Daniel de Almeida Fernandes

SISTEMA DE CONTROLE ÓTIMO PARA VEÍCULO SUBMERSÍVEL SEMI-AUTÔNOMO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

**São Paulo
2008**

Daniel de Almeida Fernandes

SISTEMA DE CONTROLE ÓTIMO PARA VEÍCULO SUBMERSÍVEL SEMI-AUTÔNOMO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Décio Crisol Donha

**São Paulo
2008**

Agradecimentos

Eu gostaria primeiramente de agradecer a Deus por me permitir a realização de um trabalho importante, edificante e digno. Depois, gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão pelo incentivo e indispensável apoio moral e material que recebi.

Gostaria de agradecer também ao amigo, professor e orientador na realização deste trabalho, Prof. Dr. Décio Crisol Donha, pelo suporte imprescindível durante minha trajetória como mestrando.

Finalmente, eu gostaria de estender meus sinceros agradecimentos a todos os amigos pelo incentivo e pelas muitas contribuições que recebi ao longo de toda a jornada. Em particular, gostaria de agradecer à estimada amiga Renata K. Marques, paciente revisora desta redação, de quem sempre recebi total incentivo, apoio e singular demonstração de companheirismo.

Resumo

Este trabalho apresenta aspectos teóricos e práticos relevantes do desenvolvimento do Sistema de Navegação e Controle (SNC) a ser implementado em um Veículo Submarino Semi-Autônomo (VSSA), tipo não carenado e auto propelido, que está em desenvolvimento e construção na Escola Politécnica da USP, para a Petrobrás. Os três graus de liberdade horizontais são controlados para seguirem trajetórias pré-definidas, enviadas como sinais de referência para navegação por uma estação de apoio localizada na superfície, responsável pela guiagem do veículo. Os sinais de referência enviados são acústicos propagados pela água. A implementação física do SNC e o controle dos três graus de liberdade verticais não fazem parte do escopo deste trabalho. O SNC consiste em um controlador determinístico, um seguidor de trajetórias linear quadrático alimentado por um vetor de estados estimado assintoticamente. Por segurança, em caso de falha de algum sensor, e para filtrar ruídos nos sinais medidos, um estimador de estados de ordem plena é utilizado conjuntamente. Pela simplicidade de síntese e implementação, esta arquitetura de controle é considerada a melhor alternativa para capacitar o VSSA a executar os movimentos semi-autônomos desejados. As técnicas de controle utilizadas requerem a linearização do modelo matemático não-linear que descreve o comportamento dinâmico do veículo. O modelo é obtido de maneira simplificada. Os resultados são gerados por simulações com o modelo não-linear.

Abstract

This work presents theoretical and practical aspects of the development of the Navigation and Control System (NCS) to be implemented into a Petrobras' Semi-Autonomous Underwater Vehicle (SAUV), an open-frame and self-propelled type, which is being developed and built at Escola Politécnica of the University of São Paulo (EPUSP). The three horizontal Degrees-of-Freedom (DoF) are controlled so that they can follow a pre-defined trajectory sent as navigation reference signals to the NCS by a support ship, responsible for the guidance of the vehicle and placed on the ocean surface. Reference signals are sent as acoustic signals through the ocean water. The implementation and the control of the three vertical DoF are not in the scope of the present work. The NCS is based upon a deterministic controller, a Linear Quadratic (LQ) trajectory follower fed by an asymptotically estimated state vector, even though all the state variables are available by direct measurements. For safety, if some sensor fails, and for filtering noise on measured signals, a full-order state estimator is also designed. Since the LQ controller architecture is rather simple to design and implement, it was elected to control the SAUV manoeuvres. The control techniques require a linear model of the dynamics of the vehicle. Hence, a linearization procedure is applied to the system of nonlinear differential equations that describe the dynamic behavior of the SAUV. The results presented are provided by computer-aided simulations with the nonlinear model of the plant.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de figuras	vii
Lista de tabelas	xi
Lista de siglas e abreviaturas	xii
Lista de símbolos	xiv
1 Introdução	1
1.1 Apresentação	1
1.2 Justificativa	4
1.3 Revisão bibliográfica	6
1.4 Objetivo geral	9
1.5 Metodologia	9
1.6 Organização da dissertação	10
2 Modelagem matemática do VSSA	12
2.1 Introdução	12
2.2 Descrição do veículo	13

2.3	Definições preliminares	15
2.3.1	Graus de liberdade	15
2.3.2	Sistemas de coordenadas	15
2.3.3	Planos de simetria do veículo	19
2.4	Modelagem matemática para 6GL	19
2.4.1	Definições para 6GL	19
2.4.2	Resultantes de forças e momentos externos aplicados ao VSSA .	22
2.4.3	Forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos	26
2.4.4	Forças e momentos produzidos pelos propulsores	34
2.4.5	Modelo para 6GL	40
2.5	Modelagem matemática para 3GL	41
2.5.1	Definições para 3GL	42
2.5.2	Representação do modelo no espaço de estados	44
2.5.3	Estabilidade do modelo	45
2.5.4	Modelo no sistema inercial de coordenadas	46
2.5.5	Modelo estendido no sistema inercial de coordenadas	49
3	Sistema de Navegação e Controle	52
3.1	Introdução	52
3.2	Etapas de síntese do SNC	54
3.2.1	Modelo linear e invariante no tempo	54
3.2.2	Regulador ótimo de estados	60
3.2.3	Seguidor de trajetórias	63
3.2.4	Estimador de estados	65
3.2.5	Outros blocos funcionais	70
3.3	Síntese do SNC	76
3.4	Apresentação do SNC proposto	83
4	Aplicação e Resultados	84

4.1	Introdução	84
4.2	Operação em condições nominais	84
4.3	Avaliação da robustez	87
4.3.1	Variações dos parâmetros nominais da planta	87
4.3.2	Falha total de um propulsor horizontal	91
5	Considerações finais	94
5.1	Conclusões	94
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	95
	Referências Bibliográficas	101
A	Dados usados nas simulações	102
B	Seguidor de trajetórias LQ	103

Lista de Figuras

1.1	Classificação geral de veículos submarinos não tripulados	3
1.2	Fotografia do VSSA em desenvolvimento na USP	5
2.1	GL de um corpo tridimensional livre e submerso em um fluido	15
2.2	Sistemas inercial e móvel de coordenadas	16
2.3	Respostas estáticas dos quatro propulsores horizontais	39
2.4	Respostas estáticas dos quatro propulsores verticais	39
2.5	Disposição física e numeração dos propulsores horizontais	39
2.6	Disposição física e numeração dos propulsores verticais	39
2.7	Relações geométricas entre as velocidades relativas e absolutas	47
3.1	Sistema completo de controle de movimento do VSSA	53
3.2	Empuxo aplicado na direção do eixo X_0	58
3.3	Velocidades absolutas para máximo empuxo simétrico em X_0	58
3.4	Empuxo aplicado na direção do eixo Y_0	59
3.5	Velocidades absolutas para máximo empuxo simétrico em Y_0	59
3.6	Torque aplicado em relação ao eixo Z_0	59
3.7	Velocidades absolutas para máximo torque simétrico em Z_0	59
3.8	RLQ atuando sobre a planta não-linear do VSSA	63
3.9	Seguidor de trajetórias LQ atuando sobre a planta não-linear	64
3.10	Estimador linear de estados	67
3.11	Seguidor de trajetórias LQ baseado em vetor de estados estimado atuando sobre a planta não-linear	68

3.12	Conjunto de todos os controles possíveis	77
3.13	Sinais de referência em degrau sem e com pré-filtro incorporado	79
3.14	Sinais de referência senoidais sem e com pré-filtro incorporado	79
3.15	Valores finais no horizonte de simulação estabelecido	80
3.16	Picos máximos dos deslocamentos absolutos	80
3.17	Tempos dos picos máximos dos deslocamentos absolutos	80
3.18	Tempos de subida dos deslocamentos absolutos	80
3.19	Tempos de acomodação dos deslocamentos absolutos	81
3.20	Erros em relação às trajetórias de referência	81
3.21	Picos máximos dos empuxos e torque	81
3.22	Tempos de saturação dos empuxos e torque	81
3.23	Tempos de acomodação das tensões de controle	82
3.24	Tempos de saturação das tensões de controle	82
3.25	VSSA com o SNC incorporado	83
4.1	Deslocamentos absolutos para referências em degrau	85
4.2	Velocidades absolutas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	85
4.3	Empuxos e torque para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	85
4.4	Tensões elétricas de controle para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	85
4.5	Trajetória absoluta para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	86
4.6	Trajetória absoluta para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos	86
4.7	Deslocamentos absolutos para referências senoidais	86

4.8	Velocidades absolutas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos	86
4.9	Empuxos e torque para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	86
4.10	Tensões elétricas de controle para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	86
4.11	Deslocamentos absolutos extremos para referências em degrau	89
4.12	Trajetórias absolutas extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	89
4.13	Empuxos e torque extremos para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	89
4.14	Tensões de controle extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos	89
4.15	Deslocamentos absolutos extremos para referências senoidais	90
4.16	Trajetórias absolutas extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos	90
4.17	Empuxos e torque extremos para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos	90
4.18	Tensões de controle extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos	90
4.19	Deslocamentos absolutos extremos para referências em degrau sob falha total do propulsor 1	92
4.20	Trajetórias absolutas extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	92
4.21	Empuxos e torque extremos para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	92
4.22	Tensões de controle extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	92

4.23	Deslocamentos absolutos extremos para referências senoidais sob falha total do propulsor 1	92
4.24	Trajetórias absolutas extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	92
4.25	Empuxos e torque extremos para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	93
4.26	Tensões de controle extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1	93

Lista de Tabelas

2.1	Graus de liberdade de movimento na engenharia naval	16
2.2	Velocidades relativas, forças e momentos de força	22
2.3	Coeficientes de força linearizados dos propulsores	38
3.1	Tabela de combinações numeradas	78
4.1	Fatores multiplicadores dos parâmetros do modelo não-linear	89
A.1	Dados usados nas simulações: corpo rígido	102
A.2	Dados usados nas simulações: hidrostáticos e hidrodinâmicos	102
A.3	Dados usados nas simulações: propulsores	102

Lista de siglas e abreviaturas

Com 2 letras

CC	Centro de Carena
CG	Centro de Gravidade
GL	Grau de Liberdade
LQ	Linear Quadrático
MA	Malha Aberta
MF	Malha Fechada

Com 3 letras

AUV	<i>Autonomous Underwater Vehicle</i>
DoF	Degree-of-Freedom
EAR	Equação Algébrica de Riccati
GNC	Guiagem, Navegação e Controle
GPS	<i>Global Positioning System</i>
LED	Light Emitting Diode
LIT	Linear e Invariante no Tempo
LoS	Line-of-Sight
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQI	Linear Quadrático com Integral
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i>
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
RLQ	Regulador Linear Quadrático
ROV	<i>Remotely Operated Vehicle</i>
SNC	Sistema de Navegação e Controle
SPD	Semi-Plano Direito
SPE	Semi-Plano Esquerdo
USP	Universidade de São Paulo
UUV	<i>Unmanned Underwater Vehicle</i>

3GL	Três Graus de Liberdade
6GL	Seis Graus de Liberdade

Com 4 letras

DGPS	<i>Differential Global Positioning System</i>
ITAE	<i>Integral of Time multiplied by the Absolute values of the Error</i>
MIMO	<i>Multiple-Input-Multiple-Output</i>
SAUV	<i>Semi-Autonomous Underwater Vehicle</i>
SISO	<i>Single-Input-Single-Output</i>
VSNT	Veículo Submarino Não Tripulado
VSOA	Veículo Submarino de Operação Autônoma
VSOR	Veículo Submarino Operado Remotamente
VSSA	Veículo Submarino Semi-Autônomo

Com 5 letras

EPUSP	Escola Politécnica de engenharia da USP
--------------	---

Lista de símbolos

Relacionados ao sistema inercial de coordenadas

$\mathbf{V}_{\mathbf{XYZ}}(t)$	Vetor genérico no sistema inercial de coordenadas
$x(t)$	Deslocamento linear absoluto na direção do eixo X [m]
X	Eixo X do sistema inercial de coordenadas
XYZ	Sistema inercial de coordenadas (coordenadas absolutas)
$y(t)$	Deslocamento linear absoluto na direção do eixo Y [m]
Y	Eixo Y do sistema inercial de coordenadas
$z(t)$	Deslocamento linear absoluto na direção do eixo Z [m]
Z	Eixo Z do sistema inercial de coordenadas
$\theta(t)$	Deslocamento angular absoluto em torno do eixo Y [rad]
$\mu(t)$	Vetor de deslocamentos absolutos lineares e angulares
$\phi(t)$	Deslocamento angular absoluto em torno do eixo X [rad]
$\psi(t)$	Deslocamento angular absoluto em torno do eixo Z [rad]

Relacionados ao sistema móvel de coordenadas

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	Vetores unitários que caracterizam o sistema móvel de coordenadas
$p(t)$	Velocidade angular em torno do eixo X_0 – jogo ou <i>roll</i> [rad/s]
$q(t)$	Velocidade angular em torno do eixo Y_0 – caturro ou <i>pitch</i> [rad/s]
$r(t)$	Velocidade angular em torno do eixo Z_0 – aproamento ou <i>yaw</i> [rad/s]
$u(t)$	Velocidade linear na direção do eixo X_0 – avanço ou <i>surge</i> [m/s]
$v(t)$	Velocidade linear na direção do eixo Y_0 – deriva ou <i>sway</i> [m/s]
$\mathbf{V}_{\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0}(t)$	Vetor genérico no sistema móvel de coordenadas
$w(t)$	Velocidade linear na direção do eixo Z_0 – arfagem ou <i>heave</i> [m/s]
X_0	Eixo X_0 do sistema móvel de coordenadas
$X_0Y_0Z_0$	Sistema móvel de coordenadas (coordenadas relativas)
Y_0	Eixo Y_0 do sistema móvel de coordenadas
Z_0	Eixo Z_0 do sistema móvel de coordenadas
$\nu(t)$	Vetor de velocidades relativas lineares e angulares

$ \nu(t) \nu(t)$	Vetor-coluna quadrático de velocidades relativas
$\omega(t)$	Vetor de velocidades angulares no sistema móvel de coordenadas

Relacionados às forças e momentos de corpo rígido

$\mathbf{C}_C(\nu(t))$	Matriz centrípeta de corpo rígido
$F_i(t)$	Força externa resultante aplicada na direção do eixo X_0 [N]
$F_j(t)$	Força externa resultante aplicada na direção do eixo Y_0 [N]
$F_k(t)$	Força externa resultante aplicada na direção do eixo Z_0 [N]
g	Aceleração da gravidade da Terra [m/s^2]
$\mathbf{H}(t)$	<i>Momentum</i> angular [$kg \cdot m^2 \cdot rad/s$]
I_i	Momento de inércia relativo ao eixo X_0 [$kg \cdot m^2$]
I_j	Momento de inércia relativo ao eixo Y_0 [$kg \cdot m^2$]
I_k	Momento de inércia relativo ao eixo Z_0 [$kg \cdot m^2$]
$\mathbf{I}^{CG}$	Tensor de inércia do VSSA
$\mathbf{L}(t)$	<i>Momentum</i> linear [$kg \cdot m/s$]
m	Massa do VSSA [kg]
$\mathbf{M}_C$	Matriz de inércia de corpo rígido
$M_i(t)$	Momento externo resultante aplicado em relação ao eixo X_0 [$N \cdot m$]
$M_j(t)$	Momento externo resultante aplicado em relação ao eixo Y_0 [$N \cdot m$]
$M_k(t)$	Momento externo resultante aplicado em relação ao eixo Z_0 [$N \cdot m$]
$\tau(t)$	Vetor de forças e momentos externos aplicados ao VSSA

Relacionados às forças e momentos hidrostát. e hidrodinâm.

A_C	Área característica da superfície do VSSA [m^2]
$\mathbf{C}_A(\nu(t))$	Matriz centrípeta de massa adicionada
D_{pp}	Coef. de amortec. para vel. angular em torno de X_0 [<i>adimensional</i>]
D_{qq}	Coef. de amortec. para vel. angular em torno de Y_0 [<i>adimensional</i>]
D_{rr}	Coef. de amortec. para vel. angular em torno de Z_0 [<i>adimensional</i>]
D_{uu}	Coef. de amortec. para vel. linear na direção de X_0 [<i>adimensional</i>]
D_{vv}	Coef. de amortec. para vel. linear na direção de Y_0 [<i>adimensional</i>]
D_{ww}	Coef. de amortec. para vel. linear na direção de Z_0 [<i>adimensional</i>]
$\mathbf{D}(\nu(t))$	Matriz de amortecimento hidrodinâmico
$\mathbf{D}(\rho, A, Re)$	Matriz de coeficientes de amortecimento hidrodinâmico
F	Força de flutuação atuante sobre o CC do VSSA [N]
$F_{H_i}(t)$	Força hidrostática e hidrodinâmica result. na dir. do eixo X_0 [N]
$F_{H_j}(t)$	Força hidrostática e hidrodinâmica result. na dir. do eixo Y_0 [N]

$F_{H_k}(t)$	Força hidrostática e hidrodinâmica result. na dir. do eixo Z_0 $[N]$
$\mathbf{L}_{CC}$	Vetor distância do CC ao CG do VSSA
$\mathbf{M}_A$	Matriz de inércia de massa adicionada
$M_{H_i}(t)$	Momento hidrostático e hidrodinâmico result. em rel. ao eixo X_0 $[N \cdot m]$
$M_{H_j}(t)$	Momento hidrostático e hidrodinâmico result. em rel. ao eixo Y_0 $[N \cdot m]$
$M_{H_j}(t)$	Momento hidrostático e hidrodinâmico result. em rel. ao eixo Z_0 $[N \cdot m]$
$M_{\dot{p}}$	Coef. de massa adicionada para acel. angular em torno de X_0 $[kg \cdot m^2]$
$M_{\dot{q}}$	Coef. de massa adicionada para acel. angular em torno de Y_0 $[kg \cdot m^2]$
$M_{\dot{r}}$	Coef. de massa adicionada para acel. angular em torno de Z_0 $[kg \cdot m^2]$
$M_{\dot{u}}$	Coef. de massa adicionada para acel. linear na direção de X_0 $[kg]$
$M_{\dot{v}}$	Coef. de massa adicionada para acel. linear na direção de Y_0 $[kg]$
$M_{\dot{w}}$	Coef. de massa adicionada para acel. linear na direção de Z_0 $[kg]$
P	Força peso atuante sobre o CG do VSSA $[N]$
Re	Número de Reynolds $[adimensional]$
$\mathbf{W}(\mu(t))$	Vetor de forças e momentos restaurativos hidrostáticos
x_{CC}	Distância do CC ao CG projetada sobre o eixo X_0 $[m]$
y_{CC}	Distância do CC ao CG projetada sobre o eixo Y_0 $[m]$
z_{CC}	Distância do CC ao CG projetada sobre o eixo Z_0 $[m]$
ρ	Densidade volumétrica da água marinha $[kg/m^3]$
$\tau_{\mathbf{H}}(t)$	Vetor de forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos resultantes
∇	Volume de fluido deslocado pelo VSSA $[m^3]$

Relacionados às forças e momentos do sistema propulsor

b_P	Coeficiente de força linearizado do propulsor $[N/V^2]$
$\mathbf{B}_{CONFIG}$	Matriz de configuração dos empuxos dos propulsores
$\mathbf{B}_C(\mathbf{V}(t))$	Matriz de coeficientes lineares de força
$\mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t))$	Matriz de propulsão
$c_{\bullet_i}$	Coeficiente de força linearizado do propulsor i $[N/V^2]$
D	Diâmetro do duto do propulsor $[m]$
E_{min}	Máx. magnitude de empuxo de um prop. no sentido reverso de rotação $[N]$
E_{max}	Máx. magnitude de empuxo de um prop. no sentido direto de rotação $[N]$
$E_i(t)$	Empuxo estático produzido pelo propulsor i $[N]$
$\mathbf{E}(t)$	Vetor de empuxos dos propulsores horizontais
$F_{P_i}(t)$	Força de propulsão resultante aplicada na direção do eixo X_0 $[N]$
$F_{P_j}(t)$	Força de propulsão resultante aplicada na direção do eixo Y_0 $[N]$
$F_{P_k}(t)$	Força de propulsão resultante aplicada na direção do eixo Z_0 $[N]$

J_P	Número de avanço [<i>adimensional</i>]
$K_E(J_P)$	Coef. de força do prop. em função do número de avanço [<i>adimensional</i>]
L_{X_0}	Braço do momento de jogo em relação ao CG [<i>m</i>]
L_{Y_0}	Braço do momento de caturro em relação ao CG [<i>m</i>]
$L_{X_0Y_0}$	Braço do momento de aproamento em relação ao CG [<i>m</i>]
$M_{P_i}(t)$	Momento de propulsão resultante em relação ao eixo X_0 [<i>N·m</i>]
$M_{P_j}(t)$	Momento de propulsão resultante em relação ao eixo Y_0 [<i>N·m</i>]
$M_{P_k}(t)$	Momento de propulsão resultante em relação ao eixo Z_0 [<i>N·m</i>]
$v_P(t)$	Velocidade com que a água entra no propulsor [<i>m/s</i>]
$V(t)$	Tensão elétrica de controle do propulsor [<i>V</i>]
V_{min}	Mínima tensão elétrica de controle admitida por um propulsor [<i>V</i>]
V_{max}	Máxima tensão elétrica de controle admitida por um propulsor [<i>V</i>]
$\mathbf{V}(t)$	Vetor de tensões elétricas de controle dos propulsores
$ \mathbf{V}(t) \mathbf{V}(t)$	Vetor-coluna quadrático de tensões elétricas
w	Coeficiente de esteira [<i>adimensional</i>]
β	Âng. entre os eixos X_0 e de instalação dos prop. horizontais [$^\circ$]
η_1	Coeficiente de instalação dos propulsores horizontais [<i>adimensional</i>]
η_2	Coeficiente de instalação dos propulsores verticais [<i>adimensional</i>]
$ \nu(t) _{dir}$	Módulo do vetor $\nu(t)$ projetado na direção do eixo do propulsor
$\tau_P(t)$	Vetor de forças e momentos resultante produzidos pelos propulsores
ω_P	Velocidade angular do hélice do propulsor [<i>rad/s</i>]

Relacionados ao modelo da planta

A_{ij}	Elemento da linha i e da coluna j da matriz $\mathbf{A}(\nu(t))$
$\mathbf{A}$	Matriz dinâmica do modelo estendido para 3GL linearizado
$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$	Matriz dinâmica do modelo estendido para 3GL
$\mathbf{A}(\nu(t))$	Matriz dinâmica do modelo para 3GL no sistema móvel de coordenadas
B_{ij}	Elemento da linha i e da coluna j da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{V}(t))$
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada do modelo estendido para 3GL linearizado
$\mathbf{B}(\mathbf{u}(t))$	Matriz de entrada do modelo estendido para 3GL
$\mathbf{B}(\mathbf{V}(t))$	Matriz de entrada do modelo para 3GL no sistema móvel de coordenadas
$\tilde{\mathbf{B}}$	Matriz equivalente à matriz $\mathbf{B}$ com uma das colunas nula
$\mathbf{C}$	Matriz de saída do modelo estendido para 3GL linearizado ou no sist. XYZ
$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t))$	Matriz de saída do modelo estendido para 3GL
$\mathbf{C}(\nu(t))$	Matriz centrípeta total: $\mathbf{C}(\nu(t)) = \mathbf{C}_C(\nu(t)) + \mathbf{C}_A(\nu(t))$
$\mathbf{d}(t)$	Vetor de distúrbios sobre o vetor de estados da planta

D	Matriz de transmissão direta de todos os modelos para 3GL
J ($\mu(t)$)	Matriz ortogonal de transformação de coordenadas
M	Matriz de inércia total: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_A$
n (t)	Vetor de ruídos de medição sobre o vetor de estados da planta
V ($\nu(t)$)	Função de Lyapunov para teste de estabilidade
$u_i(t)$	Elemento i do vetor de controle [V]
$u_1(t)$	1° elemento do vetor de controle, relativo à $V_1(t)$ [V]
$u_2(t)$	2° elemento do vetor de controle, relativo à $V_2(t)$ [V]
$u_3(t)$	3° elemento do vetor de controle, relativo à $V_3(t)$ [V]
$u_4(t)$	4° elemento do vetor de controle, relativo à $V_4(t)$ [V]
u (t)	Vetor de controle
$x_1(t)$	1° elemento do vetor de estados, relativo à $x(t)$ [m]
$x_2(t)$	2° elemento do vetor de estados, relativo à $y(t)$ [m]
$x_3(t)$	3° elemento do vetor de estados, relativo à $\psi(t)$ [rad]
$x_4(t)$	4° elemento do vetor de estados, relativo à $u(t)$ [m/s]
$x_5(t)$	5° elemento do vetor de estados, relativo à $v(t)$ [m/s]
$x_6(t)$	6° elemento do vetor de estados, relativo à $r(t)$ [rad/s]
x (t)	Vetor de estados
$\bar{x}_1$	1° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{x}_2$	2° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{x}_3$	3° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{x}_4$	4° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{x}_5$	5° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{x}_6$	6° elemento do vetor de estados no ponto de linearização do modelo
$\bar{\mathbf{x}}$	Vetor de estados no ponto de linearização do modelo estendido
$y_1(t)$	1° elemento do vetor de saída, relativo à $x(t)$ [m]
$y_2(t)$	2° elemento do vetor de saída, relativo à $y(t)$ [m]
$y_3(t)$	3° elemento do vetor de saída, relativo à $\psi(t)$ [rad]
$y_4(t)$	4° elemento do vetor de saída, relativo à $\dot{x}(t)$ [m/s]
$y_5(t)$	5° elemento do vetor de saída, relativo à $\dot{y}(t)$ [m/s]
$y_6(t)$	6° elemento do vetor de saída, relativo à $\dot{\psi}(t)$ [rad/s]
y (t)	Vetor de saída

Relacionados ao Sistema de Navegação e Controle

B_{COMP}	Grupo de matrizes de compensação da falha dos propulsores
B_{COMP_N}	Matrizes de compensação de falhas dos propulsores, $N \in \mathbb{N} / N \in [0, 4]$

$\mathbf{B}_N$	Matrizes de config. dos empuxos sob falhas dos prop., $N \in \mathbb{N} / N \in [0, 4]$
$\mathcal{C}$	Matriz de controlabilidade
$E_{RESIDUAL}$	Empuxo residual produzido pelos propulsores $[N]$
$\mathbf{E}_{RES}$	Vetor de empuxos residuais
f_C	Frequência de corte dos filtros passa-baixas do pré-filtro para -3 dB $[Hz]$
$f(s)$	Função de transferência do pré-filtro
$\mathbf{F}(s)$	Matriz de funções de transferência do pré-filtro
$\mathbf{G}$	Matriz de realimentação ótima de estados
$\mathbf{G}_{COMP}$	Matriz de realimentação ótima de estados sob falha de um dos propulsores
$\mathbf{H}$	Matriz de injeção ótima de saída
$\mathbf{H}_{COMP}$	Matriz de injeção ótima de saída sob falha de um dos propulsores
I	Índice de desempenho ou funcional integral quadrático
J	Índice de desempenho ou funcional integral quadrático
$\mathcal{O}$	Matriz de observabilidade
$\mathbf{r}(t)$	Vetor de funções de referência temporais
$\mathbf{R}$	Matriz de entrada de referências
$S(s)$	Convolução de $f(s)$ com função degrau no domínio de Laplace
$s(t)$	Resposta temporal da convolução $S(s)$
t	Tempo $[s]$
$\mathbf{T}_N$	Matriz esparsa relativa à falha do propulsor N
$\mathbf{U}(\mathbf{E}(t))$	Matriz de conversão de empuxos em tensões elétricas
w_U	Multiplicador de todos os elementos da matriz $\mathbf{W}_U$
$\mathbf{W}_U$	Matriz diagonal de ponderação ou de penalização dos controles
w_X	Multiplicador de todos os elementos da matriz $\mathbf{W}_X$
w_{x_1}	Elemento 11 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_1(t)$
w_{x_2}	Elemento 22 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_2(t)$
w_{x_3}	Elemento 33 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_3(t)$
w_{x_4}	Elemento 44 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_4(t)$
w_{x_5}	Elemento 55 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_5(t)$
w_{x_6}	Elemento 66 da matriz $\mathbf{W}_X$; pondera ou penaliza $x_6(t)$
$\mathbf{W}_X$	Matriz diagonal de ponderação ou de penalização dos estados
w_Y	Multiplicador de todos os elementos da matriz $\mathbf{W}_Y$
w_{y_1}	Elemento 11 da matriz $\mathbf{W}_Y$; pondera ou penaliza $y_1(t)$
w_{y_2}	Elemento 22 da matriz $\mathbf{W}_Y$; pondera ou penaliza $y_2(t)$
w_{y_3}	Elemento 33 da matriz $\mathbf{W}_Y$; pondera ou penaliza $y_3(t)$
w_{y_4}	Elemento 44 da matriz $\mathbf{W}_Y$; pondera ou penaliza $y_4(t)$
w_{y_5}	Elemento 55 da matriz $\mathbf{W}_Y$; pondera ou penaliza $y_5(t)$

w_{y_6}	Elemento 66 da matriz $\mathbf{W_Y}$; pondera ou penaliza $y_6(t)$
$\mathbf{W_Y}$	Matriz diagonal de ponderação ou de penalização das saídas
$x_{ref}(t)$	Função temporal de referência para o deslocamento absoluto $x(t)$
$\tilde{\mathbf{x}}(t)$	Vetor de estados estimado
$\mathbf{X}_\infty$	Solução simétrica aproximada de uma equação algébrica de Riccati
$y_{ref}(t)$	Função temporal de referência para o deslocamento absoluto $y(t)$
$\mathbf{Y}_\infty$	Solução simétrica aproximada de uma equação algébrica de Riccati
3/6	Gerador do vetor de estados com apenas três medidas efetuadas por sensores
$\psi_{ref}(t)$	Função temporal de referência para o deslocamento absoluto $\psi(t)$

Subscritos (.)

A	Massa adicionada
C	Corpo rígido, característico ou característica, coeficientes ou valor de corte
CC	Centro de carena
$COMP$	Compensação
$CONFIG$	Configuração
D	Sentido direto de rotação
E	Empuxo
H	Hidrodinâmico ou hidrodinâmica
i	Relativo ou relativa ao eixo X_0 ou índice genérico
j	Relativo ou relativa ao eixo Y_0 ou índice genérico
k	Relativo ou relativa ao eixo Z_0
max	Máximo valor
min	Mínimo valor
M	Momento de força
N	Número do propulsor
P	Propulsor
ref	Referência
RES	Residual
R	Sentido reverso de rotação
XYZ	Relativo ou relativa ao sistema inercial de coordenadas
U	Controles
X	Estados
X_0	Relativo ou relativa ao eixo X_0
X_0Y_0	Relativo ou relativa aos eixos X_0 e Y_0 simultaneamente
$X_0Y_0Z_0$	Relativo ou relativa ao sistema móvel de coordenadas

Y	Saídas
Y_0	Relativo ou relativa ao eixo Y_0
∞	Regime permanente ($t \rightarrow \infty$)

Sobrescritos ($\bullet$)

CG	Centro de gravidade
T	Transposto ou transposta
$-T$	Transposto inverso ou transposta inversa
-1	Inverso ou inversa
$\star$	Pseudo-inversa de Moore-Penrose de matriz retangular

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Há séculos a humanidade considera o mar uma parte indissociável de seu território devido às riquezas e benefícios que este oferece, além, evidentemente, da fascinação que exerce. Igualmente antiga é a história da exploração dos oceanos para fins de produção de suprimentos e como meio de transporte. Destacam-se desde épocas remotas a pesca, a produção de sal, o transporte de pessoas e de bens de consumo e as guerras, entre outros. Estas atividades estão relacionadas à exploração da superfície marinha ou, no máximo, à exploração de pequenas profundidades submarinas. Para apoiá-las, a engenharia naval desenvolveu numerosas técnicas relativas a navegação, projeto, construção e manutenção de veículos (embarcações de diversos tipos e plataformas).

Mais recentemente, entretanto, fato apoiado e consolidado pelos avanços tecnológicos conquistados pela ciência moderna, cresce o interesse do homem pelas atividades submarinas, especialmente em águas profundas. Como exemplo, são realizadas atualmente atividades no fundo do mar em profundidades que podem alcançar uma dezena de quilômetros. Destacam-se a exploração comercial de recursos marítimos, como petróleo, gás e diversos tipos de minérios; a exploração científica, como coleta de amostras de fauna, flora e fósseis para estudos; os aspectos de segurança nacional, entre outros. Tais fatos estimulam o desenvolvimento de veículos submarinos de pequeno ou médio porte não tripulados e construídos para realizarem tarefas e missões específicas;

algumas delas exigem graus de precisão tão elevados, associados a condições ambientais tão hostis, que inviabilizam o envio de homens para executá-las.

Um Veículo Submarino Não Tripulado (VSNT), também denominado genericamente robô submarino, pode ser classificado de acordo com seus graus de automação e de autonomia de operação. Existem basicamente três classes diferentes de robôs submarinos: o Veículo Submarino Operado Remotamente (VSOR), o Veículo Submarino Semi-Autônomo (VSSA) e o Veículo Submarino de Operação Autônoma (VSOA). Na literatura técnica internacional eles são conhecidos genericamente como *Unmanned Underwater Vehicle* (UUV) e são classificados pelos tipos *Remotely Operated Vehicle* (ROV), *Semi-Autonomous Underwater Vehicle* (SAUV) e *Autonomous Underwater Vehicle* (AUV), relativamente aos nomes usados em língua portuguesa.

Os veículos comumente são autopropelidos¹, executam suas manobras através de seus propulsores, de superfícies de controle ou de ambos simultaneamente, e trocam informações com suas estações de apoio, em terra ou instaladas em plataformas ou embarcações posicionadas dinamicamente na superfície oceânica, durante as operações que realizam. A comunicação pode ser estabelecida fisicamente, através de um cabo umbilical – *tether* –, ou não, através de sinais acústicos que se propagam pela água. Pelo cabo umbilical trafegam todos os dados, sinais de controle e vídeo e alimentação elétrica, quando os veículos não portam suas próprias fontes de energia.

A classificação de um VSNT como um tipo específico de robô submarino segue as definições:

- O VSOR é operado de uma estação localizada na superfície através de uma interligação física, o cabo umbilical. Pode carregar baterias para provimento de energia elétrica e reduzir o diâmetro e aumentar a extensão do cabo expressivamente. É dotado de pequena autonomia e, por isso, as manobras que realiza dependem da destreza do operador;

¹Alguns tipos, ao contrário, são rebocados por embarcações.

- O VSSA é operado de uma estação localizada na superfície através de sinais acústicos que se propagam na água; não há interligação física entre ambos. Dispõe de baterias de alimentação elétrica. Possui maior autonomia nas manobras em comparação com o tipo VSOR;
- O VSOA é monitorado remotamente de uma estação que pode estar localizada a grande distância do local de operação do robô, inclusive em terra; dispensa a estação de apoio na superfície e requer apenas uma embarcação para lançamento no mar. A comunicação do veículo com a estação é estabelecida indiretamente, através de sinais acústicos entre o veículo e um transceptor submerso, que se comunica via cabo com um transceptor flutuante na superfície que, finalmente, pode se comunicar via satélite com a estação. Dispõe de baterias de alimentação elétrica e possui autonomia das manobras que realiza.

A figura 1.1 representa um esquema de classificação dos veículos submarinos não tripulados em geral.

Figura 1.1: Classificação geral de veículos submarinos não tripulados

1.2 Justificativa

O Brasil utiliza equipamentos sofisticados como os VSNT para executar ou auxiliar missões submarinas já há algum tempo; transporte, instalação, manutenção e recuperação de equipamentos em poços de petróleo são tarefas já realizadas com sucesso pelos robôs. Infelizmente, como o país ainda não os produz, cada VSNT disponível aqui é alugado ou importado de países com maior tradição nesta área. As despesas com aluguel e manutenção dos veículos e outros dispositivos associados são apreciáveis. A pouca tradição nacional limita, inclusive, a oferta e o desenvolvimento de mão-de-obra especializada na operação deste tipo de equipamento. Recorrer freqüentemente ao apoio de equipes e equipamentos estrangeiros só contribui para a perpetuação da condição atual.

Visando atender o interesse econômico estratégico que o mercado de prospecção e produção de petróleo *off-shore* em águas profundas representa para o Brasil, onde se destaca o interesse particular da Petrobras – companhia de vanguarda na exploração submarina de petróleo em águas profundas –, um VSSA tipo não carenado e auto-propelido está em desenvolvimento e construção por uma equipe técnica multidisciplinar, formada por pesquisadores ligados à Universidade de São Paulo (USP). O VSSA integra um projeto temático gerenciado e iniciado no departamento de Engenharia Mecatrônica da Escola Politécnica de Engenharia da USP (EPUSP) e conta com a colaboração dos departamentos de Engenharia Mecânica, Naval e Oceânica e do Instituto Oceanográfico da USP. A figura 1.2 mostra o veículo em desenvolvimento na universidade. A primeira missão atribuída a ele é recuperar sinalizadores acústicos, instalados no fundo do mar, utilizados como referências no posicionamento dinâmico de navios de perfuração de poços de petróleo.

A estrutura mecânica do veículo já está completamente montada, com os elementos estruturais fixados, os propulsores, os vasos de pressão e os flutuadores instalados. As conexões elétricas, entre os vasos de pressão e deles aos propulsores, já estão

Figura 1.2: Fotografia do VSSA em desenvolvimento na USP

feitas. Grande parte do *hardware* – eletrônica embarcada – necessário à operação já foi adquirido e aguarda no momento que sejam feitos os testes e o término da instalação. Ainda faltam ser adquiridos alguns sensores e acessórios importantes do robô. Um sistema completo de Guiagem, Navegação e Controle (GNC), subdividido em dois subsistemas, de guiagem e de navegação e controle, ainda não está disponível para comandar o veículo em missões submarinas.

Uma arquitetura para o Sistema de Navegação e Controle (SNC) embarcado neste VSSA, diferente da arquitetura proposta nesta dissertação, já foi desenvolvida e apresentada em um trabalho anterior, entretanto, ela jamais foi implementada fisicamente. Ver Aguilar [2]. O SNC proposto neste trabalho consiste em um controle linear determinístico que atua na planta multivariável não-linear e fortemente acoplada do robô, o que aparentemente não produz bons resultados, a não ser que sejam garantidas algumas condições hipoteticamente assumidas. Particularmente, a simplicidade de síntese e de implementação do SNC no veículo, justificam a proposta ora apresentada e tornam esta arquitetura de controle uma boa alternativa para capacitar o VSSA a executar os movimentos semi-autônomos desejados.

Este projeto de VSNT oferece grande contribuição científica e tecnológica ao país, não restrita apenas ao setor de produção de petróleo, mas a muitos outros setores. Há

pesquisas simultâneas acontecendo nos diferentes departamentos de engenharia envolvidos no esforço de construir o veículo; no futuro, após o término da construção e dos testes, outras pesquisas poderão ser feitas para aperfeiçoar, readequar e ampliar a capacidade produtiva deste robô. Outras unidades da universidade, além da EPUSP, poderão beneficiar-se desta pesquisa e, a partir daí, iniciarão nova fase de descobertas em suas áreas, perceberão novas necessidades de melhorias e implementações em veículos futuramente construídos e, fechando um círculo, darão as sugestões que ensejarão novos temas para pesquisa na EPUSP.

1.3 Revisão bibliográfica

Existem muitas técnicas diferentes disponíveis para fins de GNC de VSNT. Algumas, bastante simples, fornecem resultados satisfatórios quando as especificações de desempenho são compatíveis com a simplicidade do controle adotado: manobras rápidas e muito precisas ao mesmo tempo não podem ser exigidas. Ademais, as causas dos distúrbios dos movimentos precisam ser bem conhecidas e modeladas. São técnicas lineares de controle clássico ou moderno. Outras, bem mais sofisticadas, lidam diretamente com os modelos não-lineares, tratam as incertezas contidas nas modelagens da planta e dos distúrbios e produzem resultados muito melhores. Há ainda técnicas que até dispensam a modelagem matemática rigorosa. Os dois últimos grupos mencionados de técnicas de controle são conhecidos como controles avançados. Tipicamente, os controles avançados exigem uma estrutura mais sofisticada e mais cara, baseada em *hardwares* mais potentes, com maior capacidade de processamento em tempo real e *softwares* mais elaborados e complexos, em comparação com a estrutura necessária à implementação dos controles clássico e moderno. O tipo de VSNT, o tipo de missão para que são projetados, as especificações de desempenho esperadas e as condições ambientais de operação são fatores preponderantes nas definições de sistemas de GNC, graus de automação e de autonomia dos robôs. A seguir são citados exemplos de

utilização de técnicas de controle que servem ao propósito desejado.

O controle Proporcional, Integral e Derivativo (PID) é certamente o mais utilizado na prática, devido às facilidades de desenvolvimento e de implementação prática oferecidas. Plantas multivariáveis não-lineares e fortemente acopladas, sistemas *Multiple-Input-Multiple-Output* (MIMO), são tratadas simplificadaamente como lineares e desacopladas, divididas em subsistemas independentes de uma entrada e uma saída, ou em subsistemas *Single-Input-Single-Output* (SISO), que são controladas individualmente de modo descentralizado. Como esta técnica de controle requer a linearização do modelo matemático do veículo em torno do ponto de operação desejado, o desempenho esperado somente pode ser garantido em pontos vizinhos ao ponto escolhido. Mais ainda, como ela considera que as dinâmicas dos Graus de Liberdade (GL) controlados são desacopladas, o desempenho alcançado é satisfatório apenas quando as dinâmicas são lentas e as precisões esperadas nas manobras são baixas. Desempenhos melhores podem ser conseguidos com a implementação de um controlador PID com possibilidade de receber sintonias diferentes, adequadas a cada conjunto de pontos de operação. A troca da sintonia é feita pela implementação de outra técnica de controle, baseada nas medidas dos sensores embarcados. A técnica *gain scheduling* seleciona conjuntos de ganhos pré-definidos para cada ponto notável de operação em que a planta é linearizada; diversas técnicas adaptativas podem refazer a sintonia de maneira semelhante à anterior, ou então variar continuamente os parâmetros de sintonia do PID baseadas em estratégias de adaptação lineares ou não-lineares; a lógica nebulosa – *fuzzy* – também pode atuar como estratégia de adaptação do PID. Exemplos de aplicação podem ser encontrados em Aguilar [2], Caccia *et alli* [7], Caccia [8], Fossen [16], Goulart [23], Hoang e Kreuzer [24] e Hsu *et alli* [26].

O controle ótimo Linear Quadrático (LQ) representa uma boa alternativa para controlar sistemas multivariáveis com acoplamentos significativos entre os GL. Consiste em um regulador de estados que otimiza algum critério de desempenho temporal especificado. Propicia respostas temporais satisfatórias se forem respeitadas as limi-

tações inerentes deste tipo de controle. Com uma pequena modificação na estrutura básica, ganha a capacidade de seguir sinais dados como referência. É relativamente simples de ser sintetizado e implementado com o auxílio de computador. Melhorias no desempenho do sistema podem ser conseguidas com a implementação de recursos junto ao controlador LQ, tais como a introdução de um bloco de integradores precedendo a entrada da planta – Linear Quadrático com Integral (LQI) – ou a introdução de um bloco de pré-alimentação para compensação de entrada de distúrbios – *feedforward*. Exemplos de aplicação podem ser encontrados em Choi *et alli* [9], Donha [11], Fossen [16] e Nakamura *et alli* [35].

Controladores adaptativos de diversos tipos, lineares e não-lineares, também são muito utilizados no controle de robôs submarinos. Se o problema de modelagem da planta for tratado rigorosamente, é fácil verificar que os valores dos parâmetros variam ao longo do tempo, em função das condições de operação. Assim, os algoritmos de adaptação são encarregados de adaptar os controladores, que normalmente possuem estruturas fixas, de forma recursiva ao longo do tempo, estimando parâmetros com filtragens adequadas e sintetizando novos controladores em tempo real. As estratégias adaptativas podem ser formadas por equações, lógicas nebulosas ou redes neurais artificiais. Os melhores desempenhos são conseguidos com os controladores multivariáveis que controlam plantas MIMO de modo centralizado. Em tais casos, bons recursos computacionais são indispensáveis para assegurar o desempenho esperado. Exemplos de aplicação podem ser encontrados em Donha [12], Fossen [16], Fossen e Balchen [13], Fossen e Fjellstad [17], Fossen e Sagatun [14] e [15], Hsu *et alli* [26] e Yuh [43].

Controladores robustos são empregados freqüentemente no controle dos veículos porque asseguram estabilidade e desempenho aos sistemas controlados frente às variações dos parâmetros dos modelos e da presença de distúrbios. Eles aparecem mais em trabalhos teóricos do que práticos, principalmente porque: os esforços necessários à modelagem completa do VSNT e à modelagem das incertezas são muito grandes; algumas técnicas não oferecem garantia de convergência da solução, portanto, dificul-

tam a síntese do controlador; o código para implementação em computador é demasiado complexo e demanda infra-estrutura incompatível com a instalada no veículo. Algumas técnicas robustas muito conhecidas são H_2 , H_∞ , síntese- μ , modos deslizantes – *sliding mode* – e LQG/LTR – *Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery*. Existem ainda outras mais que não estão incluídas na lista acima. Exemplos de aplicação podem ser encontrados em Aguiar *et alli* [2], Donha [11] e [12], Luque [34], Nakamura *et alli* [35], Souza [40] e Yoerger e Slotine [42].

1.4 Objetivo geral

O objetivo geral desta dissertação é apresentar aspectos teóricos e práticos relevantes do desenvolvimento do SNC que é proposto como alternativa para futura implementação no VSSA que está em desenvolvimento e construção na USP. Os três GL horizontais devem ser controlados para seguirem trajetórias pré-definidas, enviadas como sinais de referência para navegação por uma estação responsável pela guiagem do veículo submarino. A implementação do SNC no veículo e o controle de movimento dos três GL verticais não fazem parte do escopo do trabalho.

A síntese completa do SNC deve resultar em um seguidor de trajetórias LQ, alimentado por um vetor de estados estimado assintoticamente, que possibilite ao VSSA alcançar e permanecer nas posições de referência estipuladas pelo sistema de guiagem com erro de regime permanente nulo. Embora os valores de todas as variáveis de estado sejam conhecidos através de medições, para maior segurança, em caso de falha de algum sensor e para filtrar ruídos nos sinais medidos, um estimador de estados de ordem plena deve ser utilizado conjuntamente.

1.5 Metodologia

A metodologia de síntese adotada é interativa e baseia-se num procedimento balizado de tentativa e erro, em que se parte de uma proposta inicial relativamente

simples, que vai sendo depurada e completada até se chegar a níveis de desempenho considerados satisfatórios. Eventuais modificações podem não só remeter o trabalho a fases anteriores do procedimento de síntese e análise, com a redefinição de parâmetros e modelos, como podem inclusive determinar mudanças nas especificações de projeto ou até no próprio protótipo, com o reinício de todas as etapas já realizadas.

Três atividades principais estão compreendidas: modelagem, síntese e simulação. A primeira deve produzir um modelo matemático da dinâmica do veículo conveniente à aplicação das técnicas de controle pretendidas. Esta etapa deve ser cumprida em conjunto com outros pesquisadores que estão envolvidos no projeto. As demais, recursivamente, devem produzir o controlador que poderá ser implementado futuramente no VSSA, se for gerado o código adequado para este propósito. O controle deve ser simples e efetivo, deve permitir que o robô submarino realize as manobras determinadas por um sistema de guiagem externo preciso, a ser definido futuramente.

1.6 Organização da dissertação

O capítulo 1 apresenta resumidamente o assunto VSNT, enfatiza a importância que o desenvolvimento deste tipo de tecnologia representa para o país, descreve de forma resumida o problema de controle do veículo em questão, apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre as técnicas mais empregadas no controle destes tipos de veículos e, finalmente, apresenta o objetivo geral e a metodologia adotada para atingí-lo.

O capítulo 2 apresenta uma breve introdução acerca da modelagem matemática desenvolvida, descreve detalhadamente o VSSA, define pontos fundamentais envolvidos no processo de modelagem, apresenta o desenvolvimento do modelo para seis graus de liberdade e, por último, apresenta o modelo final pretendido, somente para os movimentos horizontais, com três graus de liberdade.

O capítulo 3 apresenta uma introdução sobre os sistemas de Guiagem, Navegação e Controle de VSNT, descreve a abordagem particular que este trabalho dá ao SNC do

VSSA que está em desenvolvimento e construção na EPUSP, apresenta todas as etapas de síntese do SNC proposto e, encerrando, apresenta o diagrama de blocos completo mais algumas considerações finais acerca do controlador sintetizado.

O capítulo 4 apresenta as respostas temporais simuladas para o sistema em operação em malha fechada com o SNC sintetizado, sob condições nominais e, para efeito de avaliação da robustez do sistema, sob variações dos valores de alguns dos parâmetros da planta do VSSA e sob condição de falha de um dos propulsores.

O capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho e as sugestões para trabalhos futuros dadas pelo autor.

Capítulo 2

Modelagem matemática do VSSA

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta a modelagem matemática do VSSA em construção na USP. Trata-se de uma modelagem a parâmetros concentrados que descreve somente os aspectos mais relevantes do comportamento dinâmico do veículo, necessários para o desenvolvimento do sistema de controle pretendido. Restringe-se a modelar apenas a dinâmica em baixa velocidade, admite hipóteses simplificadoras, sofre influências de pequenos erros de medida e imprecisões dos métodos e instrumentos de medição utilizados na determinação dos valores dos parâmetros. Em altas velocidades o modelo tende a perder sua capacidade de descrever o comportamento da planta, uma vez que aspectos desconsiderados na modelagem, por simplificações ou incapacidade de ensaiar o modelo nestas condições, têm sua relevância bastante aumentada.

O modelo é obtido através da combinação de resultados teóricos e experimentais. A modelagem teórica determina as variáveis importantes. Experimentos realizados por outro pesquisador envolvido no projeto determinam os valores numéricos das variáveis. O desenvolvimento da parte teórica é mostrado resumidamente a seguir. Os valores numéricos são extraídos da dissertação de mestrado apresentada por Avila [4] e de publicações posteriores do mesmo autor.

A modelagem teórica utiliza a superposição linear das forças e dos momentos de força que influenciam a dinâmica do veículo em operação, formando uma única equação

vetorial-matricial não-linear e não-autônoma. Esta proposta de modelagem tem propiciado a obtenção de bons modelos para as aplicações de controle desenvolvidas. Para mais detalhes é recomendado consultar Abkowitz [1], Aguilar [2], Caccia *et alli* [6], Donha [11], Fossen [16], Garcia [22], Hsu *et alli* [26], Luque [34] e Souza [40].

As forças e momentos de força mais influentes na dinâmica do veículo submarino em operação podem ser classificadas como:

- Resultantes de forças e momentos externos aplicados ao VSSA;
- Forças e momentos de força hidrostáticos e hidrodinâmicos;
- Forças e momentos de força produzidos pelos propulsores.

A escolha da topologia de controle de Malha Fechada (MF) pretende garantir certa robustez – tolerância e minimização dos efeitos causados por imperfeições que estão inevitavelmente contidas no modelo matemático da planta controlada. Entretanto, a utilização desta técnica de controle não garante robustez de estabilidade ou de desempenho ao sistema operando em MF.

2.2 Descrição do veículo

Esta seção descreve a configuração encontrada atualmente no VSSA. Este trabalho aproveita para explorar a potencialidade desta configuração, que serve de base ao desenvolvimento inicial e que é a mínima possível, ainda distante da ideal, sem considerar que ela seja definitiva. Faltam sensores e acessórios importantes, como sistemas de intercomunicação com a base responsável pela guiagem do veículo, localizada na superfície, com ou sem cabo umbilical – *tether* –, e de iluminação e vídeo, por exemplo, para atingir uma configuração que possa equipar o veículo com os recursos suficientes para a realização de missões no mar. Trabalhos futuros certamente devem trazer novidades e melhorias na configuração descrita abaixo.

O VSSA é do tipo não carenado, com os componentes fixados rigidamente à estrutura mecânica. A estrutura, em formato de paralelepípedo, é formada por tubos de alumínio soldados, possui as medidas externas máximas $1278\text{ mm} \times 1112\text{ mm} \times 800\text{ mm}$ e a massa de 250 kg aproximadamente. Não possui superfícies de controle de qualquer natureza, ativas ou passivas. É autopropelido, contando com oito propulsores com bocais, responsáveis também pela realização das manobras. Os propulsores, modelo 1021 da Tecnadyne, são simetricamente distribuídos na parte interna da estrutura e separados em dois grupos de quatro elementos cada. Os quatro propulsores horizontais são instalados nos cantos da porção superior da estrutura e dispostos em dois pares simétricos em relação aos eixos longitudinal e transversal do veículo, formando ângulos fixos em relação ao eixo longitudinal. Os quatro verticais são instalados nos quatro cantos da porção inferior da estrutura, voltados para baixo e paralelamente entre si e ao eixo normal do veículo.

Possui sete flutuadores instalados em sua porção superior, dotando-o de flutuação neutra, e possui três vasos de pressão instalados em sua porção inferior, distribuídos de forma piramidal: o mais elevado abriga o SNC embarcado, enquanto os outros dois abrigam a fonte de alimentação elétrica.

O SNC, ainda a ser implementado, deve utilizar a plataforma de *hardware* PC-104, contar com o sistema de sensores de navegação inercial formado por uma bússola digital, modelo TCM2-50, da PNI Corporation e dois velocímetros por efeito Doppler, modelo NavQuest 600 Micro, da LinkQuest Inc., dotados de canais de comunicação serial para envio de sinais em formato digital, e comunicar-se com o sistema de guiagem, localizado na superfície, através de sinais acústicos propagados pela água. O sistema de comunicação ainda não está disponível para instalação no VSSA.

A fonte de alimentação é constituída por dois bancos de baterias de 12 V de chumbo-ácido, cada um em um vaso de pressão. As baterias são interligadas em série para fornecer a tensão elétrica requerida no acionamento dos propulsores.

Maiores detalhes são fornecidos durante as etapas individuais de modelagem.

A foto do veículo é mostrada na figura 1.2 do capítulo 1.

2.3 Definições preliminares

Esta seção apresenta algumas definições fundamentais para a construção e compreensão do modelo matemático.

2.3.1 Graus de liberdade

O VSSA é um corpo sólido que opera totalmente submerso, livre para se movimentar no espaço tridimensional. Possui seis possibilidades diferentes de movimento: três translações simples ao longo de três eixos coordenados mais três rotações simples em torno dos mesmos eixos. São definidos a seguir os eixos dos sistemas de coordenadas que suportam estes movimentos. A figura 2.1 mostra os seis Graus de Liberdade (6GL) de um corpo tridimensional totalmente livre e submerso em um fluido.

Figura 2.1: GL de um corpo tridimensional livre e submerso em um fluido

Os seis GL são batizados na engenharia naval com os nomes específicos que constam na tabela 2.1.

2.3.2 Sistemas de coordenadas

Dois sistemas cartesianos triortogonais de coordenadas são usados na modelagem – um inercial e um móvel. O primeiro permanece ligado ao planeta Terra. O outro permanece ligado ao corpo do VSSA. Logicamente, o segundo possui mobilidade em

Tabela 2.1: Graus de liberdade de movimento na engenharia naval

GL	Eixo	Descrição	Nome internacional	Nome nacional
1	X_0	Translação ao longo do eixo X_0	<i>Surge</i>	Avanço
2	Y_0	Translação ao longo do eixo Y_0	<i>Sway</i>	Deriva
3	Z_0	Translação ao longo do eixo Z_0	<i>Heave</i>	Arfagem
4	X_0	Rotação em torno do eixo X_0	<i>Roll</i>	Jogo
5	Y_0	Rotação em torno do eixo Y_0	<i>Pitch</i>	Caturro
6	Z_0	Rotação em torno do eixo Z_0	<i>Yaw</i>	Aproamento

relação ao primeiro. Trata-se do caso mais geral de movimento espacial classificado pela mecânica vetorial. A figura 2.2 mostra os sistemas de coordenadas utilizados.

Figura 2.2: Sistemas inercial e móvel de coordenadas

Os sistemas de coordenadas respeitam as convenções:

- Os eixos coordenados podem ser representados por vetores unitários que formam uma base triortogonal do espaço $\mathbb{R}^3$;
- A posição espacial de cada eixo e o sentido positivo de giro em torno de cada eixo são definidos por duas regras-da-mão-direita. A primeira estipula que o dedo indicador representa os eixos X e X_0 , o médio os eixos Y e Y_0 e o polegar os eixos Z e Z_0 ; nesta regra, o polegar deve apontar para o centro da Terra. A segunda estipula que o dedo polegar representa o sentido positivo do eixo em torno do qual ocorre a rotação e o feixe formado por todos os outros dedos representa o sentido positivo de rotação.

Sistema inercial de coordenadas

O sistema inercial de coordenadas tem sua origem fixa no planeta Terra. Admite-se que seja inercial porque a aceleração de qualquer ponto situado próximo à superfície do planeta pode ser desprezada na modelagem de veículos submarinos que se movimentam somente em baixas velocidades. É representado pela notação XYZ . Seus eixos coordenados são X , Y e Z . Ver figura 2.2.

Acelerações, velocidades e deslocamentos absolutos, lineares e angulares, são medidos neste sistema de coordenadas. Forças e momentos de força hidrostáticos de restauração são representados neste sistema porque possuem orientações fixas e perpendiculares à superfície da Terra.

É importante observar que os ângulos $\phi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ não são os ângulos de Euler, porque a orientação dos eixos em torno dos quais são considerados é fixa.

Sistema móvel de coordenadas

O sistema móvel de coordenadas tem sua origem fixa no Centro de Gravidade (CG) da estrutura mecânica do veículo. É representado pela notação $X_0Y_0Z_0$. Seus eixos coordenados são X_0 , Y_0 e Z_0 . Ver figura 2.2. Os vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ caracterizam, respectivamente, os eixos X_0 , Y_0 e Z_0 . Ver tabela 2.2.

A engenharia naval define os sentidos positivos dos eixos coordenados como:

- X_0 é dirigido da Popa para a Proa;
- Y_0 é dirigido de Bombordo para Boreste;
- Z_0 é dirigido da superfície para o fundo do oceano.

Acelerações e velocidades relativas, lineares e angulares, são medidas neste sistema de coordenadas. Forças e momentos de força produzidos pelos propulsores e causados por diversos fenômenos hidrodinâmicos de interação entre a estrutura do veículo e o fluido que o envolve são representados neste sistema, porque possuem orientações fixas em relação à estrutura do VSSA.

Relação entre os sistemas de coordenadas

Um movimento espacial representado no sistema móvel de coordenadas pode ser representado no sistema inercial como a composição de dois movimentos diferentes: translação simples mais rotação simples em torno da origem do sistema inercial.

O teorema de Coriolis afirma que a rotação produz uma componente de aceleração centrípeta, ou normal à trajetória do movimento, que é adicional à aceleração tangencial do movimento. A aceleração tangencial é a responsável pela mudança do módulo da velocidade do movimento, enquanto a aceleração centrípeta é a responsável pela mudança de direção do movimento.

Logo, um vetor representado no sistema móvel de coordenadas, se este sistema possui movimento angular em torno da origem do sistema inercial de coordenadas, é igual à soma de dois componentes vetoriais, um tangencial e um normal, representados no sistema inercial de coordenadas.

Seja $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ o vetor que representa velocidades angulares no sistema móvel de coordenadas, $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t) \in \mathbb{R}^3$ um vetor genérico que representa, por exemplo, uma força, um momento de força, uma velocidade ou aceleração relativa no sistema móvel de coordenadas, e $\mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}}(t) \in \mathbb{R}^3$ um vetor genérico que representa a mesma grandeza física representada pelo vetor $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t)$, porém, no sistema inercial de coordenadas.

Do teorema de Coriolis vem a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}}(t)] = \frac{d}{dt} [\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t)] + \omega(t) \times \mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t) \quad (2.1)$$

Da equação (2.1) podem ser extraídos imediatamente dois importantes resultados:

- As acelerações lineares nos dois sistemas de coordenadas são idênticas enquanto seus eixos estão paralelos, isto é, $X_0Y_0Z_0 \parallel XYZ$;
- As acelerações angulares nos dois sistemas de coordenadas são idênticas.

2.3.3 Planos de simetria do veículo

O veículo possui dois planos de simetria, definidos pelos pares de eixos (X_0, Z_0) e (Y_0, Z_0) , devido ao seu projeto e à sua construção. A hipótese de que possui mais um plano de simetria, formado pelos eixos (X_0, Y_0) , é assumida, porque o veículo apresenta grandes semelhanças – geométricas e de distribuição de massas – entre as duas porções da estrutura mecânica separadas por este plano. Logo, possui três eixos de simetria perpendiculares entre si e definidos pelos encontros dos planos de simetria.

Seja $\mathbf{I}^{\text{CG}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz real, diagonal, invariante no tempo e definida positiva, chamada de tensor de inércia de corpo rígido, tal que:

$$\mathbf{I}^{\text{CG}} = \text{diag}(I_i, I_j, I_k) \quad (2.2)$$

Os eixos do sistema móvel de coordenadas coincidem com os eixos de simetria do VSSA porque esta definição simplifica a determinação do tensor de inércia, isto é, anula todos os produtos de inércia que compõem o tensor.

2.4 Modelagem matemática para 6GL

Esta seção apresenta a modelagem matemática do VSSA para 6GL no sistema móvel de coordenadas. Inicialmente, são introduzidas algumas definições úteis. Posteriormente, são modeladas as forças e os momentos de força. Finalmente, o modelo completo é construído, englobando todas as partes modeladas individualmente.

Apenas velocidades relativas podem ser obtidas diretamente do modelo sem conversão para o sistema inercial de coordenadas. Deslocamentos absolutos não podem ser obtidos sem a conversão mencionada porque as integrais das velocidades relativas no tempo não possuem sentido físico quando o veículo está em rotação.

2.4.1 Definições para 6GL

Sejam:

$\mu(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema inercial de coordenadas que representa deslocamentos absolutos do VSSA no espaço (ver figura 2.2), formado por dois componentes, $\mu_1(t)$, que representa deslocamentos lineares absolutos (posição absoluta), e $\mu_2(t)$, que representa deslocamentos angulares absolutos (atitude do veículo), tal que:

$$\mu(t) = [\mu_1^T(t), \mu_2^T(t)]^T = [x(t), y(t), z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t)]^T \quad (2.3)$$

$\nu(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa velocidades relativas de deslocamento do VSSA (ver figura 2.2), formado por dois componentes, $\nu_1(t)$, que representa velocidades relativas de translação, e $\nu_2(t)$, que representa velocidades relativas de rotação, tal que:

$$\nu(t) = [\nu_1^T(t), \nu_2^T(t)]^T = [u(t), v(t), w(t), p(t), q(t), r(t)]^T \quad (2.4)$$

$\tau(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa forças e momentos externos resultantes aplicados ao VSSA, formado por dois componentes, $\tau_1(t)$, que representa as forças paralelas aos eixos coordenados, e $\tau_2(t)$, que representa os momentos de força em relação aos eixos coordenados, tal que:

$$\tau(t) = [\tau_1^T(t), \tau_2^T(t)]^T = [F_i(t), F_j(t), F_k(t), M_i(t), M_j(t), M_k(t)]^T \quad (2.5)$$

$\tau_H(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos resultantes incidentes na estrutura mecânica do VSSA, formado por dois componentes, $\tau_{H1}(t)$, que representa forças paralelas aos eixos coordenados, e $\tau_{H2}(t)$, que representa momentos de força em relação aos eixos coordenados, tal que:

$$\tau_H(t) = [\tau_{H1}^T(t), \tau_{H2}^T(t)]^T = [F_{H_i}(t), F_{H_j}(t), F_{H_k}(t), M_{H_i}(t), M_{H_j}(t), M_{H_k}(t)]^T \quad (2.6)$$

É importante ressaltar que, para representar forças e momentos hidrostáticos resultantes no sistema móvel de coordenadas, é preciso fazer uma transformação de

coordenadas, conforme descrito mais adiante neste texto, para assegurar a igualdade da representação, e por conseguinte sua validade, quando há deslocamento angular.

$\tau_{\mathbf{P}}(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa forças e momentos resultantes produzidos pelos propulsores do VSSA, formado por dois componentes, $\tau_{\mathbf{P}_1}(t)$, que representa forças paralelas aos eixos coordenados, e $\tau_{\mathbf{P}_2}(t)$, que representa momentos de força em relação aos eixos coordenados, tal que:

$$\tau_{\mathbf{P}}(t) = [\tau_{\mathbf{P}_1}^{\mathbf{T}}(t), \tau_{\mathbf{P}_2}^{\mathbf{T}}(t)]^T = [F_{P_i}(t), F_{P_j}(t), F_{P_k}(t), M_{P_i}(t), M_{P_j}(t), M_{P_k}(t)]^T \quad (2.7)$$

$\mathbf{V}(t) \in \mathbb{R}^8$ o vetor que representa tensões elétricas de controle aplicadas aos propulsores do VSSA, tal que:

$$\mathbf{V}(t) = [V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t), V_6(t), V_7(t), V_8(t)]^T \quad (2.8)$$

Funções vetoriais-matriciais quadráticas requerem vetores-coluna quadráticos. Essas vetores possuem número de linhas igual ao número de colunas das matrizes das funções às quais estão associados e são constituídos somente por componentes-produto.

Sejam:

$|\nu(t)|\nu(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor-coluna quadrático referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa as velocidades relativas de deslocamento do VSSA elevadas ao quadrado e dotadas de sinal algébrico, tal que:

$$|\nu(t)|\nu(t) = \begin{bmatrix} |u(t)| \cdot u(t) \\ |v(t)| \cdot v(t) \\ |w(t)| \cdot w(t) \\ |p(t)| \cdot p(t) \\ |q(t)| \cdot q(t) \\ |r(t)| \cdot r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinal}(u(t)) \cdot u^2(t) \\ \text{sinal}(v(t)) \cdot v^2(t) \\ \text{sinal}(w(t)) \cdot w^2(t) \\ \text{sinal}(p(t)) \cdot p^2(t) \\ \text{sinal}(q(t)) \cdot q^2(t) \\ \text{sinal}(r(t)) \cdot r^2(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde:

$$\text{sinal}(f(t)) = \begin{cases} +1 & \iff f(t) > 0 \\ 0 & \iff f(t) = 0; \quad f = u, v, w, p, q, r \\ -1 & \iff f(t) < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \in \mathbb{R}^8$ o vetor-coluna quadrático que representa tensões elétricas elevadas ao quadrado e dotadas de sinal algébrico, tal que:

$$|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} |V_1(t)| \cdot V_1(t) \\ |V_2(t)| \cdot V_2(t) \\ |V_3(t)| \cdot V_3(t) \\ |V_4(t)| \cdot V_4(t) \\ |V_5(t)| \cdot V_5(t) \\ |V_6(t)| \cdot V_6(t) \\ |V_7(t)| \cdot V_7(t) \\ |V_8(t)| \cdot V_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinal}(V_1(t)) \cdot V_1^2(t) \\ \text{sinal}(V_2(t)) \cdot V_2^2(t) \\ \text{sinal}(V_3(t)) \cdot V_3^2(t) \\ \text{sinal}(V_4(t)) \cdot V_4^2(t) \\ \text{sinal}(V_5(t)) \cdot V_5^2(t) \\ \text{sinal}(V_6(t)) \cdot V_6^2(t) \\ \text{sinal}(V_7(t)) \cdot V_7^2(t) \\ \text{sinal}(V_8(t)) \cdot V_8^2(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A tabela 2.2 relaciona os vetores $\nu(t)$ e $\tau(t)$ com o sistema móvel de coordenadas.

Tabela 2.2: Velocidades relativas, forças e momentos de força

GL	Eixo	Vetor unitário associado	Movimento	Velocidades lineares e angulares	Forças e momentos de força
1	X_0	$\hat{\mathbf{i}}$	Avanço	$u(t)$	$F_i(t)$
2	Y_0	$\hat{\mathbf{j}}$	Deriva	$v(t)$	$F_j(t)$
3	Z_0	$\hat{\mathbf{k}}$	Arfagem	$w(t)$	$F_k(t)$
4	X_0	$\hat{\mathbf{i}}$	Jogo	$p(t)$	$M_i(t)$
5	Y_0	$\hat{\mathbf{j}}$	Caturro	$q(t)$	$M_j(t)$
6	Z_0	$\hat{\mathbf{k}}$	Aproamento	$r(t)$	$M_k(t)$

2.4.2 Resultantes de forças e momentos externos aplicados ao VSSA

Esta subseção trata da modelagem das forças e momentos de força resultantes externos que solicitam a estrutura mecânica do veículo submarino em operação. Baseia-se na aplicação das equações de Newton.

Duas hipóteses fundamentais são admitidas:

- A estrutura mecânica do veículo é idealmente rígida – corpo rígido;
- A massa do veículo é constante ao longo do tempo.

Força resultante

A segunda lei de Newton (lei fundamental) enuncia que a resultante das forças externas aplicadas ao corpo rígido é igual à variação do *momentum* linear – quantidade de movimento linear – do corpo rígido. Este enunciado é expresso formalmente como:

$$\tau_1(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{L}(t)] = \frac{d}{dt}[m \cdot \dot{\mu}_1(t)] = m \cdot \ddot{\mu}_1(t) \implies \tau_1(t) = m \cdot \ddot{\mu}_1(t) \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{L}(t)$ representa o vetor quantidade de movimento linear do corpo rígido e m representa a massa do VSSA.

Para modelar o equilíbrio dinâmico das forças no sistema móvel de coordenadas é preciso recorrer à equação (2.1).

Seja $\omega(t) = \nu_2(t)$ o vetor de velocidades angulares relativas, $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t) = \nu_1(t)$ o vetor de velocidades lineares relativas, $\frac{d}{dt}[\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t)] = \dot{\nu}_1(t)$ o vetor de acelerações lineares relativas e $\frac{d}{dt}[\mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}}(t)] = \ddot{\mu}_1(t)$ o vetor de acelerações lineares absolutas.

A substituição dos vetores na equação (2.1) conduz a:

$$\ddot{\mu}_1(t) = \dot{\nu}_1(t) + [\nu_2(t) \times \nu_1(t)] \quad (2.13)$$

onde $\dot{\nu}_1(t)$ representa a componente tangencial do vetor de acelerações relativas e $\nu_2(t) \times \nu_1(t)$ representa a componente centrípeta do vetor de acelerações relativas.

O vetor de forças externas resultantes aplicadas à estrutura mecânica do VSSA, obtido pela substituição de (2.13) em (2.12), é dado por:

$$\tau_1(t) = m \cdot \dot{\nu}_1(t) + m \cdot [\nu_2(t) \times \nu_1(t)] \quad (2.14)$$

A expansão da equação (2.14) resulta em:

$$\begin{cases} F_i(t) = m \cdot \dot{u}(t) + m \cdot [q(t) \cdot w(t) - r(t) \cdot v(t)] \\ F_j(t) = m \cdot \dot{v}(t) + m \cdot [r(t) \cdot u(t) - p(t) \cdot w(t)] \\ F_k(t) = m \cdot \dot{w}(t) + m \cdot [p(t) \cdot v(t) - q(t) \cdot u(t)] \end{cases} \quad (2.15)$$

Momento de força resultante

A segunda lei de Newton, aplicada aos movimentos rotacionais, (Teorema do Momento Angular) enuncia que a resultante dos momentos de força externos aplicados ao corpo rígido é igual à variação do *momentum* angular – quantidade de movimento angular – do corpo rígido. Este enunciado é expresso formalmente como:

$$\tau_2(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{H}(t)] = \frac{d}{dt} [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)] \implies \tau_2(t) = \frac{d}{dt} [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)] \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{H}(t)$ representa o vetor quantidade de movimento angular do corpo rígido.

Para modelar o equilíbrio dinâmico dos momentos de força no sistema móvel de coordenadas é preciso recorrer novamente à equação (2.1).

Seja $\omega(t) = \boldsymbol{\nu}_2(t)$ o vetor de velocidades angulares relativas, $\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t) = [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t)]$ o vetor de quantidades de movimento angular no sistema móvel de coordenadas, $\frac{d}{dt}[\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0}(t)] = [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)]$ o vetor de momentos de força no sistema móvel de coordenadas e $\frac{d}{dt}[\mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}}(t)] = \frac{d}{dt} [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)]$ o vetor de momentos de força no sistema inercial de coordenadas.

A substituição dos vetores acima na equação (2.1) conduz a:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)] = [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)] + \boldsymbol{\nu}_2(t) \times [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t)] \quad (2.17)$$

O vetor de momentos de força externos resultantes aplicados à estrutura mecânica do VSSA, obtido pela substituição de (2.17) em (2.16), é dado por:

$$\tau_2(t) = [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}_2(t)] + \boldsymbol{\nu}_2(t) \times [\mathbf{I}^{\text{CG}} \cdot \boldsymbol{\nu}_2(t)] \quad (2.18)$$

A expansão da equação (2.18) resulta em:

$$\begin{cases} M_i(t) = I_i \cdot \dot{p}(t) + (I_k - I_j) \cdot q(t) \cdot r(t) \\ M_j(t) = I_j \cdot \dot{q}(t) + (I_i - I_k) \cdot p(t) \cdot r(t) \\ M_k(t) = I_k \cdot \dot{r}(t) + (I_j - I_i) \cdot p(t) \cdot q(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Modelo de resultantes de forças e momentos de força externos

A expressão geral do equilíbrio dinâmico pode ser obtida através de um rearranjo conveniente das equações (2.15) e (2.19).

Sejam:

$\mathbf{M}_C \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, diagonal, invariante no tempo e definida positiva, chamada de matriz de inércia de corpo rígido, tal que:

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} m \cdot \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}^{CG} \end{bmatrix} = \text{diag}(m, m, m, I_i, I_j, I_k) \quad (2.20)$$

onde:

$$\mathbf{I}_3 = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$\mathbf{C}_C(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, anti-simétrica, variante no tempo e semi-definida positiva, chamada de matriz centrípeta de corpo rígido, tal que:

$$\mathbf{C}_C(\nu(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{C_1}(\nu(t)) \\ \mathbf{C}_{C_1}(\nu(t)) & \mathbf{C}_{C_2}(\nu(t)) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{C_1}(\nu(t)) = -\mathbf{C}_{C_1}^T(\nu(t)) = \begin{bmatrix} 0 & m \cdot w(t) & -m \cdot v(t) \\ -m \cdot w(t) & 0 & m \cdot u(t) \\ m \cdot v(t) & -m \cdot u(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{C}_2}(\nu(t)) = -\mathbf{C}_{\mathbf{C}_2}^T(\nu(t)) = \begin{bmatrix} 0 & I_k \cdot r(t) & -I_j \cdot q(t) \\ -I_k \cdot r(t) & 0 & I_i \cdot p(t) \\ I_j \cdot q(t) & -I_i \cdot p(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Existem múltiplas formas de representação da matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{C}}(\nu(t))$, todas elas anti-simétricas e obtidas diretamente da matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$. Fossen [16] mostra algumas outras possibilidades de representação de $\mathbf{C}_{\mathbf{C}}(\nu(t))$.

A expressão geral do equilíbrio dinâmico da estrutura mecânica do VSSA na forma vetorial-matricial é dada por:

$$\tau(t) = \mathbf{M}_{\mathbf{C}} \cdot \dot{\nu}(t) + \mathbf{C}_{\mathbf{C}}(\nu(t)) \cdot \nu(t) \quad (2.26)$$

2.4.3 Forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos

Esta subseção trata da modelagem das forças e momentos de força hidrostáticos e hidrodinâmicos originados pelas interações que ocorrem entre a estrutura mecânica do veículo e a água do oceano.

Forças e momentos de força hidrostáticos

A força peso e a força de flutuação compõem, no jargão naval, as forças hidrostáticas de restauração. São constantes e aplicadas em pontos fixos específicos da estrutura mecânica do VSSA. Momentos de força resultantes, em relação ao CG, são produzidos pela ação da força de flutuação de acordo com a atitude do veículo. As forças e momentos de força hidrostáticos são referenciados no sistema inercial de coordenadas porque são funções da aceleração da gravidade do planeta.

Forças e momentos de força hidrodinâmicos

A transferência de energia mecânica do veículo para a água interfere nos movimentos do veículo e acelera a água. Isto propicia a ocorrência de diversos fenômenos hidrodinâmicos simultâneos que aparecem se, e somente se, existirem acelerações ou

velocidades não nulas presentes. As forças e os momentos hidrodinâmicos produzidos pela energia cinética do fluido possuem sentidos contrários aos sentidos dos movimentos do veículo – defasagem de 180° – porque o oceano é um meio dissipativo de energia. Informações mais detalhadas podem ser encontradas em Abkowitz [1], Caccia *et alli* [6], Fossen [16] e Humphreys e Watkinson [25].

Para o veículo completamente submerso, as forças e momentos hidrodinâmicos mais significativos são causados por:

- Esforços inerciais do fluido (massas adicionadas);
- Amortecimento viscoso (dissipação de energia pelas interações entre os movimentos do VSSA e o fluido que o envolve).

Na iminência do movimento do veículo, partindo do repouso, quando $\nu(t) \approx \mathbf{0}$ mas $\dot{\nu}(t) \neq \mathbf{0}$, os efeitos hidrodinâmicos mais significativos são causados pelos esforços inerciais do fluido; o gradiente de velocidades relativas entre a água e o VSSA é praticamente nulo e, portanto, o amortecimento viscoso é desprezível. Em movimento uniforme, quando $\nu(t) \neq \mathbf{0}$ mas $\dot{\nu}(t) \approx \mathbf{0}$, o efeito hidrodinâmico mais significativo é o amortecimento viscoso, com e sem a geração de vórtices. Em operação normal ambos os fenômenos se manifestam concomitantemente.

Forças e momentos de força resultantes hidrostáticos e hidrodinâmicos

A modelagem analítica rigorosa de forças e momentos hidrostáticos e hidrodinâmicos não é o objetivo deste trabalho. Antes, uma modelagem prática e confiável, adaptada teoricamente para produzir resultados úteis, que seja uma aproximação razoavelmente fiel da realidade, é preferível. Uma maneira simples e razoável de qualificar e quantificar estas forças e momentos é construir o seguinte modelo vetorial-matricial:

$$\tau_{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{W}(\mu(t)) + \mathbf{M}_{\mathbf{A}} \cdot \dot{\nu}(t) + \mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\nu(t)) \cdot \nu(t) + \mathbf{D}(\nu(t)) \cdot \nu(t) \quad (2.27)$$

O modelo em (2.27) é amplamente difundido e aceito no meio acadêmico para

representar os efeitos interativos entre o corpo rígido e o fluido. As expressões e significados, do vetor $\mathbf{W}(\mu(t))$ e das matrizes $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{C}_A(\nu(t))$ e $\mathbf{D}(\nu(t))$, são dados a seguir.

Vetor $\mathbf{W}(\mu(t))$

Este vetor representa forças e momentos de restauração no sistema móvel, pela decomposição das forças e dos momentos, naturalmente projetados sobre os eixos do sistema XYZ , em componentes projetados sobre os eixos do sistema $X_0Y_0Z_0$.

A força peso que incide no CG do veículo é dada por:

$$P = m \cdot g \quad (2.28)$$

onde g representa a aceleração da gravidade da Terra.

A força de flutuação que incide no Centro de Carena (CC) do veículo é dada por:

$$F = \rho \cdot \nabla \cdot g \quad (2.29)$$

onde ρ representa a densidade volumétrica da água marinha e ∇ representa o volume de fluido deslocado pelo VSSA.

F pode produzir momentos de força nos três eixos do sistema móvel de coordenadas dependendo da atitude do veículo. Os momentos são iguais à força de flutuação multiplicada pela componente distância, do CC ao CG, projetada sobre cada eixo do sistema móvel de coordenadas.

Sejam:

$\mathbf{L}_{CC} \in \mathbb{R}^3$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa a distância do CC ao CG do VSSA, tal que:

$$\mathbf{L}_{CC} = (\mathbf{CC} - \mathbf{CG}) = (\mathbf{CC} - [0, 0, 0]^T) = [x_{CC}, y_{CC}, z_{CC}]^T \quad (2.30)$$

$\mathbf{W}(\mu(t)) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema móvel de coordenadas que representa as resultantes de forças e momentos de restauração, tal que:

$$\mathbf{W}(\mu(t)) = \begin{bmatrix} -(P - F) \cdot \text{sen}(\theta(t)) \\ (P - F) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\phi(t)) \\ (P - F) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \cos(\phi(t)) \\ -F \cdot y_{CC} \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \cos(\phi(t)) + F \cdot z_{CC} \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\phi(t)) \\ F \cdot x_{CC} \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \cos(\phi(t)) + F \cdot z_{CC} \cdot \text{sen}(\theta(t)) \\ -F \cdot x_{CC} \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\phi(t)) - F \cdot y_{CC} \cdot \text{sen}(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

As forças P e F devem se compensar mutuamente e produzir resultante nula na direção do eixo Z_0 – flutuação neutra – enquanto o plano formado pelos eixos X_0 e Y_0 permanecer paralelo à superfície livre do oceano. Isto depende do projeto e da construção do veículo. A flutuação neutra do VSSA é ideal para minimizar os esforços dos propulsores em produzir deslocamentos verticais. Em certos casos, uma flutuação ligeiramente positiva é preferida, por questões de segurança: em caso de falhas no controle ou na propulsão, o veículo emerge sozinho; para tanto, a força de flutuação deve ser pouco superior à força peso do veículo.

Matrizes $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{C}_A(\nu(t))$

As forças e momentos causados pelos esforços inerciais do fluido são determinados através do estudo da energia cinética do fluido deslocado pelo movimento do veículo.

As seguintes hipóteses são admitidas:

- As acelerações do fluido são idênticas às acelerações relativas do VSSA;
- Os valores dos coeficientes são considerados constantes, pois: variam de acordo com a forma do veículo submarino, que uma vez construído permanece inalterada; sofrem influências desprezíveis de variações de velocidades, para baixas velocidades de deslocamento.

Seja $\mathbf{M}_A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, invariante no tempo e definida positiva, chamada de matriz de inércia de massa adicionada, tal que:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

É uma tarefa bastante difícil encontrar os valores numéricos de todos os elementos da matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$, tanto teoricamente, quanto de forma prática, embora diferentes tipos de testes possam ser realizados com esta finalidade, afirmam Avila [4], Caccia *et alli* [6] e Fossen [16]. Na maioria dos casos práticos, sob a hipótese fundamental de que o veículo possui três planos de simetria, as contribuições dos efeitos causados pelos elementos fora da diagonal principal da matriz podem ser desprezadas, e $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$ aproximada por uma matriz diagonal. Isto ocorre porque, nestes casos, os módulos dos elementos fora da diagonal principal são muito menores que os dos elementos pertencentes à diagonal, segundo Caccia *et alli* [6] e Fossen [16]. Particularmente neste trabalho, devido ao tipo de teste que foi realizado por Avila [4], encontrando apenas os elementos da diagonal principal de $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$, e em função dos argumentos apresentados anteriormente, a matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$ é redefinida com uma estrutura diagonal: $\mathbf{M}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz real, diagonal, invariante no tempo e definida positiva, chamada de matriz de inércia de massa adicionada, tal que:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \text{diag} (M_{\dot{u}} , M_{\dot{v}} , M_{\dot{w}} , M_{\dot{p}} , M_{\dot{q}} , M_{\dot{r}}) \quad (2.33)$$

A matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\nu(t))$ é obtida diretamente de $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$, como $\mathbf{C}_{\mathbf{C}}(\nu(t))$ é obtida diretamente de $\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$. A estrutura adotada para $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\nu(t))$ é idêntica à estrutura adotada para $\mathbf{C}_{\mathbf{C}}(\nu(t))$; logo, existem múltiplas formas de representar esta matriz.

Seja $\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, anti-simétrica, variante no tempo e semi-definida positiva, chamada de matriz centrípeta de massa adicionada, tal que:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}}(\nu(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{\mathbf{A}_1}(\nu(t)) \\ \mathbf{C}_{\mathbf{A}_1}(\nu(t)) & \mathbf{C}_{\mathbf{A}_2}(\nu(t)) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}_1}(\nu(t)) = -\mathbf{C}_{\mathbf{A}_1}^T(\nu(t)) = \begin{bmatrix} 0 & M_{\dot{w}} \cdot w(t) & -M_{\dot{v}} \cdot v(t) \\ -M_{\dot{w}} \cdot w(t) & 0 & M_{\dot{u}} \cdot u(t) \\ M_{\dot{v}} \cdot v(t) & -M_{\dot{u}} \cdot u(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}_2}(\nu(t)) = -\mathbf{C}_{\mathbf{A}_2}^T(\nu(t)) = \begin{bmatrix} 0 & M_{\dot{r}} \cdot r(t) & -M_{\dot{q}} \cdot q(t) \\ -M_{\dot{r}} \cdot r(t) & 0 & M_{\dot{p}} \cdot p(t) \\ M_{\dot{q}} \cdot q(t) & -M_{\dot{p}} \cdot p(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Matriz $\mathbf{D}(\nu(t))$

O nome amortecimento hidrodinâmico generaliza o efeito total provocado pela ação de um grupo de fenômenos dissipativos de naturezas diferentes. No estudo particular de um VSNT, os principais fenômenos que se manifestam são:

- Atrito da camada superficial do fluido em contato com veículo, em escoamentos laminares e turbulentos;
- Amortecimento causado pela geração de vórtices nos escoamentos turbulentos do fluido deslocado pela passagem do veículo.

O amortecimento hidrodinâmico total é modelado como o efeito resultante das contribuições dos efeitos dissipativos mencionados acima, dada a enorme dificuldade em separá-los em funções matemáticas específicas e, em seguida, quantificar os coeficientes destas funções. São contabilizados os trabalhos dissipativos realizados em relação ao tempo e encontrados os coeficientes que relacionam as forças e os momentos com as velocidades de deslocamento do VSSA. É prática comum aproximar o amortecimento total por uma função linear, para escoamentos laminares, ou por uma função

quadrática, para escoamentos turbulentos, ou por ambas as funções simultaneamente, e não considerar as funções de ordem superior a dois, assumindo por hipótese que suas contribuições ao amortecimento total sejam desprezíveis. Exemplos são encontrados em Abkowitz [1], Aguilar [2], Avila [4], Caccia *et alli* [6], Donha [11] e Fossen [16].

O amortecimento hidrodinâmico total é modelado como uma função quadrática da velocidade de deslocamento do VSSA, dado que o tipo de escoamento da água ao redor do veículo é considerado turbulento por hipótese. Esta hipótese é assumida porque a forma do VSSA é complexa, composta por sua estrutura de tubos cilíndricos e por peças com geometrias complexas dispostas muito próximas entre si.

A expressão escolhida para representar o amortecimento hidrodinâmico total vem do modelo quadrático da pressão hidrodinâmica exercida sobre a estrutura mecânica do veículo em movimento uniforme, tal que:

$$\tau_{\text{amortecimento}}(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_C \cdot \begin{bmatrix} \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_1(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \\ \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_2(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \\ \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_3(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \\ \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_4(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \\ \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_5(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \\ \nu^T(t) \cdot \mathbf{D}_6(\rho, A, Re) \cdot \nu(t) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde:

A_C representa a área característica da superfície do VSSA, tal que:

$$A_C = \left(\sqrt[3]{\nabla} \right)^2 \quad (2.38)$$

$\mathbf{D}_i(\rho, A, Re)$ representa a i -ésima linha de $\mathbf{D}(\rho, A, Re) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, a matriz real, variante no tempo e definida positiva, chamada de matriz de coeficientes de amortecimento hidrodinâmico (arrasto hidrodinâmico), tal que:

$$\mathbf{D}(\rho, A, Re) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

A representa a área da secção transversal do VSSA projetada na direção do movimento. Todas as áreas A_{ij} são diferentes, a priori. Por simplicidade de notação, não são grafados os índices que indicam o elemento A_{ij} relativo ao elemento D_{ij} .

É bastante difícil obter os valores numéricos de todos os elementos da matriz $\mathbf{D}(\rho, A, Re)$. Na prática, esta matriz pode ser simplificada por uma forma diagonal e ainda fornecer bons resultados, sob as hipóteses de que o veículo submarino apresenta três planos de simetria e de que seus movimentos podem ser considerados desacoplados para deslocamentos em baixas velocidades. Ver detalhes em Caccia *et alli* [6] e Fossen [16]. Novamente, devido ao tipo de teste realizado por Avila, apenas os elementos da diagonal principal da matriz podem ser determinados. Além do mais, estes elementos podem ser considerados constantes no tempo. Em função dos argumentos expostos, uma matriz diagonal $\mathbf{D}(\nu(t))$ é definida para simplificar a expressão (2.37), tal que:

$$\tau_{\text{amortecimento}}(t) = \mathbf{D}(\nu(t)) \cdot \nu(t) \quad (2.40)$$

Seja $\mathbf{D}(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, diagonal, variante no tempo e definida positiva, chamada matriz de amortecimento hidrodinâmico, tal que:

$$\mathbf{D}(\nu(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(\nu(t)) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_2(\nu(t)) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde:

$$\mathbf{D}_1(\nu(t)) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_C \cdot \begin{bmatrix} D_{uu} \cdot |u(t)| & 0 & 0 \\ 0 & D_{vv} \cdot |v(t)| & 0 \\ 0 & 0 & D_{ww} \cdot |w(t)| \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{D}_2(\nu(t)) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_C \cdot \begin{bmatrix} D_{pp} \cdot |p(t)| & 0 & 0 \\ 0 & D_{qq} \cdot |q(t)| & 0 \\ 0 & 0 & D_{rr} \cdot |r(t)| \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

2.4.4 Forças e momentos produzidos pelos propulsores

Esta subseção trata especificamente da modelagem das forças e momentos resultantes produzidos pelos propulsores. A modelagem não é rigorosa; visa apenas descrever de forma simples as relações existentes entre as tensões elétricas aplicadas às entradas de controle dos propulsores e os empuxos por eles produzidos. Uma modelagem rigorosa pode incluir os comportamentos dinâmicos dos subsistemas elétrico, magnético e mecânico, os efeitos das interações entre estes subsistemas e os efeitos das interações entre propulsores, com a estrutura mecânica do veículo e com a água.

De maneira geral, o empuxo produzido por um propulsor submarino pode ser descrito por uma função vetorial não-linear dependente do controle, $u(t)$, do vetor de velocidades relativas de deslocamento do veículo, $\nu(t)$, e de outras variáveis associadas à construção do propulsor, à instalação no veículo e à água, tal que:

$$E(t) = \mathbf{f}(u(t), \nu(t), \text{outras variáveis}) \quad (2.44)$$

Apesar de toda a complexidade envolvida em (2.44), uma modelagem aproximada pode produzir resultados satisfatórios em muitos casos práticos, mostram Caccia *et alli* [6], Fossen [16], Goulart [23], Hsu *et alli* [26], Luque [34] e Souza [40]. O empuxo produzido pelo propulsor é bem modelado, de forma simplificada, pela aproximação da força de sustentação desenvolvida pelo hélice, como:

$$E(t) = \rho \cdot D^4 \cdot K_E(J_P) \cdot |\omega_P(t)| \cdot \omega_P(t) \quad (2.45)$$

onde D representa o diâmetro do duto do propulsor, $K_E(J_P)$ representa o coeficiente de força em função do número de avanço J_P .

J_P é obtido em testes realizados em água aberta, tal que:

$$J_P = \frac{v_P(t)}{\omega_P(t) \cdot D} \quad (2.46)$$

onde $v_P(t)$ representa a velocidade com que a água entra no propulsor, inferior à velocidade desenvolvida pelo veículo devido ao ângulo formado em relação ao vetor de velocidades relativas e às perdas causadas pelos diversos tipos de interações hidrodinâmicas geradas pelo deslocamento autopropelido. Esta redução, em relação à velocidade do veículo, é representada pelo coeficiente de esteira w , tal que:

$$v_P(t) = (1 - w) \cdot \|\nu(t)\|_{dir} \quad (2.47)$$

$\omega_P(t)$ representa a velocidade angular de rotação do hélice e $\|\nu(t)\|_{dir}$ representa o módulo da velocidade de deslocamento do robô submarino projetado na direção do eixo do hélice do propulsor.

Normalmente, $K_E(J_P)$ é uma função ligeiramente não-linear que pode ser aproximada por uma função linear sem grandes distorções nos resultados obtidos. Quando os sinais algébricos de $v_P(t)$ e $\omega_P(t)$ são iguais, $K_E(J_P)$ é uma função verdadeiramente linear; quando os sinais algébricos são diferentes, $K_E(J_P)$ manifesta seu comportamento não-linear. Exemplos de curvas $K_E(J_P) \times J_P$ podem ser encontrados em Avila [4], Fossen [16] e Souza [40].

O modelo linear de $K_E(J_P)$, com $v_P(t)$ como em (2.47), é dado por:

$$K_E(J_P) = k_1 + k_2 \cdot J_P = k_1 + k_2 \cdot \left(\frac{(1 - w) \cdot \|\nu(t)\|_{dir}}{\omega_P(t) \cdot D} \right) \quad (2.48)$$

A substituição de (2.48) em (2.45) conduz ao modelo dado por:

$$E(t) = c_1 \cdot |\omega_P(t)| \cdot \omega_P(t) + c_2 \cdot |\omega_P(t)| \cdot \|\nu(t)\|_{dir} \quad (2.49)$$

onde:

$$\begin{cases} c_1 = \rho \cdot D^4 \cdot k_1 \\ c_2 = \rho \cdot D^3 \cdot k_2 \cdot (1 - w) \end{cases} \quad (2.50)$$

O modelo em (2.49) pode ser simplificado para baixas velocidades do VSSA, se o segundo termo do segundo membro for desprezado, já que sua magnitude é muito menor que a do primeiro termo. De fato, se $\nu(t) = \mathbf{0}$, esta aproximação se torna exata.

A simplificação proposta gera o modelo, tal que:

$$E(t) = b_P \cdot |\omega_P(t)| \cdot \omega_P(t) \quad (2.51)$$

onde b_P representa uma constante de proporcionalidade chamada de coeficiente de força linearizado do propulsor.

As influências da velocidade de rotação do hélice, da velocidade de deslocamento do veículo e dos fenômenos que reduzem a velocidade de entrada de água no propulsor são consideradas no modelo em (2.51), através de testes estáticos do propulsor em tanque de prova. Neste tipo de teste, o empuxo estático produzido pelo propulsor é relacionado com a tensão elétrica aplicada à entrada de controle. Em condições ideais, os resultados obtidos equivalem aos obtidos em água aberta, livres dos efeitos de reflexão das ondas nas paredes do tanque. É importante notar que esta simplificação fornece o modelo linear desejado, conforme descrito no início desta subseção.

O modelo linear é utilizado para modelar os empuxos estáticos produzidos pelos propulsores do VSSA porque:

- As velocidades de rotação dos hélices dos propulsores são controladas por servo-sistemas internos, proporcionalmente às tensões contínuas aplicadas às entradas de controle. As velocidades desejadas são atingidas e mantidas, mesmo sob a influência das perturbações desprezadas nesta modelagem;
- As constantes de tempo das respostas transitórias dos servo-sistemas dos propulsores são muito menores que a constante de tempo de inércia do VSSA. Por isto,

as respostas transitórias podem ser desprezadas e somente as respostas estáticas consideradas. Hsu *et alli* [26] constataram que, dependendo do nível de variação (em degrau) aplicado ao controle do servo-sistema interno, um novo regime de operação é estabelecido em menos de uma revolução completa do eixo do hélice.

Avila [4] construiu um modelo estático para representar os empuxos produzidos pelos propulsores do VSSA. Trata-se de um modelo semelhante ao (2.51), pois $\omega_P(t) \propto V(t)$, em razão do servo-sistema de controle de velocidade angular do hélice. O empuxo, proporcional ao quadrado da tensão elétrica de controle aplicada, é dado por:

$$E(t) = c_{\bullet} \cdot |V(t)|V(t) \quad (2.52)$$

onde $c_{\bullet}$ representa o coeficiente de força linearizado do propulsor. $c_{\bullet}$ apresenta assimetria para os dois sentidos de rotação do hélice. O sentido direto de rotação (empuxos positivos) produz empuxos de magnitudes superiores às magnitudes dos empuxos produzidos pelo sentido reverso de rotação (empuxos negativos). O subscrito ($\bullet$) diferencia os dois coeficientes de força: (D) estipula o sentido direto de rotação e (R) estipula o sentido reverso de rotação, tal que:

$$\begin{cases} c_{\bullet} = c_D \in \mathbb{R}_+^* & \Longleftrightarrow V(t) \geq 0 \\ c_{\bullet} = c_R \in \mathbb{R}_+^* & \Longleftrightarrow V(t) < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

A tabela 2.3 reproduz os valores dos coeficientes determinados por Avila.

As semelhanças entre as respostas estáticas produzidas pelos propulsores horizontais e verticais são evidenciadas, respectivamente, nas figuras 2.3 e 2.4. As curvas expressam os empuxos produzidos em função das tensões elétricas de controle aplicadas.

As figuras 2.5 e 2.6 apresentam a disposição física dos propulsores do VSSA. Os propulsores horizontais são precisamente alinhados sobre eixos imaginários que formam ângulos β em relação ao eixo X_0 . O acionamento destes propulsores produz empuxos resultantes compostos por dois componentes, um na direção do eixo X_0 e outro na direção do eixo Y_0 . Os propulsores verticais são alinhados paralelamente ao eixo Z_0

Tabela 2.3: Coeficientes de força linearizados dos propulsores

Propulsor n°	Coeficientes de força linearizados		Desvio padrão
	$c_{\bullet_i}$	$[N/V^2]$	
1	c_{D_1}	9,4234	0,0807
	c_{R_1}	6,5506	0,0579
2	c_{D_2}	9,1644	0,0885
	c_{R_2}	6,0973	0,0690
3	c_{D_3}	9,1943	0,0768
	c_{R_3}	6,0903	0,0673
4	c_{D_4}	9,0728	0,0660
	c_{R_4}	5,9238	0,0694
5	c_{D_5}	8,9026	0,0872
	c_{R_5}	5,8272	0,0645
6	c_{D_6}	9,7470	0,0637
	c_{R_6}	6,4521	0,0708
7	c_{D_7}	9,1544	0,0783
	c_{R_7}	5,9064	0,0726
8	c_{D_8}	8,8954	0,0729
	c_{R_8}	5,8749	0,0666

e voltados para baixo. O acionamento destes propulsores produz empuxos negativos paralelos ao eixo Z_0 . O acionamento de qualquer par de propulsores simetricamente dispostos (horizontais ou verticais), em sentidos de rotação diferentes, produz momentos de força em relação ao CG do VSSA. Os braços dos momentos de força e as distâncias L_{X_0} , L_{Y_0} e $L_{X_0Y_0}$, também estão indicados nas figuras.

Sejam:

$\mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$ a matriz real e invariante no tempo, chamada matriz de configuração dos empuxos dos propulsores, tal que:

$$\mathbf{B}_{\text{CONFIG}} = [\eta_1 \cdot \mathbf{B}_{\text{CONFIG}_1} \quad \eta_2 \cdot \mathbf{B}_{\text{CONFIG}_2}] \quad (2.54)$$

onde:

Figura 2.3: Respostas estáticas dos quatro propulsores horizontais

Figura 2.4: Respostas estáticas dos quatro propulsores verticais

Figura 2.5: Disposição física e numeração dos propulsores horizontais

Figura 2.6: Disposição física e numeração dos propulsores verticais

$$\mathbf{B}_{\text{CONFIG}_1} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \cos(\beta) & -\cos(\beta) & -\cos(\beta) \\ \sin(\beta) & -\sin(\beta) & \sin(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{X_0 Y_0} & -L_{X_0 Y_0} & -L_{X_0 Y_0} & L_{X_0 Y_0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B}_{\text{CONFIG}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -L_{X_0} & L_{X_0} & -L_{X_0} & L_{X_0} \\ -L_{Y_0} & -L_{Y_0} & L_{Y_0} & L_{Y_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

η_1 representa o coeficiente global de instalação dos propulsores horizontais, equivalente às perdas totais de eficiência dos propulsores em relação aos empuxos produzidos isoladamente no ambiente aquático (isentos de interferências hidrodinâmicas).

η_2 representa o coeficiente global de instalação dos propulsores verticais, equivalente às perdas totais de eficiência dos propulsores em relação aos empuxos produzidos isoladamente no ambiente aquático.

$\mathbf{B}_C(\mathbf{V}(t)) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ a matriz real, diagonal e de elementos variantes em função dos sinais algébricos das tensões elétricas de controle dos elementos do vetor $|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t)$, chamada matriz de coeficientes lineares de força, tal que:

$$\mathbf{B}_C(\mathbf{V}(t)) = \text{diag}(c_{\bullet_1}, c_{\bullet_2}, c_{\bullet_3}, c_{\bullet_4}, c_{\bullet_5}, c_{\bullet_6}, c_{\bullet_7}, c_{\bullet_8}) \quad (2.57)$$

A equação vetorial-matricial geral das forças e momentos de força produzidos pelos propulsores do VSSA para 6GL, no sistema móvel de coordenadas, extensão para o caso multivariável do modelo mostrado em (2.52), é dada por:

$$\tau_P(t) = \mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \cdot \mathbf{B}_C(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \quad (2.58)$$

Seja $\mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$ a matriz real, diagonal e de elementos variantes em função dos sinais algébricos das tensões elétricas de controle dos elementos do vetor $|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t)$, chamada matriz de propulsão, tal que:

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) = \mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \cdot \mathbf{B}_C(\mathbf{V}(t)) \quad (2.59)$$

A expressão em (2.58) pode ser reescrita simplificadamente, tal que:

$$\tau_P(t) = \mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \quad (2.60)$$

2.4.5 Modelo para 6GL

A superposição linear das equações (2.26), (2.27) e (2.60) produz o modelo matemático vetorial-matricial para 6GL dado por:

$$\tau(t) = \tau_P(t) - \tau_H(t) \quad (2.61)$$

A substituição das expressões dos vetores na equação (2.61) conduz à:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C \cdot \dot{\nu}(t) + \mathbf{C}_C(\nu(t)) \cdot \nu(t) &= \mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)| \mathbf{V}(t) - \mathbf{W}(\mu(t)) - \\ &- \mathbf{M}_A \cdot \dot{\nu}(t) - \mathbf{C}_A(\nu(t)) \cdot \nu(t) - \mathbf{D}(\nu(t)) \cdot \nu(t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

O agrupamento dos termos da equação (2.62) conduz à:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\nu}(t) = \mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)| \mathbf{V}(t) - [\mathbf{C}(\nu(t)) + \mathbf{D}(\nu(t))] \cdot \nu(t) - \mathbf{W}(\mu(t)) \quad (2.63)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_A \quad (2.64)$$

$$\mathbf{C}(\nu(t)) = \mathbf{C}_C(\nu(t)) + \mathbf{C}_A(\nu(t)) \quad (2.65)$$

2.5 Modelagem matemática para 3GL

O modelo matemático para 6GL não é interessante para a síntese do SNC desejado. Em seu lugar deve ser utilizado um modelo que representa apenas os três GL (3GL) de interesse deste trabalho. Esta seção apresenta o modelo matemático do VSSA para 3GL no sistema móvel de coordenadas. Apenas as velocidades relativas de avanço, deriva e aproamento podem ser obtidas diretamente do modelo sem conversão para o sistema inercial de coordenadas. O modelo para 3GL pode ser derivado do modelo para 6GL sob as seguintes hipóteses:

- As dinâmicas dos seis GL podem ser consideradas desacopladas quando o veículo submarino se movimenta em baixas velocidades, afirmam Avila [4], Donha [11], Fossen [16] e Souza [40]. Neste trabalho, os três movimentos horizontais são considerados acoplados entre si, e totalmente desacoplados dos movimentos verticais;
- Os empuxos produzidos pelos propulsores horizontais afetam somente os movimentos horizontais do VSSA. Os empuxos produzidos pelos propulsores verticais afetam somente os movimentos verticais do VSSA. As duas hipóteses são

embasadas na hipótese anterior e na própria disposição física dos propulsores do veículo. A disposição dos propulsores subdivide naturalmente a matriz de propulsão $\mathbf{B_P}(\mathbf{V}(t))$ em dois blocos totalmente desacoplados;

- A influência do vetor $\mathbf{W}(\mu(t))$ sobre os movimentos horizontais pode ser desprezada para $\phi(t) = \theta(t) = 0^\circ$.

Admitidas as hipóteses acima, o modelo para 3GL é construído apenas com as linhas 1, 2 e 6 do modelo em (2.63). As demais dinâmicas são desprezadas.

2.5.1 Definições para 3GL

A partir deste ponto as matrizes da equação (2.63) pertencem ao modelo para 3GL. Esta sobrecarga de notação evita a criação de novas variáveis e, ao mesmo tempo, substitui as variáveis que não são mais úteis ao desenvolvimento deste trabalho.

Sejam:

$\mu(t) = [x(t), y(t), \psi(t)]^T$ o vetor de deslocamentos absolutos (no plano horizontal) no sistema inercial de coordenadas.

$\nu(t) = [u(t), v(t), r(t)]^T$ o vetor de velocidades relativas (no plano horizontal) no sistema móvel de coordenadas.

$\tau(t) = [F_i(t), F_j(t), M_k(t)]^T$ o vetor de forças e momento de força (horizontais) externos aplicados ao VSSA no sistema móvel de coordenadas.

$\tau_{\mathbf{H}}(t) = [F_{H_i}(t), F_{H_j}(t), M_{H_k}(t)]^T$ o vetor de forças e momento de força hidrostáticos e hidrodinâmicos (horizontais) no sistema móvel de coordenadas.

$\tau_{\mathbf{P}}(t) = [F_{P_i}(t), F_{P_j}(t), M_{P_k}(t)]^T$ o vetor de forças e momento de força produzidos pelos propulsores (horizontais) do VSSA no sistema móvel de coordenadas.

$\mathbf{V}(t) = [V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)]^T$ o vetor que representa tensões elétricas de controle aplicadas aos propulsores (horizontais) do VSSA.

$|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \in \mathbb{R}^4$ o vetor-coluna quadrático que representa tensões elétricas elevadas ao quadrado e dotadas de sinal algébrico, tal que:

$$|\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} |V_1(t)| \cdot V_1(t) \\ |V_2(t)| \cdot V_2(t) \\ |V_3(t)| \cdot V_3(t) \\ |V_4(t)| \cdot V_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinal}(V_1(t)) \cdot V_1^2(t) \\ \text{sinal}(V_2(t)) \cdot V_2^2(t) \\ \text{sinal}(V_3(t)) \cdot V_3^2(t) \\ \text{sinal}(V_4(t)) \cdot V_4^2(t) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de inércia, tal que:

$$\mathbf{M} = \text{diag}([m + M_{\dot{u}}], [m + M_{\dot{v}}], [I_k + M_{\dot{r}}]) \quad (2.67)$$

$\mathbf{C}(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz centrípeta, tal que:

$$\mathbf{C}(\nu(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(m + M_{\dot{v}}) \cdot v(t) \\ 0 & 0 & (m + M_{\dot{u}}) \cdot u(t) \\ (m + M_{\dot{v}}) \cdot v(t) & -(m + M_{\dot{u}}) \cdot u(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$\mathbf{D}(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de amortecimento hidrodinâmico, tal que:

$$\mathbf{D}(\nu(t)) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_C \cdot \begin{bmatrix} D_{uu} \cdot |u(t)| & 0 & 0 \\ 0 & D_{vv} \cdot |v(t)| & 0 \\ 0 & 0 & D_{rr} \cdot |r(t)| \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$\mathbf{B_P}(\mathbf{V}(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ a matriz de entrada de propulsão, tal que:

$$\mathbf{B_P}(\mathbf{V}(t)) = \eta_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cdot c_{\bullet_1} & \cos(\beta) \cdot c_{\bullet_2} & -\cos(\beta) \cdot c_{\bullet_3} & -\cos(\beta) \cdot c_{\bullet_4} \\ \sin(\beta) \cdot c_{\bullet_1} & -\sin(\beta) \cdot c_{\bullet_2} & \sin(\beta) \cdot c_{\bullet_3} & -\sin(\beta) \cdot c_{\bullet_4} \\ L_{X_0 Y_0} \cdot c_{\bullet_1} & -L_{X_0 Y_0} \cdot c_{\bullet_2} & -L_{X_0 Y_0} \cdot c_{\bullet_3} & L_{X_0 Y_0} \cdot c_{\bullet_4} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

O modelo para 3GL no sistema móvel de coordenadas é dado por:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\nu}(t) = \mathbf{B_P}(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) - [\mathbf{C}(\nu(t)) + \mathbf{D}(\nu(t))] \cdot \nu(t) \quad (2.71)$$

2.5.2 Representação do modelo no espaço de estados

Nesta subseção a equação (2.71) é manipulada para fornecer a representação do modelo dinâmico para 3GL no espaço de estados. As vantagens em trabalhar no espaço de estados são mais aparentes quando as plantas são do tipo MIMO, porque tal representação apresenta a descrição interna completa da planta, incluindo as oscilações e instabilidades ocultas nas descrições do tipo entrada-saída.

Sejam:

$\mathbf{A}(\nu(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz dinâmica, tal que:

$$\mathbf{A}(\nu(t)) = -\mathbf{M}^{-1} \cdot [\mathbf{C}(\nu(t)) + \mathbf{D}(\nu(t))] \quad (2.72)$$

$$\mathbf{A}(\nu(t)) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\rho \cdot A_G \cdot D_{uu}}{2 \cdot (m + M_{\dot{u}})}\right) \cdot |u(t)| & 0 & \left(\frac{m + M_{\dot{v}}}{m + M_{\dot{u}}}\right) \cdot v(t) \\ 0 & -\left(\frac{\rho \cdot A_G \cdot D_{vv}}{2 \cdot (m + M_{\dot{v}})}\right) \cdot |v(t)| & -\left(\frac{m + M_{\dot{u}}}{m + M_{\dot{v}}}\right) \cdot u(t) \\ -\left(\frac{m + M_{\dot{v}}}{I_k + M_{\dot{r}}}\right) \cdot v(t) & \left(\frac{m + M_{\dot{u}}}{I_k + M_{\dot{r}}}\right) \cdot u(t) & -\left(\frac{\rho \cdot A_G \cdot D_{rr}}{2 \cdot (I_k + M_{\dot{r}})}\right) \cdot |r(t)| \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

A matriz $\mathbf{A}(\nu(t))$ é escrita simplificadamente como:

$$\mathbf{A}(\nu(t)) = \begin{bmatrix} -A_{11} \cdot |u(t)| & 0 & A_{13} \cdot v(t) \\ 0 & -A_{22} \cdot |v(t)| & -A_{23} \cdot u(t) \\ -A_{31} \cdot v(t) & A_{32} \cdot u(t) & -A_{33} \cdot |r(t)| \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

onde A_{11} , A_{13} , A_{22} , A_{23} , A_{31} , A_{32} , $A_{33} \in \mathbb{R}_+^*$

$\mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ a matriz de entrada, tal que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}_P(\mathbf{V}(t)) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) = \begin{bmatrix} B_{11} \cdot c_{\bullet 1} & B_{11} \cdot c_{\bullet 2} & -B_{11} \cdot c_{\bullet 3} & -B_{11} \cdot c_{\bullet 4} \\ B_{21} \cdot c_{\bullet 1} & -B_{21} \cdot c_{\bullet 2} & B_{21} \cdot c_{\bullet 3} & -B_{21} \cdot c_{\bullet 4} \\ B_{31} \cdot c_{\bullet 1} & -B_{31} \cdot c_{\bullet 2} & -B_{31} \cdot c_{\bullet 3} & B_{31} \cdot c_{\bullet 4} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

onde $B_{11} = \eta_1 \cdot \left(\frac{\cos(\beta)}{m+M_{\dot{u}}} \right)$, $B_{21} = \eta_1 \cdot \left(\frac{\sin(\beta)}{m+M_{\dot{v}}} \right)$, $B_{31} = \eta_1 \cdot \left(\frac{Lx_0y_0}{I_k+M_r} \right)$

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de saída, tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_3 \quad (2.77)$$

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ a matriz de transmissão direta, tal que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

O modelo em variáveis de estado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = \mathbf{A}(\nu(t)) \cdot \nu(t) + \mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \\ \nu(t) = \mathbf{C} \cdot \nu(t) + \mathbf{D} \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \end{cases} \quad (2.79)$$

2.5.3 Estabilidade do modelo

Esta subseção apresenta o teste de estabilidade do modelo dinâmico não-linear e não-forçado, tal que:

$$\dot{\nu}(t) = \mathbf{A}(\nu(t)) \cdot \nu(t) \quad (2.80)$$

O teste é realizado pela aplicação do método direto de Lyapunov em (2.80). O objetivo é constatar que o modelo elaborado é estável. O teste é simples e eficiente devido à sua característica de abordagem pela energia do sistema.

O ponto de equilíbrio $\nu^*(t)$ de (2.80) é determinado pela imposição da condição que o primeiro membro do sistema de equações diferenciais seja nulo. Logo, a origem do espaço de estados $\mathbb{R}^3$ é o ponto de equilíbrio do sistema, isto é, $\nu^*(t) = \mathbf{0}$.

Segundo Lyapunov, $\nu^*(t)$ é globalmente assintoticamente estável se existe uma função $\mathcal{C}^1$ globalmente definida positiva $\mathbf{V}(\nu(t))$, tal que:

$$-\frac{d}{dt}[\mathbf{V}(\nu(t))] = - \left\{ \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \nu_i(t)} [\mathbf{V}(\nu(t))] \cdot \frac{d}{dt} [\nu_i(t)] \right) \right\} ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.81)$$

seja globalmente definida positiva.

Então, o teste consiste em testar a estabilidade do único ponto de equilíbrio do sistema através de uma função de Lyapunov conveniente. A função de Lyapunov escolhida, $\mathbf{V}(\nu(t)) = \mathbf{V}(u(t), v(t), r(t))$, é globalmente definida positiva porque, formalmente, possui as seguintes características:

- $\mathbf{V}(\nu(t)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\mathbf{V}(\nu(t)) = \alpha \cdot u^2(t) + \beta \cdot v^2(t) + \gamma \cdot r^2(t)$;
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* / \alpha = [m + M_{\dot{u}}], \beta = [m + M_{\dot{v}}], \gamma = [I_k + M_{\dot{r}}]$;
- $\mathbf{V}(\nu(t)) \in \mathcal{C}^1 / \exists \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(\nu(t))]$ contínua em $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbf{V}(0, 0, 0) = 0$;
- $\mathbf{V}(\nu(t)) > 0 \forall \nu(t) \in \mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$;
- $\|\mathbf{V}(\nu(t))\| \rightarrow \infty \iff \|\nu(t)\| \rightarrow \infty$.

O ponto de equilíbrio do sistema é globalmente assintoticamente estável porque $-\frac{d}{dt} [\mathbf{V}(\nu(t))]$ é globalmente definida positiva, tal que:

$$-\frac{d}{dt} [\mathbf{V}(\nu(t))] = \rho \cdot A_C \cdot [D_{uu} \cdot |u^3(t)| + D_{vv} \cdot |v^3(t)| + D_{rr} \cdot |r^3(t)|] \quad (2.82)$$

onde $\rho, A_C, D_{uu}, D_{vv}, D_{rr} \in \mathbb{R}_+^*$.

A aplicação do teste prova que o modelo elaborado é estável para todos os valores de velocidades relativas de deslocamento do VSSA.

2.5.4 Modelo no sistema inercial de coordenadas

Os deslocamentos do VSSA devem ser medidos no sistema inercial de coordenadas para serem corretamente determinados e orientados pelo SNC, ao longo da trajetória

estabelecida pelo sistema de guiagem. Não é possível determinar os deslocamentos absolutos do veículo submarino pela integração do vetor de velocidades relativas no tempo, se há deslocamento angular em torno do eixo normal do veículo, Z_0 . É necessário, deste modo, converter as velocidades relativas do modelo em velocidades absolutas.

Matrizes de transformação de sistemas de coordenadas

A representação dos elementos do vetor de velocidades absolutas, em função dos elementos do vetor de velocidades relativas, pode ser feita geometricamente, como mostra a figura 2.7. É importante notar que as velocidades angulares são iguais nos dois sistemas de coordenadas. A figura estabelece as seguintes correspondências:

Figura 2.7: Relações geométricas entre as velocidades relativas e absolutas

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{x}'(t) + \dot{x}''(t) = u(t) \cdot \cos(\psi(t)) - v(t) \cdot \sin(\psi(t)) \\ \dot{y}(t) = \dot{y}'(t) + \dot{y}''(t) = u(t) \cdot \sin(\psi(t)) + v(t) \cdot \cos(\psi(t)) \\ \dot{\psi}(t) = r(t) \end{cases} \quad (2.83)$$

Neste caso, o argumento $\psi(t)$ em (2.83) é um ângulo de Euler para as rotações em torno dos eixos Z e Z_0 , já que $Z \parallel Z_0$.

Seja $\mathbf{J}(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz real e ortogonal, chamada matriz de rotação ou matriz de transformação de coordenadas, tal que:

$$\mathbf{J}(\mu(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t)) & 0 \\ \sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

A matriz $\mathbf{J}(\mu(t))$ apresenta a propriedade de ortogonalidade, tal que:

- $\mathbf{J}^{-1}(\mu(t)) = \mathbf{J}^T(\mu(t)) \iff \mathbf{J}(\mu(t)) \cdot \mathbf{J}^T(\mu(t)) = \mathbf{J}^T(\mu(t)) \cdot \mathbf{J}(\mu(t)) = \mathbf{I}_3$;
- $\det[\mathbf{J}(\mu(t))] = \det[\mathbf{J}^{-1}(\mu(t))] = 1 \forall \psi(t) \in \mathbb{R} / 0 \leq \psi(t) \leq 2 \cdot \pi$.

O sistema de equações (2.83) pode ser reescrito na forma de um operador matricial que transforma o vetor de velocidades relativas no de velocidades absolutas, tal que:

$$\dot{\mu}(t) = \mathbf{J}(\mu(t)) \cdot \nu(t) \quad (2.85)$$

A ortogonalidade facilita a determinação da inversa de $\mathbf{J}(\mu(t))$.

Seja $\mathbf{J}^{-1}(\mu(t)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz real e ortogonal, chamada inversa da matriz de rotação ou inversa da matriz de transformação de coordenadas, tal que:

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu(t)) = \mathbf{J}^T(\mu(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) & \sin(\psi(t)) & 0 \\ -\sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

A transformação inversa, do vetor de velocidades absolutas no de velocidades relativas, também pode ser escrita na forma de um operador matricial, tal que:

$$\nu(t) = \mathbf{J}^{-1}(\mu(t)) \cdot \dot{\mu}(t) \quad (2.87)$$

Modelo para 3GL no sistema inercial de coordenadas

O modelo no sistema inercial de coordenadas é obtido pela transformação de coordenadas do vetor de saídas do modelo no sistema móvel de coordenadas. Esta operação não invalida o teste de estabilidade feito para o modelo em (2.79).

O modelo no sistema inercial de coordenadas é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = \mathbf{A}(\nu(t)) \cdot \nu(t) + \mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) \cdot |\mathbf{V}(t)|\mathbf{V}(t) \\ \dot{\mu}(t) = \mathbf{J}(\mu(t)) \cdot \nu(t) \end{cases} \quad (2.88)$$

onde $\mu(t)$ é obtido pela integração de $\dot{\mu}(t)$ no tempo.

2.5.5 Modelo estendido no sistema inercial de coordenadas

Esta subseção encerra a modelagem do VSSA. O modelo teórico final é literal e, portanto, admite ampla variação dos valores dos parâmetros. Mesmo com certa flexibilidade admitida, o modelo não aceita que a origem do sistema móvel de coordenadas seja transferida a outro ponto, tampouco a perda de planos de simetria.

O vetor de saídas do modelo estendido fornece os deslocamentos absolutos e as velocidades absolutas de deslocamento do VSSA no plano horizontal, necessários para o desenvolvimento do SNC.

Sejam:

$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^4$ o vetor de controle do modelo estendido, tal que:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)]^T = \mathbf{V}(t) \quad (2.89)$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor de estados do modelo estendido, formado por dois componentes, $\mathbf{x}^1(t)$, que representa deslocamentos absolutos, e $\mathbf{x}^2(t)$, que representa velocidades relativas, tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1(t) \\ \mathbf{x}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor de saídas do modelo estendido, formado por dois componentes, $\mathbf{y}^1(t)$, que representa deslocamentos absolutos, e $\mathbf{y}^2(t)$, que representa velocidades absolutas, tal que:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^1(t) \\ \mathbf{y}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Os sobrescritos $(^1)$ e $(^2)$ são índices que diferenciam os vetores menores que formam os vetores $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, e não expoentes.

Da expressão (2.85), com a definição dada em (2.90), vem:

$$\dot{\mathbf{x}}^1(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^1(t)) \cdot \mathbf{x}^2(t) \quad (2.92)$$

Sejam:

$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz dinâmica do modelo estendido, tal que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}(\mathbf{x}^1(t)) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{A}(\mathbf{x}^2(t)) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ a matriz de entrada do modelo estendido, tal que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{B}(\mathbf{V}(t)) \cdot \text{diag}(|V_1(t)|, |V_2(t)|, |V_3(t)|, |V_4(t)|) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Os elementos da matriz de entrada $\mathbf{B}(\mathbf{u}(t))$ são mostrados explicitamente para facilitar a compreensão do leitor, tal que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{u}(t)) & \mathbf{B}_2(\mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

onde:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{11} \cdot |V_1(t)| \cdot c_{\bullet_1} & B_{11} \cdot |V_2(t)| \cdot c_{\bullet_2} \\ B_{21} \cdot |V_1(t)| \cdot c_{\bullet_1} & -B_{21} \cdot |V_2(t)| \cdot c_{\bullet_2} \\ B_{31} \cdot |V_1(t)| \cdot c_{\bullet_1} & -B_{31} \cdot |V_2(t)| \cdot c_{\bullet_2} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -B_{11} \cdot |V_3(t)| \cdot c_{\bullet_3} & -B_{11} \cdot |V_4(t)| \cdot c_{\bullet_4} \\ B_{21} \cdot |V_3(t)| \cdot c_{\bullet_3} & -B_{21} \cdot |V_4(t)| \cdot c_{\bullet_4} \\ -B_{31} \cdot |V_3(t)| \cdot c_{\bullet_3} & B_{31} \cdot |V_4(t)| \cdot c_{\bullet_4} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz de saída do modelo estendido, tal que:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}(\mathbf{x}^1(t)) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$\mathbf{D}$ a matriz de transmissão direta do modelo estendido. Por ser uma matriz nula, de dimensões compatíveis, ela é suprimida do modelo.

O modelo estendido em variáveis de estado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.99)$$

Capítulo 3

Sistema de Navegação e Controle

3.1 Introdução

O sistema completo de controle de movimento de veículos submarinos pode ser subdividido em três níveis interdependentes, estabelecidos em ordem hierárquica¹. Os níveis podem ser implementados de forma centralizada ou descentralizada. De forma centralizada, todos figuram na mesma unidade como partes do mesmo *hardware*. De forma descentralizada, são implementados em unidades diferentes como *hardwares* distintos que trocam sinais acústicos e/ou elétricos e/ou ópticos entre si.

O nível mais alto, chamado nível de guiagem, é o responsável pela definição da trajetória, da posição, da atitude e da velocidade do veículo, normalmente no sistema inercial de coordenadas. Não necessariamente todos os itens listados precisam ser definidos para todos os tipos de VSNT. É baseado em informações de sensores embarcados e/ou externos ao veículo, podendo ser implementado de três maneiras diferentes:

- Manual, via *joystick* usado pelo operador do veículo, no tipo VSOR;
- Computadorizada externa ao veículo, nos tipos VSOR e VSSA;
- Computadorizada interna ao veículo, no tipo VSOA.

O nível intermediário, chamado nível de navegação, é o responsável pela condução e pela parada do veículo. As definições do nível de guiagem são transmitidas ao nível

¹O mesmo conceito é aplicável aos casos de controle de movimento de veículos aéreos e espaciais.

de navegação como sinais de referência. Assegura o acompanhamento da trajetória e a manutenção da posição, da atitude e da velocidade do veículo segundo as referências. Trata, usa e envia ao nível de guiagem as informações provenientes dos sensores.

O nível mais baixo, chamado nível de controle, é o responsável pela ação dos atuadores do veículo propriamente. É responsável pela produção das forças e dos momentos de força que permitem ao veículo acompanhar a trajetória de referência e manter a posição, a atitude e a velocidade de referência.

Os níveis de navegação e de controle são tratados em conjunto neste trabalho, batizados simplesmente como Sistema de Navegação e Controle (SNC).

O diagrama de blocos do sistema completo de controle de movimento do VSSA no plano horizontal é mostrado na figura 3.1.

Figura 3.1: Sistema completo de controle de movimento do VSSA

Este capítulo é dedicado à síntese do SNC do VSSA no plano horizontal, baseada na aplicação de técnicas de controle ótimo² e complementada pela aplicação de outras técnicas de controle. O desenvolvimento é totalmente teórico, mas tem o objetivo de poder ser implementado futuramente em um sistema operacional de tempo real embarcado no veículo. Todos os resultados são obtidos através de simulações empregando o *software* MATLAB e suas ferramentas associadas.

²Técnicas de controle baseadas no Princípio de Otimalidade de Bellman. O Princípio de Otimalidade enuncia que uma política ótima de controle (controle ótimo) possui a propriedade de que quaisquer que sejam o estado inicial e o controle inicial aplicado ao sistema controlado, os demais controles devem constituir uma política ótima em relação ao estado resultante da aplicação do controle inicial. Consultar Kirk [30] para encontrar mais informações a respeito do assunto.

3.2 Etapas de síntese do SNC

A síntese completa do SNC requer o cumprimento de cinco etapas, a saber:

1. Obtenção de um modelo linearizado da planta não-linear do VSSA;
2. Síntese de um regulador ótimo de estados;
3. Transformação do regulador de estados em um seguidor de trajetórias;
4. Síntese de um estimador de estados para alimentar o seguidor de trajetórias;
5. Síntese e agregação de outros elementos funcionais ao SNC.

3.2.1 Modelo linear e invariante no tempo

Este trabalho emprega uma técnica de controle linear para controlar a planta não-linear apresentada em (B.1). Isto requer a linearização do modelo não-linear em torno de um ponto de operação criteriosamente escolhido. Cumprida esta etapa, o SNC pode ser sintetizado com base no modelo Linear e Invariante no Tempo (LIT).

As matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t))$ são funções das variáveis de estado do modelo. São linearizadas por um procedimento matemático bastante conhecido.

A matriz $\mathbf{B}(\mathbf{u}(t))$ é função dos controles aplicados à planta. É linearizada pela aplicação de um vetor de controle modificado por um bloco que implementa uma matriz de funções não-lineares inversas das funções da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{u}(t))$, situado entre a saída do SNC e a entrada da planta.

Seja $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^6$ o vetor do estado em torno do qual ocorre a linearização do modelo estendido, formado por dois componentes, $\bar{\mathbf{x}}^1$, relativo aos deslocamentos absolutos, e $\bar{\mathbf{x}}^2$, relativo às velocidades relativas, tal que:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^1 \\ \bar{\mathbf{x}}^2 \end{bmatrix} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6]^T \quad (3.1)$$

O ponto de operação mais conveniente para a linearização do modelo em (B.1) é a origem do espaço de estados $\mathbb{R}^6$ ($\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$), porque:

- As variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ não influenciam a linearização do modelo. Podem assumir quaisquer valores considerados convenientes;
- É necessário estipular um valor para o ângulo $x_3(t)$ ao construir um modelo LIT. Fixar um valor, qualquer que seja, diminui a capacidade do modelo de representar as transformações cinemáticas que ocorrem quando $x_3(t)$ difere de $\bar{x}_3$. Explorando-se as vantagens oferecidas pela simetria do VSSA em relação aos eixos X_0 e Y_0 , é possível impor que ele opere com deslocamentos angulares máximos limitados a certo intervalo de valores em torno de $\bar{x}_3$. Os eixos dos sistemas de coordenadas XYZ e $X_0Y_0Z_0$ permanecem paralelos enquanto $x_3(t) = 0^\circ$. Logo, é conveniente definir $\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{0}$ pelos argumentos apresentados neste item e no anterior;
- O VSSA pode se movimentar em qualquer direção e em qualquer sentido, com velocidades positivas e negativas. A adoção de $\mathbf{x}^2(t) = \mathbf{0}$ situa o ponto de linearização no centro do intervalo de velocidades atingíveis;
- No posicionamento dinâmico do veículo, o vetor $\mathbf{x}^2(t)$ deve ser idealmente nulo.

Sejam:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, invariante no tempo, Jacobiana de $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ para o estado $\bar{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$), chamada de matriz dinâmica do modelo linearizado, tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} [\dot{\mathbf{x}}_1(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\dot{\mathbf{x}}_1(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\dot{\mathbf{x}}_1(t)] \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\dot{\mathbf{x}}_2(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\dot{\mathbf{x}}_2(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\dot{\mathbf{x}}_2(t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\dot{\mathbf{x}}_6(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\dot{\mathbf{x}}_6(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\dot{\mathbf{x}}_6(t)] \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(t)=\bar{\mathbf{x}}} \quad (3.2)$$

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real, invariante no tempo, Jacobiana de $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t))$ para o estado $\bar{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$), chamada de matriz de saída do modelo linearizado, tal que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} [\mathbf{y}_1(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\mathbf{y}_1(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\mathbf{y}_1(t)] \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\mathbf{y}_2(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\mathbf{y}_2(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\mathbf{y}_2(t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\mathbf{y}_6(t)] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\mathbf{y}_6(t)] & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_6} [\mathbf{y}_6(t)] \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(t)=\bar{\mathbf{x}}} \quad (3.3)$$

$\mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ a matriz real, diagonal, variante no tempo e que representa uma função não-linear que converte empuxos determinados pelo SNC em tensões elétricas de controle para os propulsores, chamada matriz de conversão de empuxos em tensões elétricas, tal que:

$$\mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) = \text{diag}(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) \quad (3.4)$$

onde:

$$u_i(t) = \text{sinal}(E_i(t)) \cdot \sqrt{\frac{|E_i(t)|}{c_{\bullet_i}}} ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.5)$$

$E_i(t)$ representa o empuxo que deve ser produzido pelo propulsor horizontal i do veículo, determinado pelo SNC. O modelo de $E_i(t)$ é dado pela equação (2.52).

$$\begin{cases} c_{\bullet_i} = c_{D_i} \in \mathbb{R}_+^* & \Longleftrightarrow E_i(t) \geq 0 \\ c_{\bullet_i} = c_{R_i} \in \mathbb{R}_+^* & \Longleftrightarrow E_i(t) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Os empuxos determinados pelo nível de navegação podem ser considerados aplicados diretamente à entrada da planta se o nível de controle (servo-sistemas dos atuadores) receber as tensões elétricas geradas pelo bloco $\mathbf{U}(\mathbf{E}(t))$. Embora as matrizes sejam variantes no tempo, o produto matricial $\mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{E}(t))$ resulta em uma matriz invariante no tempo cujos elementos não nulos são constantes conhecidas, tal que:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) \cdot \mathbf{E}(t) \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{E}(t)$ representa o vetor de empuxos dos propulsores determinado pelo SNC, tal que:

$$\mathbf{E}(t) = [E_1(t), E_2(t), E_3(t), E_4(t)]^T \quad (3.8)$$

Seja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ a matriz real, invariante no tempo, chamada de matriz de entrada do modelo linearizado, tal que:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{11} & -B_{11} & -B_{11} \\ B_{21} & -B_{21} & B_{21} & -B_{21} \\ B_{31} & -B_{31} & -B_{31} & B_{31} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Do processo de linearização do modelo não-linear da planta resulta o modelo LIT dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_6 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (3.12)$$

Apesar de a matriz identidade mostrada em (3.12), indicando que todos os estados da planta são medidos por sensores, aparentar certo conservadorismo exagerado

de projeto, ao sugerir custo maior que o necessário, isto não é verdade, o que será justificado na subseção 3.2.4.

As figuras a seguir estabelecem comparações entre os comportamentos dinâmicos dos modelos não-linear e linearizado do VSSA operando em Malha Aberta (MA). Tratam-se de três casos particulares. Em cada caso, um único GL é excitado através da aplicação de empuxo ou torque constante pelo conjunto de propulsores horizontais. As tensões elétricas de controle são determinadas com o auxílio do bloco $\mathbf{U}(\mathbf{E}(t))$.

A figura 3.2 mostra o máximo empuxo simétrico³ aplicado na direção do eixo X_0 ($\approx 272 \text{ N}$), tal que $E_1(t) = E_2(t) = + |E_{min}|$ e $E_3(t) = E_4(t) = - |E_{min}|$, nas simulações feitas com os dois modelos do VSSA.

A figura 3.3 mostra que a velocidade linear $\dot{x}(t)$ cresce sem limite no modelo linearizado, mas é limitada em $\approx 0,85 \text{ m/s}$ no modelo não-linear, fato real provocado pela ação da força de arrasto hidrodinâmico resistente ao deslocamento do veículo.

Figura 3.2: Empuxo aplicado na direção do eixo X_0

Figura 3.3: Velocidades absolutas para máximo empuxo simétrico em X_0

A figura 3.4 mostra o máximo empuxo simétrico aplicado na direção do eixo Y_0 ($\approx 191 \text{ N}$), tal que $E_1(t) = E_3(t) = + |E_{min}|$ e $E_2(t) = E_4(t) = - |E_{min}|$, nas simulações feitas com os dois modelos do VSSA.

A figura 3.5 mostra que a velocidade linear $\dot{y}(t)$ cresce sem limite no modelo

³Resultante vetorial dos empuxos produzidos por todos os propulsores horizontais, tal que $|E_1| = |E_2| = |E_3| = |E_4| = |E_{min}|$. $E_{min} = -110,85 \text{ N}$ representa o menor empuxo (máxima magnitude negativa) que pode ser produzido por um propulsor no sentido reverso de rotação do hélice. O valor foi determinado em testes realizados em tanque de provas. Consultar Avila [4].

linearizado, mas é limitada em $\approx 0,64 \text{ m/s}$ no modelo não-linear, fato real provocado pela ação da força de arrasto hidrodinâmico resistente ao deslocamento do veículo.

Figura 3.4: Empuxo aplicado na direção do eixo Y_0

Figura 3.5: Velocidades absolutas para máximo empuxo simétrico em Y_0

A figura 3.6 mostra o máximo torque simétrico⁴ aplicado em relação ao eixo Z_0 ($\approx 217 \text{ N} \cdot \text{m}$), tal que $E_1(t) = E_4(t) = + |E_{min}|$ e $E_2(t) = E_3(t) = - |E_{min}|$, nas simulações feitas com os dois modelos do VSSA.

A figura 3.7 mostra que a velocidade angular $\dot{\psi}(t)$ cresce sem limite no modelo linearizado, mas é limitada em $\approx 0,53 \text{ rad/s}$ ($\approx 30^\circ/\text{s}$) no modelo não-linear, fato real provocado pela ação do momento de força de arrasto hidrodinâmico resistente à rotação do veículo.

Figura 3.6: Torque aplicado em relação ao eixo Z_0

Figura 3.7: Velocidades absolutas para máximo torque simétrico em Z_0

As figuras 3.3, 3.5 e 3.7 apresentam respostas temporais simuladas em que não

⁴Resultante vetorial dos torques produzidos em relação ao eixo Z_0 por todos os propulsores horizontais, tal que $|E_1 \cdot L_{X_0Y_0}| = |E_2 \cdot L_{X_0Y_0}| = |E_3 \cdot L_{X_0Y_0}| = |E_4 \cdot L_{X_0Y_0}| = |E_{min} \cdot L_{X_0Y_0}|$. Outras informações podem ser encontradas em Avila [4].

há acoplamento significativo entre os GL quando apenas um único GL é excitado. Este comportamento ideal, descrito pelos modelos matemáticos não-linear e linearizado, geralmente ocorre quando os veículos se deslocam em baixas velocidades [2], [7], [8], [9], [11], [16], [23], [24], [26] e [35].

Há grande similaridade de comportamento dos modelos nos instantes iniciais de simulação, enquanto as velocidades de deslocamento são baixas, próximas ao ponto de linearização $\mathbf{x}^2(t) = \mathbf{0}$. À medida em que as velocidades aumentam, a diferença de comportamento entre os dois modelos cresce o suficiente para inviabilizar o uso do modelo linearizado no lugar do não-linear. As velocidades desenvolvidas pelo VSSA respeitam os limites $|\dot{x}(t)| \leq 0,85 \text{ m/s}$, $|\dot{y}(t)| \leq 0,64 \text{ m/s}$ e $|\dot{\psi}(t)| \leq 0,53 \text{ rad/s}$ ($\approx 30^\circ/\text{s}$), por imposição feita neste trabalho. Isto garante que, apenas para esta região de operação, o modelo linearizado pode representar o comportamento do veículo.

Adicionalmente, também por imposição, os deslocamentos angulares máximos admissíveis para o VSSA devem respeitar limites, tal que $|\psi(t)| \leq \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (45°), para evitar que existam erros significativos contidos no modelo linearizado, capazes de inviabilizar seu uso no lugar do modelo não-linear.

3.2.2 Regulador ótimo de estados

Um regulador de estados é um controlador que força o vetor de estados do sistema controlado em MF a alcançar assintoticamente a origem do espaço de estados através de uma lei de realimentação dos estados, mesmo na presença de distúrbios externos persistentes agindo sobre os estados da planta. Quando a origem do espaço de estados é alcançada, o vetor de controle é anulado. O regulador de estados faz com que todos os pólos de um sistema linear estejam contidos no Semi-Plano Esquerdo (SPE) aberto do plano complexo, isto é, nenhum deles situado sobre o eixo imaginário (pólos estáveis).

Em um sistema de controle MIMO, de ordem n e com m entradas, uma matriz de realimentação de estados, formada por $m \cdot n$ elementos, constitui o regulador de estados. Há possibilidade de alocar arbitrariamente os pólos de MF do sistema linear

através da escolha adequada dos elementos de ganho dessa matriz de realimentação.

Mas a alocação arbitrária dos pólos só pode ocorrer se o sistema for completamente controlável, isto é, se sempre existir um vetor de controle que leve os pólos para as posições desejadas, ou que transfira o sistema de um estado inicial arbitrário, $\mathbf{x}(0)$, para um estado final arbitrário, $\mathbf{x}(T)$, em tempo finito, $0 < T \ll \infty$. Um sistema não controlável apresenta partes fisicamente desconectadas das entradas de controle; por isso, nem todos os estados são atingíveis a partir do espaço de controles.

O modelo linearizado do VSSA em (3.10) é completamente controlável. Sua matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ possui posto pleno de linhas, tal que:

$$\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{B} & \mathbf{A}^5 \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) = 6 \quad (3.13)$$

A escolha das posições de alocação dos pólos de um sistema linear é uma ciência inexata e pode requerer algumas iterações do projetista até que sejam obtidos resultados satisfatórios em termos de desempenho e esforço de controle necessário, afirmam Franklin *et alli* [19]. Exceções existem, por exemplo, para os sistemas SISO de ordem máxima igual a seis, para os quais estão disponíveis tabelas de funções de transferência relativas aos protótipos de respostas temporais baseadas nos critérios de Bessel ou da integral do tempo multiplicado pelo erro absoluto – *Integral of the Time multiplied by the Absolute values of the Error* (ITAE).

Boa alternativa para alocação dos pólos de MF de um sistema MIMO é recorrer às técnicas de controle ótimo. A lei de controle ótimo para um sistema linear com índice de desempenho integral quadrático é uma realimentação linear dos estados [10], [19], [21], [28], [30], [33] e [38]. A alocação ótima dos pólos resulta no Regulador Linear Quadrático (RLQ), caracterizado por uma matriz de realimentação ótima de estados.

Seja $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ a matriz real e invariante no tempo, chamada matriz de realimentação ótima de estados, tal que:

$$\mathbf{G} = - (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}_\infty \quad (3.14)$$

onde:

$\mathbf{W}_U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é a matriz real, invariante no tempo, simétrica e definida positiva, chamada matriz de ponderação ou de penalização dos controles, tal que:

$$\mathbf{W}_U = w_u \cdot \mathbf{I}_4 = w_u \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) ; \quad w_u \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.15)$$

A matriz $\mathbf{W}_U$ é constituída por elementos diagonais idênticos, uma vez que os únicos atuadores do veículo são os propulsores de características de operação praticamente idênticas e porque não há interesse em privilegiar o uso de alguns deles em detrimento de outros durante regime normal de operação.

$\mathbf{X}_\infty$ é uma solução simétrica aproximada da Equação Algébrica de Riccati (EAR) para regime permanente, $t \rightarrow T$, $0 \ll T \ll \infty$, dada por:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \cdot \mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}_\infty + \mathbf{W}_X = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

$\mathbf{W}_X \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz real, invariante no tempo, simétrica e semi-definida positiva, chamada matriz de ponderação ou de penalização dos estados, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_X &= \text{diag}(w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3}, w_{x_4}, w_{x_5}, w_{x_6}) ; \\ w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3}, w_{x_4}, w_{x_5}, w_{x_6} &\in \mathbb{R}_+^* \end{aligned} \quad (3.17)$$

O objetivo na síntese do RLQ é minimizar o índice de desempenho J , dado, por exemplo, por:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \cdot \mathbf{W}_X \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{W}_U \cdot \mathbf{u}(t)] \cdot dt \quad (3.18)$$

O funcional J deve ser minimizado sujeito à restrição, imposta pelo modelo LIT da planta, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)$. Para que o funcional seja mínimo, é preciso que a norma do vetor $\mathbf{x}(t)$ seja a menor possível, através da aplicação do menor esforço de controle possível. Assim, a tarefa de síntese do RLQ consiste em encontrar o conjunto de parâmetros $w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3}, w_{x_4}, w_{x_5}, w_{x_6}$ e w_u que leva à obtenção do sistema em operação em MF que melhor satisfaz as especificações de desempenho.

A figura 3.8 mostra o esquema do RLQ atuando sobre a planta não-linear. A entrada $\mathbf{d}(t)$ representa a presença de distúrbios sobre o vetor de estados.

Figura 3.8: RLQ atuando sobre a planta não-linear do VSSA

3.2.3 Seguidor de trajetórias

A ausência de uma entrada para sinais de referência só atende ao propósito de posicionamento dinâmico do VSSA no exato local em que for fixada a origem do sistema inercial de coordenadas para a realização de uma missão.

Para que o veículo seja capaz de seguir uma trajetória, ou de percorrer um caminho, e depois permanecer dinamicamente posicionado em algum ponto do plano horizontal, é necessário modificar a estrutura do RLQ básico, introduzindo uma entrada para sinais temporais de referência de posição. Surge daí o seguidor de trajetórias LQ.

Sejam:

$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ a matriz real e invariante no tempo (ver Apêndice B), chamada matriz de entrada de referências, tal que:

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G})^{-T} \cdot \mathbf{W}_X \quad (3.19)$$

Como a planta do VSSA é superatuada, existem infinitas possibilidades de definição da matriz $\mathbf{R}$. A escolha é feita de modo a garantir erro nulo de regime permanente na condição de ausência de distúrbios externos ao sistema, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$.

$\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^6$ o vetor referenciado no sistema inercial de coordenadas que representa referências temporais para os deslocamentos horizontais absolutos, tal que:

$$\mathbf{r}(t) = [x_{ref}(t), y_{ref}(t), \psi_{ref}(t), 0, 0, 0]^T \quad (3.20)$$

Os três últimos elementos do vetor $\mathbf{r}(t)$ são nulos porque não interessa fornecer

referências para as velocidades relativas de deslocamento. É necessário que existam apenas para assegurar a compatibilidade dimensional com a matriz $\mathbf{R}$.

A figura 3.9 mostra o esquema do seguidor de trajetórias LQ, atuando sobre a planta não-linear do veículo.

Figura 3.9: Seguidor de trajetórias LQ atuando sobre a planta não-linear

O nível de guiagem pode trabalhar com dois tipos de referências para o planejamento dos movimentos do veículo:

- Trajetórias descritas por funções temporais contínuas ou descontínuas, como senóides e rampas, ou degraus, entre outras, que determinam a história temporal do movimento. Estas funções já estão na forma apropriada para envio de sinais de referência ao SNC;
- Trajetórias descritas por tabelas que contêm informações sobre n pontos de passagem – *way-points* – que determinam a seqüência de pontos do plano pelos quais o veículo deve passar navegando em modo linha de visada – *Line-of-Sight* (LoS). As referências de posição precisam ser convertidas em funções temporais do tipo degrau; a cada novo ponto que deve ser alcançado corresponde uma alteração dos valores de referência $x_{ref}(t)$, $y_{ref}(t)$ e $\psi_{ref}(t)$. Cada ponto de passagem indicado pela tabela $(x_{ref}(k), y_{ref}(k))$, $k = 1, 2, \dots, n$, requer a determinação do ângulo de rumo do veículo $\psi_{ref}(t)$ dado por:

$$\psi_{ref}(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y_{ref}(k) - y(t)}{x_{ref}(k) - x(t)} \right) ; \quad k = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

É preciso verificar o quadrante ao qual pertence $\psi_{ref}(t)$ calculado em (3.21).

Cada ponto a ser alcançado é fixado no centro de uma região circular chamada de círculo de admissão. O ponto é considerado alcançado pelo veículo quando este adentra a região circular, cujo raio de admissão é dado por:

$$\rho_{admissão} \geq \sqrt{[x_{ref}(t) - x(t)]^2 + [y_{ref}(t) - y(t)]^2} \quad (3.22)$$

Este tipo de referência não é utilizado no trabalho.

Os pólos de MF de um sistema linear não são alterados pela introdução de uma entrada para sinais de referência. Desta forma, a estabilidade não é afetada por esta modificação. Zeros de transmissão, entre a entrada de referência $\mathbf{r}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$, são introduzidos no sistema linear em razão do caminho direto estabelecido em MA. A localização dos zeros de transmissão introduzidos no sistema linear modificado influencia os sobressinais máximos das respostas temporais, afirmam Franklin *et alli* [19].

3.2.4 Estimador de estados

O estimador de estados é um sistema dinâmico baseado no modelo da planta que reconstrói o seu vetor de estados, fornecendo o vetor $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Também é comumente chamado de observador de estados. Recebe como entradas os vetores de saída e de controle da planta. A estimação é continuamente corrigida pela operação do observador em MF, especialmente porque o estado inicial da planta é desconhecido. Como o observador apresenta dinâmica estável e geralmente mais rápida que a do sistema controlado, o erro de estimação é rapidamente anulado.

O vetor de estados estimado assintoticamente pode substituir satisfatoriamente o vetor de estados da planta de um sistema linear na implementação de uma realimentação linear de estados. Segundo enuncia o teorema da separação determinística, os pólos de MF de um sistema linear com realimentação de estados baseada em vetor estimado são dados pela união com repetição dos pólos do RLQ com os do observador de estados. Aplicado a este caso, o teorema garante que o SNC pode ser sintetizado em duas fases distintas e independentes; a primeira, de síntese do seguidor de trajetórias; a segunda, de síntese do estimador de estados.

Um estimador assintótico de estados LQ de ordem plena é adicionado ao SNC. A banda-passante do sistema é estreitada, o modelo da planta é privilegiado e os ruídos presentes nos sinais dos sensores de navegação são atenuados. A matriz de realimentação $\mathbf{H}$ é definida de modo que o sistema observador seja estável em MF e que o erro de estimação seja mínimo, mesmo com erros de modelagem e distúrbios externos presentes no vetor de estados da planta. Ver figura 3.10. O observador de estados reproduz o sistema de equações diferenciais de primeira ordem do modelo linearizado em (3.10), descrevendo o comportamento temporal linear do VSSA. A opção pelo modelo linear acontece por causa da relativa maior simplicidade com que pode ser implementado na prática, exigindo esforço computacional relativamente menor do que o exigido para fazer uma estimação não-linear em tempo real. O desempenho esperado é não muito inferior ao esperado de um observador não-linear, para operação em baixas velocidades e com deslocamentos angulares máximos respeitando os limites definidos na subseção 3.2.1. A degradação do desempenho cresce à medida em que cresce o módulo da diferença entre o estado real de operação $\mathbf{x}(t)$ e o ponto de linearização escolhido $\bar{\mathbf{x}}$. O vetor de controle que o estimador recebe é diretamente $\mathbf{E}(t)$, e não $\mathbf{u}(t)$ como a planta não-linear do VSSA, por ser baseado no modelo linearizado da planta.

Seja $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz real e invariante no tempo, chamada matriz de injeção ótima de saída, tal que:

Figura 3.10: Estimador linear de estados

$$\mathbf{H} = -\mathbf{Y}_\infty \cdot \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{W}_Y)^{-1} \quad (3.23)$$

onde:

$\mathbf{Y}_\infty$ é uma solução simétrica aproximada da EAR para regime permanente, $t \rightarrow T$, $0 \ll T \ll \infty$, dada por:

$$\mathbf{Y}_\infty \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_\infty - \mathbf{Y}_\infty \cdot \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{W}_Y)^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{W}_X = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

$\mathbf{W}_Y \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ é a matriz real, invariante no tempo, simétrica e definida positiva, chamada matriz de ponderação ou de penalização de saída, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_Y &= \text{diag}(w_{y_1}, w_{y_2}, w_{y_3}, w_{y_4}, w_{y_5}, w_{y_6}) ; \\ w_{y_1}, w_{y_2}, w_{y_3}, w_{y_4}, w_{y_5}, w_{y_6} &\in \mathbb{R}_+^* \end{aligned} \quad (3.25)$$

O objetivo na síntese do estimador assintótico de estados LQ é minimizar o índice de desempenho I , dado, por exemplo, por:

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\tilde{\mathbf{x}}^T(t) \cdot \mathbf{W}_X \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{y}}^T(t) \cdot \mathbf{W}_Y \cdot \tilde{\mathbf{y}}(t)] \cdot dt \quad (3.26)$$

O funcional I deve ser minimizado sujeito à restrição, imposta pelo modelo linear do sistema de estimação de estados, $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T(t) = \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \cdot \mathbf{A}^T + \tilde{\mathbf{y}}^T(t) \cdot \mathbf{C}^T$, dual do problema

de controle. A tarefa de síntese do estimador consiste em encontrar o conjunto de parâmetros $w_{y_1}, w_{y_2}, w_{y_3}, w_{y_4}, w_{y_5}$ e w_{y_6} , para o mesmo conjunto anterior de parâmetros $w_{x_i}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, que leva à obtenção do sistema em operação em MF que melhor satisfaz as especificações de desempenho.

A figura 3.11 mostra o seguidor de trajetórias LQ baseado em vetor de estados estimado atuando sobre a planta não-linear do VSSA. As entradas $\mathbf{d}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$ representam, respectivamente, as presenças de distúrbios e de ruídos de medida sobre o vetor de estados da planta.

Figura 3.11: Seguidor de trajetórias LQ baseado em vetor de estados estimado atuando sobre a planta não-linear

Para o observador, são necessários pólos mais rápidos que os pólos do sistema controlado pelo RLQ. Os pólos de MF de um observador linear de estados podem ser alocados arbitrariamente pela escolha adequada dos elementos da matriz $\mathbf{H}$, se e somente se o sistema for completamente observável, isto é, se sempre existir um vetor de saída que permita determinar o estado inicial arbitrário do sistema, $\mathbf{x}(0)$, em tempo finito, $0 < T \ll \infty$, conhecidos os históricos temporais dos vetores de saída e de controle. Um sistema não observável possui partes fisicamente desconectadas das saídas do sistema; por isso, nem todas as saídas podem ser alcançadas a partir do espaço de estados.

O modelo linearizado do VSSA é completamente observável. Sua matriz de

observabilidade $\mathcal{O}$ possui posto pleno de colunas, tal que:

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^4 \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^5 \end{bmatrix} \right) = 6 \quad (3.27)$$

A condição de observabilidade deve ser garantida para que o sistema linearizado opere correta e seguramente: todas as saídas do modelo relativas a deslocamentos no sistema inercial de coordenadas ($\mathbf{y}^1(t)$) precisam ser conhecidas para evitar que a matriz $\mathcal{O}$ perca posto. O conhecimento ou não das saídas relativas a velocidades ($\mathbf{y}^2(t)$) não altera o posto da matriz $\mathcal{O}$.

Os três sensores de navegação do VSSA atualmente disponíveis permitem conhecer todas as variáveis de estado; através de um bloco de cálculos batizado de 3/6 introduzido no *software* do SNC, são disponibilizados os seis elementos do vetor de estados a partir das três medidas efetuadas pelos sensores. Velocidades de avanço e deriva são medidas por velocímetros Doppler; a atitude é medida por bússola eletrônica; mais detalhes constam na seção 2.2. Os deslocamentos lineares absolutos, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, são determinados por integração numérica no tempo das velocidades absolutas, $y_4(t)$ e $y_5(t)$, obtidas por transformação cinemática de velocidades relativas em absolutas. A velocidade angular, $y_6(t)$, é determinada como a taxa de variação temporal da atitude, $y_3(t)$, um procedimento de derivação confiável pelo fato de o sinal enviado pela bússola possuir formato digital (sinal primitivo pouco ruidoso). Os sensores eletrônicos não são modelados porque, por hipótese, as saídas digitais fornecem valores instantâneos precisos e confiáveis de elementos do vetor de estados para serem utilizados diretamente.

As medidas de velocidade são mais fáceis de se obter em profundidade submarina; por isso, são medidas em lugar dos deslocamentos. Opções para medição direta de deslocamentos lineares absolutos, dispensando a medição de velocidades e o processa-

mento de cálculos posteriores, são odômetros, sinalizadores acústicos, sistemas de visão e sistemas de posicionamento global – *Global Positioning System* (GPS) ou *Differential Global Positioning System* (DGPS) –, entre outros.

3.2.5 Outros blocos funcionais

Pré-filtro

É interessante incluir um bloco pré-filtro precedendo a matriz $\mathbf{R}$ para suavizar as variações abruptas dos sinais de referência em degrau que o SNC recebe. Esses sinais, com amplitudes significativas ($|x_{ref}(t)|, |y_{ref}(t)| \geq 10 \text{ m}$ ou $|\psi_{ref}(t)| \geq \frac{\pi}{4} \text{ rad}$), podem causar desperdícios de esforços de controle, sobressinais excessivos nas respostas temporais ou, raramente, até instabilizar o sistema.

Os filtros do bloco pré-filtro são passivos, tipo passa-baixas, definidos por funções de transferência de primeira ordem, e apresentam ganhos unitários para frequência nula. Devem ser implementados preferencialmente por *software*.

Seja $\mathbf{F}(s) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz diagonal, complexa e variante em função da frequência, chamada matriz de pré-filtro, tal que:

$$\mathbf{F}(s) = \text{diag}(f(s), f(s), f(s), 0, 0, 0); \quad f(s) = \frac{(2 \cdot \pi \cdot f_C)}{s + (2 \cdot \pi \cdot f_C)} \quad (3.28)$$

onde f_C representa a frequência de corte do filtro passa-baixas para -3 dB .

O valor de f_C pode ser escolhido arbitrariamente dentro de um intervalo amplo. Quanto mais baixo o valor, menor a banda passante do sinal de referência e, portanto, mais lenta a resposta temporal do sistema e menor o esforço de controle requerido; quanto mais alto o valor, maior a banda passante do sinal de referência e, portanto, mais rápida a resposta temporal do sistema e maior o esforço de controle requerido. Sobretudo, para qualquer valor escolhido para f_C , há redução da banda passante, diminuição da velocidade de resposta e redução do esforço de controle em comparação com a não incorporação do bloco pré-filtro precedendo a entrada do sistema.

O critério adotado para definir f_C estipula um tempo de acomodação para o sinal de referência em degrau unitário ultrapassar certa porcentagem do valor final, passando através do filtro passa-baixas $f(s)$.

A expressão da função produzida pela convolução no tempo, do sinal tipo degrau com a função temporal do filtro, no domínio transformado de Laplace, é dada por:

$$S(s) = f(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot f_C)}{s \cdot (s + (2 \cdot \pi \cdot f_C))} \quad (3.29)$$

A expressão temporal da função $S(s)$ é dada por:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(s)\} = 1 - e^{(2 \cdot \pi \cdot f_C) \cdot t} \quad (3.30)$$

Após a realização de algumas operações em (3.30), para t e $s(t) = a$, $a < 1$, ($a \cdot 100$ % do valor final ou $a \cdot s(\infty)$) conhecidos, é obtido o valor f_C , tal que:

$$f_C = \frac{\ln \left(\frac{1}{1-a} \right)}{(2 \cdot \pi \cdot t)} \quad (3.31)$$

Compensação de falhas dos propulsores

Elevar o nível de confiabilidade de operação do robô submarino na realização de missões, nas quais podem ocorrer falhas ou acidentes, é sempre desejável. Para tanto, o SNC deve estar apto a identificar a falha e adaptar seu vetor de controle à dada condição extraordinária de operação. Sensores devem ser adicionados ao *hardware* e um conjunto específico de instruções deve ser adicionado ao *software* para dotar o SNC desta capacidade.

A condição de falha total de um propulsor é mais fácil de ser identificada do que as várias possibilidades de falha parcial. Exemplos de falhas parciais são a obstrução de parte da entrada do duto, deformação ou quebra de pás do hélice causadas por choques de objetos sólidos ou por interferências sofridas na rotação, entre outros. Falhas parciais

podem ser compensadas pelo nível de controle, ou até desaparecer espontaneamente, em alguns casos menos severos em que não ocorrem avarias graves.

Este trabalho prevê a possibilidade do veículo submarino continuar executando normalmente sua missão em caso de falha total de um dos propulsores, caracterizada aqui pela inoperância total do mesmo. A hipótese de inexistência de falhas parciais é assumida, porquanto as falhas parciais mais severas são convertidas em falhas totais. A falha total do propulsor pode ter origem em um de seus subsistemas internos, elétrico, magnético ou mecânico, ou pelo desligamento intencional pelo SNC. O desligamento resulta da tomada de decisão baseada na identificação positiva de anomalias severas pelo conjunto de sensores que deve ser instalado para esta finalidade.

As anomalias apresentadas podem ser detectadas por sensores relativamente simples e não muito caros, como sensores de corrente elétrica tipo *shunt* para medição das correntes elétricas drenadas da fonte, sensores de temperatura instalados em pontos importantes dos propulsores, como nos motores elétricos e associados aos mecanismos de transmissão, incluindo os eixos, e tacômetros baseados em *encoders* incrementais. Nos casos de avarias do motor elétrico ou do circuito eletrônico de acionamento – *driver* –, a corrente drenada sofre grande variação em relação ao valor esperado: corrente nula se for desligado pelo nível de controle ou correntes elevadas se for sobrecarregado ou sofrer curtos-circuitos. Sobrecargas causadas por interferências de corpos sólidos nos movimentos do hélice não danificam o motor graças à forma de transmissão empregada, entretanto pode ser verificado facilmente que o hélice gira com velocidade inferior à desejada, caso esteja preso ou arraste algo consigo além da água.

A hipótese de que o propulsor inoperante altera desprezivelmente o amortecimento hidrodinâmico é assumida. A aproximação é conveniente para dispensar retrabalhos associados a readequação dos valores dos elementos da matriz $\mathbf{D}(\nu(t))$. De fato, alguns testes em tanques de prova são executados com os propulsores desativados.

O estudo para a compensação das eventuais falhas dos propulsores é feito sobre a matriz $\mathbf{B}_{\text{CONFIG}}$; a ausência do empuxo relativo à falha de um dos propulsores é

manifestada fisicamente pela anulação da coluna condizente desta matriz.

Seja $\mathbf{B}_N \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ a matriz real e invariante no tempo, que apresenta coluna j nula respectiva ao propulsor N que apresenta falha, chamada matriz de configuração dos empuxos dos propulsores sob condição de falha do propulsor N , tal que:

$$\mathbf{B}_N = \mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \cdot \mathbf{T}_N \quad (3.32)$$

onde $\mathbf{T}_N \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ representa um grupo de matrizes esparsas cujos elementos são definidos pelo seguinte conjunto de regras:

$$\begin{cases} t_{ij} = 0 & \iff i \neq j \\ t_{ij} = 0 & \iff i = j, \quad j = N; \quad i, j, N = 1, 2, 3, 4 \\ t_{ij} = 1 & \iff i = j, \quad j \neq N \end{cases} \quad (3.33)$$

A matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ não perde posto em caso de falha total de algum propulsor, porque o sistema é superatuado. O sistema permanece controlável mesmo com três atuadores horizontais operando, tal que:

$$\text{posto}(\mathcal{C}) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{A}^2 \cdot \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{A}^3 \cdot \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{A}^4 \cdot \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{A}^5 \cdot \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \right) = 6 \quad (3.34)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{0}_{3 \times 4}^T \quad \mathbf{B}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ representa uma matriz equivalente à matriz $\mathbf{B}$, porém com a coluna j nula, $j = N$.

A compensação da falha do propulsor N é feita através da introdução de um bloco de compensação no SNC, que redistribui os empuxos entre os três propulsores restantes em operação, precedendo o bloco de conversão de empuxos em tensões elétricas de controle. A idéia surge a partir do seguinte modelo físico extraído da figura 2.5:

$$\tau_P(t) = \mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \cdot \mathbf{E}(t) = \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{B}_{\text{COMP}_N} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (3.35)$$

Sejam $\mathbf{B}_{\text{COMP}_N} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $N = 1, 2, 3, 4$, matrizes reais e invariantes no tempo, cada uma específica para compensar a falha de um propulsor e, por isso, chamada de matriz de compensação da falha do propulsor N , tal que:

$$\mathbf{B}_{\text{COMP}_N} = \mathbf{B}_N^* \cdot \mathbf{B}_{\text{CONFIG}} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{B}_N^*$ representa a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz $\mathbf{B}_N$.

A matriz $\mathbf{B}_{\text{COMP}_0} = \mathbf{I}_4$ é definida para a condição de ausência de falhas dos atuadores. Nesta condição $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{\text{CONFIG}}$, pois $\mathbf{T}_0 = \mathbf{I}_4$.

O bloco formado pelas matrizes $\mathbf{B}_{\text{COMP}_N}$, $N \in \mathbb{N} / N \in [0, 4]$, é denominado simplesmente de $\mathbf{B}_{\text{COMP}}$. Fica implícito que compete ao *software* selecionar a matriz apropriada, entre as cinco opções disponíveis, para operar sem falha de qualquer dos propulsores ou compensar a falha total de um propulsor defeituoso.

Empuxos residuais

Uma sugestão de recurso técnico para incrementar o SNC, que pode trazer vantagens em precisão e segurança de operação do veículo, é apresentada a seguir; seu uso, entretanto, acarreta maior consumo de energia elétrica, o que implica em redução do tempo de duração das missões submarinas devida à capacidade limitada de fornecimento de energia pelas baterias. O intuito é compensar parcialmente as discrepâncias que existem entre a modelagem feita para os propulsores e os dispositivos reais instalados no veículo. Atualmente, não há embasamento em dados reais que permita justificar a ativação ou não deste recurso. Somente pela avaliação de resultados práticos obtidos, se houver a implementação futura do SNC no VSSA, podem ser mensuradas a vantagem obtida e a redução no tempo de operação, em comparação com o tempo de operação sem a ativação do recurso. É importante frisar que este veículo é objeto de diferentes pesquisas e, portanto, pode ser empregado para diversas finalidades, cada qual com diferentes especificações de desempenho, tolerâncias e tempos de duração das missões, de modo que pode ser interessante contar com este recurso durante algum teste prático realizado com o veículo.

Para aumentar a precisão das manobras e abrandar as condições de operação dos propulsores, um dos recursos disponíveis é a inclusão de empuxos residuais nos

acionamentos, somados aos empuxos determinados pelo nível de navegação, reduzindo o número de inversões de sentido de rotação dos hélices, que são mantidos em rotação indeterminadamente; o VSSA alcança as posições de referência através de variações das velocidades de giro dos hélices.

Os empuxos residuais produzem forças e momentos de força resultantes nulos nas direções dos eixos do sistema $X_0Y_0Z_0$, devidos à configuração simétrica em que os propulsores são instalados. O sentido direto de rotação é preferido por motivo de economia de energia, pois é mais eficiente que o sentido reverso de rotação.

O recurso é introduzido no SNC pela criação da variável $E_{RESIDUAL}$ no *software*, onde $E_{RESIDUAL}$ representa o valor residual do empuxo produzido por um propulsor. É ativado pela atribuição de valor diferente de zero à variável criada. É desativado, de modo a não aumentar o consumo de energia, pela anulação da variável. O valor de $E_{RESIDUAL}$ deve ser determinado de modo a garantir um bom intervalo de empuxos em torno do valor residual, mas sem causar consumo demasiado de energia da fonte de alimentação. Quanto mais elevado o valor de $E_{RESIDUAL}$, maior a margem de variação de velocidade de giro antes de inverter o sentido de rotação, maior o consumo de energia e menor a margem de incremento do empuxo até saturar o atuador.

Seja $\mathbf{E}_{RES} \in \mathbb{R}^4$ o vetor real e invariante no tempo, chamado vetor de empuxos residuais, tal que:

$$\mathbf{E}_{RES} = [E_{RESIDUAL}, E_{RESIDUAL}, E_{RESIDUAL}, E_{RESIDUAL}]^T \quad (3.37)$$

A introdução do recurso é simples, uma vez que o vetor de tensões elétricas enviado ao nível de controle é determinado pelo bloco $\mathbf{U}(\mathbf{E}(t))$.

O vetor de controle resultante pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) \cdot (\mathbf{E}_{RES} + \mathbf{E}(t)) \quad (3.38)$$

O vetor $\mathbf{u}(t)$ apresenta uma parcela fixa, formada por quatro tensões elétricas constantes diferentes, oriunda da multiplicação $\mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) \cdot \mathbf{E}_{RES}$, e uma parcela variável, oriunda da multiplicação $\mathbf{U}(\mathbf{E}(t)) \cdot \mathbf{E}(t)$. Desta forma, $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0} \forall t > 0$.

A parte dos empuxos devida a $\mathbf{E}_{\text{RES}}$ não afeta o equilíbrio do sistema, mas apenas faz com que os hélices nunca parem de girar, dado que:

$$\mathbf{0} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_{\text{RES}} \quad \forall E_{\text{RESIDUAL}} \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.39)$$

Em condição anormal de operação, com apenas três atuadores em funcionamento, os empuxos residuais devem ser anulados, caso apresentem valor não nulo. Isso porque é impossível encontrar um vetor $\mathbf{E}_{\text{RES}} \neq \mathbf{0}$, tal que as forças e os momentos resultantes não desequilibrem o sistema; não existe outra solução para (3.39) que não seja a solução trivial, pois o determinante da matriz formada pela eliminação da coluna nula de $\mathbf{B}_{\text{N}}$ nunca é nulo. As linhas da matriz são linearmente independentes, tal que:

$$\det(\bar{\mathbf{B}}) \neq 0 ; \quad \bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \bar{\mathbf{B}} = \{\mathbf{B}_{\text{N}}\}_{ij}, j \in [1,4] / \nexists j=N \quad (3.40)$$

3.3 Síntese do SNC

Ao longo deste capítulo existem abundantes referências aos sistemas lineares, nos quais se apóia a teoria de controle ótimo aplicada no trabalho; no entanto, o modelo linear da planta é empregado apenas na construção do estimador assintótico de estados de ordem plena e para calcular as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$.

Existem infinitas combinações dos parâmetros de ponderação das matrizes $\mathbf{W}_{\text{U}}$, $\mathbf{W}_{\text{X}}$ e $\mathbf{W}_{\text{Y}}$. Logo, existem infinitos reguladores e observadores ótimos de estados diferentes. Certas combinações geram controles que saturam os propulsores; outras produzem controles que geram trajetórias de estado que superam os limites admissíveis. Somente pela análise das respostas temporais simuladas com a planta não-linear do VSSA é possível constatar se o desempenho alcançado para um conjunto de parâmetros é aceitável. A proposta para a síntese consiste em uma otimização por busca exaustiva balizada; consiste em calcular um conjunto de pares de matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, simular as respostas temporais em MF para cada par, organizar as respostas e, finalmente, analisar e definir a combinação de parâmetros que produz o melhor resultado.

A figura 3.12 ajuda a ilustrar o conceito empregado na busca pela lei de controle desejável: O conjunto $\mathbf{U} = \mathbb{R}^4$ é um espaço vetorial formado por todos os controles possíveis; o subconjunto $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^4 / \mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}$ é um subespaço vetorial formado pelos controles que respeitam os limites admissíveis⁵; o subconjunto $\mathbf{U}_2 \in \mathbb{R}^4 / \mathbf{U}_2 \subset \mathbf{U}$ é um subespaço vetorial formado pelos controles determinados através de políticas ótimas; o subconjunto $\mathbf{U}_3 \in \mathbb{R}^4 / \mathbf{U}_3 \subset \mathbf{U}$ é um subespaço vetorial formado pelos controles que geram trajetórias de estado que respeitam os limites admissíveis⁶ quando aplicados à entrada da planta. O subconjunto $\mathbf{U}_D \in \mathbb{R}^4 / \mathbf{U}_D = \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3$, indicado pela área hachurada, é um subespaço vetorial formado pelos controles desejáveis, que reúnem as características apresentadas individualmente pelos conjuntos $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ e $\mathbf{U}_3$. Então, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_D \forall t \geq 0$.

Figura 3.12: Conjunto de todos os controles possíveis

A otimização por busca exaustiva balizada é apoiada nos valores constantes na tabela 3.1. A maioria das linhas não é mostrada para reduzir o espaço ocupado para registrar as combinações numeradas, porque elas seguem uma seqüência lógica fácil de ser acompanhada: a coluna associada a w_U é integralmente preenchida com o mesmo

⁵ $\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T / V_{min} \leq u_i \leq V_{max} ; i = 1, 2, 3, 4$. Consultar Avila [4].

⁶Os deslocamentos absolutos no plano horizontal são ilimitados teoricamente, tal que $|\mathbf{x}^1(t)| \leq \infty$, mas, na prática, são limitados: o alcance do sistema de intercomunicação entre o VSSA e a estação de superfície é limitado, bem como a precisão envolvida no sensoramento e no tratamento dos sinais dos sensores. As velocidades absolutas são limitadas, tal que, $- [0,85 \text{ m/s}, 0,64 \text{ m/s}, 0,53 \text{ rad/s}]^T \leq \mathbf{x}^2(t) \leq [0,85 \text{ m/s}, 0,64 \text{ m/s}, 0,53 \text{ rad/s}]^T$. Consultar a subseção 3.2.1 para maiores detalhes.

valor; a cada três linhas corresponde um valor diferente de w_X ; a cada grupo de três linhas é reiniciado o conjunto formado pelos números um, dois e cinco, relativos a w_Y . Cada linha traz um conjunto de parâmetros que origina um par de matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$. São fixados os valores $w_u = w_U$, para os parâmetros de $\mathbf{W}_U$, $w_{x_1} = w_{x_2} = w_{x_3} = w_{x_4} = w_{x_5} = w_{x_6} = w_X$, para os parâmetros de $\mathbf{W}_X$, e $w_{y_1} = w_{y_2} = w_{y_3} = w_{y_4} = w_{y_5} = w_{y_6} = w_Y$, para os parâmetros de $\mathbf{W}_Y$.

Tabela 3.1: Tabela de combinações numeradas

Combinação	w_U	w_X	w_Y
1	1	100	1
2			2
3			5
4	1	200	1
5			2
6			5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
115	1	3900	1
116			2
117			5
118	1	4000	1
119			2
120			5

Os sinais de referência adotados são degraus de amplitudes significativas, tais que $\mathbf{r}(t) = [10, 10, \frac{\pi}{4}, 0, 0, 0]^T$, aplicados simultaneamente aos três GL horizontais. Representam a condição de operação que mais exige do SNC, na qual todos os acoplamentos entre os GL se manifestam.

Para o bloco de pré-filtro são adotados $a = 0,98$ e $t = 15$; a frequência de corte obtida é $f_C \approx 0,0415 \text{ Hz}$. As figuras 3.13 e 3.14 comparam os sinais de referência antes e depois da incorporação do pré-filtro para a frequência de corte f_C . A função degrau que passa pelo filtro apresenta exatamente a característica desejada $s(15) = 0,98$; a função senoidal $\sin(0,01 \cdot \pi \cdot t)$ sofre atenuação desprezível (atinge $\approx 99,3\%$ da amplitude máxima) e atraso pequeno ($< 4 \text{ s}$) devido à sua baixa frequência, inferior à frequência de corte do filtro.

Figura 3.13: Sinais de referência em degrau sem e com pré-filtro incorporado

Figura 3.14: Sinais de referência senoidais sem e com pré-filtro incorporado

O recurso sugerido de os propulsores produzirem empuxos residuais é ativado. O valor adotado é $E_{RESIDUAL} = 19 \text{ N}$, aproximadamente 10% de E_{max} . Nas simulações a seguir, o recurso assume papel fundamental na definição dos parâmetros do SNC, mas não interfere no desempenho do sistema. Isto ocorre porque a ativação dos empuxos residuais colabora para a saturação dos propulsores, mas o modelo estático dos empuxos produzidos pelos propulsores utilizado despreza as constantes de tempo envolvidas.

Após o término das simulações parametrizadas pela tabela 3.1, o extrato das respostas temporais obtidas é organizado e mostrado nas figuras numeradas de 3.15 a 3.24. Os tempos de subida na figura 3.18 são tomados segundo dois critérios diferentes: para as respostas superamortecidas são considerados os períodos em que elas assumem valores situados entre 5 % e 95 % dos valores de referência; para as respostas subamortecidas são considerados os períodos em que elas assumem valores situados entre 0 % e 100 % dos valores de referência. Os tempos de acomodação nas figuras 3.19 e 3.23 são os tempos necessários para que as respostas assumam definitivamente valores situados em torno de 2 % dos valores de referência. A figura 3.15 atesta que o horizonte de tempo definido para as simulações é satisfatório.

A figura 3.16 influencia pouco na definição dos valores dos parâmetros, uma vez que todas as repostas apresentam sobressinais inferiores a 5 % do valor de referência. Tal fato é devido ao uso do pré-filtro reduzir a banda-passante dos sinais de referência. É um fato interessante essas respostas serem predominantemente subamortecidas porque

asseguram operação do sistema em maior velocidade. A definição da combinação de parâmetros depende então da análise dos dados contidos nas figuras restantes.

Figura 3.15: Valores finais no horizonte de simulação estabelecido

Figura 3.16: Picos máximos dos deslocamentos absolutos

Figura 3.17: Tempos dos picos máximos dos deslocamentos absolutos

Figura 3.18: Tempos de subida dos deslocamentos absolutos

As figuras 3.17, 3.18 e 3.19 mostram que a elevação de w_X favorece o desempenho do sistema; tempos cada vez menores são conseguidos com a elevação de w_X em relação a w_U e w_Y , mas a taxa de variação é menor e tende a um valor de estabilização. As figuras mostram também que a elevação de w_Y desfavorece o desempenho do sistema; tempos ligeiramente maiores são conseguidos à medida em que w_Y cresce frente a valores constantes de w_U e w_X . Duas informações relevantes podem ser extraídas dessas figuras: w_Y deve ser o menor possível em relação a w_X , para não degradar o desempenho; w_X deve ser o maior possível, até o limite em que não desperdice energia.

A figura 3.20 mostra que o erro em relação à trajetória de referência apresenta taxa de crescimento bem definida para os maiores valores de w_X . Isto porque a veloci-

dade de resposta do sistema aumenta e, como consequência, maior é a dificuldade do controlador em assegurar que o veículo siga a trajetória de referência quando se manifestam fortes acoplamentos entre os GL, ocasionando perturbações mútuas. Ainda assim, os erros são aceitáveis para todos os parâmetros da tabela 3.1, sempre inferiores a 5 % da trajetória de referência, porquanto o pré-filtro reduz a banda-passante dos sinais de referência. Há leve redução do erro para os maiores valores de w_Y .

Figura 3.19: Tempos de acomodação dos deslocamentos absolutos

Figura 3.20: Erros em relação às trajetórias de referência

A figura 3.21 mostra que os picos máximos dos empuxos e do torque resultantes produzidos pelos propulsores horizontais aumentam à medida em que cresce w_X , e que diminuem ligeiramente à medida em que cresce w_Y , de acordo com os comentários tecidos acerca das informações contidas nas figuras 3.17, 3.18 e 3.19. A figura 3.22 mostra que não há saturação dos empuxos, ou do torque, para qualquer das combinações de parâmetros usada. Por estas figuras, qualquer combinação pode ser usada.

Figura 3.21: Picos máximos dos empuxos e torque

Figura 3.22: Tempos de saturação dos empuxos e torque

A figura 3.23 mostra que os tempos de acomodação das tensões elétricas de controle dos propulsores diminuem à medida em que cresce w_X , e que aumentam ligeiramente à medida em que cresce w_Y , reafirmando o comentário feito acima. A figura 3.24 mostra que as tensões atingem os valores de saturação das entradas dos servo-sistemas a partir de certo valor assumido por w_X , de maneira independente do valor assumido por w_Y , desestimulando o uso de combinações numeradas a partir da 90.

Figura 3.23: Tempos de acomodação das tensões de controle

Figura 3.24: Tempos de saturação das tensões de controle

Com base nas informações das figuras, podem ser definidos com segurança parâmetros de qualquer combinação numerada entre 30 e 90, pois produzem respostas temporais aceitáveis sem saturar os atuadores do VSSA. Quanto menor o número da combinação, e portanto de w_X , maiores são as constantes de tempo envolvidas, mais lentas são as respostas e menor é o dispêndio de energia elétrica da fonte de alimentação; o consumo de energia é privilegiado em detrimento ao desempenho alcançado. Ao contrário, quanto maior o número da combinação, mais privilegiado é o desempenho alcançado em detrimento ao consumo de energia elétrica da fonte. O valor de w_Y pouco influencia a definição da combinação, pois altera desprezivelmente as respostas temporais, na grande maioria dos casos analisados. A combinação de parâmetros definida pertence à linha número 34 da tabela 3.1: $w_U = 1$, $w_X = 1200$ e $w_Y = 1$.

3.4 Apresentação do SNC proposto

A figura 3.25 mostra o diagrama de blocos do VSSA com o SNC incorporado. Podem ser vistos todos os blocos funcionais descritos e as interligações que possuem. A figura não mostra a parte do SNC relativa à identificação de falhas dos propulsores e tomada de ações compensatórias necessárias; ela não faz parte do escopo do trabalho; fica implícito que compete ao *software* identificar a falha do propulsor, selecionar a matriz $\mathbf{B}_{\text{COMP}_N}$ ($\mathbf{B}_{\text{COMP}}$) adequada e ajustar $\mathbf{E}_{\text{RES}} = \mathbf{0}$, automaticamente.

Figura 3.25: VSSA com o SNC incorporado

Capítulo 4

Aplicação e Resultados

4.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados obtidos pela aplicação do SNC controlando a planta não-linear do VSSA em simulações computacionais diversas.

São feitas simulações sob condições nominais de operação. Para avaliação da robustez do sistema operando em MF, as simulações são realizadas sob condições de grandes variações dos coeficientes hidrodinâmicos do modelo e sob condição de falha de um dos propulsores.

4.2 Operação em condições nominais

As figuras a seguir mostram os resultados obtidos em simulações realizadas com referências em degrau e senoidais sob condições nominais de operação, sem a presença de distúrbios ou ruídos de medida sobre o vetor de estados, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{n}(t) = \mathbf{0}$.

A figura 4.1 mostra que os deslocamentos absolutos são respostas subamortecidas com máximo sobressinal inferior a 2 %, com erro nulo de regime permanente e com tempo de acomodação próximo a 31 s. A figura 4.2 mostra que as velocidades lineares absolutas atingem picos máximos próximos, porém inferiores, dos máximos valores admissíveis impostos neste trabalho. A velocidade média desenvolvida pelo veículo é $\approx 0,47 \text{ m/s}$, já que percorre trajetória de cerca de 14,4 m em quase 31 s. A velocidade angular é baixa e respeita os limites impostos.

Figura 4.1: Deslocamentos absolutos para referências em degrau

Figura 4.2: Velocidades absolutas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

As figuras 4.3 e 4.4 mostram que os empuxos e torques resultantes não atingem valores muito elevados, e são anulados após o veículo alcançar sua posição final, apesar de todos os propulsores permanecerem ativados produzindo empuxos residuais proporcionais às tensões elétricas de controle a eles aplicadas.

Figura 4.3: Empuxos e torque para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.4: Tensões elétricas de controle para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

A trajetória de referência é acompanhada com erro desprezível de distância percorrida ($\approx 1,84\%$) e com erro de posicionamento final nulo, mostra a figura 4.5.

As figuras 4.6 e 4.7 mostram que os deslocamentos absolutos praticamente não sofrem atenuação em relação às amplitudes dos sinais de referência, mas sofrem apenas um pequeno atraso ($< 8\text{ s}$). A figura 4.8 mostra que as velocidades absolutas são baixas, em função dos sinais de variação lenta dados como referência de posição, e que respeitam os limites de magnitude impostos.

Figura 4.5: Trajetória absoluta para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.6: Trajetória absoluta para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.7: Deslocamentos absolutos para referências senoidais

Figura 4.8: Velocidades absolutas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.9: Empuxos e torque para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.10: Tensões elétricas de controle para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

As figuras 4.9 e 4.10 mostram que os empuxos e torques resultantes não atingem valores muito elevados, e que não ocorre inversão do sentido de rotação dos hélices dos propulsores em momento algum; os empuxos variam com o tempo em torno dos empuxos residuais produzidos constantemente. Por exemplo, em um caso prático com

o SNC implementado, o tempo de resposta do sistema seria reduzido e a precisão na realização de manobras seria aumentada. Novamente, apenas com a implementação é possível mensurar o benefício e o gasto de energia causados pela ativação dos empuxos residuais.

As respostas simuladas demonstram que foi alcançado desempenho satisfatório pelo sistema operando em MF sob as condições nominais de síntese do SNC.

4.3 Avaliação da robustez

Esta seção avalia a robustez da estabilidade e a robustez do desempenho do sistema operando em MF; contudo, não há garantia de existência de qualquer das duas. A idéia é verificar as respostas do sistema quando há variações dos parâmetros nominais da planta, sobre os quais se apoia integralmente o desenvolvimento do SNC, e quando há falha total de um dos propulsores horizontais.

4.3.1 Variações dos parâmetros nominais da planta

Os valores nominais usados no modelo não-linear da planta são considerados constantes mas, na realidade, variam durante a operação do veículo. Também existem erros de estimação e imprecisões na determinação dos valores nominais. O modelo contém considerável incerteza quanto aos valores de $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{D}(\nu(t))$ e η_1 , podendo chegar a ultrapassar 50% dos valores nominais usados, afirmam Caccia *et alli* [6] e Ishidera *et alli* [27]. Modelos mais complexos utilizam tabelas para atualizar os valores dos coeficientes hidrodinâmicos; os ângulos de atitude são empregados para selecionar os valores tabelados. Consultar Ishidera *et alli* e Souza [40] para obter mais informações. Os demais valores nominais do modelo não variam significativamente durante as missões submarinas. Este trabalho não emprega modelo tão sofisticado; carece de uma avaliação da robustez da estabilidade para assegurar que o SNC sintetizado é estável. A robustez do desempenho é avaliada juntamente com a robustez da estabilidade.

A robustez da estabilidade e a robustez do desempenho são avaliadas através

de um conjunto de simulações nas quais os parâmetros hidrodinâmicos e o coeficiente de instalação dos propulsores sofrem grandes variações. η_1 e os elementos de $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{D}(\nu(t))$ assumem valores diferentes a cada simulação. Importante enfatizar que o SNC sintetizado não sofre reajustes e, portanto, atua em condições extremamente desfavoráveis, bastante diferentes das condições nominais de síntese.

As variações dos valores nominais são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\eta}_1 = f_0 \cdot \eta_1 \\ \widehat{D_{rr}} = f_1 \cdot D_{rr} \\ \widehat{D_{vv}} = f_2 \cdot D_{vv} \\ \widehat{D_{uu}} = f_3 \cdot D_{uu} \\ \widehat{M_{\dot{r}}} = f_4 \cdot M_{\dot{r}} \\ \widehat{M_{\dot{v}}} = f_5 \cdot M_{\dot{v}} \\ \widehat{M_{\dot{u}}} = f_6 \cdot M_{\dot{u}} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde os f_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, são fatores multiplicadores constantes que assumem apenas dois valores distintos (0,75 ou 1,25) ou (0,5 ou 1,5), configurando uma base binária. A tabela 4.1 indica 128 combinações diferentes para as simulações usadas na avaliação da robustez. A maioria das linhas não é mostrada para reduzir o espaço ocupado para indicar as combinações, porque elas seguem uma sequência lógica fácil de se acompanhar: cada coluna relativa à um f_i possui 2^i linhas contíguas com valores idênticos. Cada linha gera um par de matrizes $\widehat{\mathbf{M}}_A$ e $\widehat{\mathbf{D}(\nu(t))}$, e um coeficiente $\widehat{\eta}_1$, usados no lugar dos nominais $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{D}(\nu(t))$ e η_1 .

A avaliação da robustez é feita para os sinais de referência dos tipos degrau e senóide. As respostas temporais mostradas nas figuras numeradas de 4.11 até 4.18 revelam que o sistema em MF apresenta estabilidade robusta, visto que permanece estável, e apresenta também desempenho robusto, uma vez que o desempenho é afetado em grau moderado, quando sujeito a grandes variações dos coeficientes hidrodinâmicos e do coeficiente de instalação dos propulsores horizontais. As respostas mostradas devem

ser interpretadas como envoltórias que englobam todas as respostas provenientes das 128 simulações, fornecendo apenas os contornos inferior e superior do conjunto.

Tabela 4.1: Fatores multiplicadores dos parâmetros do modelo não-linear

Nº	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75
2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,25
3	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	0,75
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	1,25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
125	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5	0,75
126	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0,5	1,25
127	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0,75
128	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,25

Figura 4.11: Deslocamentos absolutos extremos para referências em degrau

Figura 4.12: Trajetórias absolutas extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.13: Empuxos e torque extremos para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.14: Tensões de controle extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos

Como esperado, as variações mais amplas dificultam mais o trabalho do SNC e degradam mais intensamente o desempenho do sistema. Contudo, não produzem erros de regime permanente, o que aprova o SNC sintetizado. O maior erro é verificado para o sinal de referência em degrau, valendo aproximadamente 25 % da trajetória de referência. Para o sinal senoidal, caracterizado por variações de amplitude mais lentas, o maior erro verificado é menor que 5 % da trajetória de referência.

Figura 4.15: Deslocamentos absolutos extremos para referências senoidais

Figura 4.16: Trajetórias absolutas extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.17: Empuxos e torque extremos para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos

Figura 4.18: Tensões de controle extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos

Valores maiores de w_X , até o limite de não comprometimento da robustez da estabilidade, sugerem equivocadamente que o desempenho alcançado pelo sistema pode ser ainda superior; isto não é verdade, uma vez que todos os valores registrados na tabela 3.1 superiores ao definido $w_X = 1200$ levam à saturação das tensões elétricas de controle dos propulsores em várias condições durante as 128 simulações. Embora

nunca instabilize o sistema, não é interessante que os propulsores operem saturados; estratégias para limitar os valores alcançados pela integração dos sinais durante os períodos de saturação dos atuadores – *antiwindup* – não são incorporadas ao SNC.

4.3.2 Falha total de um propulsor horizontal

Outra forma de avaliação da robustez, mais severa que a anterior, com apenas três dos quatro atuadores em funcionamento, é apresentada nesta subseção. Novamente, o modelo está sujeito a variações dos coeficientes hidrodinâmicos e do coeficiente de instalação dos propulsores horizontais.

Por simplicidade e economia de espaço, são fornecidas somente as respostas obtidas nas simulações em caso de falha total do propulsor 1, o pior de todos os casos de falha total de propulsor, para a combinação de referências de posição em degrau positivas usadas; acarreta a maior sobrecarga dos atuadores restantes em operação. De maneira análoga, para outras combinações dos sinais algébricos dos sinais de referência de posição em degrau, podem ser mais críticas as falhas totais de outros propulsores.

Sob condição de falha total de um propulsor, é constatada a necessidade de redução dos ganhos de realimentação do sistema, portanto, de redução da penalização dos estados, em nome da garantia de operação sem saturação dos propulsores. O valor máximo admissível encontrado é $w_X = 150$. Há queda tolerável do desempenho do sistema nesta situação, mas é esperado que não seja exigido do veículo continuar por longo tempo em operação. Detectada a falha total de um dos propulsores, e procedido conforme exposto no texto sobre compensação de falhas, as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, calculadas para a combinação $(w_U, w_X, w_Y) = (1, 1200, 1)$, devem ser substituídas por outras matrizes, $\mathbf{G}_{\text{COMP}}$ e $\mathbf{H}_{\text{COMP}}$, calculadas para a combinação $(w_U, w_X, w_Y) = (1, 150, 1)$. Esta rotina de substituição das matrizes de realimentação do sistema é muito fácil de ser adicionada ao *software* do SNC, pois as matrizes não são calculadas em tempo real e são formadas por elementos constantes que, uma vez calculados, podem ser armazenados em memória não-volátil.

Figura 4.19: Deslocamentos absolutos extremos para referências em degrau sob falha total do propulsor 1

Figura 4.20: Trajetórias absolutas extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

Figura 4.21: Empuxos e torque extremos para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

Figura 4.22: Tensões de controle extremas para referências em degrau dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

Figura 4.23: Deslocamentos absolutos extremos para referências senoidais sob falha total do propulsor 1

Figura 4.24: Trajetórias absolutas extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

Figura 4.25: Empuxos e torque extremos para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

Figura 4.26: Tensões de controle extremas para referências senoidais dadas para os deslocamentos absolutos sob falha total do propulsor 1

As respostas mostradas nas figuras numeradas de 4.19 até 4.26 comprovam que o sistema apresenta estabilidade robusta, porque permanece operando estavelmente em todas as simulações realizadas, além de apresentar desempenho robusto, pouco inferior ao desempenho alcançado com todos os propulsores em plena operação (mais lento). As respostas mostradas são envoltórias que englobam as respostas obtidas em 128 simulações feitas para as variações indicadas pela tabela 4.1. Não há saturação dos propulsores e nem erros de regime permanente detectáveis nas respostas temporais. Os limites impostos às magnitudes das variáveis de estado são respeitados. A diminuição de w_X ocasiona aumento das constantes de tempo do sistema e eleva os tempos de acomodação das respostas.

Capítulo 5

Considerações finais

5.1 Conclusões

Foi apresentado neste trabalho um modelo matemático simplificado do comportamento dinâmico do VSSA que está em desenvolvimento e construção na EPUSP, para a Petrobrás. O modelo foi construído para 6GL, inicialmente, e depois reduzido aos 3GL horizontais de interesse. O processo de modelagem seguiu em grande parte as formulações apresentadas por Fossen [16].

O modelo, construído a parâmetros concentrados, ficou limitado a descrever somente os aspectos mais relevantes da dinâmica da planta para o desenvolvimento do SNC; a dinâmica foi modelada apenas para baixas velocidades de deslocamento; algumas hipóteses simplificadoras foram assumidas; as forças e os momentos de força hidrodinâmicos foram modelados de forma prática e aproximada, com coeficientes hidrodinâmicos constantes ao longo do tempo; os empuxos produzidos pelos propulsores foram modelados como empuxos estáticos pelas forças de sustentação desenvolvidas pelos hélices em função das tensões elétricas aplicadas às entradas de controle.

O modelo apresentado é literal, admite ampla variação de seus parâmetros. Contudo, não permite o deslocamento da origem do sistema móvel de coordenadas adotado, nem a perda de planos de simetria da estrutura do veículo.

Este trabalho apresentou uma proposta de controlador multivariável determinístico para implementação futura como SNC do veículo, compatível com seu estágio atual

de desenvolvimento, mais simples do que algumas outras propostas já apresentadas.

As respostas temporais, obtidas através de simulações computacionais com o modelo não-linear da planta do VSSA com o SNC sintetizado, sob condições nominais de síntese, demonstraram que o desempenho do sistema em operação em MF foi satisfatório, que apresentou erro nulo de regime permanente ao seguir trajetórias temporais dadas como referências de posição e que não ocorreram saturações dos propulsores durante as simulações. Não foram aplicados distúrbios ou ruídos de medida sobre o vetor de estados da planta.

Foram feitas simulações para avaliar a robustez da estabilidade e a robustez do desempenho do sistema em operação em MF. As respostas temporais simuladas mostraram que, apesar das incertezas dos parâmetros da planta e da falha de um dos propulsores do veículo submarino, o controlador linear sintetizado é capaz de garantir estabilidade robusta e desempenho robusto, no entanto, com a limitação das condições de operação a baixas velocidades.

Foi apresentada uma sugestão de teste de recurso técnico, que pode ser implementado com facilidade no SNC sintetizado, com o intuito de reduzir a inércia do sistema e melhorar o desempenho na realização de manobras, fundamentado em manter sempre acionados os propulsores do veículo. As simulações feitas com o modelo simplificado construído não permitiram determinar se existe vantagem efetiva em aumentar o consumo de corrente elétrica da fonte de alimentação para aumentar a precisão das manobras; esta determinação só poderá ser feita com testes práticos com o SNC implementado no veículo.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

1. Implementar o SNC sintetizado para capacitar o VSSA a realizar manobras semi-autônomas. Isto é fundamental para que uma sintonia fina do controlador possa ser feita sobre o sistema real em operação submarina; além disso, poderá ser

testada a sugestão de manter os hélices dos propulsores sempre em rotação para avaliar os benefícios e o consumo de energia acarretados;

2. Capacitar o VSSA a rejeitar distúrbios externos, através do conhecimento de sua posição absoluta, baseado em sinalizadores acústicos ou GPS, ou ainda através da medição das correntes submarinas, além da velocidade absoluta do veículo;
3. Desenvolver o sistema de guiagem do VSSA, e a comunicação entre ambos, objetivando realizar missões submarinas reais;
4. Especificar, comprar e instalar no VSSA alguns dos sensores mencionados para garantir maior segurança de operação do veículo;
5. Aprimorar o veículo com a inclusão de itens importantes para a realização das missões, tais como sistemas de iluminação de alta eficiência, preferencialmente com tecnologia eletrônica Light Emitting Diode (LED), câmeras digitais de vídeo, sistemas de aquisição e armazenamento de dados, entre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] Abkowitz, M. A. *Stability and motion control of ocean vehicles*. The M.I.T. Press, Massachusetts – USA, Segunda edição, 1972.
- [2] Aguilar, L. L. P. Controle inteligente para a navegação de veículos submarinos semi-autônomos. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2007. 138p.
- [3] Almay, P. *Elementos de cálculo diferencial e integral*, volume II. Kronos, São Paulo, São Paulo – Brasil, Primeira edição, 1977.
- [4] Avila, J. P. J. Estimação de coeficientes hidrodinâmicos de um veículo submarino semi-autônomo. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2003. 100p.
- [5] Beer, F. P. & Johnston Jr., E. R. *Mecânica vetorial para engenheiros*, volume II – Dinâmica. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, São Paulo – Brasil, Terceira edição, 1980.
- [6] Caccia, M.; Indiveri, G. & Veruggio, G. Modeling and identification of open-frame variable configuration unmanned underwater vehicles. *IEEE Journal of oceanic engineering* 25(2): 227 – 238, 2000.
- [7] Caccia, M.; Bono, R.; Bruzzone, G. & Veruggio, G. Bottom-following for remotely operated vehicles. *Control Engineering Practice* 11: 461 – 470, 2003.

- [8] Caccia, M. Vision-based ROV horizontal motion control: Near-seafloor experimental results. *Control Engineering Practice* 15: 703 – 714, 2007.
- [9] Choi, J. -K.; Shiraishi, T. & Tanaka, T. Safe breakwater-following control of an autonomous underwater vehicle with non-zero forward velocity. *Automation in Construction* 16: 778 – 786, 2007.
- [10] Cruz, J. J. da. *Controle robusto multivariável*. Edusp, São Paulo, São Paulo – Brasil, Primeira edição, 1996.
- [11] Donha, D. C. *Estudo, implementação, teste e avaliação de um sistema de posicionamento dinâmico*. Tese de doutorado, Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 1989. 397p.
- [12] Donha, D. C. *Sistemas de controle marítimos*. Tese de livre-docência, Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2000. 344p.
- [13] Fossen, T. I. & Balchen, J. G. The NEROV autonomous underwater vehicle. *Proceedings of the OCEANS'91 IEEE Conference, Honolulu, Hawaii – USA*: 1142 – 1155, 1991.
- [14] Fossen, T. I. & Sagatun, S. I. Adaptive control of nonlinear systems: A case study of underwater robotic systems. *Journal of robotic systems* 8(3): 393 – 412, 1991.
- [15] Fossen, T. I. & Sagatun, S. I. Adaptive control of nonlinear underwater robotic systems. *Proceedings of the 1st IEEE conference on robotics and automation (ICAR)*, Sacramento, California – USA: 1687 – 1695, 1991.
- [16] Fossen, T. I. *Guidance and control of ocean vehicles*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex – England, Primeira edição, 1994.
- [17] Fossen, T. I. & Fjellstad, O. -E. Robust adaptive control of underwater vehicles: A comparative study. *Proceedings of the 3rd IFAC workshop on control applications in marine systems (CAMS'95)*, Trondheim – Norway: 362 – 369, 1995.

- [18] Fossen, T. I. & Blanke, M. Nonlinear output feedback control of underwater vehicle propellers using feedback from estimated axial flow velocity. *IEEE Journal of oceanic engineering* 25(2): 241 – 255, 2000.
- [19] Franklin, G. F.; Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. *Feedback control of dynamic systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts – USA, Primeira edição, 1986.
- [20] Franklin, G. F.; Powell, J. D. & Workman, M. L. *Digital control of dynamic systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts – USA, Segunda edição, 1990.
- [21] Friedland, B. *Control system design*. McGraw-Hill Inc., New York, New York – USA, Primeira edição, 1986.
- [22] Garcia, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. Edusp, São Paulo, São Paulo – Brasil, Segunda edição, 2005.
- [23] Goulart, C. Modelagem, simulação e controle de um veículo submarino de operação remota. Dissertação (mestrado), Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio De Janeiro, Rio De Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2007. 126p.
- [24] Hoang, N. Q. & Kreuzer, E. Adaptive PD-controller for positioning of a remotely operated vehicle close to an underwater structure: Theory and experiments. *Control Engineering Practice* 15: 411 – 419, 2007.
- [25] Humphreys, D. E. & Watkinson, K. W. Prediction of the acceleration hydrodynamic coefficients for underwater vehicles from geometric parameters. Technical Report NCSL-TR-327-78, Naval Coastal System Center, Panama City, Florida – USA, 1978.

- [26] Hsu, L.; Costa, R. R.; Lizarralde, F. & Cunha, J. P. V. S. da. Avaliação experimental da modelagem e simulação da dinâmica de um veículo submarino de operação remota. *Revista Controle & Automação* 11(2): 82 – 93, 2000.
- [27] Ishidera, H.; Tsusaka, Y.; Ito, Y.; Oishi, T.; Chiba, S. & Maki, T. Simulation and experiment of automatic controlled ROV. *Proceedings of 5th international offshore, mechanical and artic engineering symposium*: 260 – 267, 1986.
- [28] Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey – USA, Terceira edição, 1980.
- [29] Kim, T. W. & Yuh, J. Development of a real-time control architecture for a semi-autonomous underwater vehicle for intervention missions. *Control Engineering Practice* 12: 1521 – 1530, 2004.
- [30] Kirk, D. E. *Optimal control theory – An introduction*. Dover Publications Inc., Mineola, New York – USA, 13^a edição, 2004.
- [31] Kolk, W. R. & Lerman, R. A. *Nonlinear system dynamics*. Van Nostrand Reinhold, New York, New York – USA, 16^a edição, 1992.
- [32] Kumar, R. P.; Dasgupta, A. & Kumar, C. S. Real-time optimal motion planning for autonomous underwater vehicles. *Ocean Engineering* 32: 1431 – 1447, 2005.
- [33] Kwakernaak, H. & Sivan, R. *Linear optimal control systems*. John Wiley & Sons Inc., New York, New York – USA, Primeira edição, 1972.
- [34] Luque, J. C. C. Controle robusto multivariável para um veículo submersível autônomo. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2007. 113p.
- [35] Nakamura, M.; Kajiwara, H. & Koterayama, W. Development of an ROV operated both as towed and self-propulsive vehicle. *Ocean Engineering* 28: 1 – 43, 2000.

- [36] Ogata, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, São Paulo – Brasil, Quarta edição, 2003.
- [37] Silveira, B. F. *Mecânica Geral*. Livraria Nobel S.A., São Paulo, São Paulo – Brasil, Sétima edição, 1978.
- [38] Skogestad, S. & Postlethwaite, I. *Multivariable Feedback Control – Analysis and design*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex – England, Sexta edição, 2001.
- [39] Sorani, L. A. Estudo da dinâmica e controle de um submersível não tripulado para uso no ambiente fluvial. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2002. 81p.
- [40] Souza, E. C. de. Modelagem e controle de veículos submarinos não tripulados. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica de Engenharia da USP, São Paulo, São Paulo – Brasil, 2003. 151p.
- [41] Stevens, B. L. & Lewis, F. L. *Aircraft control and simulation*. John Wiley & Sons Inc., Chichester, West Sussex – England, Primeira edição, 1992.
- [42] Yoerger, D. R. & Slotine, J. -J. E. Robust trajectory control of underwater vehicles. IEEE Journal of oceanic engineering OE-10(4): 462 – 470, 1985.
- [43] Yuh, J. Modeling and control of underwater robotic vehicles. IEEE Transactions on systems, man and cybernetics 20(6): 1475 – 1483, 1990.
- [44] Zhou, K.; Doyle, J. C. & Glover, K. *Robust and optimal control*. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey – USA, Primeira edição, 1996.

Apêndice A

Dados usados nas simulações

Tabela A.1: Dados usados nas simulações: corpo rígido

Nome	Descrição	Valor	Unidade
I_k	Momento de inércia relativo ao eixo Z_0	73,580	$kg \cdot m^2$
m	Massa do VSSA	250,00	kg

Tabela A.2: Dados usados nas simulações: hidrostáticos e hidrodinâmicos

Nome	Descrição	Valor	Unidade
D_{uu}	Coef. de amortec. hid. para vel. linear em X_0	2,2430	$adim.$
D_{vv}	Coef. de amortec. hid. para vel. linear em Y_0	2,7280	$adim.$
D_{rr}	Coef. de amortec. hid. para vel. angular em Z_0	4,5180	$adim.$
$M_{\dot{u}}$	Coef. de massa adic. para acel. linear em X_0	81,810	kg
$M_{\dot{v}}$	Coef. de massa adic. para acel. linear em Y_0	126,11	kg
$M_{\dot{r}}$	Coef. de massa adic. para acel. angular em Z_0	63,120	$kg \cdot m^2$
ρ	Densidade volumétrica da água marinha (@ 5 °C)	1027,7	kg/m^3
∇	Volume de fluido deslocado pelo VSSA	0,1885	m^3

Tabela A.3: Dados usados nas simulações: propulsores

Nome	Descrição	Valor	Unidade
c_D	Coef. de força dos prop. para sent. dir. de rot.	Consultar tabela 2.3	N/V^2
c_R	Coef. de força dos prop. para sent. rev. de rot.		N/V^2
E_{max}	Máxima magnitude de empuxo no sentido direto	193,00	N
E_{min}	Máxima magnitude de empuxo no sentido reverso	− 110,85	N
$L_{X_0Y_0}$	Braço do momento de aproamento em rel. ao CG	0,6516	m
V_{max}	Maior tensão elétrica de controle admitida	5,0000	V
V_{min}	Menor tensão elétrica de controle admitida	− 5,0000	V
β	Âng. entre os eixos X_0 e de inst. dos prop. horiz.	35,000	$^\circ$
η_1	Coeficiente de instalação dos prop. horizontais	0,7500	$adim.$

Apêndice B

Seguidor de trajetórias LQ

Seja a representação de um sistema LIT, no espaço de estados, dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde o par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é completamente controlável, o par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ é completamente observável, o vetor de estados $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é totalmente conhecido, ainda que seja através de um observador de estados, e os valores de seus componentes não são restritos por qualquer limite, e o vetor de controle $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é tal que os valores de seus componentes não são restritos por qualquer limite.

O seguidor de trajetórias LQ é um controlador ótimo que força o vetor de estados do sistema controlado em MF a seguir assintoticamente os sinais de referência aplicados à sua entrada, mesmo na presença de distúrbios externos persistentes agindo sobre os estados da planta. Ele possui a propriedade de assegurar que todos os pólos de MF do sistema linear pertençam ao SPE aberto do plano complexo, através de uma lei de realimentação linear dos estados.

O objetivo na síntese do seguidor de trajetórias LQ é minimizar o índice de desempenho K , sujeito à restrição imposta pelo sistema LIT em (B.1), dado por:

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbf{k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t)) \cdot dt \quad (\text{B.2})$$

onde:

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2} \cdot \{ \|\mathbf{W}_{\mathbf{X}}\|_{\mathbf{X}\mathbf{R}}^2 + \|\mathbf{W}_{\mathbf{U}}\|_{\mathbf{U}}^2 \} \quad (\text{B.3})$$

$$\|\mathbf{W}_{\mathbf{X}}\|_{\mathbf{X}\mathbf{R}}^2 = [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] \quad (\text{B.4})$$

$$\|\mathbf{W}_{\mathbf{U}}\|_{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.5})$$

$\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e semi-definida positiva; $\mathbf{W}_{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz simétrica e definida positiva.

A Hamiltoniana a ser minimizada no processo de otimização é definida como:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \triangleq \mathbf{k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t)) + \mathbf{p}^T(t) \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)] \quad (\text{B.6})$$

Como os vetores $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ não possuem restrições quanto aos valores que podem assumir, condições necessárias para otimalidade são dadas em (B.7), (B.8) e (B.9).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}(t)} [\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t)} [\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))] = - \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p}(t) + \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(t)} [\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))] = \mathbf{W}_{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p}(t) \quad (\text{B.9})$$

A manipulação algébrica de (B.9) fornece a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}(t) = - (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p}(t) \quad (\text{B.10})$$

Fica assegurada a existência de $(\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1}$ pela forma como $\mathbf{W}_{\mathbf{U}}$ é definida.

A substituição de (B.10) em (B.7), e o agrupamento da expressão daí resultante com (B.8), conduzem ao sistema de equações diferenciais dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \\ -\mathbf{W}_{\mathbf{X}} & -\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.11})$$

onde $\mathbf{0}_n$ é uma matriz quadrada nula de ordem n .

Admitido que o vetor de co-estados seja formado pela combinação linear:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t) \quad (\text{B.12})$$

onde $\mathbf{X}(t)$ é uma matriz quadrada de ordem n , então:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{z}}(t) \quad (\text{B.13})$$

A substituição de (B.12) e (B.13) em (B.11) conduz à:

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{W}_{\mathbf{X}} - \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X}(t) \right] \cdot \mathbf{x}(t) + \\ & + \left[\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{r}(t) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Como (B.14) deve valer para todo $\mathbf{x}(t)$ e para todo $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0, T]$, ela pode ser reescrita como duas equações independentes, tais que:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{W}_{\mathbf{X}} - \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{U}})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{B.16})$$

A solução de (B.15), para $t \rightarrow \infty$ (regime permanente), pode ser aproximada por uma matriz constante, tal que $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_{\infty} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma solução simétrica aproximada da EAR obtida quando $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{0}$ em (B.15). Isto só ocorre porque as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{W}_{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{W}_{\mathbf{U}}$ são constantes e o par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é controlável. Ver Kirk [30].

Uma solução aproximada de (B.16), para regime permanente, pode ser facilmente obtida pela aplicação da Transformada de Laplace e, depois, pela aplicação do Teorema

do Valor Final, dada a garantia de que o sistema em MF é estável devido à propriedade apresentada pelo controlador, valendo $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\infty$ e $\mathbf{r}(T)$ constante. Assim:

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{A}^T - \mathbf{X}_\infty \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T]^{-1} \cdot \mathbf{W}_X \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.17})$$

A substituição de $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_\infty$ e $\mathbf{z}(t)$ em (B.12) conduz à:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{X}_\infty \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{A}^T - \mathbf{X}_\infty \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T]^{-1} \cdot \mathbf{W}_X \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, a substituição de $\mathbf{p}(t)$ em (B.10) conduz à:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.19})$$

onde $\mathbf{G}$ é a matriz de realimentação ótima de estados, tal que:

$$\mathbf{G} = - (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}_\infty \quad (\text{B.20})$$

e $\mathbf{R}$ é a matriz de entrada de referências, tal que:

$$\mathbf{R} = - (\mathbf{W}_U)^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G})^{-T} \cdot \mathbf{W}_X \quad (\text{B.21})$$