 + b_{1kl} C_{ijkl}^E] \dot{u}_j d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} c_{1ij} \dot{u}_j d\Omega dt \quad (516)$$

e a equação de equilíbrio é modificada como:

$$\int_0^t \int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{u}_i + c_{1ij} \dot{u}_j - S_{ij,j} - f_{bi}] \delta u_i d\Omega dt = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} \quad (517)$$

Dado que o domínio Ω está composto por outros domínios sólidos Ω_i , o campo de deslocamento pode ser descontínuo entre as suas interfaces. Para garantir que o campo seja contínuo é utilizado o princípio de Hamilton estendido (LANCZOS, 1986; MEIROVITCH, 2003) que introduz o conceito de multiplicador de Lagrange (que equivale adicionar o trabalho das forças vinculares cujo valor é nulo) no funcional da energia dado nas eq.(485) (sistemas conservativos) e eq.(515) (sistemas não conservativos), de modo a lidar com sistemas com restrições, como é o caso. A restrição de deslocamento entre duas interfaces pode ser expressa como (WRIGGERS, 2006, 2008):

$$G = \int_{\Gamma_{\Omega_{kl}}} (u_i \hat{n}_i + u_i \hat{t}_i^1 + u_i \hat{t}_i^2) d\Gamma_{\Omega_{kl}} - \int_{\Gamma_{\Omega_{lk}}} (u_j \hat{n}_j + u_j \hat{t}_j^1 + u_j \hat{t}_j^2) d\Gamma_{\Omega_{lk}} = 0 \quad (518)$$

em que $\Gamma_{\Omega_{kl}}$ é a fronteira do domínio k que partilha com o domínio l , $\hat{n}_i$, $\hat{t}_i^1$ e $\hat{t}_i^2$ são os vetores normal e tangenciais à fronteira $\Gamma_{\Omega_{kl}}$ correspondentes ao domínio k , formando uma tríade ortonormal na configuração inicial (antes da deformação). Logo, se o sistema possuir $m=1\dots n$ fronteiras comuns entre domínios e sendo μ_m o multiplicador de Lagrange para a m -ésima restrição, obtém-se:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{u}_i + c_{1ij} \dot{u}_j - S_{ij,j} - f_{bi}] \delta u_i d\Omega - \sum_{m=1}^n \mu_m \frac{\partial G_m}{\partial u_i} \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} \wedge$$

$$\delta \mu_m \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{R} : \int_0^t \left(\sum_{m=1}^n G_m(\delta u_i) \delta \mu_m \right) dt = 0 \right\} \quad (519)$$

sendo $\delta\mu_m$ um campo virtual de multiplicadores de Lagrange admissível e arbitrário. No entanto, Wriggers (2006, 2008) afirma que para a condição de contato perfeito ($G = 0$) não é necessário distinguir entre as direções normal e tangencial na interface de contato. Assim, a restrição é dada diretamente em termos do deslocamento relativo entre os pontos nas superfícies em contato:

$$G = u_i(\Gamma_{\Omega_{kl}})\hat{e}_i - u_j(\Gamma_{\Omega_{lk}})\hat{e}_j = 0 \quad (520)$$

sendo $u_i(\Gamma_{\Omega_{kl}})$ o deslocamento avaliado sobre a fronteira $\Gamma_{\Omega_{kl}}$ em contato perfeito com a fronteira $\Gamma_{\Omega_{lk}}$ e $\hat{e}_i$ o vetor da base ortonormal do sistema de coordenadas globais. Portanto, a eq.(519) pode ser escrita como:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{u}_i + c_{1ij} \dot{u}_j - S_{ij,j} - f_{bi}] \delta u_i d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} \wedge \delta \mu_m \in \overline{\delta M} \quad (521)$$

em que $\mu_i = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_i$ e $\frac{\partial G_m}{\partial u_i} = \hat{e}_i$. O termo μ_m pode ser identificado como a m-ésima pressão de contato ou força de reação normal por contato perfeito entre as fronteiras $\Gamma_{\Omega_{kl}}$ e $\Gamma_{\Omega_{lk}}$. Cabe lembrar que, a variação de $\delta\mu_m$ permite recuperar a restrição do problema, ou seja,

$$\delta \left(\sum_{m=1}^n \mu_m G_m \right) = \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0, \text{ pelo fato de que } \delta \mu_m \text{ é admissível e arbitrário.}$$

A.1 O Problema de Autovalor e Autovetor

Nos sistemas puramente mecânicos, a análise consiste na solução do problema de Sturm-Liouville (MEIROVITCH, 2003) que considera o sistema em vibração livre (ou seja, sem forças externas aplicadas), obtendo como resultado as frequências naturais do sistema e os modos de vibrar associados. No entanto, em sistemas que levam em conta efeitos

piezelétricos, o comportamento para um modo de vibração particular é caracterizado pelas frequências de ressonância (ω_r), de antirressonância (ω_a) e pelo CAEM (κ), (NAILLON; COURSAANT; BESNIER, 1983). ω_r é calculada para uma excitação por potencial elétrico nulo (condição de curto-circuito) enquanto ω_a é estabelecida para uma excitação por carga elétrica nula (condição de circuito aberto). O CAEM de um modo de vibração i mede o acoplamento entre o modo de vibração e a excitação, possibilitando conhecer o modo predominante, sendo aproximado pela expressão:

$$\kappa_i^2 \cong \frac{\omega_{a_i}^2 - \omega_{r_i}^2}{\omega_{r_i}^2} = \frac{\lambda_{a_i}^2 - \lambda_{r_i}^2}{\lambda_{r_i}^2} \quad (522)$$

onde λ_{r_i} e λ_{a_i} são os autovalores de ressonância e antirressonância, respectivamente. Utilizando a notação estendida proposta em Barnett e Lothe (1975) na eq.(501), sem incluir os efeitos de amortecimento, de forças de corpo e da densidade de cargas acumuladas no volume, porém com restrições no campo de deslocamentos (ver eq.(519)), tem-se que:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} [\rho_1 \ddot{W}_J - S_{ij,i}] \delta W_J d\Omega - \mu_J \delta W_J - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt + \left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{W}_J \delta W_J d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t t_J \delta W_J dt \right]_r = 0 \quad (523)$$

onde W_J é um vetor com componentes:

$$W_J = \begin{cases} u_i & J \leq i \\ \phi & J = i + 1 \end{cases} \quad (524)$$

e com $\mu_J = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_J$ e $\frac{\partial G_m}{\partial W_J} = \hat{e}_J$, sendo $\hat{e}_J$ para $J = i + 1$ um vetor nulo. O termo t_J

representa o termo de condições de contorno estendido, dado por:

$$t_J = \begin{cases} S_{ij} \hat{n}_j & J \leq i \\ -D_i \hat{n}_i & J = i + 1 \end{cases} \quad (525)$$

de igual forma S_{ij} pode ser expresso como:

$$S_{ij} = K_{ijMn} W_{M,n} = \begin{cases} S_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k & J, M \leq i, n \\ D_i = e_{0ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{0ij}^E E_j & J, M = i, n + 1 \end{cases} \quad (526)$$

em que K_{ijMn} é o tensor de módulo elástico estendido dado por (YANG, 2009):

$$K_{ijMn} = \begin{cases} C_{ijkl}^E & J, M \leq i \\ e_{0ijk} & J \leq i, M = i + 1 \\ e_{0ikl} & J = i + 1, M \leq i + 1 \\ \epsilon_{0ij}^E & J, M = i + 1 \end{cases} \quad (527)$$

Desse modo, para o problema é utilizado o método de separação de variáveis, no qual é proposta uma solução com a forma:

$$W_j(x_i, t) = \mathcal{Y}_j(x_i) e^{j\omega t} = \mathcal{Y}_j(x_i) e^{j\sqrt{\lambda}t} \quad (528)$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ é a variável complexa, $\lambda = \omega^2$ um autovalor do sistema e $\mathcal{Y}_j$ como o autovetor ou modo de vibração associado com o autovalor λ correspondente. Substituindo essa solução na eq.(523) e tomando a parcela independente do tempo, tem-se que:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[-\lambda \rho_1 \mathcal{Y}_j - (K_{ijMn} \mathcal{Y}_{M,n})_{,i} \right] \delta W_j d\Omega - \mu_j \delta W_j - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt - \left[\int_0^t (t_j \delta W_j) dt \right]_{\Gamma} = 0 \quad (529)$$

A condição de contorno estrutural é descrita por:

$$u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_u, \quad \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) \times [0, \infty): u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = 0 \right\} \quad (530)$$

enquanto que as condições de contorno elétricas podem ser dois tipos:

- Voltagem nula nos eletrodos (ou condição de curto-circuito na região Γ_ϕ) para a condição de ressonância:

$$\phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_\phi, \quad \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : \Phi \Big|_{(\Gamma_\phi, t)} = 0 \right\} \quad (531)$$

- Deslocamento elétrico nulo nos eletrodos (ou condição de circuito aberto na região Γ_ϕ) para a condição de antirressonância:

$$-D_i \hat{n}_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_\phi \quad (532)$$

Assim o problema de autovalor consiste em calcular o parâmetro λ que forneça soluções não triviais de:

$$-\int_0^t \left[\int_\Omega [K_{ijMn} y_{M,n}(x_i)]_{,i} d\Omega + \mu_j \right] dt = \lambda \int_0^t \int_\Omega \rho_1 y_j(x_i) d\Omega dt \quad \forall x_i \in \Omega \quad (533)$$

$$-\left[\int_0^t t_j \delta W_j dt \right]_\Gamma = 0 \quad (534)$$

$$-\sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0 \quad (535)$$

sendo isso equivalente a encontrar os valores estacionários do quociente de Rayleigh ($\lambda = \omega^2$) dado por (MEIROVITCH, 1980):

$$\omega^2 = \frac{\int_0^t \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2} K_{ijMn} W_{j,i} W_{M,n} \right) d\Omega - \sum_{m=1}^n \mu_m G_m \right] dt}{\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho_1 \dot{W}_j \dot{W}_j \right) d\Omega dt} = \frac{\int_0^t \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2} (C_{1ijkl}^E \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - 2e_{0ijk} \epsilon_{ij} E_k - \epsilon_{0ij}^E E_i E_j) \right) d\Omega - \sum_{m=1}^n \mu_m G_m \right] dt}{\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho_1 \dot{u}_i \dot{u}_i \right) d\Omega dt} \quad \forall x_i \in \Omega \quad (536)$$

em que W_j é o modo de vibração dado pela eq.(528).

A.2 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada

Se o domínio Ω é acoplado com um circuito elétrico de impedância elétrica equivalente Z , tal impedância pode ser vista como um elemento concentrado conectado a um eletrodo representado pela superfície Γ_q do subdomínio com material piezelétrico Ω_1 (ver Figura 5). O subdomínio Ω_1 age como uma fonte de voltagem com certa impedância (que não infinita), fazendo que a modelagem seja mais realística (TIERSTEN; SHAM, 1998). A diferença de potencial entre a superfície Γ_q e o terminal aterrado da impedância Z , faz com que circule uma corrente elétrica I , que por conservação da carga elétrica no domínio Ω pode ser vista como (LEE; LIU; BALLATO, 2004):

$$I = \int_{\Gamma_q} \dot{q} d\Gamma_q = \int_{\Gamma_q} J_i \hat{n}_i d\Gamma_q = -\dot{Q} = - \int_{\Omega} \dot{\rho}_0 d\Omega \quad (537)$$

sendo Q a carga elétrica, $\dot{q}$ a densidade de corrente elétrica e $\dot{\rho}_0$ a variação temporal da densidade volumétrica de cargas elétricas no domínio Ω que contém o material piezelétrico, sendo que $\dot{\rho}_0 = 0$, pois não há acumulação de cargas elétricas no sistema. Considerando a conexão entre o eletrodo do material piezelétrico e a impedância Z , faz necessário incluir a equação do circuito (YANG, 2009). Portanto, a equação constitutiva para o fenômeno de condução elétrica é a lei de Ohm, que para um meio contínuo é:

$$J_i = \sigma_{0ij} E_j \quad (538)$$

em que σ_{0ij} é o tensor de condutividade elétrica. Já para um elemento concentrado de impedância Z (por exemplo, um circuito RLC) tem-se:

$$I = \frac{\phi(\Gamma)}{Z} \quad (539)$$

em que $\phi(\Gamma)$ representa a voltagem avaliada na superfície Γ que age como eletrodo no domínio Ω . A potência Pot consumida pela impedância Z é dada por:

$$Pot_z = \phi I = \frac{\phi^2(\Gamma)}{Z} \quad (540)$$

Além disso, o domínio Ω dissipa energia pelo efeito Joule de modo que:

$$\text{Pot}_{\text{Joule}} = \sigma_{0ij} E_i E_j \quad (541)$$

e assim, de forma análoga aos materiais condutivos, pode ser definido no sistema, uma densidade do potencial de condução de energia elétrica como:

$$\mathcal{V}_{\text{cond}} = \int_0^t \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{0ij} E_i E_j - \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{\Phi^2(\Gamma)}{Z} \right] \right) \right] dt \quad (542)$$

aproveitando o fato de que $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{\Phi^2(\Gamma)}{Z} \right] d\Omega = \frac{\Phi^2(\Gamma)}{Z}$ e lembrando que a grandeza física de $\mathcal{V}_{\text{cond}}$ é energia por unidade de volume. Em materiais piezelétricos a condutividade elétrica σ_{0ij} é muito baixa, pelo fato de serem materiais dielétricos ou isolantes. Contudo, essa propriedade pode ser determinada mediante (JOHNK, 1988):

$$\sigma_{0ij} = \omega \tan \delta_0 \epsilon_{0ij}^{\epsilon} \quad (543)$$

em que ω é a frequência angular de oscilação do campo elétrico E_i e $\tan \delta_0$ é o fator de perdas dielétricas ou fator de perda tangente. O termo δ_0 é a defasagem entre o campo elétrico E_i e o de deslocamento elétrico D_i . Deste modo, a função de densidade lagrangeana da eq.(494), incluindo as restrições no campo de deslocamentos (eq.(518)), é redefinida como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_1 \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} \left(C_{ijkl}^E \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - 2e_{0ijk} \epsilon_{ij} E_k - \epsilon_{0ij}^{\epsilon} E_i E_j \right) + f_{bi} u_i - \int_0^t \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{0ij} E_i E_j - \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{\Phi^2(\Gamma)}{Z} \right] \right) \right] dt + \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\sum_{m=1}^n \mu_m G_m \right] \quad (544)$$

A condição de estacionaridade na integral de ação, considerando dissipação de energia no domínio estrutural em forma de amortecimento viscoso é dada pela eq.(515), (VUJANOVIC; JONES, 1989), e o termo $\mathcal{R}$ que aparece em dita equação, é uma função Rayleighiana de amortecimento viscoso definida na eq.(514). Contudo, dado que o potencial de condução de energia elétrica está em unidades de potência e aproveitando a propriedade do

operador variacional $\frac{d}{dt}(\delta\mathcal{A}) = \delta(\dot{\mathcal{A}})$, a estacionaridade do funcional pode ser expressa como:

$$\delta\dot{\mathcal{A}}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}, \dot{u}_i) = -\frac{d}{dt} \left[\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[\rho_1 \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - (C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k) \delta \varepsilon_{ij} + f_{bi} \delta u_i + (\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk}) \delta E_i - \int_0^t \sigma_{0ij} E_i \delta E_i dt \right] d\Omega + \mu_i \delta u_i + \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m + \int_0^t \left[\frac{\phi(\Gamma)}{Z} \delta \phi(\Gamma) \right] dt \right] dt + \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \int_{\Omega} c_{1ij} \dot{u}_j \delta u_i d\Omega dt \right] = \frac{d}{dt}(0) = 0 \quad (545)$$

lembrando que $\mu_i = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_i$ e $\frac{\partial G_m}{\partial u_i} = \hat{e}_i$. Integrando por partes os termos em $\delta \dot{u}_i$, $\delta \varepsilon_{ij}$ e

$\delta E_i = -\delta \phi_{,i}$ e aplicando o teorema da divergência nos termos correspondentes com as condições de contorno é obtido:

$$\delta\dot{\mathcal{A}} = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[\left[\frac{d}{dt} (\rho_1 \dot{u}_i) + c_{1ij} \dot{u}_j - (C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k)_{,j} - f_{bi} \right] \delta u_i - \left[(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk})_{,i} \delta \phi + \int_0^t (\sigma_{0ij} E_j)_{,i} \delta \phi dt \right] \right] d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt - \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (\rho_1 \dot{u}_i) \delta u_i d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t (C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k) \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \int_0^t \left[\int_{\Gamma} \left[(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk}) \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) + \int_0^t \sigma_{0ij} E_j \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) dt \right] d\Gamma + \int_0^t \frac{\phi(\Gamma)}{Z} \delta \phi(\Gamma) dt \right] dt \right] = 0 \quad (546)$$

e assim, ordenando os termos e utilizando as equações constitutivas (eq.(499), eq.(500), eq.(538) e eq.(539)):

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[\rho_1 \ddot{u}_i + c_{1ij} \dot{u}_j - S_{ij,j} - f_{bi} \right] \delta u_i d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m \right] dt - \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{i,i} \delta \phi + \int_0^t J_{i,i} \delta \phi dt \right] d\Omega dt - \left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{u}_j \delta u_j d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t S_{ij} \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \left[\int_0^t \left[\int_{\Gamma} (D_i \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) + \int_0^t J_i \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) dt) d\Gamma + \int_0^t \frac{\phi(\Gamma)}{Z} \delta \phi(\Gamma) dt \right] dt \right] = 0 \quad (547)$$

Dado que $\delta\phi$, δu_i , $\delta\mu_m$ são arbitrários e os variacionais tratados são de extremo fixo (nulos quando avaliados nos extremos), esses termos devem ser nulos separadamente. Assim, as condições de contorno são derivadas de:

$$\frac{d}{dt} \left[\left[\int_{\Omega} \rho_1 \dot{u}_j \delta u_j d\Omega \right]_0^t - \left[\int_0^t S_{ij} \hat{n}_i \delta u_j dt \right]_{\Gamma} - \left[\int_0^t \left[\int_{\Gamma} \left(D_i \hat{n}_i \delta\phi(\Gamma) + \int_0^t J_i \hat{n}_i \delta\phi(\Gamma) dt \right) d\Gamma + \int_0^t \frac{\phi(\Gamma)}{z} \delta\phi(\Gamma) dt \right] dt \right] \right] = 0 \quad (548)$$

A equação integral de equilíbrio no domínio estrutural (Equação de Euler-Lagrange) é a mesma eq.(519) e as condições de contorno estruturais vêm dadas pelas equações (507) e eq.(508). Do mesmo modo, as condições iniciais no domínio estrutural são definidas pelas eq.(509) e eq.(510). Já para o domínio elétrico pode ser visto que:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left[D_{i,i} \delta\phi + \int_0^t J_{i,i} \delta\phi dt \right] d\Omega dt \right) = \int_0^t \int_{\Omega} [\dot{D}_i + J_i]_{,i} \delta\phi d\Omega dt = 0 \quad (549)$$

portanto, a equação de equilíbrio do domínio elétrico na forma integral (Equação de continuidade da carga elétrica) é:

$$\int_0^t \int_{\Omega} [\dot{D}_i + J_i]_{,i} \delta\phi d\Omega dt = 0, \forall \delta\phi \in \overline{\delta\Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty): \phi \Big|_{(\Gamma_{\phi}, t)} = 0 \right\} \quad (550)$$

com condições de contorno:

- Condição de contorno essencial: Voltagem imposta.

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_{\phi}, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) \times [0, \infty): \Phi \Big|_{(\Gamma_{\Phi}, t)} = \phi^p = V \right\} \quad (551)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 6): Densidade de corrente elétrica sobre uma superfície ou eletrodo. Tendo que:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \left[\int_{\Gamma} \left[D_i \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) + \int_0^t J_i \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) dt \right] d\Gamma + \int_0^t \frac{\phi(\Gamma)}{Z} \delta \phi(\Gamma) dt \right] dt = \int_0^t \left[\int_{\Gamma} [\dot{D}_i + J_i] \hat{n}_i \delta \phi(\Gamma) d\Gamma + \frac{\phi(\Gamma)}{Z} \delta \phi(\Gamma) \right] dt = 0 \quad (552)$$

portanto, a corrente elétrica no sistema:

$$\int_{\Gamma_{\dot{q}}} [\dot{D}_i + J_i] \hat{n}_i d\Gamma_{\dot{q}} = - \int_{\Gamma_{\dot{q}}} \dot{q} d\Gamma_{\dot{q}} = - \frac{\phi(\Gamma_{\dot{q}})}{Z} = -I \text{ sobre } \Gamma_{\dot{q}} \quad (553)$$

que é equivalente a:

$$[\dot{D}_i + J_i] \hat{n}_i = -\dot{q} \text{ sobre } \Gamma_{\dot{q}} \quad (554)$$

em que ϕ , $\dot{q}$ ou I podem ser ou não prescritos, porém não de forma simultânea. As condições iniciais no domínio elétrico são:

- Voltagem inicial:

$$\phi = \phi_o \text{ em } \Omega, \quad \forall \phi \in \dot{\phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi \Big|_{(\Omega, 0)} = \phi_o \right\} \quad (555)$$

A.3 Resposta em Frequência

Na resposta em frequência é levado em conta o efeito do amortecimento, da mesma forma que no regime transiente, cuja consequência principal é a subtração de energia do sistema. As forças aplicadas são de natureza harmônica e a resposta do sistema consiste numa amplitude e um ângulo de fase para cada frequência de excitação ω . O termo de carga harmônico na notação estendida (BARNETT; LOTHE, 1975) pode ser expresso como:

$$F_1(x_i, t) = f_1(x_i) e^{j\omega t} \quad (556)$$

sendo que $F_I(x_i, t)$ pode ser real ou complexo. Igualmente, utilizando o método da variável complexa, a resposta pode ser vista como (CHOI; KIM, 2005):

$$W_I(x_i, t) = \mathcal{A}_I(x_i) e^{-j\gamma(x_i)} e^{j\omega t} = \mathcal{Y}_I(x_i) e^{j\omega t} \quad (557)$$

sendo $\mathcal{Y}_I(x_i)$ a resposta complexa do sistema, $\mathcal{A}_I$ a amplitude da resposta e $\gamma(x_i)$ o ângulo de fase. Portanto, a estrutura vibra no modo $\mathcal{Y}_I(x_i)$ a uma frequência ω .

A.3.1 Caso Geral

Para sistemas piezelétricos, incluindo tanto os efeitos de amortecimento estrutural quanto as restrições no campo de deslocamentos; sem acoplamento com circuitos elétricos externos e tomando a parcela independente do tempo, tem-se que:

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[-\omega^2 \rho_1 W_J + j\omega c_{1J} W_I - (K_{ijMn} W_{M,n})_{,i} - \mathcal{F}_J \right] \delta W_J^* d\Omega - \mu_J \delta W_J^* - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m^* \right] dt = 0, \quad \forall \delta W_J^* \in$$

$$\overline{\delta W} = \left\{ W_J \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : W_I \Big|_{(\Gamma_W, t)} = 0 \right\} \wedge \delta \mu_m^* \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{C} : \int_0^t \left(\sum_{m=1}^n G_m (\delta W_J^*) \delta \mu_m \right) dt = 0 \right\} \quad (558)$$

sendo $\mathcal{F}_J$ o vetor de forças de corpo estendido dado por:

$$\mathcal{F}_J = \begin{cases} f_{bi} & J \leq i \\ \rho_0 & J = i + 1 \end{cases} \quad (559)$$

e as condições de contorno são expressas como:

- Condição de contorno essencial: Componentes de W_J prescritas.

$$W_J = W_J^p \text{ sobre } \Gamma_W, \forall W_J \in \mathcal{W} = \left\{ \mathcal{W} \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : W_J \Big|_{(\Gamma_W, t)} = W_J^p \right\} \quad (560)$$

- Condição de contorno natural: Componentes de t_j prescritas.

$$\left[\int_0^t t_j \delta W_J^* dt \right]_\Gamma = \left[\int_0^t t_j^p \delta W_J^* dt \right]_\Gamma = 0 \quad (561)$$

em que t_j^p é definido como

$$t_j^p = \begin{cases} S_{ij} \hat{n}_j \text{ sobre } \Gamma_t & J \leq i \\ -D_i \hat{n}_i \text{ sobre } \Gamma_D & J = i + 1 \end{cases} \quad (562)$$

A.3.2 Acoplamento com um Elemento de Impedância Elétrica Concentrada

No caso do acoplamento com um circuito elétrico externo de impedância equivalente Z , a equação de equilíbrio de resposta em frequência tem a mesma forma que a eq.(558), no entanto, deve ser levado em conta que o termo $K_{ijMn} W_{M,n}$ definido na eq.(526) muda para:

$$S_{ij} = K_{ijMn} W_{M,n} = \begin{cases} C_{1ijkl}^E \epsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k & J, M \leq i, n \\ e_{0ijk} \epsilon_{jk} + (1 - j \tan \delta_0) \epsilon_{0ij}^E E_j & J, M = i, n + 1 \end{cases} \quad (563)$$

em que foi aplicada a definição do tensor de condutividade elétrica σ_{0ij} da eq.(543). De forma análoga, as condições de contorno estão dadas por as eq.(560) e eq.(561), sendo que o termo t_j^p é modificado como:

$$t_j^p = \begin{cases} S_{ij} \hat{n}_j \text{ sobre } \Gamma_t & J \leq i \\ -\left[D_i - \frac{j}{\omega} J_i \right] \hat{n}_i \text{ sobre } \Gamma_q & J = i + 1 \end{cases} \quad (564)$$

A forma integral da condição de contorno da eq.(554) sobre a superfície Γ_q é dada por:

$$\int_{\Gamma_q} -\left[D_i - \frac{j}{\omega} J_i \right] \hat{n}_i d\Gamma_q = \int_{\Gamma_q} q d\Gamma_q = -\frac{j}{\omega} \left[\frac{\Phi(\Gamma_q)}{Z} \right] = Q \quad (565)$$

Nas relações anteriores δW_j^* e $\delta \mu_m^*$ são os complexos conjugados de δW_j e $\delta \mu_m$ respectivamente, pelo fato de que é utilizada a variável complexa $\mathcal{Y}_j(x_i)$ na formulação variacional (CHOI; KIM, 2005).

A.4 Equilíbrio Estático

A resposta estática corresponde à estacionaridade da variação do funcional da energia potencial total do sistema, sendo que na situação de equilíbrio estável corresponde a sua minimização. O funcional da densidade de energia potencial total incluindo as restrições no campo de deslocamentos (eq.(518)) é:

$$\mathcal{V}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) - f_{bi} u_i + \frac{1}{2} E_i \left(\epsilon_{0ij}^E \phi_{,j} - e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) + \rho_0 \phi - \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\sum_{m=1}^n \mu_m G_m \right] \quad (566)$$

e na condição de estacionaridade tem-se:

$$\delta \mathcal{V}(\phi, E_i, u_i, \varepsilon_{kl}) = \int_{\Omega} \left[\left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) \delta \varepsilon_{ij} - f_{bi} \delta u_i + \left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) \delta E_i + \rho_0 \delta \phi \right] d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0 \quad (567)$$

com $\mu_i = \left(\sum_{m=1}^n \mu_m \right) \hat{e}_i$ e $\frac{\partial G_m}{\partial u_i} = \hat{e}_i$ e que após integrar por partes os termos em $\delta \varepsilon_{ij}$ e $\delta E_i = -\delta \phi_{,i}$ e aplicando o teorema da divergência (THOMAS; FINNEY, 1996) nos termos correspondentes com as condições de contorno obtém-se:

$$\delta \mathcal{V} = \int_{d\Omega} \left[- \left[\left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right)_{,j} + f_{bi} \right] \delta u_i + \left[\left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right)_{,i} - \rho_0 \right] \delta \phi \right] d\Omega - \mu_i \delta u_i - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m + \left[\left(C_{1ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{0ijk} E_k \right) \hat{n}_i \delta u_j \right]_{\Gamma} - \left[\left(\epsilon_{0ij}^E E_j + e_{0ijk} \varepsilon_{jk} \right) \hat{n}_i \delta \phi \right]_{\Gamma} = 0 \quad (568)$$

e aplicando as relações das equações constitutivas das eq.(499) e eq.(500) chega-se em:

$$\delta\mathcal{V} = - \left(\int_{\Omega} (S_{ij,j} + f_{bi}) \delta u_i d\Omega + \mu_i \delta u_i \right) - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m + \int_{\Omega} (D_{i,i} - \rho_0) \delta \phi d\Omega + [S_{ij} \hat{n}_i \delta u_j]_{\Gamma} - [D_i \hat{n}_i \delta \phi]_{\Gamma} = 0 \quad (569)$$

sendo que $\rho_0 = 0$ em piezelétricos. Assim, as equações para a análise estática são:

- Para o domínio elétrico: Lei de Gauss.

$$\int_{\Omega} D_{i,i} \delta \phi d\Omega = 0, \forall \delta \phi \in \overline{\delta\Phi} = \left\{ \phi \in H^1(\Omega): \phi \Big|_{\Gamma_{\phi}} = 0 \right\} \quad (570)$$

$$\phi = \phi^p = V \text{ sobre } \Gamma_{\phi}, \forall \phi \in \Phi = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega): \Phi \Big|_{\Gamma_{\phi}} = \phi^p = V \right\} \quad (571)$$

$$-D_i \hat{n}_i = -D^p \text{ sobre } \Gamma_D \quad (572)$$

- Para o domínio estrutural: Equação de Equilíbrio de Elasticidade Linear considerando restrições de deslocamento entre camadas.

$$- \left[\int_{\Omega} (S_{ij,j} + f_{bi}) \delta u_i d\Omega + \mu_i \delta u_i \right] - \sum_{m=1}^n G_m \delta \mu_m = 0, \forall \delta u_i \in \overline{\delta U} = \left\{ u_i \in H^1(\Omega): u_i \Big|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \wedge$$

$$\delta \mu_m \in \overline{\delta M} = \left\{ \mu_m \in \mathbb{R} : \sum_{m=1}^n G_m (\delta u_i) \delta \mu_m = 0 \right\} \quad (573)$$

$$u_i = u_i^p \text{ sobre } \Gamma_u, \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega): u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_i^p \right\} \quad (574)$$

$$S_{ij} \hat{n}_j = t_i^p \text{ sobre } \Gamma_t \quad (575)$$

APÊNDICE B – ELEMENTO DE CASCA ISOPARAMÉTRICO DE OITO NÓS

Nos elementos isoparamétricos é estabelecida uma relação, através de funções de forma ou interpolação, entre os graus de liberdade (GDL) em qualquer ponto do domínio do elemento e os GDL nos pontos nodais, utilizando um sistema de coordenadas natural. A denominação de elemento isoparamétrico resulta da aplicação das funções de forma para interpolar simultaneamente os GDL e as coordenadas (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). O elemento de casca isoparamétrico de oito nós é mostrado na Figura 9. Os nós dos vértices e intermediários estão numerados em sentido anti-horário e o sistema de coordenadas (r, s, t) é o sistema natural enquanto o sistema real é denominado sistema de coordenadas globais (x, y, z) . O sistema de coordenadas $(1, 2, 3)$ é o sistema material ou nodal-local que leva em conta a polarização no caso de material piezelétrico e a orientação da fibra no caso de materiais ortotrópicos. Já para materiais isotrópicos, as propriedades de material permanecem invariantes nesse sistema de coordenadas. A aproximação das variáveis de estado é feita mediante as funções de interpolação que para este caso são da forma (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(rr_i + ss_i - 1) \therefore i = 1 \text{ a } 4 \quad (576)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 + ss_i) \therefore i = 5 \text{ e } 7 \quad (577)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + rr_i)(1 - s^2) \therefore i = 6 \text{ e } 8 \quad (578)$$

em que (r_i, s_i) som as coordenadas do nodo i no sistema natural (ver Tabela 27). O sistema de coordenadas $(1, 2, 3)$ está definido em cada nó k por uma tríade ortonormal $(V1_i^k, V2_i^k, Vn_i^k)$, cujo cálculo depende das coordenadas globais do elemento e do mapeamento do elemento no sistema natural. Dito de outra forma, o sistema material pode ser calculado aproveitando que o elemento é uma superfície parametrizada no sistema (r, s, t) , sempre que os nós sejam pontos regulares do elemento, ou seja, que as derivadas parciais em relação às coordenadas do mapeamento sejam linearmente independentes (CARMO, 1976). Dessa forma é garantida, a

existência de um plano tangente ao elemento em cada um dos nós (delimitado por $V1_i^k$ e $V2_i^k$) e consequentemente há um vetor normal a esse plano tangente (definido pelo produto vetorial $Vn_i^k = \varepsilon_{imn} V1_m^k V2_n^k$, sendo ε_{imn} o símbolo de permutação).

Tabela 27 – Localização dos nós de um elemento de casca no sistema natural

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8
r	1	-1	-1	1	0	-1	0	1
s	1	1	-1	-1	1	0	-1	0

No sistema de coordenadas $(1, 2, 3)$ são determinadas originalmente as propriedades de material, assim, a polarização do material piezelétrico é definida na direção 3, pelo fato de que são utilizados materiais com isotropia no plano perpendicular da polarização (ou transversalmente isotrópicos, ver seção 2.1). No caso de materiais ortotrópicos, a fibra está contida no plano perpendicular ao vetor Vn_i^k (ver Figura 9) com um ângulo de orientação θ medido a partir do eixo delimitado pelo vetor tangente $V1_i^k$, seguindo a regra de mão direita na direção do vetor Vn_i^k . Para o cálculo dos vetores tangentes $V1_i^k$ e $V2_i^k$, são criados dos vetores auxiliares dados por Hughes (1987):

$$vt1_i^k = B_j^r X_{ji} \Big|_k \quad \therefore B_j^r = N_{j,r} \quad (579)$$

$$vt2_i^k = B_j^s X_{ji} \Big|_k \quad \therefore B_j^s = N_{j,s} \quad (580)$$

em que a notação $\Big|_k$ indica que os vetores B_j^r e B_j^s (derivadas das funções de forma em relação às variáveis do sistema natural r e s , respectivamente) devem ser avaliados no nó k correspondente, sendo que j e k variam entre 1 e 8. Além disso, i varia de 1 até 3, de modo que, a matriz X_{ji} é construída com as coordenadas nodais do elemento, sendo $X_{j1} = x_j, X_{j2} = y_j, X_{j3} = z_j$. Desse modo, o vetor normal à superfície média do k -ésimo nó calcula-se como:

$$Vn_i^k = \frac{\varepsilon_{imn} vt1_m^k vt2_n^k}{\sqrt{\varepsilon_{mnp} \varepsilon_{stp} vt1_m^k vt2_n^k vt1_s^k vt2_t^k}} = \frac{\varepsilon_{imn} vt1_m^k vt2_n^k}{\sqrt{(vt1_m^k vt1_m^k vt2_n^k vt2_n^k - vt1_m^k vt1_n^k vt2_m^k vt2_n^k)}} \quad (581)$$

No entanto, pode existir a situação em que um mesmo nó pertence a vários elementos, tendo que calcular o vetor Vn_i^k para cada elemento na vizinhança do nó k , sendo o vetor normal Vn_i^k final:

$$Vn_i^k = \frac{\left(\sum_{m=1}^{ve} Vn_i^{ka} \right)}{\sqrt{\left(\sum_{a=1}^{ve} Vn_i^{ka} \right) \left(\sum_{m=1}^{ve} Vn_i^{ka} \right)}} \quad (582)$$

em que o subíndice a varia de 1 até o número de elementos ve que compartilham o nó k . A partir de Vn_i^k podem ser calculados os vetores unitários $V1_i^k$ e $V2_i^k$ (BATHE, 1996):

$$V1_i^k = \frac{\varepsilon_{i2j} \hat{e}_2 Vn_j^k}{\sqrt{\varepsilon_{2ji} \varepsilon_{2mi} \hat{e}_2 Vn_j^k \hat{e}_2 Vn_m^k}} = \frac{\varepsilon_{i2j} \hat{e}_2 Vn_j^k}{\sqrt{(Vn_j^k Vn_j^k - Vn_2^k Vn_2^k)}} \quad (583)$$

$$V2_i^k = \varepsilon_{ipq} Vn_p^k V1_q^k \quad (584)$$

sendo $\hat{e}_2$ o vetor unitário $\{0,1,0\}$. Se Vn_j^k for paralelo ao vetor $\hat{e}_2$ (ou seja, $\varepsilon_{i2j} \hat{e}_2 Vn_j^k = 0$), logo $V1_i^k = \hat{e}_3 \therefore \hat{e}_3 = \{0,0,1\}$. As coordenadas globais de um ponto que pertence ao elemento podem ser expressas em termos das coordenadas naturais como:

$$x_i = N_j \left[X_{ji} + \frac{1}{2} t H_{jk} Vn_{ki} \right] \quad (585)$$

com i indo de 1 até 3 e j, k de 1 até 8. De novo, a matriz X_{ji} é construída com as coordenadas nodais do elemento, sendo que as coordenadas de um nó j estão dadas por $X_{j1} = x_j, X_{j2} = y_j, X_{j3} = z_j$. De igual forma, Vn_{ki} é uma matriz com os vetores normais Vn_i de cada nó k e H_{jk} é uma matriz diagonal ($H_{jk} = 0 \forall j \neq k$) que contém as espessuras h_k do elemento para cada nó k . Assim, as derivadas do vetor x_i em relação às variáveis do sistema natural (r, s, t) são:

$$x_{i,r} = B_j^r \left[X_{ji} + \frac{1}{2} t H_{jk} Vn_{ki} \right] \quad (586)$$

$$x_{i,s} = B_j^s \left[X_{ji} + \frac{1}{2} t H_{jk} V_{n_{ki}} \right] \quad (587)$$

$$x_{i,t} = \frac{1}{2} N_k H_{jk} V_{n_{ki}} \therefore N_{k,t} = 0 \quad (588)$$

As derivadas das equações eq.(586) a eq.(588) são necessárias para o mapeamento no sistema natural de uma função f qualquer (que podem ser as propriedades de material ou carregamento do sistema) dependente das coordenadas x , y e z . Portanto, utilizando a regra da cadeia de diferenciação, tem-se o sistema matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,s} \\ f_{,t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{,r} & Y_{,r} & Z_{,r} \\ X_{,s} & Y_{,s} & Z_{,s} \\ X_{,t} & Y_{,t} & Z_{,t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix} \quad (589)$$

em que a matriz 3×3 é denominada matriz Jacobiana, que permite através do seu determinante (ou Jacobiano) fazer o mapeamento entre as coordenadas naturais e as coordenadas globais. Adicionalmente, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Assim, o gradiente da função f em relação às coordenadas globais é dado por:

$$\begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,s} \\ f_{,t} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,s} \\ f_{,t} \end{Bmatrix} \therefore [J^*] = \begin{bmatrix} r_{,x} & s_{,x} & t_{,x} \\ r_{,y} & s_{,y} & t_{,y} \\ x_{,z} & s_{,z} & t_{,z} \end{bmatrix} \quad (590)$$

em que $[J^*]$ é a matriz inversa da matriz Jacobiana. O Jacobiano J é definido como o determinante da matriz Jacobiana, logo:

$$J = \det([J]) = \varepsilon_{ijk} J_{i1} J_{j2} J_{k3} \quad (591)$$

com i, j e k indo de 1 até 3. Pelo fato de que é necessária a integração numérica sobre o domínio do elemento finito, para a determinação das matrizes constitutivas e vetores de força, é preciso uma relação entre o domínio físico e o domínio natural, dada por:

$$dx dy dz = J dr ds dt \quad (592)$$

sendo o significado físico de J a razão do volume elementar $dx dy dz$ ao volume natural $dr ds dt$. A integral tridimensional da função f no domínio do elemento utilizando o método da quadratura gaussiana pode ser expressa como (BATHE, 1996):

$$I = \int_{V_e} f dV_e = \int_{V_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s, t) J dr ds dt = \sum_{a=1}^{IPr} \sum_{b=1}^{IPs} \sum_{c=1}^{IPt} w_a w_b w_c f(r_a, s_b, t_c) J(r_a, s_b, t_c) \quad (593)$$

em que IPr , IPs e IPt são o número de pontos do esquema de integração utilizado para aproximar I em cada direção das coordenadas naturais. De igual forma w_a , w_b e w_c são os pesos que ponderam a avaliação da integral em cada ponto (r_a, s_b, t_c) . O elemento de casca usado neste trabalho pode estar sujeito ao fenômeno denominado “*shear locking*”, ou travamento por cisalhamento, quando a razão de aspecto entre a dimensão da maior aresta e a espessura do elemento tende para o infinito (BATHE, 1996; KÖGL; BUCALEM, 2005a, 2005b). O fenômeno consiste na aparição de deformações cisalhantes fictícias em elementos submetidos à flexão, causando uma matriz de rigidez elementar com valores excessivamente elevados. Para evitar o “*shear locking*” é empregado um método de integração reduzida seletiva, no qual é utilizado um esquema de integração completa (9 pontos de Gauss na superfície do elemento) para os efeitos de membrana e flexão e um esquema de integração reduzida (4 pontos de Gauss na superfície do elemento) para os efeitos relacionados com o cisalhamento. Cabe salientar, que a integração na espessura do elemento sempre é feita de maneira completa (3 pontos de Gauss). Os pontos e pesos, para os esquemas de integração mencionados, são resumidos na Tabela 28.

Tabela 28 – Pontos e pesos para a quadratura Gaussiana (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970).

Número de Pontos	Localização	Peso
2 (Reduzida para r_a, s_b)	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	0	$\frac{8}{9}$
3 (Completa para r_a, s_b, t_c)	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

O elemento de casca é formulado em base à generalização da teoria de placas de Reissner-Midlin (ver Figura 90), impondo duas hipóteses, uma cinemática e outra mecânica e, por sua vez, considera deformações tanto por flexão quanto de cisalhamento. A hipótese mecânica considera que o sistema encontra-se em estado plano de tensão, ou seja, a componente do tensor de tensões S_{ij} na direção do vetor diretor Vn_i em qualquer ponto da superfície média é nula ($S_{33} = 0$ no sistema de coordenadas $(1, 2, 3)$). Enquanto na hipótese cinemática, é assumido que as fibras inicialmente em direção normal à superfície média da casca permanecem retas e inextensíveis (o que implica que $\epsilon_{33} = 0$), porém não necessariamente conservam sua orientação durante a deformação. Isso quer dizer que no decorrer do movimento, o vetor diretor Vn_i pode não ser normal à dita superfície (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970; BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2008; BATHE, 1996; KÖGL; SILVA, 2005).

Figura 90 – Hipóteses da teoria de placas de Reissner-Midlin: (a) Mecânica; (b) Cinemática

Desse modo, as equações constitutivas para a modelagem com MEF podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ - \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^* & C_{11}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_s C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_s C_{44} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{15} \\ - \\ -\epsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\epsilon_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}^* \\ 0 & 0 & e_{31}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ - & - & - \\ -\epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ - \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{Bmatrix} \quad (594)$$

sendo $k_s = \frac{5}{6}$ o fator de correção para a tensão cisalhante (BATHE, 1996; HUGHES, 1987) e:

$$C_{11}^* = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \quad (595)$$

$$C_{12}^* = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \quad (596)$$

$$e_{31}^* = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}} e_{33} \quad (597)$$

$$e_{33}^* = e_{33} - \frac{e_{33}^2}{C_{33}} \quad (598)$$

Consequentemente, os vetores de tensão e deformação modificam-se por:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \wedge \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \therefore \sigma_{33} = 0 \wedge \varepsilon_{33} = 0 \quad (599)$$

Por fim, na forma indicial a eq.(594) pode ser escrita como:

$$T_i = K_{ij} W_j = \begin{cases} S_k = C_{1kl}^E \varepsilon_l + e_{0km} (-E_m) & i \leq k \wedge (j \leq l \vee j \geq m+5) \\ D_m = e_{0ml} \varepsilon_l + e_{0mn}^E (-E_n) & i \geq m+5 \wedge (j \leq l \vee j \geq n+5) \end{cases} \quad (600)$$

sendo que i, j variam entre 1 até 8, k, l entre 1 e 5 e m, n entre 1 e 3. A montagem das matrizes constitutivas é desenvolvida seguindo as regras de conectividade que imperam no modelo, toda vez que, o domínio da EPLA é discretizado em elementos finitos. Hughes (1987) define a operação de montagem de uma matriz $\mathbf{F}$ de elementos finitos qualquer, a partir de matrizes elementares $\mathbf{f}_e$, como:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^N \mathbf{A} \mathbf{f}_e \quad (601)$$

em que o operador A , chamado de operador de montagem, é utilizado para simbolizar a montagem das matrizes constitutivas e o subíndice e percorre desde 1 até o número máximo N de elementos finitos presente no modelo.

B.1 Interpolação do Campo de Deslocamentos

O deslocamento de um ponto do elemento finito é definido como a diferença entre as coordenadas antes e depois da deformação (BATHE, 1996; HUGHES, 1987), ou seja:

$$u_i = x_i^d - x_i^o = N_j \left[U_{ji} + \frac{1}{2} t H_{jk} V_{n_{ki}} \right] \quad (602)$$

com i indo de 1 até 3 e j, k de 1 até 8 e sendo x_i^o a configuração inicial, x_i^d a configuração deformada, U_{ji} a matriz de deslocamentos nodais com $U_{j1} = u_j$, $U_{j2} = v_j$, $U_{j3} = w_j$ e u_j, v_j e w_j como os deslocamentos na direção x, y e z , respectivamente. A matriz $V_{n_{ki}}$ está dada por

$$V_{n_{ki}} = V_{n_{ki}}^d - V_{n_{ki}}^o = -\alpha_{kj} V_{2_{ji}}^o + \beta_{kj} V_{1_{ji}}^o \quad (603)$$

com i indo de 1 até 3 e j, k de 1 até 8. Os termos α_{kj} e β_{kj} são definidos como matrizes diagonais ($\alpha_{kj} = \beta_{kj} = 0 \forall k \neq j$) que contém as rotações do k -ésimo vetor V_{n_i} ao redor dos vetores $V_{1_i}^o$ e $V_{2_i}^o$ do nó k correspondente, ou seja, em torno dos vetores de cada nó tangentes à superfície média do elemento na configuração inicial. Conforme a eq.(603), a eq.(602) pode ser expressa como:

$$u_i = N_j \left[U_{ji} + \frac{1}{2} t H_{jk} (-\alpha_{kl} V_{2_{li}}^o + \beta_{kl} V_{1_{li}}^o) \right] = A_{im} d_m \quad (604)$$

em que l variam entre 1 e 8 e m entre 1 e 40. A matriz A_{im} é denominada matriz de funções de forma elementar, que resulta do isolamento e arranjo dos termos que acompanham os GDL estruturais do elemento representados pelo vetor d_m . Desse modo, A_{im} é:

$$A_{im} = A_{iq}^k \therefore i \leq 3 \wedge q \leq 5 \wedge (5k - 4 \leq m \leq 5k) \quad (605)$$

sendo A_{iq}^k a matriz de funções de forma do k -ésimo nó do elemento, na qual não é levado em conta a convenção da somatória sobre o índice k , no entanto, é expressa por:

$$A_{iq}^k = [AN_{ij}^k \quad AV_{ip}^k] \therefore i \leq 3 \wedge (q \leq j \vee q \geq p + 3) \quad (606)$$

e que, por sua vez, é composta por duas parcelas, uma dependendo somente das funções de forma (AN_{ij}^k) e outra que depende tanto das funções de forma quanto dos vetores tangentes $V1_i$ e $V2_i$ (AV_{ip}^k), sendo esses termos:

$$AN_{ij}^k = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (607)$$

$$AV_{ip}^k = \frac{1}{2} t N_k h_k \begin{bmatrix} -V2_1^k & V1_1^k \\ -V2_2^k & V1_2^k \\ -V2_3^k & V1_3^k \end{bmatrix} \therefore h_k = H_{jk} \forall j = k \quad (608)$$

com i e j indo de 1 até 3 e p variando entre 1 e 2 e sem levar em conta a convenção da somatória sobre o índice k . h_k é a espessura do k -ésimo nó do elemento, sendo esse termo localizado sobre a diagonal da matriz H_{jk} . O vetor d_m é o vetor elementar de GDL estruturais, sendo que:

$$d_m = d_q^k \therefore q \leq 5 \wedge (5k - 4 \leq m \leq 5k) \quad (609)$$

e com d_q^k como o k -ésimo vetor nodal de GDL estruturais e que pode ser visto como:

$$d_q^k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (610)$$

em que q varia entre 1 até 5 e novamente não é levado em conta a convenção da somatória sobre o índice k . Deste modo, no domínio mecânico ou estrutural a incógnita do sistema é o campo vetorial de deslocamentos d_m , com três componentes nodais de translação nos eixos x ,

y e z (u_k, v_k, w_k) expressas em coordenadas globais e duas componentes nodais de rotação em torno dos k -ésimos vetores tangentes $V1_i^k$ e $V2_i^k$ (α_k, β_k) em coordenadas do sistema material. Assim, têm-se cinco (5) GDL por nó e quarenta (40) por elemento.

B.2 Interpolação do Campo de Deformações

As componentes do vetor de deformação em coordenadas globais para pequenas deformações são:

$$\bar{\varepsilon}_a = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{Bmatrix} = B_{uam} d_m \quad (611)$$

sendo que a varia de 1 até 6 e m entre 1 até 40. B_{uam} é nomeada como matriz elementar de derivadas de funções de forma e vem dada por (BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2008; BATHE, 1996; REDDY, 2006):

$$B_{uam} = B_{u_{aq}}^k \quad \therefore a \leq 6 \wedge q \leq 5 \wedge (5k - 4 \leq m \leq 5k) \quad (612)$$

sendo $B_{u_{aq}}^k$ a matriz nodal de derivadas de funções de forma do k -ésimo nó, na qual não é levado em conta a convenção da somatória sobre o índice k quando calculada, de modo que:

$$B_{u_{aq}}^k = \begin{bmatrix} BN_{1k} & 0 & 0 & -BV_{1k}V2_1^k & BV_{1k}V1_1^k \\ 0 & BN_{2k} & 0 & -BV_{2k}V2_2^k & BV_{2k}V1_2^k \\ 0 & 0 & BN_{3k} & -BV_{3k}V2_3^k & BV_{3k}V1_3^k \\ BN_{2k} & BN_{1k} & 0 & -(BV_{2k}V2_1^k + BV_{1k}V2_2^k) & (BV_{2k}V1_1^k + BV_{1k}V1_2^k) \\ 0 & BN_{3k} & BN_{2k} & -(BV_{3k}V2_2^k + BV_{2k}V2_3^k) & (BV_{3k}V1_2^k + BV_{2k}V1_3^k) \\ BN_{3k} & 0 & BN_{1k} & -(BV_{1k}V2_3^k + BV_{3k}V2_1^k) & (BV_{1k}V1_3^k + BV_{3k}V1_1^k) \end{bmatrix} \quad (613)$$

Os coeficientes da matriz da eq.(613) podem ser obtidos mediante o cálculo de duas matrizes definidas como:

$$BN_{ik} = J_{12ij}^* B_{jk} \quad (614)$$

$$BV_{ik} = \frac{h_k}{2} (tBN_{ik} + J_{3i}^* N_k) \quad (615)$$

com i indo de 1 até 3, j de 1 até 2 e k de 1 até 8. Os termos B_{jk} , J_{12ij}^* e J_{3i}^* são dados por:

$$B_{jk} = \begin{bmatrix} B_k^r \\ B_k^s \end{bmatrix} \quad (616)$$

$$J_{12ij}^* = \begin{bmatrix} \Gamma_{,x} & S_{,x} \\ \Gamma_{,y} & S_{,y} \\ X_{,z} & S_{,z} \end{bmatrix} \quad (617)$$

$$J_{3i}^* = \begin{bmatrix} S_{,x} \\ S_{,y} \\ S_{,z} \end{bmatrix} \quad (618)$$

lembrando que B_k^r e B_k^s são definidos na eq.(579) e na eq.(580), enquanto J_{12ij}^* e J_{3i}^* são gerados a partir das colunas da inversa da matriz Jacobiana J_{mn}^* de tamanho 3×3 mostrada na eq.(590). Pelo fato de que, as propriedades de material são definidas no sistema material de coordenadas, tanto as tensões quanto as deformações devem ser calculadas nesse sistema visando facilitar a aplicação de critérios de falha, especialmente para materiais compósitos. Por essa razão, devem ser transformadas as deformações aqui calculadas no sistema global para o sistema material. Essa transformação não é direta, pois existem três sistemas de coordenadas definidos no elemento de casca: o sistema global ou físico, o sistema natural que parametriza o sistema global e o sistema material que é obtido para cada nó a partir dos dois anteriores. Portanto, a ordem da transformação de coordenadas é inicialmente do sistema global para o natural e posteriormente do sistema natural para o material (ver Figura 9). Além disso, deve ser levado em conta que as hipóteses, mecânica e cinemática, (ver Figura 90) são válidas somente nos sistemas natural e material, ou seja, que para uma primeira transformação de coordenadas tem-se:

$$\bar{\epsilon}_b = T_{\epsilon_{ba}} \bar{\epsilon}_a = T_{\epsilon_{ba}} B_{u_{am}} d_m \quad (619)$$

sendo que b varia de 1 até 5, e matriz de transformação T_ε dado por (BATHE, 1996; COOK, 1995):

$$T_{\varepsilon_{ba}} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (620)$$

em que l_i, m_i e n_i representam as componentes da tríade ortonormal $\hat{e}_r, \hat{e}_s$ e $\hat{e}_t$, respectivamente. Esses vetores unitários podem ser obtidos da matriz Jacobiana, pelo fato de que essa matriz representa a transformação entre o sistema global e natural, sendo as suas colunas vetores tangentes (não necessariamente ortonormais) em qualquer ponto do domínio. Assim, tem-se (HUGHES, 1987):

$$\hat{e}_r = \frac{\mathcal{J}_{1i}}{\sqrt{\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{1i}}} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} \quad (621)$$

$$\hat{e}_t = \frac{\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}}{\sqrt{\varepsilon_{jki}\varepsilon_{pqj}\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}\mathcal{J}_{1p}\mathcal{J}_{2q}}} = \frac{\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}}{\sqrt{(\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}\mathcal{J}_{2j} - \mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_{2i}\mathcal{J}_{2j})}} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (622)$$

$$\hat{e}_s = \frac{\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}\mathcal{J}_{1q}}{\sqrt{[\delta_{jq}(\delta_{ai}\delta_{bd} - \delta_{bi}\delta_{ad}) + \delta_{iq}(\delta_{aj}\delta_{bd} - \delta_{bj}\delta_{ad})]\mathcal{J}_{1i}\mathcal{J}_{2j}\mathcal{J}_{1q}\mathcal{J}_{1a}\mathcal{J}_{2b}\mathcal{J}_{1d}}} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad (623)$$

sendo $\mathcal{J}_{ij}$ um vetor correspondente à coluna j da matriz Jacobiana $\mathcal{J}_{ij}$ de tamanho 3×3 mostrada na eq.(589) e δ_{jq} o delta de Kronecker. A segunda transformação de coordenadas (do sistema natural para o material) é constituída por uma rotação no plano da casca, devido à orientação das fibras nos materiais ortotrópicos onde a direção $\hat{e}_t$ permanece invariável, ou seja, coincide com a direção 3 do sistema material. Portanto:

$$\varepsilon_c = T_{\theta_{cb}} \bar{\varepsilon}_b = T_{\theta_{cb}} T_{\varepsilon_{ba}} B_{u_{am}} d_m \quad (624)$$

em que c varia entre 1 e 5. A matriz $T_{\theta_{cb}}$ é nomeada matriz de rotação, sendo que (COOK, 1995; GIBERT; AUSTIN, 2007):

$$T_{\theta_{cb}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (625)$$

com $c = \cos \theta$ e $s = \sin \theta$, em que θ é o ângulo de orientação da fibra (ver Figura 9). Se o material não for ortotrópico a matriz $T_{\theta_{cb}}$ será igual à matriz identidade.

B.3 Interpolação do Campo de Potencial Elétrico

O potencial elétrico ϕ (que não deve ser confundido com a tensão elétrica ou diferença de potencial $\Delta\phi$) é interpolado ao longo da espessura (ver Figura 91), usando uma função quadrática dada por (KÖGL; BUCALEM, 2005a, 2005b):

$$\phi(r, s, t) = (1 - t^2)\phi_m(r, s) + \frac{1}{2}(t + t^2)\Delta\phi \quad (626)$$

em que $\Delta\phi$ é um GDL, imposto no centro do elemento, que representa a diferença de potencial elétrico entre as superfícies superior e inferior do elemento considerando que em tais superfícies existem eletrodos e são equipotenciais e ϕ_m é o potencial elétrico da superfície média (em $t = 0$).

Figura 91 – Interpolação do campo de potencial elétrico

A eq.(626) permite modelar com maior precisão o campo elétrico induzido pelas deformações elásticas produto do efeito piezelétrico, sendo isso muito mais importante no caso de coletores de energia. Por conseguinte, a simulação de eletrodos no sistema é feita pelo acoplamento de todos os elementos de uma mesma camada de material piezelétrico. Pela prescrição de que o eletrodo da superfície inferior é aterrado, pode ser visto que $\phi(r, s, 1) = \Delta\phi$, $\phi(r, s, 0) = \phi_m$ e $\phi(r, s, -1) = 0$. Consequentemente, realizando uma interpolação da variável de estado ϕ_m , com as funções de forma N_k dadas pelas eq.(576) a eq.(578), e substituindo na eq.(626), obtém-se:

$$\phi(r, s, t) = (1 - t^2)N_k\bar{\phi}_{m_k} + \frac{1}{2}(t + t^2)\Delta\phi = N_{\phi_z}\phi_z \quad (627)$$

com k indo de 1 até 8, z variando entre 1 até 9 e $\bar{\phi}_{m_k}$ sendo o vetor de potenciais elétricos nodais da superfície média do elemento. Logo, o vetor de funções de forma para o domínio elétrico é dado por:

$$N_{\phi_z} = \left\{ (1 - t^2)N_k \quad \frac{1}{2}(t + t^2) \right\} \quad (628)$$

e o vetor de potenciais elétricos elementar é definido como:

$$\phi_z = \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{m_k} \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \quad (629)$$

Deste modo, no domínio elétrico a incógnita do sistema é o campo escalar de potenciais elétricos $\bar{\phi}_{m_k}$ com um GDL adicional dado por $\Delta\phi$. Assim, têm-se um (1) GDL por nó e um (1) GDL definido no centro do elemento para um total de nove (9) GDL por elemento.

B.4 Interpolação do Campo Elétrico

No caso das EPLA, o campo elétrico somente é definido nas camadas de material piezelétrico sendo que para os outros tipos de material adquire valor nulo. Deste modo, o sistema de coordenadas material coincide com o sistema natural, tendo somente que realizar

uma única transformação de coordenadas para as variáveis envolvidas no problema elétrico. Derivando a eq.(627) em relação às coordenadas naturais (que coincidem com as coordenadas materiais), fazendo a transformação de coordenadas para o sistema natural e substituindo na eq.(493), obtém-se:

$$E_i = -T_{\phi_{ij}} B_{\phi_{jz}} \phi_z \quad (630)$$

com i, j indo de 1 até 3 e z de 1 até 9. Sendo $T_{\phi_{ij}}$ a matriz de transformação de coordenadas para o potencial elétrico e $B_{\phi_{jz}}$ a matriz de interpolação piezelétrica. Esses termos estão dados por (KIYONO; SILVA; REDDY, 2012):

$$T_{\phi_{ij}} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (631)$$

$$B_{\phi_{jz}} = [J^*] \begin{bmatrix} (1-t^2)B_k^r & 0 \\ (1-t^2)B_k^s & 0 \\ -2tN_k & \frac{1}{2} + t \end{bmatrix} \quad (632)$$

em que os termos l_i, m_i e n_i são calculados conforme as eq.(621) até a eq.(623).

B.5 Cálculo das Tensões Mecânicas para EPLA

As tensões mecânicas no problema de EPLA vêm dadas pela eq.(600), a qual pode ser transformada, aplicando as interpolações das variáveis de estado, de modo que:

$$S_i = C_{1_{ic}}^E T_{\theta_{cb}} T_{\epsilon_{ba}} B_{u_{am}} d_m + e_{0_{ik}} T_{\phi_{kj}} B_{\phi_{jz}} \phi_z \quad (633)$$

em que S_i é expresso nas coordenadas do sistema material (ver eq.(599)). A eq.(633) é aplicável a qualquer material da EPLA, porém, deve ser lembrado que para materiais piezelétricos e isotrópicos o ângulo da fibra é $\theta = 0$, logo $T_{\theta_{cb}} = \delta_{cb}$, em que δ_{cb} é equivalente à matriz identidade. Já para materiais tanto isotrópicos quanto ortotrópicos, a

segunda parcela da eq.(633) é zero, pelo fato das constantes do tensor piezelétrico e_{0ik} são nulas para esse tipo de materiais. No plano da casca as tensões são calculadas de forma precisa nos 4 pontos de Gauss da integração reduzida ou pontos ótimos de Barlow (BARLOW, 1976; COOK *et al.*, 2001). Contudo, já que ao longo da espessura, a interpolação do campo de potencial elétrico é quadrática e, por sua vez, a interpolação do campo de deslocamento é linear, a distribuição de tensão mecânica pode não ser linear. Assim, é recomendado para o cálculo das tensões ao longo da espessura, integrar numericamente com um esquema completo de 3 pontos de Gauss, embora, esses pontos não coincidem com as coordenadas naturais das superfícies superior e inferior da casca (ver Tabela 28).

Tabela 29 – Pontos e pesos da quadratura Gaussiana e de Lobatto para 5 pontos de integração

Quadratura de Gauss		Quadratura de Lobatto	
Localização	Peso	Localização	Peso
0	$\frac{128}{225}$	0	$\frac{32}{45}$
$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{49}{90}$
$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$	± 1	$\frac{1}{10}$

Não obstante, pelo fato de que nessas coordenadas usualmente aparecem os maiores valores de tensão (em módulo), as tensões podem ser calculadas de duas maneiras: extrapolando os resultados do cálculo de tensões nos pontos de Gauss como proposto em Cook *et al.* (2001) ou empregando o esquema de integração numérica de Lobatto para 5 pontos como sugerido por Burgoyne e Crisfield (1990), onde é recomendado utilizar n pontos de Gauss +2 quando utilizado o esquema de Lobatto para alcançar uma precisão similar. As coordenadas e pesos para a integração pela regra de Lobatto até com 10 pontos podem ser encontrados em Abramowitz e Stegun (1970). A diferença entre as regras de integração de Gauss e Lobatto é fundamentada em que, a última delas, leva em conta pontos nos extremos do intervalo de integração (ver Tabela 29), por conseguinte, são inclusos no cálculo das tensões os efeitos das fibras mais afastadas em relação ao plano meio da placa ou casca.

APÊNDICE C – FUNÇÕES DE PENALIZAÇÃO DE INSTABILIDADES NUMÉRICAS

C.1 Função de Penalização Para Eliminar as Variáveis de Projeto Intermediárias

Nas últimas iterações do processo de otimização, são perseguidas soluções do tipo 0-1 sendo desligado o filtro de sensibilidades para atenuar as escalas de cinza na topologia. Não obstante, essa estratégia pode não ser suficiente para lidar com essas instabilidades numéricas e, portanto é aumentado o termo $w_{VPI}F_{VPI}$ na função objetivo ao longo do processo de otimização, com a finalidade de levar as variáveis de projeto intermediárias para valores próximos de 0 ou 1 (pseudo-densidades ρ_e e pseudo-polarizações γ_e). Cabe advertir, que a penalização das variáveis de projeto intermediárias somente é levada em conta na função objetivo original quando $w_{VPI} \neq 0$. A função F_{VPI} é dada por (ANANTHASURESH, 2003; YIN; ANANTHASURESH, 2002):

$$F_{VPI} = \sum_{e=1}^N \rho_e(1 - \rho_e) + \sum_{p=1}^{N_p} \gamma_e(1 - \gamma_e) \quad (634)$$

e a sua sensibilidade:

$$\frac{dF_{VPI}}{d\chi_a} = \{(1 - 2\rho_e) \quad (1 - 2\gamma_e) \quad \odot_{N_f}\} \quad (635)$$

onde deve ser lembrado que o vetor de variáveis de projeto $\chi_a = \{\rho_e \quad \gamma_e \quad \hat{\theta}_e\}^T$ tem dimensão $N+N_p+N_f$ e F_{VPI} não depende das variáveis de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$. Na Figura 92, observa-se o comportamento da função F_{VPI} para uma variável de projeto qualquer. O valor máximo da função penalizadora F_{VPI} para $N+N_p$ variáveis de projeto afetadas é:

$$F_{VPI}^{\max} = \frac{N+N_p}{4} \quad (636)$$

valor que é obtido quando todas as variáveis de projeto assumem um valor de 0,5. Assim, o objetivo da otimização é minimizar o valor dessa função, fazendo com que as variáveis de projeto mudem para valores próximos de 0 e 1 com o intuito de obter topologias bem definidas tanto a nível de material quanto de polarização.

Figura 92 – Comportamento de uma componente do vetor de variáveis de projeto perante a função de penalização de variáveis de projeto intermediárias

Por outro lado, o peso w_{VPI} que acompanha a função F_{VPI} deve ser obtido por tentativa e erro para cada projeto, observando sempre o comportamento da função objetivo, uma vez que, valores excessivos podem gerar alterações abruptas e comportamentos inesperados. Contudo, na seção 4.8 é apresentado um esquema iterativo para o cálculo dos pesos que ponderam a função objetivo dependentes dos valores dos seus termos. Portanto, não existe um valor máximo recomendado para w_{VPI} , porém o valor mínimo para iniciar o seu processo de estimação neste trabalho foi de 1×10^{-5} , mesmo que, em Yin e Ananthasuresh (2002) e Ananthasuresh (2003) fosse considerado um valor de 2×10^{-3} .

No entanto, existe uma desvantagem quando utilizado um peso fixo em todas as iterações pois se a função F_{VPI} estiver próxima de zero mas não for exatamente nula, um valor excessivo de w_{VPI} em relação aos outros pesos w_i da função objetivo (ver seção 4.8) poderia provocar que material sólido torne-se vazio e a topologia chegue a ser desconexa. Assim, é seguida uma estratégia para variar o peso adotado na iteração inicial $(w_{VPI})_0$, baseada no valor da função F_{VPI} tanto da iteração atual quanto da anterior. Portanto, se z_f é o número máximo de iterações esperado, o peso w_{VPI} na k -ésima iteração do processo de otimização é:

$$(w_{VPI})_k = \begin{cases} (w_{VPI})_0 & k \leq 0.25z_f \\ w_{VPI}^{\min} \leq (w_{VPI})_0 \left[\frac{(F_{VPI})_k}{(F_{VPI})_{k-1}} \right] \leq w_{VPI}^{\max} & k > 0.25z_f \end{cases} \therefore \begin{cases} w_{VPI}^{\min} = 0,6(w_{VPI})_0 \\ w_{VPI}^{\max} = 4(w_{VPI})_0 \end{cases} \quad (637)$$

sendo os valores de $w_{VPI}^{\min}$ e $w_{VPI}^{\max}$ determinados por tentativa e erro. A porcentagem de variáveis intermediárias na solução final é calculada mediante o índice I_R , definido por:

$$I_R = \frac{F_{VPI}}{F_{VPI}^{\max}} \in [0,1] \quad (638)$$

em que F_{VPI} é o valor da função de penalização para eliminar as variáveis de projeto intermediárias dado pela eq.(634) e $F_{VPI}^{\max}$ o valor máximo dessa função calculada pela eq.(636). Outros esquemas de penalização para redução das variáveis de projeto intermediárias podem ser encontrados em Borrvall (2001); Borrvall e Petersson (2001) e Lau, Du e Lim (2001).

C.2 Função de Penalização Para Evitar a Formação da Instabilidade de Tabuleiro

O termo $w_{CCF}F_{CCF}$ é acrescentado na função objetivo em todo o processo de otimização quando o peso $w_{CCF} \neq 0$, com a finalidade de prevenir a aparição da instabilidade de tabuleiro nos campos das variáveis de pseudo-densidade ρ_e e de pseudo-polarização γ_e , embora esse esquema de penalização fosse originalmente concebido para evitar a formação de “*hinges*”. As instabilidades de tabuleiro são originadas pela diferença do grau de interpolação entre a função do modelo de material e a função do deslocamento no elemento finito. A função utilizada para esse fim é (POULSEN, 2002):

$$F_{CCF} = \sum_{i=1}^n H_i \quad (639)$$

sendo n o número de nós interiores⁷ presentes no domínio de projeto e H_i uma função da forma (POULSEN, 2002):

⁷ Um nó interior é aquele que não pertence à fronteira do domínio fixo de projeto.

$$H_i(\chi_3, \chi_1, \chi_4, \chi_2) = m_1(\chi_3, \chi_1, \chi_2) m_2(\chi_3, \chi_4, \chi_2) m_3(\chi_1, \chi_3, \chi_4) m_4(\chi_1, \chi_2, \chi_4) \quad (640)$$

em que $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ são as variáveis de projeto em torno do nó interior considerado (ver Figura 93), sendo que nos nós pertencentes às fronteiras do domínio de projeto, H_i não é avaliada. A função m_i é definida como:

$$m_i(a, b, c) = |b - a| + |c - b| - |c - a| \quad (641)$$

onde a, b e c representam um conjunto de variáveis de projeto qualquer, em torno de um nó interior n , conforme o mapeamento da Figura 93. A função H_i detecta a presença da instabilidade de tabuleiro ao redor de um nó quando alcança um valor máximo como é observado nos casos da Figura 93 diferenciados por um retângulo vermelho tracejado.

Figura 93 – Função de penalização para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro aplicada às variáveis de pseudo-densidade e pseudo-polarização

O valor máximo da função penalizadora para $N_{cam} = N_x N_y$ variáveis de projeto por camada, C_t camadas (variáveis de projeto ρ_e) e C_p camadas piezelétricas (variáveis de projeto γ_e) é dada pela expressão:

$$F_{CCF}^{max} = 16(C_t + C_p)(N_x - 1)(N_y - 1) = 16(C_t + C_p)n \therefore n = (N_x - 1)(N_y - 1) \quad (642)$$

sendo esse valor obtido quando existe uma alternância entre elementos sólidos e vazios em todo o domínio e entre elementos polarizados positiva e negativamente nas camadas piezelétricas (como se fosse um tabuleiro de xadrez). N_i é o número de variáveis de projeto na direção i quando considerada uma malha regular nas camadas. Por tal motivo, o objetivo da

otimização é minimizar o valor dessa função de modo que o arranjo de material em torno do nó considerado evite a formação da instabilidade. Além disso, a função de instabilidade de tabuleiro somente age sobre as pseudo-densidades ρ_e e as pseudo-polarizações γ_e , pois H_i mesmo estando definida no domínio da variável de pseudo-polarização $\hat{\theta}_e \in]-1,1[$, alcança valores nulos (o mínimo valor de H_i) em combinações de tabuleiro que alternam valores positivos e negativos, tendo que utilizar desse modo, outros esquemas de penalização para essa variável (ver seção 4.7).

O peso w_{CCF} acompanhando a função F_{CCF} é calculado por tentativa e erro para cada projeto, de modo a evitar comportamentos abruptos ou inesperados na função objetivo pelo seu excessivo incremento. Para determinar w_{CCF} neste trabalho foi utilizado um valor inicial de 1×10^{-5} . Não obstante, na seção 4.8 é mostrado um esquema iterativo para o cálculo dos pesos que ponderam a função objetivo dependentes dos valores dos seus termos.

Do mesmo modo que na função de penalização de variáveis intermediárias, existe a desvantagem de utilizar um peso fixo em todas as iterações para ponderar a função F_{CCF} . Quando F_{CCF} alcança valores próximos de zero mas não é completamente nula, um valor w_{CCF} excessivo em relação a os outros pesos de ponderação da função objetivo (ver seção 4.8) pode causar aglutinação de material em alguns pontos da estrutura, ocasionando a redução de outros membros pois existe uma restrição de volume no problema de otimização. Isso pode não ser favorável, se houverem restrições de tensão mecânica, as quais que não foram tratadas neste trabalho pelo fato de sua alta complexidade, pelo grande número de restrições altamente não lineares que devem ser introduzidas na formulação do problema (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010).

Consequentemente, o valor do peso w_{CCF} é determinado a cada iteração com um esquema semelhante ao adotado para a função de penalização de variáveis intermediárias. Assim, para a k -ésima iteração do processo de otimização tem-se:

$$(w_{CCF})_k = \begin{cases} (w_{CCF})_0 & k \leq 0.8z_f \\ w_{CCF}^{\min} \leq (w_{CCF})_0 \left[\frac{(F_{CCF})_k}{(F_{CCF})_{k-1}} \right] \leq w_{CCF}^{\max} & k > 0.8z_f \end{cases} \therefore \begin{cases} w_{CCF}^{\min} = 0,1(w_{CCF})_0 \\ w_{CCF}^{\max} = 1,2(w_{CCF})_0 \end{cases} \quad (643)$$

em que os valores de $w_{CCF}^{\min}$ e $w_{CCF}^{\max}$ foram determinados por experimentação numérica e sendo z_f o número máximo de iterações esperado. A porcentagem de instabilidades de tabuleiro presentes na solução pode ser calculada com o índice I_H , dado por:

$$I_H = \frac{F_{CCF}}{F_{CCF}^{\max}} \in [0,1] \quad (644)$$

em que F_{CCF} é o valor da função de penalização dado pela eq.(639) e $F_{VPI}^{\max}$ o valor máximo dessa função calculada pela eq.(642).

A sensibilidade da função F_{CCF} , tem um tratamento especial pelo fato de que a derivada da função valor absoluto ou módulo ($|x|$) não é contínua em zero⁸, recorrendo à utilização de um artifício numérico com o objetivo de trocar essa função por uma diferenciável em zero. Poulsen (2002) recomenda a substituição pela função:

$$|x| \cong \sqrt{x^2 + \epsilon^2} - \epsilon \quad (645)$$

com $\epsilon \rightarrow 0$, sendo recomendado $\epsilon = 0,1$. Neste trabalho foi adotado um valor de $\epsilon = 0,001$ sem prejuízo do resultado. Assim, a sensibilidade da função F_{CCF} , é dada por:

$$\frac{dF_{CCF}}{d\chi_a} = \frac{d}{d\chi_a} \left(\sum_{i=1}^n H_i \right) = \frac{dH_1}{d\chi_a} + \frac{dH_2}{d\chi_a} + \frac{dH_3}{d\chi_a} + \dots + \frac{dH_n}{d\chi_a} \quad (646)$$

sendo essa sensibilidade $\frac{dF_{CCF}}{d\chi_a}$ um vetor de dimensão $N+N_p+N_f$ pelo fato de que:

$$\frac{dF_{CCF}}{d\chi_a} = \left\{ \frac{dF_{CCF}}{d\rho_e} \quad \frac{dF_{CCF}}{d\gamma_e} \quad \odot_{N_f} \right\} \quad (647)$$

lembrando que F_{CCF} não depende das variáveis de projeto de pseudo-orientação $\hat{\theta}_e$. A sensibilidade da função H_i em relação às variáveis de projeto χ_a é (POULSEN, 2002):

⁸ A derivada da função valor absoluto ou módulo $|x|$ é: $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, que não é contínua em zero.

$$\frac{dH_i}{d\chi_a} = \frac{dm_1}{d\chi_a} m_2 m_3 m_4 + m_1 \frac{dm_2}{d\chi_a} m_3 m_4 + m_1 m_2 \frac{dm_3}{d\chi_a} m_4 + m_1 m_2 m_3 \frac{dm_4}{d\chi_a} \quad (648)$$

sendo as sensibilidades da função m_i , segundo o argumento dessa função, expressas por:

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{da} = -\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \epsilon^2}} + \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_3^2 + \epsilon^2}} \quad (649)$$

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{db} = \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \epsilon^2}} - \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_2^2 + \epsilon^2}} \quad (650)$$

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{dc} = \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_2^2 + \epsilon^2}} - \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_3^2 + \epsilon^2}} \quad (651)$$

com $\Delta_1 = b - a$, $\Delta_2 = c - b$ e $\Delta_3 = c - a$. Outros esquemas de penalização para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro podem ser encontrados em Zhou, Shyy e Thomas (2001); Poulsen (2003) e Pomezanski Querin e Rozvany (2005).

APÊNDICE D – PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL (PLS)

A PLS é um método de programação matemática que pode ser aplicado a problemas de otimização não linear, já que utiliza aproximações lineares sequencialmente com a finalidade de gerar uma solução mediante um critério de convergência que possa ser atingido. Além disso, a PLS é um método simples de programar que requer o cálculo das primeiras derivadas da função objetivo e as restrições, reduzindo o custo computacional. As aproximações lineares são baseadas em séries de Taylor de primeira ordem, nas quais são utilizadas as primeiras derivadas da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto (ou sensibilidades).

Assim, a aproximação é válida unicamente em torno das vizinhanças (aproximação local) do espaço de dimensão $N+N_p+N_f+3N_z+1$ formado pelas variáveis de projeto (incluindo as variáveis de projeto dos componentes do circuito e do fator de excitação harmônica, conforme o caso). Portanto, é necessário impor limites nessa vizinhança para não incorrer em erros. Esses limites são denominados limites móveis e correspondem aos valores extremos que devem respeitar as variáveis de projeto em cada aproximação linear, com o intuito de reduzir o erro na aproximação realizada. Os valores dos limites móveis são reduzidos se a variável de projeto não apresenta variação alguma ou se a função objetivo oscila, caso contrário, são incrementados.

Figura 94 – Aproximação linear da função objetivo e definição de limites móveis

Com o intuito de ilustrar melhor a ideia dos limites móveis, considere-se a função de uma variável da Figura 94. Pode-se observar que nas vizinhanças de x_0 e x_i a aproximação linear (reta vermelha) é válida. Contudo, o valor do limite móvel deve ser modificado de acordo com a curvatura da função $F(x)$, pois com valores grandes é comprometida a precisão, enquanto com valores pequenos o custo computacional é incrementado. Em regiões com curvatura pequena (em torno de x_0 , com raio de curvatura tendendo ao infinito) os limites móveis podem assumir valores grandes, e ao contrário em regiões com curvatura grande (em torno de x_i , com raio de curvatura tendendo para zero) os valores devem ser reduzidos.