RODRIGO PRADO DA SILVA

Aplicação de técnicas de análise modal operacional na identificação da dinâmica de
imagens de chamas visando à caracterização do processo de combustão

São Paulo

2019

RODRIGO PRADO DA SILVA

Aplicação de técnicas de análise modal operacional na identificação da dinâmica de imagens de chamas visando à caracterização do processo de combustão

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

São Paulo
2019

RODRIGO PRADO DA SILVA

Aplicação de técnicas de análise modal operacional na identificação da dinâmica de imagens de chamas visando à caracterização do processo de combustão

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

Área de Concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Flávio Celso
Trigo

São Paulo
2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Silva, Rodrigo Prado da

Aplicação de técnicas de análise modal operacional na identificação da dinâmica de imagens de chamas visando à caracterização do processo de combustão / R. P. Silva -- versão corr. -- São Paulo, 2019.

118 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Análise modal (métodos) 2.Combustão 3.Dinâmica de chamas 4.Forno industrial 5.Propriedades de imagens I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

Esse trabalho compara análises modais, obtidas por dois métodos distintos, de propriedades de imagens de chamas de um forno industrial. Visto que a combustão de gases e líquidos é caracterizada pelo tipo de injeção de combustível, pela formação aleatória de vórtices e pela distribuição de reagentes, o exato sinal de excitação do sistema é, na prática, muito pouco conhecido, cabendo aos métodos de análise a identificação dos parâmetros modais sem essa informação. Para vencer este obstáculo, na presente dissertação foram utilizados o método de Ibrahim no Domínio do Tempo (ITDM) e o método Eigensystem Realization Algorithm (ERA) associados à técnica do decremento aleatório (*Random Decrement* - RandomDec). A técnica RandomDec permite a obtenção de um sinal proporcional ao decaimento livre do sistema, a partir de uma excitação aleatória. Essa proporcionalidade permite que os métodos no domínio do tempo citados anteriormente sejam empregados na obtenção das características de vibração do sistema. O estudo da dinâmica de chamas com base em propriedades de suas imagens é tema muito pouco abordado na literatura; por esse motivo, inicialmente foi realizado, por meio de simulações numéricas em um sistema hipotético, um completo teste de sensibilidade de todos os métodos e da técnica a serem implementados no problema real do forno industrial. Posteriormente, os dados de chamas foram utilizados para obtenção dos modos de vibrar das propriedades de imagens. Os resultados mostram que a modelagem realizada pelo ERA para sistema SIMO (*single input and multiple output*) fornece modos de vibrar com amortecimentos mais condizentes com a dinâmica da chama e, assim, sugerem que, em princípio, esta técnica poderia ser utilizada prontamente na identificação desse tipo de sistema, sem a necessidade da realização de qualquer outra análise modal para corroborar os resultados. Além disso, a identificação de um sistema complexo como o analisado, utilizando métodos de análise modal operacional, enseja a possibilidade de pesquisas visando obter sistemas de controle baseado em imagens para plantas com características semelhantes.

Palavras-Chave: Análise modal. Dinâmica de chamas. Propriedades de imagens. Eigensystem Realization Algorithm – ERA.

ABSTRACT

In this present study, two different modal analysis methods are applied to obtain and compare models for properties of flame images captured in an industrial furnace. Since combustion of gases and liquids is characterized by the type of fuel injection, random formation of vortices and distribution of reagents, the system excitation signal isn't precisely known in the reality, thus the analysis methods must identify the modal parameters without this information. To overcome this obstacle, Ibrahim Time Domain Method (ITDM) and Eigensystem Realization Algorithm (ERA) associated with the Random Decrement (RandomDec) technique were implemented in this thesis. The RandomDec technique give the means to obtain a signal which is proportional to the free decay of the system when it is randomly forced. This proportional signal allows the previously mentioned analysis methods to be used to identify vibration characteristics of the system. The study of flame dynamics based on its image characteristics is barely approached in the literature; for this reason, a complete sensitivity test of all the methods and techniques to be implemented in the real problem of industrial furnaces was initially performed through numerical simulations of a hypothetical system. Afterwards, flame data was used to obtain the vibration modes of image properties. The results lead to conclude that the SIMO (single input and multiple output) model obtained by ERA has vibration modes with more consistent damping regarding flame dynamics and suggest also that this technique could be readily used in the identification of this kind of system, without the need of any other modal analysis for results corroboration. Furthermore, the utilization of operational modal analysis methods to identify a complex system such as the analyzed one may instigate researches on image-based control systems of industrial plants with suchlike characteristics.

Keywords: Modal analysis. Dynamics of flame. Image properties. Eigensystem Realization Algorithm – ERA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo da utilização das defasagens do ITDM modificado (alterado de Pappa e Ibrahim, 1981).....	32
Figura 2 – Princípio da técnica RandomDec (modificado de Cole, 1973).....	44
Figura 3 - Sistema de massas, molas e amortecedores com seis graus de liberdade.....	46
Figura 4 – Saída do sistema SISO.....	51
Figura 5 – Saídas do sistema SIMO	51
Figura 6 – Espectro de potência da velocidade x_1 da massa m_1	51
Figura 7 – Saída do sistema SISO com adição de ruído de 2%.....	59
Figura 8 – Saída do sistema SISO com ruído de 10%	64
Figura 9 – Saída do sistema SISO com ruído de 50%	69
Figura 10 – Saída y_1 do sistema devido à excitação aleatória	75
Figura 11 – 15 primeiros segundos do sinal y_1 do sistema	75
Figura 12 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com 200 pontos e amplitude superior a 80%.....	76
Figura 13 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	76
Figura 14 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com 50 pontos e amplitude superior a 80%	81
Figura 15 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	81
Figura 16 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com amplitude superior a 60% do sinal de	86
Figura 17 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com amplitude superior a 60% do sinal de	86
Figura 18 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	90
Figura 19 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	90
Figura 20 – Esquema do queimador (retirado de Silva et al. (2015)).....	97
Figura 21 – Imagens das chamas com (a) PSAR = 1,00, (b) PSAR = 1,86 e (c) PSAR = 4,00 (retirado de Silva et al. (2015)).....	97
Figura 22 – Propriedade 01 das imagens de chama	100

Figura 23 – Propriedade 02 das imagens de chama	100
Figura 24 – Propriedade 03 das imagens de chama	101
Figura 26 – Propriedade 05 das imagens de chama	101
Figura 28 – Propriedade 07 das imagens de chama	101
Figura 25 – Propriedade 04 das imagens de chama	101
Figura 27 – Propriedade 06 das imagens de chama	101
Figura 29 – Propriedade 08 das imagens de chama	101
Figura 30 – Propriedade 09 das imagens de chama	102
Figura 32 – Propriedade 11 das imagens de chama	102
Figura 31 – Propriedade 10 das imagens de chama	102
Figura 33 – Propriedade 12 das imagens de chama	102
Figura 34 – Propriedade 1 a 4 vetorizadas	103
Figura 35 – Propriedade 5 a 8 vetorizadas	103
Figura 36 – Propriedade 9 a 12 vetorizadas.....	103
Figura 37 – Assinatura RandomDec de auto-correlação do vetor 1	104
Figura 38 – Assinatura RandomDec de correlação cruzada do vetor 2 com o vetor 1	104
Figura 39 – Assinatura RandomDec de correlação cruzada do vetor 3 com o vetor 1	104
Figura 40 – Espectro de potência da assinatura RandomDec de auto-correlação	105
Figura 41 – Espectro de potência da assinatura RandomDec de auto-correlação, com resolução em frequência visual aumentada	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências do sistema obtidas por método analítico	47
Tabela 2 – Relação de entradas e saídas dos sistemas SISO, SIMO e MIMO	48
Tabela 3 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	53
Tabela 4 – Polos identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	53
Tabela 5 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	54
Tabela 6 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	54
Tabela 7 – Polos identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	55
Tabela 8 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	55
Tabela 9 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido <i>a priori</i>	56
Tabela 10 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido	56
Tabela 11 – Polos identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido	57
Tabela 12 – Polos identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido	58
Tabela 13 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 2%	60
Tabela 14 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 2%	61
Tabela 15 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 2%	61
Tabela 16 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 2%	62
Tabela 17 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 2%	63
Tabela 18 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 2%	63
Tabela 19 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 2%	64
Tabela 20 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 10%	65

Tabela 21 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 10%	66
Tabela 22 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 10%	66
Tabela 23 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 10%	67
Tabela 24 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 10%	67
Tabela 25 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 10%	68
Tabela 26 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 10%	68
Tabela 27 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 50%	70
Tabela 28 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 50%	70
Tabela 29 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 50%	71
Tabela 30 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 50%	71
Tabela 31 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 50%	72
Tabela 32 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 50%	72
Tabela 33 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 50%	73
Tabela 34 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	77
Tabela 35 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	78
Tabela 36 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	78
Tabela 37 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	79
Tabela 38 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	79
Tabela 39 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	80
Tabela 40 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	80
Tabela 41 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com 50	

pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	82
Tabela 42 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência.....	82
Tabela 43 – Frequências naturais identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	83
Tabela 44 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência.....	83
Tabela 45 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência.....	84
Tabela 46 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência	85
Tabela 47 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência.....	85
Tabela 48 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência.....	87
Tabela 49 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência.....	87
Tabela 50 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência	88
Tabela 51 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência	88
Tabela 52 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência.....	89
Tabela 53 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência	89
Tabela 54 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência	90
Tabela 55 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com.....	91
Tabela 56 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	91
Tabela 57 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência	92
Tabela 58 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	93
Tabela 59 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	93
Tabela 60 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura	

RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência	94
Tabela 61 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência.....	94
Tabela 62 – Frequências naturais amortecidas identificadas pelas análises modais da assinatura RandomDec das imagens de chama	107
Tabela 63 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama	108
Tabela 64 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama	108
Tabela 65 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama.....	109
Tabela 66 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama	110
Tabela 67 – Frequências naturais identificadas por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama.....	110
Tabela 68 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama.....	111

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Primeira estação de medição do exemplo do ITDM Amplitude inicial dos segmentos utilizados na técnica RandomDec
a_j	Parte real de λ_j
A	Matriz de dinâmica, no espaço de estados
b	Segunda estação de medição do exemplo do ITDM
b_j	Parte imaginária de λ_j
B	Matriz de entradas, no espaço de estados
B_i	Matriz de entradas, no espaço de estados
c	Terceira estação de medição do exemplo do ITDM
$\bar{c}$	Coeficiente de amortecimento
C	Matriz de saídas, no espaço de estados
$\bar{C}$	Matriz de amortecimento
C_i	Matriz de saídas, no espaço de estados
d_N	Elementos da diagonal da matriz D do SVD
D	Matriz diagonal do SVD
$D_{yy}(\tau)$	Assinatura RandomDec de auto-correlação de y
$D_{y'y}(\tau)$	Assinatura RandomDec de correlação cruzada de y' com relação a y
E	Matriz usado no equacionamento do método ERA para sistemas SISO
E_p	Matriz usado no equacionamento do método ERA para sistemas MIMO
f	Carregamento aplicado
H	Matriz de Hankel do sistema SISO
H_{rs}	Matriz de Hankel do sistema MIMO
I_n	Matriz identidade de ordem n
j	Nº do modo
J_i	Integrador da matriz de Hankel
k	Instante $t = t_k$ de amostragem no espaço de estados Defasagem da matriz de Hankel
$\bar{k}$	Coeficiente de mola

K	Nº da estação de medição
$\bar{K}$	Matriz de rigidez
m	Número de estradas no espaço de estados
$\bar{m}$	Massa
$\bar{M}$	Matriz de massa
n	Número de graus de liberdade
N	Dimensão da matriz D do SVD
N_2	Coeficiente de defasagem do ITDM
N_3	Coeficiente de defasagem do ITDM
O_p	Matriz quadrada nula de ordem p
p	Número de saídas no espaço de estados
p_o	Número de estações de medição
P	Matriz isométrica do SVD
P_d	Multiplicação das matrizes P e D do SVD
q_j	Amplitude modal medida entre t_0 e t_{s-1}
$\bar{q}_j$	Amplitude modal calculada usando $\bar{\lambda}_j$, entre t_1 e t_{s-1}
Q	Matriz ortogonal do SVD
s	Números de instantes de tempo amostrado
t_i	Instante de tempo
Δt_2	Defasagem do ITDM
Δt_3	Defasagem do ITDM
T	Matriz usada no desenvolvimento matemático do ERA
T_i	Integrador da matriz de Hankel
U	Matriz usada no desenvolvimento matemático do ERA
V	Matriz de observabilidade do sistema SISO
V_r	Matriz de observabilidade do sistema MIMO
W	Matriz de controlabilidade do sistema SISO
W_s	Matriz de controlabilidade do sistema MIMO
x_i	Deslocamento da massa m_i
x	Vetor de estados

$\bar{x}$	Novo vetor de estados na realização pelo método ERA
x_i	Vetor de estados no instante t_i
X	Conjunto de vetores de estados de diferentes instantes de tempo
y	Saída do sistema SISO escrito em variáveis de estado
y_h	Resposta homogênea de y
y_p	Resposta particular de y
$\bar{y}$	Conjunto de saídas y em n instantes de tempo
y	Vetor de deslocamentos
$\dot{y}$	Vetor de velocidades
$\ddot{y}$	Vetor de acelerações
y_K	Deslocamento medido na estação K
$y_{K,i}$	Deslocamento medido na estação K , no instante t_i
Y	Saída do sistema MIMO escrito em variáveis de estado
z	Autovalores (frequências de vibração) do sistema amostrado, no plano z
α_j	Parte real do autovalor de $e^{\lambda_j \Delta t_1}$
β_j	Amplitude modal inicial do modo j
γ_j	<i>Modal Confidence Factor</i> (MCF)
	<i>Modal Amplitude Coherence</i> (MAC _{ERA}):
δ	Precisão escolhida para redução de ordem do sistema, usando o SVD
ε	Número de segmentos utilizados nas correlações da técnica RandomDec
ζ_j	Fator de amortecimento do modo j
θ_j	Parte imaginária do autovalor de $e^{\lambda_j \Delta t_1}$
λ	Vetor de frequências modais complexas
λ_j	Frequência complexa do modo j
$\bar{\lambda}_j$	Frequência complexa identificada, relativa ao modo j
Λ	Matriz de autovalores
τ	Comprimento dos segmentos utilizados na técnica RandomDec
$\Delta\tau_s$	Passo de amostragem
Φ	Matriz de respostas

$\hat{\Phi}$	Matriz de respostas atrasadas em Δt_1
ψ_{Kj}	Amplitude modal da estação K relativo ao modo j
$\hat{\psi}_{Kj}$	Amplitude modal, atrasada em Δt_1 , da estação K relativo ao modo j
ψ_j	Vetor do modo j
ψ_j^{sup}	Partição superior de ψ_j
ψ_j^{inf}	Partição inferior de ψ_j
$\bar{\psi}_j^{inf}$	Defasagem de ψ_j^{sup} em Δt_3 utilizando a frequência identificada $\bar{\lambda}_j$
Ψ	Matriz modal
$\hat{\Psi}$	Matriz modal atrasada em Δt_1
$\{\Psi\}_{t_i}$	Vetor de cada modo j relativo ao instante t_i
$\omega_{d,j}$	Frequência natural amortecida do modo j
$\omega_{n,j}$	Frequência natural não-amortecida do modo j

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3. MÉTODOS E TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL.....	24
3.1 MÉTODO DE IBRAHIM NO DOMÍNIO DO TEMPO	24
3.1.1 MÉTODO MODIFICADO DE IBRAHIM NO DOMÍNIO DO TEMPO	27
3.1.2 ANÁLISE DOS PARÂMETROS DO ITDM E AVALIAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO	30
3.2 EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM	34
3.2.1 SVD E A MÍNIMA REALIZAÇÃO	39
3.2.2 REDUÇÃO DE ORDEM DO MODELO E AVALIAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO	41
3.3 TÉCNICA DO DECREMENTO ALEATÓRIO.....	43
4. ANÁLISE MODAL DE UM MODELO TEÓRICO	46
4.1 EXCITAÇÃO IMPULSIVA.....	50
4.1.1 EXCITAÇÃO IMPULSIVA SEM RUÍDO	50
4.1.1.1 NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE CONHECIDO A PRIORI.....	52
4.1.1.2 NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DESCONHECIDO	56
4.1.2 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 2%	59
4.1.3 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 10%	64
4.1.4 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 50%	69
4.2 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA - ESTUDO DA TÉCNICA RANDOMDEC	74
4.2.1 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ACIMA DE 80%.....	75
4.2.1.1 ASSINATURA COM MAIOR COMPRIMENTO.....	76
4.2.1.2 ASSINATURA COM MAIOR QUANTIDADE DE MÉDIAS	81
4.2.2 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ACIMA DE 60%.....	85
4.2.3 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ENTRE 60% E 80%	90
5. ANÁLISE DA CHAMA.....	96
5.1 EXPERIMENTO	96
5.2 PROPRIEDADES DE IMAGENS.....	98
5.3 TRATAMENTO DAS PROPRIEDADES	102
5.4 ASSINATURA RANDOMDEC.....	104
5.5 ANÁLISES MODAIS.....	105
6. CONCLUSÃO	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114

1. INTRODUÇÃO

Em 2015, foi estabelecido o primeiro acordo universal para a luta contra as mudanças climáticas e aquecimento global: o Acordo de Paris. O acordo negociado durante a COP-21 por 195 países, sendo que 55 deles são responsáveis por mais da metade da poluição mundial, resume-se em impedir que o aquecimento global ultrapasse 2°C acima da temperatura média pré-industrial¹. Embora seja o primeiro acordo acerca das mudanças climáticas, o Protocolo de Kyoto e a Emenda de Doha foram outros acordos estabelecidos anteriormente para redução apenas da emissão de gases que provocam o efeito estufa². Juntos, os três acordos anteriormente mencionados têm o período vigente de 2008 a 2030.

O *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) publicou o estudo *Climate Change* (IPCC, 2014) com dados estatísticos sobre a poluição mundial. Segundo o levantamento, se a geração de gases de efeito estufa for separada por setores econômicos, a emissão da indústria e da produção de energias térmica e elétrica correspondem juntas a 46%. Isto é, equipamentos industriais com produção em larga escala de energia a partir da combustão correspondem a quase metade da poluição do ar.

A estabilidade de chamas é de fundamental importância na correta operação desse tipo de equipamento, visto que a baixa formação de poluentes tóxicos, como CO e NO_x, e a manutenção de um alto rendimento de troca de calor dependem da queima na proporção ideal de ar-combustível. O projeto de um sistema de controle capaz de monitorar de maneira eficiente o processo de combustão em fornos industriais é baseado em uma ampla rede de sensores de natureza diversa, como termopares, medidores de vazão, medidores de relação ar-combustível e transdutores de pressão, destinados a mensurar os parâmetros que afetam o processo. Contudo, nas duas últimas décadas, câmeras de vídeo acopladas a placas de aquisição de imagens têm sido incorporadas ao conjunto de sensores de monitoração, uma vez que as imagens de sequências de chamas capturadas e devidamente analisadas com a aplicação de técnicas de visão computacional são capazes de fornecer ao

¹ Dados sobre o Acordo de Paris retirados do site do Ministério do Meio Ambiente do Brasil, em 02 de julho de 2018.

² Dados retirados do site Wikipedia sobre o Acordo de Paris, em 02 de julho de 2018.

sistema de controle informações correlatas com as variáveis físicas da combustão (Fleury, Trigo e Martins, 2013).

Flame scanners (escâneres de chamas, em tradução livre) tornaram-se instrumentos importantes também na operação de caldeiras. Medidores de vazão, de temperatura de gás, de concentração de monóxido de carbono (CO) e transdutores de pressão de vapor são instalados no duto de exaustão das câmaras de combustão, impossibilitando a aferição individual dos queimadores, que estão posicionados em diferentes elevações. Ronquillo-Lomeli *et al.* (2015) propuseram uma atualização do sistema de monitoramento em tempo real hoje utilizado, adicionando sinais obtidos das imagens dos escâneres de chamas. Os autores obtiveram uma considerável melhora no controle de combustão e na frequência de manutenção dos queimadores. Não somente, afirmam que o procedimento aumentará a eficiência térmica da caldeira testada, consequentemente diminuirá o gasto com combustível e reduzirá a emissão de poluentes prejudiciais ao meio ambiente.

Os estudos apresentados por Fleury, Trigo e Martins (2013) e por Ronquillo-Lomeli *et al.* (2015) foram baseados na combustão de óleo, contudo usinas a carvão correspondem a produção de quase um terço da eletricidade mundial³. A condição estável de ignição e queima desse último combustível acarretam na baixa emissão de gases nocivos à atmosfera, segundo Katzer *et al.* (2017); alegam, ainda, que há diversas publicações a respeito de queimadores de gás, mas existe uma carência de pesquisas sobre as condições de operações de queimadores de carvão do tipo *swirl*, motivo que levou ao seu estudo sobre esse equipamento, utilizando imagens de chamas.

Ademais, González-Cencerrado, Peña e Gil (2012) afirmam que a visualização e caracterização de chamas são ferramentas importantes para a mais profunda compreensão da combustão de carvão pulverizado, pois essas técnicas de análise visual levam à diminuição de carbono não-queimado e de emissão de poluentes, assim como à melhora no controle de segurança do sistema.

Finalmente, pode-se observar que diversos estudos têm sido realizados na criação de um sistema de caracterização e controle de chamas, a fim de reduzir os níveis de emissão de poluentes na atmosfera, aumentar rendimentos de equipamentos

³ Dado estatístico relativo ao ano de 2015, retirado do site da International Energy Agency, em 02 de julho de 2018.

térmicos, elevar o tempo de vida útil das máquinas e garantir a segurança de operação. Por sua vez, a captura e processamento de imagens baseado nas técnicas de visão computacional têm se apresentado como ferramentas importantes na evolução dos sistemas de controle de combustão.

Análises estatísticas e modelos computacionais criados a partir de redes neurais são os métodos de processamento de imagens de chamas majoritariamente estudados, pois, segundo Ronquillo-Lomeli *et al.* (2015), a combustão é um processo multivariável com dinâmica não-linear que possui pequeno período de previsão, sendo, portanto, muito difícil a sua modelagem usando métodos determinísticos convencionais, mesmo que utilizando diferentes abordagens para relacionar sinais óticos aos parâmetros de combustão. Porém, Fleury, Trigo e Martins (2013) indicam ser possível caracterizar chamas utilizando modelos dinâmicos lineares para as propriedades de imagens, conclusão obtida a partir de análises estatísticas do modelo de passeio aleatório implementado com filtro de Kalman. Por isso, Silva *et al.* (2015) afirmam que a superioridade de seu estudo se deve principalmente ao desenvolvimento de um modelo dinâmico (uma análise determinística) de imagem, o qual pode ser usado em estimadores estocásticos. Os mesmos autores afirmam, ainda, com base nos resultados do *Modal Assurance Criterion* (MAC), que há espaço para melhorias em seu método de classificação, que poderiam ser obtidas por: (I) análise de um vetor de características que contivesse mais propriedades de imagens; e (II) obtenção de um modelo dinâmico mais complexo, diferente do linearizado de segunda ordem obtido pelo método de Ibrahim no Domínio do Tempo (*Ibrahim Time Domain Method* – ITDM).

Levando-se em consideração os argumentos expostos anteriormente, a respeito da pertinência na continuidade dos estudos visando estabelecer características dinâmicas de chamas com base em imagens, no presente projeto se pretende realizar uma análise mais profunda das sequências de imagens de chamas obtidas por Silva *et al.* (2015). A diferente manipulação das propriedades de imagens permitirá obter vetores de características distintos dos utilizados previamente, visando ampliar a observabilidade do modelo. Para a análise dos vetores, serão utilizadas técnicas no domínio do tempo, pois as propriedades de imagens podem ser diretamente usadas, prescindindo assim das transformadas do domínio do tempo para o da frequência (Ferreira Neto, 2005), possibilitando a identificação do estado da chama em tempo real e sua eventual utilização em um sistema de

controle de combustão. O método de análise modal ITDM com a decomposição por valores singulares (*Single-Value Decomposition* - SVD) será implementado em sistemas com uma entrada e uma saída (*single-input and single-output* – SISO) e com uma entrada e múltiplas saídas (*single-input and multiple-output* – SIMO). O método de análise modal *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) será utilizado para corroborar os parâmetros calculados pelo ITDM, fornecendo uma realização completa do sistema, isto é, fornecendo todas as matrizes do sistema na forma de espaço dos estados. A modelagem da dinâmica de imagens de chamas com o ERA (e a obtenção de um modelo completo no espaço de estados) é um estudo pioneiro no que diz respeito a sistemas de combustão e representa uma contribuição nessa área. Além disso, uma vez obtido e validado este modelo, há possibilidade de estudo de sua viabilidade na implementação de um sistema de controle baseado em imagens para processos de combustão de natureza semelhante, abrindo espaço para futuras pesquisas nesse campo, mas que, no momento, não pertencem ao escopo dessa dissertação.

O estudo aqui apresentado está dividido da seguinte forma: na seção 2, é feita uma revisão bibliográfica das análises de imagens de chamas que foram realizadas na tentativa de criação de um sistema de controle de combustão; na seção 3, são introduzidos os principais aspectos teóricos e o equacionamento necessário para a compreensão dos métodos de análise modal, dos critérios de avaliação dos modos identificados e da técnica RandomDec; na seção 4, é realizada a análise de sensibilidade dos parâmetros dos métodos a serem utilizados, aplicando-os em um modelo simples excitado ora por impulso (na seção 4.1) ora por entrada aleatória (na seção 4.2); na seção 5, os métodos analisados serão aplicados a uma sequência de imagens de chamas para obtenção de modelos; na seção 6, é apresentada a conclusão acerca da utilização de cada método de análise modal em dados reais de chamas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Alguns dos primeiros estudos realizados acerca do assunto denotam a dependência entre propriedades de imagens das chamas como brilho, geometria e espectros de potência, e as respectivas variáveis do processo de combustão. Santos-Victor *et al.* (1993), por exemplo, a partir de imagens capturadas por uma câmera CCD (*Charge Coupled Device*), obtiveram um vetor de características geométricas (entre elas área, centro de massa, momentos de segunda ordem e orientação) para o treinamento de classificadores Bayesianos e por redes neurais. Os sistemas de classificação foram então testados em um forno industrial e puderam identificar com precisão superior a 94% o ponto ideal de operação do equipamento.

Iino *et al.* (1998) investigaram a relação entre a velocidade do butano na saída de bocais e a morfologia da chama, utilizando uma câmera de alta frequência de captura. Os autores observaram, através de propriedades geométricas das imagens, que a velocidade de escoamento na região de alta luminosidade é aproximadamente constante e independente da velocidade do jato de gás combustível. Observaram também que a chama possui comportamento periódico, especialmente nas regiões central e mais afastada do bocal.

Baldini, Campadelli e Lanzarotti (2000) realizaram experimento em laboratório para correlacionar a frequência acústica emitida na combustão com propriedades de imagens de chamas. Utilizando-se de diversas técnicas de processamento de imagens, vetores de propriedades geométricas puderam ser obtidos e seus espectrogramas analisados. Nas análises, constatou-se que os picos de potência presentes nos espectrogramas das propriedades geométricas das imagens correspondiam aos obtidos pela análise dos sinais acústicos. Os resultados levaram os pesquisadores a concluir que tais frequências poderiam ser usadas na estimação de velocidade de exaustão de gases nos queimadores, além de serem úteis na modelagem de fenômenos de instabilidade.

Anos mais tarde, Lu, Yan e Colechin (2004) resumiram em uma publicação variados tipos de processamento de imagem de chamas para a confecção de um sistema de controle de combustão. As aplicações foram divididas em quatro grupos de parâmetros de imagens a serem utilizadas: geométricos, por exemplo ponto de ignição, área de ignição e ângulo de espalhamento, os quais são utilizados para o cálculo da distância entre queimador e base da chama e análise da formação de

vórtices em suas laterais; luminosos, por exemplo brilho e uniformidade, os quais são utilizados na quantificação de particulados e estimação direta de estabilidade; termodinâmicos, que consiste no uso de medição de intensidade de radiação em diferentes frequências de ondas eletromagnéticas (isto é, diferentes cores) para cálculo de temperatura; variações temporais de propriedades, os quais podem ser utilizados para análise de cintilação de radiação nas várias regiões da chama. Lu, Yan e Colechin (2014), após demonstrarem o uso de cada processamento de imagens e suas interpretações, afirmam ser possível a criação de um sistema de controle contínuo em tempo real para fornos industriais, embora não haja registro de que essa implementação tenha sido realizada por pelos autores até o momento da finalização desta dissertação.

Xu *et al.* (2004) desenvolveram um sistema de monitoramento em tempo real para identificação do tipo de carvão através de técnicas de classificação *fuzzy*. Os mesmos autores posteriormente apresentaram um trabalho no qual a mesma identificação foi realizada, contudo através de redes neurais, que se mostraram mais precisas na identificação em tempo real (Xu *et al.* (2005)). Finalmente, uma nova abordagem foi apresentada (Zhou *et al.* (2014)) implementando um algoritmo de Máquina de Vetores de Suporte (*Support Vector Machine* – SVM), o qual foi capaz de classificar a qualidade do carvão com precisão de até 99,1%. Nesse último estudo, uma câmera foi instalada no forno para aquisição de sequências de imagens de chamas na banda de emissão do infravermelho e na banda da luz visível. Elas foram utilizadas para criação de um vetor de 18 características estatísticas no sistema de cores RGB, sendo elas valor médio, desvio padrão, frequência de oscilação da intensidade, entre outras.

Smart *et al.* (2010) investigaram o impacto do processo de oxi-combustão (processo em que não se utiliza ar atmosférico, mas oxigênio puro na queima do combustível) nas características de chama através de técnicas de processamento de imagem. Baseado na temperatura pontual obtida pela intensidade de duas cores e na frequência de cintilação de diferentes regiões da chama, os autores foram capazes de determinar os melhores pontos de operação do equipamento de combustão. Eles afirmam, ainda, que técnicas de processamento de imagem de chamas têm se provado importantes ferramentas de diagnóstico do impacto da troca por oxi-combustão em usinas de carvão.

A evolução temporal de propriedades de imagens de chamas não tinha sido utilizada

nos estudos de combustão, senão no domínio da frequência para a quantificação da cintilação de radiação de chamas. Chen *et al.* (2010) inicialmente aplicaram a análise dos componentes principais multidirecionais (*multiway principal components analysis* - MPCA) a fim de identificar a instabilidade de chamas em fornos, contudo um sistema baseado nessa análise não seria plenamente confiável visto que muitos falsos positivos ocorreriam. Então, os autores propuseram a utilização do modelo oculto de Markov (*hidden Markov model* - HMM) concomitantemente com o MPCA, de modo que toda a história das variáveis observadas fosse levada em consideração na classificação da chama. Com isso, dentro do limite de confiabilidade de 99%, foi possível a identificação dos instantes de início de falha do sistema de combustão, sem falsos positivos.

Em todos os estudos publicados, a aplicação de técnicas matemáticas e análises sobre evoluções temporais de chamas consideravam apenas as propriedades médias das imagens capturadas. Questionando essa metodologia, González-Cencerrado, Peña e Gil (2012) analisaram a estatística das propriedades de cada *pixel* individualmente. As análises dos resultados levaram os autores a concluir que há grande correlação entre a dinâmica de *pixels* específicos com a combustão, e que é possível uma diferente abordagem para criação de sistemas de controle de fornos operando com carvão pulverizado em bocais do tipo *swirl*.

Chen *et al.* (2012) são alguns dos poucos autores a publicarem o resultado da implementação de um sistema de controle, baseado em propriedades de imagens, em um equipamento real e comprovarem a eficácia dessa tecnologia. O forno experimental possuía uma câmera CCD para captura de imagens no sistema de cores RGB e a combustão era controlada pelo ajuste de vazão de combustível e ar de combustão. Devido ao elevado tempo de resposta dos atuadores, a aquisição de imagem era realizada a cada 5 segundos. A análise dos componentes principais foi o método escolhido para identificação das constantes do controle PID implementado. Os resultados mostram que o novo sistema de controle reduziu o consumo de combustível em 2% com relação ao controle baseado nos gases de exaustão do forno; não somente, como consequência da redução da queima de óleo pesado, houve diminuição da emissão de gás carbônico para a atmosfera. Os autores ressaltam ainda que a utilização de imagens tem por vantagem o mais rápido fornecimento de informações para o sistema de controle, se comparado com os sensores localizados nos dutos de exaustão para aferição dos gases de exaustão.

Fleury, Trigo e Martins (2013) obtiveram evoluções temporais de imagens para criação de um vetor de propriedades que pudesse levar à caracterização de chamas. Tal vetor com propriedades geométricas foi utilizado inicialmente em um algoritmo de medida *fuzzy* para classificação com base em um conjunto de treinamento. Posteriormente, foi realizada uma abordagem no espaço de estados através de um filtro de Kalman, o qual proveu estimativas do vetor de parâmetros de imagem reproduzindo diversas condições de qualidade de nebulização. Esse último diagnóstico utilizado destacou-se dos demais apresentados na literatura por levar em conta não somente o comportamento da dinâmica do vetor como também o histórico do processo. Os autores ainda ressaltam que algoritmos mais robustos puderam ser utilizados devido ao aumento da capacidade de cálculos dos computadores e que é possível sua aplicação em tempo real para controle da combustão. Além disso, os pesquisadores concluem que, mesmo utilizando um modelo de passeio aleatório para descrever a evolução temporal dos parâmetros de imagens de chamas representativos, em última análise, sobre sua dinâmica, houve rápida convergência das estimativas provenientes do filtro de Kalman.

A ressalva que se pode fazer ao trabalho supracitado concerne justamente à utilização de um modelo de passeio aleatório para descrever a dinâmica do vetor de características de imagens das chamas, o que tende a tornar os resultados dependentes de condições eventualmente particulares. Visando obter um modelo dinâmico de utilização mais geral, Silva *et al.* (2015) utilizaram 13 propriedades luminosas oriundas de imagens de chamas, sendo elas de textura e distribuição espacial de níveis de cinza, na criação de um vetor de características para a identificação de um modelo dinâmico com termos de segunda ordem por meio do método de “Ibrahim no domínio do tempo modificado” (ITDM, na sua sigla original em inglês) (Pappa e Ibrahim, 1981). Para adequar a sequência temporal decorrente da vetorização das propriedades das imagens à aplicação do método, obteve-se em primeiro lugar a assinatura RandomDec (Cole, 1973) do referido vetor. Os sistemas identificados pelo ITDM para cada uma das caracterizações de chama foram avaliados por um MAC (*Modal Assurance Criterion*) o qual permitiu a classificação da chama em suas três categorias previamente definidas: estável, parcialmente instável, e totalmente instável (termos em tradução livre, originalmente nomeadas respectivamente como *stable*, *unsteady* e *unstable*). Finalmente, os autores em posse da matriz de transição calculada pelo ITDM puderam inferir o intervalo de

tempo levado pela chama para sua completa extinção.

Ronquillo-Lomeli *et al.* (2015) estão entre os únicos autores a publicarem o resultado da implementação de um sistema de classificação de chama, baseado em propriedades de imagens, em um equipamento industrial real. Para a criação desse sistema, imagens capturadas por escâneres de chamas foram processadas e forneceram cinco informações no domínio da frequência: fator de forma, densidade de potência espectral, entropia do espectro de potência, entropia do espectro singular e entropia da energia *wavelet* (oriunda da transformada *wavelet*). Essas informações foram utilizadas em um conjunto de treinamento de Rede Neural Probabilística e sua aplicação permitiu a classificação correta das chamas em cinco categorias. Contudo, tal sistema de classificação não é automático, isto é, não corrige a quantidade injetada de combustível ou ar de combustão; tal correção deve ser feita manualmente pelo operador do equipamento.

Recentemente, Fleury *et al.* (2017) apresentaram uma abordagem inovadora para a classificação de chamas a partir de propriedades de imagens. O experimento foi realizado em um forno protótipo vertical com entradas de ar primário e secundário controladas manualmente, permitindo o estabelecimento de diferentes regimes de combustão de óleo pesado. Imagens foram obtidas por uma câmera CCD e foram classificadas por um perito como sendo chamas pertencentes aos grupos “estável”, “instável”, “extinta”, “com boa atomização”, “com baixa atomização”, “com excesso de ar normal”, “com muito excesso de ar”, “com baixo excesso de ar” e “assimétrica”. As mesmas sequências de imagens foram bases para a obtenção de um conjunto de 33 propriedades relacionadas a geometria do formato, distribuição de tons de cinza, textura e frequências espaciais, que por sua vez foram utilizadas como conjuntos de treinamento de um algoritmo baseado na teoria de Dempster-Shafer. Tal algoritmo preparado foi aplicado em 4 sequências de imagens testes e foi capaz de classificar corretamente a maioria das chamas, mesmo quando ocorreram abruptas mudanças de estado de combustão. Os erros pontuais de classificação podem ser explicados pelas semelhanças de característica visuais de chamas em diferentes regimes de combustão; tais erros poderiam ser atenuados ou até mesmo eliminados caso a evolução temporal, e não somente imagens instantâneas, fosse levada em conta no algoritmo. Ainda, os autores afirmam que a abordagem utilizada é uma alternativa para o projeto de sistemas de controle automáticos devido ao baixo custo e simplicidade de implementação.

3. MÉTODOS E TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL

Entende-se por análise modal todo o campo de estudo das propriedades dinâmicas de sistemas excitados por vibrações. Atualmente, há diversos métodos para a identificação dos modos de vibrar, sendo eles classificados em dois grandes grupos: no domínio do tempo, e no domínio da frequência. Soeiro (2001) afirma que os métodos no domínio da frequência são os mais usados, porém os métodos no domínio do tempo têm se mostrado uma alternativa promissora para a solução de problemas como os associados à resolução em frequência, vazamento (*leakage*) e alta densidade modal. Acrescentam He e Fu (2001) que análises modais no domínio do tempo têm diversas outras vantagens, entre elas: (i) não dependem do conhecimento da excitação nem, portanto, de equipamentos para a aplicação de esforços com características específicas; (ii) normalmente necessitam de menos dados de resposta do sistema; e (iii) uma vez que não são baseados na FRF, podem ser utilizados para analisar modos de vibração com frequências próximas. Dentre as abordagens no domínio do tempo, destacam-se o Método de Ibrahim no Domínio do Tempo (ITDM – *Ibrahim Time Domain Method*) e o *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA), amplamente utilizados na identificação de estruturas mecânicas e civis, como apresentadas nos estudos de Ibrahim e Mikulcik (1977), Juang e Pappa (1984), Mangold (2003) e Ferreira Neto (2005), para citar apenas alguns trabalhos. Os dois métodos anteriormente mencionados serão os utilizados na análise modal que é objetivo da presente dissertação. Ademais, a aplicação concomitante desses métodos com a técnica do decremento aleatório (*random decrement* - RandomDec) será necessária, visto que as excitações que levam à combustão são de natureza aleatória (isto é, natureza turbulenta) e, portanto, de difícil modelagem por sistemas lineares (como feito pelo ITDM e ERA).

3.1 MÉTODO DE IBRAHIM NO DOMÍNIO DO TEMPO

O ITDM, apresentado primeiramente em um artigo de Ibrahim e Mikulcik (1973), é um método que, baseado na resposta livre do sistema, determina suas propriedades modais. Admite-se que o sistema a ser identificado possua dinâmica linear de segunda ordem com n graus de liberdade dada pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{y}} + \bar{C}\dot{\mathbf{y}} + \bar{K}\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (1)$$

onde $\bar{M}$ denota a matriz de massa; $\bar{C}$, a matriz de amortecimento; $\bar{K}$, a matriz de rigidez; $\mathbf{y}$, o vetor de deslocamento; $\dot{\mathbf{y}}$, o vetor de velocidade; $\ddot{\mathbf{y}}$, o vetor de aceleração; e $\mathbf{f}$, o vetor de carregamentos aplicados. Nessa representação, os vetores são n -dimensionais, ao passo que as matrizes são quadradas, também de dimensão n .

Reescrevendo essa equação geral na forma de variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ \bar{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (2)$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (3)$$

onde o vetor de estados, a matriz de dinâmica do sistema e a matriz de entradas do sistema são respectivamente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (5)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_n \\ \bar{M}^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (6)$$

Segundo Ogata (2011), os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são as raízes da equação característica, isso é, as frequências naturais (livres e amortecidas) e os modos de vibrar do sistema são inerentes à matriz de estado. A matriz $\mathbf{B}$ apenas é utilizada na resposta do sistema a uma excitação particular e não contém características modais, sendo desnecessária a sua identificação para caracterização do sistema. Por isso, o método de Ibrahim baseia-se na resposta do sistema livre de forças externas ativas (sistema homogêneo) dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (7)$$

Ressalta-se que a matriz A tem dimensão $2n \times 2n$, e que sua partição superior é formada por uma matriz quadrada contendo zeros e por uma identidade, ambas de dimensão n . Logo, apenas os $2n^2$ elementos da partição inferior são necessários para a caracterização do sistema.

Para um dado instante t_i , a eq. 7 representa um sistema de n equações lineares, tendo $2n^2$ incógnitas:

$$\dot{x}_i = Ax_i \quad (8)$$

Se as acelerações, velocidades e deslocamentos dos pontos de medição pudessem ser obtidos para $2n$ instantes $t_1, t_2, \dots, t_{2n}$, haveria $2n^2$ equações que seriam escritas como:

$$[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_{2n}] = A[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}] \quad (9)$$

ou

$$\dot{X} = AX \quad (10)$$

e, portanto,

$$A = \dot{X}X^{-1} \quad (11)$$

ou seja, se todos os elementos de $\dot{X}$ e X^{-1} estivessem disponíveis, a matriz A seria determinável. Observa-se, pela eq. 7, que a solução do sistema é do tipo:

$$X = \Psi e^{\lambda t} \quad (12)$$

que, substituída na eq. 10, resultaria em:

$$\lambda \Psi = A \Psi \quad (13)$$

A equação 13 representa um problema de autovalores. Os autovalores de A fornecem as frequências naturais e respectivos fatores de amortecimento; seus autovetores, os modos de vibrar. Os autovalores reais correspondem a vibrações superamortecidas, segundo Mangold (2003). Já os complexos $\lambda_j = a_j + ib_j$, onde $i^2 = -1$, os quais aparecem mais frequentemente, são usados para a determinação

de frequências naturais amortecidas, naturais livres e de fatores de amortecimento de cada modo ψ_j , respectivamente, através de:

$$\omega_{d,j} = b_j \quad (14)$$

$$\omega_{n,j} = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \quad (15)$$

$$\zeta_j = \frac{-a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}} \quad (16)$$

Quando complexos, os autovalores e autovetores aparecem em pares conjugados. Porém, cada par corresponde a uma mesma frequência natural, a um único fator de amortecimento e a um mesmo modo de vibrar.

3.1.1 MÉTODO MODIFICADO DE IBRAHIM NO DOMÍNIO DO TEMPO

A utilização do ITDM, conforme proposto (Ibrahim e Mikulcik ,1973) pressupunha a disponibilidade de dados de aceleração, velocidade e deslocamento para vários pontos na estrutura, o que nem sempre era factível. Por esse motivo, O método foi reformulado (Pappa e Ibrahim, 1981) para que apenas medidas de aceleração, velocidade ou deslocamento fossem necessárias à identificação do sistema. O método é brevemente descrito a seguir.

Partindo da equação de movimento de um sistema hamiltoniano em oscilação livre:

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{y}} + \bar{C}\dot{\mathbf{y}} + \bar{K}\mathbf{y} = 0 \quad (17)$$

obtém-se a equação característica:

$$\lambda^2 \bar{M} + \lambda \bar{C} + \bar{K} = 0 \quad (18)$$

A solução dessa equação medida na estação K , em um dado instante t_i , depende da contribuição de cada um dos j modos ψ_{Kj} sobre essa estação

$$y_K(t_i) = y_{K,i} = \sum_{j=1}^{2n} \psi_{Kj} e^{\lambda_j t_i} \quad (19)$$

A equação de movimento de resposta livre para $2n$ estações (locais) de medida e s instantes pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2n,1} & \cdots & y_{2n,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{2n,1} & \cdots & \psi_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \cdots & e^{\lambda_1 t_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2n} t_1} & \cdots & e^{\lambda_{2n} t_s} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ou

$$\Phi = \Psi \Lambda \quad (21)$$

em que Φ é a matriz de respostas, Ψ é a matriz modal e Λ é uma matriz de Vandermonde. Da mesma forma, a solução para um instante Δt_1 atrasado pode ser escrita como:

$$y_K(t_i + \Delta t_1) = \sum_{j=1}^{2n} \psi_{Kj} e^{\lambda_j(t_i + \Delta t_1)} = \sum_{j=1}^{2n} (\psi_{Kj} e^{\lambda_j \Delta t_1}) e^{\lambda_j t_i} = \sum_{j=1}^{2n} \hat{\psi}_{Kj} e^{\lambda_j t_i} \quad (22)$$

E, repetindo o processo realizado anteriormente para $2n$ estações de medição e s instantes de tempo, tem-se a forma matricial:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Psi} \Lambda \quad (23)$$

As equações 21 e 23 estão relacionadas, de modo que se pode eliminar o termo Λ para obter:

$$\hat{\Phi} \Phi^{-1} \Psi = \hat{\Psi} \quad (24)$$

Quando se verifica que colunas de Ψ e $\hat{\Psi}$ correspondentes a um mesmo modo j possuem a relação idêntica à expressa na eq. 24, pode-se escrever:

$$\hat{\Phi} \Phi^{-1} \{\Psi\}_j = \{\hat{\Psi}\}_j \quad (25)$$

No entanto, levando-se em consideração que essas colunas estão associadas, de acordo com a equação 22, por:

$$\{\hat{\Psi}\}_j = e^{\lambda_j \Delta t_1} \{\Psi\}_j \quad (26)$$

configura-se o problema de autovalores:

$$\hat{\Phi}\Phi^{-1}\{\Psi\}_j = e^{\lambda_j\Delta t_1}\{\Psi\}_j \quad (27)$$

Assim, tendo-se os valores de aceleração, velocidade ou deslocamento de $2n$ pontos, obtêm-se os autovalores de $\hat{\Phi}\Phi^{-1}$ na forma de $\alpha_j + i\theta_j$, relacionados com as raízes da equação 18 por:

$$\alpha_j + i\theta_j = e^{(a_j + ib_j)\Delta t_1} \quad (28)$$

ou

$$a_j = \frac{1}{2\Delta t_1} \ln(\theta_j^2 + \alpha_j^2) \quad (29)$$

e

$$b_j = \frac{1}{\Delta t_1} \tan^{-1} \left(\frac{\theta_j}{\alpha_j} \right) \quad (30)$$

Por sua vez, esses valores estão relacionados com a frequência natural, frequência natural amortecida e fator de amortecimento pelas equações 14, 15 e 16.

Observa-se, contudo, que a formulação apresentada exige que as matrizes Φ e $\hat{\Phi}$ sejam quadradas, isso é, o número de amostras temporais seja igual a $2n$. No mesmo trabalho (Pappa e Ibrahim, 1981), os autores apresentam soluções para a utilização do método com um número qualquer de dados da série temporal de medidas, permitindo o uso de maior quantidade de amostras temporais e concomitantemente maior quantidade de informações sobre o sistema, sem alteração do número de graus de liberdade computacionais; tal modificação é possível devido à manipulação de matrizes retangulares em vez de quadradas.

A primeira solução para a aplicação do ITDM com matrizes retangulares utiliza apenas o método dos mínimos quadrados (MMQ) na determinação dos modos do sistema. As matrizes de resposta retangulares são utilizadas no problema de autovalores na seguinte sequência:

$$[\hat{\Phi}\Phi^t][\Phi\Phi^t]^{-1}\{\Psi\}_j = \{\Psi\}_j e^{\lambda_j\Delta t_1} \quad (31)$$

A segunda solução utiliza a fatoração *Single-Value Decomposition* (SVD – decomposição por valores singulares). Tal fatoração da matriz Φ é dada na forma:

$$\Phi^t = PDQ^t \quad (32)$$

onde P é uma matriz isométrica, Q é uma matriz ortogonal, e D é uma matriz diagonal com elementos $[d_1, d_2, \dots, d_N]$ dispostos de modo que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N$. Aplicando-se esse algoritmo, os modos de vibração identificados e apresentados nas colunas de Ψ são ordenados de acordo com a potência associada a cada oscilação. A solução por mínimos quadrados associada ao SVD é enfim calculada (pela substituição de 32 em 31):

$$QD^{-1}P^t\hat{\Phi}^t\{\Psi\}_j = \{\Psi\}_j e^{\lambda_j \Delta t_1} \quad (33)$$

Pappa e Ibrahim (1981) utilizaram em seu estudo o método dos mínimos quadrados conjuntamente com a decomposição LU na identificação da dinâmica do sistema, a fim de suprimir o mal condicionamento do sistema formado pela matriz Φ . A utilização do ITDM com tal fatoração era mais vantajosa sobre outras como SVD e sobre a fatoração QR devido a menor utilização de memória rápida do computador. No entanto, a evolução dos microcomputadores permite que métodos matemáticos mais robustos possam ser utilizados. Não somente, Mangold (2003) utilizou o ITDM em um modelo teórico simples sem ruído, com a mesma formulação que os inventores do método, e não pôde obter precisamente a dinâmica do sistema amortecido. Por isso, nesta dissertação são apresentados apenas resultados utilizando o equacionamento com SVD para manipulação das matrizes mal condicionadas do método de Ibrahim.

3.1.2 ANÁLISE DOS PARÂMETROS DO ITDM E AVALIAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Outro problema encontrado pelos autores em seu método é associado à falta de estações de medidas. A dificuldade em se realizar uma modelagem numérica, por exemplo utilizando o método dos elementos finitos, ou a grande quantidade de modos em um pequeno intervalo de frequências pode acarretar em um número de

medições inferior ao dobro de graus de liberdade computacionais⁴ ($< 2n$), e, portanto, no parcial preenchimento das linhas das matrizes Φ e $\hat{\Phi}$. Como solução, Pappa e Ibrahim (1981) propuseram a técnica a seguir apresentada.

Quando o número de medidas, p_0 , for menor que o número de graus de liberdade computacionais ($< n$), menos da metade das linhas das matrizes Φ e $\hat{\Phi}$ seria preenchida. Pode-se, então, criar “estações de medidas” para o preenchimento da primeira metade das matrizes, defasando-se as séries temporais por um novo intervalo de tempo $\Delta t_2 = N_2 \Delta t_{amostragem}$ e seus múltiplos $2\Delta t_2, 3\Delta t_2, 4\Delta t_2, \dots$. Essa operação não altera matematicamente os autovalores da matriz A , visto que as medidas “transformadas” são oriundas do mesmo sistema e amostradas à mesma taxa. Contudo, o cálculo de A só é possível se o sistema de equações for linearmente independente, não havendo linhas iguais nas matrizes Φ e $\hat{\Phi}$. O integrador N_2 deve, então, ser um número natural maior que 1 e Δt_2 deve ser maior que Δt_1 .

As partições inferiores das matrizes de medidas Φ e $\hat{\Phi}$ também devem ser preenchidas por medidas defasadas no tempo, desta vez se deslocando as linhas da metade superior de um intervalo Δt_3 . Novamente, o cálculo de A só é possível se o sistema de equações for linearmente independente, não havendo linhas iguais nas matrizes Φ e $\hat{\Phi}$. Logo, o integrador N_3 , do qual se origina o intervalo de defasagem $\Delta t_3 = N_3 \Delta t_{amostragem}$, deve ser um número natural maior que 1, diferente de N_2 e Δt_3 deve ser maior que Δt_1 .

Para facilitar a compreensão dessa técnica, Pappa e Ibrahim (1981) apresentaram um exemplo simples, o qual é mostrado na Figura 1. Seja um sistema com 3 estações de medidas denominadas a , b e c , do qual se deseja identificar 7 modos de vibrar. O método requer que a matriz Φ tenha 14 linhas ($2n$) e, para isso, é necessária a criação de 11 “estações transformadas”. Define-se que $\Delta t_1 = 3$, $\Delta t_2 = 8$ e $\Delta t_3 = 4$. Inicialmente, a matriz Φ é formada por 30 amostras temporais das 3 estações de trabalho, iniciadas em $a(1)$, $b(1)$ e $c(1)$. Para preenchimento da partição superior da matriz, deve-se fazer a transformação das estações pela defasagem Δt_2

⁴ Os métodos de análise modal identificam a dinâmica do sinal processado, isso é, identificam a vibração do sistema, os erros de modelagem, os ruídos, e os erros numéricos. GRAUS DE LIBERDADE COMPUTACIONAIS é um termo que designa a quantidade procurada de modos de vibrar, os quais podem ser oriundos do sistema ou das outras parcelas do sinal analisado.

e $2\Delta t_2$. O complemento dessa matriz deve ser feito defasando-se a partição superior por Δt_3 . Por fim, a matriz $\hat{\Phi}$ é criada pelo deslocamento temporal da matriz Φ por Δt_1 .

Figura 1 – Exemplo da utilização das defasagens do ITDM modificado (alterado de Pappa e Ibrahim, 1981)

A criação de “estações transformadas” com o uso somente de $k\Delta t_2$ para total preenchimento da Φ seria suficiente para a identificação modal pelo ITDM, uma vez que as linhas dessa matriz seriam linearmente independentes e todas conteriam informações do mesmo sistema amostradas à mesma taxa. Porém, o artifício matemático da defasagem por Δt_3 garante a aplicação do *Modal Confidence Factor* (MCF), um método de avaliação dos modos identificados. Seja uma matriz de respostas com estações transformadas dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x(t_i) \\ x(t_i + \Delta t_3) \end{bmatrix} \quad (34)$$

E seja o vetor do j -ésimo modo de vibrar, subdivido em suas metades superior e inferior, dado por:

$$\psi_j = \begin{bmatrix} \psi_j^{sup} \\ \psi_j^{inf} \end{bmatrix} \quad (35)$$

O vetor de todos os modos de vibrar e o vetor de medidas relacionam-se pela eq. 21 (página 28). Devido à defasagem imposta na equação 34, se a eq. 35 corresponder a um modo linear do sistema físico ideal, as metades superior e inferior deveriam se relacionar por:

$$\psi_j^{inf} = \psi_j^{sup} e^{\lambda_j \Delta t_3} \quad (36)$$

Entretanto, o modo identificado $\bar{\lambda}_j$ possui erro de modelagem (a ser avaliado pelo MCF). A defasagem de ψ_j^{sup} por um intervalo de tempo Δt_3 , utilizando essa identificação, é:

$$\bar{\psi}_j^{inf} = \psi_j^{sup} e^{\bar{\lambda}_j \Delta t_3} \quad (37)$$

A correlação MCF, que correlaciona o modo identificado $\bar{\lambda}_j$ (utilizando o modelo linear apresentado na eq. 17, página 27) com o modo real λ_j , é calculado por:

$$\gamma_j = \frac{|\bar{\psi}_j^{inf*} \psi_j^{inf}|}{\left(|\bar{\psi}_j^{inf*} \bar{\psi}_j^{inf}| |\psi_j^{inf*} \psi_j^{inf}| \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (38)$$

onde o operador * representa a matriz hermitiana, isto é, a matriz transposta e complexo conjugada.

O MCF tem por vantagem a avaliação dos modos identificados utilizando apenas seus próprios autovetores. Uma boa correlação, $\gamma_j \rightarrow 1$, é esperada para todos os modos lineares corretamente identificados do sistema. Uma baixa correlação, entretanto, levaria a concluir que o dito modo corresponde a identificação de não linearidades ou ruídos do sistema, segundo Pappa e Ibrahim (1981).

Os autores ainda ressaltam que, para o cálculo do MCF, deve-se utilizar apenas os p_0 primeiros termos (relativos às p_0 estações de medidas originais) da metade superior do autovetor $\psi_j^{sup}(1:p_0)$. Isso é, a eq. 38 deve correlacionar apenas os vetores reduzidos $\psi_j^{inf}(1:p_0)$ e $\bar{\psi}_j^{inf}(1:p_0)$.

3.2 EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM

Baseado nas formulações de Ho e Kalman (1965), utilizando matrizes de observabilidade e controlabilidade para a realização de sistemas lineares em variáveis de estado, o ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*) não foi um método original quanto ao seu desenvolvimento matemático, mas sim quanto à sua aplicação em sistemas físicos com modelos de segunda ordem. Na primeira publicação, Juang e Pappa (1984) já demonstraram a eficácia do método na identificação de modos de vibrar da estrutura da nave espacial Galileo e compararam os resultados com outros métodos clássicos de análise modal. A formulação completa, com metodologia experimental detalhada, foi apresentada apenas no ano seguinte (Juang e Pappa, 1985b) e nela é baseado o desenvolvimento matemático exposto a seguir.

Seja um sistema dinâmico discreto, linear de parâmetros concentrados e invariante no tempo discreto, cuja representação em espaço de estados é dada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{U}(k) \quad (39)$$

$$\mathbf{Y}(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (40)$$

onde o vetor de estados $\mathbf{x}$ tem dimensão $2n$; o vetor de entradas $\mathbf{U}(k)$ tem dimensão m ; e o vetor de saídas $\mathbf{Y}(k)$, dimensão p ; e k representa o instante $t = t_k$, um indicador de amostragem.

Por simplicidade, a primeira formulação do método de análise modal ERA será desenvolvida para um sistema SISO (*single input and single output*). Para tal sistema, as respostas livres respectivamente a um pulso unitário ou a uma condição inicial não nula podem ser escritas com os parâmetros de Markov:

$$y(k) = CA^{k-1}B \quad (41)$$

$$y(k) = CA^k\mathbf{x}(0) \quad (42)$$

onde $\mathbf{x}(0)$ é a condição inicial do sistema, B um vetor coluna (*single input*), e C um vetor linha (*single output*). Por abuso de linguagem, daqui em diante B irá representar a matriz de entrada do sistema ou a evolução da condição inicial (nessa representação $B = A\mathbf{x}(0)$). Um vetor de parâmetros de Markov pode ser escrito

então como:

$$\bar{y}(k) = VA^{k-1}B \quad (43)$$

onde:

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+2n-1) \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Assume-se que o sistema da eq. 43 não possua autovalores repetidos. Sendo assim, existe um vetor linha C tal que a matriz de observabilidade V tenha posto $2n$, isto é, o sistema é completamente observável. Rearranjando a eq. 43 para o tempo posterior:

$$\bar{y}(k+1) = VA^k B = VAV^{-1}\bar{y}(k) \quad (46)$$

Dada a sequência de medidas $\bar{y}(k)$, a matriz de Hankel pode ser construída como:

$$H(k-1) = [\bar{y}(k) \ \bar{y}(k+1) \ \dots \ \bar{y}(k+2n)] = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \dots & y(k+2n-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \dots & y(k+2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+2n-1) & y(k+2n) & \dots & y(k+4n-2) \end{bmatrix} \quad (47)$$

Conhecendo-se a dinâmica do vetor de parâmetros de Markov, dada pela eq. 46, e substituindo-a na eq. 47, a matriz de Hankel no tempo posterior é escrita como:

$$H(k) = VAV^{-1}H(k-1) \quad (48)$$

ou, pela substituição da dinâmica do vetor de parâmetros de Markov escrita na equação 43:

$$H(k) = VA^k W \quad (49)$$

$$W = [B \ AB \ \dots A^{2n-1}B] \quad (50)$$

onde W é a matriz de controlabilidade do sistema. Novamente, se o sistema não possuir autovalores repetidos, existe um vetor coluna B tal que a matriz W tem posto $2n$, isso é, o sistema é totalmente controlável. Da eq. 49 se conclui que, se o sistema for controlável e observável e não possuir autovalores repetidos, a matriz $H(k)$ é invertível. Assumindo-se $k = 1$, a matriz de estado A pode ser obtida da eq. 48, por:

$$VAV^{-1} = H(1)H(0)^{-1} \quad (51)$$

O vetor de medida $y(k+1)$ pode ser escrito também a partir da definição da matriz de Hankel, isto é, o vetor pode ser obtido da eq. 47 por:

$$y(k+1) = E^t H(k) E \quad (52)$$

onde $E^t = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$. A eq. 52 mantém a igualdade matemática se realizada a seguinte operação:

$$y(k+1) = E^t H(k) E = E^t H(k) H(0)^{-1} H(0) E \quad (53)$$

Substituindo as equações 48 e 51 em 53:

$$y(k+1) = E^t [H(1)H(0)^{-1}]^k H(0) E \quad (54)$$

Finalmente, a comparação das equações 54 e 41 (página 34) permite concluir que a tríade $[H(1)H(0)^{-1}, H(0)E, E^t]$ é uma realização, haja vista que o sistema:

$$\bar{x}(k+1) = H(1)H(0)^{-1}\bar{x}(k) + H(0)Eu(k) \quad (55)$$

$$y(k) = E^t \bar{x}(k) \quad (56)$$

possui a mesma função de medida $y(k)$ para a mesma entrada $u(k)$ que o sistema formado por $[A, B, C]$. Os vetores de estado de ambos os sistemas, sabendo-se que a matriz de estado é dada pela eq. 51, relacionam-se por:

$$\bar{x}(k) = V^{-1}x(k) \quad (57)$$

A extensão do equacionamento de SISO para o caso geral MIMO facilita as análises

de matrizes e a compreensão do desenvolvimento do ERA para sistemas de quaisquer configurações. Seja um sistema com n graus de liberdade, m entradas e p saídas. O parâmetro de Markov desse sistema MIMO é:

$$Y(k) = CA^{k-1}B \quad (58)$$

onde a matriz B tem dimensão $2n \times m$ e C , $p \times 2n$. Por abuso de linguagem, novamente B representará a matriz de entradas do sistema ou a evolução da condição inicial não nula. A matriz generalizada de Hankel é definida como:

$$H_{rs}(k-1) = \begin{bmatrix} Y(k) & Y(k+T_1) & \cdots & Y(k+T_{s-1}) \\ Y(J_1+k) & Y(J_1+k+T_1) & \cdots & Y(J_1+k+T_{s-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(J_{r-1}+k) & Y(J_{r-1}+k+T_1) & \cdots & Y(J_{r-1}+k+T_{s-1}) \end{bmatrix} \quad (59)$$

onde J_i ($i = 1, 2, \dots, r-1$) e T_i ($i = 1, 2, \dots, s-1$) são integradores arbitrários. A matriz H_{rs} tem então dimensão $rp \times sm$. De maneira semelhante ao desenvolvimento que leva à eq. 49 (página 35), pode-se provar (Juang e Pappa, 1985b) que, a partir da eq. 58, a matriz generalizada de Hankel no tempo posterior é dada por:

$$H_{rs}(k) = V_r A^k W_s \quad (60)$$

onde a matriz V_r com dimensão $rp \times 2n$ e a matriz W_s com dimensão $2n \times ms$ são respectivamente as matrizes de observabilidade e controlabilidade:

$$V_r = \begin{bmatrix} C \\ CA^{J_1} \\ \vdots \\ CA^{J_{r-1}} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$W_s = [B \quad A^{T_1}B \quad \cdots \quad A^{T_{s-1}}B] \quad (62)$$

Agora, assume-se que haja uma matriz $H^\#$ que satisfaça a relação:

$$W_s H^\# V_r = I_{2n} \quad (63)$$

onde I_{2n} é uma matriz identidade de ordem $2n$, mesma ordem do sistema. Observa-se que o desenvolvimento matemático de $H_{rs}(k)H^\#H_{rs}(k)$, usando-se as equações

60 e 63 para $k = 0$, resulta em:

$$H_{rs}(k)H^{\#}H_{rs}(k) = H_{rs}(0)H^{\#}H_{rs}(0) = V_r W_s H^{\#} V_r W_s = V_r I_{2n} W_s = V_r W_s = H_{rs}(0) \quad (64)$$

A igualdade da eq. 64 leva, então, a concluir que a matriz $H^{\#}$ é a pseudo-inversa de $H_{rs}(0)$. Definem-se as matrizes O_p como a matriz quadrada nula de ordem p , O_m como a matriz quadrada nula de ordem m , $E_p^t = [I_p \ O_p \ \dots \ O_p]$ e $E_m^t = [I_m \ O_m \ \dots \ O_m]$. A matriz de medidas $Y(k+1)$ pode ser escrita, a partir da eq. 64 para um k qualquer, de dois modos, aqui denominados ERA₁ e ERA₂. O algoritmo ERA₁ é obtido pela generalização da matriz $H_{rs}(k)$ quando ela é sucedida de uma matriz identidade:

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= E_p^t H_{rs}(k) E_m = E_p^t H_{rs}(k) I_{2n} E_m = E_p^t H_{rs}(k) [H^{\#} H_{rs}(0)] E_m \\ &= E_p^t [V_r A^k W_s] H^{\#} H_{rs}(0) E_m = E_p^t [V_r A W_s H^{\#}]^k H_{rs}(0) E_m \\ &= E_p^t [H_{rs}(1) H^{\#}]^k H_{rs}(0) E_m \end{aligned} \quad (65)$$

O algoritmo ERA₂ é obtido pela generalização da matriz $H_{rs}(k)$ quando ela é antecedida de uma matriz identidade:

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= E_p^t H_{rs}(k) E_m = E_p^t I_{2n} H_{rs}(k) E_m = E_p^t [H_{rs}(0) H^{\#}] H_{rs}(k) E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) H^{\#} [V_r A^k W_s] E_m = E_p^t H_{rs}(0) [H^{\#} V_r A W_s]^k E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) [H^{\#} H_{rs}(1)]^k E_m \end{aligned} \quad (66)$$

Sendo assim, as tríades $[H_{rs}(1)H^{\#}, H_{rs}(0)E_m, E_p^t]$ e $[H^{\#}H_{rs}(1), E_m, E_p^t H_{rs}(0)]$ são duas realizações da medição da eq. 58. O sistema realizado pelo algoritmo ERA₁ é então:

$$\bar{x}(k+1) = H_{rs}(1)H^{\#}\bar{x}(k) + H_{rs}(0)E_m U(k) \quad (67)$$

$$Y(k) = E_p^t \bar{x}(k) \quad (68)$$

onde $\bar{x}(k) = V_s H^{\#} x(k)$. Essa realização, tanto quanto as do algoritmo ERA₂ e do

sistema SISO, não é sempre de mínima ordem visto que a dimensão de $\bar{x}$ é igual ao número de colunas da matriz de Hankel $H_{rs}(0)$, o qual pode ser maior que a ordem $2n$ da matriz de estados A . Desse modo, as realizações de sistemas SISO e MIMO desenvolvidas nessa seção devem ser aplicadas apenas quando a ordem do sistema é conhecida *a priori* ou quando as medições realizadas forem isentas de ruídos.

3.2.1 SVD E A MÍNIMA REALIZAÇÃO

Para contornar as deficiências dos algoritmos apresentados na seção anterior, Juang e Pappa (1985b) desenvolveram uma formulação com a fatoração SVD, de modo que o método ERA pudesse ser utilizado na realização de um sistema qualquer, isto é, com não-linearidades e ruídos.

Para um sistema de $2n$ -ésima ordem, a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz generalizada de Hankel é:

$$H_{rs}(0) = PDQ^t \quad (69)$$

onde D é uma matriz diagonal que contém elementos positivos $[d_1, d_2, \dots, d_N]$, e as matrizes P e Q^t de dimensões respectivamente $rp \times 2n$ e $2n \times ms$ são isométricas, isso é, suas colunas são ortogonais entre si. Define-se a matriz P_d como:

$$H_{rs}(0) = PDQ^t = [PD]Q^t = P_dQ^t \quad (70)$$

Para a eq. 60 (página 37) com $k = 0$, tem-se a igualdade:

$$V_rW_s = H_{rs}(0) = P_dQ^t \quad (71)$$

Multiplicando à esquerda a igualdade por P_d^t e isolando Q^t , tem-se:

$$Q^t = (P_d^tP_d)^{-1}P_d^tV_rW_s \quad (72)$$

Considerando uma matriz U definida como $U = W_sQ(Q^tQ)^{-1}$, é possível provar (Juang e Pappa, 1985b) pela eq. 72 que se $TU = I$, então T não é uma matriz singular. Sendo assim, é válida a propriedade $TU = I = UT$ para T e U não

singulares, e a eq. 72 pode ser escrita como:

$$W_s \left[Q (P_d^t P_d)^{-1} P_d^t \right] V_r = I_{2n} \quad (73)$$

Comparando-se a eq. 73 com a eq. 63 (página 37), a matriz $H^\#$ é então reescrita como:

$$H^\# = Q \left[(P_d^t P_d)^{-1} P_d^t \right] = Q [D^{-1} P^t] = Q P_d^\# \quad (74)$$

A dimensão de $P_d^\#$ é $2n \times rp$. A saída do sistema, utilizando as equações 60, 63 e 74, é a função:

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= E_p^t H_{rs}(k) E_m = E_p^t [V_r A^k W_s] E_m = E_p^t V_r I_{2n} A^k I_{2n} W_s E_m \\ &= E_p^t V_r [W_s H^\# V_r] A^k [W_s H^\# V_r] W_s E_m \\ &= E_p^t [V_r W_s] H^\# V_r A^k W_s H^\# [V_r W_s] E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) H^\# V_r A^k W_s H^\# H_{rs}(0) E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) [Q P_d^\#] V_r A^k W_s [Q P_d^\#] H_{rs}(0) E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) Q \{ P_d^\# [V_r A^k W_s] Q \} P_d^\# H_{rs}(0) E_m \\ &= E_p^t H_{rs}(0) Q [P_d^\# H_{rs}(1) Q]^k P_d^\# H_{rs}(0) E_m \\ &= E_p^t P_d [P_d^\# H_{rs}(1) Q]^k Q^t E_m \quad (75) \end{aligned}$$

Sendo assim, a tríade $[P_d^\# H_{rs}(1) Q, Q^t E_m, E_p^t P_d]$ é uma mínima realização do sistema, visto que a ordem n de $P_d^\# H_{rs}(1) Q$ é igual à dimensão do vetor de estado x . As formulações até aqui desenvolvidas visavam à mais sucinta comprovação matemática e mais fácil compreensão do algoritmo generalizado do ERA. Contudo, no mesmo ano, Juang e Pappa (1985a) publicaram outro trabalho, que trazia algumas alterações no método ERA, brevemente apresentadas no parágrafo a seguir.

Um sistema dinâmico finito, linear, invariante, no tempo discreto é realizável a partir das funções de medidas se for completamente controlável e completamente observável. A realização mínima pode ser feita com a decomposição em valores singulares (equação 32, página 30), sendo uma das infinitas soluções dada pela tríade $[D^{-1/2}P^tH_{rs}(1)QD^{-1/2}, D^{1/2}Q^tE_m, E_p^tPD^{1/2}]$. O sistema identificado é então descrito em espaço de estados:

$$\bar{x}(k+1) = D^{-1/2}P^tH_{rs}(1)QD^{-1/2}\bar{x}(k) + D^{1/2}Q^tE_mU(k) \quad (76)$$

$$Y(k) = E_p^tPD^{1/2}\bar{x}(k) \quad (77)$$

e se relaciona com o estado do sistema original por:

$$x(k) = W_sQD^{-1/2}\bar{x}(k) \quad (78)$$

3.2.2 REDUÇÃO DE ORDEM DO MODELO E AVALIAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

A mínima realização do sistema pelo método ERA terá a mesma ordem do sistema somente se este for ideal (finito, linear, invariante no tempo). Contudo, a presença de não linearidades e de ruídos induzem aumentos no posto da matriz de Hankel e, assim, tornam difícil a identificação da ordem. Utilizando-se a decomposição em valores singulares, é possível ponderar quantitativamente a estrutura da matriz $H_{rs}(0)$ e levar a um julgamento da diferença entre o posto calculado e a ordem do sistema.

A matriz de valores singulares D é diagonal e formada pelos valores $[d_1, d_2, \dots, d_{2n}, d_{2n+1}, \dots, d_N]$ onde $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{2n} \geq d_{2n+1} \geq \dots \geq d_N$. Na ausência de ruídos e em um sistema ideal, a matriz $H_{rs}(0)$ teria posto $2n$ e então $d_{2n+1}, d_{2n+2}, \dots, d_N = 0$. Quando tais valores não são nulos, porém pequenos, é possível reconhecê-los como desprezíveis e considerá-los “zeros”. Tal consideração pode ser feita a partir de duas análises: (i) determina-se o menor valor absoluto δ baseado nos erros de medição ou erros de arredondamento e, se δ for escolhido tal que $d_{2n} > \delta > d_{2n+1}$ então a matriz D é considerada de posto $2n$ ou; (ii) determina-

se a menor relação δ oriunda do limite de precisão de cálculo e, se δ for escolhida tal que $\frac{d_{2n}}{d_1} > \delta > \frac{d_{2n+1}}{d_1}$ então novamente a matriz D é considerada de posto $2n$. A redução do modelo pelo teste dos valores singulares é, contudo, imprecisa, haja vista que a determinação de δ não é trivial caso as não-linearidades e os ruídos presentes possuam ordem de grandeza não desprezível em relação ao modelo assumido para o sistema.

Então, após o teste dos valores singulares, admite-se que a matriz do sistema $[D^{-1/2}P^t H_{rs}(k)QD^{-1/2}]$ tenha posto n' , tal que $2n < n' < N$. Os autovetores ψ e autovalores z dessa matriz, obtidos a partir da solução do problema de autovalores:

$$[D^{-1/2}P^t H_{rs}(k)QD^{-1/2}]\psi = \psi z \quad (79)$$

são, respectivamente, os modos de vibrar e as frequências no plano z do tempo amostrado (isso é, frequências de um sistema com sinal amostrado). As últimas se relacionam com as frequências no plano s do tempo contínuo pela transformação:

$$\lambda = \frac{\ln z}{k\Delta\tau_s} \quad (80)$$

em que $\Delta\tau_s$ é o passo de amostragem e k é a defasagem das matrizes de Hankel no método ERA. Observando a equação 75 (página 40), pode-se afirmar que a tríade $[z, \psi^{-1}D^{1/2}Q^t E_m, E_p^t P D^{1/2}\psi]$ é uma realização mínima do sistema.

A matriz $\psi^{-1}D^{1/2}Q^t E_m$ é denominada amplitude modal inicial. Ela pode ser expressa também por:

$$\psi^{-1}D^{1/2}Q^t E_m = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n'} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n' \times m} \quad (81)$$

onde os vetores-coluna β_j ($j = 1, 2, \dots, n'$) de dimensão $1 \times m$ são as amplitudes iniciais correspondentes a cada autovalor. O vetor de amplitude modal ideal desde o instante t_0 até o instante t_{s-1} é, então, definido por (e calculado a partir das frequências ideais do sistema s_j):

$$\mathbf{q}_j = [\beta_j^t \quad e^{t_1 \Delta\tau \lambda_j} \beta_j^t \quad \dots \quad e^{t_{s-1} \Delta\tau \lambda_j} \beta_j^t] \in \mathbb{R}^{1 \times sm} \quad (82)$$

A matriz de amplitude modal pode, assim, ser expressa em vetores modais mensurados:

$$\psi^{-1} D^{1/2} Q^t = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n'} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n' \times sm} \quad (83)$$

os quais foram obtidos pela decomposição da matriz de Hankel. No entanto, os modos identificados $\bar{\lambda}_j$ possuem erros de modelagem, sendo que os vetores de amplitude modal calculados com base nessas frequências são:

$$\bar{\mathbf{q}}_j = \begin{bmatrix} \beta_j^t & e^{t_1 \Delta \tau \bar{\lambda}_j} \beta_j^t & \dots & e^{t_{s-1} \Delta \tau \bar{\lambda}_j} \beta_j^t \end{bmatrix} \quad (84)$$

Os vetores de amplitude modal $\mathbf{q}_j$ e $\bar{\mathbf{q}}_j$ deveriam ter boa correlação para todos os modos lineares corretamente identificados. Uma baixa correlação, entretanto, levaria a concluir que o dito modo corresponde à identificação de não linearidades ou de ruídos do sistema. Em todos os trabalhos apresentados pelos autores, é proposta a correlação *Modal Amplitude Coherence* (MAC_{ERA}):

$$\gamma_j = \frac{|\bar{\mathbf{q}}_j^* \mathbf{q}_j|}{(|\bar{\mathbf{q}}_j^* \bar{\mathbf{q}}_j| |\mathbf{q}_j^* \mathbf{q}_j|)^{\frac{1}{2}}} \quad (85)$$

Em sua primeira apresentação (Juang e Pappa, 1984), os autores consideraram $\gamma > 80\%$ como indicador de boa correlação entre vetores e, portanto, correspondendo a modos lineares identificados. Correlações superiores a 40% foram consideradas como correspondendo a modos menos lineares. Correlações abaixo de 40% foram classificadas como oriundas de ruídos.

3.3 TÉCNICA DO DECREMENTO ALEATÓRIO

A solução da equação diferencial:

$$\bar{M} \ddot{y} + \bar{C} \dot{y} + \bar{K} y = f \quad (86)$$

depende das condições iniciais de deslocamento e velocidade (resposta homogênea y_h) e da resposta à excitação (resposta particular y_p):

$$y = y_h + y_p \quad (87)$$

A técnica RandomDec, baseado nessa composição da resposta de um sistema e a partir de dados de uma excitação aleatória, cria um sinal proporcional à resposta livre do sistema. Cole (1973) demonstra que, se realizada uma média de uma grande quantidade de trechos com mesma amplitude inicial de deslocamento: (i) a média da resposta particular devido a uma excitação aleatória de média nula se torna nula; (ii) se tomados alternadamente trechos com velocidade positiva e velocidade negativa, a parcela da resposta homogênea relativa à velocidade se torna nula. Assim, tal média, denominada assinatura RandomDec, é proporcional apenas à resposta homogênea do sistema caso esse tivesse deslocamento inicial não nulo, velocidade inicial nula e fosse livre de forças ativas. O procedimento é ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Princípio da técnica RandomDec (modificado de Cole, 1973)

Em outra perspectiva, apresentada por Ibrahim e Goglia (1977) para sistemas SIMO (com excitação aleatória e múltiplas saídas), a assinatura RandomDec é obtida a partir da auto-correlação $D_{yy}(\tau)$, quando o sinal tem amplitude arbitrada $D_{yy}(0) = a$.

Para isso, tomam-se ε segmentos de mesma duração τ com origem nos instantes t_i ($i = 1, 2, \dots, \varepsilon$) onde $y(t_1) = a$ e calcula-se a média:

$$D_{yy}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\varepsilon} y(t_i + \tau) \quad (88)$$

Pode-se também, a partir dessa técnica, obter a assinatura RandomDec de correlação cruzada $D_{y'y}(\tau)$. Seja um sinal y' amostrado em uma segunda estação de medida, concomitantemente com y . A assinatura RandomDec de correlação cruzada é definida como:

$$D_{y'y}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\varepsilon} y'(t_i + \tau) \quad (89)$$

onde o início de cada segmento tomado do sinal $y'(t_i)$ está condicionado a $y(t_i) = a$. Nota-se, então, que a quantidade de trechos ε é a mesma que de $D_{yy}(\tau)$ e que todas as assinaturas RandomDec (de auto-correlação e correlação cruzada) corresponde aos mesmos modos de vibrar.

4. ANÁLISE MODAL DE UM MODELO TEÓRICO

Os métodos de análise modal são algoritmos matemáticos capazes de caracterizar a dinâmica de um sistema. Somente excitações e medições corretas não são suficientes para satisfazer as hipóteses utilizadas na concepção do método; há, também, necessidade de parâmetros que permitam a criação de um modelo correto (tanto quanto possível). Quantidades de dados de entrada, números de graus de liberdade computacionais procurados, defasagens entre os dados e determinação do início da série temporal analisada são imprescindíveis para que a identificação do sistema possa ser utilizada em sistemas de controle com a acuidade requerida. Sendo assim, visto que o ITDM possui grande número de parâmetros e que se deseja utilizar posteriormente um método estatístico (RandomDec) conjuntamente com algoritmos de análise modal, foi realizado neste trabalho de mestrado um estudo da sensibilidade dos parâmetros envolvidos.

Para tal estudo, utilizou-se um modelo simples de 6 massas ligadas em série por molas e amortecedores lineares, sendo a primeira conectada a uma superfície fixa, conforme representado na Figura 3. As massas, as constantes de amortecimento viscoso e as constantes elásticas das molas possuem valores idênticos entre si, a saber, respectivamente, $\bar{m} = 1 \text{ kg}$, $\bar{c} = 3 \text{ Ns/m}$ e $\bar{k} = 2000 \text{ N/m}$.

Figura 3 - Sistema de massas, molas e amortecedores com seis graus de liberdade

O equacionamento analítico mostra que a maior frequência natural do sistema é $86,84 \text{ rad/s}$, como apresenta a Tabela 1. Sendo assim, as medições do sistema foram realizadas a uma taxa de 40 Hz ($251,33 \text{ rad/s}$), superior a duas vezes a maior frequência do sistema.

Tabela 1 – Frequências do sistema obtidas por método analítico

Polos do sistema	Frequência natural amortecida	Fator de amortecimento
rad/s	rad/s	10^{-3}
$-0,09 \pm 10,78i$	10,78	8,35
$-0,75 \pm 31,71i$	31,72	23,65
$-1,94 \pm 50,77i$	50,81	38,21
$-3,36 \pm 66,86i$	66,94	50,25
$-4,70 \pm 79,06i$	79,20	59,45
$-5,66 \pm 86,66i$	86,84	65,31

A partir do sistema massa-mola-amortecedor, foram derivados três modelos matemáticos analíticos no espaço de estados: modelo SISO, modelo SIMO e modelo MIMO.

O modelo SISO foi utilizado nas análises modais com o ITDM e o ERA. A única hipótese do ITDM é que o sistema esteja em decaimento livre durante a medição. O ERA para sistema SISO tem como hipótese adicional que o sistema não possua dois modos de mesma frequência (essa hipótese é satisfeita pela escolha correta dos parâmetros de massa, rigidez e amortecimento). Logo, o modelo SISO tem como entrada a excitação sobre a massa $\bar{m}_6$ e como saída a medição do deslocamento x_1 da massa $\bar{m}_1$.

O modelo SIMO foi utilizado nas análises modais com o ITDM. Novamente, a única hipótese do método é que todo o sistema esteja em decaimento livre durante a medição, ou seja, as múltiplas saídas (*multiple output*) tenham a mesma condição inicial (*single input*) e estejam livres de forças externas. Portanto, o modelo SIMO tem como entrada a excitação sobre a massa $\bar{m}_6$ e como saída as medições dos deslocamentos x_1 a x_5 .

Finalmente, o modelo MIMO foi utilizado nas análises modais com o ERA. Para realização de um sistema com múltiplas saídas, o método possui três hipóteses: o sistema deve ter decaimento livre, ser totalmente controlável e ser totalmente observável. Para satisfazer tais imposições, foi simulado um sistema MIMO com excitações aplicadas separadamente sobre as massas $\bar{m}_2$ a $\bar{m}_6$, e foram utilizadas como saídas os deslocamentos x_1 a x_5 .

A Tabela 2 relaciona todas as entradas e saídas dos modelos utilizados nas simulações.

Tabela 2 – Relação de entradas e saídas dos sistemas SISO, SIMO e MIMO

Método		Entrada - Excitação sobre a massa	Saída – Deslocamento	Matriz de Entradas	Matriz de Saídas
ITDM	SISO	$\bar{m}_6$	x_1	B_1	C_1
	SIMO	$\bar{m}_6$	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	B_1	C_2
ERA	SISO	$\bar{m}_6$	x_1	B_1	C_1
	MIMO	$\bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5, \bar{m}_6$	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	B_2	C_2

O sistema no espaço de estados mostrado adiante corresponde ao modelo matemático analítico gerado para o caso SISO, SIMO e MIMO.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (90)$$

$$y = Cx \quad (91)$$

Nas equações 90 e 91, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{\bar{m}} & -\frac{2c}{\bar{m}} & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{2\bar{c}}{\bar{m}} & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{k}}{\bar{m}} & \frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{m}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde B_1 é utilizado em todos os casos SI (*single input*); B_2 , em todos os casos MI (*multiple input*); C_1 , em todos os casos SO (*single output*); e C_2 , em todos os casos MO (*multiple output*)

As simulações dos sistemas foram realizadas no *software* Matlab utilizando as funções *impulse* e *lsim*. As medições foram efetuadas para os 20 primeiros segundos de oscilação livre ou para 250 segundos de excitação aleatória. Quando

aplicável, os ruídos utilizados na medição do sistema foram aleatórios de distribuição uniforme gerados pela função *rand* do mesmo programa de computador, sendo diferentes para cada conjunto impulso e medição sobre as massas. Os métodos de análise modal e a técnica do incremento aleatório foram programados pelo autor desta dissertação e nenhum pacote pronto foi utilizado. As mesmas funções de cálculo computacional, testadas no modelo simples desta seção serão utilizadas no processamento das propriedades de imagens de chamadas da seção 6.

4.1 EXCITAÇÃO IMPULSIVA

A primeira parte do estudo dos métodos de análise modal consiste em averiguar os modelos identificados pelo ITDM e pelo ERA quando o sistema é submetido à excitação impulsiva. Para sistemas com uma entrada (*single-input, SI*), o impulso é aplicado sobre a massa $\bar{m}_6$ e as saídas são obtidas simultaneamente. Para sistemas com múltiplas entradas (*multiple-input, MI*), impulsos são aplicados sequencialmente sobre as massas $\bar{m}_2$ a $\bar{m}_6$ e as saídas de cada impulso são obtidas simultaneamente.

Nas seções 4.1.1 a 4.1.4 são realizados, respectivamente, quatro estudos sobre sinais oriundos das mesmas saídas do sistema: saídas sem adição de ruído, saídas com adição de ruído de 2% da máxima amplitude de oscilação, saídas com adição de ruído de 10% da máxima amplitude de oscilação, e saídas com adição de ruído de 50% da máxima amplitude de oscilação.

4.1.1 EXCITAÇÃO IMPULSIVA SEM RUÍDO

Inicialmente, foram realizadas análises modais com todos os quatro métodos (neste relatório denominados ITDM-SISO, ITDM-SIMO, ERA-SISO, ERA-MIMO) para o sistema de 6 graus de liberdade sem a adição de ruídos. A Figura 4 mostra a saída (y_1) do sistema SISO e a Figura 5 mostra as saídas (y_1 a y_5) do sistema SIMO (as posições das massas $\bar{m}_1$ a $\bar{m}_5$, respectivamente). Salienta-se que a saída y_1 é comum a todos os casos, isto é, y_1 é a mesma para os sistemas SISO, SIMO e MIMO devido à mesma entrada (excitação sobre a massa $\bar{m}_6$).

Figura 4 – Saída do sistema SISO

Figura 5 – Saídas do sistema SIMO

A Figura 6 mostra o espectro de potência da velocidade $\dot{x}_1$ da massa $\bar{m}_1$ para a excitação sobre a massa $\bar{m}_6$

Figura 6 – Espectro de potência da velocidade $\dot{x}_1$ da massa $\bar{m}_1$

Segundo Ogata (2011), a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo e a sua resposta a um impulso unitário contêm a mesma informação a respeito da dinâmica do sistema, ou seja, é possível obter toda a informação sobre a

característica do sistema excitando-o com um impulso unitário. Ele ressalva em seguida que, na prática, não existe o impulso de duração desprezível (e amplitude infinita), somente um pulso de duração extremamente curta, em comparação com as constantes de tempo do sistema, que pode ser considerado um impulso. Halvorsen e Brown (1977) afirmam que a utilidade do impulso real (com duração não infinitesimal) reside no fato de que a energia impulsiva é distribuída continuamente no domínio da frequência, excitando todas as frequências de ressonância em uma faixa útil; o início dessa faixa e a sua extensão depende do formato e tempo de duração do impulso.

As simulações do sistema massa-mola-amortecedor, da Figura 3 (página 46), com excitação impulsiva foram realizadas no software Matlab utilizando a função *impulse*, que aplica um impulso retangular de duração igual ao período de amostragem. Por isto, a energia transmitida ao sistema excitou suficientemente, para uma análise no domínio da frequência, apenas os quatro primeiros modos ($10,78rad/s$, $31,72rad/s$, $50,81rad/s$ e $66,94rad/s$), não permitindo a identificação visual das duas maiores frequências naturais. Logo, métodos simples no domínio da frequência, por exemplo a Análise do Círculo, não poderiam ser aplicados sem o conhecimento preciso da excitação do sistema, justificando o uso de métodos de análise modal operacional no domínio do tempo em estudos de sistemas submetidos a excitação natural, como os realizados por Ferreira Neto (2005) e Silva *et al.* (2015).

4.1.1.1 NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE CONHECIDO A PRIORI

Na primeira análise realizada foi considerado conhecida a quantidade de graus de liberdade do sistema. Sendo assim, o número de graus de liberdade computacionais foi imposto como $n = 6$. A Tabela 3 mostra os polos do sistema (apresentados em pares complexo-conjugados) identificados com os quatro métodos de análise modal propostos. Pode-se observar que todas as frequências foram perfeitamente identificadas.

Tabela 3 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
	SIMO	SISO	MIMO	SISO
	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i
-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i
-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i
-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i
-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i
-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i

As Tabelas 4 a 6 mostram os resultados das análises modais realizadas com o ITDM. Para a identificação de tais frequências, foram utilizadas as defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 7$ e $N_3 = 3$ como apontadas por Pappa e Ibrahim (1981). No entanto, o método não apresentou qualquer sensibilidade à variação dos parâmetros, uma vez que a decomposição por valores singulares das matrizes do ITDM contém apenas informações sobre a dinâmica do sistema, sem nenhum ruído, não-linearidade ou imprecisões de cálculo.

Tabela 4 – Polos identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	100	-0,09 ± 10,78i	100
-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i	100	-0,75 ± 31,71i	100
-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	100	-1,94 ± 50,77i	100
-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i	100	-3,36 ± 66,86i	100
-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i	100	-4,70 ± 79,06i	100
-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i	100	-5,66 ± 86,66i	100

Tabela 5 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,78	0,0
31,72	31,72	0,0	31,72	0,0
50,81	50,81	0,0	50,81	0,0
66,94	66,94	0,0	66,94	0,0
79,20	79,20	0,0	79,20	0,0
86,84	86,84	0,0	86,84	0,0

Tabela 6 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	8,35	0,0
23,65	23,65	0,0	23,65	0,0
38,21	38,21	0,0	38,21	0,0
50,25	50,25	0,0	50,25	0,0
59,45	59,45	0,0	59,45	0,0
65,31	65,31	0,0	65,31	0,0

As Tabelas 7 a 9 mostram os resultados das análises modais realizadas com o ERA. Todos os modos foram perfeitamente identificados nesse caso.

Tabela 7 – Polos identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC _{ERA}	Polo	MAC _{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	100	-0,09 ± 10,78i	100
-0,75 ± 31,71i	-0,75 ± 31,71i	100	-0,75 ± 31,71i	100
-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	100	-1,94 ± 50,77i	100
-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,86i	100	-3,36 ± 66,86i	100
-4,70 ± 79,06i	-4,70 ± 79,06i	100	-4,70 ± 79,06i	100
-5,66 ± 86,66i	-5,66 ± 86,66i	100	-5,66 ± 86,66i	100

Tabela 8 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,78	0,0
31,72	31,72	0,0	31,72	0,0
50,81	50,81	0,0	50,81	0,0
66,94	66,94	0,0	66,94	0,0
79,20	79,20	0,0	79,20	0,0
86,84	86,84	0,0	86,84	0,0

Tabela 9 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade conhecido *a priori*

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	8,35	0,0
23,65	23,65	0,0	23,65	0,0
38,21	38,21	0,0	38,21	0,0
50,25	50,25	0,0	50,25	0,0
59,45	59,45	0,0	59,45	0,0
65,31	65,31	0,0	65,31	0,0

4.1.1.2 NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DESCONHECIDO

Supôs-se, para a segunda análise, que o número de graus de liberdade do sistema era desconhecido; desta forma, foi imposto arbitrariamente o número de graus de liberdade computacionais (a serem identificados) igual a $n = 10$. A Tabela 10 mostra os polos do sistema relativos aos modos julgados como pertencentes ao sistema, isto é, não oriundos de não-linearidades, de erros de cálculo e de ruídos.

Tabela 10 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$

A análise modal com a formulação tradicional do ITDM utilizada Mangold (2003) e Silva *et al.* (2015) mostrou-se sensível aos parâmetros de defasagem (N_1 , N_2 e N_3) em um caso semelhante com mais graus de liberdade computacionais que frequências do sistema, mesmo sem ruído, apresentando discrepâncias com relação aos modos obtidos analiticamente (devido ao mal condicionamento das matrizes). Entretanto, a formulação com SVD proposta por Pappa e Ibrahim (1981), devidamente implementada, apresentou identificações modais com menores erros, sendo esse o motivo do uso dessa decomposição neste trabalho.

A Tabela 11 mostra o resultado da identificação por ITDM no caso sem ruído. É possível observar que, utilizando-se a decomposição em valores singulares, a identificação das frequências é perfeita tanto para um sistema SIMO como para um sistema SISO.

Tabela 11 – Polos identificados por ITDM para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,09 \pm 10,78i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$	100	$-0,75 \pm 31,71i$	100
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$	100	$-1,94 \pm 50,77i$	100
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$	100	$-3,36 \pm 66,86i$	100
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$	100	$-4,70 \pm 79,06i$	100
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$	100	$-5,66 \pm 86,66i$	100
-	$-136,94 \pm 7,04i$	65	$-129,99 + 0,00i$	100
-	$-134,47 \pm 41,76i$	50	$-132,04 + 0,00i$	100
-	$-136,41 \pm 50,73i$	49	$-132,23 \pm 36,68i$	100
-	$-137,59 + 125,66i$	23	$-131,30 \pm 84,99i$	100
-	$-139,49 + 125,66i$	35	$-129,59 \pm 125,66i$	100

Em suas análises, Ibrahim considerou como frequências do sistema todas aquelas correspondentes a MCF superior a 80%. Pode-se observar que os modos do sistema SIMO foram identificados com MCF igual a 100%, sendo as demais frequências (oriundas de erros computacionais) com MCF inferior a 65%. O critério de avaliação dos modos, contudo, mostrou-se inaplicável para análises modais de sistemas SISO. Nesses casos, o MCF foi sempre calculado como 100% para todos os modos.

A Tabela 12 mostra o resultado da identificação por ERA no caso sem ruído. Assim como no método ITDM, a utilização do SVD permitiu que a realização de mínima ordem fosse perfeita, isso é, sem discrepância com relação às frequências obtidas analiticamente. Em suas análises, Juang e Pappa (1984) consideraram modos do sistema todos os identificados com MAC_{ERA} superior a 50%, limite mínimo parcialmente corroborado pela análise apresentada na Tabela 12 (há ocorrência de uma frequência computacional no sistema SISO com $MAC_{ERA} = 67\%$). Observa-se finalmente que tal critério de avaliação de modos é aplicável tanto para sistemas SISO como para sistemas MIMO.

Tabela 12 – Polos identificados por ERA para um sistema sem ruído e número de graus de liberdade desconhecido

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC_{ERA}	Polo	MAC_{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,09 \pm 10,78i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,71i$	100	$-0,75 \pm 31,71i$	100
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,94 \pm 50,77i$	100	$-1,94 \pm 50,77i$	100
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,36 \pm 66,86i$	100	$-3,36 \pm 66,86i$	100
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,70 \pm 79,06i$	100	$-4,70 \pm 79,06i$	100
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,66 \pm 86,66i$	100	$-5,66 \pm 86,66i$	100
-	$-130,85 + 0,00i$	45	$-144,86 + 0,00i$	51
-	$-142,64 + 0,00i$	47	$-16,54 \pm 8,96i$	17
-	$-164,85 \pm 32,69i$	51	$-22,37 \pm 43,89i$	39
-	$-169,03 \pm 77,80i$	48	$-151,08 \pm 115,22i$	67
-	$-237,55 \pm 111,93i$	45	$-59,25 + 125,66i$	43

4.1.2 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 2%

Nesta seção é apresentada uma análise de sensibilidade dos métodos utilizados para a identificação de sistemas adicionando-se à medição do deslocamento das seis massas, anteriormente descrito, um ruído de baixa amplitude. Justifica-se a realização desse estudo, pois imprecisões nos sensores de medida, ruídos no sistema de transmissão de dados, não-linearidades reais da planta e hipóteses simplificadoras podem tornar o modelo não-plenamente representativo. Isso tende a dificultar a identificação dos modos, ou mesmo a inviabilizar.

Para efetuar este estudo, foram gerados ruídos de média nula e distribuição uniforme pela função *rand* do software Matlab. Tais ruídos, com amplitude máxima igual a 2% da maior amplitude de cada saída do sistema, foram aplicados aos respectivos sinais.

A Figura 7 mostra as medidas y_1 com adição de ruído de 2% do sistema SISO (correspondente ao deslocamento da massa m_1 devido ao impulso na massa m_6).

Figura 7 – Saída do sistema SISO com adição de ruído de 2%

A Tabela 13 mostra as frequências dos modos julgados como pertencentes ao sistema. Pode-se observar que, para esse caso de adição de ruído, o método de Ibrahim para sistema SIMO e o ERA para sistema SISO não foram capazes de identificar todos os modos satisfatoriamente. Portanto, no caso estudado, o método ERA para sistemas MIMO é o mais indicado para a realização de sistemas com baixo ruído.

Tabela 13 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,70i$	$-0,75 \pm 31,70i$	$-0,76 \pm 31,71i$	$-0,74 \pm 31,69i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-2,28 \pm 50,75i$	$-2,10 \pm 51,26i$	$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,99 \pm 50,66i$
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,62 \pm 67,08$	$-2,36 \pm 67,05i$	$-3,36 \pm 66,83i$	$-3,49 \pm 67,19i$
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,25 \pm 79,20i$	-	$-4,68 \pm 79,09i$	$-3,41 \pm 77,90i$
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	$-5,62 \pm 86,63i$	$-3,56 \pm 83,17i$

Em oposição às análises das seções anteriores, o método ITDM aplicado a um sinal com ruído mostrou-se sensível a todos os parâmetros de cálculos (n , N_2 e N_3). Analisado por Pappa e Ibrahim (1981), o número de graus de liberdade computacionais (n) relacionou-se diretamente com a precisão da identificação dos modos do sistema, isto é, quanto maior o número de modos procurados, maior a precisão daqueles corretamente identificados. Tal relação também foi observada no estudo aqui apresentado; porém, o aumento do número de graus de liberdade computacionais não somente acarreta em maior precisão na identificação dos modos do sistema, como também na dos modos de ruído, classificando-os com alto MCF. Há também grande sensibilidade do ITDM com relação às defasagens da matriz Φ . Por exemplo, a defasagem Δt_2 apresentou relação direta com o amortecimento identificado dos modos. Menores valores de N_2 devem ser utilizados para identificações mais precisas de frequências naturais não amortecidas; e maiores valores de N_2 para identificação de modos mais amortecidos, acarretando em melhor atenuação dos ruídos. A defasagem N_3 correlacionou-se com a identificação dos modos com menor energia de vibração.

As Tabelas 14 a 16 mostram os resultados das análises modais realizadas com o ITDM para o sistema com ruído de 2% da amplitude máxima de cada medida. Para a identificação de tais frequências foram utilizadas as defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$ para o cálculo de $n = 40$ graus de liberdade computacionais. Na Tabela 14, é possível observar alta acuidade na identificação dos cinco primeiros modos do sistema SIMO, os quais apresentaram MCF superior a 90%.

Tabela 14 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,09 \pm 10,78i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,75 \pm 31,70i$	100	$-0,75 \pm 31,70i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-2,28 \pm 50,75i$	98	$-2,10 \pm 51,26i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,62 \pm 67,08$	99	$-2,36 \pm 67,05i$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,25 \pm 79,20i$	93	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-6,11 \pm 86,66i$	76	-	-

A Tabela 15 mostra as frequências naturais identificadas e suas discrepâncias com relação às obtidas por cálculo analítico. Todas as frequências do sistema SIMO foram identificadas com erro inferior a 0,5%. Contudo, visto que o sexto modo possui MCF inconclusivo, esse não pode ser considerado um modo do sistema.

A identificação do sistema SISO não pôde ser corroborada pelo índice de confiabilidade MCF. Portanto, o erro das frequências naturais identificadas com relação às aquelas analiticamente calculadas foi utilizado como critério de validação. Na Tabela 15 é possível observar que a identificação dos quatro primeiros modos do modelo SISO possui erro inferior ou igual a 1%.

Tabela 15 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,78	0,0
31,72	31,72	0,0	31,72	0,0
50,81	50,80	0,0	51,30	1,0
66,94	67,18	0,4	67,09	0,2
79,20	79,31	0,1	-	-
86,84	86,86	0,0	-	-

A Tabela 16 mostra os fatores de amortecimento, dos respectivos modos da Tabela 15, e suas discrepâncias com relação aos obtidas por cálculo analítico. Todos os amortecimentos dos dois primeiros modos foram perfeitamente identificados, com erros nulos. Os demais fatores de amortecimento têm erro superior a 7,0% com relação ao calculado analiticamente, mesmo que suas frequências naturais tenham alta acuidade.

Tabela 16 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	8,35	0,0
23,65	23,65	0,0	23,65	0,0
38,21	44,93	17,6	40,97	7,2
50,25	53,97	7,4	35,20	-30,0
59,45	53,66	-9,7	-	-
65,31	70,51	8,0	-	-

As Tabelas 17 a 19 mostram o resultado da identificação por ERA no caso com ruído de 2%. O cálculo de apenas $n = 7$ modos computacionais do sistema MIMO permitiu a quase perfeita identificação de todos os modos do sistema, os quais apresentam MAC_{ERA} muito superior a 50%, como pode ser visto na Tabela 17, e erros estimação de frequência natural amortecida quase nulos. A identificação do sistema SISO exigiu o cálculo de $n = 15$ modos computacionais para adequada realização do sistema. As correlações dos modos, entretanto, foram menores e os erros das frequências naturais, maiores. As frequências dos modos considerados ruídos em ambos os sistemas MIMO e SISO apresentaram MAC_{ERA} inferior a 20%.

Tabela 17 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC _{ERA}	Polo	MAC _{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
-0,09 ± 10,78i	-0,09 ± 10,78i	100	-0,09 ± 10,78i	100
-0,75 ± 31,71i	-0,76 ± 31,71i	100	-0,74 ± 31,69i	100
-1,94 ± 50,77i	-1,94 ± 50,77i	96	-1,99 ± 50,66ii	95
-3,36 ± 66,86i	-3,36 ± 66,83i	98	-3,49 ± 67,19i	92
-4,70 ± 79,06i	-4,68 ± 79,09i	96	-3,41 ± 77,90i	63
-5,66 ± 86,66i	-5,62 ± 86,63i	96	-3,56 ± 83,17i	49

Tabela 18 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,78	0,0
31,72	31,72	0,0	31,70	0,0
50,81	50,81	0,0	50,70	-0,2
66,94	66,91	0,0	67,28	0,5
79,20	79,23	0,0	77,97	-1,6
86,84	86,81	0,0	83,25	-4,1

A Tabela 19 mostra os fatores de amortecimento, relacionados respectivamente às frequências naturais da Tabela 18. Observa-se que os amortecimentos identificados pelo ERA-MIMO têm erros inferiores a 1,5% com relação aos fatores obtidos analiticamente. O ERA-SISO, no entanto, estimou fatores de amortecimento com erros de até 35%.

Tabela 19 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 2%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	8,35	0,0
23,65	23,97	1,4	23,35	-1,3
38,21	38,21	0,0	39,28	2,8
50,25	50,28	0,1	51,94	3,4
59,45	59,17	-0,5	43,77	-26,4
65,31	64,87	-0,7	42,80	-34,5

4.1.3 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 10%

Embora haja grande esforço para a adequada instrumentação do sistema e minimização dos erros de medição, a quantificação desses, na maioria das vezes, é difícil. Sendo assim, nesta seção, é apresentada a análise modal do sistema com adição de ruído de média magnitude. Os mesmos ruídos da seção anterior foram aplicados a cada saída do sistema, contudo com amplitude máxima igual a 10% da do respectivo sinal. A Figura 8 mostra a saída y_1 do sistema SISO (deslocamento da massa $\bar{m}_1$ devido ao impulso sobre a massa $\bar{m}_6$) com ruído de 10%.

Figura 8 – Saída do sistema SISO com ruído de 10%

A Tabela 20 mostra as frequências dos modos julgados como pertencentes ao sistema. Pode-se observar que, para este caso de adição de ruído de média intensidade, o método de Ibrahim pôde identificar maior quantidade de modos do sistema que o método ERA, tanto para sistemas MIMO como para sistemas SISO.

Tabela 20 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,11 \pm 10,79i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,76 \pm 31,72i$	$-0,77 \pm 31,65i$	$-0,76 \pm 31,71i$	$-1,19 \pm 31,40i$
$-1,94 \pm 50,77i$	-	$-1,52 \pm 52,23i$	$-1,91 \pm 50,81i$	
$-3,36 \pm 66,86i$	$-9,87 \pm 65,78i$	$-1,25 \pm 67,50i$	$-3,37 \pm 67,35i$	$-4,35 \pm 65,76i$
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,13 \pm 78,38i$	$-0,65 \pm 78,48i$	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,72 \pm 86,00i$	$-1,79 \pm 87,99i$	-	-

As Tabelas 21 a 23 mostram os resultados das análises modais realizadas com o ITDM para o sistema com ruído de 10% da amplitude máxima de cada medida. Para a identificação de tais frequências foram utilizadas as defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$ para cálculo de $n = 40$ graus de liberdade computacionais. Na Tabela 21, é possível observar boa acuidade na identificação de cinco modos do sistema SIMO, os quais apresentaram MCF superior a 80%. O terceiro modo, embora com fator de confiabilidade próximo ao limite aceitável, foi desconsiderado.

Tabela 21 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,09 \pm 10,78i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,76 \pm 31,72i$	100	$-0,77 \pm 31,65i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-4,45 \pm 49,45$	77	$-1,52 \pm 52,23i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-9,87 \pm 65,78i$	86	$-1,25 \pm 67,50i$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,13 \pm 78,38i$	93	$-0,65 \pm 78,48i$	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,72 \pm 86,00i$	81	$-1,79 \pm 87,99i$	-

A Tabela 22 a mostra as frequências naturais identificadas e suas discrepâncias com relação às obtidas por cálculo analítico. Os erros de identificação foram menores que 3% tanto para sistema SIMO quanto para sistema SISO.

Tabela 22 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,78	0,0
31,72	31,73	0,0	31,66	-0,2
50,81	49,65	-2,3	52,25	2,8
66,94	66,52	-0,6	67,51	0,9
79,20	78,49	-0,9	78,48	-0,9
86,84	86,19	-0,7	88,01	1,3

Em contrapartida, Tabela 23, a qual mostra os fatores de amortecimento identificados relativos respectivamente às frequências da tabela anterior, aponta erros de identificação altos, de até 200% com relação aos fatores obtidos analiticamente.

Tabela 23 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	8,35	0,0
23,65	23,96	1,3	24,33	2,9
38,21	89,99	135,5	29,10	-23,8
50,25	150,05	198,6	18,52	-63,1
59,45	52,69	-11,4	8,28	-86,1
65,31	66,51	1,8	20,34	-68,9

As Tabelas 24 a 26 mostram o resultado da identificação por ERA no caso com ruído de 10%. Para a identificação do sistema MIMO foi necessário o cálculo de $n = 40$ modos computacionais, o que permitiu a identificação de quatro modos do sistema, que apresentam MAC_{ERA} superior a 50% e erros de frequência natural quase nulos (menores que 1,5%), como pode ser visto na Tabela 24. A identificação do sistema SISO exigiu o cálculo de $n = 10$ modos computacionais para sua realização, também com erros de frequência natural quase nulos (menores que 2%, Tabela 25). Observou-se, neste caso de maior intensidade de ruído, que o maior número de graus de liberdade computacionais aumenta a acuidade, porém não altera a quantidade de modos identificados.

Tabela 24 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC_{ERA}	Polo	MAC_{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,11 \pm 10,79i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,76 \pm 31,71i$	100	$-1,19 \pm 31,40i$	87
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,91 \pm 50,81i$	77	$-2,97 \pm 50,42i$	43
$-3,36 \pm 66,86i$	$-3,37 \pm 67,35i$	53	$-4,35 \pm 65,76i$	56
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	$-4,44 \pm 79,20i$	38
$-5,66 \pm 86,66i$	$-6,82 \pm 87,73i$	27	-	-

Tabela 25 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0,0	10,79	0,0
31,72	31,72	0,0	31,42	-0,9
50,81	50,85	0,0	50,51	-0,6
66,94	67,43	0,7	65,90	-1,6
79,20	-	-	79,32	0,2
86,84	87,99	1,3	-	-

Os fatores de amortecimento identificados pelo ERA-MIMO possuem erros inferiores a 2% para os modos julgados como pertencentes ao sistema (os quatro primeiros modos). Contudo, o ERA aplicado ao sistema SISO identificou fatores de amortecimento com grande discrepância com relação aos obtidos analiticamente, apresentando erros de até 60%.

Tabela 26 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 10%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	10,19	22,0
23,65	23,97	1,4	37,90	60,3
38,21	37,59	-1,6	58,91	54,2
50,25	50,04	-0,4	66,15	31,6
59,45	-	-	56,06	-5,7
65,31	77,74	19,03	-	-

4.1.4 EXCITAÇÃO IMPULSIVA COM RUÍDO DE 50%

Finalmente, nesta seção, é apresentada a análise modal do sistema com adição de ruído de grande magnitude. Os mesmos ruídos das seções anteriores foram aplicados a cada saída do sistema, mas com amplitude máxima igual a 50% da do respectivo sinal. A Figura 9 mostra a saída y_1 do sistema SISO (deslocamento da massa $\bar{m}_1$ devido ao impulso sobre a massa $\bar{m}_6$) com ruído de 50%.

Figura 9 – Saída do sistema SISO com ruído de 50%

A Tabela 27 mostra as frequências dos modos julgados como pertencentes ao sistema. Pode-se observar que, para esse caso de adição de ruído de alta intensidade, o método de Ibrahim pôde identificar a maioria dos modos do sistema, e o ERA, apenas aqueles de maior potência. Conclui-se, neste caso, que o ITDM é o método mais indicado para sistemas com ruídos de grande intensidade.

Tabela 27 – Polos identificados pelas análises modais para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,16 \pm 10,82i$	$-0,11 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,12 \pm 10,77i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-6,09 \pm 27,97i$	$-1,20 \pm 31,29i$	$-0,85 \pm 31,69i$	$-1,05 \pm 31,93$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-4,92 \pm 49,85i$	$-1,41 \pm 52,24i$	-	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-5,78 \pm 66,27i$	$-1,39 \pm 67,45$	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-5,22 \pm 74,07i$	$-1,39 \pm 81,90i$	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	$-2,09 \pm 87,77i$	-	-

As Tabelas 28 a 30 mostram os resultados das análises modais realizadas com o ITDM para o sistema com ruído de 50% da amplitude máxima de cada medida. Para a identificação de tais frequências foram utilizadas as defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$ para cálculo de $n = 40$ graus de liberdade computacionais. Na Tabela 28, é possível observar boa acuidade na identificação dos cinco primeiros modos do sistema SIMO, os quais apresentaram MCF superior a 80%. Os erros das frequências desses modos foram menores que 10% em comparação às obtidas analiticamente, como pode ser visto na Tabela 29. O sistema SISO apresentou menores erros das frequências naturais amortecidas, de até 3,5%. Ainda, identificou todos os modos do sistema.

Tabela 28 – Polos identificados por ITDM para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,16 \pm 10,82i$	100	$-0,11 \pm 10,78i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-6,09 \pm 27,97i$	85	$-1,20 \pm 31,29i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-4,92 \pm 49,85i$	90	$-1,41 \pm 52,24i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-5,78 \pm 66,27i$	82	$-1,39 \pm 67,45$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-5,22 \pm 74,07i$	91	$-1,39 \pm 81,90i$	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	$-2,09 \pm 87,77i$	-

Tabela 29 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,82	0,4	10,78	0,0
31,72	28,63	-9,7	31,31	-1,3
50,81	50,09	-1,4	52,26	2,9
66,94	66,52	-0,6	67,46	0,8
79,20	74,25	-6,3	81,91	3,4
86,84	-	-	87,79	1,1

A Tabela 30 mostra os fatores de amortecimento dos modos identificados pelo método de Ibrahim para um sinal com ruído de 50% da sua amplitude máxima. Nesse caso de grande intensidade de ruído, os amortecimentos foram discrepantes com relação aos analíticos, apresentando erros entre 18,5% e 820%.

Tabela 30 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	14,79	77,1	10,20	22,2
23,65	217,73	820,6	38,35	62,2
38,21	98,70	158,3	26,99	-29,4
50,25	87,22	73,6	20,61	-59,0
59,45	70,47	18,5	16,97	-71,5
65,31	-	-	23,81	-63,5

As Tabelas 31 a 33 mostram o resultado da identificação por ERA no caso com ruído de 50%. Para a identificação dos sistemas MIMO e SISO foram necessários os

cálculos, respectivamente, de $n = 40$ e $n = 30$ modos computacionais, que permitiram a identificação de apenas dois modos do sistema; estes apresentam MAC_{ERA} superior a 50% e erros de frequência natural amortecida quase nulos, como pode ser visto na Tabela 32.

Tabela 31 – Polos identificados por ERA para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC_{ERA}	Polo	MAC_{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,09 \pm 10,78i$	100	$-0,12 \pm 10,77i$	98
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,85 \pm 31,69i$	86	$-1,05 \pm 31,93$	67
$-1,94 \pm 50,77i$	-	-	-	-
$-3,36 \pm 66,86i$	-	-	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	-	-

Tabela 32 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,78	0.0	10,77	-0.1
31,72	31,70	-0.1	31,95	0.7
50,81	-	-	-	-
66,94	-	-	-	-
79,20	-	-	-	-
86,84	-	-	-	-

Na Tabela 33 podem ser vistos os fatores de amortecimento e seus erros com relação aos obtidos diretamente da matriz de dinâmica do sistema, matriz A .

Observa-se que a identificação do ERA-MIMO teve boa acuidade para os dois modos. Assim como nas duas seções anteriores (casos com ruído de 2% e 10% da máxima amplitude do sinal), a análise ERA-SISO obteve erros maiores, se comparados com a análise do sistema MIMO.

Tabela 33 – Fatores de amortecimento identificados por ERA para um sistema com ruído de 50%

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	8,35	0,0	11,14	33,4
23,65	26,82	13,4	32,88	39,0
38,21	-	-	-	-
50,25	-	-	-	-
59,45	-	-	-	-
65,31	-	-	-	-

As análises modais desse sistema hipotético, excitado por impulso, e cujas medidas simuladas foram corrompidas com distintos níveis de intensidade de ruído sugerem, de modo geral, que: (i) o método ERA possui melhor identificação dos modos do sistema na presença de ruídos de medição de baixa magnitude (como visto na seção 4.1.2); (ii) o método ITDM não é capaz de identificar todos os modos do sistema mesmo com menores ruídos; (iii) o método ITDM é indicado para sistemas com maior amplitude de ruído, visto que identifica a maioria dos modos em todos os casos; (iv) as análises modais de sistemas SIMO e MIMO têm maior acuidade na identificação das frequências naturais e fatores de amortecimento do que as de sistemas SISO; (v) o método ITDM identifica fatores de amortecimento com maiores erros que o ERA em todos os casos; e (vi) o aumento do número de graus de liberdade computacionais acarreta melhor identificação do sistema; no entanto, a identificação de mais modos de ruídos dificultam o julgamento pelos indicadores de confiabilidade.

4.2 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA - ESTUDO DA TÉCNICA RANDOMDEC

Para correta identificação dos modos de vibrar de um sistema, é preciso que todas as hipóteses dos métodos de análise modal utilizados sejam justificadas e não violadas. No caso particular da análise modal operacional, isto é, para os métodos que utilizam apenas as medições do sistema para sua identificação, é de fundamental importância que a excitação tenha a menor discrepância possível com relação àquela ideal. Os métodos aqui utilizados, ITDM e ERA, requerem que o sistema tenha uma resposta livre, a qual é oriunda (i) de um deslocamento inicial com amplitude superior à dos ruídos ou (ii) de um impulso. Esses, quando aplicados em estruturas comuns na engenharia civil, podem não transmitir energia suficiente para análise dos modos ou levam a destruição da referida estrutura, segundo Ferreira Neto (2005). Em outros sistemas dinâmicos, como na queima de um combustível, tais condições iniciais podem levar a instabilidade ou a extinção da chama. A excitação aleatória, por vezes referida como natural, é o método utilizado largamente nas análises de sistemas com alto amortecimento, constituídos por materiais frágeis ou passíveis de instabilização, visto que tal solicitação é inevitável durante a operação do sistema e tem potencial de transferência de energia para toda a banda de frequência analisada.

A segunda parte do estudo dos métodos de análise modal consiste em averiguar os modelos identificados pelo ITDM e pelo ERA associados à técnica RandomDec quando o sistema é submetido à excitação aleatória. Para esse estudo, cinco vetores de excitação foram criados pela função *rand* do software Matlab, com média nula e distribuição uniforme. Tais excitações foram aplicadas simultaneamente nas cinco entradas do sistema (equação 90, página 47), isto é, sobre as massas $\bar{m}_2$ a $\bar{m}_6$, e foram obtidos os deslocamentos das massas $\bar{m}_1$ a $\bar{m}_5$ simultaneamente. As medições foram efetuadas para os 250 primeiros segundos de simulação. A Figura 10 mostra a saída y_1 do sistema devido às excitações aleatórias. Para melhor visualização dessa resposta do sistema, apenas os 15 primeiros segundos do sinal são mostrados, na Figura 11.

Figura 10 – Saída y_1 do sistema devido à excitação aleatória

Figura 11 – 15 primeiros segundos do sinal y_1 do sistema

Nas seções 4.2.1 a 4.2.3 são realizados, respectivamente, três estudos sobre a utilização da técnica RandomDec aplicado às mesmas saídas do sistema: assinatura RandomDec com amplitude inicial entre 80% e 100% da maior amplitude do sinal, assinatura RandomDec com amplitude inicial entre 60% e 100% da maior amplitude do sinal, e assinatura RandomDec com amplitude inicial entre 60% e 80% da maior amplitude do sinal.

4.2.1 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ACIMA DE 80%

Na formulação teórica da técnica RandomDec, o início de cada trecho para média deve acontecer sempre com mesma amplitude do sinal. Em sua aplicação computacional, entretanto, devido à amostragem do sinal, o início dos trechos deve ocorrer dentro de uma faixa delimitada. Sendo essa faixa próxima à maior amplitude do sinal, poucos trechos para obtenção da assinatura serão tomados e, portanto, a média da resposta particular do sistema não será nula. Assim, as análises de excitação aleatória apresentadas nesta seção 4.2.1 visam avaliar a sensibilidade dos parâmetros da técnica RandomDec, associada aos métodos de análise modal, quando o algoritmo considera essa faixa mais estreita entre 80% e 100% da maior amplitude do sinal do primeiro canal y_1 .

4.2.1.1 ASSINATURA COM MAIOR COMPRIMENTO

A escolha do comprimento da assinatura RandomDec influencia tanto na análise estatística dessa técnica quanto na acuidade dos modelos obtidos pelos métodos de análise modal. Quanto maior o comprimento, menor o número de trechos identificados para média, o que pode não caracterizar adequadamente um decaimento livre; contudo, o sinal resultante mais longo leva a uma melhor aplicação do ITDM e ERA. Por outro lado, quanto menor o comprimento escolhido para a assinatura, maior o número de trechos identificados para média, e o sinal resultante assemelha-se a um decaimento livre, mas sua curta extensão prejudica o uso dos referidos métodos de análise modal.

Nesta seção, é escolhido um maior comprimento para a assinatura RandomDec: um vetor com 200 dados. O número de trechos identificados e utilizados é então menor, apenas $\varepsilon = 3$ trechos. Como sinal de referência, foi escolhido o correspondente à primeira estação de medição (y_1), cuja assinatura RandomDec de auto-correlação (D_{11}) pode ser vista na Figura 12. As demais saídas do sistema (y_2 , y_3 , y_4 e y_5) foram utilizadas para correlação cruzada, e suas assinaturas RandomDec (D_{21} , D_{31} , D_{41} e D_{51}) podem ser vistas na Figura 13.

Figura 12 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com 200 pontos e amplitude superior a 80%

Figura 13 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

As análises modais aqui apresentadas utilizam no sistema SISO apenas a assinatura de auto-correlação (D_{11}), enquanto no sistema MIMO são utilizadas as cinco assinaturas (D_{11} , D_{21} , D_{31} , D_{41} e D_{51}). A Tabela 34 mostra o resultado de todas as análises realizadas. No estudo apresentado nesta seção, a quantidade de trechos de médias para obtenção do sinal de decaimento livre foi apenas $\varepsilon = 3$, logo a média da resposta particular do sistema provavelmente não seria nula nas assinaturas e altos níveis de ruídos permaneceriam. Portanto, o método ITDM é o mais indicado (visto sua menor sensibilidade a ruídos, como concluído na seção 4.1.4), pois identificou satisfatoriamente mais modos.

Tabela 34 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,13 \pm 10,76i$	$-0,07 \pm 10,75i$	$-0,05 \pm 10,73i$	$-0,08 \pm 10,75i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,61 \pm 30,99i$	$-0,38 \pm 31,24i$	$-0,24 \pm 31,01i$	$-0,67 \pm 31,19i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,43 \pm 51,07i$	$-0,69 \pm 51,81i$	$-0,12 \pm 51,49i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	-	$-2,64 \pm 66,13i$	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-8,27 \pm 75,59i$	$-0,94 \pm 78,05i$	-	$-1,04 \pm 78,20i$
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,29 \pm 81,62i$	$-2,08 \pm 89,98i$	-	-

No método de Ibrahim para sistema SIMO foi imposto $n = 9$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$, e para sistema SISO foi imposto $n = 10$ graus de liberdade computacionais com as mesmas defasagens. As Tabelas 35 a 37 mostram os resultados do método. Pode-se observar que os modos com maiores frequências (5º e 6º modos), e de menor amplitude de vibração, possuem menores MCF e erros de identificação das frequências naturais maiores que os demais modos (entre 4% e 6%), no sistema SIMO. A análise ITDM-SISO conseguiu identificar frequências naturais com erros inferiores a 4%.

Tabela 35 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,13 \pm 10,76i$	100	$-0,07 \pm 10,75i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,61 \pm 30,99i$	100	$-0,38 \pm 31,24i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,43 \pm 51,07i$	100	$-0,69 \pm 51,81i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	-	-	$-2,64 \pm 66,13i$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-8,27 \pm 75,59i$	88	$-0,94 \pm 78,05i$	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-5,29 \pm 81,62i$	95	$-2,08 \pm 89,98i$	-

Tabela 36 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,76	-0,2	10,75	-0,3
31,72	31,00	-2,3	31,25	-1,5
50,81	51,09	0,6	51,81	2,0
66,94	-	-	66,18	-1,1
79,20	76,04	-4,0	78,06	-1,4
86,84	81,79	-5,8	90,00	3,6

A pequena quantidade de trechos para o cálculo das assinaturas RandomDec, de auto-correlação e correlação cruzada, tiveram pequeno impacto na acuidade de identificação das frequências naturais: os erros com relação às frequências obtidas analiticamente foram inferiores a 6%. O pequeno número de trechos escolhidos, entretanto, acarretou dificuldade na estimação do amortecimento com o ITDM para sistemas SISO e SIMO, de modo similar aos casos com ruídos de 10% e 50% no sinal de saída (seções 4.1.3 e 4.1.4). Como pode ser visto na Tabela 37, os fatores de amortecimento têm erros de até 85%.

Tabela 37 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	12,08	44,7	6,51	-22,0
23,65	19,68	-16,8	12,16	-48,6
38,21	28,00	-26,7	13,32	-65,1
50,25	-	-	39,92	-20,6
59,45	109,41	84,0	12,04	-79,7
65,31	64,81	-0,8	23,12	-64,6

Na identificação do sistema MIMO com ERA, foram impostos $n = 10$ graus de liberdade computacionais, novamente, por haver grande amplitude de ruídos nas assinaturas de correlação cruzada (mesmo número utilizado na seção 4.1.4). Na identificação do sistema SISO, foram impostos $n = 30$ graus de liberdade computacionais. Os resultados são vistos nas Tabelas 38 a 40.

Tabela 38 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polos	Polos	MAC _{ERA}	Polos	MAC _{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,05 \pm 10,73i$	100	$-0,08 \pm 10,75i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,24 \pm 31,01i$	91	$-0,67 \pm 31,19i$	77
$-1,94 \pm 50,77i$	$-0,12 \pm 51,49i$	79	$-1,01 \pm 51,58i$	45
$-3,36 \pm 66,86i$	-	-	$-3,30 \pm 66,82i$	42
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	$-1,04 \pm 78,20i$	53
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	-	-

O pequeno valor de n do sistema MIMO levou à identificação apenas dos três primeiros modos, os quais se apresentam com amortecimento inferior ao obtidos analiticamente (39% a 68% menores). Se fosse imposta uma maior quantidade de

graus de liberdade, ocorreria a identificação de modos de ruído com MAC_{ERA} superior a 50% e nenhuma melhora na acuidade dos modos do sistema (esta análise assemelha-se ao caso de decaimento livre com ruído de 50%, estudado na seção 4.1.4).

No sistema SISO, foi possível a identificação de cinco modos com erros de até 2% com relação às frequências naturais da análise pelo espaço de estados (autovalores da matriz A), contudo as correlações MAC_{ERA} de dois modos foram inferiores a 50%, sendo então imprecisa a afirmação de existência desses modos. Os erros dos fatores de amortecimento chegaram a 78% na análise ERA-SISO.

Tabela 39 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,73	-0,5	10,75	-0,3
31,72	31,01	-2,2	31,20	-1,6
50,81	51,49	1,3	51,59	1,5
66,94	-	-	66,90	0,0
79,20	-	-	78,21	-1,3
86,84	-	-	-	-

Tabela 40 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com 200 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	4,66	-44,2	7,44	-10,9
23,65	7,74	-67,3	21,48	-9,2
38,21	23,31	-39,0	19,58	-48,8
50,25	-	-	49,39	-1,7
59,45	-	-	13,30	-77,6
65,31	-	-	-	-

4.2.1.2 ASSINATURA COM MAIOR QUANTIDADE DE MÉDIAS

A segunda análise de excitação aleatória feita utiliza, novamente, como ponto de início de médias apenas aqueles entre 80% e 100% da maior amplitude do sinal do primeiro canal y_1 , que corresponde ao deslocamento da massa $\bar{m}_1$. Porém, o comprimento dos trechos para média, e também da assinatura RandomDec, dessa análise possui menor quantidade de dados, 50 pontos, e, assim, um número de trechos utilizados maior, $\varepsilon = 8$ trechos. Como sinal de referência, foi escolhida a primeira saída do sistema y_1 , correspondente ao deslocamento da massa $\bar{m}_1$. A assinatura RandomDec de auto-correlação pode ser vista na Figura 14. As demais saídas do sistema foram utilizadas para correlação cruzada, e suas assinaturas RandomDec podem ser vistas na Figura 15.

Figura 14 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com 50 pontos e amplitude superior a 80%

Figura 15 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

A Tabela 41 mostra o resultado de todas as análises realizadas. No estudo apresentado nesta seção, havia $\varepsilon = 8$ trechos de médias para obtenção do sinal proporcional ao decaimento livre; logo, a resposta a uma excitação particular no sistema deveria se anular satisfatoriamente e os ruídos na assinatura teriam menor amplitude. Novamente, o método ITDM identificou adequadamente mais modos, como visto nos estudos de análise modal de sinais com ruídos de 10% e 50%, nas seções 4.1.3 e 4.1.4.

Tabela 41 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
	SIMO	SISO	MIMO	SISO
	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,04 \pm 10,72i$	$-0,07 \pm 10,70i$	$-0,05 \pm 10,76i$	$-0,03 \pm 10,74i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,81 \pm 30,74i$	-	$-0,86 \pm 30,73i$	$-0,07 \pm 30,71i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-0,34 \pm 49,96i$	$-2,01 \pm 50,30i$	$-0,22 \pm 49,73i$	$-0,40 \pm 50,38i$
$-3,36 \pm 66,86i$	$-0,75 \pm 66,01i$	$-1,99 \pm 67,02$	-	$-0,08 \pm 66,15i$
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-2,13 \pm 83,48i$	-	-	$-1,02 \pm 84,47i$

No método de Ibrahim para sistema SIMO foram impostos $n = 11$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 5$, para sistema SISO foram impostos $n = 3$ graus de liberdade computacionais com mesmas defasagens. As Tabelas 42 a 44 mostram os resultados do método.

Tabela 42 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,04 \pm 10,72i$	100	$-0,07 \pm 10,70i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,81 \pm 30,74i$	99	-	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-0,34 \pm 49,96i$	100	$-2,01 \pm 50,30i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-0,75 \pm 66,01i$	91	$-1,99 \pm 67,02$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	$-2,13 \pm 83,48i$	98	-	-

Neste caso, o sinal mostrou-se menos ruidoso para o método de ITDM aplicado a sistema SIMO em comparação à seção anterior (que tinha menor quantidade de trechos para a realização da média RandomDec), permitindo a identificação de cinco modos com MCF superior a 90%, isto é, com grande confiabilidade. O pequeno comprimento da assinatura RandomDec (50 pontos), entretanto, impossibilitou menores erros de estimação, uma vez que não mais que $n = 11$ graus de liberdade

computacionais puderam ser impostos ao sistema (recapitula-se que menores valores de n acarretam em modos identificados com maiores erros, e maiores valores de n podem aumentar a acuidade da identificação). Além disso, a defasagem N_3 precisou ser alterada para melhor cálculo dos modos e maiores MCF. Os fatores de amortecimentos identificados tiveram erros entre 10% e 83%.

Indo na direção oposta do ITDM-SIMO, os resultados para o sistema SISO levam a concluir que essa é a pior alternativa para análise de assinaturas com menor comprimento, visto que houve identificação de apenas 3 modos, os quais nem podem ser confirmados pelo MCF.

Tabela 43 – Frequências naturais identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,72	-0,6	10,70	-0,7
31,72	30,75	-3,1	-	-
50,81	49,96	-1,7	50,34	-0,9
66,94	66,01	-1,4	67,05	0,2
79,20	-	-	-	-
86,84	83,51	-3,8	-	-

Tabela 44 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	3,73	-55,3	6,54	-21,7
23,65	26,35	11,4	-	-
38,21	6,81	-82,2	39,96	4,6
50,25	11,36	-77,4	29,69	-40,9
59,45	-	-	-	-
65,31	25,52	-60,9	-	-

Na identificação do sistema MIMO com ERA, foram impostos $n = 10$ graus de liberdade computacionais, novamente por haver grande amplitude de ruídos nas assinaturas RandomDec de correlação cruzada. Na identificação do sistema SISO, foram impostos $n = 30$ graus de liberdade computacionais. Os resultados são vistos nas Tabelas 45 a 47. A pequena quantidade de graus de liberdade do sistema MIMO levou à identificação dos quatro primeiros modos do sistema, um deles com MAC_{ERA} inferior a 50% e então desconsiderado. O sistema SISO possibilitou a identificação de cinco modos com erros inferiores a 3,5%, relativos às frequências do cálculo analítico, e com correlações MAC_{ERA} muito superiores a 50%. Observa-se, contudo, que os fatores de amortecimento identificados têm erros entre 18% e 98%, com relação aos fatores obtidos da matriz de dinâmica A , de forma semelhante aos casos com ruídos de 10% e 50% estudados nas seções 4.1.3 e 4.1.4.

Tabela 45 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC_{ERA}	Polo	MAC_{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,05 \pm 10,76i$	100	$-0,03 \pm 10,74i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,86 \pm 30,73i$	78	$-0,07 \pm 30,71i$	91
$-1,94 \pm 50,77i$	$-0,22 \pm 49,73i$	92	$-0,40 \pm 50,38i$	95
$-3,36 \pm 66,86i$	$-4,63 \pm 64,71i$	44	$-0,08 \pm 66,15i$	93
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	-	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	$-1,02 \pm 84,47i$	89

Tabela 46 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,76	-0,2	10,74	-0,4
31,72	30,74	-3,1	30,71	-3,2
50,81	49,73	-2,1	50,38	-0,8
66,94	64,86	-3,1	66,15	-1,2
79,20	-	-	-	-
86,84	-	-	84,48	-2,7

Tabela 47 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com 50 pontos e amplitude superior a 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	4,65	-44,3	2,79	-66,6
23,65	28,00	18,4	2,28	-90,4
38,21	4,02	-89,5	7,94	-79,2
50,25	71,55	42,4	1,21	-97,6
59,45	-	-	-	-
65,31	-	-	12,08	-81,5

4.2.2 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ACIMA DE 60%

A utilização de trechos com amplitude inicial superior a 80% do sinal de referência resultou em inadequada anulação da resposta particular oriunda de uma excitação aleatória e, conseqüentemente, menor similaridade com um decaimento livre. A diminuição do comprimento da assinatura RandomDec (caso apresentado na seção 4.2.1.2) comprometeu a acuidade da identificação pelo método ITDM. Para aumento

do número de trechos utilizados, sem redução significativa do comprimento da assinatura, foi estudada a utilização de trechos com amplitude inicial entre 60% e 100% em relação à amplitude máxima do sinal de referência. Sendo essa faixa mais ampla, o início de cada trecho terá amplitude significativamente discrepante e acarretará em grande desvio na análise estatística da técnica, o que é um efeito indesejado, justificando a análise apresentada nesta seção.

A Figura 16 mostra a assinatura RandomDec de auto-correlação D_{11} com comprimento de 100 amostras, possibilitando a tomada de $\varepsilon = 36$ trechos. As demais saídas do sistema (y_2 , y_3 , y_4 e y_5) foram utilizadas para correlação cruzada, e suas assinaturas RandomDec podem ser vistas na Figura 17.

Figura 16 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Figura 17 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com amplitude superior a 60% do sinal de referência

A Tabela 48 mostra o resultado de todas as análises realizadas. No estudo apresentado nesta seção, havia $\varepsilon = 36$ trechos de médias para obtenção do sinal de decaimento livre, e assim a resposta particular do sistema deveria se anular mais satisfatoriamente com relação àquela de início de trechos superior a 80% da máxima amplitude. Ambos os métodos para sistema de múltiplas saídas (SIMO e MIMO) identificaram quatro modos.

Tabela 48 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
	SIMO	SISO	MIMO	SISO
	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,08 \pm 10,75i$	$-0,07 \pm 10,75i$	$-0,08 \pm 10,75i$	$-0,01 \pm 10,74i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-1,07 \pm 31,71i$	$-0,60 \pm 31,19i$	$-0,46 \pm 31,50i$	$-0,72 \pm 30,40i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,42 \pm 51,12i$	$-1,13 \pm 51,11i$	$-1,04 \pm 50,80i$	$-1,58 \pm 51,64i$
$-3,36 \pm 66,86i$	$-5,43 \pm 68,19i$	$-1,93 \pm 68,79$	$-0,70 \pm 67,11i$	-
$-4,70 \pm 79,06i$		$-1,86 \pm 79,98i$	-	
$-5,66 \pm 86,66i$			-	

No método de Ibrahim para sistema SIMO foram impostos $n = 10$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 5$, e para sistema SISO foram impostos $n = 10$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$. As Tabelas 49 a 51 mostram os resultados do método. Neste caso, a aplicação do método ITDM-SIMO possibilitou a identificação de apenas quatro modos julgados como pertencentes ao sistema, os três primeiros com MCF= 100%.

Tabela 49 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,08 \pm 10,75i$	100	$-0,07 \pm 10,75i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-1,07 \pm 31,71i$	100	$-0,60 \pm 31,19i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,42 \pm 51,12i$	100	$-1,13 \pm 51,11i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-5,43 \pm 68,19i$	88	$-1,93 \pm 68,79$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-7,19 \pm 78,33i$	67	$-1,86 \pm 79,98i$	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	-	-

Tendo em conta os altos MCF mostrados na Tabela 49 e os baixos erros das frequências identificadas no caso SIMO mostrados na Tabela 50, conclui-se que a quantidade de trechos para média e a sua extensão possibilitam a correta estimação da resposta livre do sistema devido a um deslocamento inicial, isto é, possibilitam a anulação efetiva da resposta particular do sistema às excitações aleatórias e da resposta homogênea oriunda da velocidade. No entanto, os erros entre 10% e 61% dos fatores de amortecimento indicam que a grande faixa de amplitude inicial causa não-linearidades nas assinaturas RandomDec.

Tabela 50 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,75	-0,3	10,75	-0,3
31,72	31,73	0,0	31,20	-1,6
50,81	51,14	0,6	51,12	0,6
66,94	68,41	2,2	68,82	2,8
79,20	78,66	-0,7	80,00	1,0
86,84	-	-	-	-

Tabela 51 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	7,44	-10,9	6,51	-22,0
23,65	33,74	42,7	19,24	-18,6
38,21	27,78	-27,3	22,11	-42,1
50,25	79,63	58,5	28,06	-44,2
59,45	91,79	54,4	23,26	-60,9
65,31	-	-	-	-

Na identificação de ambos os sistemas MIMO e SISO com ERA, foram impostos $n = 9$ graus de liberdade computacionais. A pequena quantidade de graus de liberdade procurados e a identificação de poucos modos do sistema, como podem ser vistas nas Tabelas 52 a 54, mostram que a validade do procedimento estatístico que caracteriza a técnica do incremento aleatório não se confirmou, pois há presença de ruído ou não-linearidades na assinatura (de modo semelhante à identificação do sistema com muito ruído da seção 4.1.4). Observa-se, novamente, que os fatores de amortecimentos identificados são significativamente discrepantes com relação aos obtidos por cálculo analítico.

Tabela 52 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC _{ERA}	Polo	MAC _{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,08 \pm 10,75i$	100	$-0,01 \pm 10,74i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,46 \pm 31,50i$	96	$-0,72 \pm 30,40i$	96
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,04 \pm 50,80i$	82	$-1,58 \pm 51,64i$	68
$-3,36 \pm 66,86i$	$-0,70 \pm 67,11i$	54	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	-	-	$-5,12 \pm 77,92i$	36
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	-	-

Tabela 53 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,75	-0,3	10,74	-0,4
31,72	31,50	-0,7	30,41	-4,1
50,81	50,81	0,0	51,66	1,7
66,94	67,11	0,3	-	-
79,20	-	-	78,09	-1,4
86,84	-	-	-	-

Tabela 54 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude superior a 60% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	7,44	-10,9	0,93	-88,9
23,65	14,60	-38,3	23,68	0,1
38,21	20,47	-46,4	30,60	-19,9
50,25	10,43	-79,2	-	-
59,45	-	-	65,71	10,5
65,31	-	-	-	-

4.2.3 EXCITAÇÃO ALEATÓRIA COM PICOS ENTRE 60% E 80%

Finalmente, foi estudada a utilização de trechos com amplitude inicial entre 60% e 80% do maior deslocamento da massa de referência, $\bar{m}_1$. É esperado que o estreitamento da faixa de amplitude inicial acarrete em menores não-linearidades dos modos na assinatura e que essas menores amplitudes possibilitem o uso de maior quantidade de trechos. O comprimento da assinatura RandomDec de 100 pontos leva à média, novamente, de $\varepsilon = 36$ trechos. A assinatura RandomDec de auto-correlação D_{11} é vista na Figura 18 e as de correlação cruzada (D_{21} , D_{31} , D_{41} e D_{51}), na Figura 19.

Figura 18 – Assinatura RandomDec de auto-correlação com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Figura 19 – Assinaturas RandomDec de correlação cruzada com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

A Tabela 55 mostra o resultado de todas as análises realizadas. O método de Ibrahim foi capaz de identificar a grande maioria dos modos do sistema. O mesmo não pode ser dito acerca do método ERA, o qual foi capaz de identificar apenas quatro dos modos.

Tabela 55 – Polos identificados pelas análises modais da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	MIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,07 \pm 10,76i$	$-0,07 \pm 10,76i$	$-0,08 \pm 10,75i$	$-0,07 \pm 10,75i$
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,95 \pm 31,52i$	$-0,73 \pm 31,52i$	$-0,42 \pm 31,53i$	$-0,62 \pm 31,24i$
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,23 \pm 51,19i$	$-0,68 \pm 51,50i$	$-1,13 \pm 51,28i$	$-1,01 \pm 51,51i$
$-3,36 \pm 66,86i$	$-4,96 \pm 67,96i$	$-1,59 \pm 68,26$	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,32 \pm 81,26i$	$-2,42 \pm 78,07i$	$-1,54 \pm 77,22i$	$-2,74 \pm 80,08i$
$-5,66 \pm 86,66i$	-	$-2,89 \pm 86,39i$	-	-

No método de Ibrahim para sistema SIMO foram impostos $n = 12$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 5$; o aumento da defasagem N_3 permitiu uma identificação com maiores MCF. Para sistema SISO foram impostos $n = 12$ graus de liberdade computacionais com defasagens $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$. As Tabelas 56 a 58 detalham os resultados do método.

Tabela 56 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Polo	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,07 \pm 10,76i$	100	$-0,07 \pm 10,76i$	-
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,95 \pm 31,52i$	100	$-0,73 \pm 31,52i$	-
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,23 \pm 51,19i$	100	$-0,68 \pm 51,50i$	-
$-3,36 \pm 66,86i$	$-4,96 \pm 67,96i$	93	$-1,59 \pm 68,26$	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-4,32 \pm 81,26i$	87	$-2,42 \pm 78,07i$	-
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	$-2,89 \pm 86,39i$	-

Tal como no caso anterior, foi preciso utilizar poucos graus de liberdade computacionais para identificação dos sistemas SIMO e SISO. Isso ocorreu pois o pequeno comprimento dos trechos (reduzido para maior quantidade de médias e melhor anulação dos ruídos oriundos da resposta particular) limitou a quantidade de linhas possíveis na matriz Φ . Contudo, o estreitamento da faixa de amplitude acarretou em maior número de trechos de média para a obtenção de assinaturas com características similares a um decaimento livre do sistema linear sem ruídos, levando à identificação de mais modos. As frequências naturais identificadas têm erros inferiores a 3% com relação às calculadas a partir da matriz de dinâmica A , como pode ser visto na Tabela 57.

Tabela 57 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,76	-0,2	10,76	-0,2
31,72	31,53	-0,6	31,53	-0,6
50,81	51,20	0,8	51,50	1,4
66,94	68,14	1,8	68,28	2,0
79,20	81,37	2,7	78,11	-1,4
86,84	-	-	86,44	-0,5

A Tabela 58 mostra os fatores de amortecimento identificados pelo ITDM. É possível observar que, mesmo com menor faixa de amplitudes iniciais, os fatores têm erros de até 65,5% com relação aos obtidos pelo modelo analítico. Pode-se concluir que as não-linearidades e ruídos ainda estão presentes neste caso de estreitamento da faixa de amplitudes iniciais.

Tabela 58 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ITDM			
	SIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	6,51	-22,0	6,51	-22,0
23,65	30,14	27,4	23,16	-2,1
38,21	24,03	-37,1	13,20	-65,5
50,25	72,98	45,2	23,29	-53,7
59,45	53,16	-10,6	31,00	-47,9
65,31	-	-	33,45	-48,8

Na identificação de ambos os sistemas MIMO e SISO com ERA, foram impostos $n = 9$ graus de liberdade computacionais. Os resultados são vistos nas Tabelas 59 a 61. A pequena quantidade de graus de liberdade procurados e identificação de poucos modos do sistema (semelhante ao caso da seção 4.1.3 e 4.1.4) mostram que ainda há presença de ruído de grande amplitude ou não-linearidades na assinatura, problemas que o método ERA tem maior dificuldade em eliminar, comparativamente ao ITDM.

Tabela 59 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Polo	Polo	MAC _{ERA}	Polo	MAC _{ERA}
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
$-0,09 \pm 10,78i$	$-0,08 \pm 10,75i$	100	$-0,07 \pm 10,75i$	100
$-0,75 \pm 31,71i$	$-0,42 \pm 31,53i$	96	$-0,62 \pm 31,24i$	97
$-1,94 \pm 50,77i$	$-1,13 \pm 51,28i$	75	$-1,01 \pm 51,51i$	82
$-3,36 \pm 66,86i$	-	-	-	-
$-4,70 \pm 79,06i$	$-1,54 \pm 77,22i$	69	$-2,74 \pm 80,08i$	51
$-5,66 \pm 86,66i$	-	-	-	-

Assim como analisado pelo ITDM, o estreitamento da faixa de amplitudes iniciais acarretou em maior proporcionalidade entre as assinaturas e o decaimento livre do sistema (submetido a deslocamentos iniciais de suas massas, com velocidade nula) e permitiu a identificação de frequências naturais com erros inferiores a 2,5%. Contudo, os ruídos residuais e não-linearidades formadas durante o cálculo das correlações dificultam a correta estimação dos fatores de amortecimentos, cujos erros são de até 66,5% com relação aos obtidos dos autovalores da matriz de dinâmica A no espaço de estados.

Tabela 60 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ERA da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Frequência	Frequência	Erro	Frequência	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
10,78	10,75	-0,3	10,75	-0,3
31,72	31,53	-0,6	31,25	-1,5
50,81	51,29	0,9	51,52	1,4
66,94	-	-	-	-
79,20	77,24	-2,5	80,13	1,2
86,84	-	-	-	-

Tabela 61 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec com amplitude entre 60% e 80% do sinal de referência

Cálculo analítico	ERA			
	MIMO		SISO	
Fator de amortecimento	Fator de amortecimento	Erro	Fator de amortecimento	Erro
10^{-3}	10^{-3}	%	10^{-3}	%
8,35	7,44	-10,9	6,51	-22,0
23,65	13,32	-43,7	19,85	-16,1
38,21	22,04	-42,4	19,61	-48,7
50,25	-	-	-	-
59,45	19,94	-66,5	34,22	-42,4
65,31	-	-	-	-

As análises modais desse sistema hipotético com excitação aleatória indicam, de maneira geral, que: (i) a aplicação da técnica RandomDec conseguiu criar um sinal proporcional ao decaimento livre do sistema mesmo com pequena quantidade de trechos de média; na seção 4.2.1.1, a média de apenas 3 trechos permitiu que o ITDM identificasse 5 modos com alta acuidade das frequências naturais; (ii) a quantidade de trechos para média se relaciona diretamente com a anulação dos ruídos da assinatura RandomDec, oriundos da resposta particular; o aumento de trecho entre as seções 4.2.1.1 e 4.2.1.2 acarretou na identificação de mais modos pelo ERA, de maneira semelhante à redução de ruídos de 10% para 2% nas seções 4.1.2 e 4.1.3; (iii) a faixa de amplitude inicial tem relação inversa com a existência de ruídos e não-linearidades dos modos na assinatura, isto é, quanto menor a faixa mais lineares serão os modos; isso pode ser inferido pela maior quantidade de modos identificados pelo ITDM na seção 4.2.3 se comparada com a seção 4.2.2; (iv) a faixa de amplitude inicial não necessita conter os maiores picos do sinal amostrado para a identificação do sistema, visto que sua delimitação entre 60% e 80% na seção 4.2.3 possibilitou a utilização de mais trechos nas correlações e a identificação de mais modos de vibrar, se comparado com a delimitação entre 80% e 100% na seção 4.2.1.2; (v) o ITDM, nos casos estudados, é o método mais indicado para a análise modal da assinatura RandomDec, devido a sua melhor identificação de sinais com ruídos; e (vi) mesmo com utilização de mais trechos na técnica do decremento aleatório e com faixa mais estreita de amplitudes iniciais, os métodos ITDM e ERA identificaram fatores de amortecimento com baixa acuidade, permitindo inferir que o RandomDec não tem sua análise estatística corroborada na prática ou que é necessária uma maior quantidade de trechos para melhor utilização da técnica.

5. ANÁLISE DA CHAMA

Foi realizado no Laboratório de Combustão do IPT um conjunto de experimentos nos quais se efetuou a queima de óleo cru em um forno de modo a promover a transição de suas chamas de estáveis a instáveis, até sua extinção, alternando-se parâmetros operacionais, conforme descrito por Fleury, Trigo e Martins (2013). As séries de imagens obtidas dessas chamas, em seus vários níveis de instabilidade, foram utilizadas na construção de 13 vetores de características luminosas por Silva *et al.* (2015) para a estimação de um modelo dinâmico de segunda ordem que permitisse a previsão de iminência de extinção da chama. Devido à pequena série de imagens retratando a evolução temporal da combustão, Silva *et al.* (2015) reuniu todas as propriedades em um único vetor para ser utilizado na obtenção da assinatura RandomDec, e, em seguida, na análise modal pelo método ITDM. A utilização de um único vetor com grande número de dados permite que a assinatura RandomDec obtida seja composta de uma média com maior quantidade de trechos e, portanto, maior proporcionalidade com o decaimento livre do sistema. Entretanto, a partir de um único vetor, somente é possível modelar um sistema SISO. Além disso, a correlação apresentada no mesmo artigo foi com referência aos picos do espectro de potência, correlação essa cuja validade pode ser questionada, visto que, segundo He e Fu (2001), análises no domínio da frequência podem ser prejudicadas por curtas evoluções temporais. O estudo apresentado nesta monografia consiste então em três verificações: a validação dos modos de vibrar identificados sem a necessidade de análise no domínio da frequência; comparação entre modelagem de sistemas SISO e SIMO; comparação entre o método utilizado por Silva *et al.* (2015) e o ERA. Salienta-se que, no último caso, o autor não tem conhecimento de outro registro na literatura até o momento da finalização deste texto.

5.1 EXPERIMENTO

O experimento realizado teve como objetivo simular um forno de refino em pequena escala. Para tanto, foi utilizado um forno protótipo vertical com quatro metros de altura, cuja foto da parte inferior e esquema do queimador são mostrados na Figura 20. O controle de combustão é feito pela abertura de válvulas de ar primário, de ar secundário e de combustível. O aparato de aquisição de imagens é o mesmo

descrito por Fleury, Trigo e Martins (2013), cujo componente de captura é uma câmera CCD de varredura, com frequência de 50 *Hz* entre varreduras.

Figura 20 – Esquema do queimador (retirado de Silva et al. (2015))

Foram coletadas imagens de evoluções temporais de chamas com relação ar primário / ar secundário (*primary/secondary air rate* - PSAR) entre 1 e 4, mostradas na Figura 21. As evoluções temporais possuíam 40 ou 100 quadros no total.

Figura 21 – Imagens das chamas com (a) PSAR = 1,00, (b) PSAR = 1,86 e (c) PSAR = 4,00 (retirado de Silva et al. (2015))

5.2 PROPRIEDADES DE IMAGENS

Devido a continuidade do trabalho apresentado em Silva *et al.* (2015), as mesmas séries e propriedades de imagens foram utilizadas no presente estudo; por isso, a seguir é apresentada apenas uma breve descrição do processamento dos quadros.

A câmera CCD utilizada permite a captura somente da intensidade luminosa incidente, transformando a leitura em uma imagem em escala de cinza onde tons mais claros são relativos à maior radiação e tons mais escuros são relativos à menor radiação (como pode ser observado na Figura 21). É intuitivo, portanto, que a região da chama possa ser isolada pela seleção de um valor limite, que separaria a radiação direta (emitida pela combustão na chama, com maior intensidade) da reflexão da parede (que certamente possui menor intensidade, logo tons de cinza mais escuros). A função matemática que possibilita esse pré-processamento é denominada *Thresholding*: todos os *pixels* da imagem com tons superiores ao pré-determinado são multiplicados por 1, enquanto todos aqueles com tons inferiores a esse limite são multiplicados por 0. A escolha do valor limite para a aplicação da função *Thresholding* pode ser baseada em diversas propriedades estatísticas como, por exemplo, média aritmética dos tons de cinza, média ponderada pela probabilidade de ocorrência dos tons ou outras funções levando-se em conta imagens coloridas. No caso particular da chama capturada por câmera CCD, é lógico concluir que as duas regiões anteriormente destacadas tenham diferentes médias e variâncias de intensidade luminosa. Sendo assim, o método utilizado para determinação do valor do *Thresholding* é o método de Otsu (Otsu, 1979), o qual minimiza a variância das duas classes de tons de cinza (parede e chama). A aplicação dessa segmentação de imagem identificando uma região mais luminosa permite o isolamento da chama e posterior processamento das imagens.

Um dos modos de descrever uma imagem é quanto à sua textura. Segundo Gonzalez e Woods (2002), não há uma definição formal para esse conjunto de características de imagens mas, intuitivamente, elas fornecem medidas de maciez, aspereza e regularidade. Em outras palavras, a textura fornece informações de distribuição espacial e intensidade de tons em uma imagem. Neste estudo, doze propriedades de imagens de chamas parcialmente estáveis (referidas no artigo Silva *et al.*, 2015, por PSAR = 1,86) foram utilizadas. São elas:

- Propriedade 01: Tom de cinza médio da imagem.

- Propriedade 02: Entropia média da imagem, que é calculada por:

$$v_2 = - \sum_{j=0}^{255} p_j \log_2(p_j)$$

onde p_j é a probabilidade de ocorrência do tom de cinza j . A entropia pode ser definida como a distribuição de cada tom de cinza ao longo da imagem, sendo maior quanto mais uniforme for a distribuição.

- Propriedade 03: Valor médio local dos intervalos de tons de cinza, observado na imagem por meio de janelas 3×3 .
- Propriedade 04: Valor médio dos desvios-padrão médios locais da imagem observados em janelas 3×3 .
- Propriedades 5 a 7: Valores de correlação calculados a partir da matriz de co-ocorrência da imagem (Gonzalez e Woods, 2002), ou seja, da matriz 256×256 que apresenta em cada posição (i, j) o número de ocorrências da sequência de dois pixels de tons i e j segundo uma dada direção (horizontal, vertical ou diagonais). Propriedade 05: correlação entre dois tons de cinza i e j referentes a dois pixels vizinhos situados na mesma linha e separados pela distância de 1 tom de cinza; Propriedade 06: idem, para a distância de 3 tons de cinza; Propriedade 07: idem, para a distância de 5 tons de cinza. A correlação referida para as propriedades 5 a 7 é calculada por:

$$v_{5,6,7} = \sum_{i,j} \frac{(i - \mu_i)(j - \mu_j)p_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$

onde $p_{i,j}$ é a probabilidade de ocorrência de dois *pixels* na mesma linha exibirem tons de cinza i e j , μ_i e μ_j são números médios de ocorrência dos tons de cinza i e j respectivamente, e σ_i e σ_j são os desvios padrões da ocorrência dos tons de cinza i e j respectivamente.

- Propriedades 08 a 10: Valores de contraste calculados a partir da matriz de co-ocorrência da imagem. Propriedade 08: diferença quadrática média entre dois pixels situados na mesma linha e separados pela distância de 1 tom de cinza; Propriedade 09: idem, para a distância de 3 tons de cinza; Propriedade 10: idem, para a distância de 5 tons de cinza. O valor de contraste é calculado por:

$$v_{8,9,10} = \sum_{i,j} |i - j|^2 p_{i,j}$$

- Propriedades 11 e 12: Índices de homogeneidade calculados a partir da matriz de co-ocorrência da imagem. Propriedade 11: índice de homogeneidade entre dois pixels situados na mesma linha e separados pela distância de 1 tom de cinza. Propriedade 12: idem, para a distância de 3 tons de cinza. O índice de homogeneidade é calculado por:

$$v_{11,12} = \sum_{i,j} \frac{p_{i,j}}{1 + |i - j|}$$

Essas propriedades para a chama parcialmente estável, com PSAR = 1,86, são mostradas nas Figuras 22 a 33.

Tal conjunto de chamas foi escolhido para análise, porque: (i) no trabalho apresentado por Fleury, Trigo e Martins (2013), somente nas chamas com PSAR 1,00 e 1,86 houve convergência do filtro de Kalman com passeio aleatório, isto é, somente estas duas chamas podem comprovadamente ser simuladas como sistemas lineares; e (ii) a série de dados de evolução temporal da chama com PSAR 1,86 é maior, com 100 quadros, assim havendo maior número de trechos passíveis de utilização na assinatura RandomDec.

Figura 22 – Propriedade 01 das imagens de chama

Figura 23 – Propriedade 02 das imagens de chama

Figura 24 – Propriedade 03 das imagens de chama

Figura 25 – Propriedade 04 das imagens de chama

Figura 26 – Propriedade 05 das imagens de chama

Figura 27 – Propriedade 06 das imagens de chama

Figura 28 – Propriedade 07 das imagens de chama

Figura 29 – Propriedade 08 das imagens de chama

Figura 30 – Propriedade 09 das imagens de chama

Figura 31 – Propriedade 10 das imagens de chama

Figura 32 – Propriedade 11 das imagens de chama

Figura 33 – Propriedade 12 das imagens de chama

5.3 TRATAMENTO DAS PROPRIEDADES

Inicialmente, foram retiradas as tendências lineares das propriedades de chamas, pois podem ser identificadas erroneamente como modos com frequências muito baixas. Ademais, a escolha dos trechos de média na técnica RandomDec requer que o sistema oscile em torno do ponto de equilíbrio e que a média da excitação seja nula, não havendo, portanto, tendência linear na resposta do sistema. Para esse tratamento, foi utilizada a função *detrend* do software Matlab, a qual identifica a linha média do sinal para retirada da tendência.

As diferentes propriedades de imagens possuem diferentes escalas. Pode-se observar, por exemplo, na Figura 22 que a série temporal tem uma variação de

aproximadamente 30 tons de cinza médio enquanto na Figura 33 há uma variação de aproximadamente 0,01 no índice de homogeneidade. Para que todas as propriedades possam ser vetorizadas elas devem ser normalizadas, o que é feito dividindo-se as amplitudes das evoluções temporais de cada propriedade pelo seu respectivo valor máximo.

As novas evoluções temporais de propriedades, sem tendência linear e com amplitude máxima unitária adimensionalizada, não possuem significado para análise nem comparação entre si; contudo, mantêm as características dinâmicas originais de cada uma.

Finalmente, os novos dados foram unidos em 3 vetores de maior dimensão, isso é, as propriedades 1 a 4, 5 a 8, e 9 a 12 foram agrupadas em sequência para a formação dos, aqui denominados, Vetor 1, Vetor 2 e Vetor 3 respectivamente. Tais vetores aumentados são mostrados nas Figuras 34 a 36. Cada um deles contém 400 dados com frequência de amostragem a 50 Hz. Ressalta-se, novamente, que os vetores aumentados não possuem significado para análise ou comparação entre si.

Figura 34 – Propriedade 1 a 4 vetorizadas

Figura 35 – Propriedade 5 a 8 vetorizadas

Figura 36 – Propriedade 9 a 12 vetorizadas

5.4 ASSINATURA RANDOMDEC

Os três vetores aumentados foram utilizados para a aplicação da técnica RandomDec. O Vetor 1 foi escolhido para a assinatura RandomDec de auto-correlação (denominada Assinatura 1) e os demais forneceram assinaturas RandomDec de correlação cruzada com relação àquele primeiro (denominadas Assinaturas 2 e 3 respectivamente). Sendo assim, a Assinatura 1 deverá ser proporcional a um decaimento livre e será utilizada na modelagem de sistemas SISO. As Assinaturas 2 e 3 permitirão a modelagem do sistema SIMO.

Os trechos do Vetor 1 escolhidos para a média possuíam amplitude inicial entre 20% e 40% da maior amplitude e comprimento total de 40 dados. Tais parâmetros possibilitaram a tomada de $\varepsilon = 28$ trechos. A assinatura decorrente desses dados é mostrada na Figura 37. Nas Figuras 38 e 39 são mostradas as assinaturas RandomDec de correlação cruzada dos Vetores 2 e 3.

Figura 37 – Assinatura RandomDec de auto-correlação do vetor 1

Figura 38 – Assinatura RandomDec de correlação cruzada do vetor 2 com o vetor 1

Figura 39 – Assinatura RandomDec de correlação cruzada do vetor 3 com o vetor 1

5.5 ANÁLISES MODAIS

Primeiramente, foi realizada uma análise modal simples no domínio da frequência: a identificação dos picos do espectro de potência da Assinatura 1 (assinatura RandomDec de auto-correlação). Essa análise permite apenas um vislumbre dos modos a serem identificados ou das faixas de frequência com maior potência. Visto que a assinatura tem 50 amostras por segundo e 40 dados em sua extensão, a resolução em frequência da FFT é de $1,25 \text{ Hz}$ ($7,85 \text{ rad/s}$). Foi aplicada uma janela retangular com 40 pontos de comprimento (outras janelas também foram utilizadas, porém não houve significativa mudança do espectro de potência, provavelmente devido à baixa resolução em frequência). A Figura 40 mostra o módulo da FFT da Assinatura 1.

Figura 40 – Espectro de potência da assinatura RandomDec de auto-correlação

Para melhor visualização, foi adicionado um colchão de zeros à Assinatura 1, resultando no total de 2^{10} dados (a quantidade de zeros foi gradativamente aumentada com base na potência de 2 até se obter uma curva visualmente contínua; esse procedimento de escolha de comprimento do colchão de zeros é provindo de experiências do autor desta monografia utilizando outros métodos de análise modal no domínio da frequência), ou seja, uma resolução visual em frequência de $0,31 \text{ rad/s}$ ($0,049 \text{ Hz}$). O espectro de potência do sinal com adição de zeros é mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Espectro de potência da assinatura RandomDec de auto-correlação, com resolução em frequência visual aumentada

É possível observar que, em oposição aos picos espaçados e mais estreitos do modelo simples apresentados na Figura 6 (página 51), os picos correspondentes à assinatura RandomDec das propriedades de imagens de chamadas aparecem próximos e com baixa potência, sendo difícil a diferenciação entre os modos do sistema e os modos oriundos de ruídos. Os oito picos com amplitude superior a 0,5 estão relacionados na primeira coluna da Tabela 62.

Posteriormente, foram realizadas as análises modais no domínio do tempo das três assinaturas RandomDec. As frequências naturais amortecidas identificadas podem ser vistas na Tabela 62. Observa-se que apenas alguns modos foram identificados por todas as análises, equivalentes aos picos da FFT em: $16,5 \text{ rad/s}$, $34,5 \text{ rad/s}$ e $60,3 \text{ rad/s}$. Os ITDM e ERA para sistema SIMO também puderam identificar uma frequência entre $80,0$ e $90,0 \text{ rad/s}$. Outros modos foram esparsamente identificados.

Tabela 62 – Frequências naturais amortecidas identificadas pelas análises modais da assinatura RandomDec das imagens de chama

Picos da FFT	ITDM		ERA	
-	SIMO	SISO	SIMO	SISO
rad/s	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
7,4	-	-	7,7	-
16,5	14,0	15,3	16,1	14,4
24,0	27,7	-	-	-
34,5	33,3	35,7	35,7	33,4
60,3	61,3	62,2	61,5	64,6
67,9	-	-	-	-
78,2	-	-	-	-
-	87,4	84,2	82,5	-
-	131,4	-	-	-
141,5	-	-	-	-
-	-	-	-	150,3

A Tabela 63 mostra as modelagens realizadas pelo método de Ibrahim. Para a identificação com o ITDM de um sistema SISO, foram impostos os parâmetros $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$ com $n = 8$ graus de liberdade computacionais. Uma vez que o MCF não se aplica a este caso, foram consideradas corretas somente as frequências naturais próximas às dos modos identificados por outros métodos. Essa validação é imprecisa e, portanto, o método deve ser considerado inadequado para a modelagem de imagens de chamadas no caso SISO.

Para identificação com o ITDM de um sistema SIMO, foram impostos os parâmetros $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ e $N_3 = 3$ com $n = 12$ graus de liberdade computacionais. Dessas, apenas 6 possuíam $MCF > 95\%$, isto é, apenas 6 podem ser classificados prontamente como modos do sistema. Nota-se que as duas menores frequências naturais do sistema modelado possuem parte real positiva, em oposição às demais frequências identificadas pelo mesmo método e às identificadas pelo ERA, como será visto mais adiante. Em artigos, o criador do método ITDM discute os problemas de identificação correta dos amortecimentos, levando a concluir que o método em sua formulação original pode conter erros de modelagem até mesmo quanto à parte real dos polos identificados.

Tabela 63 – Polos identificados por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama

Picos da FFT	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Polo	MCF	Polo	MCF
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
16,5	$1,7 \pm 13,9i$	98	$-1,0 \pm 15,3i$	-
24,0	$3,7 \pm 27,4i$	95	-	-
34,5	$-2,0 \pm 33,3i$	100	$0,9 \pm 35,7i$	-
60,3	$-4,5 \pm 61,1i$	100	$-1,6 \pm 62,2i$	-
-	$-4,4 \pm 87,3i$	97	$-8,1 \pm 83,8i$	-
-	$-6,3 \pm 131,3i$	99	-	-

A Tabela 64 mostra o erro relativo entre as frequências identificadas pela análise dos picos e pelo ITDM, com relação ao primeiro. Pode-se observar que os modos identificados pelo método de Ibrahim para um sistema SIMO possuem discrepâncias, de até 15,4%, ao passo que para um sistema SISO a correlação é maior. Contudo, como afirmado anteriormente, a comparação com base nos picos de ressonância é pobre para o atual estudo, em que as evoluções temporais são curtas e não fornecem boa resolução em frequência.

Tabela 64 – Frequências naturais amortecidas identificadas por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama

Picos da FFT	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
16,5	14,0	-15,2	15,3	-7,3
24,0	27,7	15,4	-	-
34,5	33,3	-3,5	35,7	3,5
60,3	61,3	1,7	62,2	3,2
-	87,4	-	84,2	-
-	131,5	-	-	-

Uma vez que as duas menores frequências do ITDM-SIMO possuem parte real positiva, isto é, a amplitude de vibração referente a esses modos aumenta com o tempo, os fatores calculados não corresponderiam a um amortecimento, mas a uma amplificação. A Tabela 65 mostra, portanto, somente os fatores de amortecimento identificados pelo ITDM aplicado nos sistemas SISO e SIMO, correspondentes a frequências com parte real negativa. Tais fatores estão na faixa de $2,5 \times 10^{-2}$ a $48,0 \times 10^{-2}$.

Tabela 65 – Fatores de amortecimento identificados por ITDM da assinatura RandomDec das imagens de chama

Picos da FFT	ITDM			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Fator de amortecimento	Frequência natural	Fator de amortecimento
rad/s	rad/s	10^{-2}	rad/s	10^{-2}
16,5	14,0	**	15,3	6,5
24,0	27,7	**	-	-
34,5	33,3	6,0	35,7	2,5
60,3	61,3	7,4	62,2	2,6
-	87,4	5,0	84,2	9,7
-	131,5	48,0	-	-

A Tabela 66 mostra as modelagens realizadas pelo método ERA. Para a identificação de um sistema SISO, foram impostos $n = 5$ graus de liberdade computacionais, e considerados como pertencentes ao sistema apenas os com MAC_{ERA} superior a 50%. Pode-se observar que a parte real dos polos do sistema têm módulo menor que as do ERA para sistema SIMO, ou seja, os modos do sistema SISO são menos amortecidos, como pode ser visto na Tabela 68. Essa discordância entre fatores de amortecimento já foi observada na seção 5.

Para a identificação do sistema SIMO, foram impostos $n = 6$ graus de liberdade computacionais, e considerados como pertencentes ao sistema apenas os com MAC_{ERA} superior a 50%. Todos os polos identificados pelo método ERA, para sistema SISO e SIMO, possuem parte real negativa.

Tabela 66 – Polos identificados por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama

Cálculo analítico	ERA			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Polo	MAC	Polo	MAC
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
7,4	$-7,3 \pm 2,4i$	82	-	-
16,5	$-3,5 \pm 15,8i$	86	$-0,7 \pm 14,4i$	94
34,5	$-3,3 \pm 35,5i$	95	$-0,5 \pm 33,4i$	93
60,3	$-4,1 \pm 61,4i$	93	$-3,7 \pm 64,4i$	94
-	$-6,8 \pm 82,2i$	80	-	-
-	-	-	$-1,4 \pm 150,3i$	97

A Tabela 67 mostra o erro relativo entre as frequências identificadas pela análise dos picos e pelo ERA, com relação ao primeiro. Pode-se observar que as discrepâncias das frequências são pequenas no sistema SIMO (inferiores a 4,5%). Mesmo que tal comparação seja pobre, o método ERA pode ser considerado melhor quanto à identificação dos modos com maior potência, quando houver pequena quantidade de dados.

Tabela 67 – Frequências naturais identificadas por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama

Cálculo analítico	ERA			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Erro	Frequência natural	Erro
rad/s	rad/s	%	rad/s	%
7,4	7,7	4,1	-	-
16,5	16,1	-2,4	14,4	-12,7
34,5	35,7	3,5	33,4	-3,2
60,3	61,5	2,0	64,6	7,1
-	82,5	-	-	-
-	-	-	150,3	-

A Tabela 68 mostra os fatores de amortecimento identificados pelo método ERA. Nota-se que o primeiro modo identificado possui amortecimento muito maior que os demais, os quais estão entre $0,9 \times 10^{-2}$ e $22,2 \times 10^{-2}$. Essa faixa condiz com a do ITDM (Tabela 65).

Tabela 68 – Fatores de amortecimento identificados por ERA da assinatura RandomDec das imagens de chama

Picos da FFT	ERA			
	SIMO		SISO	
Frequência natural	Frequência natural	Fator de amortecimento	Frequência natural	Fator de amortecimento
rad/s	rad/s	10^{-2}	rad/s	10^{-2}
7,4	7,7	304,2	-	-
16,5	16,1	22,2	14,4	4,9
34,5	35,7	9,3	33,4	1,5
60,3	61,5	6,7	64,6	5,7
-	82,5	8,3	-	-
-	-	-	150,3	0,9

6. CONCLUSÃO

Ainda que os primeiros estudos sobre a dinâmica de propriedades de imagens de chamadas tenham sido publicados na década de 90, pequena é a literatura sobre o assunto. Não obstante, a tentativa de modelagem dessa dinâmica com equações diferenciais de segunda ordem, semelhante ao comportamento de um sistema massa-mola-amortecedor viscoso, é pioneira e requer validações mais rigorosas. Fleury, Trigo e Martins (2013) comprovaram através do filtro de Kalman ser possível tal modelagem. Posteriormente, Silva *et al.* (2015) identificaram os modos de vibrar de chamadas com o método de Ibrahim modificado para um sistema SISO. A validação dos modos obtidos com o ITDM, contudo, exigiu uma comparação com outra análise no domínio da frequência, a qual foi prejudicada pela pequena série temporal de dados, com prejuízo à resolução em frequência. Sendo assim, o atual estudo contribuiu para a melhoria da metodologia de análise modal de propriedades de imagens de chamadas.

A primeira metade do estudo foi dedicada a uma análise de sensibilidade dos métodos escolhidos para serem posteriormente utilizados. A implementação do método de Ibrahim modificado utilizando as técnicas matemáticas SVD e mínimos quadrados mostrou-se superior àquela utilizada por Mangold (2003), sendo possível identificar perfeitamente um modelo simples, sem adição de ruído e, também, com adição de ruído de baixa amplitude. Contudo, o método ITDM, mesmo melhorado, não foi capaz de identificar todos os modos de vibração quando o nível de ruído era igual ou maior que 10% da maior amplitude do sistema em oscilação livre.

O método ERA foi implementado para corroborar os valores das frequências obtidas pelo ITDM. Quando aplicado ao modelo simples, a realização foi exata no cenário com pequeno ruído, aceitável com ruído de média intensidade, e ruim com grande ruído. Além disso, os modos identificados no sistema SISO possuíam amortecimentos menores que os verdadeiros, problema esse não encontrado no sistema MIMO.

A técnica do decaimento aleatório também foi avaliada quanto aos parâmetros de entrada. A proporcionalidade da assinatura obtida, com relação ao decaimento livre, é tão maior quanto mais trechos forem utilizados na média. No caso ideal, todos esses trechos deveriam começar com mesma amplitude; na prática, o início deve estar contido em um intervalo, diminuindo a influência das não-linearidades quanto

mais estreito for.

Após todas as análises de sensibilidade dos métodos e técnicas, procedeu-se à análise modal das propriedades de imagens de chamas. Tais sinais, depois de serem tratados de forma idêntica a Silva *et al.* (2015), foram agrupados em três vetores expandidos que possibilitaram a obtenção de três assinaturas RandomDec: uma de auto-correlação e duas de correlação cruzada. Os métodos ITDM e ERA para sistemas SISO e SIMO foram aplicados sobre as assinaturas. Da identificação, pôde-se concluir que: (i) o método ITDM-SISO é o menos indicado, visto que a validação dos modos não é prontamente realizada através do MCF, necessitando uma outra análise para comparação; (ii) o método ERA-SISO identificou modos com amortecimento menor que os métodos ITDM-SIMO e ERA-SIMO, assim como em seu teste de sensibilidade, indicando que há um problema de aplicação do método em sistemas com uma única saída; (iii) o método ERA-SIMO é o mais adequado para a realização das propriedades de imagens com curta evolução temporal, pois apresentou frequências próximas àsquelas dos picos de potência e amortecimentos com amplitude semelhante aos outros métodos, de acordo com o comportamento esperado (parte real negativa), e porque a confirmação de cada modo independe da realização de outras análises modais.

Finalmente, a partir das conclusões obtidas neste trabalho, pode-se propor como sugestões de continuação da pesquisa: (i) a obtenção de uma série temporal maior de imagens de chamas e a realização do mesmo procedimento a fim de identificar com maior precisão os modos de vibração do sistema; (ii) com base nas frequências identificadas, procurar correlação com fenômenos físicos envolvidos na combustão, como a formação de vórtices; (iii) utilizar a matriz de transição obtida, em associação com um filtro de Kalman, para validar o modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDINI, G.; CAMPADELLI, P.; LANZAROTTI, R. Combustion analysis by image processing of premixed flames. Proceedings of the 2000 International Conference on Image Processing, 2000.

CHEN, J.; CHANG, Y.H.; CHENG, Y.C.; HSU, C.K. Design of image-based control loops for industrial combustion processes. Applied Energy, v. 94, p. 13-21, 2012.

CHEN, J.; SHU, T.Y.; CHEN, C.C.; CHENG, Y.C. Monitoring combustion systems using HMM probabilistic reasoning in dynamic flame images. Applied Energy, v. 87, p. 2169-2179, 2010.

COLE, H. A. Failure Detection of a Space Shuttle Wing Flutter by Random Decrement. Technical Report NASA TMX-62041, 1971.

COLE, H.A. Online failure detection and damping measurements of aerospace structures by random decrement signature. Technical Report NASA CR-2205, 1973.

FERREIRA NETO, L.S. Um método para análise modal de estruturas submetidas a excitações ambientes. 2005. 113 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

FLEURY, A.T.; TRIGO, F.C.; MARTINS, F.P.R. A new approach based on computer vision and non-linear Kalman filtering to monitor the nebulization quality of oil flames. Expert Systems with Application, v. 40, p. 4760-4769, 2013.

FLEURY, A.T.; TRIGO, F.C.; PACÍFICO, A.L.; MARTINS, F.P.R. An inference model for combustion diagnostics in an experimental oil furnace. Expert Systems, v. 35, 2017.

FUKUMASU, N.K. Análise experimental da influência da frequência de injeção de combustível em chamas pulsadas de spray de etanol. 2014. 127 p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

GONZALEZ, R.C.; WOODS, R.E. Digital image processing. 2^a ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 2002. 793 p.

GONZÁLEZ-CENCERRADO, A.; PEÑA, B.; GIL, A. Coal flame characterization by means of digital image processing in a semi-industrial scale PF swirl burner. Applied Energy, v. 94, p. 375-384, 2012.

HALVORSEN, W.G.; BROWN, D.L. Impulse technique for structure frequency response testing. Sound and Vibration, p. 8-21, 1977.

HE, J.; FU, Z.F. Modal analysis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 291 p.

HO, B.L.; KALMAN, R.E. Effective construction of linear state-variable models from input/output data. Proceedings of the 3^o Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, p. 449-459, 1965.

IBRAHIM, S.R.; GOGLIA, G.L. Modal identification of structures from the response and random decrement signatures. Norfolk: Old Dominion University, 1977. (Final Report NASA-CR-155321)

IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. A time domain modal vibration test technique. The Shock and Vibration Bulletin, v. 43, n. 4, p. 21-38, 1973.

IBRAHIM, S.R.; MIKULCIK, E.C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response. The Shock and Vibration Bulletin, v. 47, n. 4, p. 183-198, 1977.

IINO, N.; TSUCHINO, F.; TORII, S.; YANO, T. Timewise variation of turbulent jet diffusion flame shape by means of image processing. Journal of Flow Visualization and Image Processing, v. 5, p. 275-281, 1998.

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. Statistics. Disponível em: <
<http://www.iea.org/statistics/?country=WORLD&year=2015&category=Coal&indicator=TPEsbySource&mode=chart&categoryBrowse=false>>. Acesso em: 02 de julho de 2018.

JUANG, J.N.; PAPPA, R.S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620-627, 1985a.

JUANG, J.N.; PAPPA, R.S. An eigensystem realization algorithm (ERA) for modal parameter identification and model reduction. *Proceedings of the Workshop on Identification and Control of Flexible Space Structures*, v. 3, p. 299-318, 1985b.

KATZER, C.; BABUL, K.; KLATT, M.; KAUTZ, H.-J. Quantitative and qualitative relationship between swirl burner operating conditions and pulverized coal flame length. *Fuel Processing Technology*, v. 156, p. 138-155, 2017.

LU, G.; YAN, Y.; COLECHIN, M. A digital imaging based multifunctional flame monitoring system. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 53, p. 1152-1158, 2004.

MANGOLD, W. Comparação de excitação impulsiva e excitação aleatória no método de Ibrahim (ITD – “Ibrahim Time Domain”). 2003. 112 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE DO BRASIL. Acordo de Paris. Disponível em: <
<http://www.mma.gov.br/clima/convencao-das-nacoes-unidas/acordo-de-paris>>. Acesso em: 02 de julho de 2018.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 5ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 808 p.

OTSU, N. A thresholding selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 9, n.1, p 62-66, 1979.

PAPPA, R.S.; IBRAHIM, S.R. A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm. The Shock and Vibration Bulletin, v. 51, n. 3, p. 43-72, 1981.

PAPPA, R.S.; JUANG, J.N. Galileo spacecraft modal identification using an Eigensystem Realization Algorithm. AIAA Paper n. 84-1070. 1984

RONQUILLO-LOMELI, G.; ROMERO, C.E.; YAO, Z.; SI, F.; CORIA-SILVA, R.; HERNANDEZ-ROSALES, F.; SANCHEZ-GAYTAN, J.L.; TREJO-MORALES, A. On-line flame signal time series analysis for oil-fired burner optimization. Fuel, v. 158, p. 416-423, 2015.

SANTOS-VICTO, J.A.; COSTEIRA, J.P.; TOMÉ, J.A.B.; SENTIEIRO, J.J.S. A computer vision system for the characterization and classification of flames in glass furnace. IEEE Transactions on Industry Applications, v. 29, n. 3, p. 470-478, 1993.

SMART, J.; LU, G.; YAN, Y.; RILEY, G. Characterisation of an oxy-coal flame through digital imaging. Combustion and Flame, v. 157, p. 1132-1139, 2010.

SOEIRO, N.S. Análise modal experimental. Apostila do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica. Belém: Universidade Federal do Pará, 2001. 61 p.

SILVA, R.P.; FLEURY, A.T.; MARTINS, F.P.R.; PONGE-FERREIRA, W.J.A.; TRIGO, F.C. Identification of the state-space dynamics of oil through computer vision and modal techniques. Expert Systems with Application, v. 42, p. 2421-2428, 2015.

WIKIPEDIA. Acordo de Paris. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Acordo_de_Paris_\(2015\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Acordo_de_Paris_(2015))>. Acesso em: 02 de julho de 2018.

XU, L.; YAN, Y.; CORNWELL, S.; RILEY, G. On-line fuel identification using digital signal processing and fuzzy inference techniques. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, v. 53, p. 1316-1320, 2004.

XU, L.; YAN, Y.; CORNWELL, S.; RILEY, G. Online fuel tracking by combining principal component analysis and neural network techniques. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 54, p. 1640-1645, 2005.

YANG, J.C.S.; DAGALAKIS, N.G.; HIRT, M. Application of the Random Decrement Technique in the detection of induced cracks on the off-shore platform model. *ASME*, 165-21, pp. 55-67, 1980.

ZHOU, H.; TANG, Q; YANG, L.; YAN, Y.; LU, G.; CEN, K. Support vector machine based online coal identification through advanced flame monitoring. *Fuel*, v. 117, p. 944-961, 2014.