FELIPE LANGELLOTTI SILVA

Projeto de painéis compósitos reforçados utilizando os métodos de otimização paramétrica e topológica

São Paulo

2015

FELIPE LANGELLOTTI SILVA

Projeto de painéis compósitos reforçados utilizando os métodos de otimização paramétrica e topológica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências

São Paulo

2015

FELIPE LANGELLOTTI SILVA

Projeto de painéis compósitos reforçados utilizando os métodos de otimização paramétrica e topológica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica - Controle e Automação Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo
2015

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catalogação-na-publicação

Silva, Felipe Langellotti
Projeto de painéis compósitos reforçados utilizando os métodos de otimização paramétrica e topológica / F.L. Silva. -- versão corr. -- São Paulo, 2015.
229 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Topologia (Otimização) 2.Estruturas (Otimização) 3.Materiais Compósitos 4.Método Dos Elementos Finitos 5.Aeronaves I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Gilberto e Ivelise, exemplos de dedicação,
pelo seu apoio incondicional aos meus
estudos e à minha formação.

AGRADECIMENTOS

À minha família. Em especial, aos meus queridos pais, Gilberto e Ivelise. Com eles aprendi o valor do estudo, o maior presente que poderiam ter me oferecido. Aprendi também o valor da dedicação, paciência e confiança em si mesmo; o valor do fazer bem feito, do fazer com alegria. O valor do carinho e do cuidado. Serei eternamente grato pela formação que me propiciaram condições para conquistar e também por aquela educação que vem de casa, que faz tanta diferença. À Flávia, minha irmã, por me mostrar a alegria da companhia. Aos meus avós, pela lição de vida de como encarar o trabalho, cada um à sua maneira.

À minha namorada, Mariana. Por me apresentar um mundo diferente, feliz e alegre com as coisas mais simples. Pela parceria, paciência e compreensão que exige um mestrado em dedicação parcial juntamente com o início de carreira profissional. Obrigado por estar ao meu lado a cada dia, a cada desabafo, a cada momento de exaustão, sempre me apoiando. Por saber dividir o tempo e proporcionar novas experiências que jamais aceitaria enfrentar sozinho.

Ao meu orientador, Emílio. Sua energia, disposição e conhecimento contagiam. A sua busca pela excelência, pelo fazer mais, melhor e diferente, por empurrar as fronteiras sem temer as restrições me apresentou o que significa buscar o ótimo no que se faz. Agradeço também pela paciência nos momentos difíceis que passamos na conciliação da minha vida profissional com o desenvolvimento do mestrado. Conversas por email, *Skype*, horários malucos, nada foi barreira para seguirmos em frente. Cresci muito equilibrando esses pratos, muito obrigado!

Aos meus amigos de laboratório de otimização. Aprendi muito com vocês, e foi muito bom compartilhar os anos que estive no laboratório. César Kiyono, muito obrigado por disponibilizar o código que foi fundamental para a realização deste trabalho, pelo apoio e paciência com as dúvidas.

Aos meus colegas da Embraer. Por me mostrarem como é bom compartilhar a mesma paixão no que se faz. Que ambiente positivo, de alegria e profunda realização com o que ajudam a desenvolver. Isso é contagiante e inspirador.

Aos meus amigos de Aerodesign e graduação, mentes literalmente brilhantes! Pela amizade, por me apresentarem a definição de ser resiliente, buscar o além do limite e não desistir nunca. Por comprovarem que os nossos sonhos valem a pena!

"Energia e persistência conquistam todas as coisas"

(Benjamin Franklin)

RESUMO

O crescimento do emprego de materiais compósitos e a flexibilização dos processos de manufatura permitem a adoção deste tipo de material em diversos casos que antes não eram explorados. Este trabalho investiga técnicas de otimização aplicáveis a painéis compósitos laminados e com reforçadores co-curados. Painéis reforçados são amplamente utilizados na indústria aeronáutica por conferirem resistência a carregamentos no plano e de flexão à elementos de baixo peso estrutural que são empregados em estruturas aeronáuticas típicas, como fuselagens. Por meio da otimização paramétrica que adota como variáveis de projeto parâmetros pré-definidos da estrutura, a geometria e posicionamento dos reforçadores, bem como a orientação das lâminas dos painéis e reforçadores compósitos são otimizadas. O problema de otimização é formulado como a maximização da carga de flambagem do painel, calculada através de um programa de Elementos Finitos comercial (Abaqus), sujeito a restrições de massa, máxima deformação admissível e ordem de empilhamento das camadas dentro do laminado. O método de Otimização Discreta de Material (ODM) é utilizado para parametrizar as variáveis de orientação do laminado, de modo a tentar reduzir a ocorrência de mínimos locais dentre as soluções encontradas pelo otimizador, o algoritmo Método das Assíntotas Móveis. Esta metodologia de implementação do problema de otimização é comparada com técnicas baseadas em Algoritmo Genético e variáveis contínuas de orientação das fibras. Os resultados obtidos por meio da metodologia proposta são comparados com aqueles de um painel reforçado representativo com geometria e sequência de empilhamento típicos e por fim, são apresentadas as vantagens e desvantagens entre as metodologias. Em seguida, a utilização de otimização topológica para o projeto de estruturas compósitas é explorada, considerando como função objetivo a maximização da rigidez do painel, sujeita a restrições de volume e de tensão. Neste tipo de otimização, não presume-se a existência de uma distribuição de material fixa na estrutura, com material podendo ser inserido ou retirado de dentro do domínio. O desenvolvimento de técnicas de manufatura com a deposição automática de fibras pré-impregnadas com matriz torna possível este tipo de projeto. Neste caso, para a modelagem do material compósito um elemento finito de casca de 8 nós é implementado e associado à técnica de ODM, de modo a otimizar a distribuição de material no domínio, juntamente com o empilhamento das camadas do laminado nas regiões que contém material. Este método é aplicado em diversos casos exemplos, com formulações de otimização e condições de carregamento diferentes. Ao final, um painel típico aeronáutico é conceitualmente projetado e os resultados são discutidos e comparados com uma configuração típica.

Palavras-chave: Otimização Topológica. Otimização Paramétrica. Estruturas Compósitas. Otimização Discreta de Material. Painel Reforçado. Restrição de Tensão.

ABSTRACT

The increased use of composite materials and flexible manufacturing processes allows the application of this type of material in many cases not generally explored. This work investigates optimization techniques applied to composite panels with co-cured stiffeners. Reinforced panels are widely used in the aircraft industry to confer resistance under in-plane and bending loads for lightweight structural elements that are employed in typical aircraft structures such as fuselages. Through parametric optimization which considers as design variables pre-defined structure parameters, stringers geometric dimensions, their positioning, and also the stacking sequence of laminated composite material employed for the panel and stringers layups are optimized. The optimization problem is formulated as the maximization of the panel buckling load obtained through commercial Finite Element software (Abaqus), subjected to constraints such as mass, maximum allowable strains, and stacking order of the laminate. The Discrete Material Optimization (DMO) method is used to parameterize the laminate orientation variables in order to try reduce the occurrence of local minima in the solution found by the optimizer, the Method of Moving Assimptotes (MMA) algorithm. This implementation of the optimization problem is compared with Genetic Algorithm and continuous fiber orientation variables methodologies. The results obtained from the proposed methodology are compared with those from a representative reinforced panel, with typical topology and lay-up sequences. Then, benefits and drawbacks of these methodologies are presented. The design of composite structures by employing topology optimization became possible through the development of manufacturing techniques such as fiber placement, since this kind of optimization does not require a previously fixed material distribution inside of the structure. In this work, this possibility is explored by considering as objective function the mass minimization subjected to stress constraints. For composite modeling, an eight-node finite element shell element is implemented and then associated to the DMO technique, in order to optimize the material distribution within the domain and also the layup in regions where material was inserted. This methodology is then applied in various example cases, with different optimization formulations and loading conditions. Concluding, a typical aeronautical panel is conceptually designed and the results discussed and compared with a baseline panel configuration.

Keywords: Topology optimization. Parametric optimization. Composite Structures. Discrete Material Optimization. Reinforced panel. Stress Constraint.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
ATL	"*Automated Tape Layering*"
AGATE	"*Advanced General Aviation Transport Experiments*"
BCP	"*Bi-value Coding Parameterization*"
CAD	"*Computer Aided-Design*"
DMO	"*Discrete Material Optimization*"
DMTO	"*Discrete Material and Thickness Optimization*"
DOC	"*Direct Operating Cost*"
ESDU	"*Engineering Sciences Data Unit*"
FAA	"*Federal Aviation Administration*"
FP	"*Fiber Placement*"
L/D	"*Lift-to-Drag Ratio*"
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	"*Method of Moving Asymptotes*"
MOT	Método de Otimização Topológica
NASA	"*National Aeronautics and Space Administration*"
NCAMP	"*National Center for Advanced Materials Performance*"
ODM	Otimização Discreta de Material
RAMP	"*Rational Approximation of Material Properties*"
SFP	*"Shape Functions with Penalization"*
SIMP	"*Simple Isotropic Material with Penalization*"

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Painéis reforçados compósitos

Estruturas de paredes finas com e sem reforçadores, fabricadas com materiais metálicos, são frequentemente utilizadas em todos os campos de construções leves devido a suas altas razões de rigidez e resistência em relação ao peso.

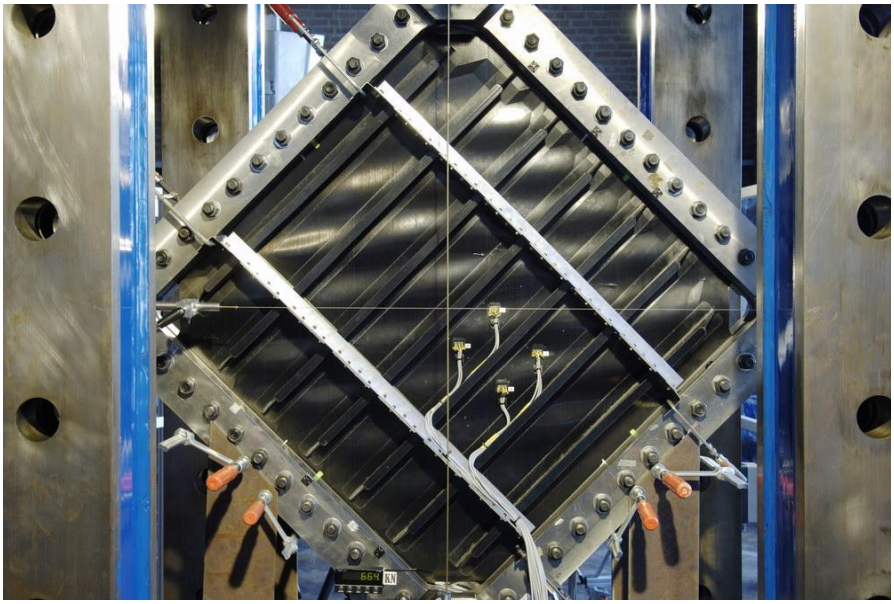
Com o aumento da disponibilidade de material compósito, acessibilidade a novas técnicas de manufatura, projeto e otimização específicas para estes materiais, a sua aplicação em estruturas de casca e painéis estruturais despertou grau de interesse na indústria aeronáutica. Atualmente, grandes companhias fabricantes de aeronaves possuem estruturas deste tipo em produção, sendo empregadas em aeronaves que estão em operação ao redor do planeta. A Figura 1 mostra um exemplo deste tipo de estrutura, no caso um painel do intradorso da asa do Airbus A350 XWB.

Figura 1 - Exemplo de painel reforçado compósito aplicado no intradorso da asa do Airbus A350 XWB.

Fonte: (COMPOSITES WORLD, 2012)

Um dos principais critérios de projeto dessas estruturas é a sua sensibilidade com respeito à falha por flambagem quando sujeita a cargas de compressão e cisalhamento no plano. A Figura 2 apresenta um exemplo de comportamento de flambagem de painel compósito reforçado sob cargas de cisalhamento aplicadas em um dispositivo de ensaio. Devido à grande diversidade de configurações possíveis de projeto de estruturas que envolvem materiais compósitos, inerente das próprias características deste tipo de material (ordem de empilhamento, espessuras de camadas, orientações de fibras, dimensões dos reforçadores, seu posicionamento, entre outros) dimensionar uma estrutura destas é um desafio. Neste sentido, a otimização tem uma aplicação quase mandatória para a obtenção de estruturas competitivas em termos de desempenho, peso e custo.

Figura 2 - Exemplo de painel compósito reforçado flambando após a aplicação de cargas de cisalhamento através de um dispositivo de ensaio.



Fonte: (BLACK, 2008)

Os métodos de otimização estrutural mecânica buscam a melhor configuração possível de uma estrutura, de maneira a atender uma função objetivo específica, sujeito a restrições. Como exemplo, a função objetivo pode ser minimizar o volume da estrutura, maximizar a rigidez estrutural ou maximizar as frequências de ressonância, e as restrições podem ser minimizar as tensões mecânicas, minimizar o volume, etc. As seções 1.2 e 1.3 introduzem o leitor às técnicas de otimização aplicadas nesta dissertação.

As possibilidades de aplicação da otimização estrutural em estruturas compósitas são diversas, envolvem quantidade de camadas do laminado, suas orientações, espessuras e se ampliam ainda mais quando envolvem outros parâmetros de projeto. Neste caso, aplicações para indústria aeronáutica são onde este conceito é largamente explorado. Em 2008, o periódico "*Structural and Multidisciplinary Journal*" publicou uma edição especial relacionada à otimização de estruturas aeroespaciais (KIM, 2008). Nos trabalhos descritos a seguir, utilizados como exemplos, observa-se o grau de abrangência e multidisciplinaridade que a otimização estrutural pode assumir, envolvendo custos de manufatura e operação, desempenho aerodinâmico, consumo de combustível, alcance, entre outros parâmetros de projeto.

Wang et al. (2002) apresentam a otimização multiobjetivo de estruturas aeroespaciais compósitas. O artigo descreve um procedimento para a otimização de custo (C) e peso (W) utilizando o parâmetro de custo, $\Delta C/\Delta W$, como um motivador do projeto primário. A função custo é definida em função dos parâmetros geométricos da estrutura. A função objetivo consiste numa combinação linear da função peso e custo. O problema de otimização é definido como a minimização dessa função objetivo sujeito a restrição de $\Delta C/\Delta W$. As variáveis de projeto são o número de nervuras e longarinas, e a espessura da casca externa. Kaufmann et al. (2010) também propõem uma metodologia para realizar a otimização combinada de custo e peso de componentes de aeronaves. A função objetivo é formada através de um cálculo simplificado dos custos diretos de operação, "*Direct Operating Cost"* (DOC).

Gasbarri et al. (2009) utilizam o conceito de decomposição de um problema complexo de otimização em subproblemas de otimização menores sob uma hierarquia, buscando a maximização da velocidade de "*flutter"*, um tipo de instabilidade aerodinâmica estrutural acoplada. Variáveis globais, definidas como as que afetam diretamente a resposta de "*flutter"* da asa da aeronave, tais como rigidez e massa, alimentam os subproblemas de otimização que afetam indiretamente o comportamento da asa, como a distribuição de ângulos do compósito e empilhamento das camadas.

Neufeld et al. (2010) apresentam a otimização multidisciplinar de uma estrutura de asa do tipo caixa considerando a incerteza nos modelos substitutos ("*surrogate"*). Para o modelo aerodinâmico é empregado um solucionador do tipo

"*vortex-lattice*". Esta metodologia foi empregada na maximização da relação sustentação sobre arrasto aerodinâmica, "*Lift-to-Drag Ratio*" (L/D), enquanto obedecendo a restrições de massa máxima, velocidade de aproximação máxima e de probabilidade da tensão mecânica na estrutura ser menor do que um limite definido.

1.2 Otimização Paramétrica aplicada a estruturas compósitas

A otimização paramétrica (VANDERPLAATS, 1984) é a abordagem de otimização estrutural mais disseminada, consistindo em adotar como variáveis de projeto parâmetros da estrutura como dimensões ou relações de dimensões, sendo que a topologia da estrutura permanece inalterada. Como exemplo, em uma estrutura treliçada, variáveis de projeto otimizáveis são características como a área da seção transversal de cada barra e as coordenadas dos nós. No caso de estruturas compósitas laminadas, as variáveis podem ser por exemplo, o número de camadas no empilhamento, as suas espessuras e orientações de fibras.

A maior parte das otimizações deste tipo utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a modelagem estrutural por sua flexibilidade para aplicação em estruturas mais complexas. Nesse sentido, embora não relacionado com a área de otimização em si, Zhang e Yang (2009) apresentam uma revisão bibliográfica sobre os desenvolvimentos mais recentes (últimos 10 anos) de elementos finitos (placas, cascas e elementos tridimensionais) na modelagem de estruturas compósitas laminadas. No entanto, o uso do MEF não é obrigatório neste tipo de otimização dependendo do tipo de parametrização empregado, como é mostrado ao longo desta seção.

Seibel et al. (1998) apresentam a otimização e caracterização experimental de painéis laminados de fibra de carbono (CFRP) enrijecidos axialmente. Kere e Koski (2000) apresentam um esquema de otimização multicritério da seqüência de empilhamento para compósitos laminados sujeito a condições de múltiplas cargas. As margens de falha do laminado com relação a várias condições de carga são utilizadas como critérios de projeto.

Bruyneel e Fleury (2002) apresentam a otimização de estruturas compósitas utilizando programação convexa sequencial, onde discutem o uso da família de algoritmos "*Multiple Moving Assymptotes*" (MMA), (SVANBERG, 1987), (SVANBERG, 2002). Este algoritmo, o Método das Assíntotas Móveis, atualiza as variáveis de projeto minimizando a função objetivo a partir das informações de sensibilidades da função objetivo e restrições. A técnica se mostra eficiente para otimização de estruturas compósitas quando a espessura das camadas e a orientação das fibras são consideradas simultaneamente como variáveis de projeto, resultando em um número grande deste tipo de variáveis.

Spallino e Rizzo (2002) discutem o projeto multi-objetivo de estruturas compósitas laminadas. As orientações das fibras na seqüência de empilhamento do laminado são as variáveis de projeto, consideradas do tipo discreto. Como resultado é apresentado inicialmente o exemplo de otimização de uma placa laminada de 48 camadas de carbono sujeita a cargas térmicas e cargas de compressão no plano que induzem flambagem. A função objetivo consiste em maximizar a carga de flambagem sujeita a uma restrição de critério de falha.

Na literatura, não existe unanimidade quanto à melhor abordagem de parametrização das variáveis de projeto dos laminados compósitos para otimização, existindo diferentes técnicas aplicáveis. As mesmas dividem-se geralmente em parametrizações indiretas, associadas à utilização dos parâmetros de laminação, onde variáveis intermediárias são empregadas e a sequência de laminação fica disponível após uma etapa de pós-processamento; e em parametrizações diretas, nas quais a descrição física do laminado é explicitada. Enquanto as parametrizações indiretas impõem dificuldades para considerar restrições de manufatura, as parametrizações diretas introduzem mínimos locais ao domínio de projeto.

Dentro das técnicas de parametrização indireta, os parâmetros de laminação introduzidos por Tsai e Pagano (1968) são frequentemente utilizados. Esta técnica expressa as matrizes constitutivas da Teoria Clássica de Laminação em termos de invariantes de material e parâmetros de laminação, que são doze integrais de funções trigonométricas da distribuição de orientações das lâminas através da espessura do laminado. Nem todas as combinações de parâmetros de laminação geram laminados factíveis, então restrições são impostas de modo a forçar os valores dos parâmetros resultarem em laminados fisicamente possíveis.

Liu e Haftka (2004) discutem a maximização de cargas de flambagem de painéis compósitos sem enrijecedores utilizando parâmetros de laminação como variáveis de projeto contínuas para valores de ângulo de fibra iguais a 0°, ±45° e 90°. O problema de otimização consiste em maximizar a carga de flambagem sujeito a restrição nos parâmetros de laminação. A carga de flambagem é calculada de forma analítica, assim como os parâmetros de laminação. Os resultados da otimização contínua (baseada em gradientes) para a sequência de empilhamento são comparados com os resultados de otimização por algoritmo genético o qual leva em conta o caráter discreto do espaço de projeto e restringe o número de camadas contíguas com mesma orientação.

IJsselmuiden et al. (2008) estudam a incorporação do critério de falha de Tsai-Wu dentro do espaço de soluções dos parâmetros de laminação. Isto aumenta os limites do espaço de soluções disponível dado que não depende de uma combinação pré-definida de ângulos de fibras para incorporar critérios de resistência na otimização. Um envelope de falha conservativo garante uma região sem falha dentro do espaço de soluções, independente das orientações das lâminas do empilhamento do laminado. Assim, um critério de resistência pode ser incluído na otimização tanto como função objetivo quanto como restrição do problema, aliado ao reduzido número de variáveis de projeto da otimização que os parâmetros de laminação proporcionam.

Recentemente, Bohrer et al. (2015) exploraram um uso diferente dos parâmetros de laminação na otimização de compósitos laminados, que exemplifica a versatilidade desta abordagem de parametrização das variáveis de projeto. Foi implementada a otimização da carga crítica de flambagem de painéis sujeitos a impacto de pequenas massas, empregando bancos de dados de laminados e soluções fechadas para a previsão do comportamento sob impacto e da carga limite de delaminação.

Embora as técnicas baseadas em parâmetros de laminação possam ser utilizadas com sucesso em diferentes aplicações, com o seu uso torna-se difícil serem impostas restrições nos ângulos das lâminas derivadas de restrições de manufatura, dado que as mesmas não geram uma descrição direta do empilhamento das lâminas, nem de sua sequência. Como geralmente as orientações admissíveis são restritas a conjunto finito de 0°, ±45° e 90° devido à manufatura, algoritmos de otimização heurísticos podem ser considerados.

A utilização de algoritmos de otimização heurísticos, como algoritmos genéticos, para a otimização paramétrica de estruturas compósitas laminadas é explorada por Gürdal et al. (1999). Os mesmos apresentam uma compilação e discussão sobre o tema baseando-se em referências anteriores à 1997.

O emprego deste tipo de algoritmos torna-se atrativo nesta aplicação dado o caráter discreto do problema e a presença de múltiplos mínimos locais, principalmente no caso da determinação do ângulo de fibra ótimo. No entanto, Sigmund (2011) questiona a vantagem da utilização deste tipo de algoritmos em problemas de otimização. As principais vantagens advindas da utilização do algoritmo genético são o fato do mesmo poder encontrar um “mínimo global”, não necessitar do cálculo de gradientes, e permitir lidar com variáveis discretas. Sigmund então compara a utilização do algoritmo genético com um algoritmo baseado em gradientes do ponto de vista da otimização topológica (seção 1.2), evidenciando a ineficiência de algoritmos não baseados em gradientes em problemas de otimização com muitas variáveis de projeto.

Outra dificuldade dos algoritmos heurísticos (por exemplo, o genético) é a maneira como os mesmos lidam com restrições. A inclusão de restrições no problema é resolvida de forma indireta com a verificação das mesmas a cada iteração, ou então, alterando a definição da função objetivo adicionando-se funções penalizadoras que exigem a determinação de coeficientes semi-empíricos, dificultando sua utilização.

Dessa forma a escolha da utilização de algoritmos heurísticos na solução de um problema de otimização em detrimento de um algoritmo baseado em gradientes deve ser feita com cautela. Nesta dissertação, adicionalmente à implementação da otimização paramétrica é apresentada uma comparação entre metodologias, implementação numérica e resultados da otimização via algoritmo genético versus algoritmos baseados em gradientes (seções 4.1.10, 4.1.11 e 5.1), focando-se no caso exemplo dos painéis compósitos reforçados.

De encontro com o levantado posteriormente em Sigmund (2011), Stegmann e Lund (2005) propõem uma função discreta para os valores de ângulo de fibra que permite tentar contornar o problema de múltiplos mínimos locais que ocorre quando se utilizam os próprios valores de ângulos de fibra como variáveis de projeto. Desta forma, utilizando um algoritmo de otimização baseado em gradientes, Stegmann e Lund (2005) realizaram a otimização dos valores de ângulo de fibra de forma

parametrizada, por meio de uma técnica de parametrização direta, chamada Otimização Discreta de Material (ODM), ou "*Discrete Material Optimization*" (DMO), como conhecida em inglês. Trata-se de uma abordagem atrativa e que foi considerada como base para a metodologia de otimização paramétrica adotada neste trabalho, apresentada em mais detalhes a partir da seção 3.1.1. A mesma multiplica as contribuições das matrizes de rigidez de cada ângulo discreto por uma função de ponderação, atrelada às variáveis de projeto. A soma destas parcelas de matrizes resultam na matriz local de rigidez da lâmina e um esquema de penalização faz com que pontos de projeto com razões intermediárias de rigidez em relação à massa sejam desfavorecidas, sendo o ângulo ótimo obtido para cada lâmina ou região dentro de cada lâmina.

Bruyneel (2011) apresenta um método de parametrização das propriedades mecânicas chamado de Funções de Forma com Penalização, conhecido em inglês como "*Shape Functions with Penalization*" (SFP). Este método quando comparado com a ODM é mais simples e emprega um menor número de variáveis de projeto para seleção das orientações ótimas do laminado com velocidade de convergência e qualidade dos resultados comparável às obtidas pela ODM. Assim, representa uma alternativa à última quando são considerados laminados apenas com as orientações de 0º, -45, 45º e 90º, tipicamente encontrados em aplicações aeronáuticas. A partir de um esquema de parametrização baseado nas funções de forma de um elemento finito quadrilátero de primeira ordem, necessita apenas de 2 variáveis de projeto para obter a orientação ótima dentre as 4 orientações admitidas, frente às 4 variáveis de projeto que a ODM exigiria. Além disso, o SFP penaliza de maneira mais eficiente valores intermediários das variáveis de projeto, dado que usa duas coordenadas do sistema natural do elemento, funções de forma naturalmente bilineares, com um expoente que penaliza os valores intermediários.

Gao et al. (2012) propõe um método de parametrização para o problema de seleção de orientação das lâminas chamado em inglês de "*Bi-value Coding Parameterization*" (BCP). O mesmo generaliza o conceito de funções de forma do SFP, tornando possível considerar na otimização um número grande de orientações discretas admissíveis ou materiais candidatos diferentes, com um número de variáveis de projeto sensivelmente menor que a ODM, por exemplo.

Hvejsel et al. (2011) consideram uma técnica de parametrização que como a ODM, utiliza a soma ponderada de contribuições para a rigidez do laminado. No

entanto, uma função penalizadora côncava quadrática é usada como restrição no problema, de modo a forçar uma solução discreta para a otimização. Esta solução apresenta um bom comportamento evidenciado pelos resultados de maximização de rigidez apresentados.

Kennedy e Martins (2013) por sua vez, introduzem uma outra técnica de parametrização aplicável em problemas com restrições de manufatura, como por exemplo, número máximo de lâminas consecutivas com mesma orientação e número mínimo de orientações de lâmina dentro do laminado. Esta técnica expressa as matrizes de rigidez da teoria clássica como uma combinação linear ponderada por pesos que são as variáveis de projeto. Uma função penalizadora é empregada forçando a resultados discretos (0 - 1) serem obtidos. São apresentados resultados com a aplicação da metodologia na maximização de rigidez de placas e na maximização de carga de flambagem de painéis reforçados, comprovando ser mais uma alternativa ao método ODM.

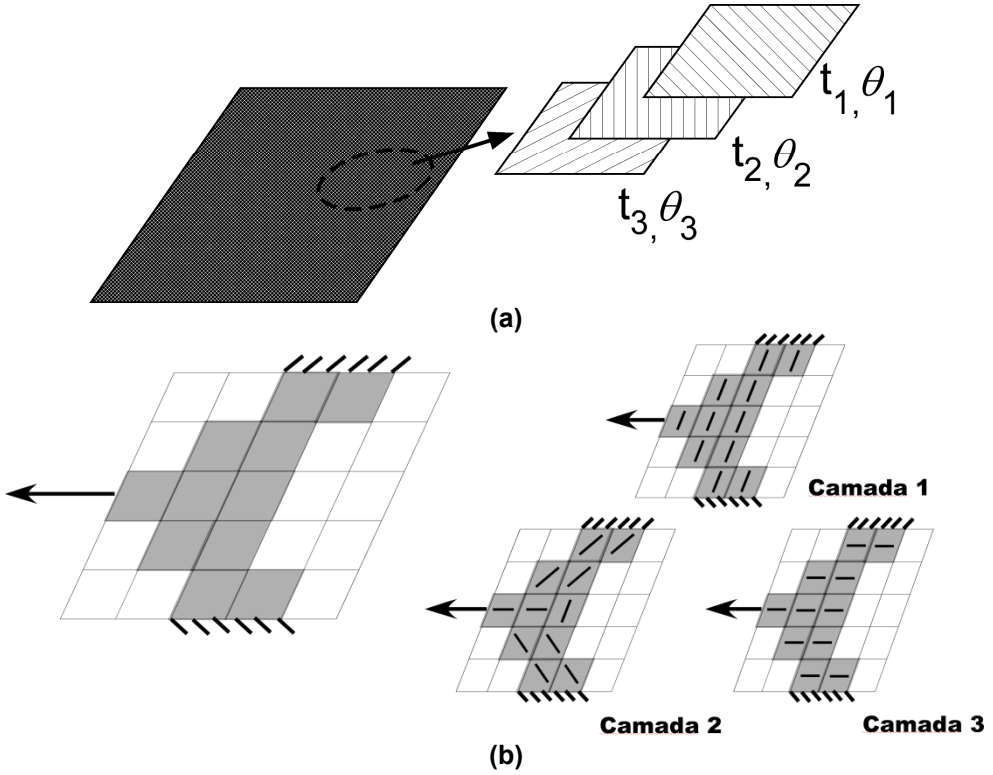
1.3 Otimização Topológica aplicada a estruturas compósitas

O Método de Otimização Topológica (MOT) tem como objetivo encontrar uma topologia que atenda a um critério, como por exemplo, máxima rigidez utilizando o menor volume de material possível. A topológica não presume a existência de uma distribuição de material fixa, ou seja, material pode ser inserido ou retirado de dentro do domínio diferentemente de técnicas como a paramétrica onde a topologia da estrutura é entrada da otimização. A Figura 3 apresenta esta diferença de conceito.

A partir de um domínio fixo estendido, ou seja, um domínio de forma fixa que conterá a estrutura desejada, limitado pelos pontos de apoio da estrutura e de aplicação de carregamento, os limites físicos de extensão da estrutura são obtidos ao longo da otimização. Este conceito de otimização aplicado em materiais compósitos permite encontrar os contornos geométricos ótimos do laminado, bem como mapear regiões ótimas para a inserção de camadas extras de material visando por exemplo, reforçar regiões de alta distribuição de carga. Aliado à otimização dos ângulos das fibras de cada lâmina do laminado ele permite ao projetista também

identificar a distribuição ótima de orientações dentro das regiões em que existe material.

Figura 3 - (a) Exemplo de otimização paramétrica, (b) exemplo de otimização topológica.



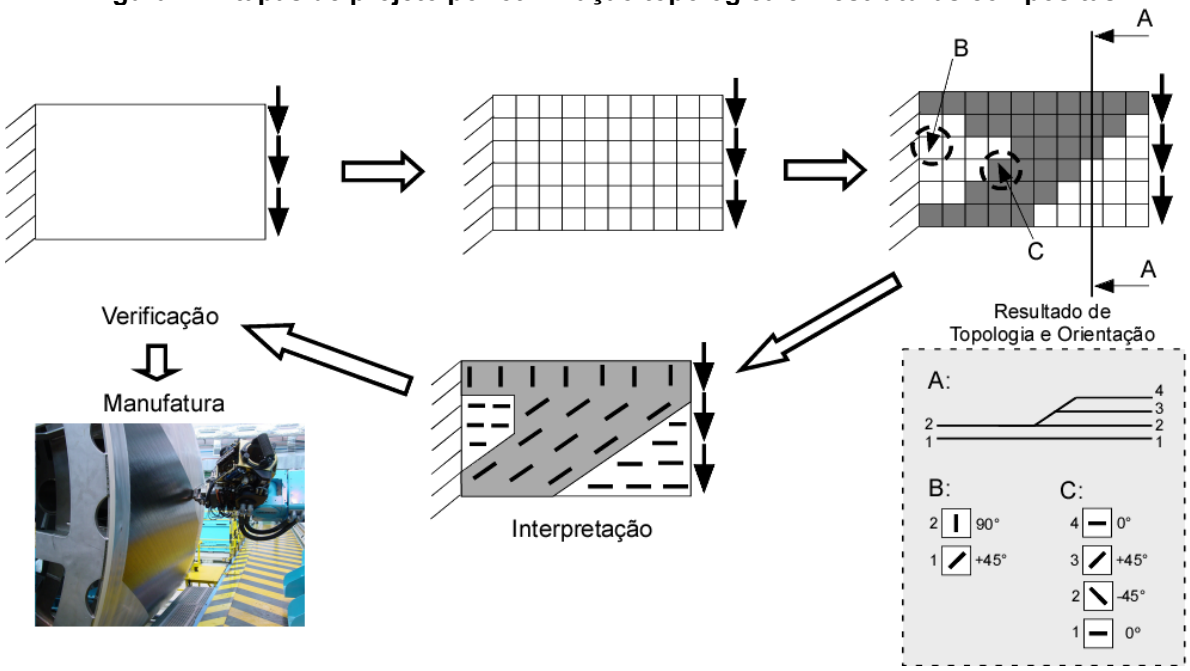
No entanto, o resultado da otimização topológica geralmente não é utilizado diretamente. Ele pode conter contornos que não são passíveis de fabricação, regiões com materiais intermediários, entre outros fenômenos. Desta forma, é necessário que seja feita uma etapa de interpretação da topologia obtida. Por fim, uma nova análise é feita sobre a topologia interpretada com o objetivo de verificar se as modificações impostas pela fase de interpretação não comprometeram de forma significativa o desempenho da estrutura.

Outros algoritmos de otimização, experiência do projetista, restrições de fabricação, custos, devem ser levados em conta, não existindo uma solução ótima do ponto de vista de todos os aspectos de projeto. Um exemplo de sequência de etapas de projeto por otimização topológica no caso de uma estrutura compósita é apresentada na Figura 4, com a implementação baseada no MEF.

A importância da otimização topológica baseia-se no fato de que, dentro do ciclo de desenvolvimento da estrutura de um novo produto, as maiores reduções de massa são observadas quando promovidas nas fases iniciais de projeto, onde a

liberdade de escolha e definição da topologia da estrutura permitem maior flexibilidade e portanto, maiores possibilidades de redução de massa. Deste modo, o resultado de otimização topológica é bastante eficaz como gerador de soluções iniciais de projeto.

Figura 4 - Etapas de projeto por otimização topológica em estruturas compósitas.



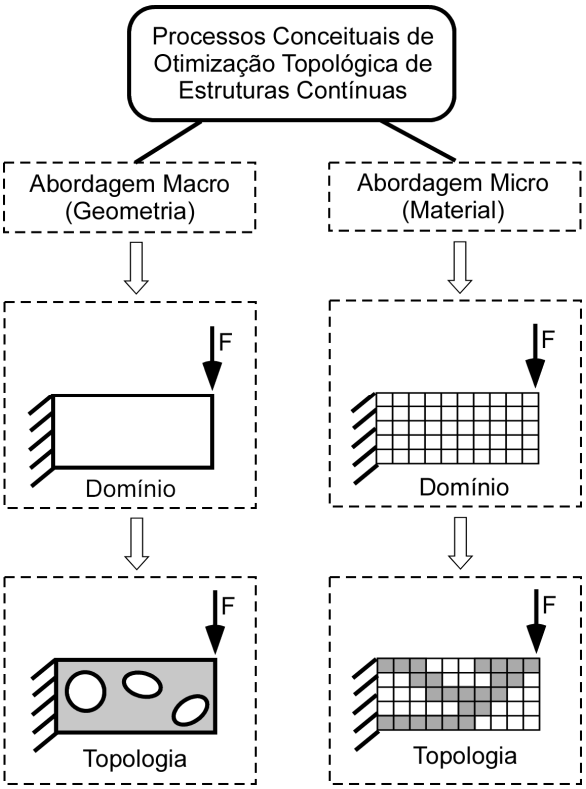
Atualmente, a forma de aplicação da otimização topológica em uma estrutura pode ser dividida em duas grandes classes de abordagens segundo Eschenauer e Olhoff (2001): a abordagem macro (baseada na geometria) e a abordagem micro (baseada no material). A Figura 5 apresenta um esquema desta divisão, adaptado de Eschenauer e Olhoff (2001).

Na abordagem macro, a topologia de um corpo sólido pode ser alterada pelo crescimento ou degeneração do material da estrutura ou através da inserção de furos. Dependendo do método, a otimização aproxima-se da otimização de forma, por ser uma abordagem baseada na geometria e não na microestrutura. Os métodos mais comuns de implementação deste tipo de abordagem são: derivadas topológicas (ESCHENAUER et al., 1994); funções implícitas ou "*level set*", em inglês (ALLAIRE et al., 2004); isogeométricos (SEO et al., 2010) e evolucionários (CHU et al., 1996).

A abordagem micro costuma ser empregada através de dois métodos. O primeiro deles é o método baseado em densidades, utilizado neste trabalho e

apresentado em detalhes na seção 3.2. O segundo deles, o método da homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001), define uma microestrutura física mais realística, para representar os materiais intermediários entre a ausência e presença de material que definem a topologia da estrutura. Através de uma microestrutura periódica, o problema de otimização topológica é relaxado, e as propriedades mecânicas do material são determinados através de técnicas como a homogeneização, permitindo que se considerem, por exemplo, estruturas do tipo colméia ("*honeycomb"*).

Figura 5 - Divisão dos métodos de otimização topológica de estruturas contínuas, adaptado de (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001).



A literatura de otimização topológica aplicada a estruturas compósitas ainda é mais restrita que a topológica aplicada em materiais metálicos. No entanto, com o advento de novos métodos de fabricação, como é o caso do "*fiber placement"*, cada vez mais o projeto de estruturas compósitas é flexibilizado, permitindo que este tipo de técnica de otimização seja explorado. O Apêndice A.1 apresenta uma revisão sobre o "*fiber placement"* e outros métodos de fabricação de compósitos laminados.

Alguns exemplos de trabalhos envolvendo a otimização topológica em materiais compósitos são relacionados a seguir. Belblidia et al. (2001) apresentam

um algoritmo de otimização topológica para estruturas placa baseadas no modelo de Reissner-Mindlin. O objetivo é projetar placas de uma e três camadas com a máxima rigidez para um determinado volume de material. Rais-Rohani e Lokits (2007) apresentam o projeto de uma das partes do casco de um submarino utilizando material compósito através da otimização topológica.

Abordando um problema com função objetivo mais complexa, Topal (2009) considera a otimização multi-objetivo de laminados cilíndricos. A orientação da camada de fibra é utilizada como variável de projeto e a otimização multi-objetivo é formulada como a combinação ponderada da freqüência natural e carga de flambagem sob carga externa.

Lund (2009) discute a extensão da formulação de otimização topológica baseada na técnica de ODM. A mesma é explorada nesta dissertação (seção 3.1.1), e em Lund (2009) é empregada na otimização de estruturas e placas e cascas laminadas com relação a carga de flambagem linear sujeitas a restrição de massa.

Khosravi e Sedaghati (2008) consideram a otimização da espessura e orientação de cascas compósitas utilizando um método específico de otimização baseado em um critério de optimalidade que não necessita do cálculo de gradientes. O problema de otimização consiste em minimizar a massa sujeita a restrição de tensão mecânica baseada no critério de *Tsai-Hill*.

Como comentado anteriormente na seção 1.2, referente à parametrizações aplicáveis à otimização discreta de material, Hvejsel et al. (2011) formulam o projeto do empilhamento de laminados compósitos como um problema de escolha entre múltiplos materiais discretos. Dado que além da orientação das fibras neste caso a distribuição de material também é abordada, este trabalho pode ser considerado uma referência de aplicação da otimização topológica em estruturas compósitas. São apresentados exemplos de aplicação da metodologia em problemas de maximização da rigidez sujeitos a restrição de massa e múltiplos casos de carga.

Na sequência, Hvejsel e Lund (2011) apresentam duas propostas de metodologias de interpolação de material baseadas em generalizações dos conhecidos métodos "*Simple Isotropic Material with Penalization*" (SIMP) e "*Rational Approximation of Material Properties*" (RAMP) (BENDSOE; SIGMUND, 2003), de modo a permitirem a escolha de um material dentre um número arbitrário de materiais candidatos com propriedades anisotrópicas diferentes. Estes métodos originalmente desenvolvidos para misturas entre dois materiais isotrópicos são

estendidos através da inserção de restrições lineares de modo a assegurar a seleção de apenas um material em cada subdomínio de projeto. Além disto, a formulação proposta permite combinar a otimização multimaterial com a topológica. São apresentados exemplos de aplicação em problemas de maximização da rigidez, no entanto, a metodologia é aplicável a qualquer problema de distribuição de material envolvendo um número arbitrário de materiais candidatos.

Sorensen e Lund (2013) introduzem uma metodologia de otimização baseada em gradientes para otimização de topologia e espessura de estruturas compósitas laminadas reforçadas, incluindo restrições de manufatura. Estas restrições reduzem o risco de falhas do laminado como delaminação e trincas na matriz. O método permite obter as espessuras e orientações de fibras ótimas ao longo de uma estrutura laminada com geometria externa fixa. O problema conceitual de escolha de um número inteiro de camadas (relacionado à espessura) e da orientação das fibras dentro de um conjunto de orientações admissíveis é relaxada para um problema contínuo empregando a ODM. As restrições de manufatura são incluídas como um grande número de restrições lineares.

Sorensen et al. (2014) posteriormente apresentam um método alternativo chamado em inglês de "*Discrete Material and Thickness Optimization*" (DMTO). Este método permite otimizar diretamente a orientação do material bem como as espessuras de cada lâmina. Emprega uma parametrização através de funções interpoladoras com penalização, sendo demonstrada em problemas de otimização envolvendo a minimização de massa sujeito a restrições como fatores de carga de flambagem, deslocamentos limitados, entre outros. Por fim, aplica a metodologia na otimização de uma longarina de pá de turbina eólica.

Exemplificando a aplicação da otimização de estruturas compósitas, Wennberg e Stichel (2014) sugerem uma metodologia de otimização multifuncional da estrutura de um vagão de trem de alta velocidade fabricado em material composto. São empregadas restrições de projeto de resistência mecânica, rigidez, geometria, isolamento térmico e acústico e inflamabilidade, sugerindo resultados de redução de massa de mais de 40% quando empregada a otimização no projeto deste tipo de estruturas.

1.4 Objetivos do trabalho

Este trabalho estuda técnicas de otimização estrutural aplicadas às estruturas compósitas. São apresentadas duas técnicas de otimização; a paramétrica, e a topológica. Como objetivos macros, comuns às duas técnicas apresentadas, são relacionados:

- Estudar e propor formulações diferentes de otimização de forma a desenvolver possíveis estruturas ótimas do ponto de vista de massa e desempenho;
- Demonstrar a aplicação de otimização no projeto de estruturas compósitas, empregando um caso como base que é o projeto de painéis reforçados de aplicação aeronáutica.

Estabelecer uma metodologia geral e irrestrita de otimização estrutural ainda é um desafio. Deste modo, restringe-se o escopo amplo do trabalho que foi definido acima através de dois objetivos macros. Cada técnica aqui considerada busca objetivos particulares que façam uso das vantagens de cada uma delas. Assim, são relacionados a seguir os objetivos específicos:

- **Otimização paramétrica:** executar a otimização de um conceito de estrutura bem definido através de uma plataforma prática e que permita a adoção de códigos comerciais para a análise da estrutura.
- **Otimização topológica:** buscar conceitos otimizados de estruturas, admitindo-se flexibilidade de manufatura quanto a orientações das fibras e topologia das lâminas. Empregar um código de análise e otimização construído para esta necessidade, considerando restrições de critério de falha do laminado no problema.

1.5 Justificativa

A busca de estruturas mais leves e de superior desempenho, motivada principalmente pela indústria aeronáutica faz com o que emprego de materiais compósitos seja cada vez maior. Suas boas propriedades mecânicas com uma baixa densidade, capacidade de tolerar danos, desempenho superior na vida em fadiga, ausência de corrosão, liberdade de otimização e custos que se reduzem cada vez mais com o aumento da demanda por este tipo de material, o tornam uma alternativa viável em projetos que envolvam requisitos de peso.

Este trabalho justifica-se ao explorar o estado da arte em técnicas de otimização envolvendo materiais compósitos, mostrando seus métodos de aplicação e trazendo exemplos de utilização das mesmas para o caso de estruturas, como painéis compósitos reforçados.

1.6 Organização do Texto

O texto apresentou inicialmente no Capítulo 1 uma breve introdução sobre painéis reforçados compósitos, a revisão bibliográfica sobre otimização paramétrica e topológica aplicadas às estruturas compósitas e ao final os objetivos e justificativa do trabalho. Em seguida, no Capítulo 2 uma breve introdução sobre a teoria de materiais compósitos leva ao leitor os conceitos básicos necessários para o entendimento da teoria de cascas laminadas para implementação do método de elementos finitos, base da análise estrutural empregada neste trabalho. No Capítulo 3 as formulações dos problemas de otimização paramétrica e topológica são definidas, com suas implementações numéricas explicadas no Capítulo 4. Dentro do Capítulo 5, os resultados são apresentados. Na seção 5.1 é feita uma comparação entre as diferentes metodologias de otimização paramétrica analisadas, com uma discussão sobre a escolha da metodologia preferencial, que é aplicada em um exemplo de projeto típico na seção 5.2. Os resultados de otimização topológica são apresentados e discutidos ao longo da seção 5.3, com os resultados de aplicação desta metodologia em um projeto de painel típico aeronáutico sendo mostrados na

seção 5.4. A seção 6 contempla as conclusões e sugestões de trabalhos futuros. No Apêndice A é feita uma breve revisão sobre os métodos construtivos aplicados em laminados compósitos, juntamente com a apresentação das propriedades de materiais consideradas. Por fim, no Apêndice B encontra-se a verificação dos resultados de análise empregadas para a otimização paramétrica.

2 MODELAGEM DE PAINÉIS COMPÓSITOS REFORÇADOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De modo a introduzir o leitor à teoria de materiais compósitos, importante para o entendimento do texto e das escolhas de metodologia de otimização tomadas ao longo do trabalho, a seção 2.1 apresenta um resumo da teoria da mecânica de materiais compósitos laminados, base para o entendimento das implementações do Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicado às estruturas compósitas.

Duas abordagens distintas de modelagem da estrutura compósita foram definidas de maneira a explorar os conceitos de cada tipo otimização estudado em sua melhor forma, embora ambas empreguem o MEF.

A otimização paramétrica, ao considerar um conceito fixo de topologia da estrutura, é de mais rápida e prática implementação, ideal para aplicações industriais. Escolheu-se empregar um solucionador comercial, o Abaqus, para a tarefa de análise estrutural aproximando a sua implementação de um caso real de aplicação na indústria. Em soluções de projeto industriais, solucionadores comercias consagrados, testados e reconhecidos por órgãos certificadores são preferidos em virtude de um menor custo e tempo de implementação, dado que não necessitam de certificação para cada projeto em que é utilizado.

Para o caso da otimização topológica, onde a flexibilidade da otimização é maior, permitindo inclusive que novos conceitos de topologia da estrutura sejam escolhidos, optou-se por empregar um solucionador "*in-house*". Este tipo de solução privilegia a liberdade da otimização sem aumentar o custo computacional da mesma. Caso sejam empregados solucionadores comerciais, o custo computacional da obtenção das sensibilidades da função objetivo e restrições cresce, pois o otimizador não possui acesso ao código implementado, dificultando a implementação de otimizações com grande número de variáveis, como é o caso da topológica.

Assim, é apresentada na seção 2.2 a teoria de cascas laminadas para implementação do MEF, de forma ampla. Esta teoria é a base para o entendimento dos solucionadores comerciais além de ter sido aplicada diretamente na implementação do MEF utilizado neste trabalho para a otimização topológica. As nuances específicas inerentes à cada implementação são destacadas ao longo das seções 4.1 e 4.2.

2.1 Introdução à teoria de materiais compósitos

Nesta seção é descrita a teoria da mecânica de materiais compósitos laminados. Essa teoria auxilia a entender o comportamento desses materiais quando sujeitos a carregamentos e compreender as nuances necessárias em uma otimização que envolva laminados compósitos. Inicialmente na seção 2.1.1 é apresentada a nomenclatura normalmente empregada na descrição de laminados compósitos. Nas seções 2.1.2 e 2.1.3, a resposta de uma camada de material isotrópico é obtida, sob carregamentos no plano e também sob flexão. Estas análises são aproveitadas na seção 2.1.4 onde o objetivo é obter a resposta de camadas isoladas de material ortotrópico. Na seção 2.1.5 considera-se o laminado ortotrópico como um todo para a análise, a partir das propriedades e orientações de cada camada. Por fim, na seção 2.1.6 é discutida a predição de falha em materiais compósitos. Toda a teoria aqui apresentada tem como principal referência o material de Gürdal et al. (1999).

2.1.1 Nomenclatura

No projeto de materiais compósitos laminados reforçados por fibras, é usual descrever os laminados através de uma notação chamada sequência de empilhamento. A mesma relaciona as direções das fibras de cada camada medidas em relação a um eixo de referência do laminado, sendo positivo caso a orientação das fibras seja anti-horária em relação ao eixo de referência. A listagem dos ângulos começa da camada mais superior até a mais inferior, como em (1).

$$\left[\theta_1 / \theta_2 / \ldots / \theta_N\right] \tag{1}$$

Em casos onde várias camadas com mesma orientação são adjacentes, é comum utilizar um subescrito para representar o número de camadas com orientação repetida, como em (2), onde as 2 camadas superiores do laminado possuem orientação 0º; as 4 seguintes, 45º e as 2 camadas inferiores, -45º. Grupos

de camadas dispostas da mesma maneira também podem ser representadas com o subescrito ao lado dos parênteses que agrupam certa ordem de camadas, como em (3).

$$[0_2 / 45_4 / -45_2] \tag{2}$$

$$[0_2 / (0_2 / 45_2 / 90)_3 / 0_2] \tag{3}$$

Chamam-se de simétricos os laminados em que a distribuição de orientações da metade superior são espelhadas em relação ao plano médio na metade inferior, como em $[-45 / 30 / 0 / 45 / 45 / 0 / 30 / -45]_T$, onde T significa que a nomenclatura se refere ao laminado completo. No caso da simetria com números pares de camadas, a nomenclatura pode ser reduzida para $[-45 / 30 / 0 / 45]_s$.

Outra situação comum é a utilização de laminados balanceados, onde para cada orientação de camada positiva, é inserida uma camada com mesmo valor de orientação, porém negativa. No caso de $[30 / -30 / 30 / -30]_T$, a nomenclatura fica $[\pm 30_2]_T$. Para o caso de um laminado simétrico e balanceado, como $[-30/30/30/-30]_T$, ele pode ser representado como $[\mp 30]_s$.

2.1.2 Resposta de camadas isotrópicas a cargas no plano

Estruturas finas, formadas por camadas finas de material suportam os carregamentos por dois tipos de mecanismos diferentes: tração e compressão das camadas no seu próprio plano (comportamento de membrana), e flexão das camadas. Nesta seção será abordado apenas o mecanismo de membrana, em um estado plano de tensão (não há forças agindo na direção normal ao plano; assume-se que $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). A relação tensão-deformação torna-se (4).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

onde

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad ; \quad Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{5}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ν o coeficiente de Poisson do mesmo.

No caso de haverem diversas camadas isotrópicas empilhadas, considera-se que camadas adjacentes estejam unidas perfeitamente, ou seja, os deslocamentos não sofrem descontinuidades ao longo da espessura e que cada uma está sob um estado plano de tensão. Assim, as deformações do laminado podem ser caracterizadas pelas deformações no plano médio do laminado ("*mid-plane*"), representadas por ε_0.

No entanto, uma distribuição constante de deformações ao longo da espessura não garante uma distribuição constante de tensões. As tensões são constantes ao longo da espessura de cada camada, porém variam de uma camada para outra, em função das propriedades do material constituinte da mesma e de sua espessura. Por este motivo utiliza-se na maioria dos casos distribuições de camadas simétricas em relação ao plano médio do laminado, buscando-se evitar o surgimento de componentes de flexão pelo desequilíbrio de tensões.

Do ponto de vista da rigidez global do laminado, ele se comporta como uma única camada com propriedades que são médias das propriedades das camadas individuais. Como as tensões variam de camada para camada, é necessário que se integre as componentes de tensão ao longo da espessura (h) do laminado buscando relações tensão-deformação que representem a resposta do laminado globalmente, conforme representado na equação (6).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \tag{6}$$

onde N é o número de camadas e z_k as posições ao longo da espessura onde as interfaces das camadas se localizam.

Como as tensões são constantes dentro de cada camada, e as deformações são constantes ao longo de toda a espessura do laminado (ε_0), utilizando (4) em (6), obtém-se (7), ou em forma matricial (8):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{8}$$

A partir do vetor $\mathbf{N}$, dividindo-se o mesmo por h, têm-se as tensões médias do laminado. Assim, podem-se obter as constantes de engenharia equivalentes do laminado através da matriz $\mathbf{A}$ comparando-se a mesma com os coeficientes de (4).

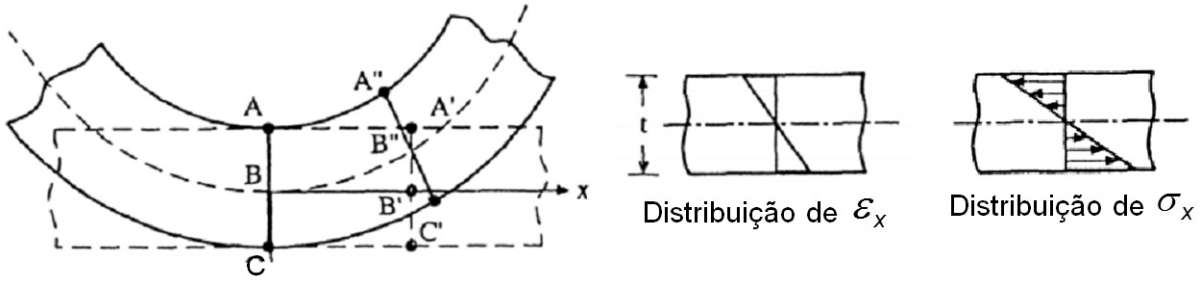
2.1.3 Resposta de camadas isotrópicas à flexão

Para analisar a resposta das camadas à flexão isolada, são utilizadas as duas hipóteses de Kirchhoff-Love. A primeira diz que uma linha reta perpendicular ao plano médio antes da deformação se mantém reto e perpendicular ao mesmo após a deformação. A segunda é que o comprimento desta linha é constante antes e depois da deformação. Assim, assume-se que as deformações no sentido da espessura do laminado são nulas. As camadas também são finas quando comparadas com as dimensões do plano da camada, o que permite aproximar um estado plano de

tensões pelo fato das componentes de tensão normal ao plano poderem ser desprezadas. Estas hipóteses aliadas à suposição de perfeita união entre as camadas constituem a Teoria Clássica de Laminação. Porém, em um estado plano de tensão, as deformações normais ao plano não precisam necessariamente ser pequenas o que leva a uma inconsistência com as hipóteses de Kirchhoff-Love. No entanto, a Teoria Clássica de Laminação é a base de muitas análises publicadas e se mostra adequada para a maioria das aplicações de engenharia.

Ao contrário do caso com cargas apenas no plano, onde as deformações dentro de uma camada são constantes, na flexão a distribuição da deformação é linear com z, eixo da espessura da camada (Figura 6). Portanto, as deformações no plano médio não podem ser utilizadas para representar a resposta da camada sujeita a flexão pura. Utiliza-se então a curvatura (κ) para representar a deformação de uma camada (9), sendo a curvatura constante ao longo da espessura da mesma.

Figura 6 - Comportamento à flexão de uma camada, adaptado de Gürdal et al. (1999).



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Pelo fato das tensões não serem constantes em cada camada, e também antissimétricas em relação ao plano médio da camada (Figura 6), a integral simples das tensões ao longo da espessura não basta para representar as tensões nas camadas. Utiliza-se o conceito de resultantes de momentos, definidos como em (10) para o caso de uma lâmina única.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{10}$$

De forma análoga ao caso de carregamentos no plano, substitui-se (4) e (9) em (10), obtendo-se uma expressão da forma de (11), ou em forma matricial (12).

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \tag{12}$$

onde, para o caso de uma lâmina única:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \quad D_{12} = \nu D_{11} \quad ; \quad D_{66} = (1-\nu)\frac{D_{11}}{2} \tag{13}$$

Para o caso de lâminas simetricamente dispostas em relação ao plano médio do laminado, utilizando as hipóteses feitas para o caso de estado plano de tensão e momento, a curvatura continua sendo o parâmetro representativo para a deformação por flexão do laminado. Os momentos resultantes como definidos em (10), podem ser calculados como sendo:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} zdz = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{Q_{(k)}} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} zdz = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Q_{(k)}} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

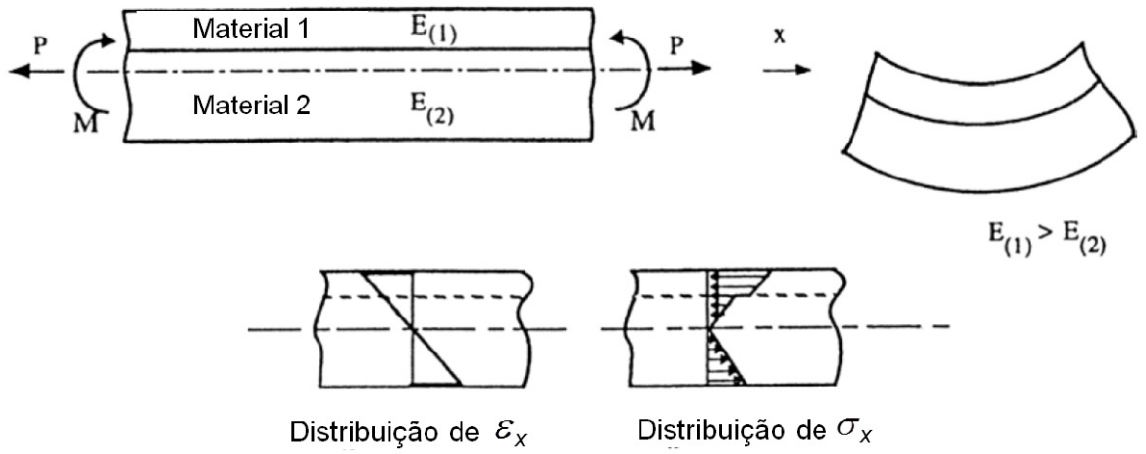
Assim, os termos da matriz $\mathbf{D}$, da equação (12), são calculados como em (15).

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} Q_{ij(k)}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{15}$$

Pelo fato de as lâminas serem simétricas em relação ao plano médio, os termos da matriz $\mathbf{Q_{(k)}}$ se tornam simétricos, resultando em resultantes de tensão no plano, N_i, nulas.

Por fim, será considerada a resposta de laminados assimétricos em relação ao plano médio. Este caso faz com que a aplicação de momentos provoquem o surgimento de deformações por tensão plana assim como deformações por flexão. Da mesma forma, tensões no plano aplicadas promovem deformações por flexão.

Figura 7 - Distribuições de deformações e tensões em um laminado assimétrico, adaptado de Gürdal et al. (1999).



Os vetores de tensões resultantes no plano e momentos resultantes para o laminado agora possuem contribuições tanto do caso de tensão plano quanto da flexão, assumindo a forma das equações (16) e (17).

$$\mathbf{N} = \mathbf{B\kappa} + \mathbf{A\varepsilon^0} \tag{16}$$

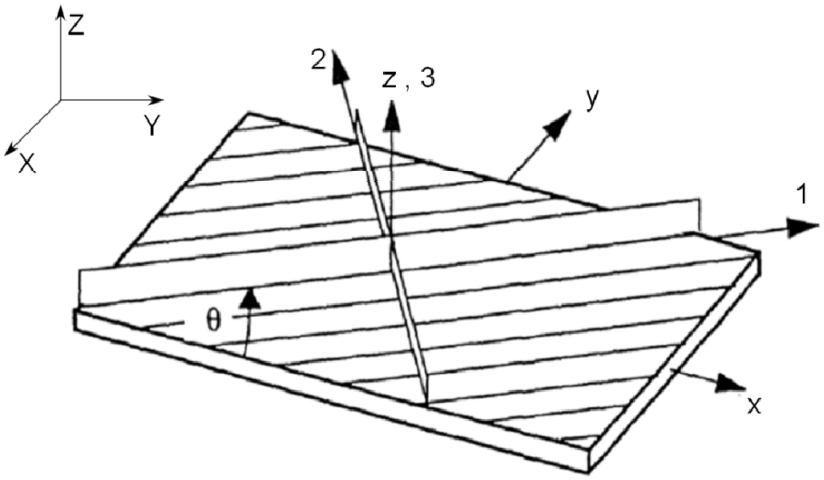
$$\mathbf{M} = \mathbf{B\varepsilon^0} + \mathbf{D\kappa} \tag{17}$$

Uma discussão mais aprofundada da consequência do surgimento da matriz de acoplamento $\mathbf{B}$ é apresentada na seção 2.1.5, aplicada ao caso de laminados formados por camadas de material ortotrópico, de maior interesse prático.

2.1.4 Camadas ortotrópicas de material

A utilização de camadas ortotrópicas ao invés de camadas isotrópicas afeta apenas as relações tensão-deformação, sem alterar as relações constitutivas do laminado. Neste caso as propriedades direcionais estão alinhadas a eixos que não são necessariamente iguais aos eixos da peça (x, y, z) ou aos eixos globais da estrutura (X, Y, Z). Para o caso de uma lâmina reforçada por fibras unidirecionais, existem dois planos de simetria perpendiculares que definem os chamados eixos principais (1, 2). Estes eixos correspondem à direção da fibra (1) e à direção transversal à fibra (2), como mostrado na Figura 8.

Figura 8 - Camada de material ortotrópico e convenção de eixos, adaptado de Gürdal et al. (1999).



Em uma lâmina ortotrópica, as relações tensão-deformação sobre os eixos principais são dadas pela equação (18).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

onde os coeficientes C_{ij} são dados por:

$$C_{11} = \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta};\ C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\Delta};\ C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta}$$

$$C_{21} = \frac{E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})}{\Delta};\ C_{22} = \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\Delta};\ C_{23} = \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} \tag{19}$$

$$C_{31} = \frac{E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{\Delta};\ C_{32} = \frac{E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21})}{\Delta};\ C_{33} = \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}$$

$$C_{44} = G_{23};\ \ C_{55} = G_{13};\ \ C_{66} = G_{12} \tag{20}$$

onde:

$$\Delta = 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}-\nu_{13}\nu_{21}\nu_{32}-\nu_{23}\nu_{32} \tag{21}$$

Por meio de relações de reciprocidade (22), as 12 constantes de Engenharia (3 módulos de elasticidade, 3 módulos de cisalhamento e 6 coeficientes de Poisson), podem ser reduzidas a 9 constantes independentes.

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1};\quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1};\quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \tag{22}$$

Para o caso de lâminas de espessura fina, sem carregamentos aplicados fora do plano (estado plano de tensão), pode-se considerar (23):

$$\sigma_3 = 0; \tau_{23} = 0;\ \tau_{31} = 0 \tag{23}$$

Isto reduz as relações tensão-deformação de (18) para (24):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{24}$$

onde:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12} \qquad (25)$$

O fato de considerar-se estado plano de tensão não impede que existam e sejam calculadas as deformações no eixo normal ao plano (ε_3), por meio da equação formada pela terceira linha de (18), como em (26):

$$\varepsilon_3 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_2 \qquad (26)$$

Todas as relações apresentadas até este momento levam em conta as deformações e tensões sobre os eixos principais do laminado. No entanto, como as fibras do laminado são geralmente rotacionadas em relação ao sistema de coordenadas de referência da peça (x, y), é necessária uma transformação das tensões e deformações por meio de (27).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (27)$$

Os valores de ε_{xy} e ε_{12} são os tensores das deformações de cisalhamento, que se relacionam com as deformações de cisalhamento de engenharia por meio das relações em (28):

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} \qquad (28)$$

Isto faz com que a matriz de rotação ($\mathbf{T}$) seja alterada de modo a manter consistência com as deformações de Engenharia, formando $\mathbf{T}_e$ (29).

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{29}$$

Substituindo estas relações em (24) obtemos (30), que relaciona tensões e deformações de Engenharia em *uma lâmina*:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_e^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}_e \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{30}$$

sendo $\mathbf{Q}$, a matriz definida em (24):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{31}$$

A operação $\mathbf{T}_e^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}_e$ da equação (30) leva a expressões algebricamente grandes, que podem ser simplificadas por meio de identidades trigonométricas, chegando-se em expressões da forma das equações (32) e (33), úteis para o projeto e otimização de laminados.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned} \tag{32}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{Q_{11}} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
\overline{Q_{12}} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, \\
\overline{Q_{22}} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
\overline{Q_{16}} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, \\
\overline{Q_{26}} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, \\
\overline{Q_{66}} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
\end{aligned}
\tag{33}
$$

2.1.5 Laminados formados por camadas ortotrópicas

Além das hipóteses adotadas para modelar as lâminas ortotrópicas isoladas, para a análise de laminados formados por camadas ortotrópicas, a Teoria Clássica de Laminação assume que as "N" camadas estão perfeitamente unidas entre si por uma superfície infinitamente fina e que as deformações no plano da união são contínuas.

A distribuição de deformações pode ser dada pela superposição das deformações provocadas pelos carregamentos no plano (distribuição constante ao longo da espessura, representada pela deformação no plano médio, ε_0) e pelos carregamentos de flexão (distribuição linear ao longo da espessura, representada pela curvatura κ), como em (34):

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
\tag{34}
$$

Desta maneira, utilizando (30) e (34), as tensões em uma camada k são expressas por (35), onde evidencia-se que as tensões calculadas não são válidas para a seção completa, e sim para cada camada k, condizente com as hipóteses adotadas anteriormente.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \tag{35}$$

Integrando-se as tensões das camadas ao longo da espessura total do laminado, obtêm-se as resultantes de tensão (36) e momentos (37) por unidade de largura da seção transversal.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{36}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \tag{37}$$

Substituindo as relações tensão-deformação de (35) em (36) e (37), as equações constitutivas para o laminado completo tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{38}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{39}$$

onde:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q_{ij}})_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \tag{40}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q_{ij}})_{(k)}(z_k^2 - z_{k-1}^2) \tag{41}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q_{ij}})_{(k)}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{42}$$

Em notação matricial:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \tag{43}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \tag{44}$$

Nota-se pelas equações (43) e (44) que existe acoplamento entre as deformações de carregamentos no plano e de flexão (matriz $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$), a menos que a sequência de empilhamento do laminado seja simétrica. Este acoplamento surge até no caso de lâminas isotrópicas. Por exemplo, os termos B_{16} e B_{26} (equações (38) e (39)), no caso de laminados não simétricos formados por camadas orientadas em direções fora dos eixos de referência, podem gerar torções no laminado, mesmo que carregamentos de momento torçor não estejam sendo aplicados. Carregamentos no plano, como N_x e N_y, devido a estes termos, geram curvaturas κ_{xy}. Portanto, uma maneira de se evitar o acoplamento entre as respostas do laminado no plano e fora dele é utilizar sequências de empilhamento simétricas.

Outro acoplamento que surge é entre as resultantes de momento M_x e M_y e a curvatura de torção κ_{xy}, devido aos termos D_{16} e D_{26} na equação (39). Este comportamento leva a uma tendência de o laminado torçer quando submetido a momentos fletores uniformes. A magnitude destes termos é pequena quando comparada com os outros termos de rigidez da flexão, porém sempre estão presentes em laminados com lâminas orientadas fora dos eixos de referência. Portanto, no caso de lâminas ortotrópicas com orientações não nulas, este acoplamento não pode ser evitado, apenas minimizado.

Por fim, a presença dos termos de acoplamento A_{16} e A_{26} na equação (38), leva ao surgimento de tensões de cisalhamento quando o laminado é submetido a carregamentos no plano N_x e N_y. Novamente, estes termos surgem pela presença

de camadas não alinhadas com os eixos de referência. Porém, neste caso, seu efeito pode ser eliminado pela utilização de empilhamentos balanceados, ou seja, que possuem uma camada com orientação negativa para cada camada com orientação positiva de mesmo valor absoluto. Este balanceamento não necessariamente precisa ser feito por meio de camadas adjacentes, é possível que os pares sejam dispostos em posições diferentes ao longo da espessura. Porém, a distância entre as camadas balanceadas afeta os termos D_{16} e D_{26} diretamente, sendo desejável que as camadas sejam balanceadas por suas adjacentes, minimizando o efeito dos termos de acoplamento flexão-torção.

2.1.6 Critérios de falha para materiais compósitos

A predição de falha em estruturas de materiais compósitos possui algumas dificuldades adicionais em relação aos materiais isotrópicos. Mesmo estando carregado uniformemente apenas no plano, as tensões ao longo da espessura do laminado variam. O fato de agrupar camadas com composições e orientações diferentes pode levar a falhas em certas camadas antes das restantes. Outra dificuldade é a questão da delaminação, onde a matriz do compósito falha em regiões localizadas, rompendo a união entre camadas do laminado. Teorias de delaminação levam em conta o cálculo das tensões na direção normal ao plano do laminado, σ_z, bem como as tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz}, o que exigem análises mais refinadas e custosas computacionalmente.

Nesta seção são abordados os critérios de falha para as camadas isoladas e para o laminado quando submetido a um estado plano de tensão. Assume-se que a falha da primeira camada do laminado levará à falha do mesmo, critério chamado falha da primeira camada, ou "*first-ply failure criterion*". Considerações são feitas também para a análise do caso da flexão, porém não serão abordadas teorias de predição de delaminação, que envolvem também parâmetros micromecânicos, como regiões de vazios de resina, adesão entre camadas não ideal, etc.

Critério da Máxima Tensão e Máxima Deformação

A mesma idéia do critério utilizado para materiais isotrópicos é a base destes critérios. Haverá a falha do material quando as tensões nas direções paralelas ou transversais às fibras superarem os valores limites obtidos por ensaios do material.

$$\sigma_1 < X_t \;\; ; \;\; \sigma_2 < Y_t \qquad \text{para } \sigma_1, \sigma_2 > 0 \tag{45}$$

$$\sigma_1 > -X_c \; ; \; \sigma_2 > -Y_c \qquad \text{para } \sigma_1, \sigma_2 < 0 \tag{46}$$

$$|\tau_{12}| < S \tag{47}$$

onde X e Y representam as tensões de ruptura experimentais na direção ao longo e transversalmente as fibras, respectivamente; o subescrito "t" e "c" correspondem aos valores de tensão à tração e à compressão respectivamente; as tensões $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ são as tensões principais da camada, e S a carga de ruptura de cisalhamento no plano, obtida em ensaio de cisalhamento puro.

Ou então, do ponto de vista de deformações, haverá ruptura se:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_1^t = \frac{X_t}{E_1} \;\; ; \;\; \varepsilon_2 < \varepsilon_2^t = \frac{Y_t}{E_2} \qquad \text{para } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \tag{48}$$

$$\varepsilon_1 > -\varepsilon_1^c = -\frac{X_c}{E_1} \;\; ; \;\; \varepsilon_2 > -\varepsilon_2^c = -\frac{Y_c}{E_2} \qquad \text{para } \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0 \tag{49}$$

$$|\gamma_{12}| < \gamma_{12}^s = \frac{S}{G_{12}} \tag{50}$$

Critério de *Tsai-Hill*

A partir da observação experimental da falha de materiais reforçados por fibra, nota-se que a interação entre diferentes componentes de tensões pode afetar a falha deste materiais. O critério de *Tsai-Hill* tem a proposta de levar em consideração estas interações, ao contrário dos critérios de máxima tensão e deformação que não incluem estas interações.

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t^2}+\frac{\sigma_2^2}{Y_t^2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t^2}+\frac{\tau_{12}^2}{S^2}<1 \tag{51}$$

Na equação (51), deve-se analisar os valores de σ_1,σ_2, e caso algum deles seja negativo, indicando compressão, o termo X_t ou Y_t deve ser substituído pelo seu correspondente de compressão, X_c ou Y_c.

Uma generalização deste critério, proposta por Hoffman e chamada de critério de Hoffman leva em conta diretamente as diferentes tensões na tração e na compressão:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_tX_c}+\frac{\sigma_2^2}{Y_tY_c}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X_tX_c}+\left(\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c}\right)\sigma_1+\left(\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2+\frac{\tau_{12}^2}{S^2}<1 \tag{52}$$

Critério de *Tsai-Wu*

O critério de *Tsai-Wu* é uma forma mais geral de critério de falha para materiais ortotrópicos sob estado plano de tensão, dado por:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_tX_c}+\frac{\sigma_2^2}{Y_tY_c}+2F_{12}\sigma_1\sigma_2+\left(\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c}\right)\sigma_1+\left(\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2+\frac{\tau_{12}^2}{S^2}<1 \tag{53}$$

O coeficiente F_{12} representa o efeito da interação entre as duas tensões normais σ_1,σ_2 na falha do material. Certas abordagens admitem F_{12} nulo, ou seja, ignoram os efeitos da interação entre as duas tensões normais. O critério de *Tsai-Hill* é recuperado com $F_{12}=-1/2X_t^2$, e com $F_{12}=-1/2X_tX_c$, o critério de Hoffman é obtido.

O critério chamado de *Tsai-Wu* especificamente busca obter o critério de von *Mises* para materiais isotrópicos através do valor de F_{12} definido em (54), chegando-se na expressão completa do critério (55).

$$F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} \tag{54}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2 < 1 \tag{55}$$

Comparativamente com o critério de *Tsai-Hill*, o critério de *Tsai-Wu* é ligeiramente mais conservador para falha à tração e menos conservador para falha à compressão, porém as diferenças são mínimas. A maior diferença para o critério de *Tsai-Hill* está no caso de cargas biaxiais, onde o termo F_{12} possui maior influência.

Para a aplicação dos critérios que se baseiam em deformações, como é o caso do critério de máxima deformação, é necessário que se calcule o vetor de deformações de engenharia sobre os eixos principais do laminado, para cada camada k de espessura h, recuperando parte da equação (38).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = h\mathbf{A}^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{\sigma_x} \\ \overline{\sigma_y} \\ \overline{\tau_{xy}} \end{Bmatrix} \tag{56}$$

A obtenção das deformações nos eixos principais das camadas é feita por meio da equação (57), onde $\mathbf{T}_e$ é a matriz de rotação definida na equação (29).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_{(k)} = \mathbf{T}_e^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \tag{57}$$

Para o caso da utilização de critérios que envolvam tensões máximas, inicia-se com o cálculo das deformações nos eixos principais de cada camada como em (57), porém aplicando-as na equação (24), para cada camada do laminado.

Em situações onde existam carregamentos de flexão além de carregamentos no plano é fundamental que sejam checados os critérios de falha em todas as

camadas do laminado. A flexão gera deformações com variação linear ao longo da espessura, o que não ocorre no caso de estado plano de tensão. Isto pode fazer com que camadas de mesmas propriedades de material e orientação tenham deformações e tensões diferentes dependendo de seu posicionamento ao longo da espessura. Mesmo em casos de sequências de laminação simétricas, devido aos valores de tensão máxima serem diferentes em compressão e tração, as camadas poderão apresentar valores dos critérios de falha diferentes entre si.

2.2 Teoria de cascas laminadas para implementação do MEF

Nesta seção o objetivo é apresentar o método de análise da estrutura compósita com foco na otimização topológica de placas laminadas compósitas, proposto pelo trabalho de Kiyono (2012). Este método, implementado na forma de um código em linguagem Matlab permite que a metodologia de otimização obtenha respostas de comportamento da estrutura que direcionam a busca de um projeto ótimo.

2.2.1 Modelagem da estrutura

A estrutura de interesse da otimização consiste em painéis compósitos laminados reforçados sujeitos a esforços de membrana e flexão. A implementação do código de elementos finitos que substanciará as análises da estrutura necessárias para que o algoritmo de otimização permita encontrar uma estrutura ótima deve ser capaz de representar estas estruturas com o menor custo computacional possível.

Elementos de casca tornam-se uma escolha natural por permitirem modelar o comportamento de estruturas finas sem um grande custo computacional pois não exigem a discretização do domínio no sentido da espessura da estrutura, representada pela sua superfície média.

Neste trabalho será utilizado o elemento de casca degenerado, proposto por (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970), (REDDY, 2004) e baseado na teoria de

casca laminada de primeira ordem, para as análises em regime linear de placas e cascas compósitas laminadas. O mesmo possui 8 nós por elemento, 4 em seus vértices e 4 nós intermediários em suas arestas. Duas hipóteses são impostas na formulação deste elemento:

- hipótese cinemática: vetor diretor. Dado um vetor diretor $\mathbf{V}_\mathbf{n}^\mathbf{k}$ normal à superfície média do elemento no início do movimento, partículas alinhadas à este vetor permanecem alinhadas à ele ao final do movimento. $\mathbf{V}_\mathbf{n}^\mathbf{k}$ pode, ou não, permanecer normal à superfície média no final do movimento;
- hipótese mecânica: estado plano de tensões. A componente normal ao elemento (σ_{33}) do tensor de tensões é nula em todo o movimento.

2.2.2 Teoria de elementos finitos para o elemento de casca laminada

Como em Kiyono (2012), base da implementação empregada neste trabalho, são definidos três sistemas de coordenadas para o elemento de casca utilizado:

- Coordenadas globais (x,y,z): descreve as coordenadas da geometria da estrutura, posicionamento de aplicação de carregamentos e os deslocamentos globais da estrutura.
- Coordenadas naturais (r,s,t): necessário para a formulação de elementos isoparamétricos, facilita o cálculo das matrizes de rigidez por meio do emprego de técnicas de integração numérica, no caso, integração de Gauss.
- Coordenadas locais (x',y',z'): utilizado para a definição da geometria do elemento, que neste trabalho é obtida pela curvatura do mesmo. Este sistema é criado em cada nó do elemento, baseado nos versores unitários $\left\{\mathbf{V}_\mathbf{1}^\mathbf{k}, \mathbf{V}_\mathbf{2}^\mathbf{k}, \mathbf{V}_\mathbf{n}^\mathbf{k}\right\}$. A curvatura do elemento é então calculada como sendo a diferença entre os sistemas locais de cada nó.

A definição do sistema de coordenadas local é feita através da orientação do sistema de coordenadas naturais e dos eixos do sistemas de coordenadas globais. Primeiramente, definidas as coordenadas naturais nodais r e s para cada um dos nós do elemento isoparamétrico, dois vetores são calculados para cada nó k do domínio por meio de (58).

$$\begin{aligned} \mathbf{v_{1k}} &= \left\{ \sum_{ne=1}^{q} x_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \quad \sum_{ne=1}^{q} y_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \quad \sum_{ne=1}^{q} z_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \right\}^T \\ \mathbf{v_{2k}} &= \left\{ \sum_{ne=1}^{q} x_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \quad \sum_{ne=1}^{q} y_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \quad \sum_{ne=1}^{q} z_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \right\}^T \end{aligned} \tag{58}$$

onde N_{ne} e x_{ne} são respectivamente as funções de forma e as coordenadas globais x do nó ne e q, o número de nós por elemento, igual a 8. Calculados estes dois vetores, o vetor normal à superfície média no nó k do domínio é obtido através de (59).

$$\mathbf{V}_n^k = \frac{\mathbf{v}_{1k} \times \mathbf{v}_{2k}}{\left\| \mathbf{v}_{1k} \times \mathbf{v}_{2k} \right\|} \tag{59}$$

No entanto, como um nó k qualquer do domínio pode pertencer a mais de um elemento simultaneamente, é necessário somar e normalizar os vetores $\mathbf{V_n^k}$ de cada elemento ao qual k pertença, através de (60).

$$\mathbf{V}_n^k = \frac{\sum_{e=1}^{e_n} \mathbf{V}_n^{k_e}}{\left\| \sum_{e=1}^{e_n} \mathbf{V}_n^{k_e} \right\|} \tag{60}$$

onde e_n é o número de elementos aos quais o nó k pertence. Obtido o vetor normal, os outros vetores do sistema de coordenadas local são obtidos através de (61) e (62).

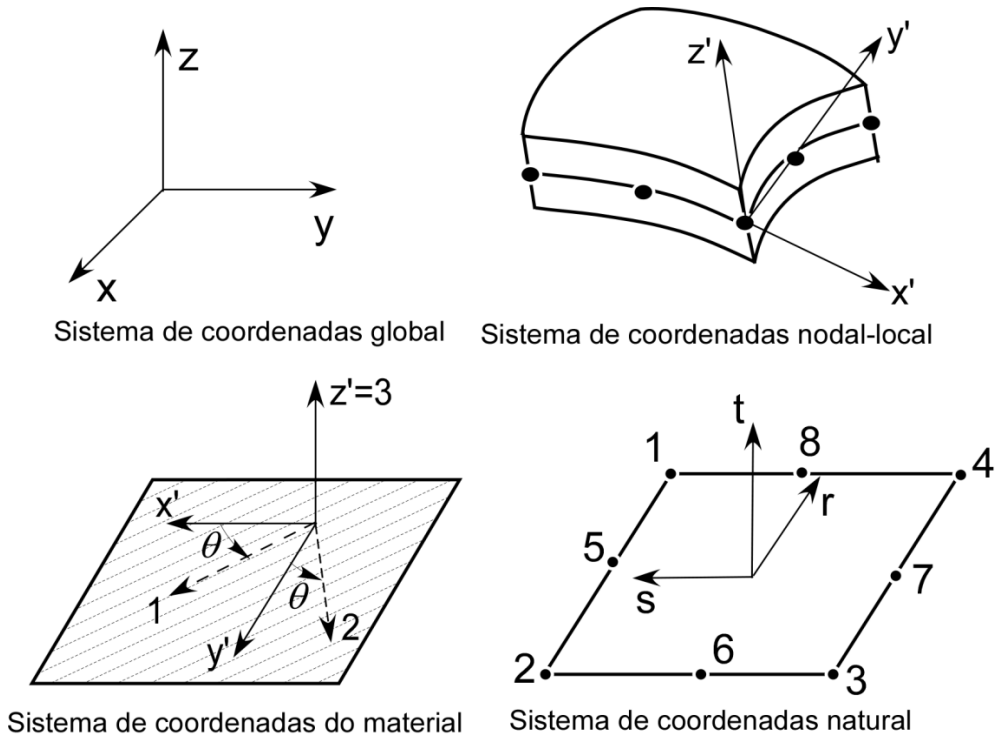
$$\mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_n^k}{\left\| \mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_n^k \right\|} \tag{61}$$

$$\mathbf{V}_2^k = \mathbf{V}_n^k \times \mathbf{V}_1^k \tag{62}$$

sendo $\mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, e caso $\mathbf{V}_n^k$ seja paralelo à $\mathbf{e}_y$, automaticamente $\mathbf{V}_1^k = \mathbf{e}_z$.

Na modelagem de estruturas compósitas, caracterizadas pelo comportamento de material ortotrópico, as propriedades mecânicas são definidas no plano das camadas em duas direções: uma direção alinhada com as fibras e outra perpendicular à direção das fibras, respectivamente orientação 1 e orientação 2. Deste modo, é definido um sistema de coordenadas adicional, baseado no material (1,2,3) que permite calcular as deformações e tensões nas direções do material, tornando possível o cálculo dos critérios de falha que são baseados nas propriedades e tensões nestes eixos. Este sistema é obtido pela rotação dos eixos x' e y' em torno do eixo z' (mantido fixo) em um ângulo equivalente à orientação das fibras do material ortotrópico. A Figura 9 exemplifica os diferentes sistemas de coordenadas adotados.

Figura 9 - Diferentes sistemas de coordenadas adotados.



No caso do elemento de casca de 8 nós empregado neste trabalho (KIYONO, 2012), (BATHE, 1996), (REDDY, 2004) a cinemática do mesmo é descrita por uma interpolação de sua geometria e variáveis de deslocamento, como em (63) onde as coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento são calculadas:

$$\begin{Bmatrix} {}^{l}x \\ {}^{l}y \\ {}^{l}z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{8} N_k(r,s) \left(\begin{Bmatrix} {}^{l}x_k \\ {}^{l}y_k \\ {}^{l}z_k \end{Bmatrix} + t\frac{h_k}{2} \begin{Bmatrix} {}^{l}V_{nx}^{k} \\ {}^{l}V_{ny}^{k} \\ {}^{l}V_{nz}^{k} \end{Bmatrix} \right) \tag{63}$$

em que $\left\{ {}^{l}x \quad {}^{l}y \quad {}^{l}z \right\}^T$ é o vetor de coordenadas globais de um ponto qualquer no elemento; $N_k(r,s)$ as funções de forma para cada um dos nós k de 1 à 8 do elemento; r, s e t as coordenadas naturais da definição de elemento isoparamétrico; $\left\{ {}^{l}x_k \quad {}^{l}y_k \quad {}^{l}z_k \right\}^T$ o vetor de coordenadas do nó k; h_k a espessura do elemento para o nó k; $\left\{ {}^{l}V_{nx}^{k} \quad {}^{l}V_{ny}^{k} \quad {}^{l}V_{nz}^{k} \right\}^T$ o vetor diretor para o nó k, e l, uma indicação da configuração do elemento: inicial, caso l nulo, ou deformada caso l unitário.

A partir das coordenadas de um ponto qualquer do elemento, calculadas através de (63), os deslocamentos deste mesmo ponto são obtidos por meio de (64):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{1}x \\ {}^{1}y \\ {}^{1}z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{0}x \\ {}^{0}y \\ {}^{0}z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{8} N_k(r,s) \left(\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + t\frac{h_k}{2} \mathbf{V}_n^k \right) \tag{64}$$

onde $\mathbf{V}_n^k$, a diferença entre vetores diretores antes e depois da deformação é dada por (65):

$$\mathbf{V}_n^k = {}^{1}\mathbf{V}_n^k - {}^{0}\mathbf{V}_n^k \tag{65}$$

$\mathbf{V}_n^k$ pode ser entendido também como o vetor resultante de duas rotações do vetor ${}^0\mathbf{V}_n^k$ em torno dos eixos que definem o sistema local de coordenadas, vetores ${}^0\mathbf{V}_1^k$ e ${}^0\mathbf{V}_2^k$, cujas rotações são α_k e β_k. Assim, $\mathbf{V}_n^k$ pode ser calculado como em (66), que substituído em (64), resulta em (67).

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^0\mathbf{V}_2^k \alpha_k + {}^0\mathbf{V}_1^k \beta_k \tag{66}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{8} N_k(r,s) \left(\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + t\frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} -V_{2x}^k & V_{1x}^k \\ -V_{2y}^k & V_{1y}^k \\ -V_{2z}^k & V_{1z}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \right) \tag{67}$$

O campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ de um elemento de casca genérico pode ser então escrito como em (68), sendo composto por três componentes de translação nos nós da superfície média em coordenadas globais (u_k, v_k, w_k) , e duas rotações em coordenadas locais (α_k, β_k), totalizando cinco graus de liberdade mecânicos por nó.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & \dots & \mathbf{A_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{u}}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{u_e} \tag{68}$$

onde,

$$\mathbf{A_k} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2x}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1x}^k \\ 0 & N_k & 0 & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2y}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1y}^k \\ 0 & 0 & N_k & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2z}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1z}^k \end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \{u_k \quad v_k \quad w_k \quad \alpha_k \quad \beta_k\}^T \tag{70}$$

Com os deslocamentos em coordenadas globais de um elemento de casca calculados, o tensor de deformação em coordenadas globais ($^{\mathbf{g}}\boldsymbol{\varepsilon}$) pode ser obtido através de (71), onde a matriz das derivadas das funções de forma do elemento $\mathbf{B}_u$ é calculada por meio da matriz Jacobiana e funções de forma como descrito em (BATHE, 1996), (REDDY, 2006), e apresentada em (72).

$$^{\mathbf{g}}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} & \mathbf{B}_{u2} & \dots & \mathbf{B}_{uk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_k \end{Bmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{B}_{uk} = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 & -d_k V_{2x}^k & d_k V_{1x}^k \\ 0 & b_k & 0 & -e_k V_{2y}^k & e_k V_{1y}^k \\ 0 & 0 & c_k & -g_k V_{2z}^k & g_k V_{1z}^k \\ b_k & a_k & 0 & -(e_k V_{2x}^k + d_k V_{2y}^k) & (e_k V_{1x}^k + d_k V_{1y}^k) \\ 0 & c_k & b_k & -(g_k V_{2y}^k + e_k V_{2z}^k) & (g_k V_{1y}^k + e_k V_{1z}^k) \\ c_k & 0 & a_k & -(d_k V_{2z}^k + g_k V_{2x}^k) & (d_k V_{1z}^k + g_k V_{1x}^k) \end{bmatrix} \tag{72}$$

Para o elemento de casca utilizado neste trabalho, k varia de 1 à 8; e (73) apresenta o cálculo dos coeficientes da matriz (72), onde a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas globais para coordenadas naturais ($\mathbf{J}$, e $\mathbf{J}^*$ sua inversa) é dada por (74) (REDDY, 2006).

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{k,r} \\ N_{k,s} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} d_k \\ e_k \\ g_k \end{Bmatrix} = \frac{h_k}{2} \left(t \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} J_{13}^* \\ J_{23}^* \\ J_{33}^* \end{Bmatrix} N_k \right) \tag{73}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} r_{,x} & s_{,x} & t_{,x} \\ r_{,y} & s_{,y} & t_{,y} \\ r_{,z} & s_{,z} & t_{,z} \end{bmatrix} \tag{74}$$

De posse das deformações do elemento em coordenadas globais, por meio de (75) são calculadas as deformações no sistema de coordenadas local, utilizando a matriz de transformação $\mathbf{T}_\varepsilon$ exibida em (76).

$$^{l}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{75}$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \tag{76}$$

onde os termos da matriz (76) são obtidos através das componentes dos três vetores que definem o sistema de coordenadas locais, calculados como em (77), por meio das colunas 1 e 2 (J_1, J_2) da matriz Jacobiana, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} &= \{l_1 \quad m_1 \quad n_1\}^T = (J_1)_{norm} \\
\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}} &= \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\}^T = (J_1 \times J_2)_{norm} \\
\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} &= \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\}^T = (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})
\end{aligned} \tag{77}$$

Por fim, as deformações do elemento nos eixos do material (${}^{\mathbf{m}}\boldsymbol{\varepsilon}$) precisam ser calculadas de modo a permitir a análise de critérios de falha, por exemplo. Isto é feito através da relação (78), onde as deformações nos eixos locais são rotacionadas por meio de uma matriz de rotação ortotrópica (79) para os eixos do sistema de coordenadas do material.

$${}^{\mathbf{m}}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\theta \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} \tag{78}$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \tag{79}$$

onde $s = \sin(\theta)$ e $c = \cos(\theta)$, sendo θ o ângulo de orientação das fibras do material, exemplificado na Figura 9.

Deste ponto em diante, as deformações nos eixos do material, ${}^{\mathbf{m}}\boldsymbol{\varepsilon}$, serão apresentados por conveniência apenas como $\boldsymbol{\varepsilon}$. Assim, o cálculo destas

deformações a partir dos deslocamentos globais dos nós do elemento em questão podem ser resumidas através da expressão (80).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_{\theta}\mathbf{T}_{\varepsilon}\mathbf{B}_{u}\mathbf{u}_{e} \tag{80}$$

Definidas as deformações do elemento, as tensões mecânicas utilizadas para as restrições de tensão do problema de otimização são calculadas em cada ponto de Gauss da integração reduzida. No caso deste trabalho, onde o elemento possui 8 nós, a integração reduzida é de 4 pontos de Gauss (COOK, 2007). No entanto, de modo a obter o comportamento do elemento sob flexão são utilizados 8 pontos em cada elemento, 4 na superfície inferior e 4 na superfície superior, superfícies estas onde são encontrados os máximos valores de tensão quando o elemento está sob efeitos de flexão.

Considerando-se um estado plano de tensões ($\sigma_{33} = 0$) as tensões em um ponto qualquer do domínio são calculadas por meio de (81), onde $\mathbf{u}_e$ são os deslocamentos do elemento ao qual o ponto de cálculo da tensão pertence e $\mathbf{c}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{E}}$, a matriz constitutiva do material, que para materiais ortotrópicos considerados neste trabalho, é dada por (82).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{c}^{\mathbf{E}}\mathbf{T}_{\theta}\mathbf{T}_{\varepsilon}\mathbf{B}_{u}\mathbf{u}_{e} \tag{81}$$

$$\mathbf{c}_0^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (82)$$

onde $E_3 = E_2$, $\nu_{31} = \nu_{21}$ e por meio de (83) e (84) são obtidos os outros parâmetros.

$$G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})} \quad (83)$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (84)$$

Apresentadas as matrizes constitutivas, matrizes de transformação de coordenadas e de derivadas das funções de forma do elemento, a matriz de rigidez dos elementos pode ser calculada através de (85). Na seção 4.2 são descritas as nuances de implementação numérica que surgem quando o método de Otimização Discreta de Material (apresentada na seção 3.1.1) e a técnica de projeção são utilizados, afetando a maneira como a equação (85) é escrita.

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{c}_0^E \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u d\Omega \quad (85)$$

3 FORMULAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO

3.1 Otimização Paramétrica

A otimização paramétrica tem como uma das vantagens em relação aos outros métodos a possibilidade de empregar análises através de solucionadores comerciais, bem como a flexibilidade de utilização de diferentes tipos de algoritmos de otimização.

A formulação aqui apresentada explora estas duas vantagens, fazendo uso de dois métodos de otimização distintos (baseados em gradientes e algoritmo genético) e de duas parametrizações de ângulos de fibra diferentes (Método de Otimização Discreta de Material e ângulos contínuos). Os resultados da aplicação destas diferentes formulações são comparadas na seção 5.1.

3.1.1 Método de Otimização Discreta de Material

A otimização dos ângulos de orientação das fibras de compósitos por meio de técnicas de otimização contínua tem a deficiência de gerar um problema do tipo não convexo, ou seja, suscetível a múltiplos mínimos locais, como mostrado por Stegmann e Lund (2005) e Lund (2009). Os mesmos apresentam uma metodologia de otimização diferente, aplicável para a seleção de parâmetros que assumem valores discretos, a chamada ODM (STEGMANN, 2004).

Esta técnica baseia-se no cálculo de propriedades efetivas do material, por meio da soma ponderada das propriedades de diferentes materiais candidatos. No caso dos laminados compósitos, isto é feito por meio da matriz de propriedade elástica efetiva $\mathbf{c}_{ef}^{E}$, que é formada por uma ponderação de matrizes constitutivas $\mathbf{c}_{\theta_i}^{E}$, $i = 1, \ldots, n^c$, representando o mesmo material, porém com as fibras orientadas em diferentes ângulos discretos θ_i. As equações (86) e (87) apresentam matematicamente este conceito, empregando-se a mesma notação do código de elementos finitos apresentado na seção 2.2.2.

$$\mathbf{c}_{ef}^{E} = \sum_{i=1}^{n^c} w_i \mathbf{c}_{\theta_1}^{E} = w_1 \mathbf{c}_{\theta_1}^{E} + w_2 \mathbf{c}_{\theta_2}^{E} + \ldots + w_{n^c} \mathbf{c}_{\theta_{n^c}}^{E} \quad , 0 \le w_i \le 1 \tag{86}$$

$$\mathbf{c}_{\theta_i}^{E} = \mathbf{T}_{\theta_i}^{T} \mathbf{c}_0^{E} \mathbf{T}_{\theta_i} \tag{87}$$

onde $\mathbf{c}_0^E$ é a matriz constitutiva do compósito no sistema de coordenadas local, $\mathbf{c}_{\theta_i}^E$ é a matriz constitutiva rotacionada pelo ângulo da fibra θ_i, w_i são as funções peso que ponderam as diferentes matrizes rotacionadas e n^c, o número total de ângulos de fibra candidatos.

A otimização busca então os pesos w_i de cada matriz constitutiva que melhorem a função objetivo, sendo que ao final da otimização, apenas um destes pesos será unitário e os outros serão nulos. Isto equivale a dizer que em cada região da estrutura apenas uma determinada orientação estará ativa ao final. No início, a matriz $\mathbf{c}_{ef}^E$ é uma combinação de todas as matrizes admitidas.

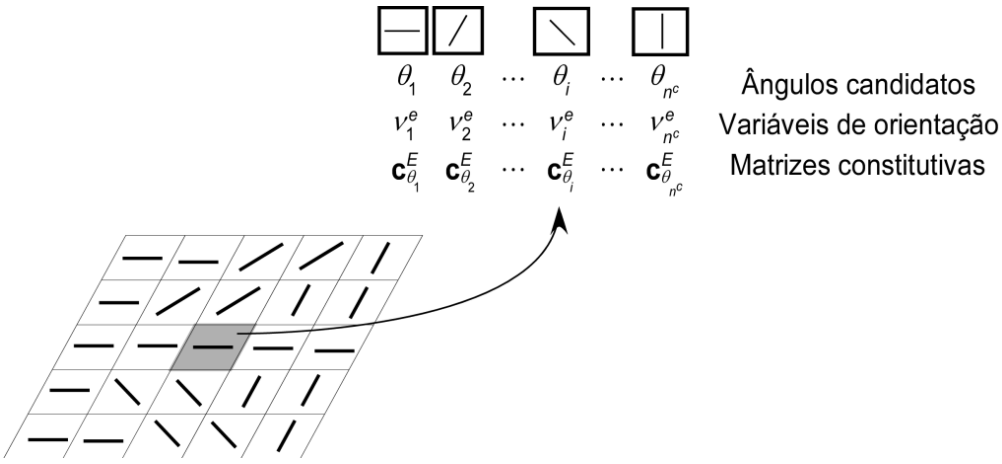
Para isto, é empregada a variável de orientação ν_i^e, onde $\nu_i^e \in [0,1]$ em que i indica o ângulo candidato dentre os possíveis, e e, o elemento que receberá aquela orientação. Esta formulação agrega um grande número de variáveis (n^c variáveis para cada elemento ou conjunto de elementos do laminado), porém tenta evitar o problema de múltiplos mínimos locais que ocorre quando o ângulo é empregado diretamente como variável de projeto. Além disso, problemas com um grande número de variáveis de otimização já possui métodos eficientes de solução, como o MMA. Os pesos de cada matriz constitutiva são calculados por meio de (88).

$$w_i = \frac{\left(\nu_{\mathrm{i}}^e\right)^{\mathrm{p}_\nu} \prod_{\mathrm{j=1,\ j\neq i}}^{\mathrm{n^c}} \left(1 - \left(\nu_{\mathrm{j}}^e\right)^{\mathrm{p}_\nu}\right)}{\sum_{k=1}^{\mathrm{n^c}} \left[\left(\nu_{\mathrm{k}}^e\right)^{\mathrm{p}_\nu} \prod_{\mathrm{j=1,\ j\neq i}}^{\mathrm{n^c}} \left(1 - \left(\nu_{\mathrm{j}}^e\right)^{\mathrm{p}_\nu}\right)\right]} \tag{88}$$

Uma estratégia adotada pelo método para aproximar as variáveis ν_i^e para os valores 0 ou 1 é empregar um expoente de penalização p_ν, que penaliza valores

intermediários destas variáveis. Além disso, o termo $1-\left(\nu_{\mathrm{j}}^{e}\right)^{\mathrm{p}_{\nu}}$ no produtório, faz com que um acréscimo em uma das variáveis induza um decréscimo nas demais para uma mesma camada e elemento. A Figura 10 apresenta uma representação esquemática da parametrização da ODM.

Figura 10 - Representação do método da ODM e suas variáveis envolvidas.



Embora na otimização paramétrica proposta seja considerado apenas um valor de orientação por camada do laminado, com a metodologia da ODM é possível adotar variações do ângulo dentro de uma mesma camada; por regiões da estrutura (agrupamentos de elementos – "*patches*"), cujos ângulos de fibra dentro destas regiões sejam iguais (Figura 11); ou ainda, por cada elemento da malha de elementos finitos. Esta abordagem permitiria uma flexibilidade maior para a otimização, podendo resultar em projetos com desempenho superior, porém com custo computacional maior para obtenção da solução, dado que o número de variáveis de projeto e consequentemente, de análises necessárias para a obtenção dos gradientes, aumentam.

Além de considerar um valor único de orientação por camada do laminado devido a facilidade construtiva, nesta etapa serão utilizados agrupamentos de camadas, por serem considerados laminados simétricos. Este tipo de agrupamento é exemplificado na Figura 12. Isto permite reduzir pela metade o número de variáveis de projeto de orientação do problema.

Figura 11 - Exemplo do conceito de "*patches*" de elementos.

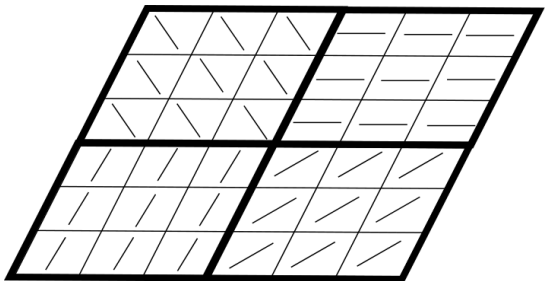
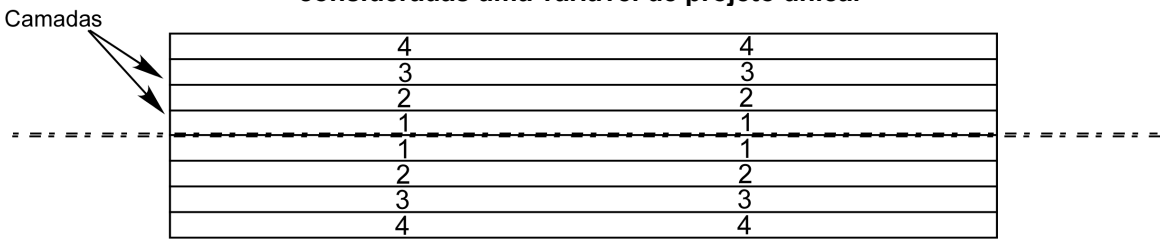


Figura 12 - Conceito de "*patches*" aplicado a camadas do laminado simétrico. Camadas de mesmo número representam mesma orientação das fibras, e portanto, podem ser consideradas uma variável de projeto única.



3.1.2 Função objetivo e restrições

Na formulação da otimização foi considerado o problema bem posto de maximização da carga crítica de flambagem do painel, sujeito à restrição de massa. O mesmo consiste em um problema de maximização de autovalores, semelhante ao problema encontrado na maximização de frequências naturais de vibração de estruturas.

Algumas restrições são impostas diretamente ao modelo de análise, como por exemplo, considerar apenas laminados simétricos, balanceados e com orientações de fibra somente de 0º, 45º, -45º e 90º (embora outros valores sejam admitidos na metodologia, os mesmos foram adotados por facilidade construtiva). A utilização de laminados simétricos e balanceados foi escolhida por anular os termos das matrizes de rigidez do laminado responsáveis pelo acoplamento da torção com a flexão.

Foram inseridas restrições de massa e máxima deformação, como mostradas nas inequações (89) à (92).

$$m<m_0 \tag{89}$$

$$-\varepsilon_{adm}^{c,1} < \varepsilon_{11}^{r} < \varepsilon_{adm}^{t,1} \tag{90}$$

$$-\varepsilon_{adm}^{c,2} < \varepsilon_{22}^{r} < \varepsilon_{adm}^{t,2} \tag{91}$$

$$-\varepsilon_{adm}^{12} < \varepsilon_{12}^{r} < \varepsilon_{adm}^{12} \tag{92}$$

onde m_0 representa um limite superior para a massa do painel com reforçadores; ε^r o valor de deformação observado no compósito (r pode representar uma região ou indicar o valor encontrado em uma determinada região); $\varepsilon_{adm}^{c,1}$ e $\varepsilon_{adm}^{t,1}$ os valores admissíveis de deformação à compressão e tração na direção das fibras, respectivamente; $\varepsilon_{adm}^{c,2}$ e $\varepsilon_{adm}^{t,2}$ os valores admissíveis de deformação à compressão e tração na direção perpendicular às fibras, respectivamente; e ε_{adm}^{12} o valor admissível de deformação à cisalhamento no plano das fibras.

Na estimativa da massa foram consideradas a massa dos reforçadores e do painel, levando em conta a densidade do laminado de fibra de carbono e matriz epóxi, variáveis geométricas do painel e do reforçador, e o número de camadas ativas no empilhamento (para o cálculo da espessura total do laminado). A escolha do valor limite de massa foi feita por meio de testes nos intervalos permitidos das variáveis de projeto, buscando-se valores próximos dos intermediários entre a mínima e máxima massa conseguida desta maneira. Neste ponto, o valor de máxima massa admissível pode ser utilizada para a redução de massa do painel caso os valores obtidos de carga de flambagem estejam superiores ao desejado. A redução deste valor faz com que o otimizador reduza a massa do projeto, pagando-se o preço com uma redução do valor da carga de flambagem.

As restrições de deformação podem assumir diferentes formas, dependendo da variável de saída do Abaqus analisada. Valores de deformação ε_{11}, ε_{22} e ε_{12} em uma região específica, em um ponto específico, máxima encontrada no painel, máxima no reforçador, máxima dentro de cada camada, e combinação entre essas deformações são algumas das possibilidades. Neste trabalho considerou-se por simplicidade as deformações ε_{11}, ε_{22} e ε_{12} máximas do laminado do painel, sob a condição de carregamento estático (pré-carga). Deve-se ressaltar que isto resulta em possíveis descontinuidades no processo de otimização em virtude da função

máxima deformação não possuir derivada, dado que o ponto de máxima deformação no painel (grandeza local) pode estar variando ao longo das iterações. Para contornar este problema, uma abordagem seria empregar uma função análoga à "norma-p" (DUYSINX; BENDSOE, 1998) que tem seu valor próximo do valor máximo do painel, porém é única (grandeza global) e portanto derivável. A mesma não foi implementada neste caso de otimização.

Os valores considerados máximos admissíveis de cada uma das cinco deformações são obtidos através do relatório de ensaios do material considerado, apresentado como exemplo na seção 5.2. Nota-se que estas restrições de deformação podem ser substituídas por outras de tensão, caso seja de interesse, sem prejuízos para a metodologia e sendo necessária apenas a alteração no código automatizado do solucionador de elementos finitos, no caso, o Abaqus.

Além destas restrições foram adotadas restrições quanto à sequência de empilhamento das camadas por questões de fabricação do compósito. Consideraram-se fixos os valores de espessura das camadas, porém o número das mesmas pode ser alterado durante o decorrer da otimização. Assim, utilizaram-se restrições que limitam o número total de camadas do laminado e a existência de camadas sem material entre duas camadas com material. As mesmas foram inseridas no problema sob a forma proposta por Zein et al. (2012), relacionadas nas inequações (93) e (94), respectivamente:

$$\sum_{i=1}^{N} S_{u_i^r}^{0} + S_{u_i^r}^{45} + S_{u_i^r}^{-45} + S_{u_i^r}^{90} < n_{\max} \tag{93}$$

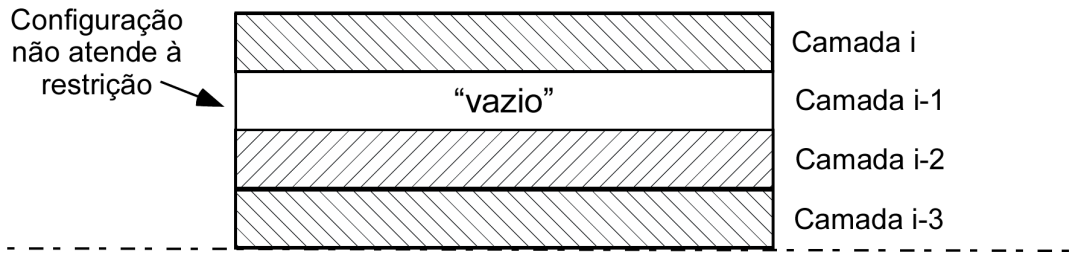
$$S_{u_i^r}^{0} + S_{u_i^r}^{45} + S_{u_i^r}^{-45} + S_{u_i^r}^{90} \leq S_{u_{i-1}^r}^{0} + S_{u_{i-1}^r}^{45} + S_{u_{i-1}^r}^{-45} + S_{u_{i-1}^r}^{90} \quad \text{para } i = 1 \ldots N/2 \tag{94}$$

onde $S_{u_i^r}^{\theta}$, é uma variável que representa a existência ou não de um valor θ de orientação da fibra na camada i, dentro de uma região r do laminado. A inequação (93) representa a restrição de máximo número de camadas ($n_{máx}$) do laminado em uma região particular “r”, dentro de N^r regiões em que está discretizado o domínio considerado.

A restrição (93) que limita o número de camadas do laminado acaba surgindo automaticamente na otimização quando adotam-se as variáveis de projeto propostas pela ODM. O número de camadas máximo do laminado equivale ao número de camadas admitidas nas variáveis de projeto para otimização, cabendo ao otimizador ativar ou não todas as camadas, naturalmente nunca ultrapassando este número. Deste modo, a mesma não precisa ser explicitamente considerada na formulação da otimização.

Por fim, a restrição (94) evita que regiões vazias sejam inseridas entre duas camadas consecutivas, como exemplificado na Figura 13.

Figura 13 - Ilustração de uma configuração de empilhamento que não atende à restrição (94).



A utilização das variáveis S é interessante pois as mesmas são análogas às variáveis ν de orientação do método de otimização discreta de material. Embora S e ν sejam na prática a mesma variável, a distinção de notação entre elas será mantida para ressaltar as diferentes origens das mesmas. Nota-se que embora na formulação original de Zein et al. (2012), as variáveis S sejam binárias, elas serão tratadas neste trabalho como variáveis contínuas entre 0 e 1. Em virtude do emprego da otimização discreta de material, as mesmas tendem a uma variável binária ao final da otimização, não comprometendo o conceito das restrições.

Sintetizando, o problema de otimização implementado fica formulado da maneira mostrada em (95).

$$\underset{dimensões,\, empilhamento}{\text{Maximizar}} \quad : \lambda_{cr}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeito à:} \quad & m < m_0 \\
& -\varepsilon_{adm}^{c,1} < \varepsilon_{11}^{r} < \varepsilon_{adm}^{t,1} \\
& -\varepsilon_{adm}^{c,2} < \varepsilon_{22}^{r} < \varepsilon_{adm}^{t,2} \\
& -\varepsilon_{adm}^{12} < \varepsilon_{12}^{r} < \varepsilon_{adm}^{12} \\
& S_{u_i^r}^{0} + S_{u_i^r}^{45} + S_{u_i^r}^{-45} + S_{u_i^r}^{90} \leq S_{u_{i-1}^r}^{0} + S_{u_{i-1}^r}^{45} + S_{u_{i-1}^r}^{-45} + S_{u_{i-1}^r}^{90}
\end{aligned} \tag{95}$$

onde $dimensões$ e $empilhamento$ são, respectivamente, as variáveis que parametrizam a geometria da seção transversal dos reforçadores e o empilhamento do material compósito, ambas definidas na seção 4.1.4; λ_{cr} a carga crítica de flambagem, e as outras variáveis seguem as definições apresentadas anteriormente nesta seção.

3.1.3 Algoritmo de otimização

Foi empregado o algoritmo MMA (SVANBERG, 1987) para a solução do problema de otimização no caso de variáveis contínuas. A sua utilização é feita por meio de implementação em Matlab do próprio autor do método, cedida para utilização em trabalhos de pesquisa acadêmicos, desde que citada sua referência (SVANBERG, 2002). A interface entre o Matlab e o Abaqus para obtenção dos valores da função objetivo e gradientes (entradas para o MMA) é feita por meio da escrita e leitura de arquivos do tipo texto, como descrito na seção 4.1.3.

Para uma comparação dos resultados e da metodologia, foi utilizado também o algoritmo genético para o problema de otimização com variáveis discretas, implementado pelo software comercial ESTECO ModeFrontier de otimização, sob o nome de MOGA-II. Este software é um ambiente de otimização multiobjetivo desenvolvido com o objetivo de acoplar diferentes softwares de análise de engenharia. Ferramentas CAD, CAE, análises estruturais e de fluidos (CFD) podem ser interligadas possibilitando otimizações com funções objetivo multidisciplinares.

Diversos algoritmos de otimização podem ser utilizados, a partir de um fluxograma comum à análise.

3.2 Otimização Topológica

Como introduzido na seção 1.3 deste trabalho, as abordagens do MOT são dividas em dois grandes grupos: a abordagem micro e macro. A abordagem micro foi escolhida para a implementação deste trabalho, com o método baseado em densidades. A escolha foi feita baseando-se no fato de que esta é uma abordagem consagrada de otimização topológica, com um alcance ainda pouco explorado em materiais compósitos, principalmente quando envolvendo restrições de critério de falha mecânica, como é o caso deste trabalho.

O método baseado em densidades utiliza uma microestrutura fictícia para relaxar o problema de otimização topológica. Uma das leis de material mais conhecidas e empregadas na literatura para implementação do método baseado em densidades é o SIMP ("*Solid Isotropic Microstructure with Penalty*", em inglês), inicialmente proposto por Bendsøe (1989). O SIMP baseia-se na definição do tensor de elasticidade E_{ijkl} e do volume da estrutura como em (96) e (97). Deste modo, embora a microestrutura não seja conhecida, o seu tensor constitutivo é conhecido.

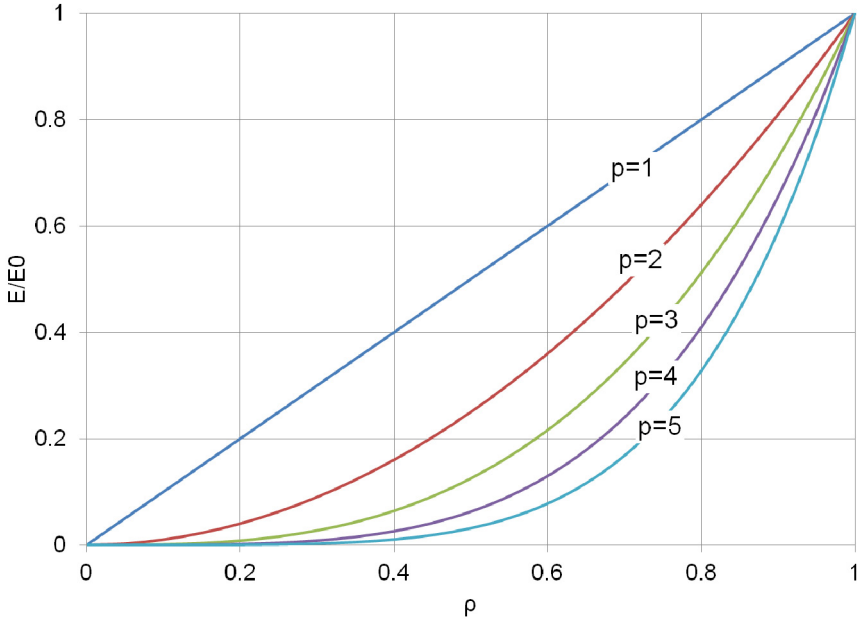
$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E^0_{ijkl} \quad p > 1 \tag{96}$$

$$\text{Volume} = \int_\Omega \rho(x) dx \tag{97}$$

onde $\rho(x)$, $x \in \Omega$, $0 \le \rho(x) \le 1$ é a função pseudo-densidade do material e E^0_{ijkl} o tensor de elasticidade de um material isotrópico de referência. A função pseudo-densidade é elevada a um expoente *p* maior que 1, o que faz com que valores de pseudo-densidades intermediárias sejam penalizados por possuírem uma rigidez menor do que a do material de referência pelo mesmo custo de volume. A Figura 14 mostra a razão de rigidez relativa (E/E^0) em função da pseudo-densidade ρ do material para diferentes valores de penalização, o que ilustra o efeito do penalizador

na definição de topologias que apresentam a menor quantidade de valores de pseudo-densidades intermediárias. Geralmente ao aplicar este tipo de modelo de material, o valor de p é incrementado gradualmente de 1 até 4 durante a otimização, um tipo de técnica chamado de continuação.

Figura 14 - Efeito do expoente penalizador, p.



3.2.1 Variáveis de projeto

A otimização topológica dos painéis compósitos reforçados busca encontrar a topologia ótima da estrutura, definida pela distribuição de material dentro do domínio estipulado e a orientação ótima do material ortotrópico que compõe a mesma nas regiões em que há presença de material. Para isto, no domínio contínuo as pseudo-densidades ρ e os ângulos θ parametrizam o problema, obedecendo às relações da equação (98) e (99).

$$0 \leq \rho \leq 1 \tag{98}$$

$$-90^{\circ} < \theta(x) \leq 90^{\circ} \tag{99}$$

No entanto, para a solução do problema que é feita no domínio discreto, a parametrização muda. As variáveis topológicas tornam-se as variáveis nodais d que são empregadas para o cálculo das pseudo-densidades de cada elemento ρ_e segundo a técnica de projeção. Esta técnica, descrita em detalhes na seção 4.2.2, é baseada em funções penalizadoras, que fazem com que valores de pseudo-densidades intermediárias tendam a 1 e apenas valores próximos de zero tendam a zero, reduzindo por exemplo, a ocorrência de "cinzas" no resultado.

As variáveis de orientação tornam-se ν, empregadas pelo método de Otimização Discreta de Material (ODM) para reduzir a suscetibilidade da otimização a recair em mínimos locais quando envolvem-se variáveis de projeto de orientação, como mostrado na seção 4.2.3. Os intervalos de projeto considerados para estas variáveis são definidos na equação (100).

$$\begin{aligned} 0 \leq d \leq 1 \\ 0 \leq \nu \leq 1 \end{aligned} \tag{100}$$

As espessuras de cada camada são mantidas constantes ao longo da otimização, bem como o número de camadas nas regiões em que há presença de material. É importante ressaltar que nesta formulação é permitida a busca de uma topologia ótima tanto para o painel quanto para seus reforçadores. No entanto, dada a diferença de dimensões entre o painel e os reforçadores, o grau de refinamento da malha de elementos finitos dos reforçadores deve ser maior do que a do painel de modo a representar de forma mais real topologias factíveis para os reforçadores, o que aumenta o custo computacional da análise.

3.2.2 Casos de carga

Os casos de carga admitidos na otimização são definidos em virtude das características do código de elementos finitos empregado para a análise da estrutura. Neste trabalho, é possível a aplicação de cargas pontuais como forças concentradas em regiões definidas da estrutura, carregamentos distribuídos ao longo de arestas e superfícies, como é o caso da pressão. O pré-processamento

converte estes valores de carregamentos distribuídos em carregamentos pontuais nos nós da malha de elementos finitos que estão sob atuação destes carregamentos.

3.2.3 Função objetivo e restrições

A função objetivo considerada é a minimização da flexibilidade média (ou "*mean compliance*", como mais conhecida em inglês), que pode ser interpretada como a maximização da rigidez da estrutura. A flexibilidade média C pode ser calculada como em (101), onde $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos, e $\mathbf{p}$ o vetor de carregamentos.

$$C(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{p} \tag{101}$$

Como restrições para o problema, são definidas 3 diferentes funções. Duas delas relacionam-se à parametrização das variáveis de projeto propriamente ditas. No caso, a restrição representada pela equação (98) limita o intervalo de valores das pseudo-densidades da parametrização adotada e a restrição da equação (99) limita os ângulos admissíveis para as camadas de material composto empregadas na estrutura.

A terceira restrição (102) refere-se à restrição de critério de falha da estrutura, interpretada como uma restrição do fator de segurança. A definição precisa desta restrição bem como sua implementação numérica são descritas na seção 4.2.4.

$$s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \tag{102}$$

Deste modo, a formulação do problema de otimização no domínio contínuo pode ser sintetizado como em (103).

$$\underset{\rho,\theta}{\text{Minimizar}}: \ \text{Flexibilidade}$$

$$\text{sujeito à:} \quad \text{Equações de equilíbrio}$$

$$s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \tag{103}$$

$$0 \le \rho \le 1$$

$$-90° \le \theta(x) \le 90°$$

No domínio discretizado esta formulação transforma-se em (104).

$$\underset{d,\nu}{\text{Minimizar}}: \ C(\mathbf{u})$$

$$\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p}$$

$$s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \tag{104}$$

$$0 \le d \le 1$$

$$0 \le \nu \le 1$$

3.2.4 Algoritmo de otimização

Da mesma forma que no caso da otimização paramétrica (seção 3.1.3), foi empregado o MMA (SVANBERG, 1987) para a solução do problema de otimização. A sua utilização é feita por meio de implementação em Matlab do próprio autor do método, cedida para utilização em trabalhos de pesquisa acadêmicos, desde que citada sua referência (SVANBERG, 2002). Neste caso, a obtenção dos valores da função objetivo e gradientes (entradas para o MMA) é feita diretamente pelo código de elementos finitos implementado em Matlab, apresentada nas seções 2.2.2 e 4.2.5 respectivamente.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

4.1 Otimização Paramétrica

Nesta seção são apresentadas quatro diferentes metodologias de abordagem da otimização paramétrica formulada na seção 3.1. As mesmas envolvem variáveis contínuas e discretas de orientação; algoritmos heurísticos, como o Genético; e algoritmos baseados em gradientes, como o MMA. Os resultados das mesmas são apresentados e comparados entre si na seção 5.1, definindo-se uma metodologia preferencial de implementação da otimização com base em critérios de qualidade e velocidade de encontro das soluções ótimas. Esta metodologia definida é então aplicada para um caso exemplo, com os seus resultados apresentados na seção 5.2.

De maneira a aplicar estas metodologias de otimização estrutural no caso de painéis compósitos com reforçadores, desenvolveu-se uma rotina de análise de flambagem de um modelo da estrutura, utilizando o programa comercial Abaqus de elementos finitos. O mesmo permite por meio de sua linguagem de programação baseada em Phyton que a análise seja feita em modo "*batch*" sem interação com o usuário, baseada em um arquivo de entrada que contém as informações parametrizadas do problema. Isto torna possível a inserção da rotina de análise de flambagem dentro de um laço de otimização.

É importante ressaltar que o modelo simplificado de análise da flambagem aqui proposto tem sua utilidade apenas como caso de aplicação da metodologia de otimização. A elaboração e utilização de modelos de análise mais complexos considerando, por exemplo, efeitos de flambagem local, fogem do escopo deste trabalho, mas podem ser inseridos na metodologia caso estejam disponíveis.

4.1.1 Modelagem da estrutura

Optou-se pela geração da geometria do modelo pela própria interface do Abaqus, devido à maior facilidade de parametrização desta geometria posteriormente. Entende-se por parametrização a automatização da análise de elementos finitos de modo a permitir que, sem a interação com o usuário, possa ser obtido o resultado de uma análise com dimensões ou parâmetros pré-especificados do mesmo alteradas. A abordagem de parametrização por meio da criação da geometria dentro do Abaqus utilizada neste trabalho é mais simples quando comparada com o procedimento alternativo de importação de uma geometria gerada em programa CAD, onde nesse caso cabe ao CAD realizar a parametrização. No entanto, a abordagem adotada é possível apenas quando a geometria da estrutura é simples, pois no caso de geometrias complexas, o procedimento se tornaria trabalhoso ou até mesmo inviável em termos práticos. Considerou-se uma placa com a geometria esboçada na Figura 15, sujeita aos tipos de carregamentos da Figura 16.

Figura 15 - Modelo de análise parametrizado. As variáveis apresentadas podem ter seus valores alterados sem a necessidade de interação do usuário com a interface gráfica do Abaqus.

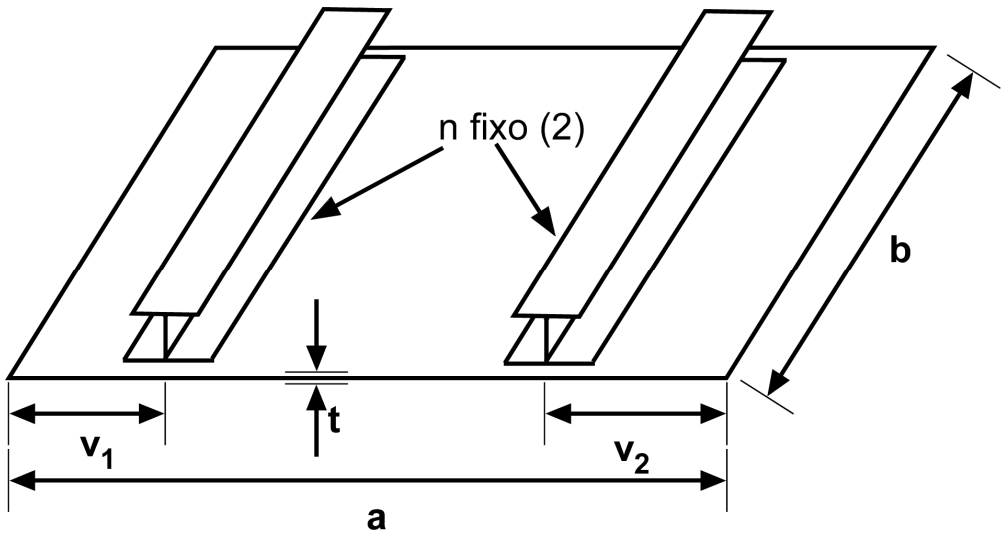
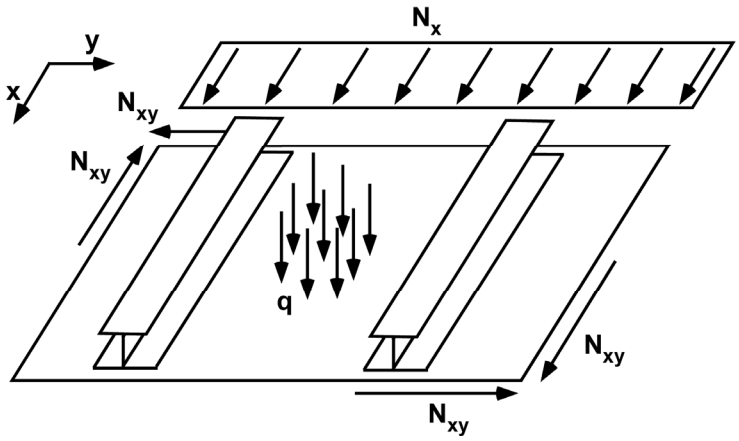
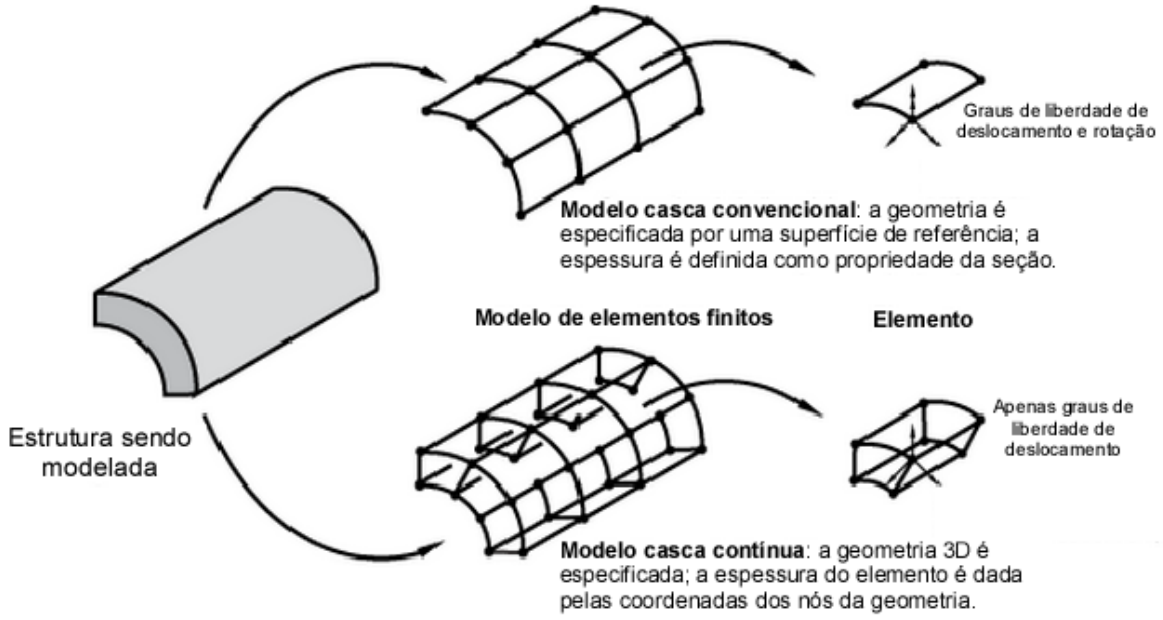


Figura 16 - Tipos de carregamentos que podem ser considerados na análise parametrizada.



Por possuir uma geometria em que a espessura é muito menor do que as outras dimensões da estrutura, foram adotados elementos do tipo casca, adequados para este tipo de situação. O Abaqus (ABAQUS, 2010a; ABAQUS 2010b) oferece dois tipos de modelos de casca: o casca convencional e o casca contínuo. No caso da casca convencional, a geometria é descrita por meio da superfície média da geometria e a espessura é definida como uma propriedade da seção. Este modelo possui os graus de liberdade de translação e rotação. No modelo de casca contínuo, a geometria 3D é discretizada, não somente a superfície média, com a espessura sendo definida pela própria posição dos nós da geometria. Do ponto de vista de modelagem, apresenta um comportamento 3D, porém do ponto de vista cinemático e da matriz constitutiva é um modelo de casca. A Figura 17 ilustra esta distinção.

Figura 17 - Diferentes abordagens de modelagem de cascas no Abaqus, imagem adaptada de (ABAQUS, 2010a).



Para a modelagem de compósitos, a abordagem empregada neste trabalho é a baseada na teoria clássica de laminação, sendo representada no Abaqus pela casca convencional. Nesta teoria as camadas são supostas perfeitamente unidas, ou seja, todas sofrem os mesmos deslocamentos ao longo da espessura, em uma dada seção da estrutura. Isto equivale a considerar um nó por elemento no sentido da espessura.

O Abaqus permite que na escolha do elemento, seja feita a distinção entre elementos de casca de aplicação geral (como o S4, S4R e o SC8R, entre outros), elementos de casca fina, e elementos de casca espessa (S8 ou S8RT). Recomenda-se pelo manual do usuário que sejam adotados elementos de casca de aplicação geral, pois estes elementos definem a teoria do elemento automaticamente, em função da comparação da espessura da casca, com o valor de 1/15 de um comprimento característico da geometria.

Elementos do tipo SC8R (casca contínua de 8 nós por elemento e integração reduzida) levam em conta deformações finitas, grandes rotações e admitem mudanças em sua espessura, tornando-o útil para análises envolvendo grandes deformações. O cálculo da mudança da espessura do elemento é baseada nos deslocamentos nodais do mesmo e das propriedades elásticas do material.

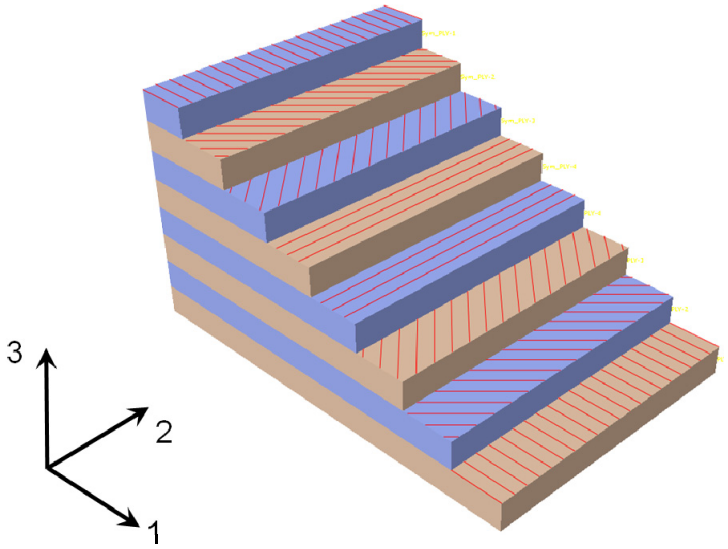
Uma alternativa aos elementos SC8R são os elementos do tipo S4 (casca convencional, 4 nós por elemento, integração completa, aplicação geral, deformações finitas) não admitem deformações no sentido da espessura do elemento, por não possuir graus de liberdade suficientes na espessura para o cálculo dos deslocamentos nodais neste sentido. O elemento S4 (integração completa) não possui modos de "*hourglass*" (também conhecido como "ampulheta") tanto na resposta de membrana quanto de flexão, não exigindo portanto, técnicas de controle do "*hourglass*".

Em virtude do acréscimo de custo computacional, a utilização do SC8R não se justifica nesta análise pois está sendo considerada a teoria clássica de laminação. Assim, foi utilizado nas análises o elemento S4. Empregou-se a opção de seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações) dado que a economia de custo computacional com a utilização de 5 graus de liberdade por nó não se justificaria neste caso.

Figura 18 - Ordenação dos nós e pontos de integração nos elementos do tipo S4R e S4, imagem adaptada de (ABAQUS, 2010b).

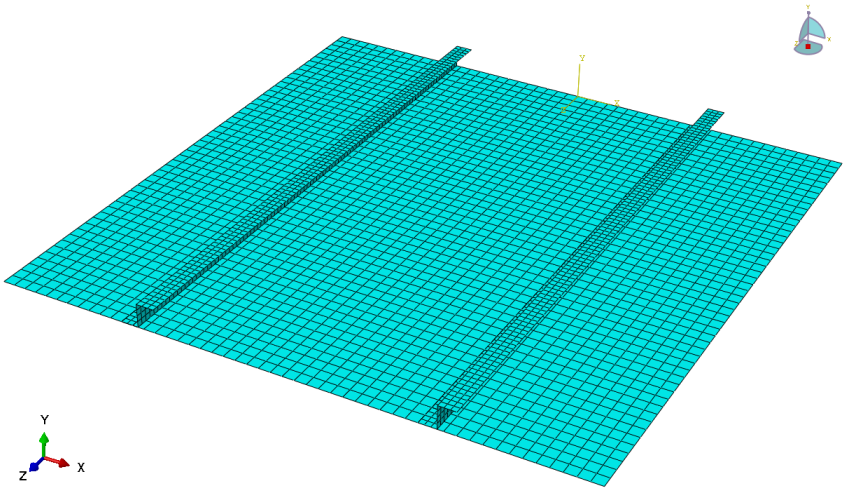
Os materiais compósitos do painel e dos reforçadores são definidos por meio do "*composite layup*" do Abaqus. Neste são especificados o número de camadas, espessuras (todas 0,125 mm) e orientações das mesmas (Figura 19).

Figura 19 - Exemplo de empilhamento das camadas de material dentro do laminado.



Na criação do modelo computacional, foi feita distinção entre as propriedades e sequência de empilhamento do material formador dos reforçadores e do painel, permitindo maior liberdade para a otimização.

Figura 20 - Exemplo de malha computacional empregada para análise do modelo.



A geração da malha também foi feita empregando a própria interface do Abaqus. Devido à geometria simples do painel e reforçadores, para a geração da malha foi definida como parâmetro apenas a distância entre dois nós consecutivos para a malha do painel e para a malha dos reforçadores (as malhas podem ter densidade de elementos diferentes entre si). A partir destas distâncias entre nós, considerando-se os elementos do tipo S4 ou S8R (quadriláteros), o domínio é discretizado automaticamente.

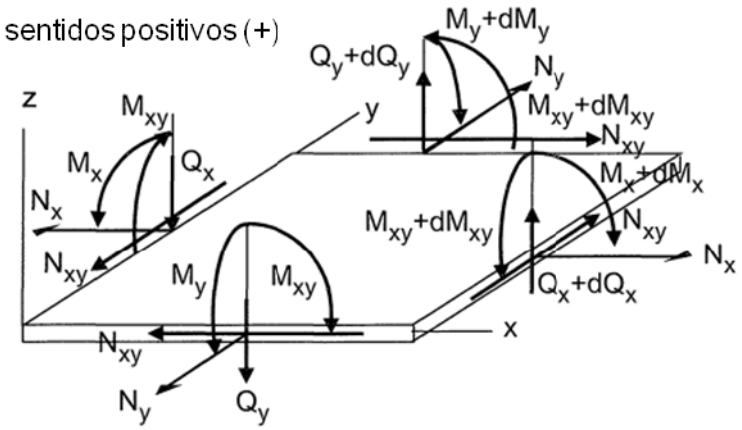
Embora na estrutura real exista fisicamente um tipo de união (como por exemplo, rebites, cola, ou ainda co-curagem) entre os reforçadores e o painel, nesta modelagem a união entre os reforçadores e o painel foi considerada perfeitamente rígida. A adição de modelos de fixação entre os mesmos agregaria complexidade na análise, bem como custo computacional, fugindo do escopo do trabalho.

Desta forma, foram adicionadas restrições de deslocamentos comuns aos nós adjacentes dos reforçadores e do painel, do tipo "*tie*". Este tipo de restrição faz com que duas regiões pré-definidas possuam as mesmas translações e rotações, comportando-se como se estivessem perfeitamente unidas entre si. No Abaqus não é necessário que os nós de ambas as malhas de elementos finitos sejam coincidentes para aplicação desta restrição, facilitando a geração das malhas.

As condições de contorno empregadas variaram de caso para caso analisado durante a comparação dos resultados com a literatura (Apêndice B) e podem facilmente assumir diferentes tipos, como engaste, apoio simples e livre, por meio de restrições dos valores de deslocamentos e/ou rotações nos nós pertencentes a uma aresta, por exemplo. Para exemplificar cada uma delas, será considerada a

nomenclatura de eixos da Figura 21, analisando-se as condições de contorno sobre a aresta que se encontra no eixo x=0 (SUN, 1998).

Figura 21 - Nomenclatura e definição de eixos (positivos). Adaptado de (SUN, 1998).



Aresta engastada: as translações w e rotações $\frac{\partial w}{\partial x}$ ao longo desta aresta são nulas, o que se traduz na equação (105):

$$(w)_{x=0} \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \tag{105}$$

Aresta simplesmente apoiada (apoio simples): as translações w ao longo desta aresta são nulas, porém a aresta é livre para girar em torno do eixo y, ou seja, não há momentos fletores aplicados nesta aresta, equação (106).

$$(w)_{x=0} \quad , \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \tag{106}$$

Aresta livre: neste caso, se os carregamentos externos são nulos sobre a mesma, o momento fletor e a força cortante são nulas ao longo da aresta, como na equação (107).

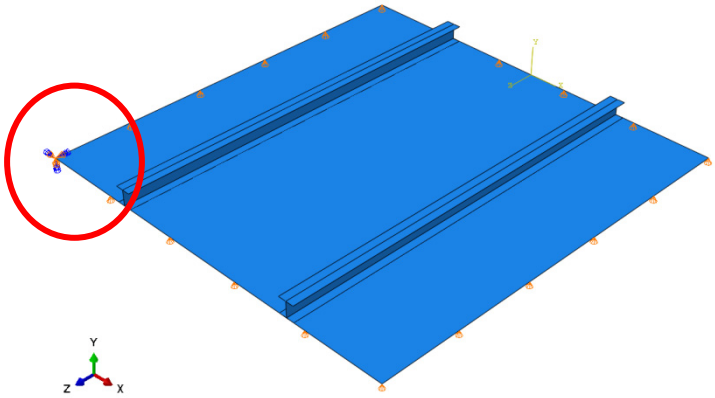
$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0$$
$$\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0} = 0 \tag{107}$$

É importante ressaltar que para a implementação das condições de contorno deve-se estar atento a certas nuances que surgem no modelo numérico que não aparecem no modelo analítico. Por exemplo, caso as condições de contorno nas quatro arestas do painel sejam do tipo simplesmente apoiado, existem graus de liberdade permitindo movimento de corpo rígido do modelo, o que inviabiliza a solução numérica. Para isso, deve-se inserir uma restrição de deslocamento no plano do painel de modo a evitar este movimento.

No entanto, deve-se tomar cuidado com estas modificações, pois as mesmas podem levar a resultados diferentes dos esperados. Durante a implementação deste trabalho, observou-se que o comportamento de flambagem muda consideravelmente em função de pequenas variações nas condições de contorno, levando a resultados até não simétricos onde deveria haver a simetria. Para contornar este problema, foi feita uma verificação dos resultados obtidos com os provenientes de outras formas de análise, como mostrado ao longo do Apêndice B, procurando-se varrer diversas condições de aplicação das condições de contorno.

Uma solução que foi encontrada e apresentou bons resultados para evitar os movimentos de corpo rígido do modelo sem atrapalhar a validade dos resultados, foi restringir os deslocamentos no nó que coincide com um dos vértices do painel. Assim, o movimento de corpo rígido é eliminado, sem influir de forma significativa na aplicação das condições de contorno de apoio simples do painel, como mostrado na Figura 22.

Figura 22 - Condições de contorno aplicadas como exemplo no painel e o destaque no nó utilizado para restringir os movimentos de corpo rígido do modelo.



O valor do carregamento, no caso da análise de flambagem, entra como um fator da carga crítica, multiplicando o autovalor do modo de flambagem. Desta maneira, seu valor foi considerado unitário na entrada do Abaqus. Para os casos em que o interesse era a obtenção da carga de flambagem sem a aplicação de pré-carga, é definido no Abaqus apenas um "*step*" de análise. Para os casos em que há uma pré-carga no modelo, é necessário que seja adicionado um "*step*" adicional, para separar os carregamentos estáticos dos gerados para a análise de flambagem, como exemplificado no Apêndice B.

4.1.2 Extração dos modos e cargas de flambagem

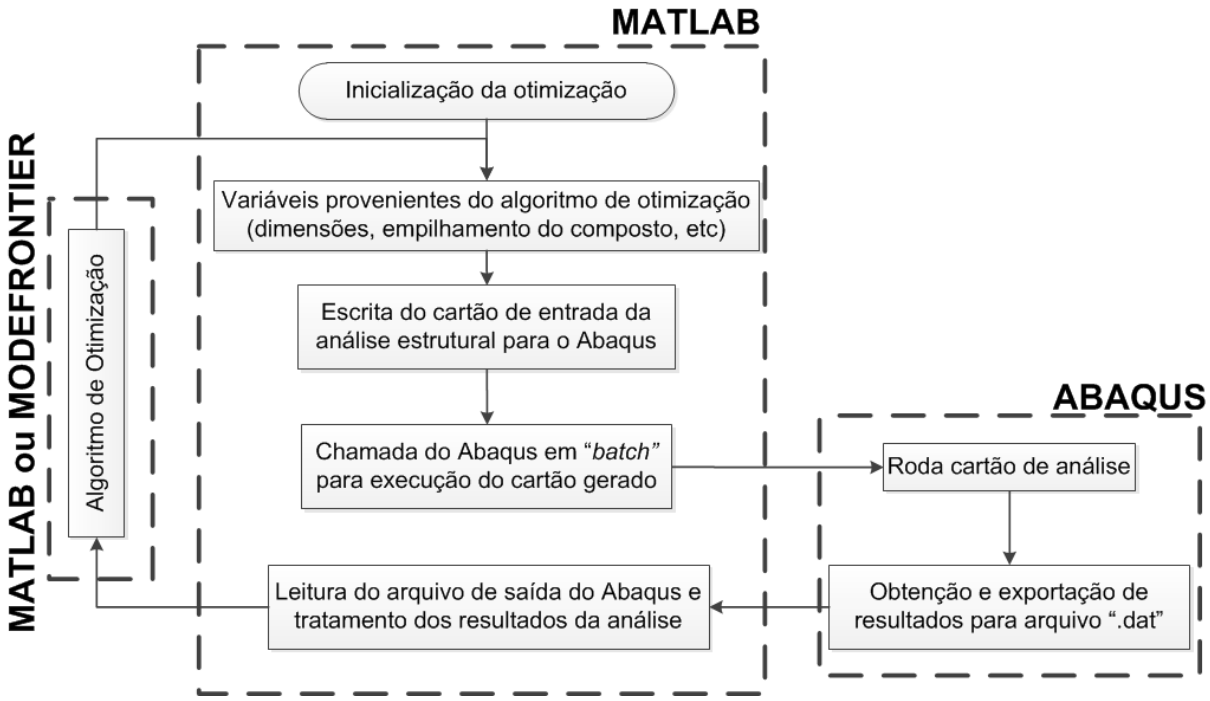
A resolução do problema de autovalor e autovetor associado respectivamente, à carga crítica de flambagem e ao modo de flambagem foi feita por meio da opção de extração de autovalores "*Lanczos*" do Abaqus, sendo extraídos os seis primeiros modos. Como carga crítica de flambagem foi considerado o primeiro modo de flambagem, dado que os autovalores são exibidos e ordenados de forma crescente.

4.1.3 Parametrização e automatização da análise

Visando a implementação do problema de otimização, foi realizada a parametrização e automatização da análise. Para isso foram criados scripts em linguagem Phyton, que permitem reproduzir os comandos efetuados pela interface gráfica do Abaqus, da mesma forma que uma macro. As propriedades do material, número de camadas, orientações e espessuras das mesmas, condições de contorno do problema, dimensões e geometria tanto do painel quanto dos reforçadores, parâmetros da malha computacional podem ser alteradas sem a necessidade de interação do usuário com o software.

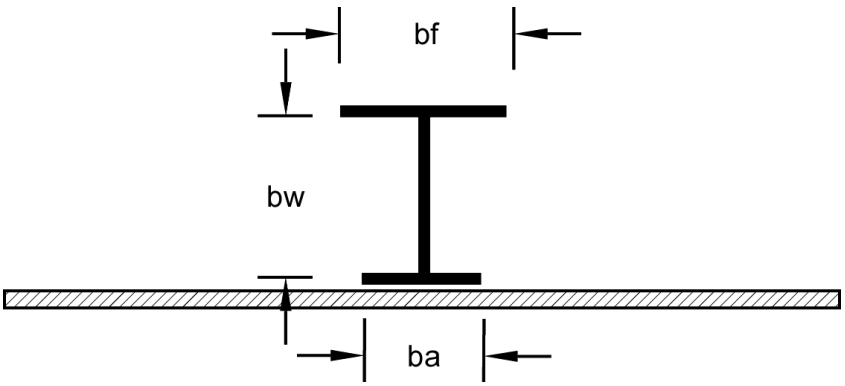
A modificação do script em função dos parâmetros de entrada também foi automatizada, por meio do Matlab que é responsável pela escrita do arquivo de script do Abaqus, bem como pela chamada em modo batch do mesmo. Os resultados são então exportados pelo Abaqus em um arquivo do tipo texto que é lido pelo Matlab. Assim, fecha-se o ciclo de entrada de variáveis, cálculo do modelo e obtenção dos resultados, dentro do Matlab. O fluxograma da Figura 23 apresenta de forma simplificada a interface criada para automatização da análise estrutural e como este código se relaciona com o algoritmo de otimização utilizado, implementado em Matlab (caso do MMA) ou em ModeFrontier (caso do Algoritmo Genético).

Figura 23 - Fluxograma de automatização da análise estrutural e sua interface com o algoritmo de otimização.



Como exemplo de parametrização, será considerada a geometria de reforçadores do tipo "I", mostrada na Figura 24. A geometria da superfície que modela os reforçadores é criada por meio da definição das coordenadas dos pontos extremos da geometria e linhas ligando estes nós. Como os valores das coordenadas são escritas na carta de entrada do Abaqus, torna-se factível que o Matlab atualize as coordenadas dos nós em função dos parâmetros da geometria do reforçador, definidos pelo otimizador. As propriedades da sequência de laminação também são definidas de forma semelhante, por meio da atualização de valores dentro da carta de entrada do Abaqus.

Figura 24 - Esboço do reforçador tipo "I", e suas variáveis parametrizadas.



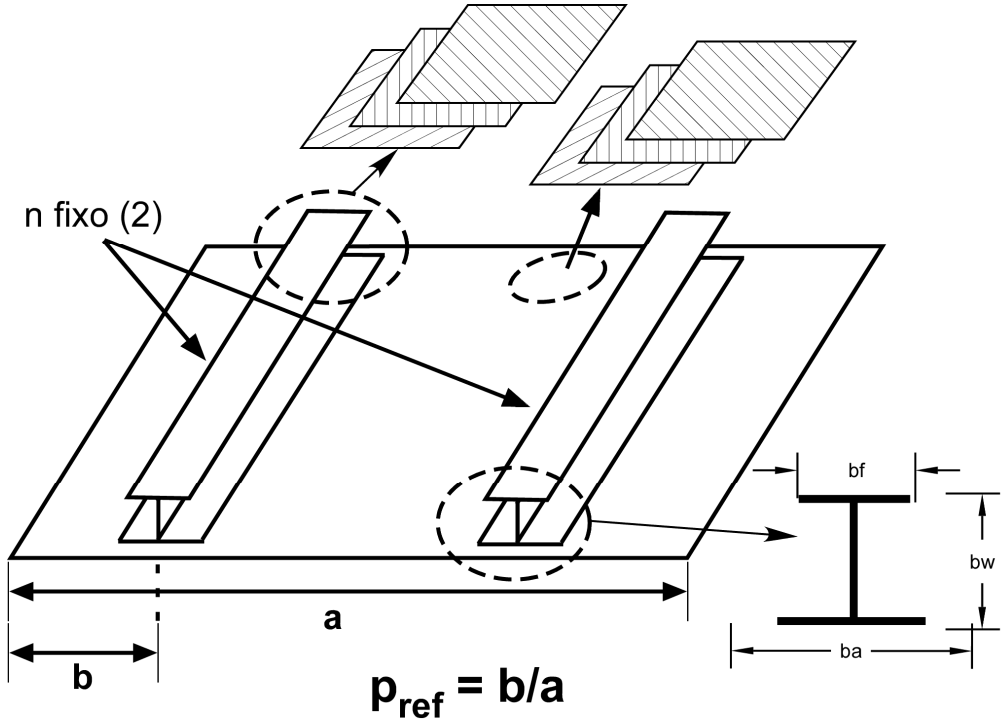
No Apêndice B são apresentados exemplos de verificação dos resultados obtidos através do código implementado com os provenientes da literatura e bases de dados conhecidas.

4.1.4 Variáveis de projeto

A implementação numérica da otimização considerará como variáveis de projeto os seguintes parâmetros, apresentados também na Figura 25:

- Dimensões da seção transversal dos reforçadores (bf, bw, ba);
- Posicionamento dos reforçadores dentro do painel, referenciada em relação às arestas do mesmo e sujeita a variações percentuais (p_{ref}) em relação a estas arestas. O número de reforçadores por painel é mantido constante;
- Material compósito do painel e dos reforçadores:
- Orientação das fibras de cada camada;
- Número de camadas (espessuras fixas).

Figura 25 - Esboço das variáveis de projeto da otimização paramétrica.



As variáveis de orientação das fibras de cada camada do material compósito são implementadas de forma contínua (o ângulo como variável de projeto) ou de forma parametrizada, como proposto no método da ODM (STEGMANN; LUND, 2005). Esta metodologia foi apresentada na seção 3.1.1. Os detalhes da implementação numérica desta metodologia no caso da otimização paramétrica são apresentados na seção 4.1.9.

4.1.5 Intervalos admissíveis das variáveis de projeto

Na implementação do problema de otimização, as variáveis de projeto não podem assumir qualquer valor por questões de validade do modelo computacional de análise. Para isso são definidos intervalos de valores os quais essas variáveis podem assumir. Os mesmos foram definidos a partir de testes do modelo de análise, onde foram levados em conta diferentes aspectos:

- As menores dimensões dos reforçadores são limitadas pela malha computacional. Caso as dimensões dos reforçadores sejam muito menores do que o painel, o número de elementos pode se tornar grande, o que aumenta o custo computacional da análise;
- As máximas dimensões dos reforçadores foram limitadas de modo a não permitir reforçadores maiores que 15% do tamanho da aresta do painel (500 mm);
- A variável de posicionamento do reforçador (p_{ref}) teve seu intervalo limitado para evitar que os reforçadores nas suas maiores dimensões tivessem alguma parte posicionada fora do painel ou então sobreposta ao seu par;
- No caso das variáveis de orientação parametrizadas através da ODM (seção 4.1.9), as mesmas devem pertencer ao intervalo entre 0 e 1 em virtude da sua própria formulação;
- No caso das variáveis contínuas de orientação (seção 4.1.8) as mesmas foram inseridas dentro do intervalo [-75º ; 90º].

Além disso deve-se garantir que as variáveis, dentro dos intervalos especificados, gerem valores de função objetivo e restrições aceitáveis. Um exemplo onde isto poderia não ocorrer surge quando as dimensões dos reforçadores são as menores possíveis, e o carregamento de flambagem é de compressão na direção transversal aos reforçadores. O valor da carga de flambagem pode ser baixo o suficiente de modo a ser inferior à carga aplicada na pré-carga, resultando em um erro na análise do Abaqus. Para evitar este tipo de problema foram executadas análises cobrindo os extremos das variáveis de projeto e variando-se o carregamento da pré-carga aplicada, de modo a garantir que sempre a carga de flambagem fosse superior à pré-carga.

Os intervalos das variáveis geométricas dos reforçadores (Figura 24) adotados são apresentados na equação (108), com valores em milímetros. Os mesmos foram baseadas em razões de proporção típicas encontradas em painéis reforçados.

$$\begin{aligned} &10 \leq b_a, b_f \leq 80 \\ &10 \leq b_w \leq 75 \end{aligned} \tag{108}$$

A variável p_{ref} de posicionamento dos reforçadores (vide Figura 25) foi definida entre 0,1 e 0,4; 10% e 40% da largura do painel, respectivamente. O valor de 0% equivaleria aos reforçadores sobre as arestas laterais, e 50% os reforçadores uns sobre os outros no centro do painel. O intervalo escolhido garante que as condições apresentadas no início da seção não sejam violadas e que dois reforçadores não sejam colocados em uma mesma posição dentro do painel.

4.1.6 Geometria, condições de contorno e carregamentos

O modelo de análise em elementos finitos implementado em Abaqus utilizou como geometria base a descrita na seção 4.1.1. As dimensões do painel foram fixadas em 500x500 mm, com espessura definida pelo número de camadas no empilhamento (simétrico). As dimensões dos reforçadores do tipo I implementados

no modelo, por serem variáveis de projeto, possuem seus intervalos de valores admissíveis definidos na seção 4.1.5.

As condições de contorno empregadas para todos os casos foram de arestas simplesmente apoiadas. Este tipo de condição de contorno e outras que são possíveis de serem utilizadas foram descritas na seção 4.1.1.

Os carregamentos considerados na pré-carga dos casos foram de cisalhamento puro, pressão uniforme distribuída sobre a superfície superior do painel e compressão no sentido dos reforçadores. Para a carga de flambagem foram considerados carregamentos de cisalhamento, compressão no sentido dos reforçadores e compressão no sentido transversal aos reforçadores.

4.1.7 Sensibilidades

As sensibilidades (ou gradientes) da função objetivo e das restrições são entradas necessárias para o método MMA, utilizado no problema de otimização com variáveis contínuas.

Devido a utilização de um solucionador comercial (Abaqus) para resolução do problema de análise da carga crítica de flambagem, será empregado o método das diferenças finitas no cálculo dos gradientes, equação (109), onde $\Delta\rho$ é especificado como uma porcentagem do valor de ρ. Embora custoso computacionalmente, é uma solução usual quando o código não permite o acesso às matrizes de rigidez, por exemplo.

$$\frac{dF}{d\rho} \cong \frac{F(\rho+\Delta\rho)-F(\rho-\Delta\rho)}{2\Delta\rho} + O(\Delta\rho^2) \tag{109}$$

Utilizando a ODM, o número de variáveis de projeto n_{dv} é dado pela expressão (110), onde consideram-se N^l camadas no laminado, N^r regiões de projeto por camada, ou seja, regiões com diferentes orientações dentro de uma mesma camada e n^e orientações de fibras candidatas. Com a utilização de diferenças finitas para a obtenção dos gradientes, o número de chamadas do

solucionador é o triplo do número de variáveis de projeto. Assim, estima-se cerca de 16 execuções do Abaqus para o cálculo dos gradientes, supondo uma orientação admissível por camada, 8 camadas no laminado simétrico e 4 orientações possíveis.

$$n_{dv} = \frac{N^l N^r n^e}{2} \tag{110}$$

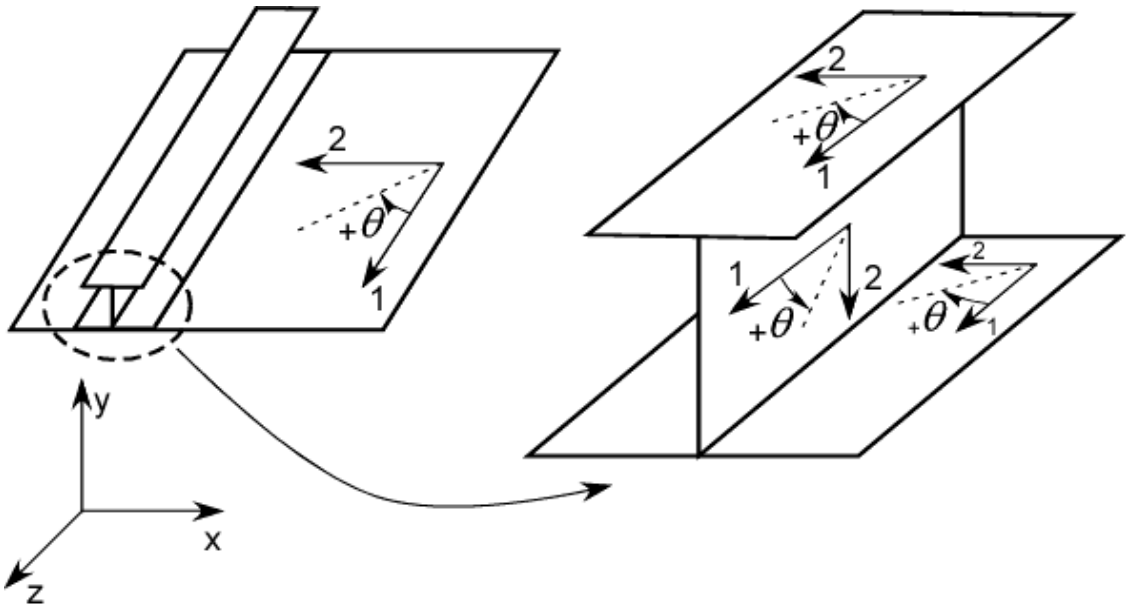
Para implementação deste método no Matlab foi criado um vetor de perturbações que altera o valor de uma variável de projeto por vez (para cálculo de sua respectiva sensibilidade), mantendo as demais constantes. Este vetor atualiza as entradas do código automatizado do Abaqus, que devolve os valores de função objetivo e restrições para cada uma das perturbações, oferecendo os dados necessários para os cálculos das sensibilidades.

A definição do passo da perturbação para cálculo das sensibilidades das variáveis de projeto geométricas foi limitada pelo tamanho dos elementos da malha de elementos finitos, sendo escolhido o menor tamanho da aresta do elemento para este cálculo. Para as variáveis de projeto de orientação, tanto por variáveis contínuas quanto por ODM, o passo foi escolhido por testes analisando o comportamento dos gradientes com a variação do tamanho do passo e selecionando o maior passo possível para redução do custo computacional da otimização.

4.1.8 Variáveis contínuas de orientação

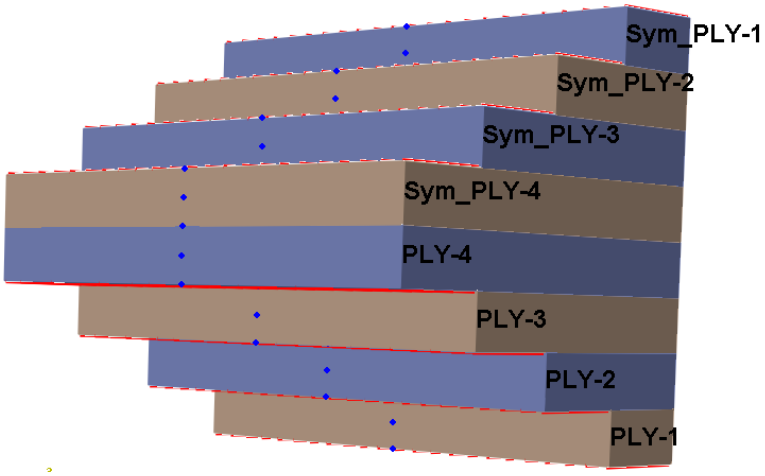
A implementação numérica das variáveis de contínuas de orientação dentro do código automatizado do Abaqus é feita diretamente pelo valor do ângulo das fibras de cada camada medido em relação aos eixos locais da peça (1,2). A definição dos eixos globais (x,y,z) e dos eixos locais (1,2) do painel e de cada uma das três regiões dos reforçadores é apresentada na Figura 26. A orientação dos eixos locais em relação aos globais pode ser modificada de modo a inserir restrições de manufatura e continuidade das fibras.

Figura 26 - Definição de eixos do painel e reforçadores para orientação das fibras.



A nomenclatura para composição do empilhamento de entrada na análise do Abaqus é mostrada na Figura 27, com a camada de menor número (1, por exemplo) sendo a mais inferior da pilha. A simetria ocorre em torno da camada mais superior e próxima da linha média (4, por exemplo) de modo que garante-se a seleção de laminados de empilhamento simétrico pelo otimizador. Esta nomenclatura será empregada para análise dos resultados, sob a forma padrão de apresentação de empilhamento de laminados, $[\text{PLY-1 PLY-2 PLY-3 PLY-4}]_S$.

Figura 27 - Ordem de empilhamento das camadas no Abaqus.



4.1.9 Parametrização pelo método ODM

No caso da utilização da parametrização da ODM, as variáveis de ângulo da orientação não são mais entradas para o Abaqus. Todas as camadas do laminado, tanto do painel quanto dos reforçadores são mantidas com orientação nula, ou seja, paralelas ao eixo "1" do material, porém a matriz constitutiva do material é alterada, sendo calculada pelo Matlab.

O cálculo da matriz constitutiva é feita pela ponderação das matrizes constitutivas do material compósito rotacionado nas orientações admissíveis pelas variáveis de projeto da ODM (seção 3.1.1). A rotação da matriz constitutiva é feita por meio da relação (111), sendo $\overline{D}$ a matriz rotacionada e D a matriz constitutiva do material.

$$\overline{D} = T(\theta) D T(\theta)^t \tag{111}$$

onde $T(\theta)$ é dado pela equação (112).

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{112}$$

A rotação do material é feita considerando-se uma matriz de dimensões equivalentes a matriz de um material anisotrópico, e desta forma inserida no Abaqus que simplifica esta matriz de acordo com o elemento empregado, neste caso como um material ortotrópico. Optou-se por não entrar diretamente com a matriz ortotrópica (isto é permitido pelo Abaqus) pois desejava-se permitir outras possibilidades da otimização quando utiliza-se a ODM, como por exemplo, a adoção de compósitos híbridos. Na implementação automatizada do Abaqus, a maneira encontrada de permitir que tanto materiais ortotrópicos quanto isotrópicos pudessem ser considerados foi efetuar a entrada dos dados por meio de uma matriz

anisotrópica que no fundo, é uma isotrópica ou uma ortotrópica, controlada pelo Matlab.

Além de serem consideradas ordens de empilhamento em que camadas são retiradas do laminado, podem ser utilizados também outros tipos de material dentro do empilhamento, como é feito no material GLARE®, misturando-se materiais compósitos com materiais isotrópicos, como alumínio. Neste trabalho a variável referente ao material isotrópico dentro da ODM foi empregada para representar a ausência de material naquela camada, por meio da redução da ordem de grandeza da matriz de rigidez de um material isotrópico (no caso, alumínio). O fator de redução empregado neste trabalho foi de 10^{-3}. Assim, ao final da otimização caso uma das camadas apresentasse este material isotrópico "degradado" a mesma poderia ser removida do empilhamento resultante.

A escolha deste fator de redução leva em conta possíveis erros de condicionamento numérico decorrentes da ordem de grandeza dos termos da matriz constitutiva e dos valores de espessura usualmente baixos de cada camada (cerca de 0,15 mm). Para evitar este tipo de problema, as unidades de comprimento do problema foram definidas em milímetros, com os valores de carregamentos em N/mm, escalando-se de forma apropriada os valores das propriedades do material para manter a coerência entre as unidades das diferentes grandezas.

Durante testes da implementação, observou-se uma divergência nos resultados de carga de flambagem quando utiliza-se a parametrização ODM ao invés do valor direto de orientação no Abaqus. Quando o Abaqus é executado com a orientação do material sendo definida pela matriz constitutiva rotacionada do material, as cargas de flambagem são iguais apenas quando a orientação é 0º ou 90º. Para ângulos intermediários surgem diferenças entre especificar uma rotação diretamente na camada do empilhamento ou especificar sua matriz constitutiva.

Isto é observado pela diferença nos valores absolutos de carga de flambagem das otimizações mostradas na Tabela 1. Assim, na implementação adotada neste trabalho, não pode-se comparar diretamente os valores da função objetivo obtidos pela formulação de otimização que utiliza a orientação das fibras como variáveis de projeto com a formulação ODM. São válidas apenas comparações entre formulações iguais; por exemplo, entre o algoritmo MMA com ODM e Genético com ODM, ou ainda, entre algoritmo MMA e Genético com orientações contínuas de ângulo.

Tabela 1 - Comparação de resultados do Abaqus pelas diferentes metodologias de análise.

Orientação (graus)	0º	90º	45º	-45º
Carga de flambagem via matriz [N/mm]	43,978	16,169	13,196	18,088
Carga de flambagem via orientação [N/mm]	43,978	16,169	18,758	23,361

Isto não gera problemas para a otimização, pois a mudança de carga relativa entre as orientações se conserva, sendo considerada uma limitação da automatização do Abaqus. Não compromete-se a aplicação da metodologia de otimização, dado que todos os resultados são afetados da mesma forma.

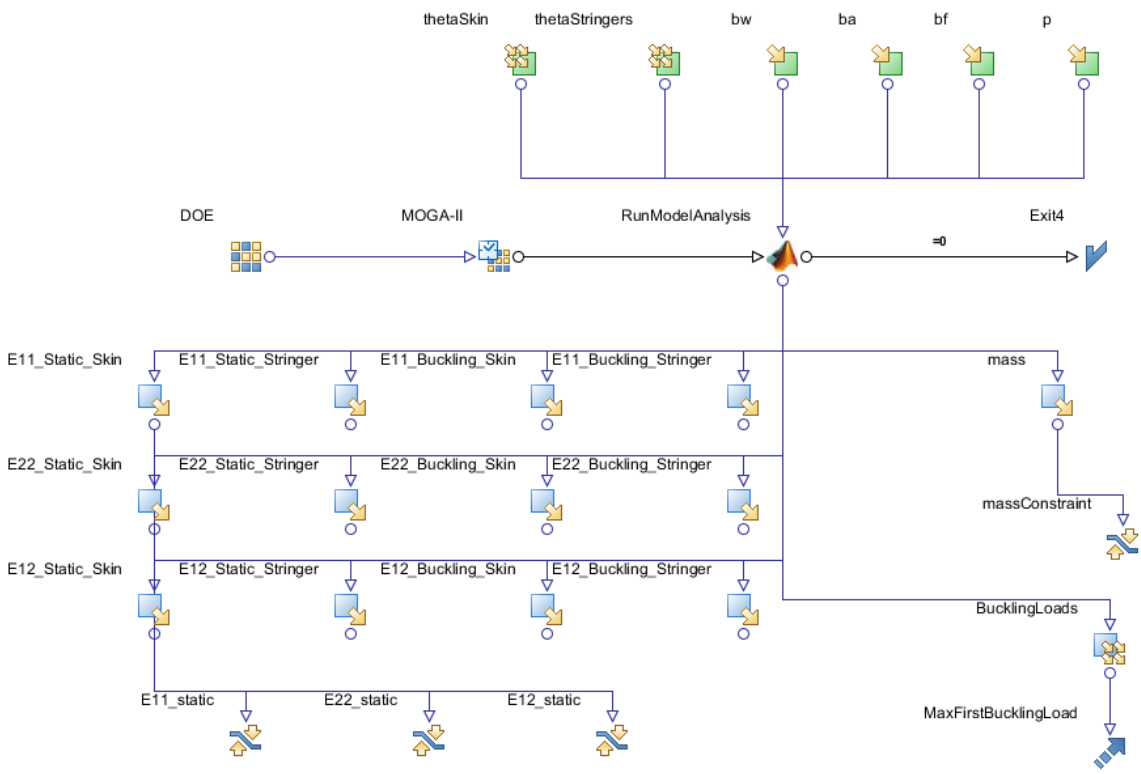
4.1.10 Metodologia baseada em Algoritmo Genético (ModeFrontier)

A implementação em ModeFrontier seguiu o fluxograma da Figura 28. São considerados dois vetores de variáveis de projeto de orientação (um para o empilhamento do painel e outro para o empilhamento dos reforçadores), e 4 variáveis de projeto isoladas (3 dimensões e o posicionamento dos reforçadores), cobrindo portanto as variáveis descritas na seção 4.1.4.

Embora sejam muito semelhantes, a implementação quando emprega-se a parametrização por ODM ao invés de utilizar-se diretamente o valor do ângulo da fibra modifica as variáveis de projeto (seu número e intervalos), como mostrado na seção 3.1.1. Para o caso da parametrização através da ODM, o número de variáveis de projeto de orientação é multiplicado por 5 em relação ao número de variáveis utilizando-se diretamente o valor do ângulo (1 variável por camada otimizada).

A população inicial foi criada a partir do algoritmo SOBOL do ModeFrontier, com 100 projetos. Na configuração do algoritmo genético considerou-se a implementação MOGA-II, com probabilidades de "*cross-over*", seleção e mutação de 50%, 5% e 10%, respectivamente, com elitismo ativado.

Figura 28 - Fluxograma implementado no ModeFrontier.



4.1.11 Metodologia baseada no MMA (Matlab)

Para o caso do algoritmo de otimização MMA e métodos baseados em gradientes, as variáveis de projeto, função objetivo e restrições devem estar dentro de ordens de grandeza pré-estabelecidos e coerentes entre si. Na implementação cedida pelo autor do método, Svanberg (2002), as mesmas preferencialmente devem atender às inequações (113) à (115), quando $c_i = 10^4$ sendo c_i um coeficiente do código.

$$1 \leq f_0(\mathbf{x}) \leq 100 \tag{113}$$

$$0{,}1 \leq x_j^{\max} - x_j^{\min} \leq 100 \tag{114}$$

$$1 \leq g_i^{\max} \leq 100 \tag{115}$$

onde $f_0(\mathbf{x})$ é o valor da função objetivo, $\mathbf{x}$ é o vetor de variáveis de projeto e $g_i^{\max}$ uma constante referente à restrição i. As restrições são escritas na forma da equação (116), sendo satisfeitas se $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$.

$$f_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}) - g_i^{\max} \tag{116}$$

Deste modo foram adotadas operações que escalam os valores das respostas para que atendam aos requisitos definidos acima. Para o caso da função objetivo (carregamentos em N/mm) e restrição de massa (em kg, painel de dimensões 500x500mm) não foram necessárias modificações nos valores das saídas. Com a unidade de comprimento em milímetros, as variáveis de projeto geométricas também não necessitaram ser escaladas, bem como as variáveis de orientação, tanto no caso da parametrização pela ODM quanto no caso contínuo.

As restrições de deformação mostradas nas inequações (90) à (92) primeiramente foram modificadas de modo a atender o formato da equação (116). Assim, foram desmembradas em cinco restrições, (117) à (121), e em seguida, multiplicadas pelo valor de 1000, de modo a terem a ordem de grandeza sugerida pela inequação (115).

$$\varepsilon_{11}^{t,Norm}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{11}^{r}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{adm}^{t,1} \tag{117}$$

$$\varepsilon_{11}^{c,Norm}(\mathbf{x}) = \left|\varepsilon_{11}^{r}(\mathbf{x})\right| - \varepsilon_{adm}^{c,1} \tag{118}$$

$$\varepsilon_{22}^{t,Norm}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{22}^{r}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{adm}^{t,2} \tag{119}$$

$$\varepsilon_{22}^{c,Norm}(\mathbf{x}) = \left|\varepsilon_{22}^{r}(\mathbf{x})\right| - \varepsilon_{adm}^{c,2} \tag{120}$$

$$\varepsilon_{12}^{Norm}(\mathbf{x}) = \left|\varepsilon_{12}^{r}(\mathbf{x})\right| - \varepsilon_{adm}^{12} \tag{121}$$

Para permitir uma ponderação na importância das restrições de deformação para a otimização, inserção de um coeficiente de segurança, verificação da influência destas no resultado da mesma e testes de diferentes cenários de magnitude da pré-carga, as mesmas tiveram seus valores ε_{adm} multiplicados por um coeficiente que reduz o valor de deformação admissível no projeto (quando

comparadas com os valores dos ensaios, seção 5.2). Este coeficiente pode ser escolhido pelo projetista, porém neste trabalho, para as magnitudes de carregamento de pré-carga fictícios considerados, o seu valor ficou entre 0,1% e 5% de modo a forçar ou não que estas restrições estivessem ativas durante a otimização. Na situação prática, em virtude dos carregamentos, geometria e fatores de segurança de um caso real, estas restrições poderiam estar naturalmente ativas ao longo da otimização.

As restrições de ordem de empilhamento, equação (94), para o painel e reforçadores foram manipuladas para permitirem sua inserção no algoritmo MMA. Assim a equação (116), foi inserida na forma da equação (122). Como o valor da atingido pela inequação é sempre inferior a 1, não foi necessário que se escalassem estas restrições.

$$S^{0}_{u^r_i} + S^{45}_{u^r_i} + S^{-45}_{u^r_i} + S^{90}_{u^r_i} - S^{0}_{u^r_{i-1}} - S^{45}_{u^r_{i-1}} - S^{-45}_{u^r_{i-1}} - S^{90}_{u^r_{i-1}} \leq 0 \text{ para } i = 1 \ldots N/2 \qquad (122)$$

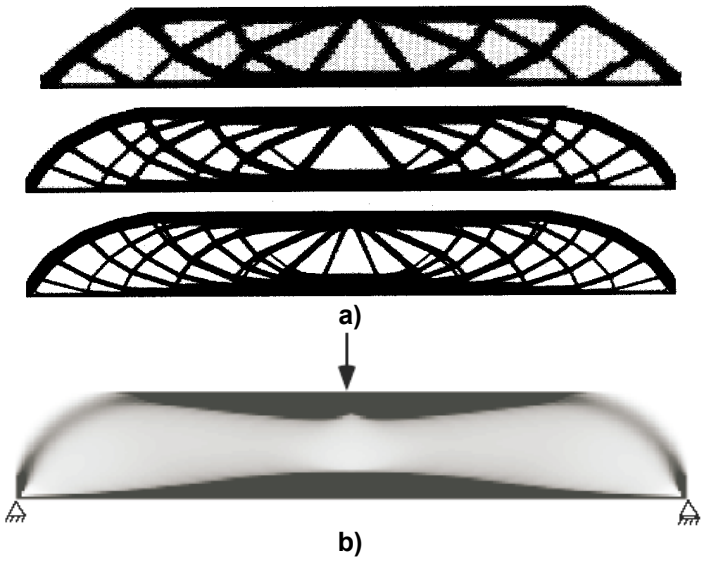
4.2 Otimização Topológica

Nesta seção serão descritas as técnicas empregadas para a solução do problema de otimização topológica contínua no domínio discretizado. A técnica de projeção utilizada para as variáveis de topologia, a técnica de otimização discreta de material empregada para as variáveis de orientação das fibras do material ortotrópico, bem como as metodologias de cálculo dos gradientes e fluxograma da implementação são descritos. A seção 4.2.1 introduz o leitor aos conceitos e aspectos numéricos de implementação da otimização topológica, citados e utilizados durante o restante desta seção.

4.2.1 Aspectos numéricos da implementação do MOT

Como qualquer problema de otimização discreto, o resultado da otimização topológica discreta é dependente do nível de discretização do domínio, por exemplo, do tamanho dos elementos da malha de elementos finitos empregada. A Figura 29a mostra um exemplo de dependência do resultado da otimização com o tamanho da malha de elementos finitos, reflexo do nível de discretização do domínio de projeto.

Figura 29 – a) Exemplo de dependência do resultado com o nível de discretização da malha; b) Exemplo de resultado com escala de cinza.

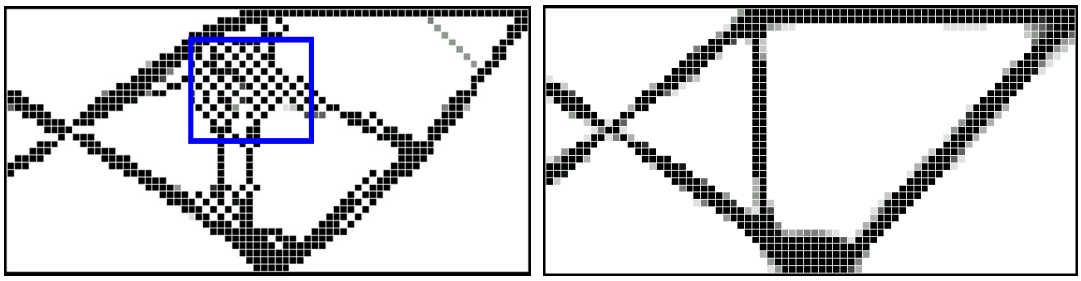


Para contornar este comportamento, é feita a relaxação do problema, por meio de métodos como o SIMP e a homogeneização (BENDSØE, 1989). No entanto, ao relaxar o problema de otimização, surge o comportamento chamado de escala de cinza como resposta, como descrito na Figura 29b. Regiões com materiais de densidades intermediárias "poluem" o resultado da otimização com uma indefinição da existência (cor preta) ou não (cor branca) de material naquelas regiões, caracterizada pela cor cinza (Figura 29b). A penalização busca justamente minimizar este comportamento, trazendo como consequência o retorno da dependência do resultado com o nível de discretização da malha.

Outro problema que surge na implementação numérica da otimização topológica é a instabilidade de tabuleiro de xadrez (BENDSOE; SIGMUND, 2003). A Figura 30 apresenta um exemplo de resultado de topologia afetado por este

problema, caracterizado pela formação de regiões com material e sem material, posicionados na forma de tabuleiro de xadrez. Jog e Haber (1996) discutem de forma aprofundada este fenômeno, suas origens e consequências.

Figura 30 - Exemplo de instabilidade de tabuleiro de xadrez na figura à esquerda, e problema contornado, na figura à direita.



De natureza puramente numérica, ao contrário da dependência de malha e escala de cinza que são problemas associados à formulação da otimização topológica, a instabilidade de tabuleiro está relacionada com o grau da função interpoladora para os deslocamentos do método de elementos finitos empregado. A utilização do método dos elementos finitos baseado em elementos de função interpoladora bilinear, como por exemplo, os quadriláteros de quatro nós e triangulares de três nós, gera um aumento artificial da rigidez de regiões cujo campo de densidades apresenta o padrão geométrico de um tabuleiro de xadrez.

Este aumento artificial de rigidez em relação à regiões de distribuição homogênea de densidades com o mesmo volume de material facilita o surgimento do padrão tabuleiro de xadrez no resultado da otimização. Isto acontece pois a função objetivo é maximizada (rigidez) a um mesmo custo (volume). Uma abordagem para evitar este problema é empregar elementos finitos de alta ordem, onde este comportamento tende a desaparecer (JOG; HABER, 1996).

No entanto, alguns métodos permitem contornar estes problemas apresentados de forma simultânea, como é o caso dos controles de complexidade. Entre eles, os mais comuns são o método do perímetro, restrições locais no gradiente das pseudo-densidades e técnicas de filtro.

O método do perímetro torna o problema de otimização contínuo e bem posto restringindo o domínio viável para excluir topologias que oscilem muito rapidamente. Proposto por Haber et al. (1996), o perímetro da estrutura é definido como uma medida dos contornos, fronteiras da região sólida. Estruturas com poucos, porém

grandes buracos possuem menor perímetro do que estruturas com numerosos buracos pequenos e mesmo volume. Desta maneira, restrições de limite superior para o valor do perímetro permitem excluir projetos com o comportamento de tabuleiro de xadrez, por exemplo. De forma resumida, o método do perímetro permite obter soluções convergentes quanto ao refinamento da malha (malhas mais refinadas permitem resoluções dos resultados melhores, sem alterar o resultado em si), permitindo ainda o controle do número e da escala dos buracos criados na estrutura.

A abordagem de restrições locais no gradiente das pseudo-densidades consiste em restringir a máxima variação entre gradientes de pontos próximos da malha de elementos finitos, retirando anomalias numéricas que possam surgir em virtude de bruscas variações de gradiente, como é o caso do tabuleiro de xadrez. Porém, a mesma agrega um número grande de restrições na otimização, o que torna o procedimento muito lento para aplicações práticas de projeto. Petersson e Sigmund (1998) apresentam o método para o caso do modelo de material SIMP.

Já as técnicas de filtro surgiram baseadas em métodos de processamento de imagens, inicialmente prevenindo o surgimento do problema de tabuleiro de xadrez. Isto foi feito por meio da ponderação das sensibilidades de um dado elemento da malha de elementos finitos com relação aos valores das sensibilidades dos elementos vizinhos a ele na malha. Uma extensão deste conceito foi proposta por Sigmund (1994) por meio de um método de independência de malha que modifica as sensibilidades de qualquer elemento específico baseado na média ponderada das sensibilidades dos elementos pertencentes à uma vizinhança fixa do elemento. Embora heurístico, este procedimento traz resultados muito próximos à técnica de restrições locais no gradiente a um custo computacional e de implementação mais baixos.

Neste caso, as sensibilidades são filtradas por meio da expressão da equação (123), onde o operador $\hat{H}_i$ é dado pela expressão (124), que faz com que o filtro atue ponderando apenas as sensibilidades dos elementos dentro de um certo raio mínimo de atuação do filtro. Quando $r_{\min}$ tende a zero, a sensibilidade filtrada converge para a sensibilidade original e quando $r_{\min}$ tende a infinito, as sensibilidades de todos os elementos tornam-se iguais.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i} \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \tag{123}$$

$$\hat{H}_i = r_{\min} - dist(k,i) \quad , \quad \{ i \in N \mid dist(k,i) \leq r_{\min} \} \tag{124}$$

Este método consagrou-se como o mais popular para contornar os problemas de dependência de malha e instabilidade de tabuleiro de xadrez em problemas de otimização topológica onde a função objetivo é a minimização da flexibilidade média (“mean *compliance”*).

Uma completa revisão bibliográfica sobre os métodos de filtro aplicados à otimização topológica pode ser encontrada em Sigmund (2007). Neste artigo, são apresentadas diversas técnicas, recomendando entre elas, o filtro de projeção das densidades proposto por Bruns e Tortorelli (2001). Como os outros filtros de densidades, ele atua modificando a densidade do elemento (equação (125)) e portanto, sua rigidez, baseado nas densidades de uma vizinhança especificada à ele.

$$\tilde{\rho}_e = \tilde{\rho}_e(\rho_{i \in N_e}) \tag{125}$$

onde $\tilde{\rho}_e$ é a densidade do elemento modificada baseada nas densidades dos elementos vizinhos $\rho_{i \in N_e}$. Deste modo, a rigidez modificada no elemento e pode ser escrita como em (126).

$$E_e = E_e(\rho) = E_e(\tilde{\rho}_e) = E_{\min} + \tilde{\rho}_e^{\,p}(E_0 - E_{\min}) \tag{126}$$

O valor da densidade modificada é dada por (127):

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) v_i \rho_i}{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) v_i} \tag{127}$$

onde $w(\mathbf{x}_i)$ é uma função peso que cai linearmente segundo (128) e v_i o volume do elemento i:

$$w(\mathbf{x}_i) = R - \left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e \right\| \tag{128}$$

4.2.2 Técnica de projeção

De modo a contornar os problemas numéricos da implementação de otimização topológica, como resultados dependentes de malha e com padrões de tabuleiro de xadrez este trabalho utiliza a abordagem de Guest, Prevost e Belytschko (2004). Assim, adotam-se variáveis de projeto topológica nodais, calculando as pseudo-densidades dos elementos através da técnica de projeção linear (BRUNS; TORTORELLI, 2001) e aplicando uma função degrau na técnica de projeção, o que faz com que valores de pseudo-densidades intermediárias tendam a 1 e apenas valores próximos de zero tendam a zero. A implementação desta abordagem é descrita a seguir.

Partindo-se das variáveis de projeto topológicas nodais (d), definidas em cada nó da malha de elementos finitos (não são considerados os nós intermediários dos elementos de casca de 8 nós), calculam-se as pseudo-densidades dos elementos através da equação (129).

$$\rho_e = 1 - e^{-\beta_p \mu_e} + \mu_e e^{-\beta_p} \tag{129}$$

onde μ_e é uma média ponderada das variáveis nodais calculadas como em (130), e β_p um expoente que ajusta a função degrau imposta pela equação (129). Quando β_p é zero, os valores intermediários de μ_e não são penalizados e ρ_e assume uma distribuição linear com relação a β_p. Conforme β_p cresce, o problema caminha para um comportamento discreto. Recomenda-se então que no início da otimização β_p assuma valores pequenos próximos de 1, e com as iterações do otimizador este

valor seja incrementado, penalizando os valores intermediários de pseudo-densidades, método este conhecido como continuação.

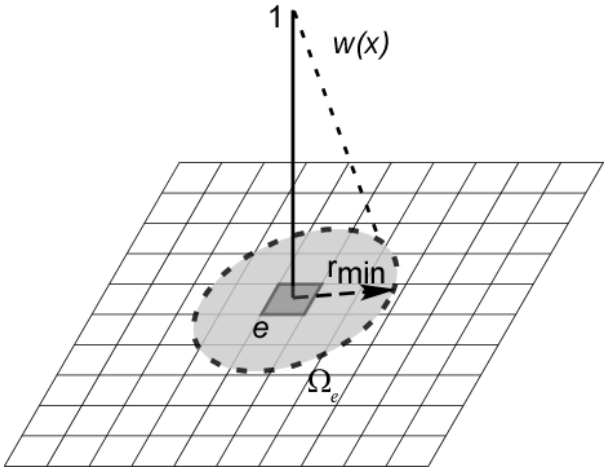
Para o cálculo da média ponderada de variáveis nodais μ_e no elemento e, equação (130), define-se um domínio de variáveis topológicas nodais d_j que influenciam a pseudo-densidade do elemento e. Isto é feito por meio de (131), exemplificada pela Figura 31, onde $r_{\min}$ define um "raio" de influência, independente do nível de refinamento da malha de elementos finitos.

$$\mu_e = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} d_j w_p(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_e)}{\sum_{j \in \Omega_e} w_p(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_e)} \tag{130}$$

$$\mathbf{x}_j \in \Omega_e \quad \text{se} \quad r_j = \left\| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_e \right\| \leq r_{\min} \tag{131}$$

onde r_j é a distância geométrica entre um nó j de coordenadas $\mathbf{x}_j$ e o centróide do elemento e, de coordenadas $\mathbf{x}_e$.

Figura 31 - Definição do raio de influência da técnica de projeção, independente da malha de elementos finitos.



Definido o domínio Ω_e, a função de projeção linear proposta por Bruns e Tortorelli (2001) é calculada através de (132).

$$w_p(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_e) = \begin{cases} \dfrac{r_{\min} - r_j}{r_{\min}}, \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_e \\ 0, \text{ se } \mathbf{x} \notin \Omega_e \end{cases} \tag{132}$$

Guest, Asadpoure e Ha (2011) propuseram modificações no método da continuação, utilizado para o tratamento do expoente penalizador de pseudo-densidades intermediárias, β_p. Estas modificações evitam o crescimento do número de iterações para convergência e a dependência do resultado com relação ao critério empregado para aumento do valor de β_p, problemas comuns da utilização do método da continuação. A equação (129) assume então a forma da equação (133):

$$\rho_e = 1 - e^{-\beta_p \mu_e} + \frac{\mu_e}{\mu_{\max}} e^{-\beta_p \mu_{\max}} \tag{133}$$

onde $\mu_{\max} = d_{\max}$, em que $d_{\max}$ é um limite superior para o valor das variáveis d relaxadas em relação à abordagem usual de fixá-las no intervalo 0 à 1. Neste trabalho, os valores dos parâmetros da equação (133) são adotados como sendo os sugeridos por Guest, Asadpoure e Ha (2011), $\beta_p = 2$, $d_{\max} = 100$.

Ainda segundo Guest, Asadpoure e Ha (2011), é proposta uma modificação no algoritmo de otimização MMA. Nas duas primeiras iterações do algoritmo, as assíntotas móveis são calculadas como em (134) (SVANBERG, 1987).

$$\begin{aligned} low^{(k)} &= d^{(k)} - 0{,}5(d^{\max} - d^{\min}) \\ upp^{(k)} &= d^{(k)} + 0{,}5(d^{\max} - d^{\min}) \end{aligned} \tag{134}$$

onde low e upp são as assíntotas inferior e superior e $d^{\max}, d^{\min}$ os limites das variáveis topológicas nodais. Para evitar a instabilidade no cálculo das assíntotas, causada por grandes diferenças entre $d^{\max}, d^{\min}$, Guest, Asadpoure e Ha (2011)

propõem a seguinte modificação no cálculo das assíntotas do MMA nas duas primeiras iterações.

$$
\begin{aligned}
low^{(k)} &= d^{(k)} - \frac{0,5}{\beta_p + 1} \\
upp^{(k)} &= d^{(k)} + \frac{0,5}{\beta_p + 1}
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Por fim, de modo a evitar singularidades no cálculo das matrizes de rigidez dos elementos, causadas por elementos vazios cujas pseudo-densidades sejam exatamente nulas, um valor mínimo de pseudo-densidade é adicionado. Assim, a matriz de rigidez dos elementos torna-se (136), com $\rho_{\min} = 10^{-6}$.

$$
\mathbf{K}^e = (\rho_e^{p_c} + \rho_{\min}) \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{c}_0^E \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u d\Omega \tag{136}
$$

4.2.3 Método de Otimização Discreta de Material

O método de Otimização Discreta de Material (ODM) (Stegmann, 2004), descrito neste texto dentro da seção 3.1.1, foi adotado também para a implementação do problema de otimização topológica. Os mesmos conceitos e formulações apresentadas naquela seção são válidas para esta implementação. A metodologia faz a interface com o código de elementos finitos por meio da matriz de rigidez do elemento (136) que ao ser aplicada a ODM, transforma-se em (137), com $\mathbf{c}_{ef}^E$ sendo calculado através de (86):

$$
\mathbf{K}^e = (\rho_e^{p_c} + \rho_{\min}) \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{c}_{ef}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u d\Omega \tag{137}
$$

4.2.4 Restrição de critério de falha

Ao inserir restrições de tensão mecânica ou critérios de falha dentro da otimização topológica surgem dois principais problemas. O primeiro deles está relacionado com a degradação do espaço de soluções, que aparece devido ao fato de haver diversas configurações diferentes com o mesmo valor de tensão (CHENG; JIANG, 1992; KIRSCH, 1990). Assim, o otimizador baseado em gradientes encontra dificuldades em buscar a solução ótima baseando-se em restrições de tensão que podem ser ativadas por diferentes pontos de projeto dentro do espaço viável de soluções.

O segundo problema que surge relaciona-se à natureza das tensões mecânicas (e consequentemente, do critério de falha). Esta é uma grandeza local, calculada em cada ponto de integração dos elementos do modelo de elementos finitos da estrutura. Deste modo, torna-se necessário que sejam inseridas restrições de tensão para cada ponto de integração, o que aumenta o custo computacional da otimização, como discutido em Le et al. (2010).

Métodos para contornar estes problemas foram propostos na literatura (CHENG; DUO, 1997), (ROZVANY; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, 1992), (DUYSINX; BENDSØE, 1998), (BRUGGI, 2008) e neste trabalho será adotada a abordagem de Le et al. (2010), descrita por Kiyono (2012).

Primeiramente, é considerado um método de relaxação das tensões baseado no método SIMP, com um penalizador das tensões de valor menor do que a penalização estrutural. Adota-se o mesmo modelo de material que para matriz de rigidez e o cálculo das tensões torna-se (138):

$$\sigma = \rho_e^{p_\sigma} \mathbf{c}_{ef}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e \tag{138}$$

onde $\mathbf{c}_{ef}^E$ é calculado pelo método da ODM, através de (86).

Em seguida, para contornar o problema dO critério de falha ser uma grandeza local, adota-se o valor máximo de critério de falha da estrutura como restrição do problema de otimização, abordagem proposta por Le et al. (2010). Isto faz com que o custo computacional seja reduzido, no entanto, em contrapartida não permite um

controle rigoroso da distribuição de tensões, podendo resultar em estruturas que contenham concentrações de tensão, variando de problema a problema. Para o caso de otimização considerado neste trabalho, será considerada esta simplificação.

Como o material que constitui a estrutura é um material ortotrópico, optou-se pelo critério de falha de *Tsai-Wu* para critério a ser empregado como restrição. Pelo fato de o mesmo ser um critério não homogêneo, segundo Groenwold e Haftka (2006) é importante que seja empregado o fator de segurança como restrição ao invés do valor do critério de falha diretamente. Isto evita problemas de dependência do resultado com relação ao caso de carga. O critério de *Tsai-Wu* (σ_{TW}) pode ser calculado como mostrado anteriormente em (53). Empregando-se a notação mais compacta de Groenwold e Haftka (2006), o mesmo é reescrito como em (139) e (140):

$$\sigma_{TW} = Y_1\sigma_{11} + Y_2\sigma_{22} + Y_{11}\sigma_{11}^2 + Y_{22}\sigma_{22}^2 + 2Y_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + Y_{66}\tau_{12}^2 \qquad (139)$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{T_1} - \frac{1}{C_1} \\
Y_2 &= \frac{1}{T_2} - \frac{1}{C_2} \\
Y_{11} &= \frac{1}{T_1 C_1} \\
Y_{22} &= \frac{1}{T_2 C_2} \\
Y_{66} &= \frac{1}{S^2} \\
Y_{12} &= -\frac{\sqrt{Y_1 Y_2}}{2}
\end{aligned} \qquad (140)$$

onde T_1, C_1 são os limites de resistência à tração e compressão, respectivamente, no sentido longitudinal das fibras do material, T_2, C_2 os mesmos limites, porém no sentido transversal das fibras e S o limite de resistência ao cisalhamento.

O fator de segurança s_g no ponto g da estrutura pode ser entendido como o acréscimo de carga à qual a estrutura pode ser submetida sem que sofra falha prevista pelo critério de falha no ponto g. O mesmo é calculado como proposto por Groenwold e Haftka (2006) e Kiyono (2012), através da solução da equação de segundo grau (141) analiticamente através de (142), com a, b calculados como em (143) e (144).

$$s_g^2(Y_{11}\sigma_{11}^2 + Y_{22}\sigma_{22}^2 + Y_{66}\tau_{12}^2 + 2Y_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}) + s_g(Y_1\sigma_{11} + Y_2\sigma_{22}) - 1 = 0 \tag{141}$$

$$s_g = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \tag{142}$$

$$a = Y_{11}\sigma_{11}^2 + Y_{22}\sigma_{22}^2 + Y_{66}\tau_{12}^2 + 2Y_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \tag{143}$$

$$b = Y_1\sigma_{11} + Y_2\sigma_{22} \tag{144}$$

Matricialmente,

$$a = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_1 \overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{145}$$

$$b = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_2 \overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{146}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_1 = \begin{Bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{147}$$

Assim, a restrição de critério de falha do problema torna-se:

$$\min_{g=1,\ldots,n_\sigma} \{s_g\} \geq 1 \tag{148}$$

No entanto, ao manter a restrição do problema como uma função mínimo, mostrada na equação (148), o gradiente desta restrição não pode ser calculado devido a o fato de funções mínimo e máximo não serem deriváveis. Para contornar este problema, utiliza-se o conceito de função "norma-p", proposto por Le et al. (2010), que faz com a que restrição de fator de segurança do problema torne-se a equação (149).

$$s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \geq 1 \tag{149}$$

onde $p_n < -1$ é uma penalização que tem como objetivo aproximar o valor de s_{NP} do valor mínimo de s_g quando o módulo de p_n cresce, aproximando a restrição original (148) com uma função que é derivável e única para todo o domínio.

4.2.5 Sensibilidades

Para a solução do problema de otimização definido neste trabalho através do algoritmo MMA é necessário calcular as sensibilidades da função objetivo e das restrições da otimização em relação às variáveis de projeto (topologia, d e orientação das fibras, ν).

Partindo-se da função objetivo (150), as sensibilidades são dadas por (151) e (152).

$$C(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \tag{150}$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial d_n} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial d_n} \mathbf{u} \tag{151}$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \nu_i^e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \nu_i^e} \mathbf{u} \tag{152}$$

No caso da derivada em relação às variáveis de topologia, equação (151), a relação (153) é válida.

$$\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial d_n} = -\mathbf{u}_e{}^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial d_n} \mathbf{u}_e \tag{153}$$

Se as variáveis de orientação estiverem associadas a cada elemento, a relação (154) pode ser utilizada diretamente.

$$\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \nu_i^e} = -\mathbf{u}_e{}^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \nu_i^e} \mathbf{u}_e \tag{154}$$

Caso as variáveis de orientação estejam associadas a "*patches*" de elementos, é necessário que a sensibilidade da equação (152) seja avaliada como uma soma sobre todos os N^{ep} elementos j que afetados pela variável de orientação $\nu_i^{e,j}$, como em (155).

$$\frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \nu_i^e} = -\sum_{j=1}^{N^{ep}} \left(\mathbf{u}_{e,j}\right)^T \frac{\partial \mathbf{K}^{e,j}}{\partial \nu_i^{e,j}} \mathbf{u}_{e,j} \tag{155}$$

A derivada da matriz de rigidez $\mathbf{K}^e$ dos elementos em relação às variáveis de orientação (ν_i^e) é dada por (156).

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \nu_n^e} = (\rho_e^{p_c} + \rho_{\min}) \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \frac{\partial \mathbf{c}_{ef}^E}{\partial \nu_n^e} \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u d\Omega \tag{156}$$

onde,

$$\frac{\partial \mathbf{c}_{ef}^E}{\partial \nu_n^e} = \sum_{i=1}^{n^c} \frac{\partial w_{o_i}}{\partial \nu_n^e} \mathbf{c}_{\theta_i}^E \tag{157}$$

sendo,

$$\frac{\partial w_{o_i}}{\partial \nu_n^e} = \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial \nu_n^e} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n^c} \hat{w}_k} - \frac{\hat{w}_i}{\left(\sum_{k=1}^{n^c} \hat{w}_k\right)^2} \sum_{k=1}^{n^c} \frac{\partial \hat{w}_k}{\partial \nu_n^e} \tag{158}$$

$$\frac{\partial \hat{w}_i}{\partial \nu_n^e} = \begin{cases} p_\nu (\nu_n^e)^{p_\nu - 1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n^c} 1 - (\nu_j^e)^{p_\nu} & \text{para} \quad \text{n} = i \\ -(\nu_i^e)^{p_\nu} \, p_\nu (\nu_n^e)^{p_\nu - 1} \prod_{j=1, j\neq i, j\neq n}^{n^c} 1 - (\nu_j^e)^{p_\nu} & \text{para} \quad n = j \end{cases} \tag{159}$$

Já a derivada da matriz de rigidez $\mathbf{K}^e$ dos elementos em relação às variáveis de topologia é dada por (160).

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial d_n} = \left(p_c \rho_e^{p_c - 1} \frac{\partial \rho_e}{\partial d_n} \right) \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{c}_{ef}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u d\Omega \tag{160}$$

onde,

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial d_n} = \beta_p e^{-\beta_p \mu_e} \frac{\partial \mu_e}{\partial d_n} + \frac{e^{-\beta_p \mu_{\max}}}{\mu_{\max}} \frac{\partial \mu_e}{\partial d_n} \tag{161}$$

$$\frac{\partial \mu_e}{\partial d_n} = \frac{w_p(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_e)}{\sum_{j \in \Omega_e} w_p(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_e)} \tag{162}$$

A derivada da restrição de tensão em relação a uma variável de projeto genérica φ (que pode assumir a forma de d_n ou ν_i) é dada por (163), através dos cálculos a seguir, apresentados em (KIYONO, 2012).

$$\frac{\partial s_{NP}}{\partial \varphi} = \frac{1}{p_n} \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n} - 1} \left[\sum_{g=1}^{n_\sigma} p_n s_g^{p_n - 1} \frac{\partial s_g}{\partial \varphi} \right] \tag{163}$$

onde $\frac{\partial s_g}{\partial \varphi}$ é avaliado por meio dos coeficientes (143), (144) da solução da equação de segundo grau de (141), resultando em (164).

$$\frac{\partial s_g}{\partial \varphi} = \frac{\frac{-\partial b}{\partial \varphi} + \frac{1}{2\sqrt{b^2+4a}}\left(2b\frac{\partial b}{\partial \varphi} + 4\frac{\partial a}{\partial \varphi}\right)}{2a} - \frac{-b+\sqrt{b^2+4a}}{4a^2}2\frac{\partial a}{\partial \varphi} \tag{164}$$

Rearranjando os termos e simplificando, obtém-se (165) cujos termos $\frac{\partial a}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial b}{\partial \varphi}$ são calculados por meio de (166) e (167).

$$\frac{\partial s_g}{\partial \varphi} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+4a}} - s_g\right)\frac{\partial a}{\partial \varphi} + \frac{1}{2a}\left(-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)\frac{\partial b}{\partial \varphi} \tag{165}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \varphi} = 2\overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_1 \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \varphi} \tag{166}$$

$$\frac{\partial b}{\partial \varphi} = 2\overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_2 \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \varphi} \tag{167}$$

O termo $\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \varphi}$ é obtido matricialmente por meio de (168), que voltando na equação (165), resulta na equação (169).

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = I_{10}\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varphi} \tag{168}$$

$$\frac{\partial s_g}{\partial \varphi} = \left[\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+4a}} - s_g\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_1 + \frac{1}{a}\left(-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_2\right] I_{10}\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varphi} \tag{169}$$

De modo a simplificar a equação (169), define-se S_{mat} como em (170), e a derivada do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é calculado como em (171), por meio da regra da cadeia.

$$S_{mat} = \left[\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+4a}} - s_g \right) \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_1 + \frac{1}{a}\left(-1 + \frac{b}{\sqrt{b^2+4a}} \right) \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{Y}_2 \right] I_{10} \tag{170}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varphi} = p_\sigma \gamma_e^{p_\sigma - 1} \frac{\partial \gamma_e}{\partial \varphi} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e + \gamma_e^{p_\sigma} \frac{\partial \mathbf{c}_{ef\sigma}^E}{\partial \varphi} \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e + \gamma_e^{p_\sigma} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \varphi} \tag{171}$$

Voltando para a derivada do fator de segurança e fazendo-se as substituições, é obtida a expressão (172), que pode ser reescrita na forma de (173).

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{NP}}{\partial \varphi} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}-1} \sum_{g=1}^{n_\sigma} \Bigg\{ s_g^{p_n-1} S_{mat} \Bigg[\left(p_\sigma \gamma_e^{p_\sigma - 1} \frac{\partial \gamma_e}{\partial \varphi} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E + \gamma_e^{p_\sigma} \frac{\partial \mathbf{c}_{ef\sigma}^E}{\partial \varphi} \right) \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e + \ldots \\ \ldots + \gamma_e^{p_\sigma} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \varphi} \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{172}$$

$$\frac{\partial s_{NP}}{\partial \varphi} = \mathrm{Aux}_1 + \mathrm{Aux}_2 \tag{173}$$

sendo,

$$\mathrm{Aux}_1 = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}-1} \sum_{g=1}^{n_\sigma} \left\{ s_g^{p_n-1} S_{mat} \left(p_\sigma \gamma_e^{p_\sigma - 1} \frac{\partial \gamma_e}{\partial \varphi} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E + \gamma_e^{p_\sigma} \frac{\partial \mathbf{c}_{ef\sigma}^E}{\partial \varphi} \right) \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e \right\} \tag{174}$$

$$\mathrm{Aux}_2 = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}-1} \sum_{g=1}^{n_\sigma} \left(s_g^{p_n-1} S_{mat} \gamma_e^{p_\sigma} \mathbf{c}_{ef\sigma}^E \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_u \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \varphi} \right) \tag{175}$$

O termo Aux_2 pode ser rearranjado e calculado por meio de (176).

$$\mathrm{Aux}_2 = \mathbf{F}_\sigma^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} \tag{176}$$

onde,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = \left(\mathbf{K}^e\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \varphi} \mathbf{u} \tag{177}$$

proveniente da derivada de (178), equação de equilíbrio:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{178}$$

resulta em (179), de onde se obtém (177).

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \tag{179}$$

4.2.6 Fluxograma da otimização

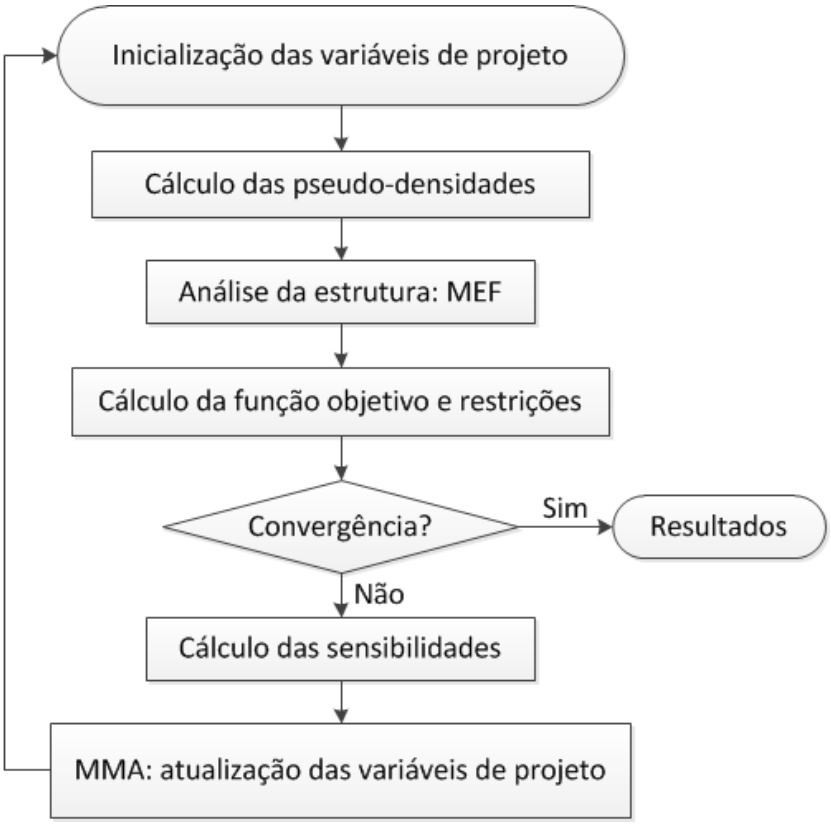
O ciclo de otimização da estrutura segue um formato típico de otimização topológica, representado de forma macro através da Figura 32 e implementado na linguagem do software comercial MATLAB. O código começa inicializando as variáveis de projeto, tanto de topologia quanto de orientação (d_n e v_i). Segundo a técnica de projeção para as variáveis topológicas, as pseudo-densidades dos elementos da malha de elementos finitos (geradas por meio de um pré-processador comercial, no caso Ansys) são calculadas.

Com as pseudo-densidades e aplicando-se o método de otimização discreta de material sobre as variáveis de orientação, são obtidas as matrizes de rigidez dos elementos. A rotina de montagem da matriz de rigidez global e vetor de carregamentos é iniciada e os valores de deslocamentos da estrutura, bem como as tensões atuantes na mesma são obtidas, por meio da solução do sistema linear resultante.

Deste modo, as entradas necessárias para o cálculo da função objetivo e restrições do problema de otimização estão calculadas, permitindo-se que seja avaliada a convergência do laço de otimização. Caso trate-se da primeira iteração da otimização, ou ainda, caso a métrica de convergência da otimização indique que não há convergência, o cálculo das sensibilidades é disparado.

Dados os valores de função objetivo, restrições e sensibilidades, o algoritmo de otimização (MMA) faz a atualização das variáveis de projeto, reiniciando-se o laço no ponto de atualização dos valores de pseudo-densidades dos elementos a partir das variáveis de projeto. Este laço repete-se até que a métrica de convergência da otimização indique que houve convergência, por exemplo, através da estabilização do valor de função objetivo ao longo de iterações sucessivas.

Figura 32 - Fluxograma da otimização topológica.



5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

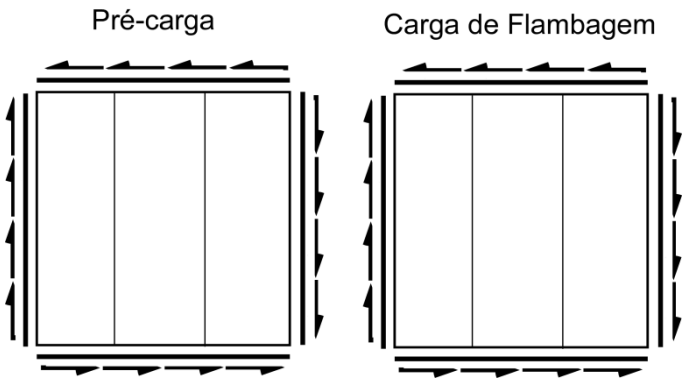
5.1 Comparação entre metodologias de otimização paramétrica

Como explorado na seção 4.1, identificaram-se quatro metodologias principais para resolver o problema de otimização proposto na seção 3.1:

- Variáveis de ângulos de fibra e algoritmo genético;
- Variáveis ODM e algoritmo genético;
- Variáveis de ângulos de fibra e MMA;
- Variáveis ODM e MMA.

Para comparação entre elas, baseando-se em um caso de carga de puro cisalhamento, tanto na pré-carga quanto na carga de flambagem, com condições de contorno de arestas simplesmente apoiadas (Figura 33), foram executadas as rotinas de otimização cujas implementações foram descritas na seção 4.1. Os resultados são apresentados nas seções 5.1.1 à 5.1.4, sendo definida na seção 5.1.5 uma metodologia preferencial.

Figura 33 - Caso de carga que será considerado na comparação de metodologias.



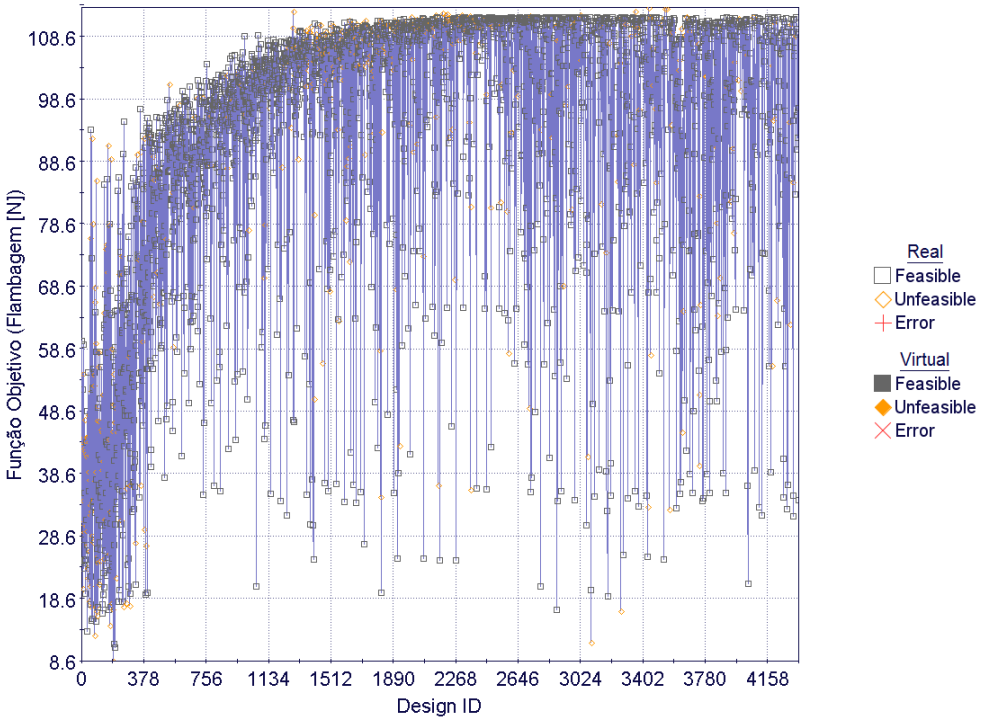
Todas as comparações de tempo computacional deste trabalho foram baseadas em um mesmo microcomputador com sistema operacional Windows 7 64-bits, processador Intel Core i7-3960X (3.30GHz) e 64GB de memória RAM.

5.1.1 Resultados utilizando variáveis de ângulos de fibra e algoritmo genético

Segundo a implementação descrita na seção 4.1.10, empregou-se o Algoritmo Genético para a otimização considerando como variáveis de projeto de orientação uma distribuição contínua de ângulos dentro do intervalo de -75º à 90º para cada uma das quatro camadas do painel e dos reforçadores (empilhamento simétrico em ambos, 8 camadas no total).

A Figura 34 apresenta o histórico da função objetivo em função do número do indivíduo gerado pelo algoritmo. Nota-se que após cerca de 2000 avaliações da função objetivo e restrições o algoritmo se aproxima de um possível ótimo com carga de flambagem próxima a 110 N/mm. O tempo de simulação necessário para atingir este patamar foi de cerca de 33 horas, enquanto o tempo total de simulação (aproximadamente 4200 avaliações da função objetivo) foi de cerca de 70 horas.

Figura 34 - Histórico da função objetivo no Algoritmo Genético (ModeFrontier).



Em virtude das variáveis de projeto de orientação serem variáveis contínuas neste caso (ângulos da fibra), os valores de orientação considerados resultantes da otimização foram definidos através de uma rotina no ModeFrontier como sendo os ângulos permitidos (0º, -45º, 45º ou 90º) mais próximos dos obtidos pela otimização.

A Figura 35 mostra um empilhamento ótimo obtido e a Figura 36 as variáveis geométricas e de posicionamento dos reforçadores deste mesmo possível ponto ótimo. Deve-se salientar que em virtude do método de otimização, não é possível afirmar que um ponto ótimo global foi encontrado, mas sim um possível ponto ótimo.

Figura 35 - Empilhamentos do painel e dos reforçadores obtidos pelo Algoritmo Genético baseado em variáveis de ângulos de fibra.

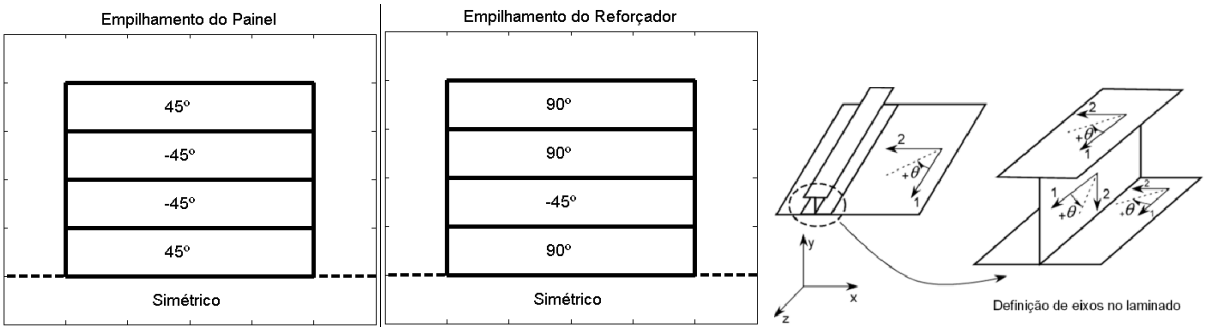
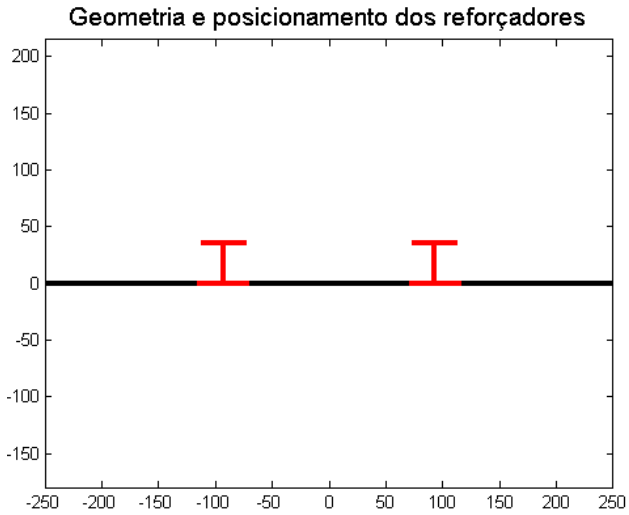


Figura 36 - Geometria e posicionamento dos reforçadores obtidos pelo Algoritmo Genético (unidades em mm).



Gráficos de tendências entre a função objetivo e as restrições gerados pelo ModeFrontier permitiram observar certos comportamentos:

- Figura 37: os valores de função objetivo maiores tendem a se concentrar nas regiões de maior massa (maiores dimensões dos reforçadores), sendo ativamente limitadas pela restrição de massa (7,5kg).

- Figura 38 e Figura 39: painéis com deformações estáticas ε_{11} e ε_{12} na pré carga menores tendem a resultar em cargas de flambagem maiores, em virtude do aumento de rigidez do mesmo que pode ser inferido pelas menores deformações estáticas (o carregamento estático é mantido constante ao longo da otimização).

Figura 37 - Tendência entre massa e a carga de flambagem do painel.

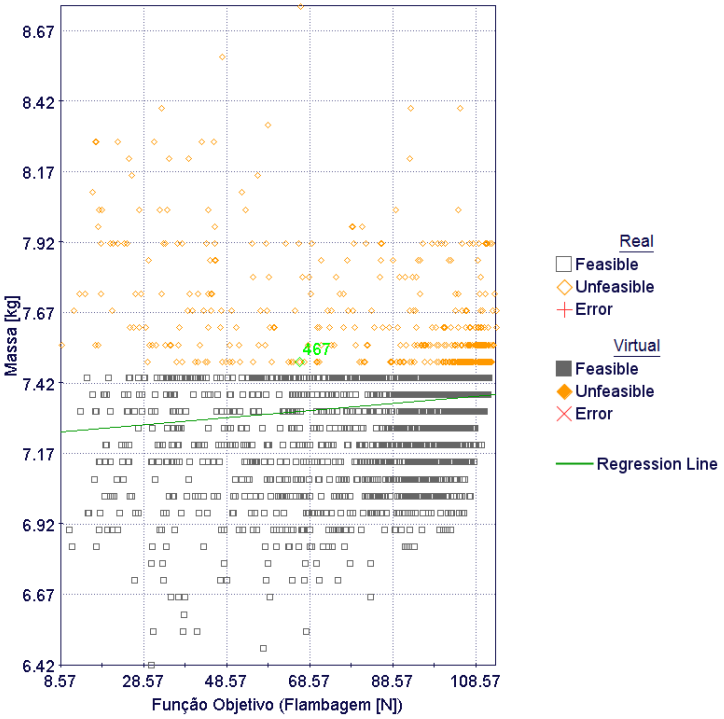


Figura 38 - Tendência entre carga de flambagem e deformação estática ε_{11} no painel.

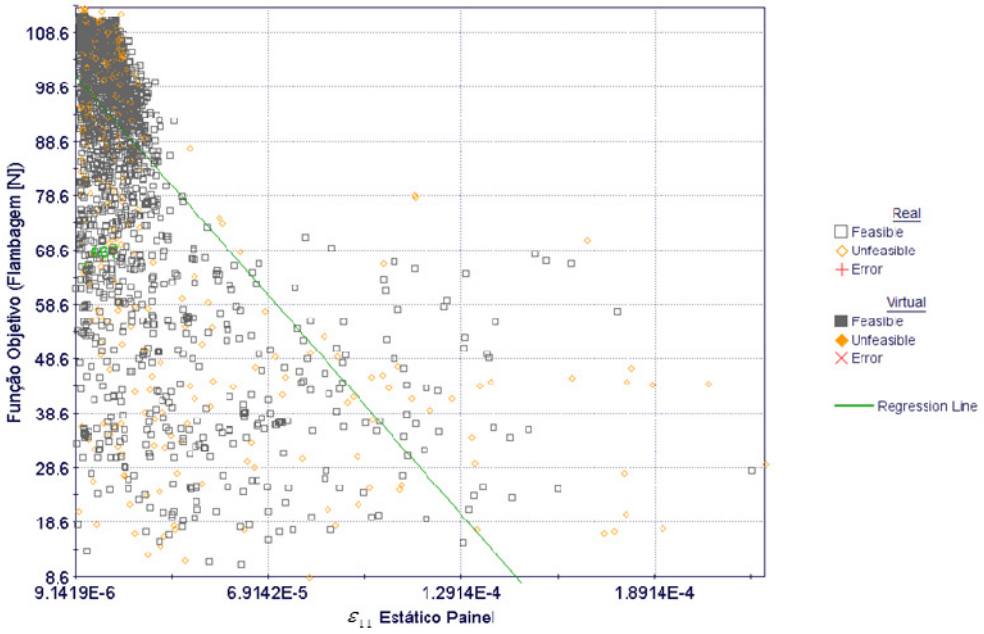
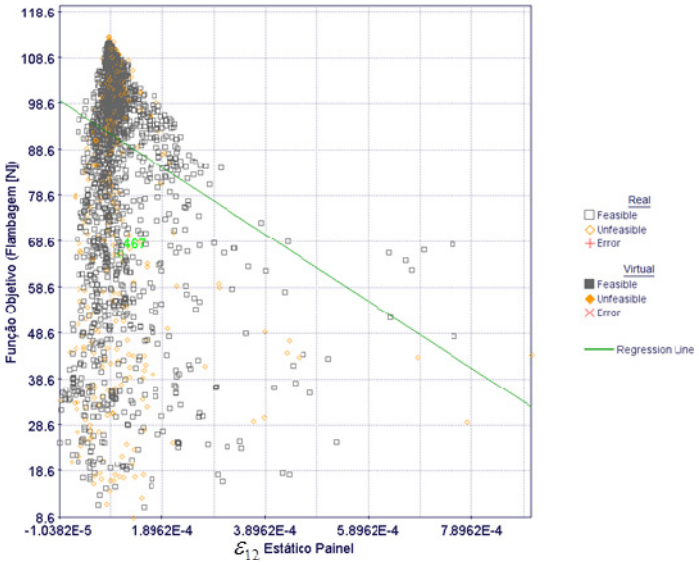


Figura 39 - Tendência entre carga de flambagem e deformação estática ε_{12} no painel.



Por fim, a Figura 40 apresenta a matriz de correlações entre todas as variáveis de projeto, restrições e função objetivo do problema. Este tipo de matriz permite identificar de maneira rápida quais são os parâmetros de projeto que mais influenciam as saídas do problema de otimização, função objetivo e restrições.

Em cada uma das linhas e colunas são relacionadas as variáveis de saída ou de entrada do problema. O número e a cor de cada elemento da matriz abaixo da diagonal principal indica o nível de correlação linear entre as respectivas variáveis indicadas na sua linha e coluna. Números próximos de 1 (cor vermelha) indicam que as variáveis são diretamente dependentes. Números próximos de -1 (cor azul) indicam variáveis inversamente dependentes e números próximos de 0 indicam que não há correlação entre as duas variáveis. Nos elementos acima da diagonal principal da matriz, são apresentados os gráficos de correlação de cada par de variáveis para cada ponto de projeto estudado pela otimização. Os pontos que não violam restrições são representados na cor cinza escuro e os pontos que violam restrições de projeto na cor amarela. Por fim, os elementos posicionados sobre a diagonal principal da matriz apresentam o gráfico de distribuição do número de pontos de projeto dentro do intervalo de cada variável. Com a convergência da otimização, um grande número de pontos de projeto tende a se concentrar em torno de valores de variáveis de projeto próximos. Assim, estes gráficos de distribuição exibem um indicativo de onde o melhor valor para cada variável se encontra

posicionado dentro do intervalo admitido (no caso de variáveis de entrada) ou do intervalo encontrado (no caso de variáveis de saída).

Observa-se, por exemplo, que o valor da função objetivo (primeira coluna) apresenta fortes correlações com a variável de posicionamento “p” dos reforçadores, bem como com a orientação das fibras na primeira camada do painel. O valor da massa do painel (segunda coluna) é influenciado principalmente pelas dimensões da seção transversal dos reforçadores (ba, bf). Algumas correlações entre variáveis de saída também ajudam no entendimento do problema, como por exemplo, a correlação entre a função objetivo (primeira coluna) e a o valor da restrição de deformação estática (terceira linha), indicando que uma melhoria na carga de flambagem tende a melhorar também o nível de deformação estática encontrada no painel. Neste caso de otimização, com um número médio de variáveis de projeto, o seu uso tende a ser útil para a verificação do resultado. No entanto, quando cresce o número de variáveis de otimização e a complexidade do problema em si, este tipo de saída gráfica permite guiar o projetista na definição inicial do seu projeto.

Figura 40 - Matriz de correlações entre variáveis de projeto, função objetivo e restrições para o caso de variáveis contínuas de orientação e Algoritmo Genético.

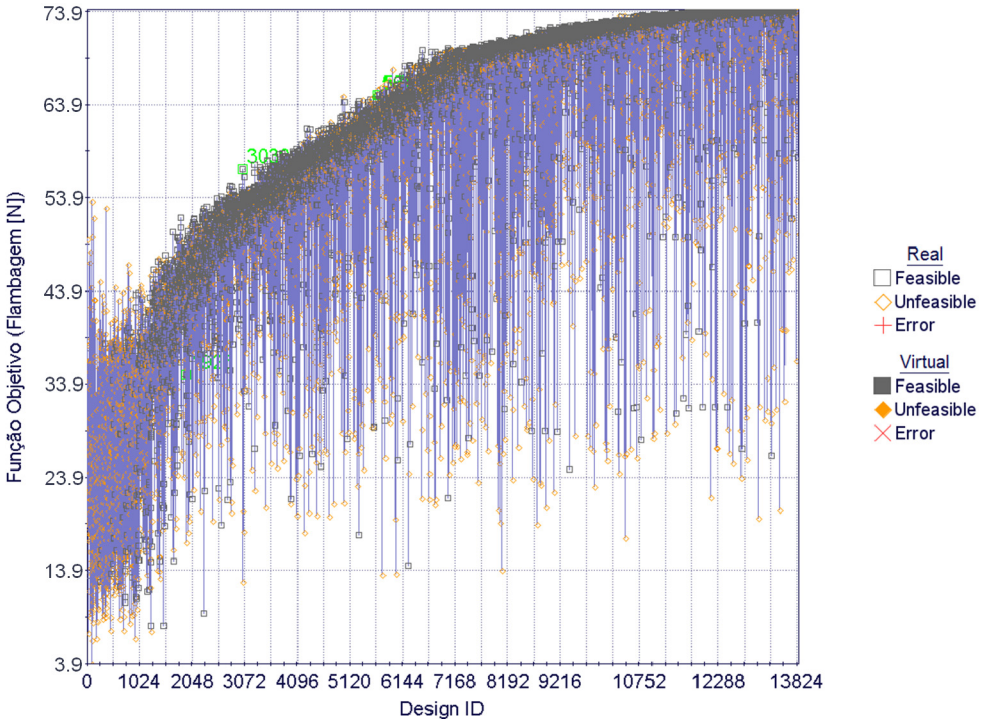
	MaxFi...	mass...	E11_...	E12_...	E22_...	ba	bf	bw	p	theta...	theta...	theta...	theta...	theta...	theta...	theta...	theta...
MaxFirstBucklingLoad																	
massConstraint	0.435																
E11_static	-0.617	-0.304															
E12_static	-0.177	-0.193	0.299														
E22_static	-0.137	-0.287	-0.049	0.431													
ba	0.190	0.724	-0.183	-0.196	-0.313												
bf	0.224	0.545	-0.203	-0.169	-0.245	0.246											
bw	0.133	-0.083	0.012	0.144	0.236	-0.532	-0.485										
p	-0.416	-0.087	0.240	0.059	0.001	0.002	0.009	-0.126									
thetaSkin[0]	-0.573	-0.211	0.642	0.160	-0.181	-0.120	-0.100	-0.038	0.178								
thetaSkin[1]	-0.294	-0.136	0.215	0.239	0.340	-0.092	-0.138	0.061	0.152	0.120							
thetaSkin[2]	-0.201	-0.238	0.195	0.273	0.411	-0.187	-0.177	0.080	-0.003	0.262	0.109						
thetaSkin[3]	0.243	0.263	-0.230	-0.072	0.070	0.125	0.193	0.017	-0.020	-0.142	-0.072	-0.134					
thetaStringers[0]	0.412	0.362	-0.308	-0.161	-0.132	0.232	0.278	-0.064	-0.168	-0.215	-0.114	-0.150	0.307				
thetaStringers[1]	0.304	0.100	-0.198	-0.042	0.002	-0.036	-0.007	0.185	-0.097	-0.155	-0.071	-0.044	0.165	0.212			
thetaStringers[2]	-0.211	-0.232	0.198	0.099	0.125	-0.049	-0.222	-0.045	0.114	0.127	0.137	0.113	-0.093	-0.199	-0.138		
thetaStringers[3]	-0.393	-0.342	0.362	0.201	0.148	-0.280	-0.345	0.211	0.206	0.341	0.208	0.247	-0.186	-0.305	-0.145	0.144	

5.1.2 Resultados utilizando variáveis ODM e algoritmo genético

Seguindo a mesma implementação em ModeFrontier da seção 4.1.10, investigou-se o comportamento da otimização empregando as variáveis de projeto de orientação parametrizadas segundo a ODM. É importante ressaltar que o número de variáveis de projeto cresce consideravelmente com esta parametrização, subindo de 1 para 5 variáveis por camada dos empilhamentos (painel e reforçador). Isto desfavorece o algoritmo genético pelo número de avaliações da função objetivo e restrições necessário crescer na mesma ordem. Segundo o manual do usuário do software ModeFrontier, o tamanho da população inicial gerada por meio do algoritmo SOBOL deve ser igual ou maior que duas vezes o número de variáveis de projeto multiplicada pelo número de objetivos e restrições.

A Figura 41 mostra a evolução do valor da função objetivo ao longo da geração dos indivíduos. Nota-se uma convergência a partir de 12500 indivíduos, o que levou cerca de 180 horas de simulação, tempo maior que o necessário para o caso de variáveis contínuas de orientação. Novamente não há garantia de que um ponto ótimo global foi encontrado.

Figura 41 - Histórico da função objetivo no Algoritmo Genético (ModeFrontier) baseado em variáveis ODM.



A Figura 42 mostra o comportamento da massa dos projetos gerados ao longo das iterações, e na Figura 43 fica evidente a existência de um patamar de massa que limita o aumento da carga de flambagem. A Figura 44 e Figura 45 apresentam os resultados de empilhamento e posicionamento obtidos.

Figura 42 - Histórico da restrição de massa no Algoritmo Genético (ModeFrontier) baseado em variáveis ODM.

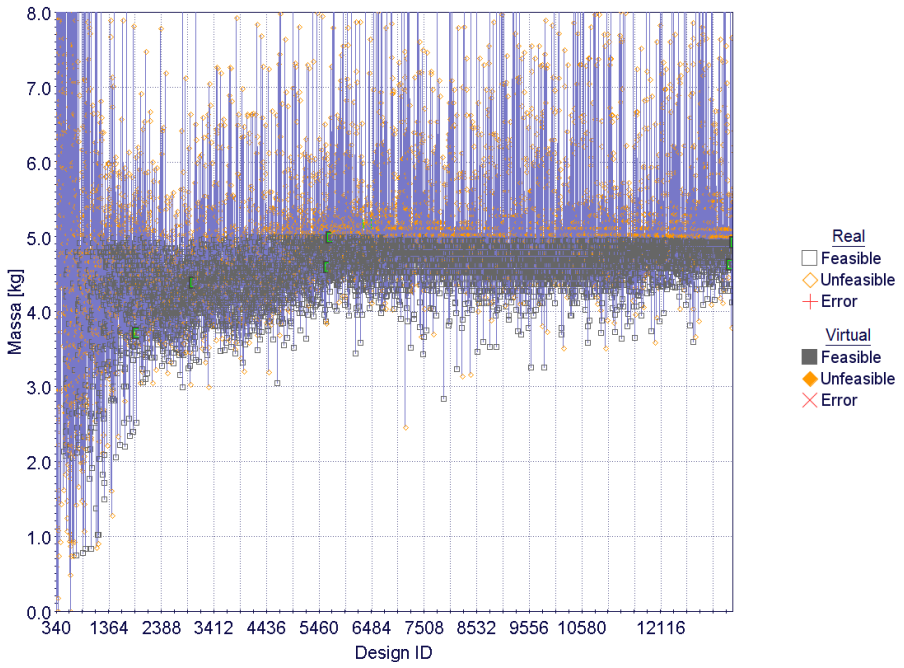


Figura 43 - Correlação e limitação da carga de flambagem em função da massa.

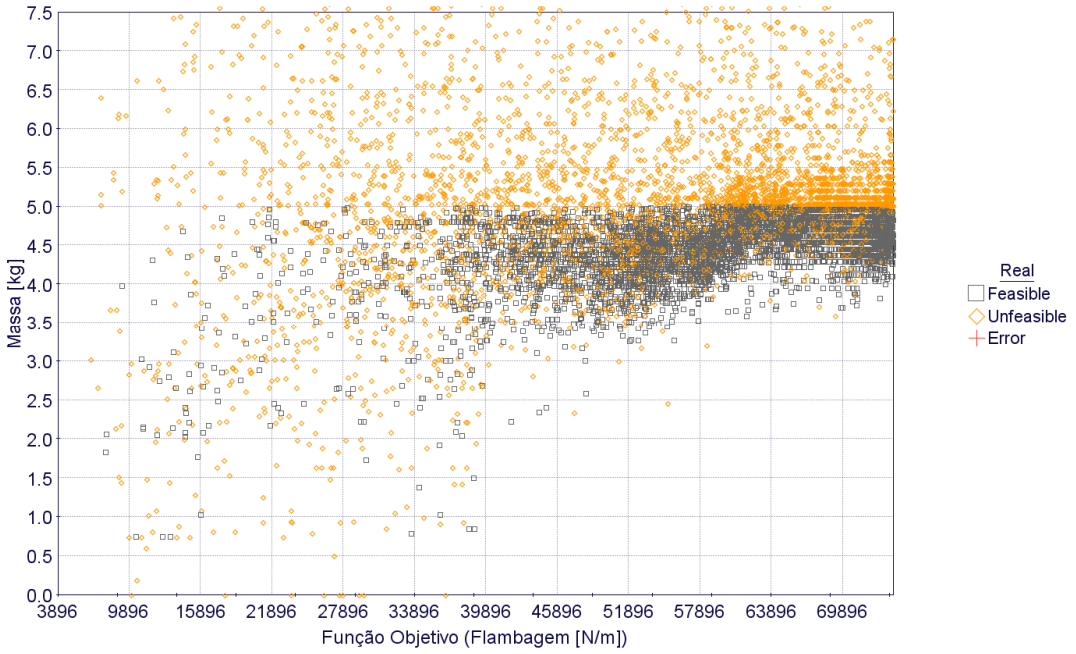


Figura 44 - Empilhamento do painel e reforçadores obtido pelo Algoritmo Genético baseado em variáveis ODM.

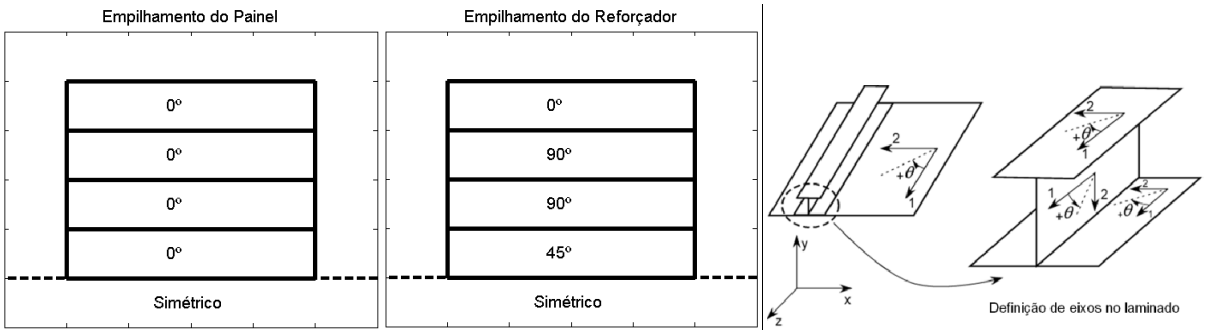
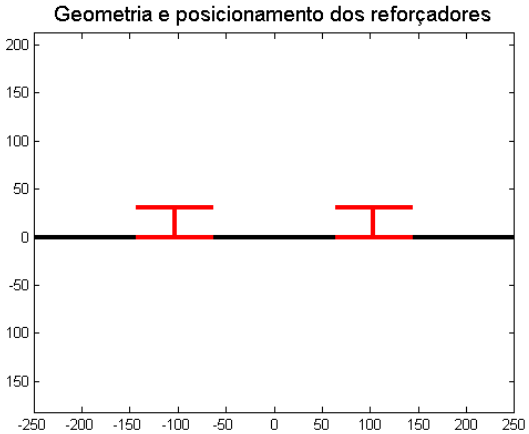


Figura 45 - Geometria e posicionamento obtidos pelo Algoritmo Genético baseado em variáveis ODM (unidades em mm).



Em virtude do número de variáveis de orientação ser elevado no caso da parametrização por ODM, a matriz de correlação apresentada na Figura 46 não contém estas variáveis, apenas as geométricas e de posicionamento dos reforçadores, bem como as variáveis de saída da otimização.

Figura 46 - Matriz de correlações entre variáveis de projeto geométricas, função objetivo e restrições.

	ba	bf	bw	p	MaxFirs...	E11_sta...	E12_sta...	E22_sta...	massCo...
ba									
bf	0.634								
bw	0.366	0.263							
p	0.489	0.458	0.277						
MaxFirstBucklingLoad	0.839	0.703	0.449	0.561					
E11_static	-0.772	-0.605	-0.421	-0.577	-0.881				
E12_static	-0.485	-0.427	-0.376	-0.421	-0.719	0.741			
E22_static	0.707	0.536	0.222	0.389	0.581	-0.670	-0.098		
massConstraint	0.504	0.498	0.359	0.387	0.573	-0.526	-0.496	0.238	

5.1.3 Resultados utilizando variáveis de ângulos de fibra e MMA

Como esperado e apresentado por Stegmann e Lund (2005), utilizar como variáveis de projeto diretamente os ângulos das fibras dentro do empilhamento realça a tendência de ocorrência de mínimos locais, o que acaba por prejudicar a eficácia dos métodos de otimização por gradientes. Este comportamento é observado através da otimização partindo de diversos pontos iniciais diferentes, e avaliando-se então o ponto ótimo encontrado, bem como a convergência da função objetivo.

Neste caso, adotaram-se três pontos iniciais diferentes, onde as orientações de todas as camadas do painel e dos reforçadores partiram de valores iguais a 0, 45 e 90 graus respectivamente. A sequência de figuras a seguir mostram a função objetivo e os resultados obtidos para os três pontos iniciais analisados.

Figura 47 - Comportamento da função objetivo, partindo-se de três pontos iniciais diferentes; da esquerda para a direita respectivamente, 0, 45 e 90 graus.

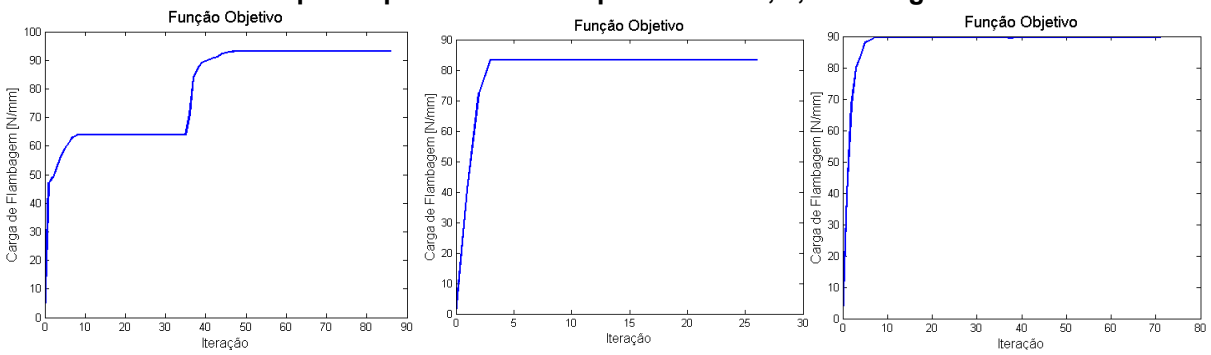


Figura 48 - Ordem de empilhamento do painel, partindo-se de três pontos iniciais diferentes; da esquerda para a direita respectivamente, 0, 45 e 90 graus.

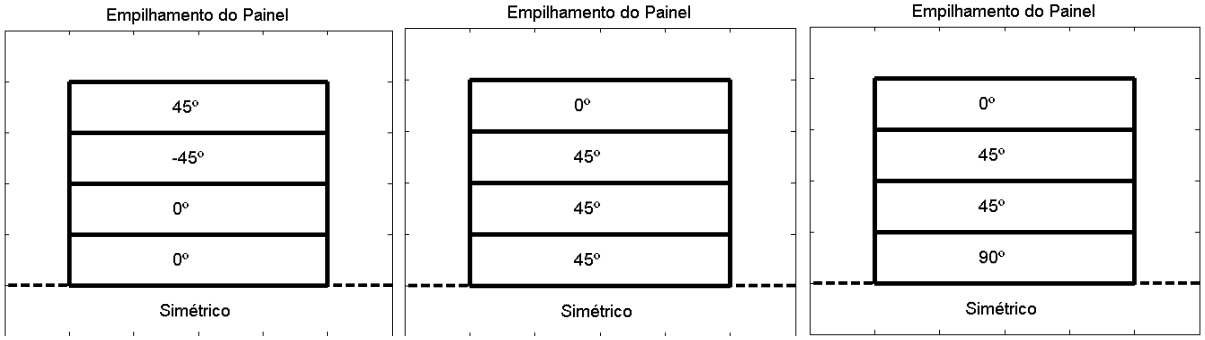


Figura 49 - Ordem de empilhamento dos reforçadores, partindo-se de três pontos iniciais diferentes; da esquerda para a direita respectivamente, 0, 45 e 90 graus.

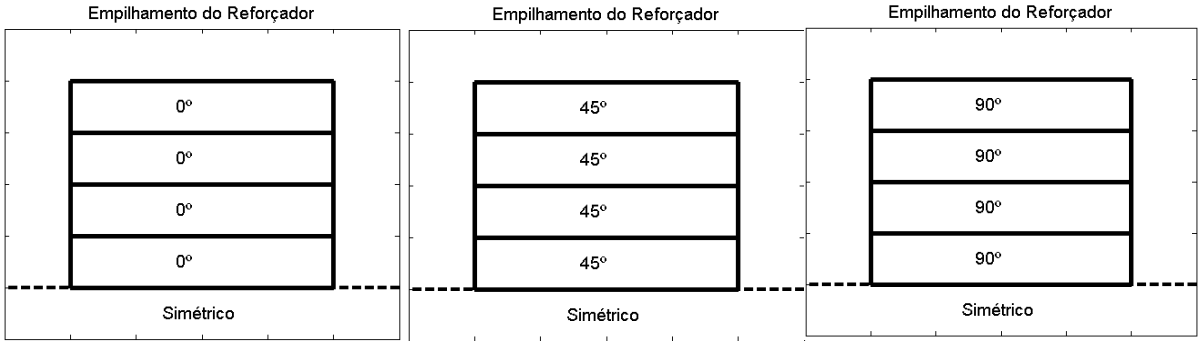
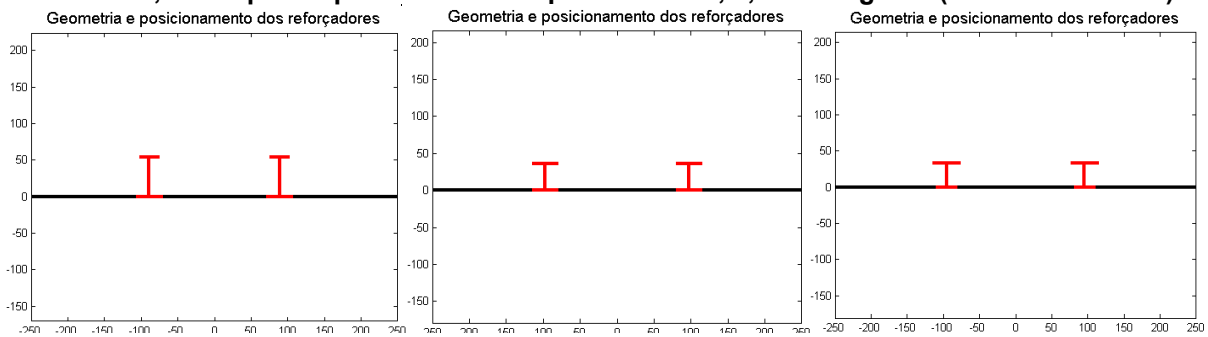


Figura 50 - Geometria e posicionamento dos reforçadores, partindo-se de três pontos iniciais diferentes; da esquerda para a direita respectivamente, 0, 45 e 90 graus (unidades em mm).



5.1.4 Resultados utilizando variáveis ODM e MMA

A utilização de variáveis parametrizadas segundo a ODM mostrou-se útil para contornar o problema da existência de múltiplos mínimos locais em algoritmos baseados em gradientes. Foram executados diversos testes de otimização partindo de pontos iniciais diferentes e em todos eles (variáveis de orientação da ODM iguais a: 0,1 ; 0,3 ; 0,5 ; 0,75 ; 0,9) o resultado obtido como sendo o ótimo foi o mesmo. No entanto o comportamento da função objetivo e das restrições muda em relação aos pontos iniciais. Isto é evidenciado através do conjunto de figuras a seguir que mostram o comportamento da função objetivo e da restrição de massa, bem como os resultados da otimização para o algoritmo MMA partindo de variáveis de orientação da ODM iguais a 0,75 e 0,90, respectivamente.

Nas figuras com os resultados de empilhamento (Figura 51 e Figura 52) observa-se a não convergência completa da orientação de uma das camadas do laminado do painel pois o valor do peso "w" não tende a 1. Este é um comportamento que pode indicar uma baixa influência desta variável na otimização. No entanto, é um comportamento admitido pois o resultado interpretado (aproximando para 1) não traz diferenças significativas para o valor de função objetivo obtida.

Embora neste tipo de algoritmo a informação dos gradientes seja necessária, o que a princípio é custoso computacionalmente em virtude do método empregado para sua obtenção (diferenças finitas) observou-se que o tempo necessário para a otimização é relativamente baixo, quando comparado com o algoritmo genético. A avaliação completa dos gradientes de todas as variáveis de projeto em relação à função objetivo e restrições leva entre 15 e 30 minutos dependendo do caso de carga. Assim, o tempo para uma iteração fica entre 30 e 45 minutos o que resulta entre 15 e 20 horas de otimização para atingir o mesmo valor de função que o algoritmo genético. Uma comparação dos resultados e dos tempos computacionais é apresentada com mais detalhes na seção 5.1.5.

Figura 51 - Convergência da função objetivo e restrição de massa para ponto inicial 0,75. O patamar em preto indica o valor da função objetivo com o empilhamento da Figura 52, com os pesos (w) arredondados, e o patamar em vermelho a função objetivo de um "*baseline*" típico.

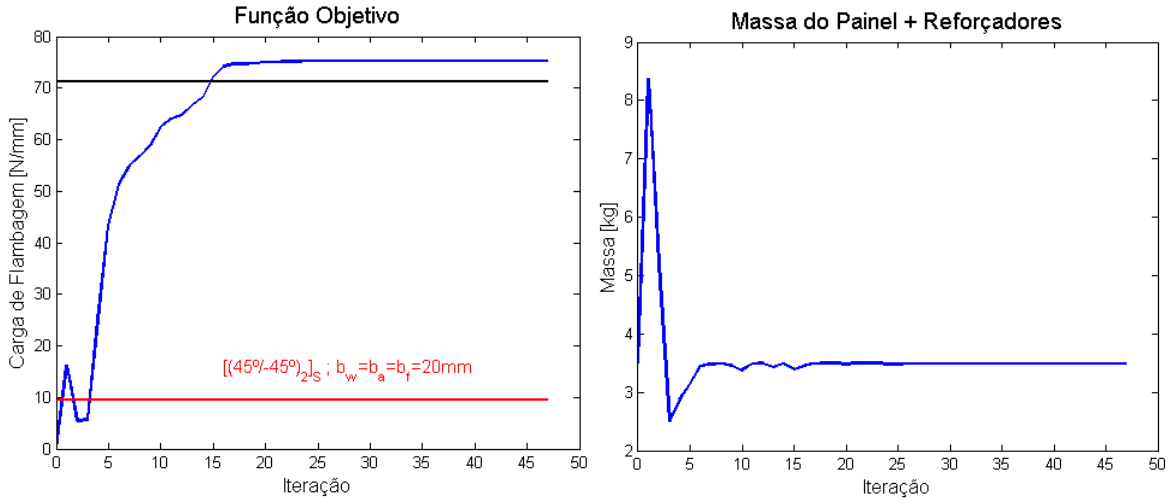


Figura 52 - Resultado de empilhamento para ponto inicial 0,75.

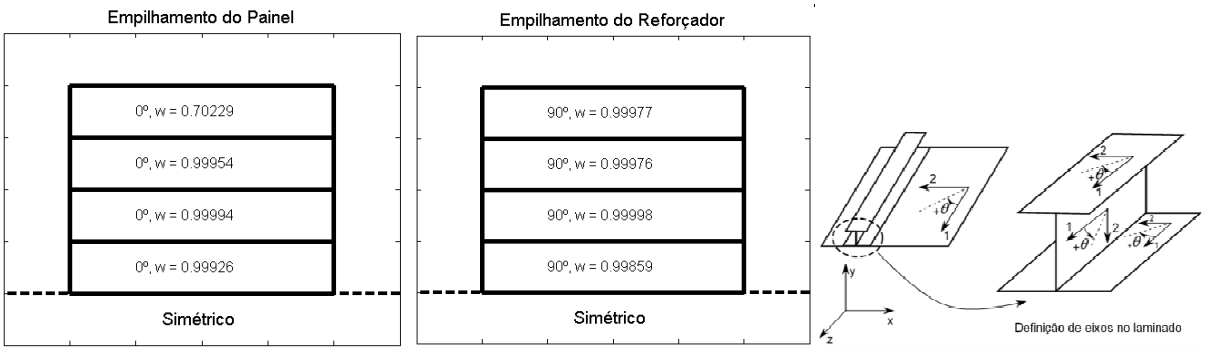


Figura 53 - Geometria e posicionamentos para ponto inicial 0,75.

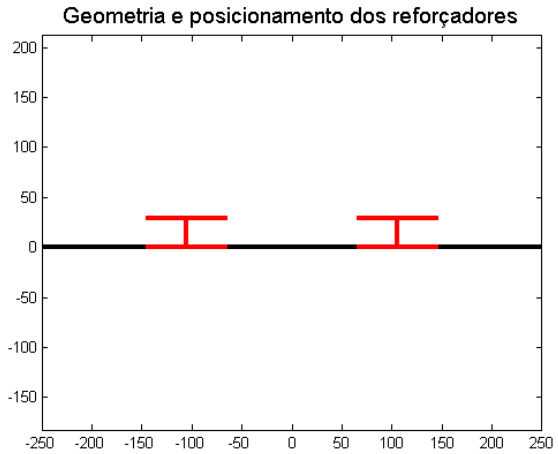


Figura 54 - Convergência da função objetivo e restrição de massa para ponto inicial 0,9. O patamar em preto indica o valor da função objetivo com o empilhamento da Figura 55, com os pesos (w) arredondados, e o patamar em vermelho a função objetivo de um painel "*baseline*" típico.

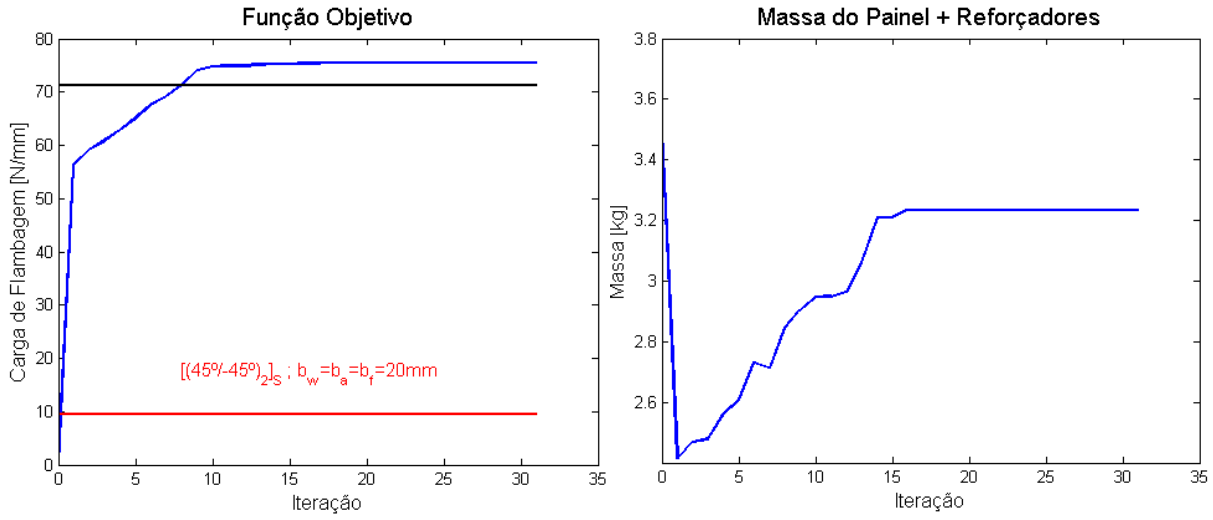


Figura 55 - Resultado de empilhamento para ponto inicial 0,90.

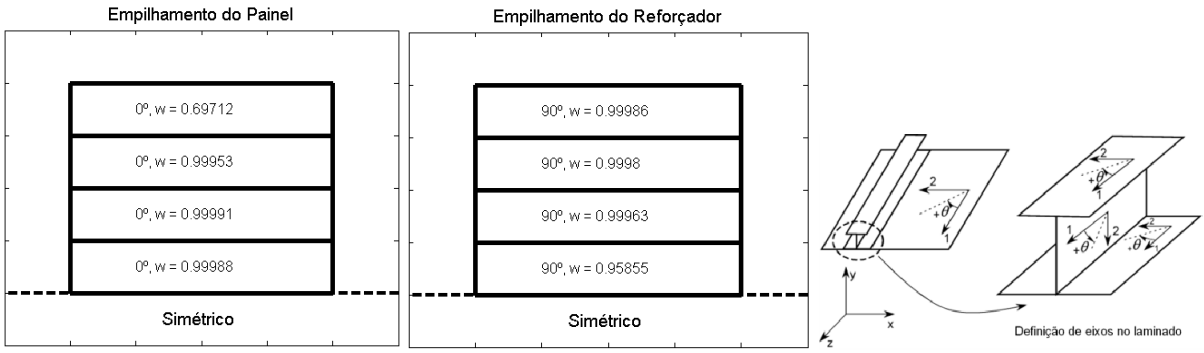
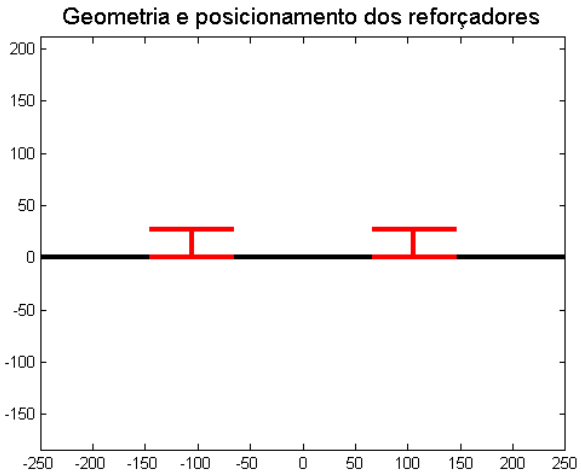


Figura 56 - Geometria e posicionamentos para ponto inicial 0,90.



5.1.5 Discussão e escolha da metodologia preferencial

A comparação entre metodologias de otimização é uma tarefa delicada que exige a avaliação de diversas características da otimização, tais como: desempenho do resultado (valor da função objetivo conseguida ao final do processo), tempo necessário para obtenção da solução e ocorrência de mínimos locais.

Do ponto de vista de valores da função objetivo obtidos ao final da otimização, é necessário lembrar que os mesmos não podem ser comparados entre diferentes abordagens para as variáveis de projeto (orientações contínuas ou por ODM). O resultado obtido pelo algoritmo genético por variáveis de orientação contínua em comparação com o obtido pelo MMA pelo mesmo conjunto de variáveis foi 23% melhor do ponto de vista de carga de flambagem. No caso da utilização de variáveis ODM a situação se inverte, com o MMA obtendo um ponto ótimo com carga de flambagem 9% superior ao algoritmo genético. Portanto, não é possível afirmar qual algoritmo é melhor do ponto de vista puramente de valor da função objetivo resultante.

Em termos de custo computacional que se reflete no tempo que o otimizador necessita para encontrar um possível ótimo, o algoritmo MMA apresentou os melhores resultados, tanto com variáveis de projeto de orientação quanto com as variáveis ODM. Mesmo com a necessidade do cálculo dos gradientes, que neste projeto foi feita por meio do método de diferenças finitas (em virtude da utilização de um solucionador comercial), o tempo foi inferior. No caso de variáveis contínuas de orientação o ganho de tempo é pequeno porém existe, mas no caso de variáveis ODM o mesmo é significativo, como mostrado nas seções anteriores. Assim, analisando-se isoladamente o custo computacional, o algoritmo MMA é uma melhor opção.

Quanto a questão da ocorrência de mínimos locais, nota-se que o algoritmo MMA é mais suscetível. No caso de variáveis contínuas de orientação esta característica se torna mais evidente, com o algoritmo chegando em pontos ótimos diferentes a partir de pontos iniciais da otimização diferentes. Embora este comportamento não se repita com a utilização de variáveis por ODM, analisando-se isoladamente a suscetibilidade à mínimos locais, o algoritmo genético surge como uma melhor opção.

Em resumo, empregando-se variáveis contínuas de orientação, o algoritmo genético apresentou resultados de desempenho superior em relação ao MMA, ao custo de um maior tempo de análise. Isto se deve principalmente ao fato de o número de variáveis de projeto ser sido pequeno nesta situação (inferior a 15) e o algoritmo MMA, por ser baseado em gradientes, não ter conseguido lidar bem com a existência de múltiplos mínimos locais. Porém, ao empregar-se a ODM para as variáveis de orientação, a situação se reverte com o MMA encontrando um ponto ótimo de função objetivo superior ao algoritmo genético com um custo computacional significativamente inferior (cerca de 4 vezes menor). Isto deve-se ao incremento de variáveis de projeto (44 ao utilizar-se a ODM), o que aumenta o universo de soluções e prejudica algoritmos evolutivos em geral (como é o caso do genético); e também, ao melhor comportamento do MMA quando emprega-se a ODM, abordagem esta criada justamente com o intuito de se reduzir a ocorrência de mínimos locais na otimização.

Feitas estas considerações, a escolha da metodologia considerada preferencial foi baseada nos seguintes critérios:

- capacidade de gerar possíveis pontos ótimos com valores de função objetivo superiores aos outros métodos;
- menor tempo de otimização para obtenção de um resultado com valor de função objetivo equivalente em relação aos outros métodos;
- possibilidade de adoção de empilhamentos que incluam materiais isotrópicos e a existência de empilhamentos com número de camadas variável;

Analisando-se conjuntamente as características das quatro metodologias apresentadas dentro destes critérios, definiu-se a abordagem de otimização por algoritmo MMA baseado em variáveis de projeto de orientação do tipo ODM como a preferencial.

5.2 Aplicação da otimização paramétrica no projeto de painéis reforçados

Nesta seção são apresentados os resultados da aplicação da otimização paramétrica em painéis reforçados de material compósito e sua comparação com os resultados de um painel "*baseline"*. A formulação de otimização considerada foi descrita na seção 3.1, com sua implementação numérica explicada na seção 4.1 e definida após comparação de resultados na seção 5.1.5. Consideraram-se as propriedades mecânicas de um laminado de fibra de carbono com matriz de epóxi, apresentadas em detalhes no Apêndice A.2.

Os resultados correspondem à aplicação da otimização em nove casos de carga diferentes, combinando na pré-carga e carga de flambagem carregamentos de cisalhamento, pressão na superfície, compressão na direção dos reforçadores e na direção transversal aos reforçadores. Os valores das pré-cargas de cisalhamento foram fixadas em 1 N/mm, as de compressão em 1 N/mm e as de pressão uniforme em 0,01 N/mm².

O valor do penalizador da parametrização ODM (p_v) seguindo as recomendações de Lund (2009) foi mantido em 2 no início da otimização e então incrementado a cada 5 iterações em uma unidade, até o limite de 6. Em alguns casos, quando observou-se que a convergência dos pesos w_i da parametrização ODM não era satisfatória, o penalizador foi iniciado em 3 e então incrementado da mesma forma como descrito anteriormente.

Como anteriormente comentado na seção 5.1.4, em alguns resultados de orientação dos empilhamentos observa-se a não convergência completa da orientação de certas camadas do laminado, evidenciada pelo fato do valor do peso "w" não tender a 1 para a orientação de maior "w" dentre as admissíveis. Este é um comportamento que pode indicar baixa influência desta variável na otimização, ou até mesmo, uma convergência prematura da otimização. Este comportamento foi aqui analisado e admitido, pois o resultado interpretado (aproximando-se para 1) não trouxe diferenças significativas para os valores de função objetivo, não afetando os resultados obtidos.

O ponto inicial considerado foi alterado durante os testes de implementação porém sempre considerou-se valores de variáveis de projeto de orientação iguais

entre si, o que coloca todas as orientações em igualdade de condições no início da otimização, em virtude da própria parametrização da ODM. As variáveis geométricas foram consideradas iguais a 20 mm no início da otimização e a variável de posicionamento igual a 0,25.

Em todos os casos, os gráficos de convergência da função objetivo (carga de flambagem) apresentam um patamar em vermelho que representa o valor da função objetivo caso seja empregado um empilhamento usual tanto para o painel quanto para os reforçadores, do tipo $[45º\ -45º\ 45º\ -45º]_S$, com variáveis geométricas dos reforçadores igual a 20 mm e variável de posicionamento 0,25. Este será considerado o painel "*baseline"* para comparação dos resultados obtidos. Além disto, o patamar em linha preta nestes gráficos indica o valor da função objetivo considerando o empilhamento pós-processado, ou seja, com os pesos das variáveis de orientação w_i do método ODM, arredondadas para 0 ou 1, o que for mais próximo no resultado obtido.

Nos gráficos de convergência da massa do painel com reforçadores, o patamar em vermelho representa o valor limite da restrição de massa. Já o gráfico das restrições de deformação segue o padrão da normalização prevista pelo algoritmo MMA, como descrita na seção 4.1.11. Assim, valores negativos da restrição indicam que a restrição não está sendo violada e valores positivos indicam a violação da restrição em questão.

A Tabela 2 apresenta as nove configurações diferentes de caso de carga analisadas, envolvendo 3 tipos de pré-carga e 3 tipos de carregamento diferentes. As figuras 57 à 65 apresentam os resultados de cada uma dessas configurações consideradas.

Tabela 2 - Configurações de pré-carga e carregamento analisadas.

Caso de carga	Tipo de Pré-carga	Tipo de Carregamento
1	Cisalhamento	Cisalhamento
2	Cisalhamento	Compressão no eixo dos reforçadores
3	Cisalhamento	Compressão no eixo transversal
4	Pressão	Cisalhamento
5	Pressão	Compressão no eixo dos reforçadores
6	Pressão	Compressão no eixo transversal
7	Compressão no eixo dos reforçadores	Cisalhamento
8	Compressão no eixo dos reforçadores	Compressão no eixo dos reforçadores
9	Compressão no eixo dos reforçadores	Compressão no eixo transversal

Figura 57 - Caso de carga 1.

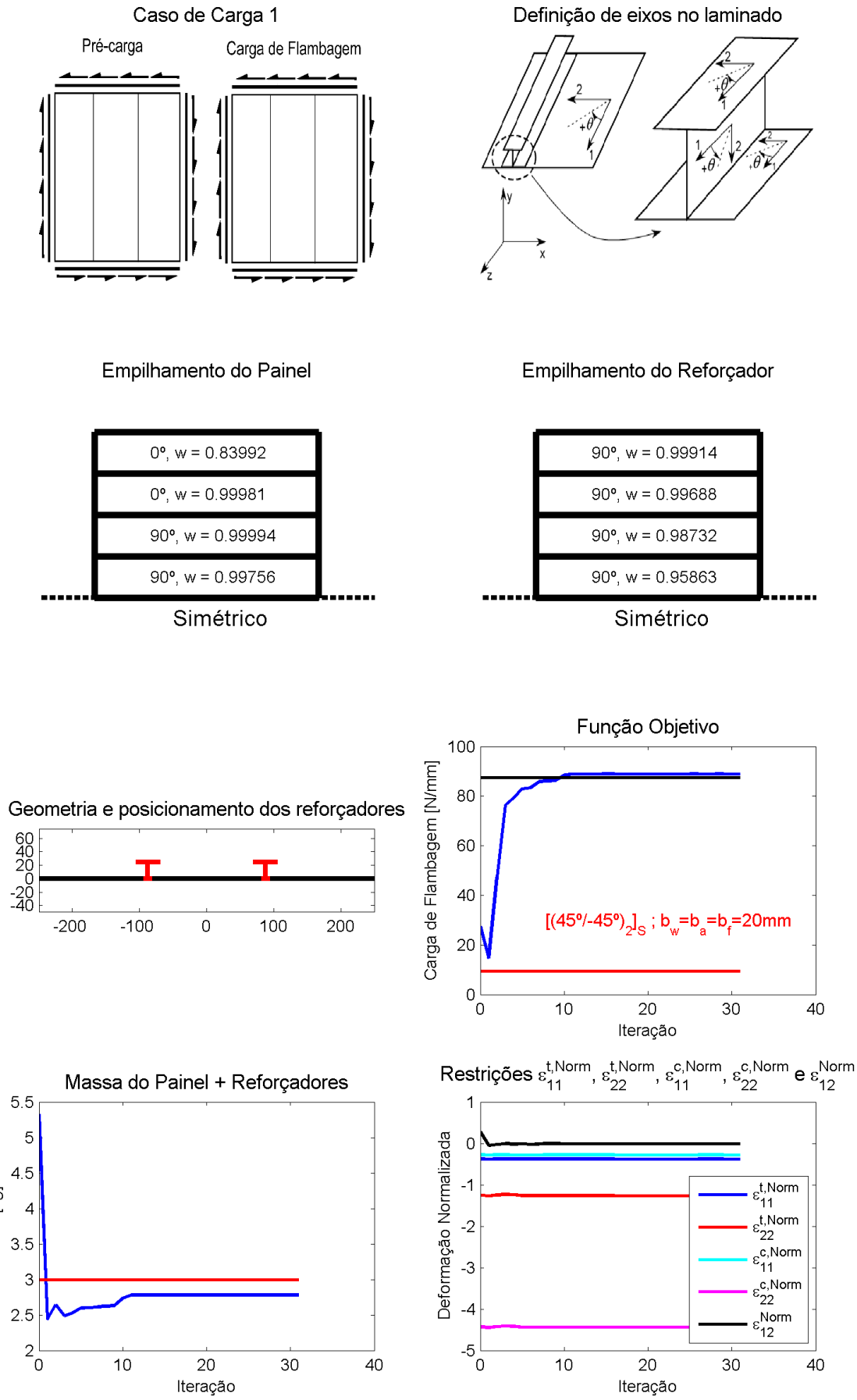


Figura 58 - Caso de carga 2.

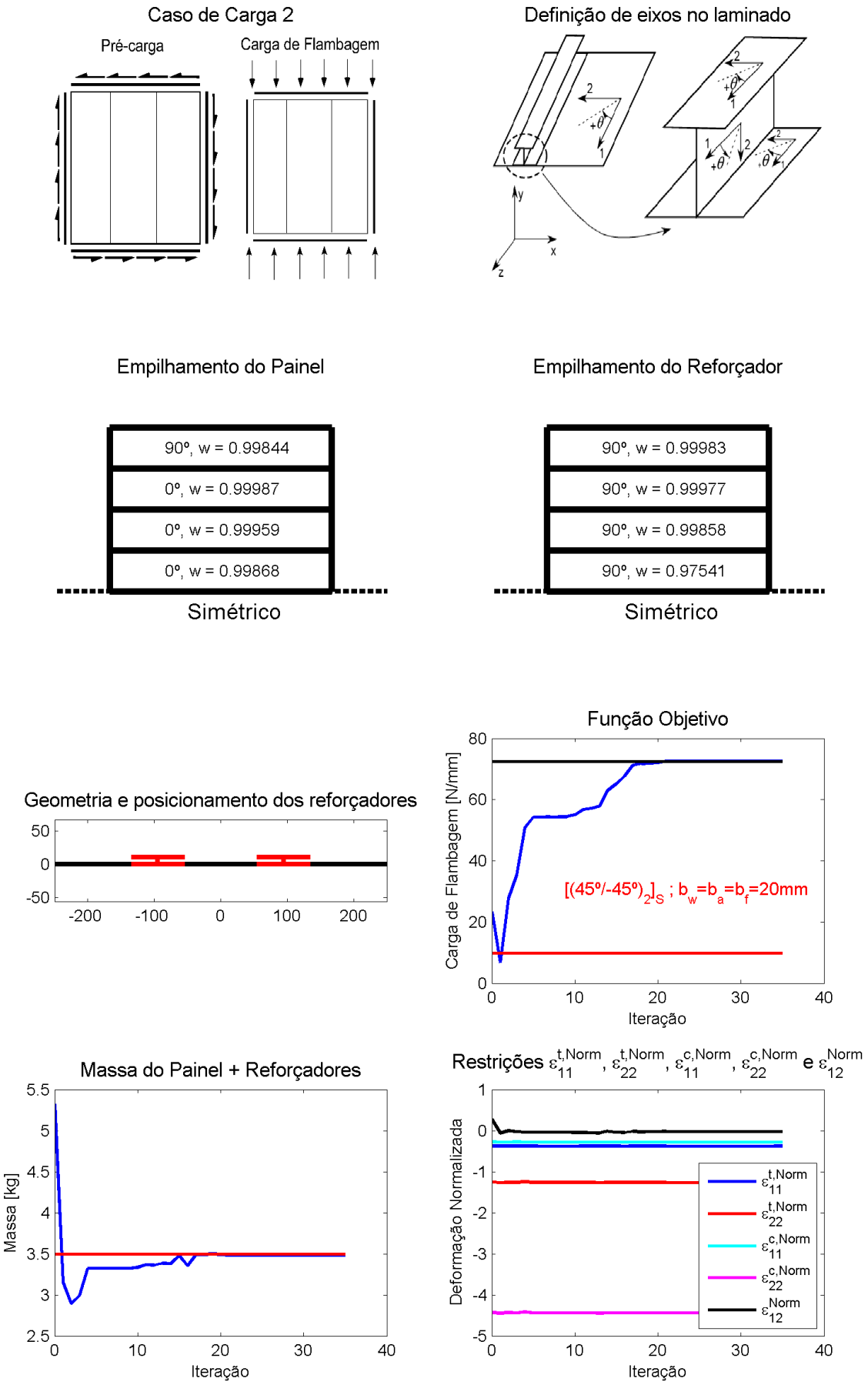


Figura 59 - Caso de carga 3.

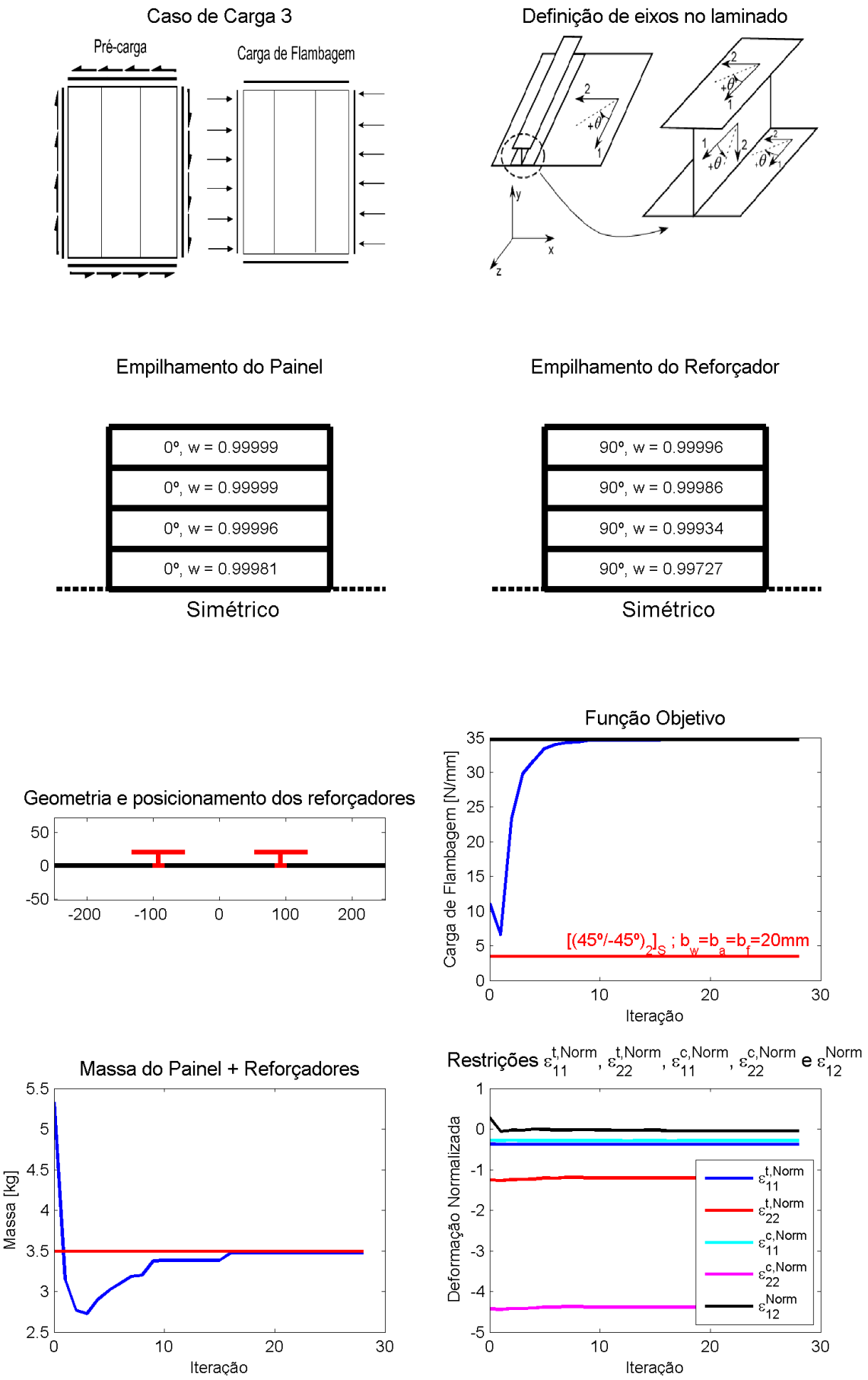


Figura 60 - Caso de carga 4.

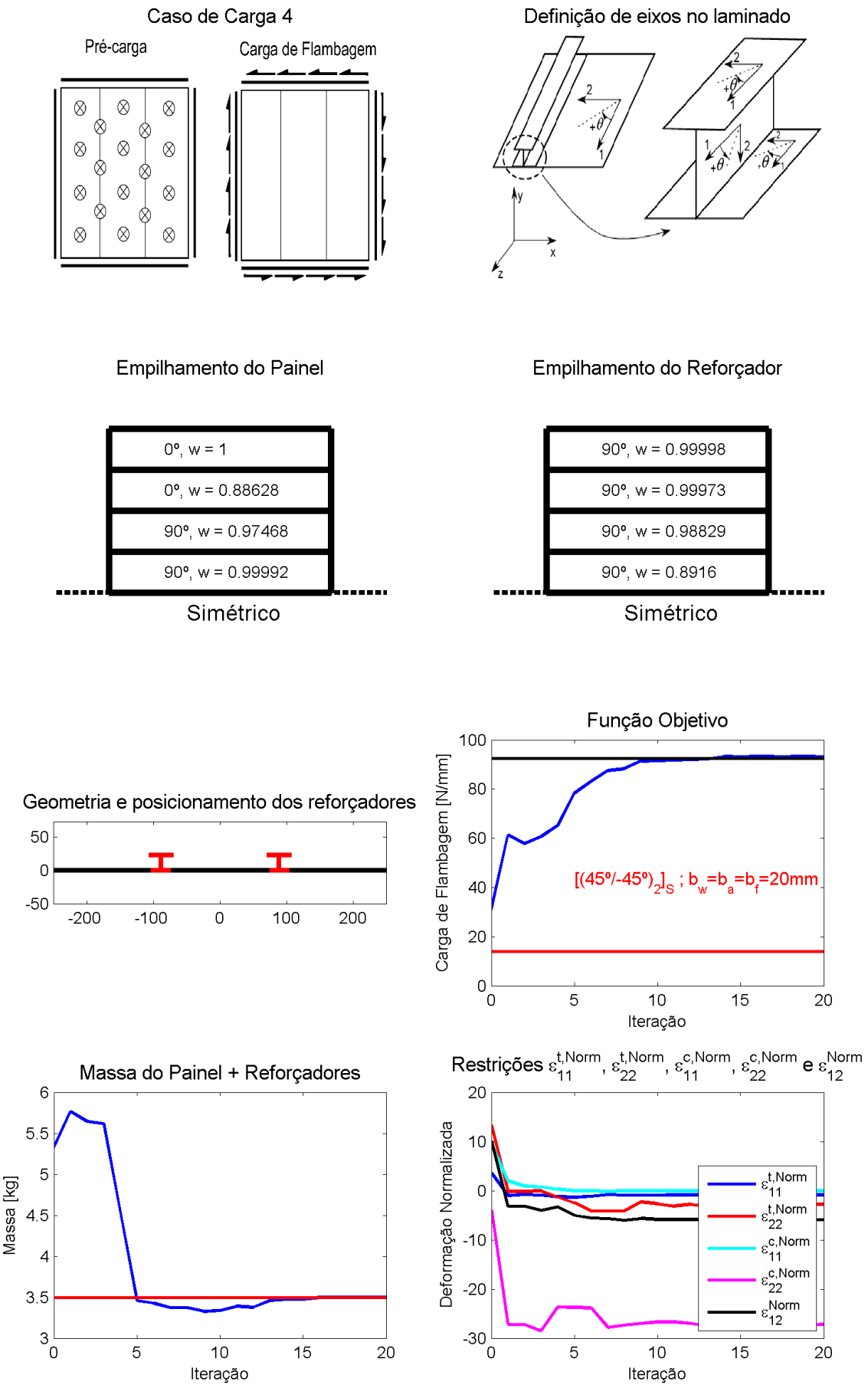


Figura 61 - Caso de carga 5.

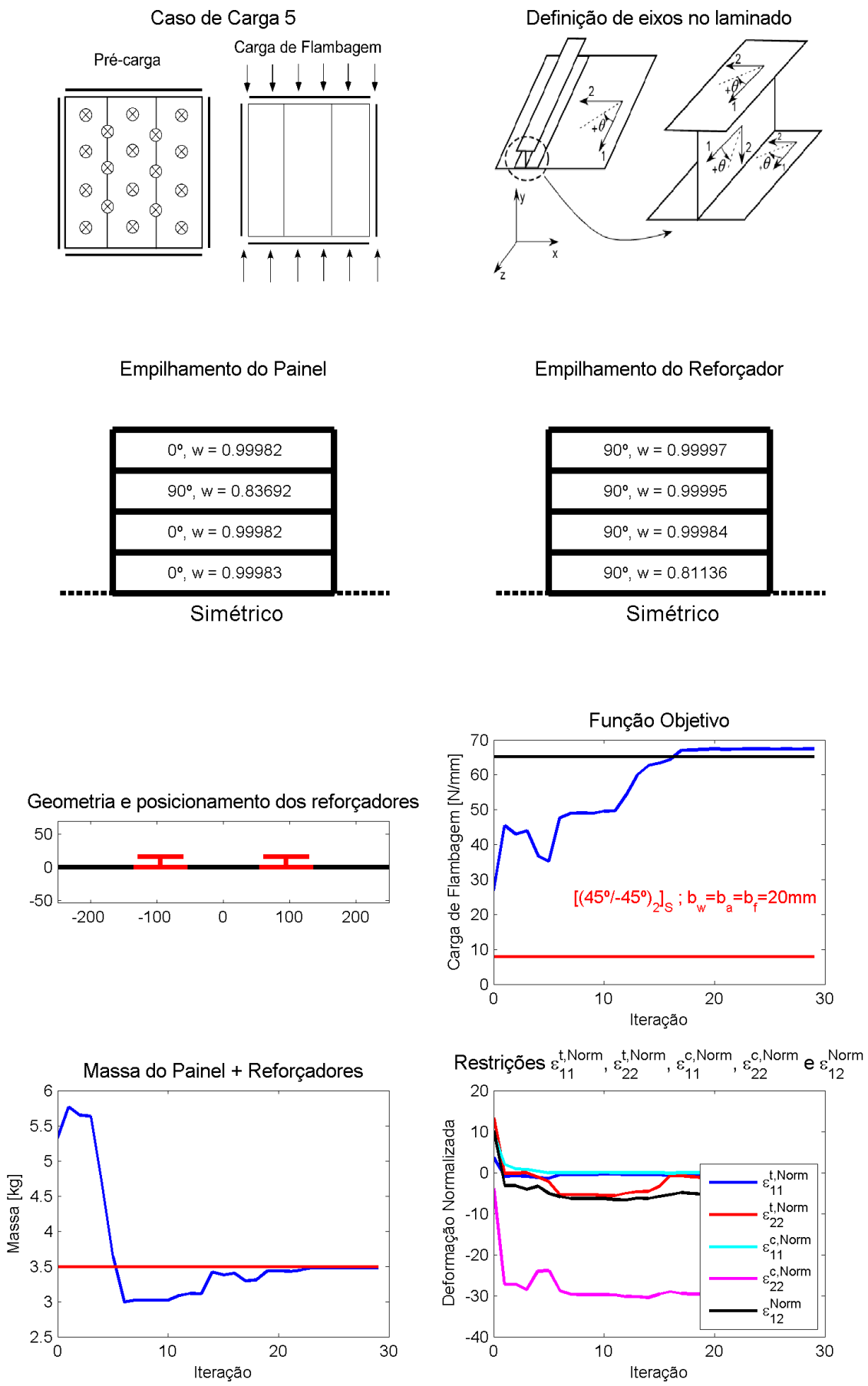


Figura 62 - Caso de carga 6.

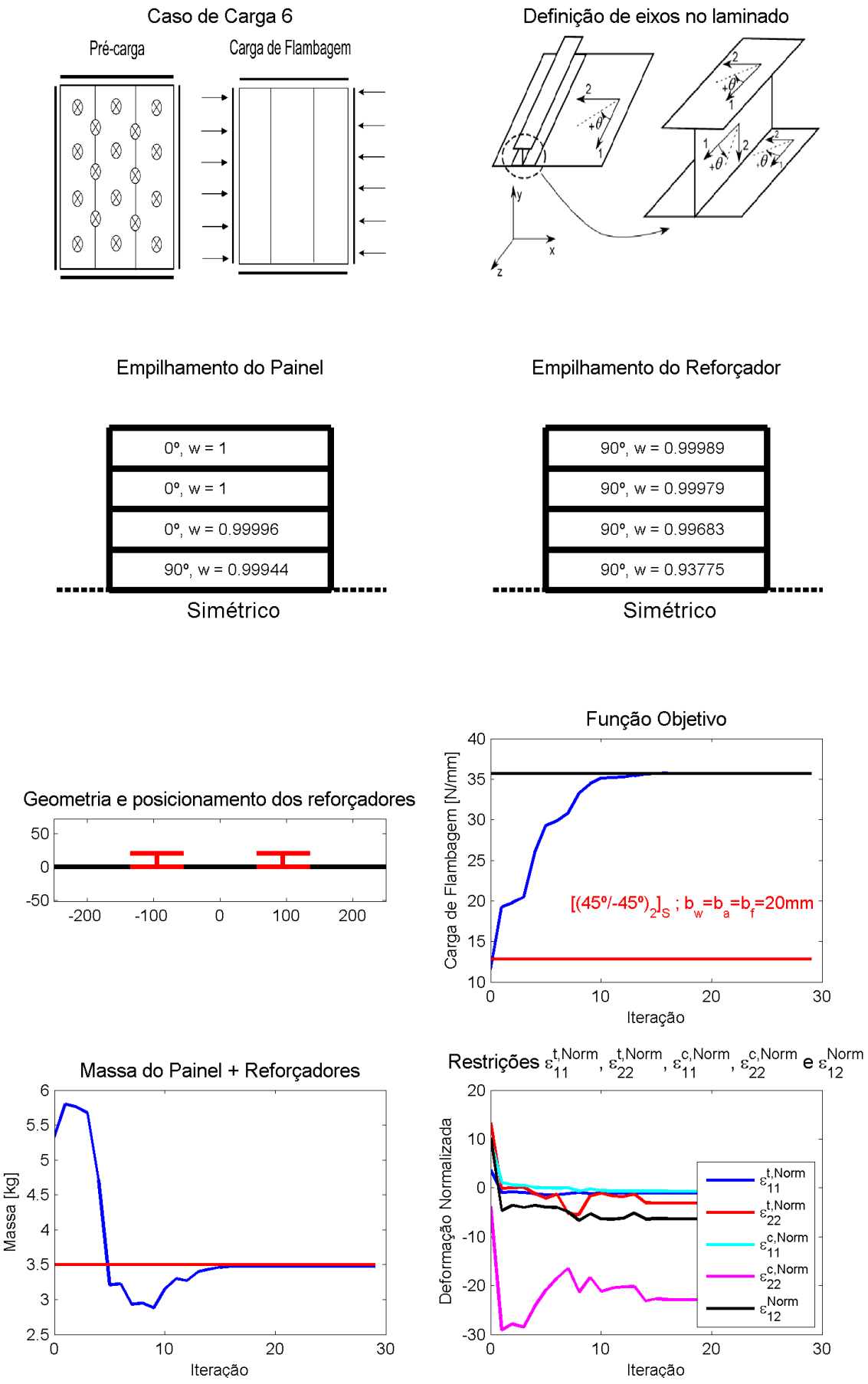


Figura 63 - Caso de carga 7.

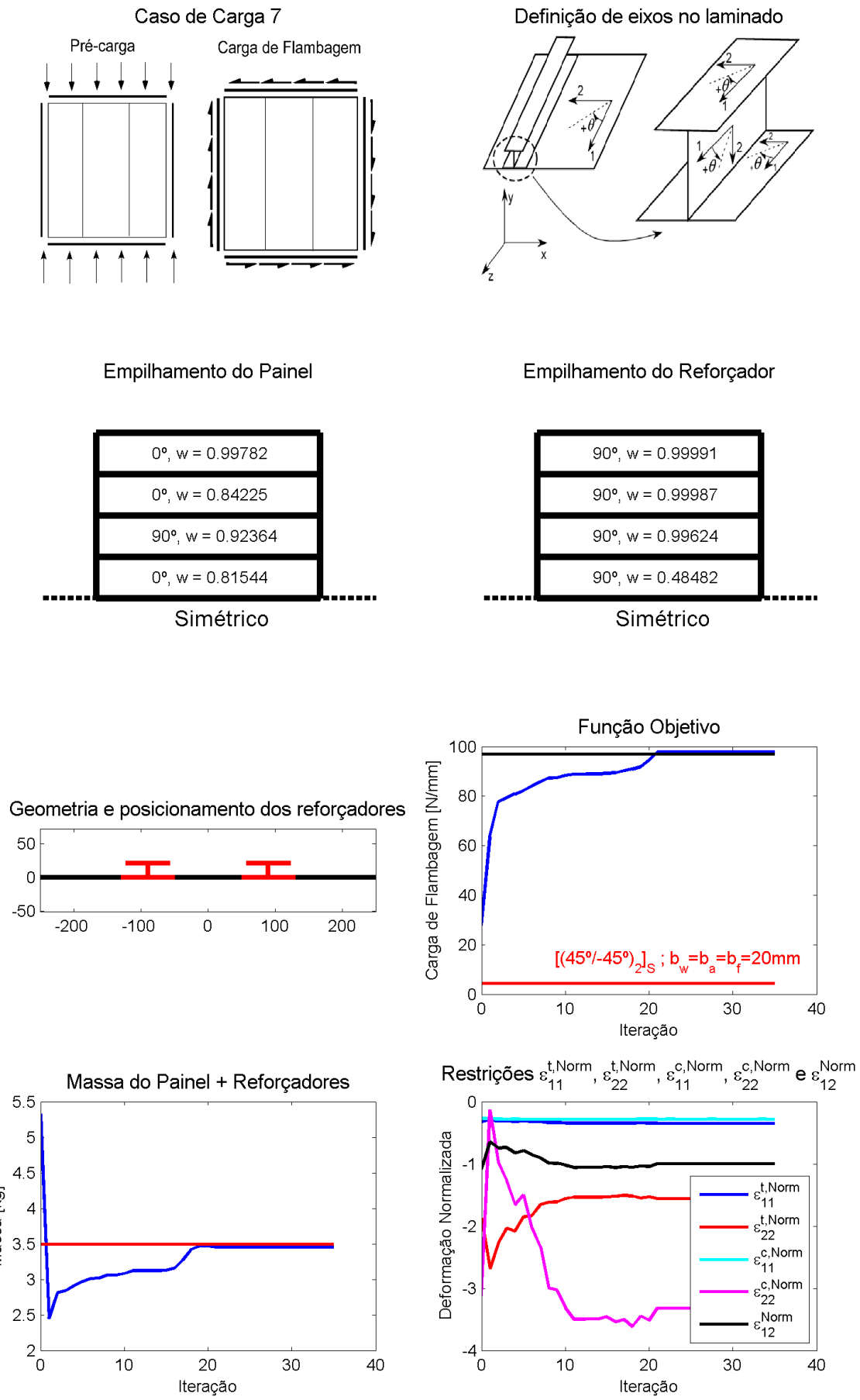


Figura 64 - Caso de carga 8.

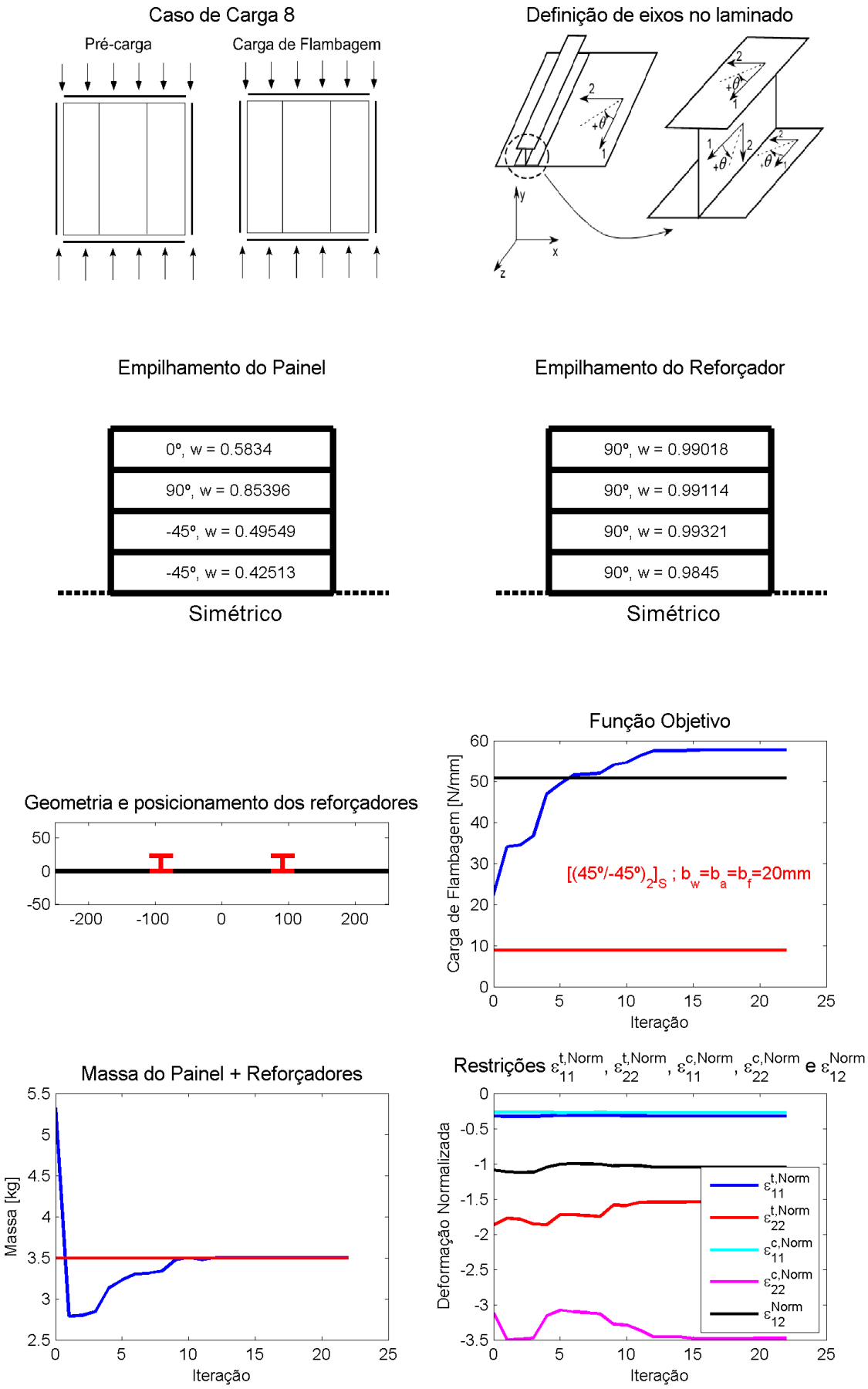
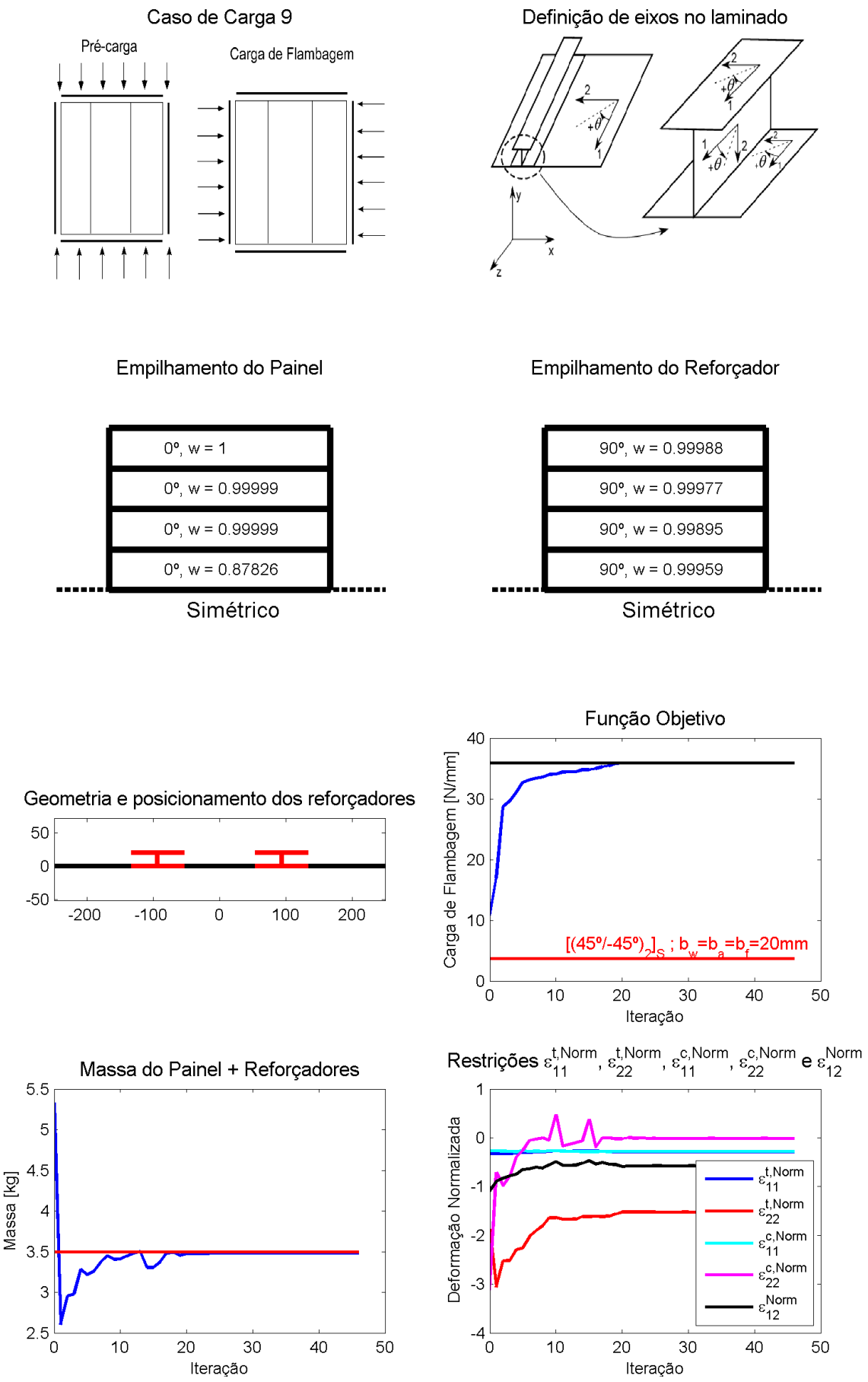


Figura 65 - Caso de carga 9.



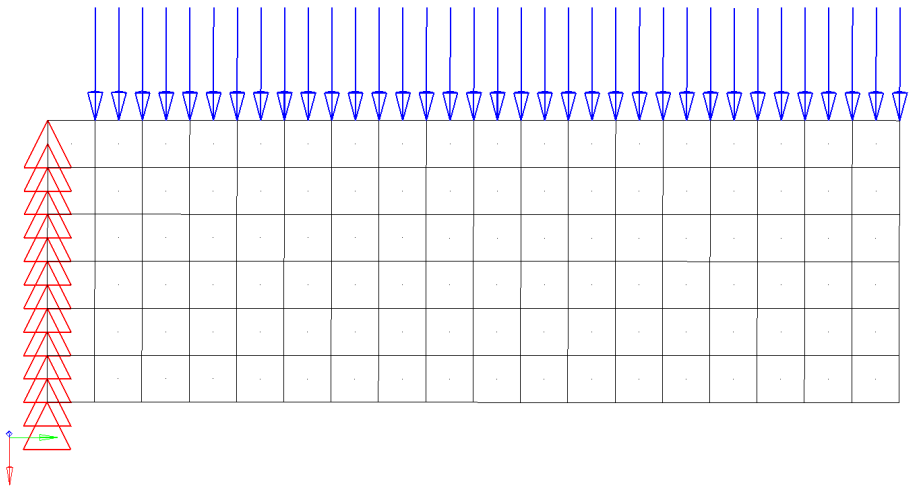
5.3 Aplicação da otimização topológica em painéis compósitos laminados

Nesta seção, a apresentação dos resultados de otimização topológica é feita avaliando a metodologia em um caso típico de literatura com condições de carregamento no plano (seção 5.3.1) e perpendicular à ele (seções 5.3.2 e 5.3.3). Em todos os casos em que a otimização de topologia é envolvida, uma etapa de pós-processamento é aplicada, assumindo-se o valor unitário da pseudo-densidade de elementos que atingiram valores desta grandeza maiores ou iguais a 0,1 ao final da otimização. As propriedades de materiais são apresentadas no Apêndice A.3.

5.3.1 Carregamento no plano

De modo a avaliar o comportamento da implementação numérica da otimização, a mesma foi aplicada em um caso típico encontrado em literatura. Este caso baseia-se em um exemplo apresentado por Stegmann e Lund (2005) onde é considerada uma viga engastada sujeita a um carregamento distribuído uniforme ao longo de sua aresta superior, como mostrado na Figura 66.

Figura 66 - Caso exemplo analisado.



Nos testes, considerou-se um empilhamento de 2 camadas de carbono-epóxi de 0,25 mm de espessura. A orientação das fibras são variáveis de projeto, podendo

assumir valores discretos de 0º, +/-15º , +/-30º, +/-45º, +/-60º, +/-75º e 90º, distintos em cada elemento e em cada camada.

5.3.1.1 Otimização somente de orientação de fibras

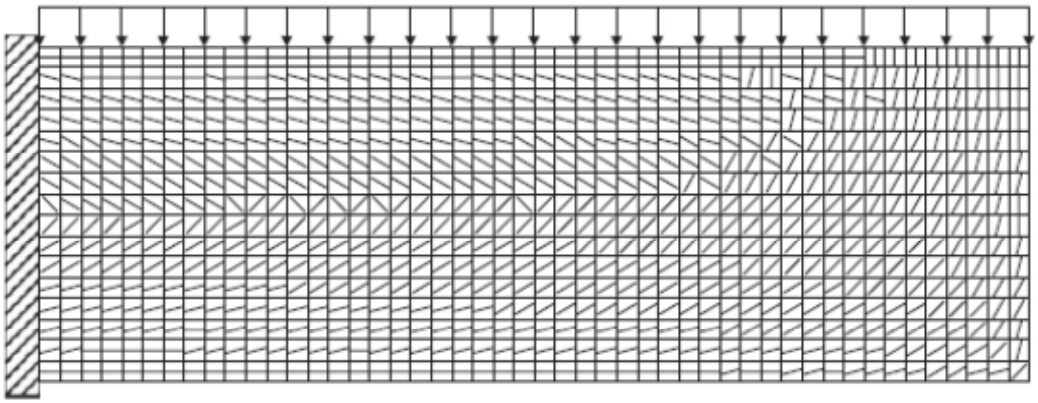
Em uma primeira comparação, consideraram-se como variáveis de projeto apenas as orientações de fibra nas duas camadas do composto. Desta maneira, o problema torna-se semelhante ao apresentado por Stegmann e Lund (2005) para avaliação da implementação do método de Otimização Discreta de Material (ODM).

O problema é formulado buscando a minimização do "*mean compliance"* (flexibilidade média), sem restrições, como indicado na equação (180).

$$\begin{aligned} &\underset{\nu}{\text{Minimizar:}} \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{180}$$

A Figura 67 mostra o resultado obtido por Stegmann e Lund (2005). Na Figura 68 é apresentado o resultado obtido pela metodologia ODM implementada em Matlab. Observa-se que os resultados são semelhantes e apresentam a mesma tendência de orientação de material, com uma rápida convergência, como mostrado na Figura 69.

Figura 67 - Resultado obtido por Stegmann e Lund (2005) para a otimização de orientação das fibras.



Fonte: Stegmann e Lund (2005)

Figura 68 - Resultado obtido pela metodologia ODM implementada em Matlab.

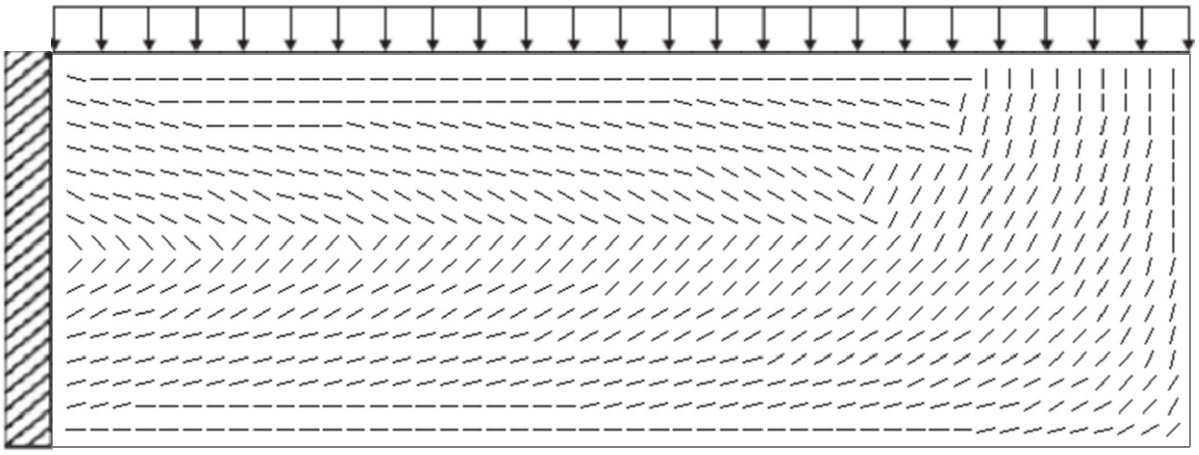
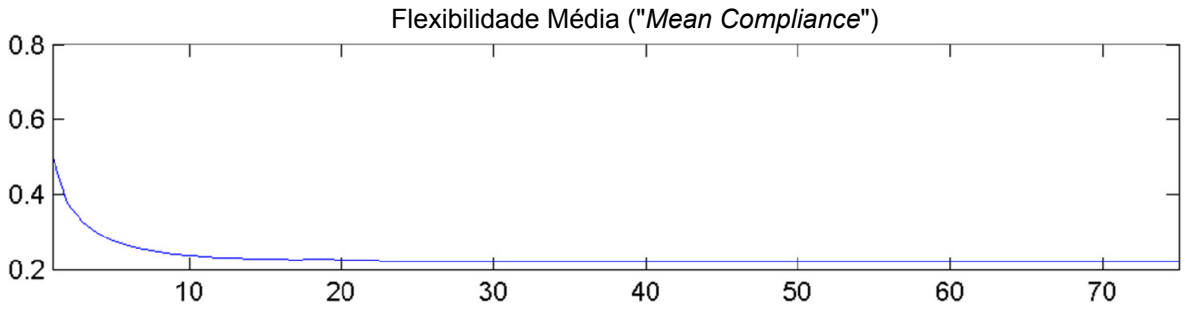


Figura 69 - Convergência da função objetivo.



5.3.1.2 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de volume

Na mesma configuração de geometria, condições de contorno, carregamento e empilhamento, é analisado um segundo problema com a função objetivo da equação (181).

$$\begin{aligned} \underset{d\,,\,\nu}{\text{Minimizar:}} \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{sujeito à:} \quad & \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ & V \le V_0 \\ & 0 \le d \le 1 \\ & 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{181}$$

Na primeira camada do laminado, as variáveis de projeto são apenas as orientações das fibras nos elementos. Na segunda camada, além da orientação das

fibras, a topologia da camada é otimizada, podendo ser retirado material desta camada. A primeira camada não possui esta liberdade para evitar singularidades no código de elementos finitos gerada pela ausência de material. Desta maneira, a mesma atua como um substrato em que apenas a orientação das fibras é otimizada.

Além disso, por envolver otimização de topologia, foi definido um domínio viável de otimização que exclui os elementos que possuem condições de contorno ou carregamentos aplicados em seus nós. Deste modo, evitam-se singularidades que possam ocorrer em virtude da aplicação de condições de contorno em elementos cuja rigidez seja muito baixa. A Figura 70 apresenta a definição do domínio viável de otimização.

A Figura 71 apresenta o histórico de convergência da otimização. Na Figura 72 e Figura 73, respectivamente, são exibidos os resultados de pseudo-densidades e orientações das fibras nas camadas obtidos ao final da otimização. Por fim, na Figura 74 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura com o resultado pós-processado.

Figura 70 - Definição do domínio viável de otimização.

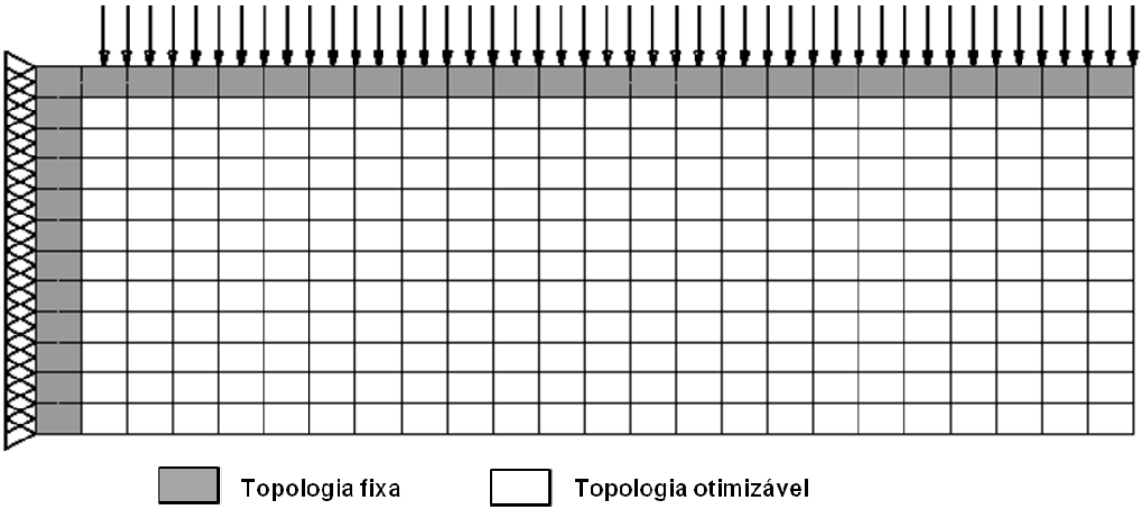


Figura 71 - Histórico de evolução da otimização.

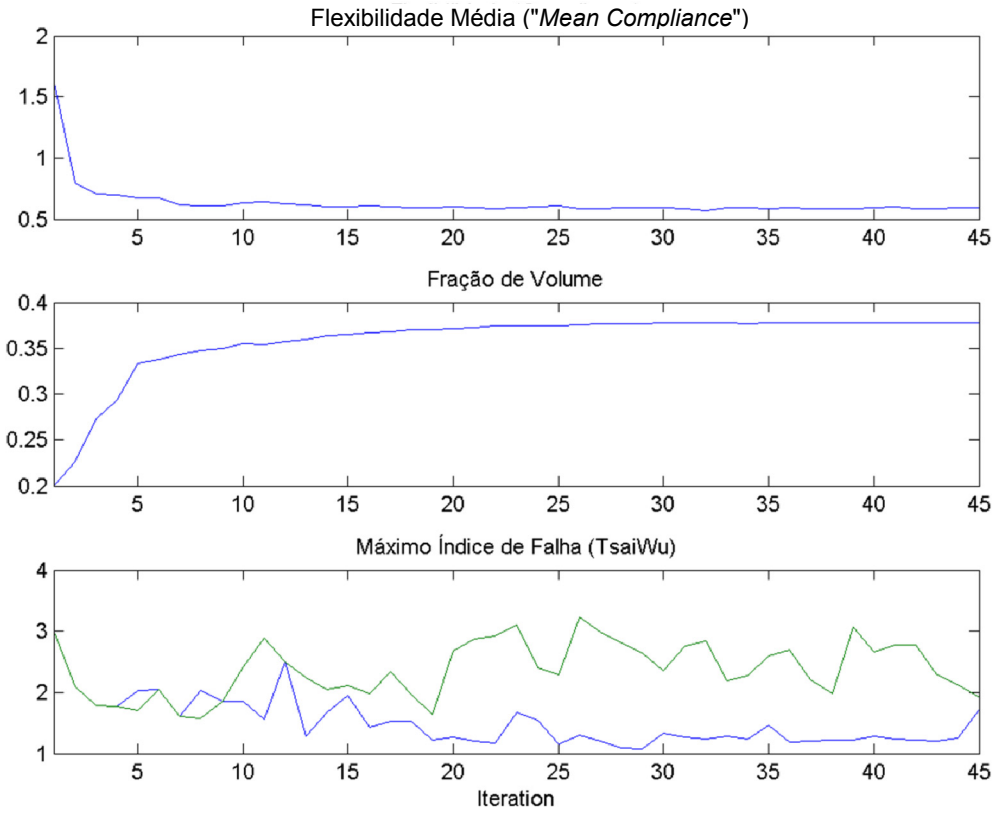


Figura 72 - Pseudo-densidades para a camada 2, a camada 1 é mantida preenchida de material. Resultados sem e com pós-processamento; acima e abaixo, respectivamente.

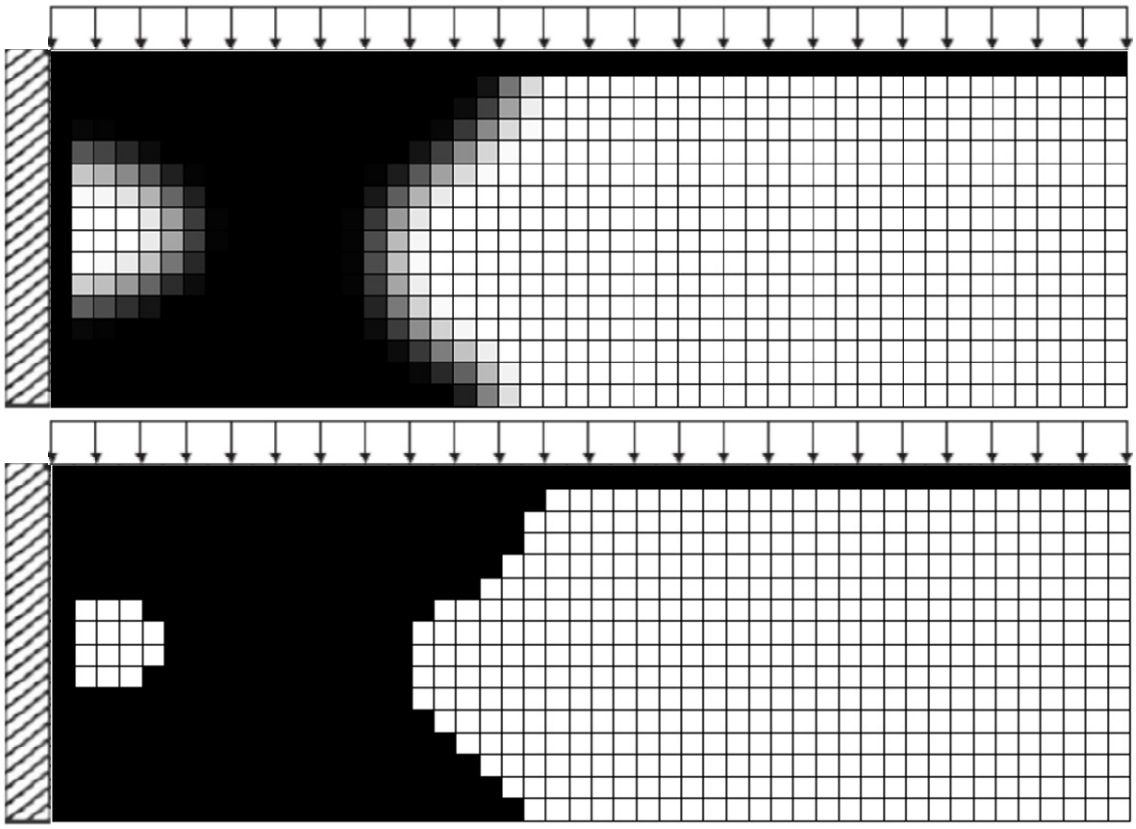


Figura 73 - Resultado de orientação das fibras. Acima, na camada 1; abaixo, na camada 2.

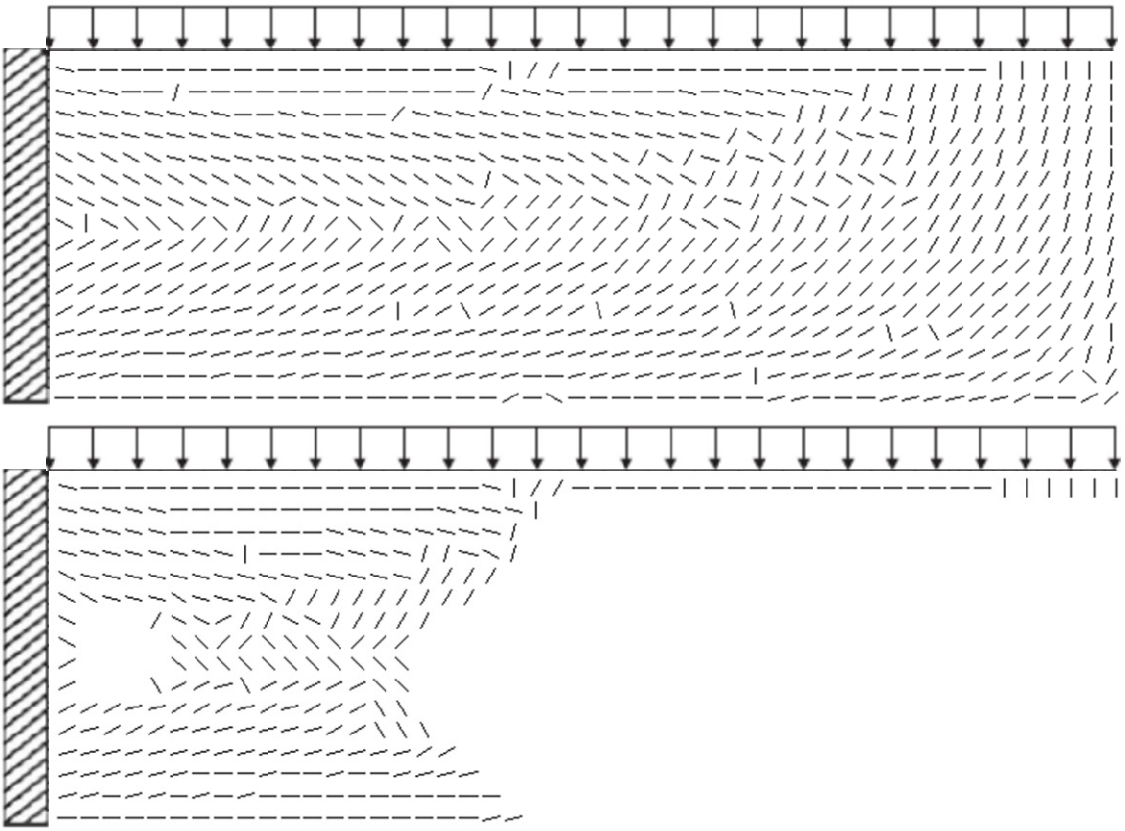
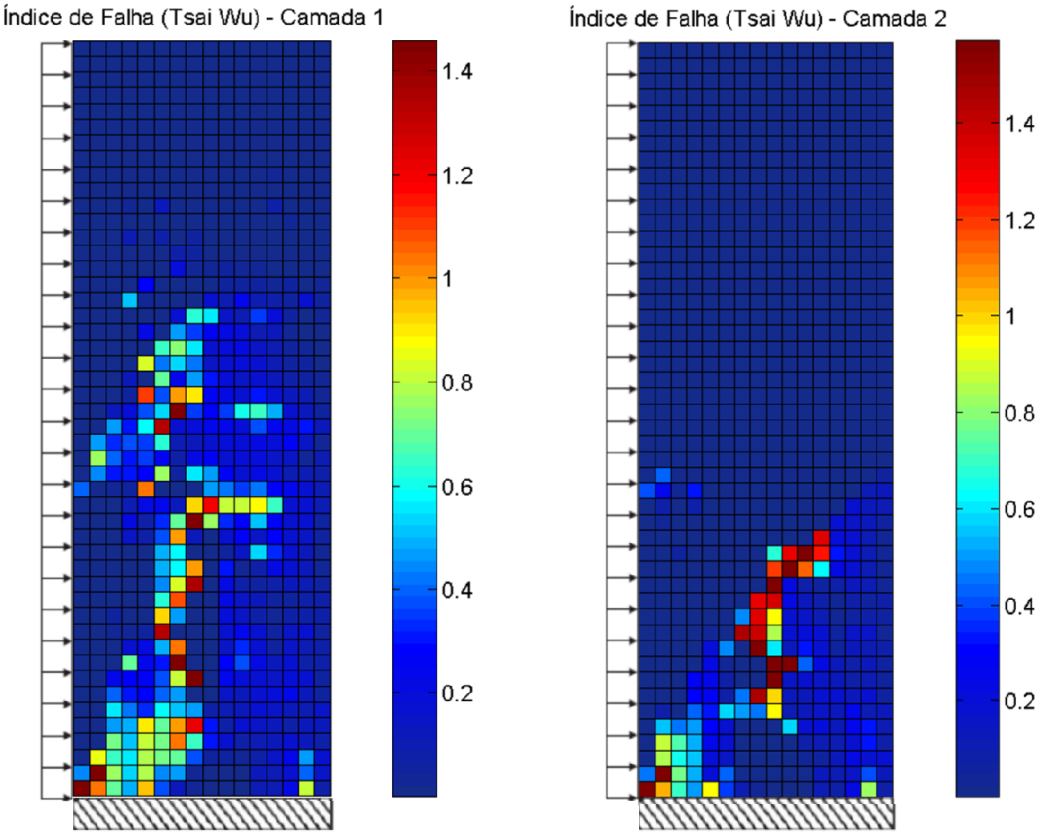


Figura 74 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.



5.3.1.3 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de critério de falha e de volume

Por fim, uma terceira configuração de problema é analisada. Desta vez o problema é formulado como na equação (182), considerando como restrição o coeficiente de segurança da estrutura em relação ao critério de falha de *Tsai-Wu*, entendido da mesma forma que uma restrição de tensão. Neste exemplo, aumentou-se a espessura da camada em que material pode ser removido (camada 2) de 0,5 mm para 1,5 mm de modo a facilitar a convergência da otimização, dificultada pelas mudanças bruscas de índice de falha quando a espessura da camada é pequena.

A Figura 76 mostra as pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento que arredonda os valores intermediários, definindo a topologia resultante da estrutura. A Figura 77 apresenta o resultado de orientação de fibras para as duas camadas da estrutura. Por fim, na Figura 78 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado.

$$
\begin{aligned}
&\underset{d,\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\
&\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\
&\qquad\qquad\quad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\
&\qquad\qquad\quad V \le V_0 \\
&\qquad\qquad\quad 0 \le d \le 1 \\
&\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1
\end{aligned}
\tag{182}
$$

Figura 75 - Histórico de evolução da otimização.

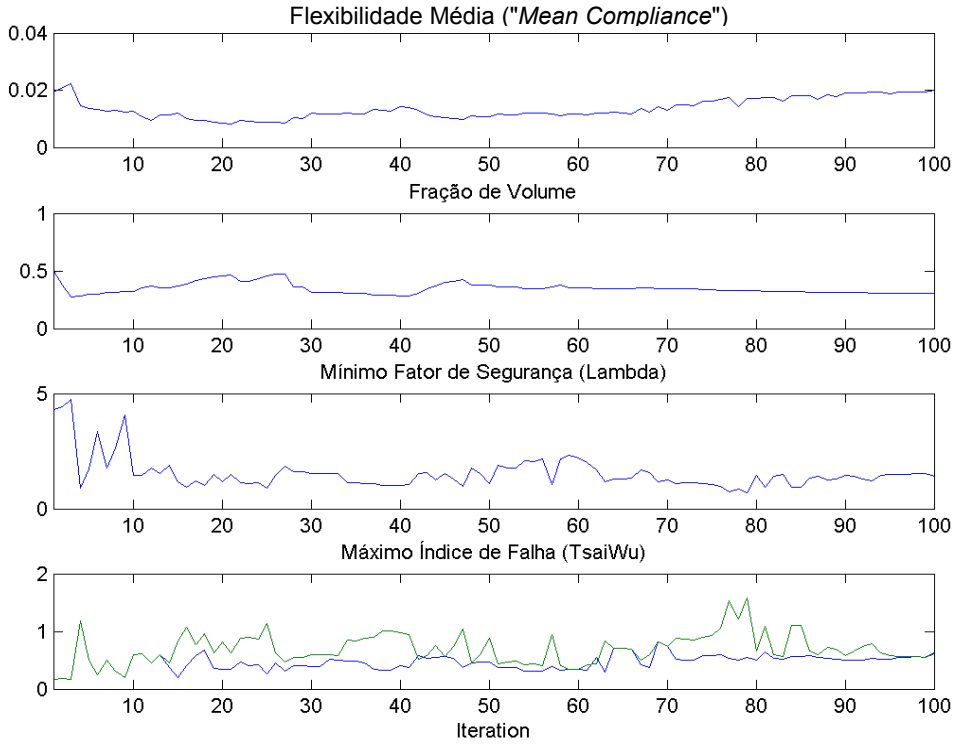


Figura 76 - Pseudo-densidades para a camada 2, a camada 1 é mantida preenchida de material. Resultados sem e com pós-processamento; acima e abaixo, respectivamente.

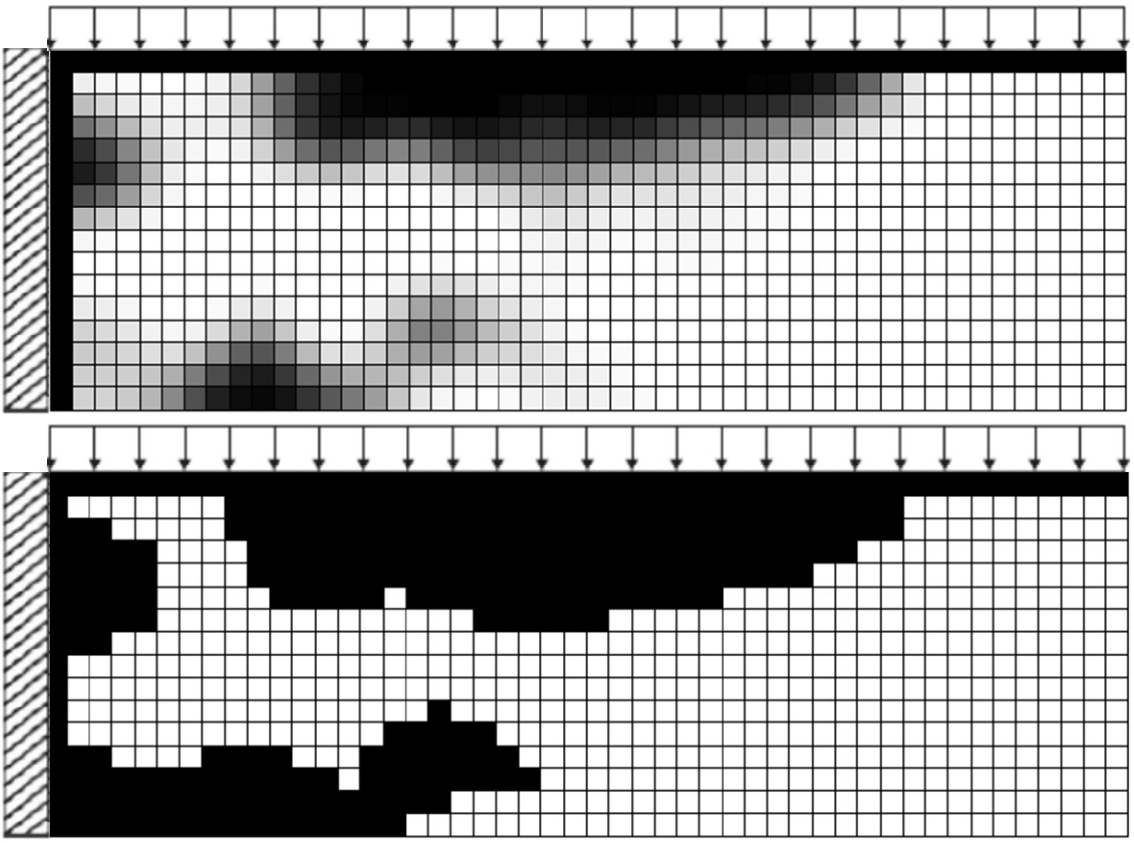


Figura 77 - Resultado de orientação das fibras. Acima, na camada 1; abaixo, na camada 2.

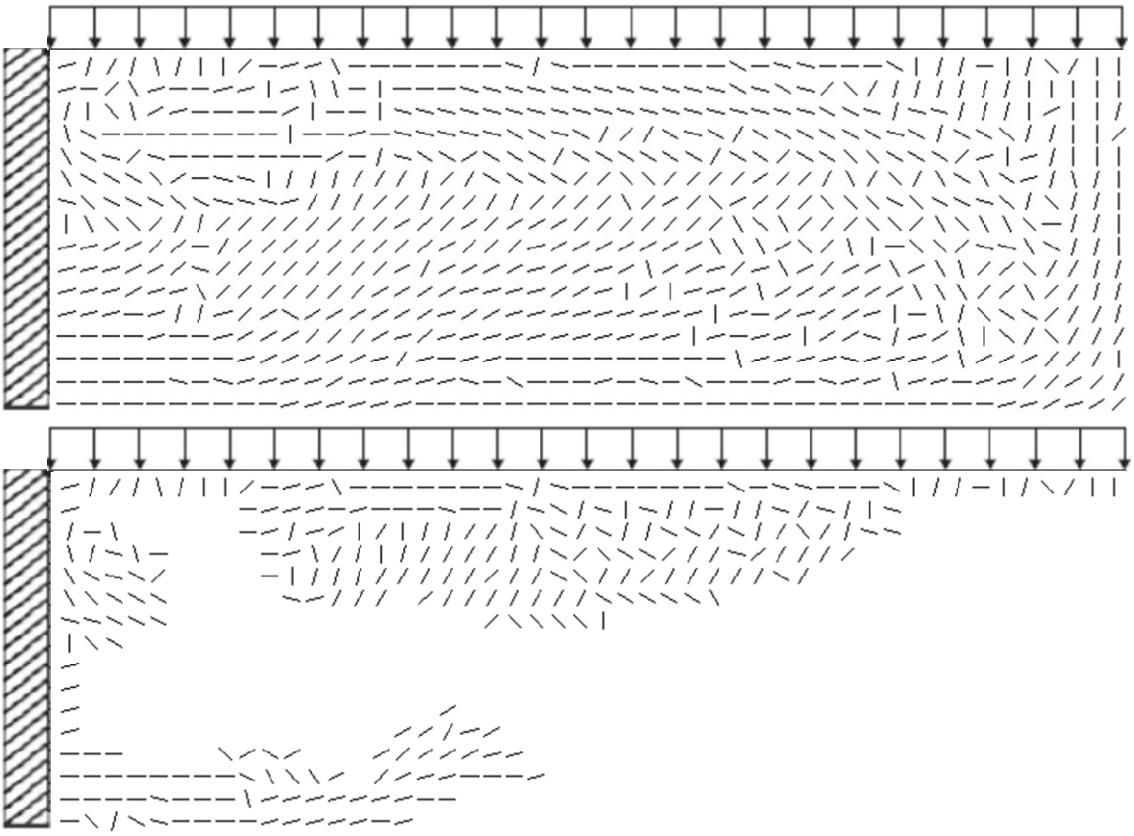
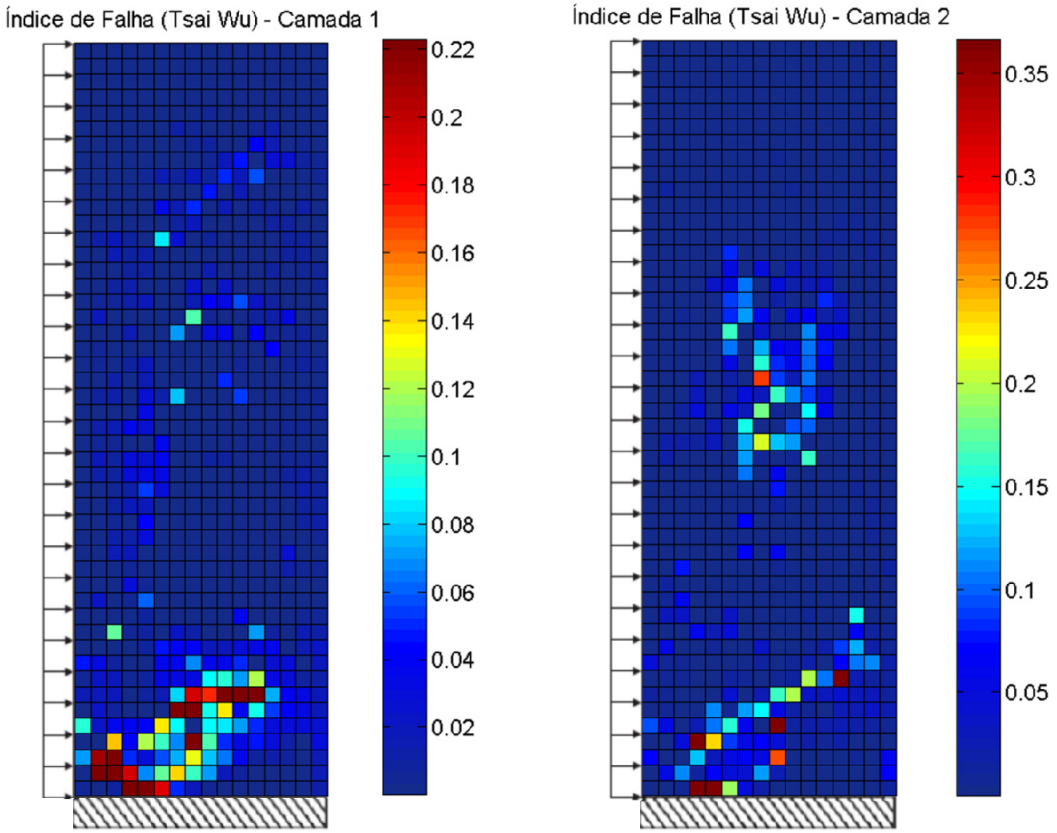


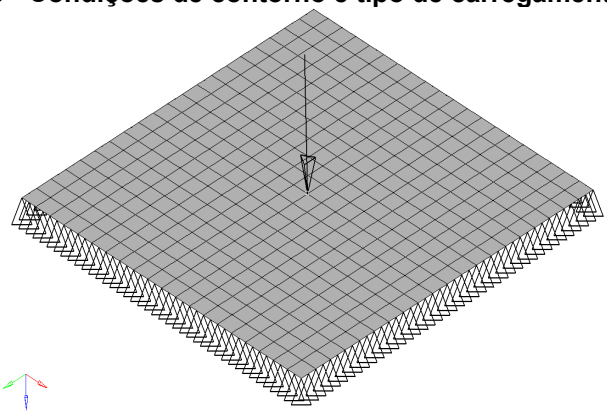
Figura 78 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.



5.3.2 Carregamento de força pontual fora do plano

O código foi em seguida aplicado em um caso de carregamento fora do plano, como mostrado na Figura 79, que representa uma carga pontual no centro de um painel quadrado engastado em suas quatro arestas.

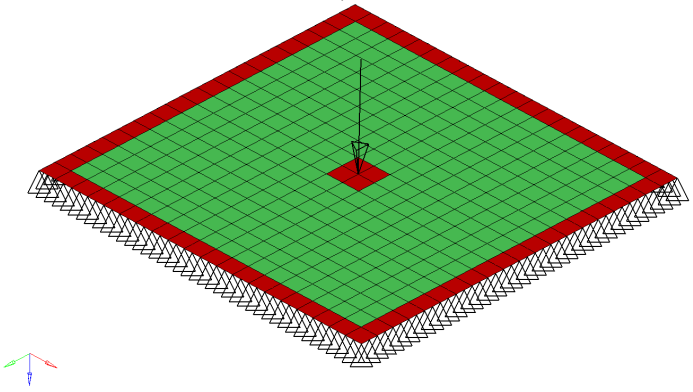
Figura 79 - Condições de contorno e tipo de carregamento aplicado.



Para os resultados, considerou-se um empilhamento de 2 camadas de carbono-epóxi de 0,25 mm de espessura. A orientação das fibras são variáveis de projeto, podendo assumir valores discretos de 0º, +/-15º , +/-30º, +/-45º, +/-60º, +/-75º e 90º, distintos em cada elemento e em cada camada.

Nos casos em que a otimização de topologia também é abordada, o domínio viável de otimização topológica são os elementos da camada 2, mostrados na Figura 80. O domínio viável da otimização de orientação são todos os elementos das camadas 1 e 2. Esta distinção torna-se necessária para evitar instabilidades numéricas na otimização surgidas por elementos com baixa rigidez em regiões de aplicação de carga e condições de contorno.

Figura 80 - Domínio otimizável em verde, elementos fora do domínio em vermelho.



5.3.2.1 Otimização somente de orientação de fibras

O problema de otimização é formulado como na equação (183), buscando a minimização do "*mean compliance"* (flexibilidade média) sem restrições. As únicas variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada.

A Figura 81 apresenta o resultado de orientação de fibras para as duas camadas da estrutura e na Figura 82 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 83.

$$\begin{aligned} &\underset{\nu}{\text{Minimizar:}} \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{183}$$

Figura 81 - Resultado de orientação das fibras. À esquerda, camada 1; à direita, camada 2.

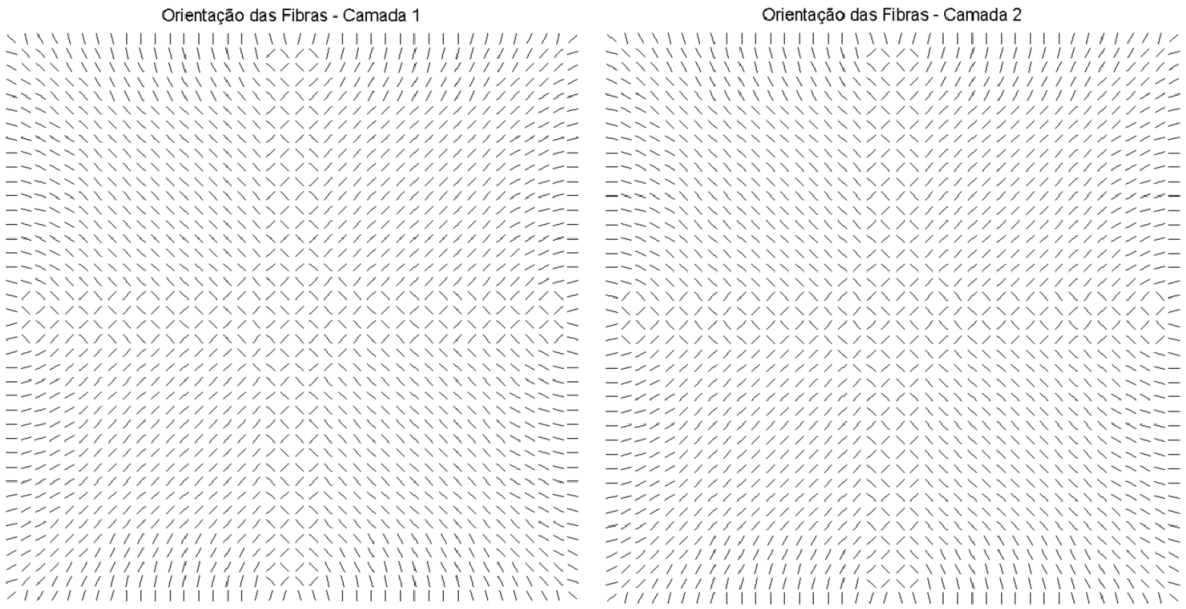


Figura 82 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

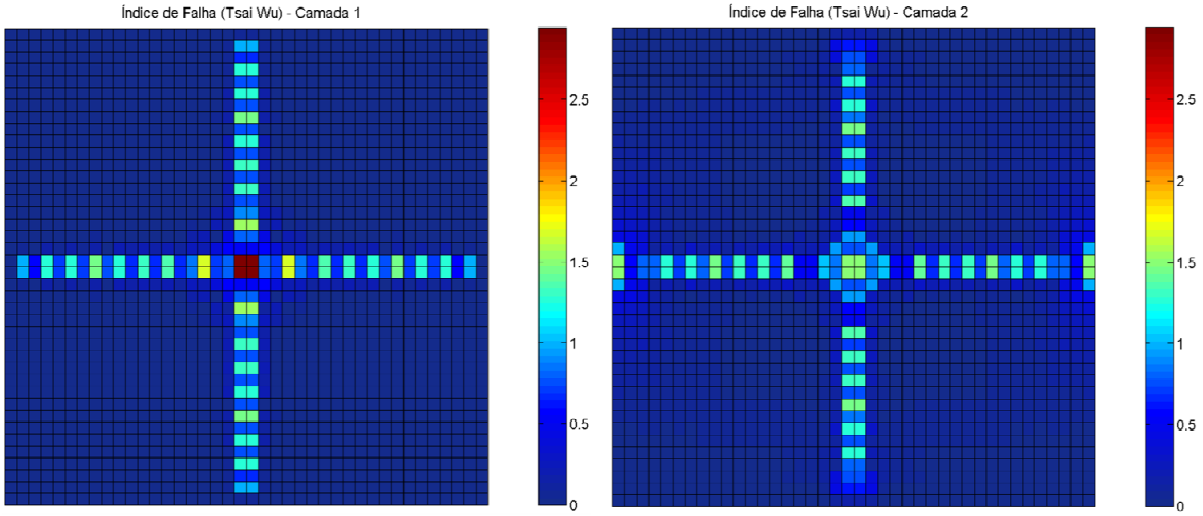
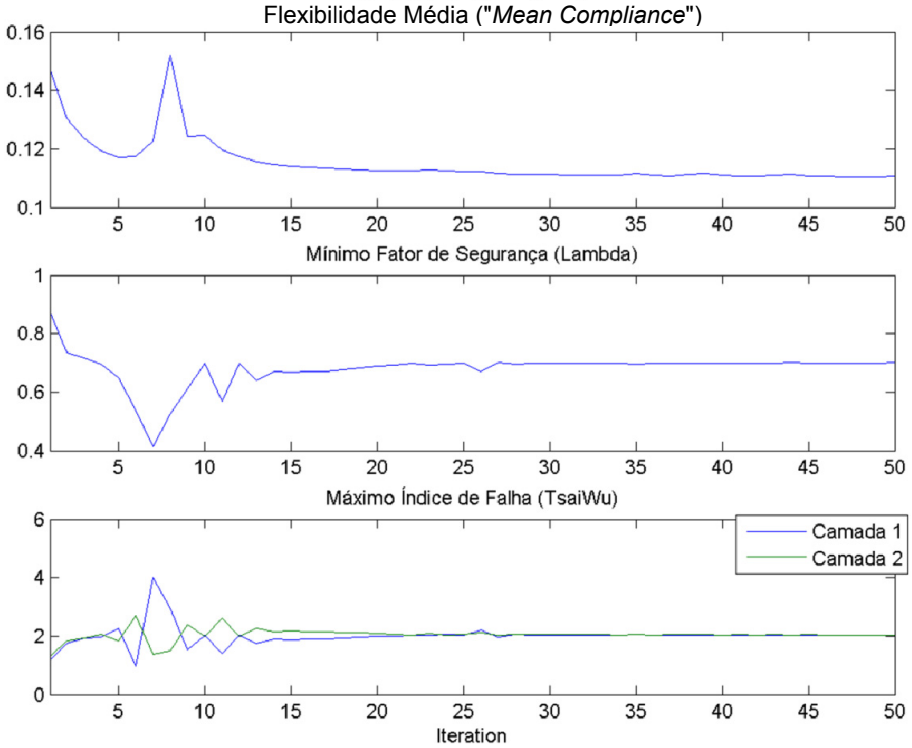


Figura 83 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.2.2 Otimização somente de orientação de fibras com restrição de critério de falha

Neste caso, o problema de otimização é formulado da mesma maneira que o problema da seção 5.3.2.1, porém adicionando-se a restrição de critério de falha, como na equação (184).

A Figura 84 apresenta o resultado de orientação de fibras para as duas camadas da estrutura e na Figura 85 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 86.

$$\begin{aligned} &\underset{\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{184}$$

Figura 84 - Resultado de orientação das fibras. À esquerda, camada 1; à direita, camada 2.

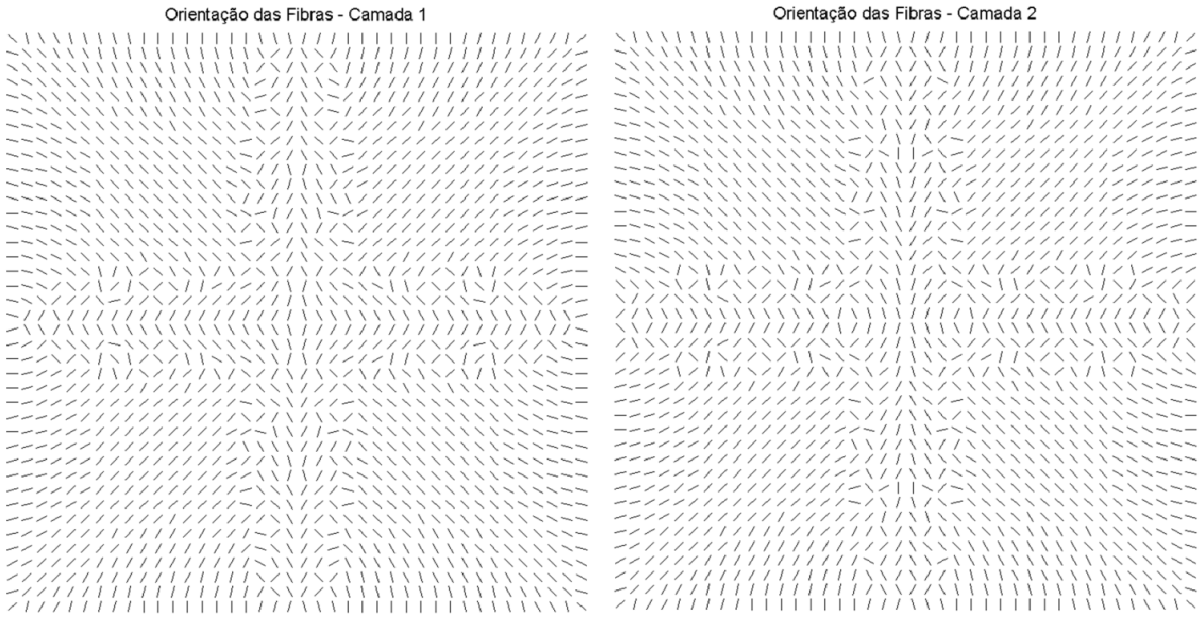


Figura 85 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

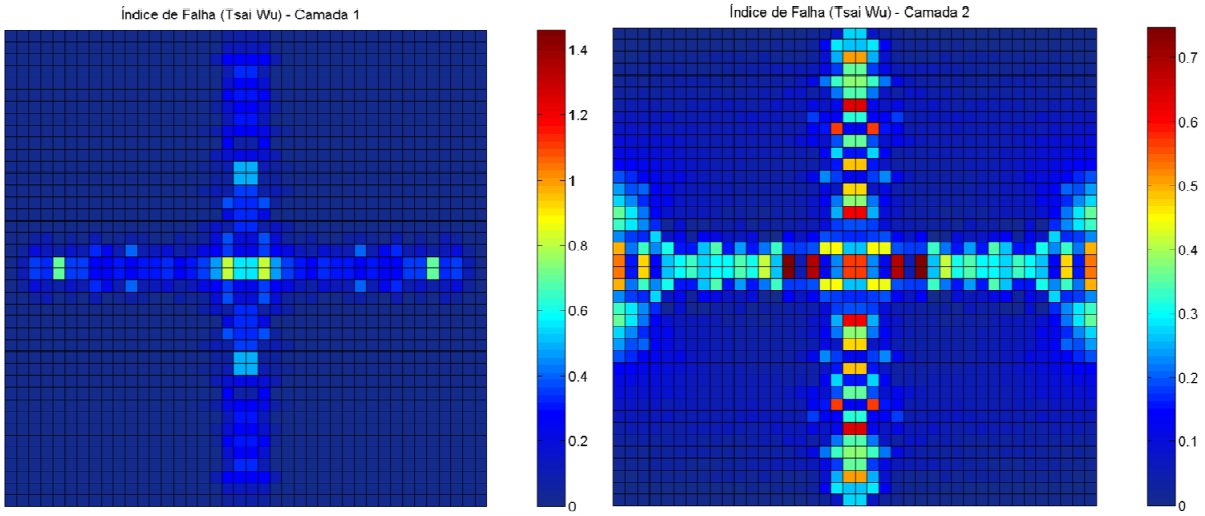
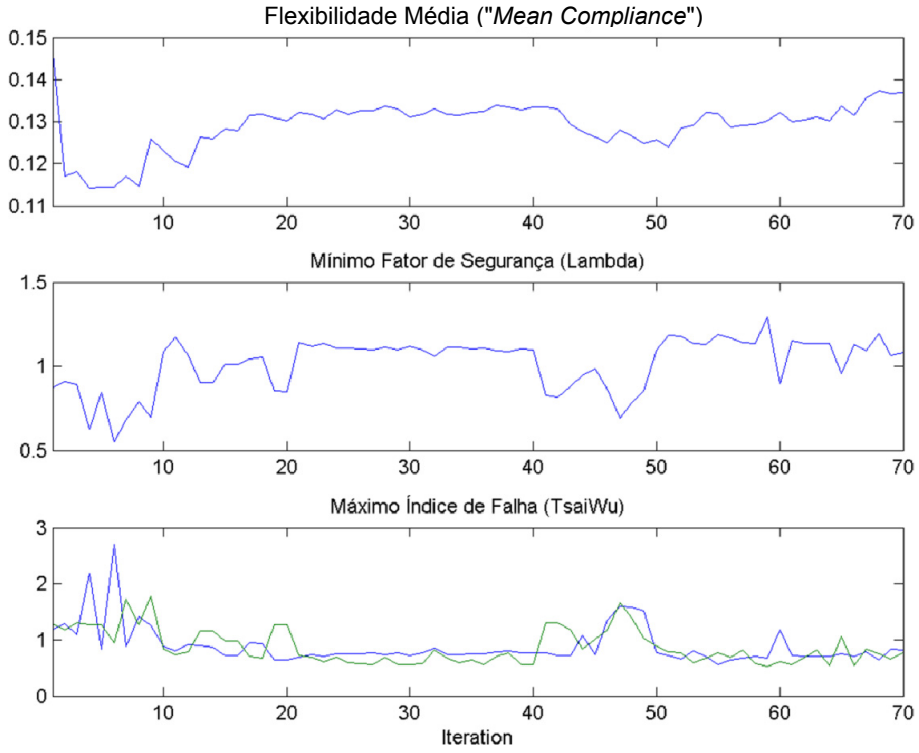


Figura 86 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.2.3 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de volume

Para este exemplo, o problema de otimização é formulado como na equação (185), buscando a minimização do flexibilidade média ("*mean compliance")* sujeito a restrição de volume. As variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada e também as pseudo-densidades dos elementos da camada 2 do laminado.

O resultado de pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento é apresentado pela Figura 87. Através da Figura 88 é mostrado o resultado de orientação de fibras para as duas camadas do laminado. Na Figura 89 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 90.

$$\begin{aligned} \underset{d\,,\,\nu}{\text{Minimizar}}: \quad & C(\mathbf{u}) \\ \text{sujeito à:} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \\ & V \le V_0 \\ & 0 \le d \le 1 \\ & 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{185}$$

Figura 87 - Resultado de pseudo-densidades para a camada 2 do painel. A camada 1 é mantida fixa inteiramente preenchida de material, como um substrato. Resultados sem e com pós-processamento, respectivamente à esquerda, e à direita.

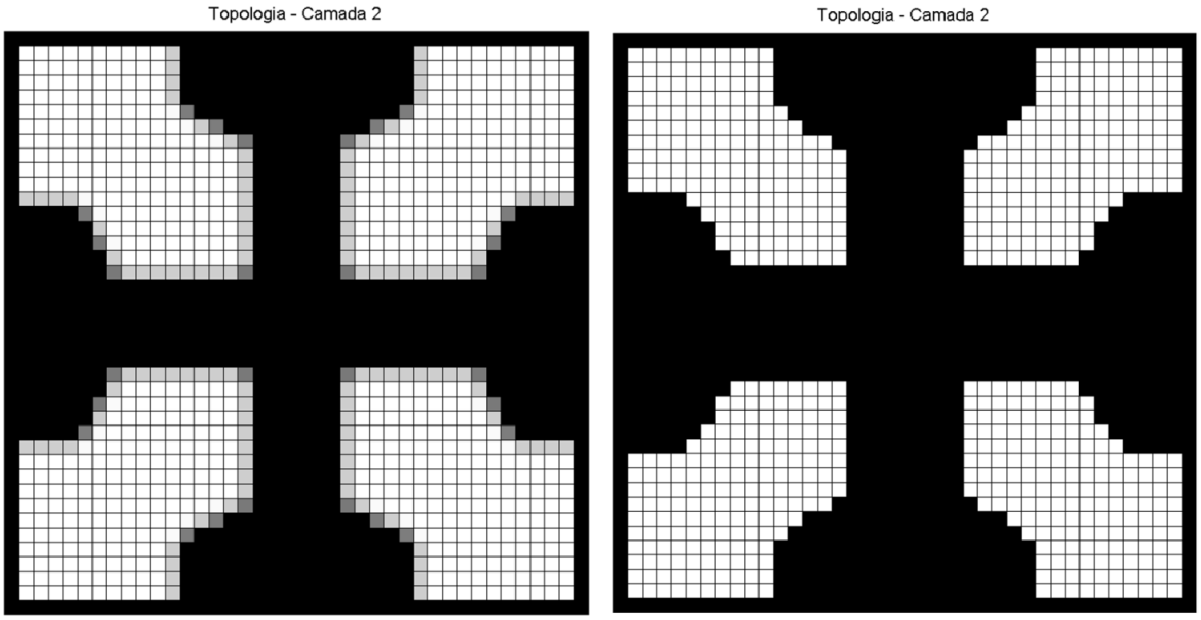


Figura 88 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

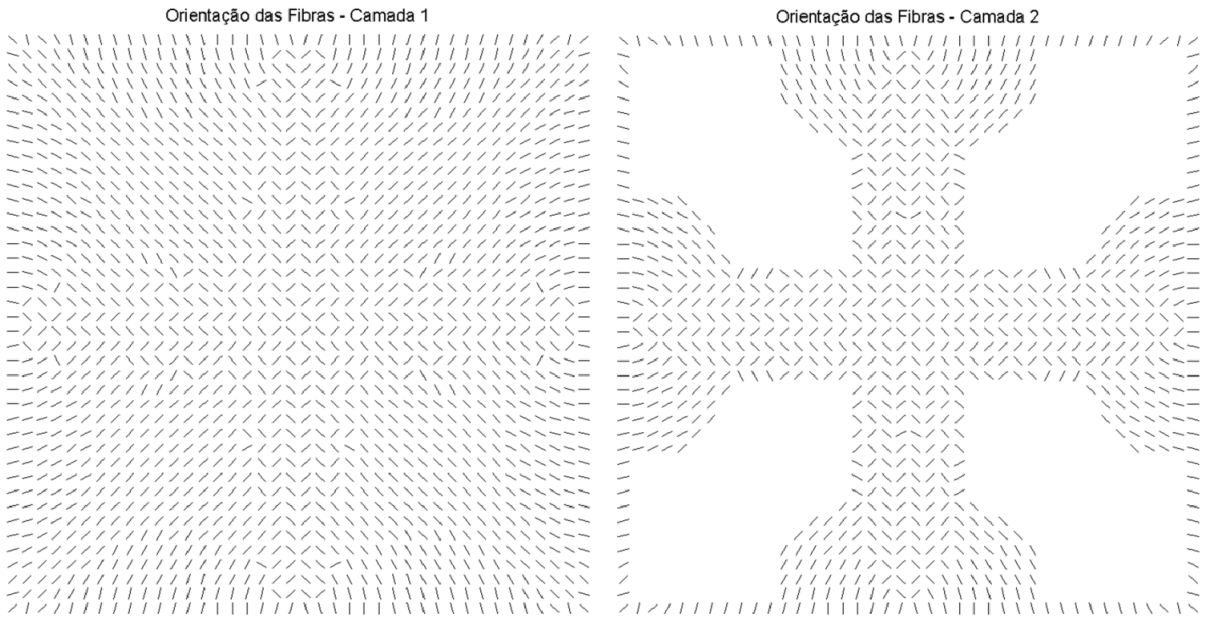


Figura 89 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

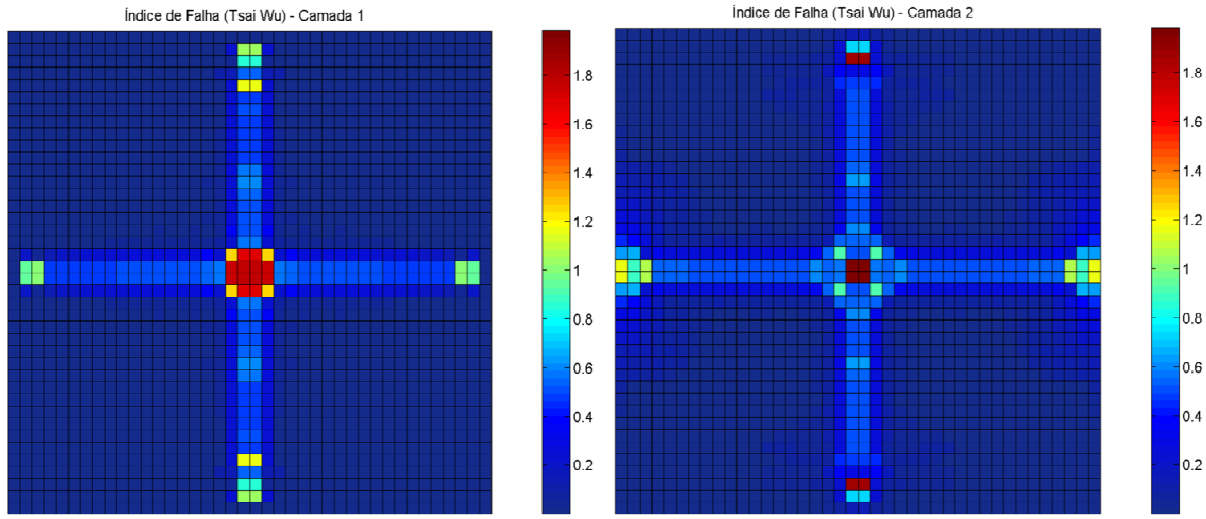
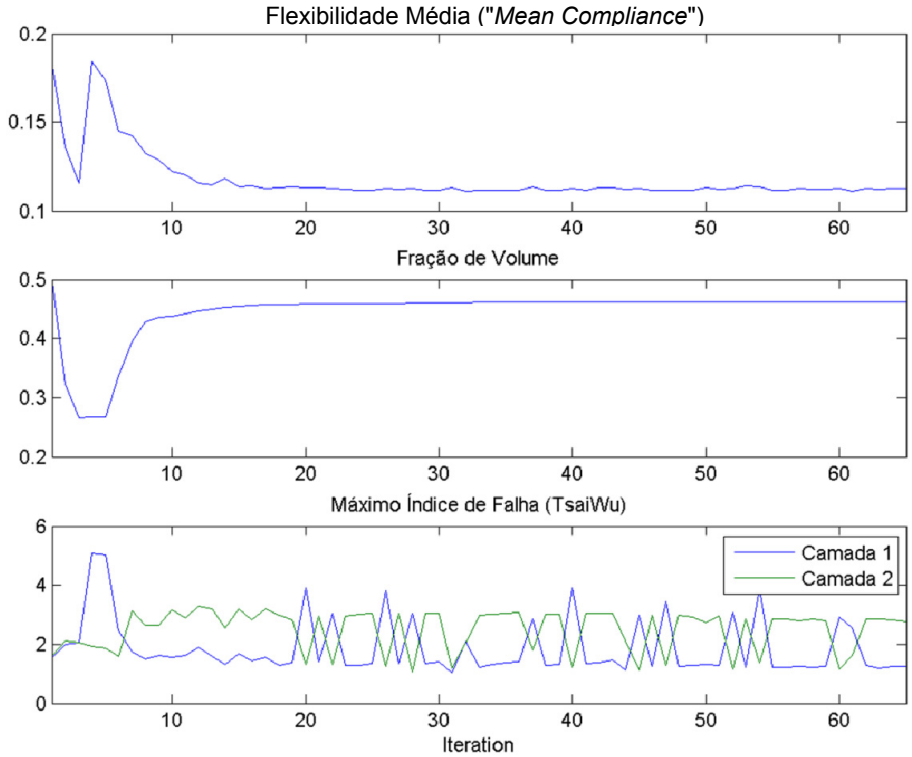


Figura 90 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.2.4 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de critério de falha e de volume

Neste caso, o problema de otimização é formulado como na equação (186), buscando a minimização da flexibilidade média ("*mean compliance"*) sujeito a restrição de volume e de critério de falha. As variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada e também as pseudo-densidades dos elementos da camada 2 do laminado. Para este exemplo, aumentou-se a espessura da camada em que material pode ser removido (camada 2) de 0,5 mm para 1,5 mm de modo a facilitar a convergência da otimização, dificultada pelas mudanças bruscas de índice de falha quando a espessura da camada é pequena.

O resultado de pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento é apresentado pela Figura 91. Através da Figura 92 é mostrado o resultado de orientação de fibras para as duas camadas do laminado. Na Figura 93 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 94.

$$
\begin{aligned}
&\underset{d,\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\
&\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\
&\qquad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\
&\qquad V \le V_0 \\
&\qquad 0 \le d \le 1 \\
&\qquad 0 \le \nu \le 1
\end{aligned}
\tag{186}
$$

Figura 91 - Resultado de pseudo-densidades para a camada 2 do painel. A camada 1 é mantida fixa inteiramente preenchida de material, como um substrato. Resultados sem e com pós-processamento, respectivamente à esquerda, e à direita.

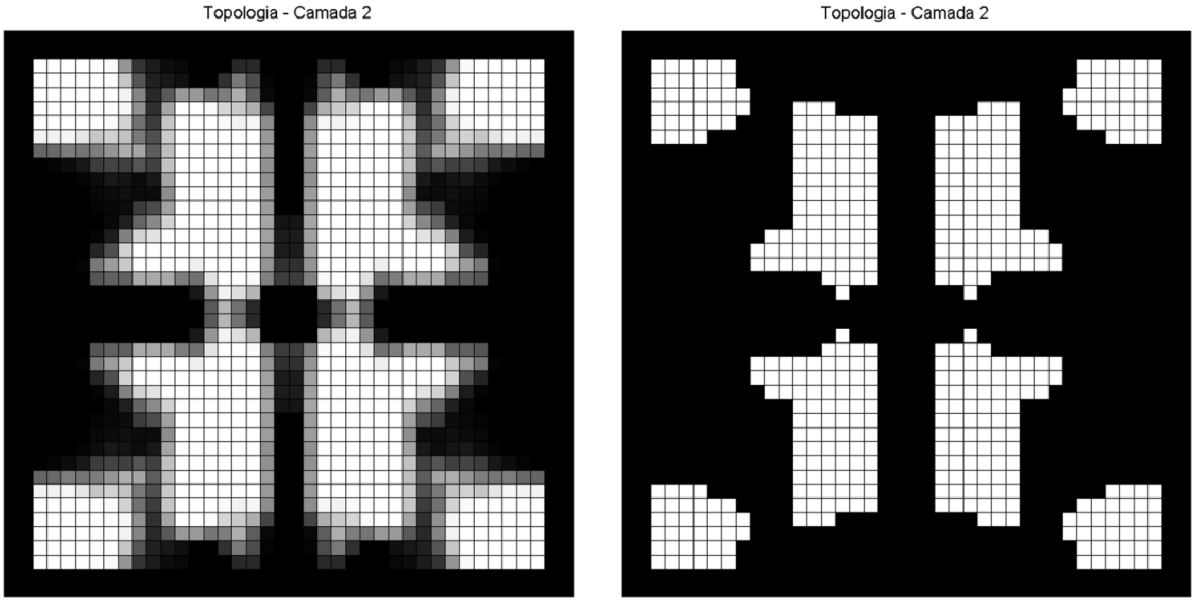


Figura 92 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

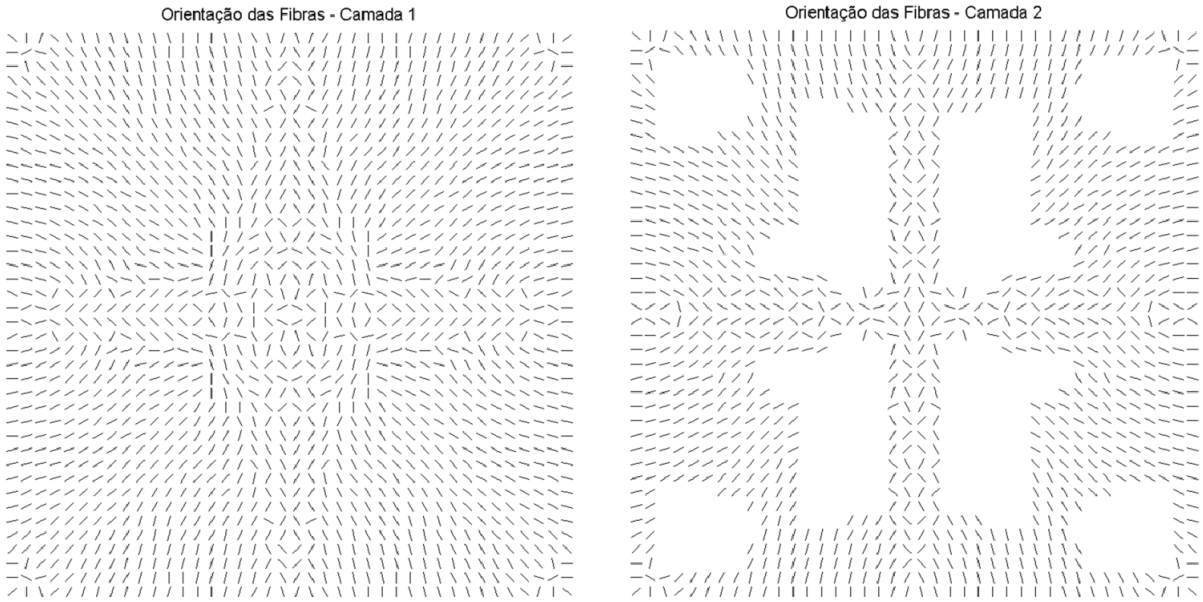


Figura 93 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

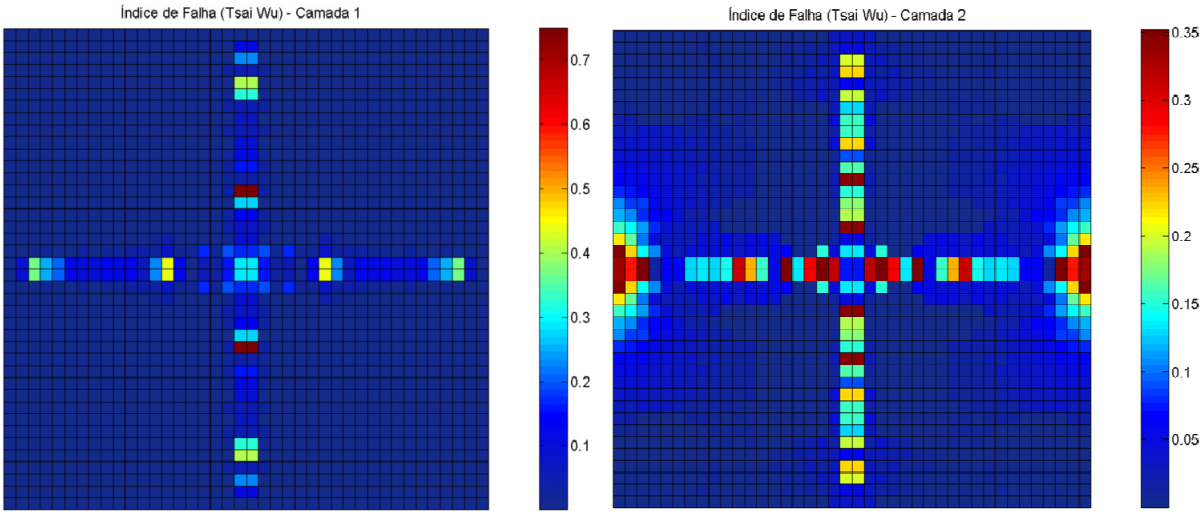
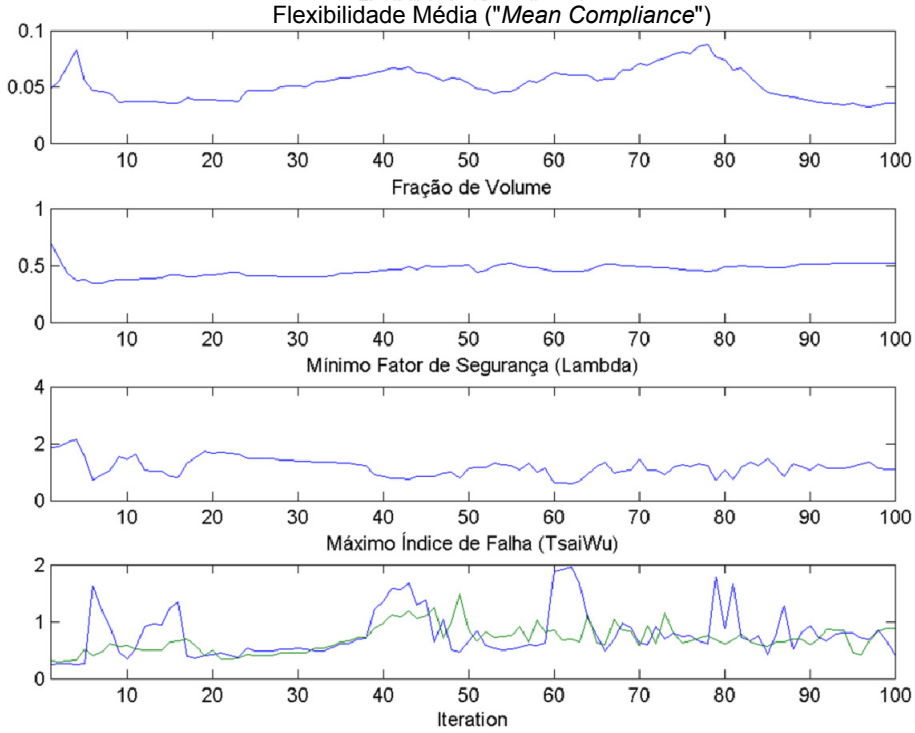


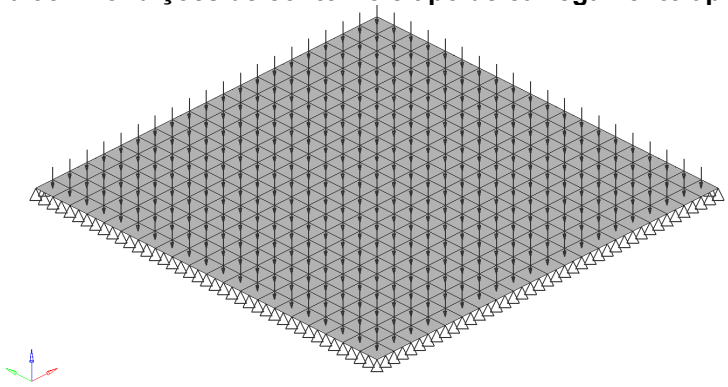
Figura 94 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.3 Carregamento de pressão fora do plano

Por fim, o código foi então aplicado em um caso de carregamento de pressão fora do plano, como mostrado na Figura 95, que representa uma carga de pressão num painel quadrado engastado em suas quatro arestas.

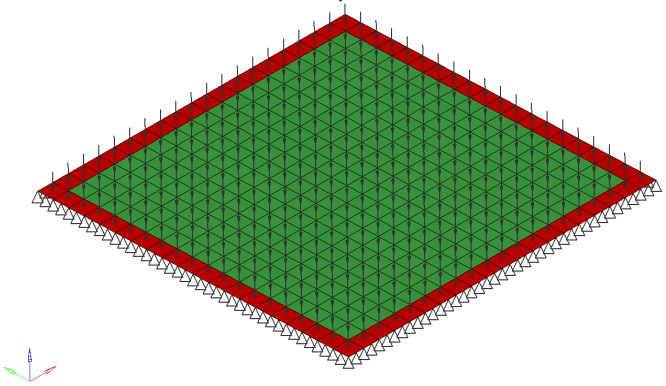
Figura 95 - Condições de contorno e tipo de carregamento aplicado.



Para os resultados, considerou-se um empilhamento de 2 camadas de carbono-epóxi de 0,25 mm de espessura. A orientação das fibras são variáveis de projeto, podendo assumir valores discretos de 0º, +/-15º , +/-30º, +/-45º, +/-60º, +/-75º e 90º, distintos em cada elemento e em cada camada.

Nos casos em que a otimização de topologia também é abordada, o domínio viável de otimização topológica são os elementos da camada 2, mostrados na Figura 96. O domínio viável da otimização de orientação são todos os elementos das camadas 1 e 2. Esta distinção torna-se necessária para evitar instabilidades numéricas na otimização surgidas por elementos com baixa rigidez em regiões de aplicação de carga e condições de contorno.

Figura 96 - Domínio otimizável em verde, elementos fora do domínio em vermelho.



5.3.3.1 Otimização somente de orientação de fibras

O problema de otimização é formulado como na equação (187), buscando a minimização da flexibilidade média *("mean compliance"*) sem restrições. As únicas variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada.

A Figura 97 apresenta o resultado de orientação de fibras para as duas camadas da estrutura e na Figura 98 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 99.

$$\begin{aligned} &\underset{\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{187}$$

Figura 97 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

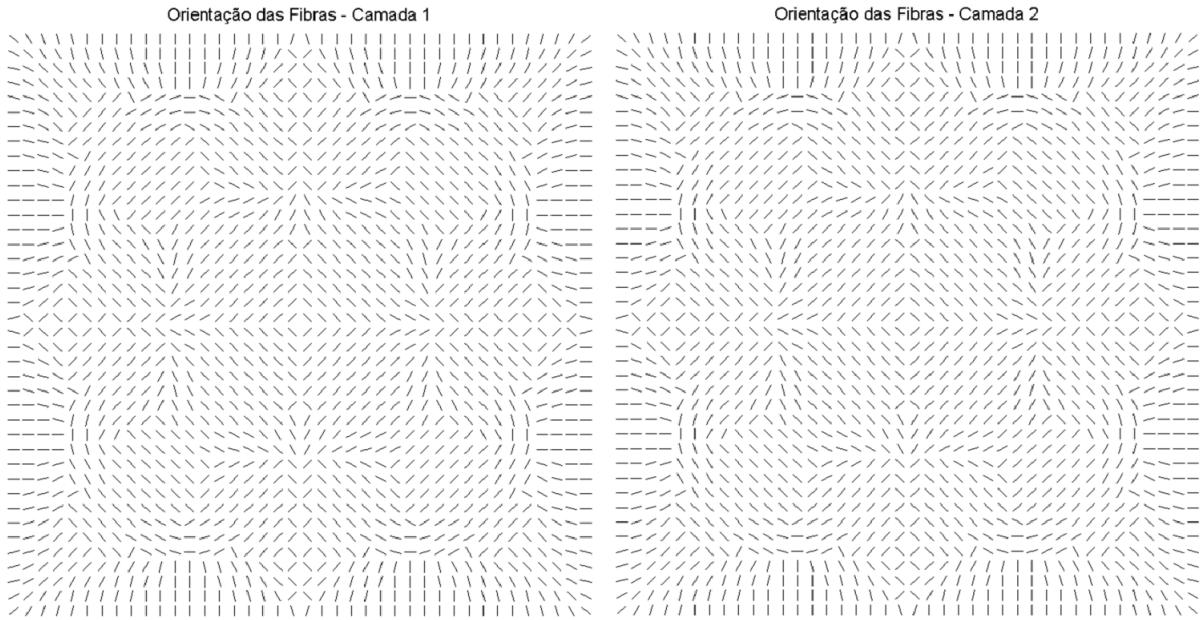


Figura 98 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

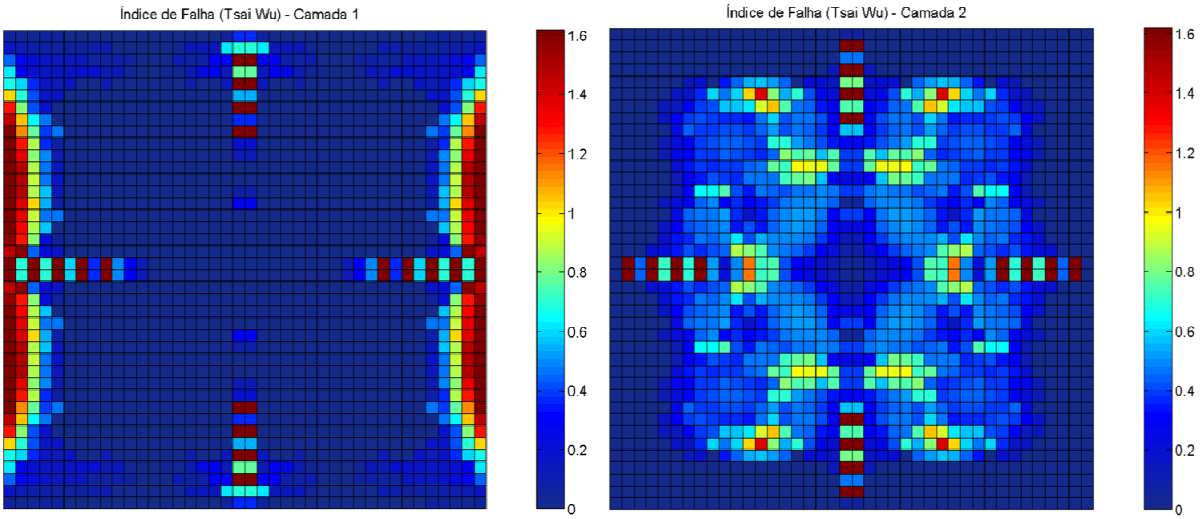
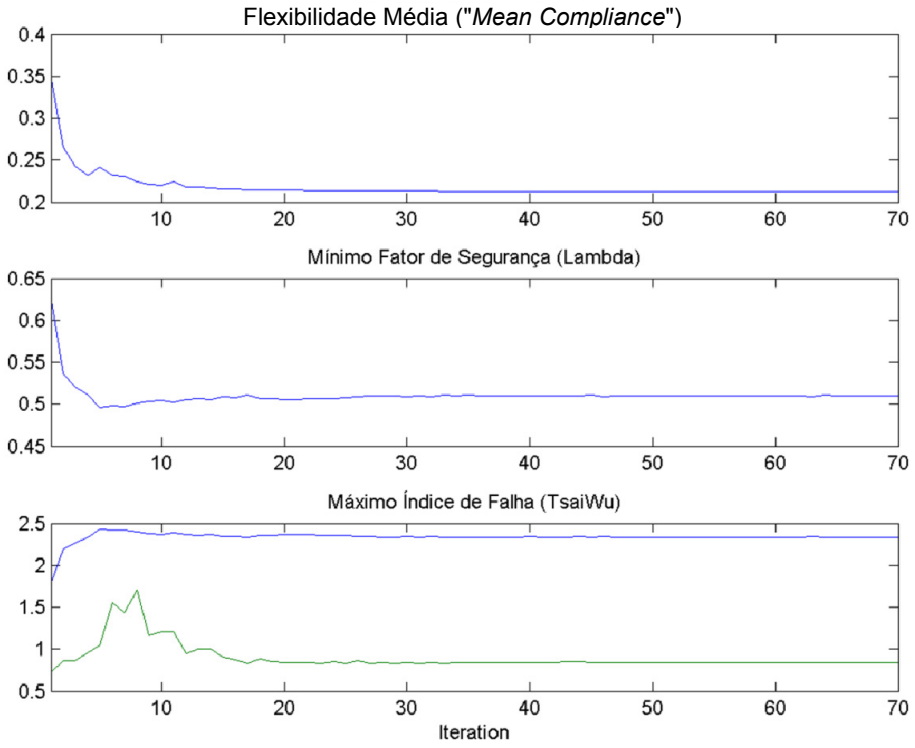


Figura 99 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.3.2 Otimização somente de orientação de fibras com restrição de critério de falha

Neste caso, o problema de otimização é formulado da mesma maneira que o problema da seção 5.3.3.1, porém adicionando-se a restrição de critério de falha, como na equação (188).

A Figura 100 apresenta o resultado de orientação de fibras para as duas camadas da estrutura e na Figura 101 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 102.

$$
\begin{aligned}
&\underset{\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\
&\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\
&\qquad\qquad\quad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\
&\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1
\end{aligned}
\tag{188}
$$

Figura 100 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

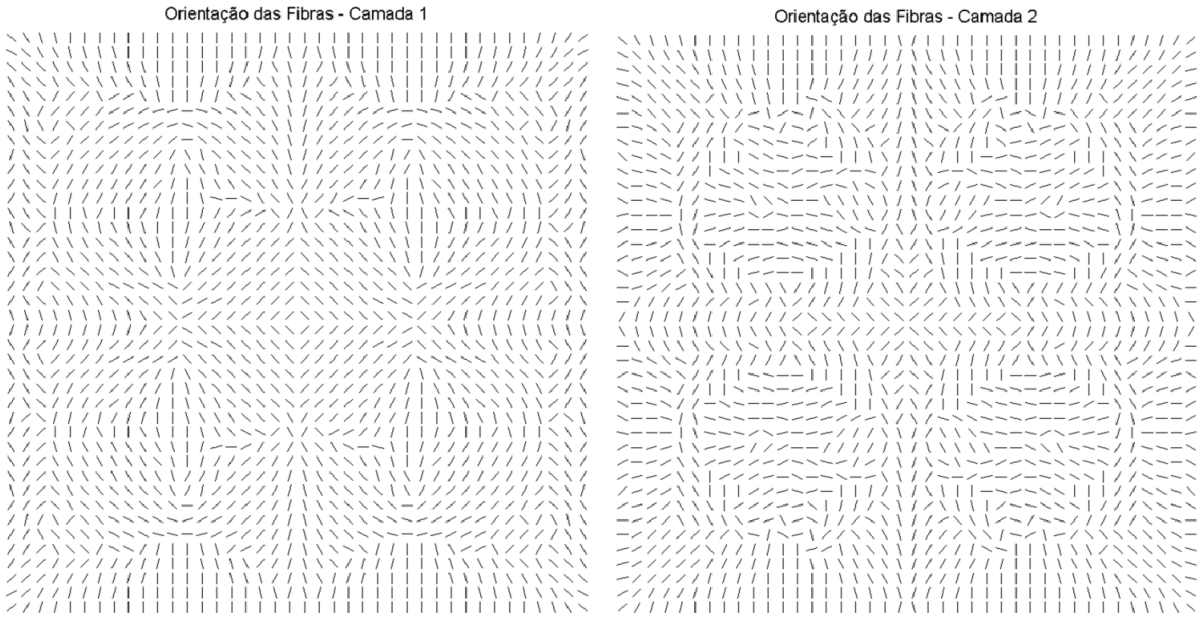


Figura 101 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

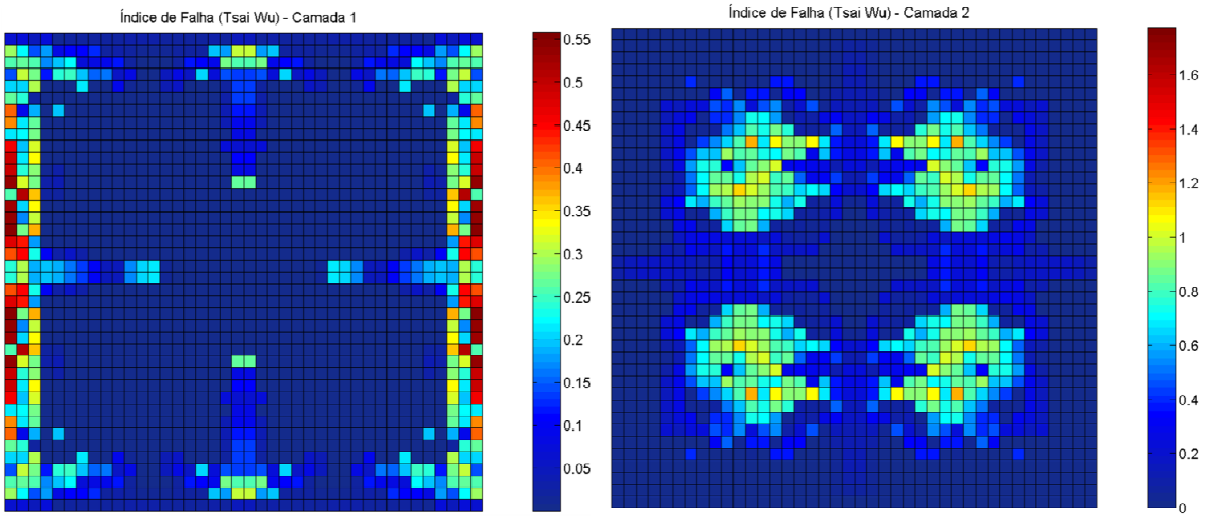
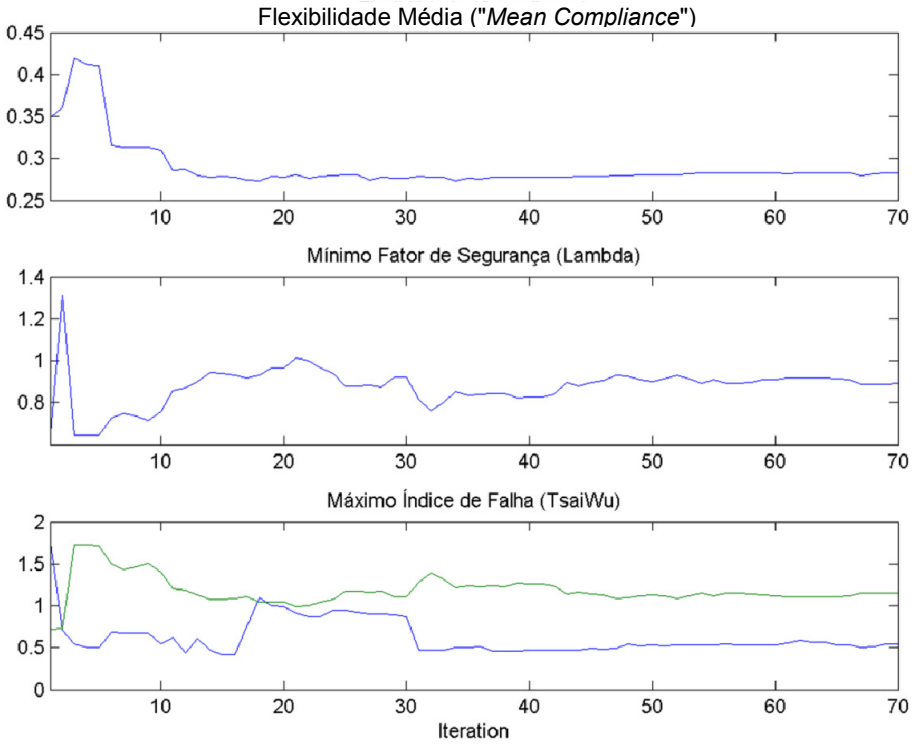


Figura 102 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.3.3 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de volume

O problema de otimização é formulado como na equação (189), buscando a minimização da flexibilidade média ("*mean compliance*") sujeito a restrição de volume. As variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada e também as pseudo-densidades dos elementos da camada 2 do laminado.

O resultado de pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento é apresentado pela Figura 103. Através da Figura 104 é mostrado o resultado de orientação de fibras para as duas camadas do laminado. Na Figura 105 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 106.

$$\begin{aligned} &\underset{d\,,\,\nu}{\text{Minimizar:}} \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad V \le V_0 \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le d \le 1 \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{189}$$

Figura 103 - Resultado de pseudo-densidades para a camada 2 do painel. A camada 1 é mantida fixa inteiramente preenchida de material, como um substrato. Resultados sem e com pós-processamento, respectivamente à esquerda, e à direita.

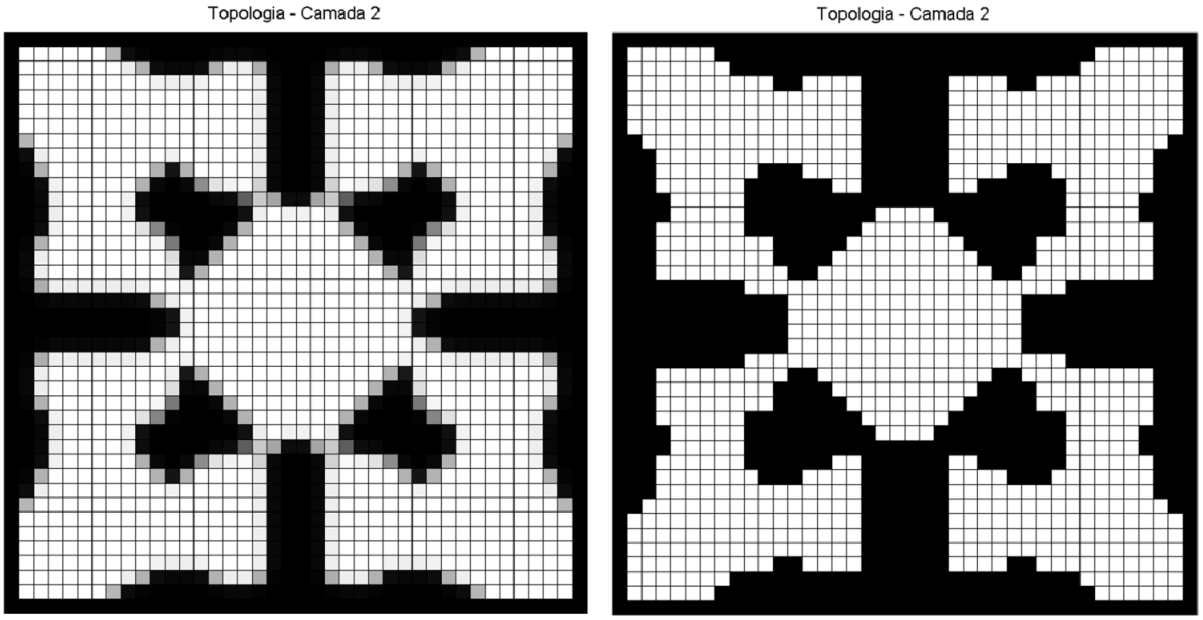


Figura 104 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

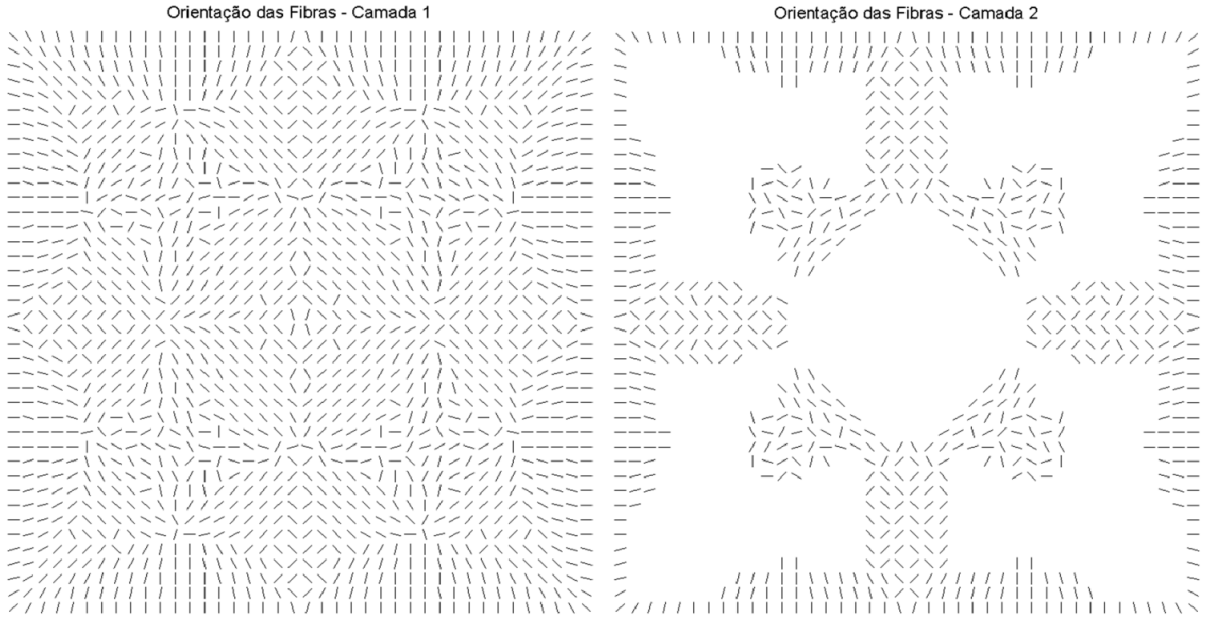


Figura 105 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

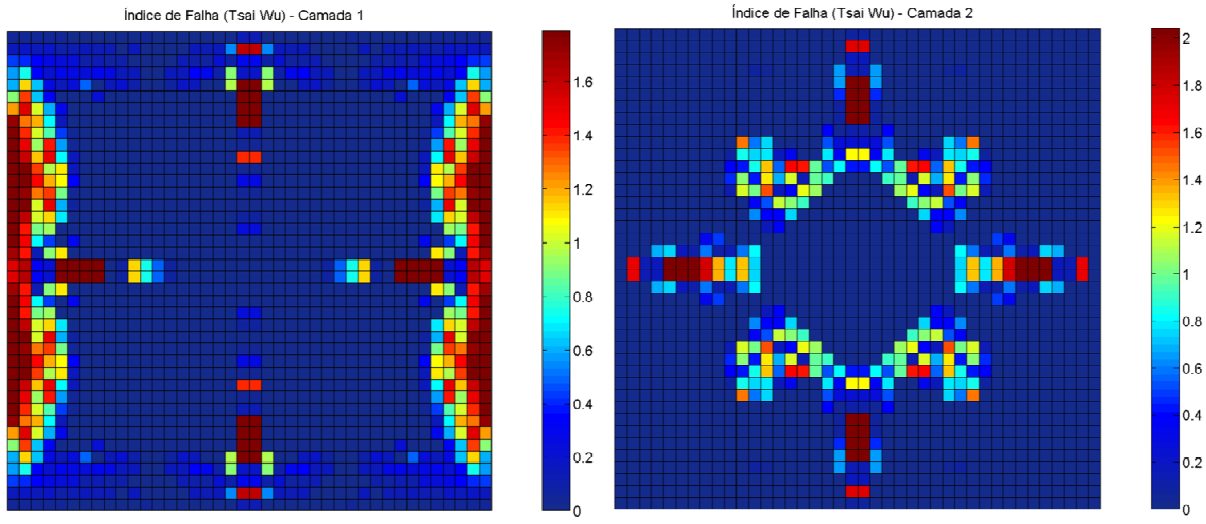
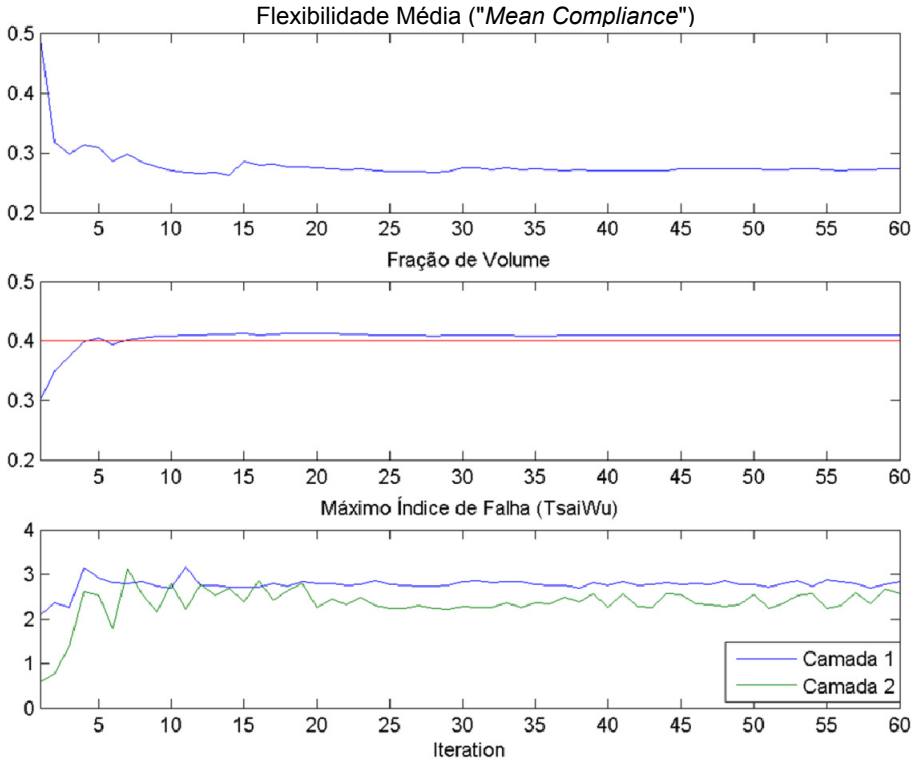


Figura 106 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.3.4 Otimização de orientação de fibras e topologia com restrição de critério de falha e de volume

Neste caso, o problema de otimização é formulado como na equação (190), buscando a minimização da flexibilidade média ("*mean compliance*") sujeito a restrição de volume e de critério de falha. As variáveis de projeto são as orientações das fibras dentro de cada camada e também as pseudo-densidades dos elementos da camada 2 do laminado. A espessura da camada em que material pode ser removido (camada 2) foi aumentada de 0,5 mm para 1,5 mm de modo a facilitar a convergência da otimização, dificultada pelas mudanças bruscas de índice de falha quando a espessura da camada é pequena.

O resultado de pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento é apresentado pela Figura 107. Na Figura 108 é mostrado o resultado de orientação de fibras para as duas camadas do laminado. Na Figura 109 são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado. O histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 110.

$$
\begin{aligned}
&\underset{d,\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\
&\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\
&\qquad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\
&\qquad V \le V_0 \\
&\qquad 0 \le d \le 1 \\
&\qquad 0 \le \nu \le 1
\end{aligned}
\tag{190}
$$

Figura 107 - Resultado de pseudo-densidades para a camada 2 do painel. A camada 1 é mantida fixa inteiramente preenchida de material, como um substrato. Resultados sem e com pós-processamento, respectivamente à esquerda, e à direita.

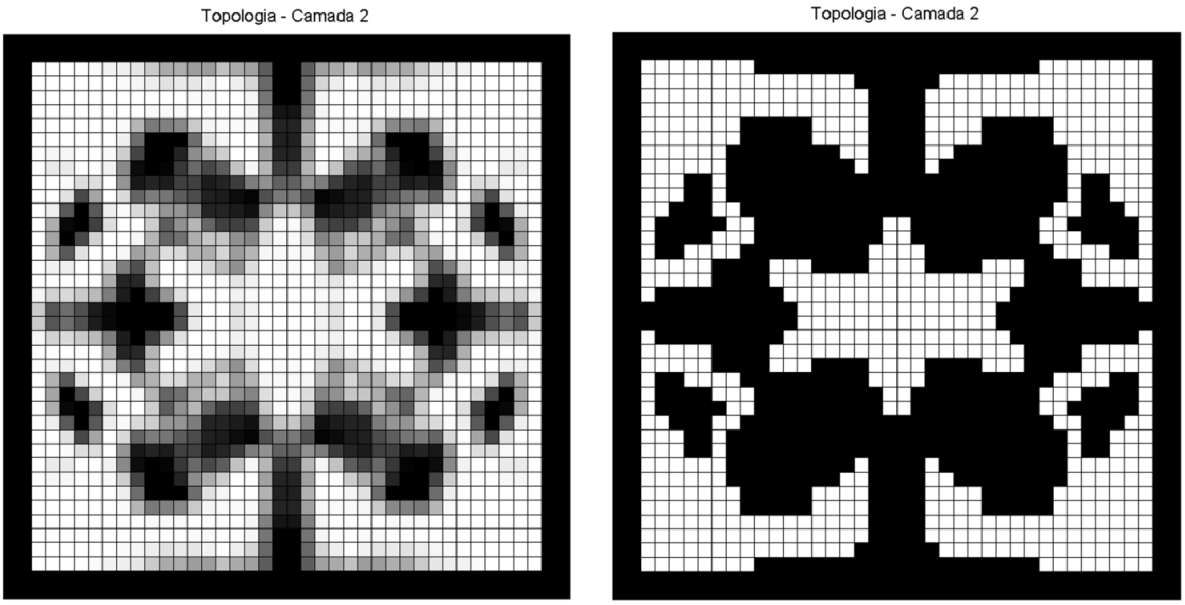


Figura 108 - Resultado de orientação das fibras para camada 1, à esquerda; camada 2 à direita.

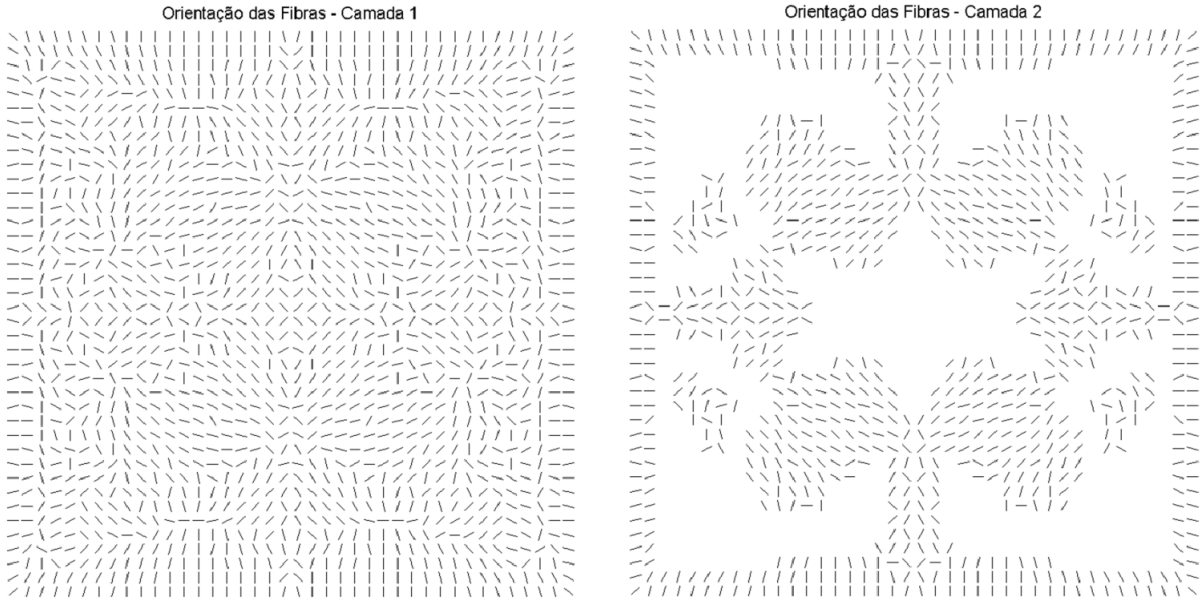


Figura 109 - Índice de falha *Tsai-Wu*; à esquerda, na camada 1; à direita, na camada 2.

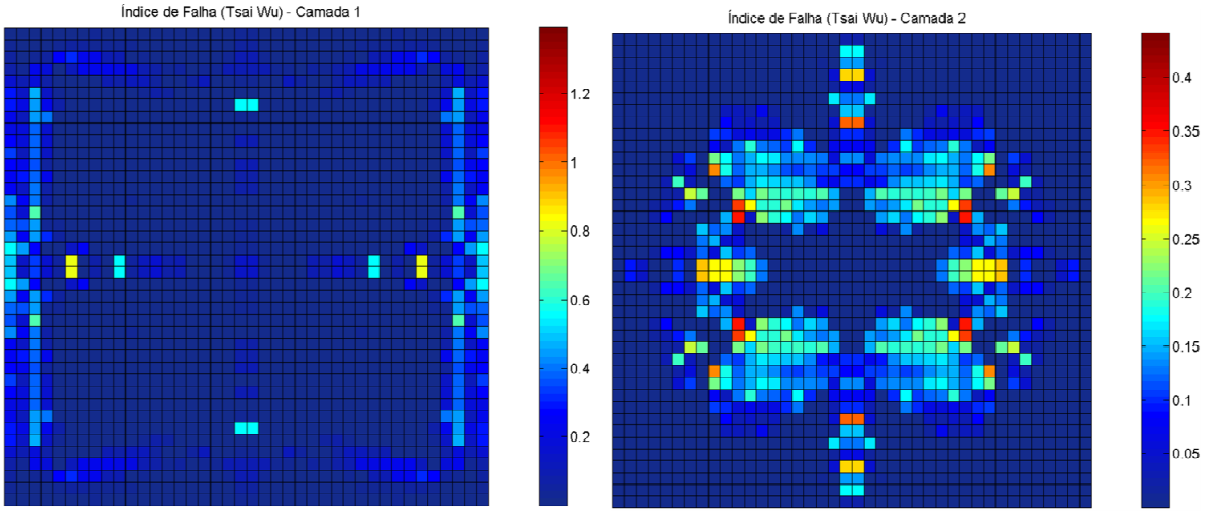
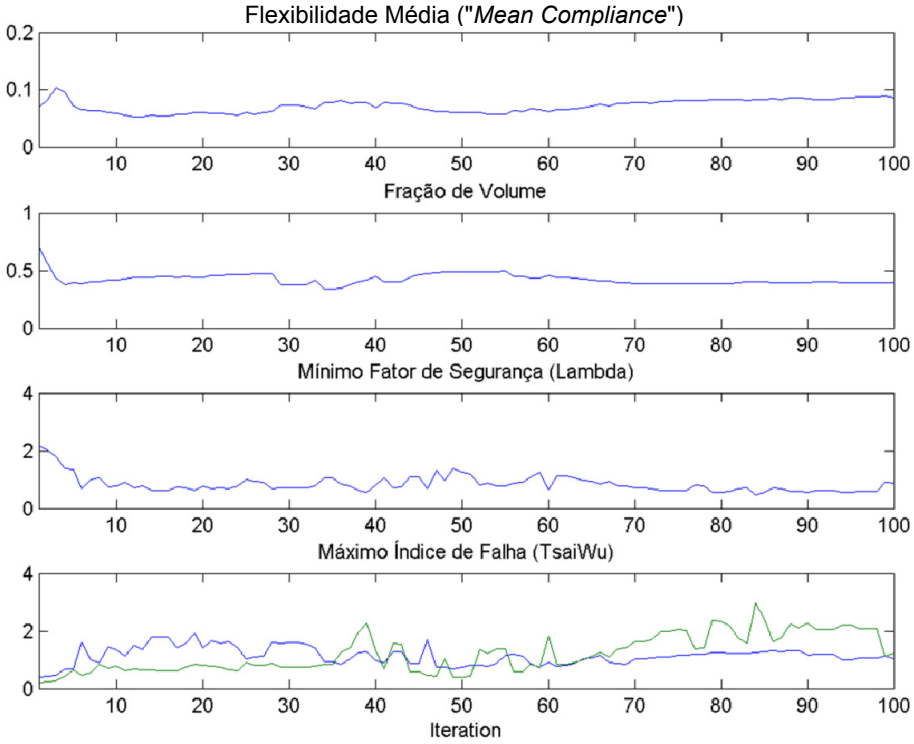


Figura 110 - Histórico de evolução da otimização.



5.3.4 Discussão dos resultados de aplicação da otimização topológica

Ao longo da seção 5.3 foram apresentados diversos exemplos de resultados que são obtidos quando a metodologia de otimização topológica é empregada para a otimização de estruturas compósitas laminadas. É importante lembrar que na exibição dos resultados, os vetores de orientação das fibras representados em cada elemento da malha do MEF devem ser interpretados como tendências de orientação ótima em cada região. O agrupamento de um conjunto de elementos sob uma orientação comum depende diretamente do método de fabricação desejado, que irá restringir o número admissível de mudanças de orientação dentro de cada camada. Esta tarefa faz parte da fase de interpretação dos resultados da otimização.

A Tabela 3 compara os valores de flexibilidade, volume e critério de falha obtidos em cada tipo de otimização analisado nas seções anteriores. Observa-se que independentemente do tipo de carregamento que a otimização considerou, o método de otimização mostrou-se eficiente na busca de soluções iniciais de projeto que atendessem aos critérios de projeto impostos nas otimizações através da definição das funções objetivo e restrições.

Tabela 3 - Comparação de resultados entre otimizações.

Carregamento	Tipo de Otimização	Restrição	Flexibilidade	Fração de Volume	Máx. Tsai-Wu Camada 1	Máx. Tsai-Wu Camada 2
Cisalhamento	Orientação	Sem restrição	0.2201	1	0.5071	0.5071
	Orientação e Topológica	Volume	0.5905	0.378	1.7165	1.9096
	Orientação e Topológica	Volume e Tsai-Wu	0.0199 (*)	0.3041	0.6192	0.6182
Carga Pontual	Orientação	Sem restrição	0.1106	1	2.0279	2.0348
	Orientação	Tsai-Wu	0.137	1	0.8109	0.7707
	Orientação e Topológica	Volume	0.1126	0.4617	1.253	2.7773
	Orientação e Topológica	Volume e Tsai-Wu	0.0356 (*)	0.5182	0.4104	0.8791
Pressão	Orientação	Sem restrição	0.2126	1	2.3363	0.8392
	Orientação	Tsai-Wu	0.2826	1	0.5454	1.15
	Orientação e Topológica	Volume	0.2729	0.4094	2.8289	2.5607
	Orientação e Topológica	Volume e Tsai-Wu	0.0863 (*)	0.39	1.0316	1.2105

(*) Nestes casos, a espessura da camada 2 é de 1.5 mm ao invés de 0.5 mm dos outros exemplos. Assim, a ordem de grandeza do valor de flexibilidade é diferente dos demais.

Todos os exemplos tinham como função objetivo a minimização da flexibilidade média, que também pode ser entendida como maximização da rigidez. As restrições de volume e critério de falha direcionavam o "objetivo" da otimização para variáveis conflitantes como rigidez e volume (também entendida como massa) e como volume e critério de falha.

Observa-se que os menores valores de flexibilidade foram encontrados através da otimização sem restrição, dado que a ausência de restrições permitia a minimização deste valor sem levar em conta outros critérios de projeto como volume e índice de falha.

Com a adição da restrição de volume que implica na redução de quantidade de material do componente, nota-se que a otimização não consegue atingir o mesmo valor de flexibilidade, como evidenciado pela Tabela 3 e por exemplo, comparando-se a Figura 69 com a Figura 71. Neste caso, o índice de falha tem seu valor aumentado, não satisfazendo ao critério de resistência do laminado. A restrição de volume se mostrou útil ao controlar a quantidade de material retirado na camada, no entanto, a adoção de valores mais livres para esta restrição, ou até mesmo a retirada completa da mesma da formulação pode ser considerada.

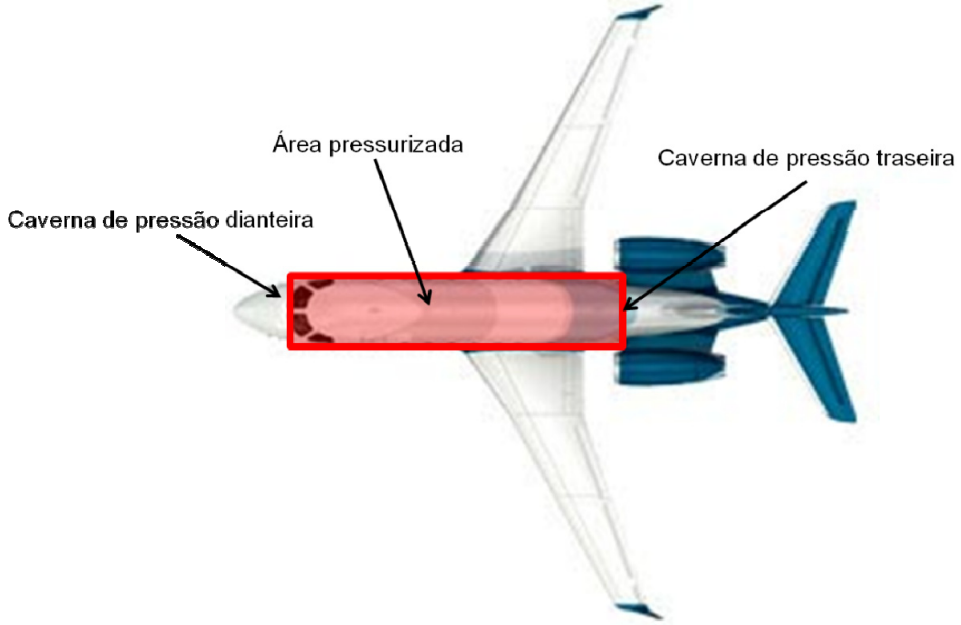
O emprego simultâneo das restrições de volume e critério de falha permitiu ao otimizador reduzir massa sem comprometer de forma significativa a rigidez e o índice de falha do laminado. A remoção de material dentro de um problema com restrição de critério de falha torna a otimização de difícil convergência, como evidencia o número de iterações necessárias para o resultado, por exemplo, na Figura 75. Para facilitar esta convergência, a espessura da camada em que era admitida remoção de material foi aumentada, de modo a reduzir o comportamento de instabilidade que é introduzido ao se remover material de forma abrupta no cálculo de tensões e consequentemente no cálculo do critério de falha (seções 5.3.1.3, 5.3.2.4 e 5.3.3.4). Embora no exemplo de carregamento de pressão com restrições de volume e critério de falha esta última restrição não tenha sido satisfeita, a otimização mostrou-se eficiente para guiar o projeto inicial desta configuração de laminado, ao obter uma solução de compromisso entre os três critérios de projeto.

Estes exemplos, considerando carregamentos no plano e fora dele, inclusive com comparações de resultado com a literatura, permitiram comprovar a aplicabilidade da metodologia no projeto inicial deste tipo de estruturas. Em seguida, na seção 5.4, é apresenta a aplicação desta metodologia em um caso de painel típico aeronáutico, com comparações de desempenho em relação à uma configuração "*baseline"* de painel.

5.4 Aplicação da otimização topológica em um painel típico aeronáutico

Como exemplo de aplicação da metodologia em um painel típico, será considerada a otimização de uma idealização de caverna de pressão plana. A fuselagem de uma aeronave pode ser considerada um vaso de pressão, e este tipo de estrutura é responsável por suportar as cargas de pressão impostas pelo diferencial de pressurização entre o interior de uma aeronave e seu exterior em altas altitudes.

Figura 111 - Exemplo de posicionamento das cavernas de pressão em uma aeronave.

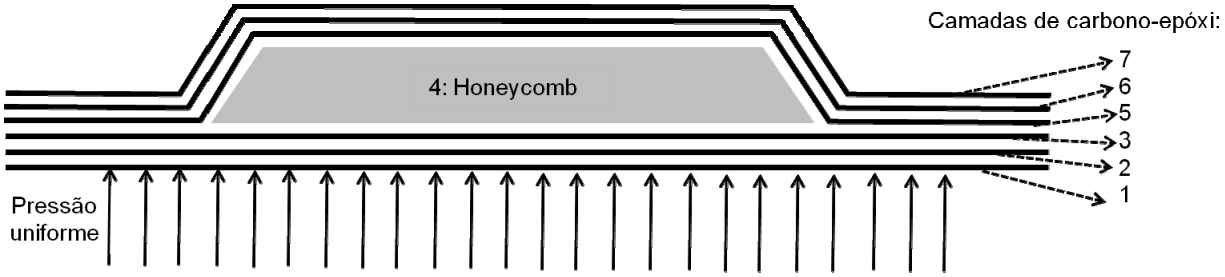


De aplicação mais comum na fuselagem dianteira em virtude do espaço restrito e instalação de sistemas que dificultam a utilização de painéis curvos, mais eficientes, painéis planos de material composto reforçados com "*honeycomb"* em seu interior costumam ser empregados nestes componentes. Os painéis compostos trazem para a caverna de pressão uma redução de peso e vantagens quanto à sua vida em fadiga e planos de manutenção, quando comparados com uma caverna projetada em materiais metálicos.

Considerou-se um formato construtivo típico de painel com núcleo reforçado em *"honeycomb"*, formado por uma região de laminado sólido, uma região onde o *"honeycomb"* é inserido dentro do laminado e uma região de transição entre as duas anteriores, a "rampa". A seção transversal deste tipo de painel é apresentado na

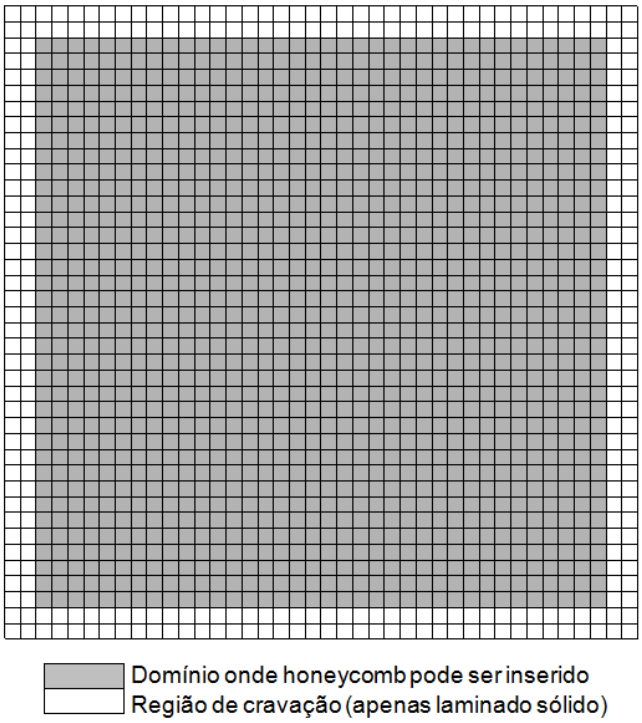
Figura 112, juntamente com a numeração de camadas considerada na apresentação dos resultados.

Figura 112 - Numeração de camadas adotadas no exemplo.



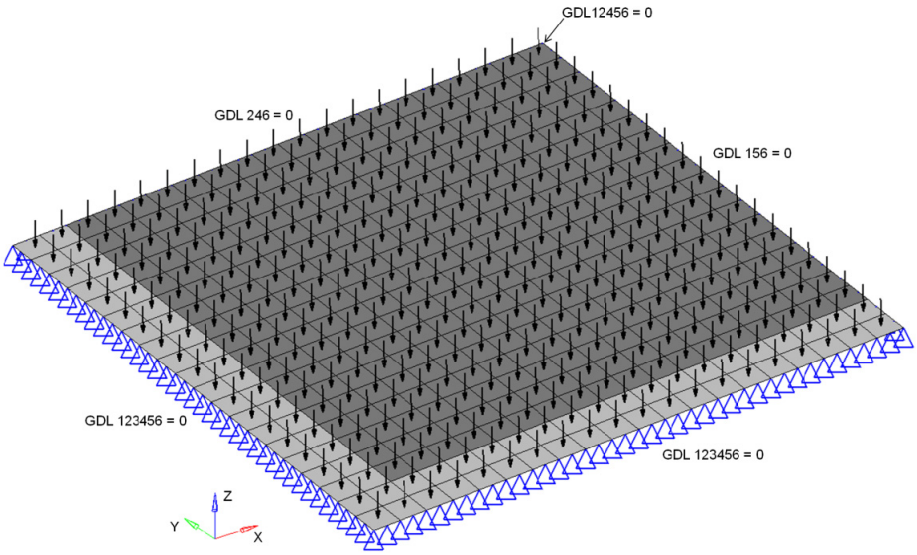
Foi adotada uma geometria quadrada para o painel, de modo a simplificar a aplicação da metodologia. Para representar a restrição de montagem destes painéis, definiu-se uma região onde o otimizador não pode inserir *"honeycomb"* no laminado. Esta restrição surge da necessidade da montagem deste painel na estrutura da fuselagem, feita por meio de cravações, geralmente nas bordas deste tipo de painéis. A Figura 113 ilustra a região de domínio otimizável, na camada 4 do empilhamento.

Figura 113 - Definição do domínio otimizável.



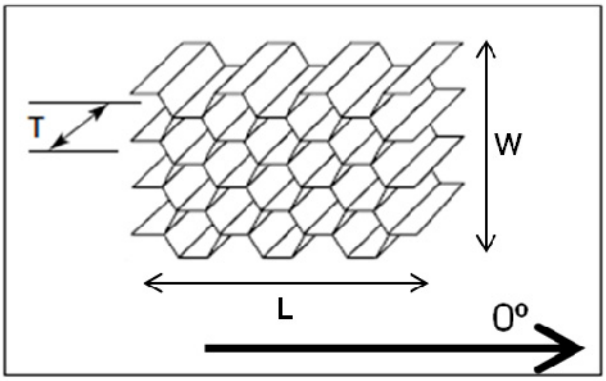
Por se tratar de uma estrutura em que o carregamento de pressurização é dominante em relação aos carregamentos de vôo, e por essa razão, ser a pressurização o caso de carga dimensionante da mesma, optou-se por aplicar a simetria no problema de otimização, considerando como domínio apenas um quarto do painel. A Figura 114 apresenta as condições de contorno adotadas neste domínio: simetria em duas arestas e engaste nas outras duas arestas.

Figura 114 - Condições de contorno e carregamentos aplicados em 1/4 do domínio (simétrico).



O *"honeycomb"* possui propriedades diferentes de rigidez em cada direção devido à sua própria geometria. Na apresentação dos resultados, a direção "L" do *"honeycomb"* será considerada como a orientação 0º da camada 4, alinhada ao vetor de orientação, como mostrado na Figura 115.

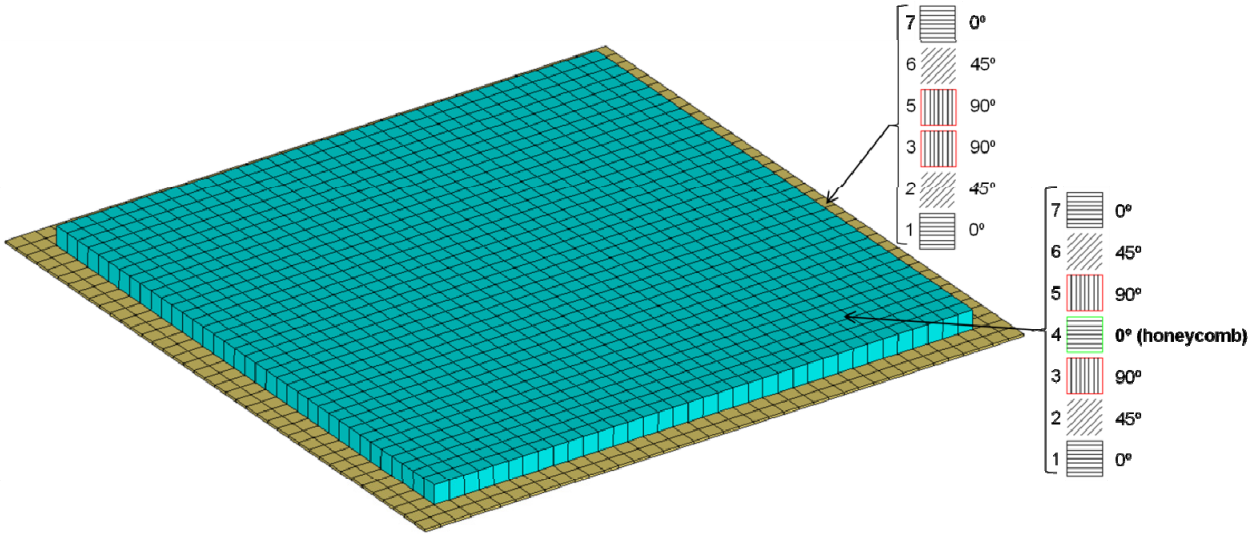
Figura 115 - Orientação de 0º do material do *"honeycomb"*; considerada alinhada com a direção "L", de maior rigidez do que a direção "W". Imagem adaptada de Hexcel (1999).



Adotou-se como material do laminado o par carbono-epóxi, com as propriedades mecânicas relacionadas no Apêndice A.3. Para o *"honeycomb"*, utilizou-se uma matriz hexagonal de fibra de aramida com resina fenólica, HRH-10 - 1/8 - 4, cujas propriedades são apresentadas no Apêndice 0.

Para comparação dos resultados do painel otimizado, adotou-se um painel como "*baseline"*, apresentado na Figura 116. O mesmo possui em suas camadas de carbono-epóxi uma espessura de 0.25 mm, empilhadas formando um laminado simétrico quasi-isotrópico. O *"honeycomb"* é empregado em toda a área do painel e tem espessura de 25.4 mm. É importante ressaltar que a espessura e número destas camadas são as mesmas adotas na otimização, de modo a permitir a comparação entre os painéis.

Figura 116 - Painel composto com *"honeycomb"* considerado como "*baseline"*.



O objetivo com a aplicação da metodologia de otimização neste tipo de estrutura é obter uma configuração ótima de empilhamento do laminado sólido e as melhores regiões para a utilização do *"honeycomb"*, visando a maior rigidez com o menor peso. Assim, o problema de otimização foi traduzido e então formulado como na equação (191), buscando a minimização da flexibilidade média ("*mean compliance*") sujeito a restrição de volume na camada 4 (*"honeycomb"*). As variáveis de projeto consideradas são:

- Orientações das fibras dentro de cada camada do laminado sólido (camadas 1, 2, 3, 5, 6 e 7);

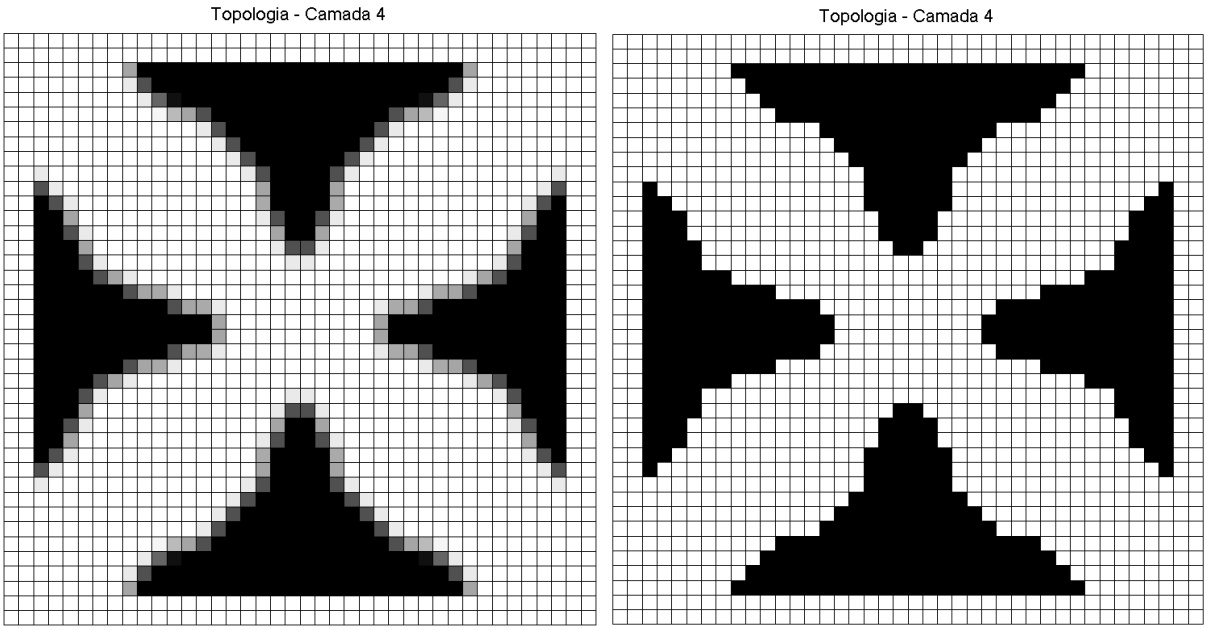
- Topologia da camada de *"honeycomb"* (camada 4), através do resultado de pseudo-densidades, onde são indicadas as regiões ótimas para o emprego do *"honeycomb"*;
- Orientação das células de *"honeycomb"* (alinhamento com a direção "L" do mesmo) dentro da camada 4.

Os ângulos admissíveis para a orientação das camadas de carbono são valores discretos de 0º, +/-15º , +/-30º, +/-45º, +/-60º, +/-75º e 90º, distintos em cada elemento e em cada camada.

$$\begin{aligned} &\underset{d\ ,\ v}{\text{Minimizar:}} \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad\qquad\quad V \le V_0 \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le d \le 1 \\ &\qquad\qquad\quad 0 \le v \le 1 \end{aligned} \tag{191}$$

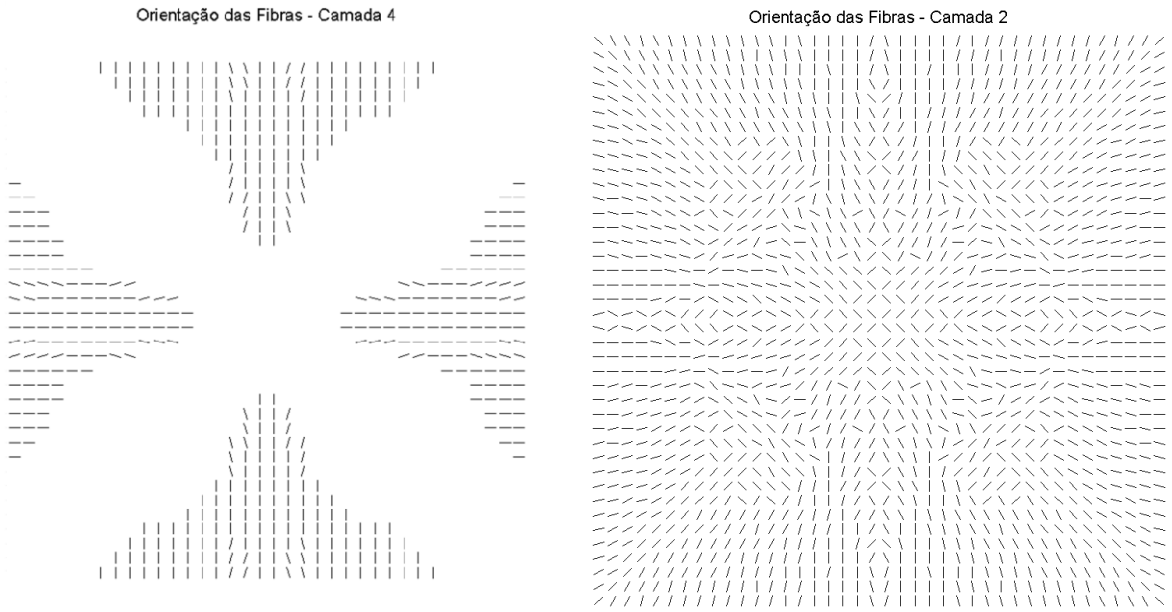
O resultado de pseudo-densidades antes e depois do pós-processamento é apresentado pela Figura 117. Esta topologia obtida indica quais são as regiões mais eficazes de utilização do *"honeycomb"* para a maximização da rigidez do painel.

Figura 117 - Resultados de pseudo-densidades para a camada 4 do painel, onde é inserido o *"honeycomb"*. Respectivamente à esquerda e à direita; sem e com, pós-processamento.



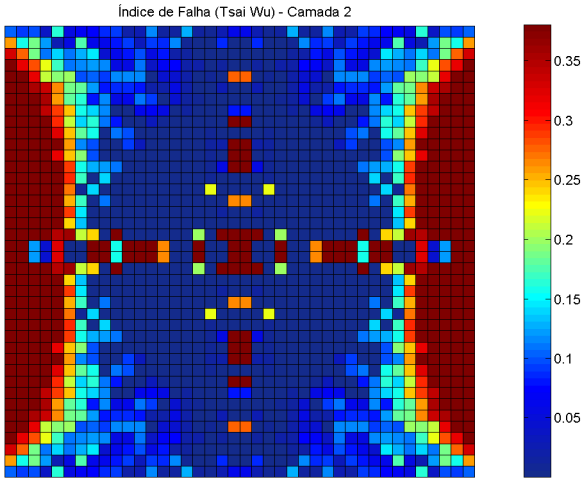
Na Figura 118 são apresentados dois resultados de orientação. À esquerda, é exibida a orientação das células de *"honeycomb"* (direção "L") dentro da camada 4, representada apenas nas regiões onde a topologia da Figura 117 indica a colocação de *"honeycomb"*. À direita é mostrada a orientação das fibras de uma das camadas do laminado sólido (camada 2). Os resultados obtidos nas camadas 1, 3, 5, 6 e 7 são semelhantes ao da camada 2 e devido a isso, não foram aqui apresentados.

Figura 118 - Resultado de orientação das células do *"honeycomb"* (direção "L"), à esquerda; orientação das fibras em uma das camadas de laminado sólido (camada 2) à direita.



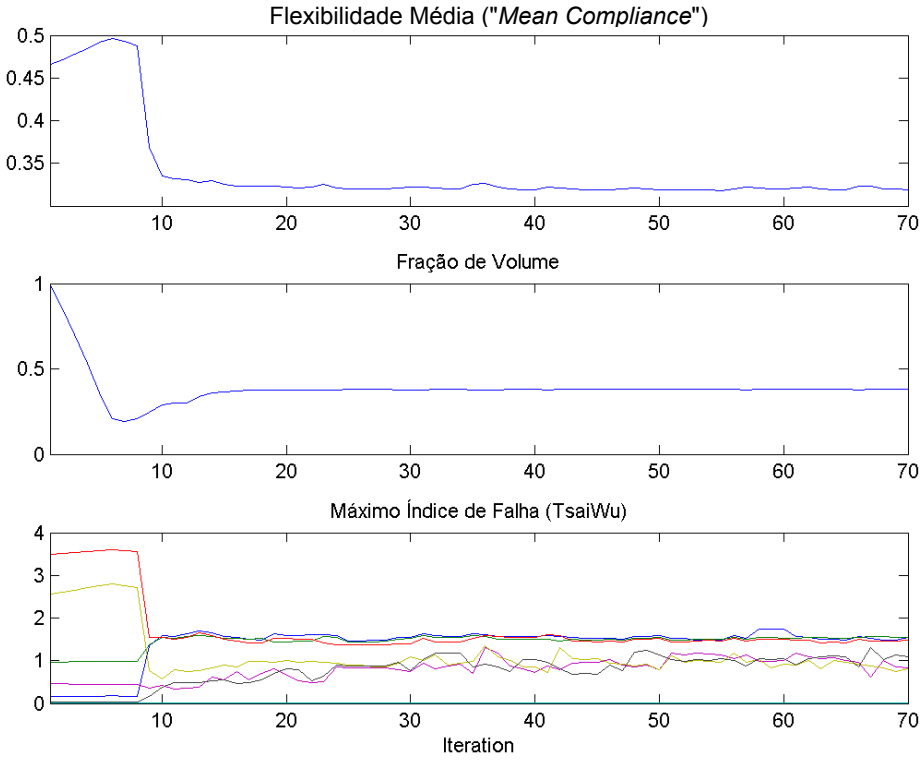
Em seguida, na Figura 119, são exibidos os valores de índice de falha (*Tsai-Wu*) encontrados na estrutura após a otimização com o resultado pós-processado, no caso, na camada 2 do laminado sólido, mesma camada em que foi apresentado o resultado de orientação das fibras.

Figura 119 - Índice de falha *Tsai-Wu* em uma das camadas de laminado sólido (camada 2).



Por fim, o histórico de evolução da otimização é apresentado na Figura 120. Os valores iniciais das variáveis apresentadas referem-se ao painel "*baseline*". Assim, nesta figura a comparação de rigidez e peso com o painel "*baseline*" torna-se evidente, sendo apresentada e discutida em detalhes ao final desta seção do texto.

Figura 120 - Histórico de evolução da otimização.



Adicionalmente, buscou-se avaliar a estrutura obtida através de uma otimização cuja formulação também contemplasse a restrição de critério de falha. Considerou-se um problema de otimização como descrito pela equação (192), com as mesmas variáveis de projeto e considerações do caso anterior, porém adicionando uma restrição de critério de falha *Tsai-Wu*.

$$\begin{aligned} &\underset{d,\nu}{\text{Minimizar}}: \quad C(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito à:} \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{p} \\ &\qquad s_{NP} = \left(\sum_{g=1}^{n_\sigma} s_g^{p_\sigma} \right)^{1/p_\sigma} \\ &\qquad V \le V_0 \\ &\qquad 0 \le d \le 1 \\ &\qquad 0 \le \nu \le 1 \end{aligned} \tag{192}$$

Em virtude do modelo de elementos finitos empregado ser um modelo simplificado, as "rampas" (regiões de transição de laminado sólido para reforçado com *"honeycomb"*) não são bem representadas. Assim, a principal fonte de concentrações de tensão, que por sua vez, levam às regiões críticas do ponto de vista de critério de falha não são avaliadas de maneira adequada. Como a análise da "rampa" é geralmente feita durante a fase de detalhamento do componente, o projeto conceitual não é necessariamente prejudicado por esta nuance.

No entanto, devido em parte à esta ausência de regiões de concentração de tensão, o otimizador chega em uma solução muito semelhante à encontrada no problema sem restrição de critério de falha para este caso de aplicação. Na Figura 121 e na Figura 122 é possível notar como o resultado pouco difere dos resultados anteriormente apresentados (Figura 117 e Figura 118, respectivamente).

Figura 121 - Resultados de pseudo-densidades com restrição de critério de falha para a camada 4 do painel, onde é inserido o *"honeycomb"*. Respectivamente à esquerda e à direita; sem e com, pós-processamento.

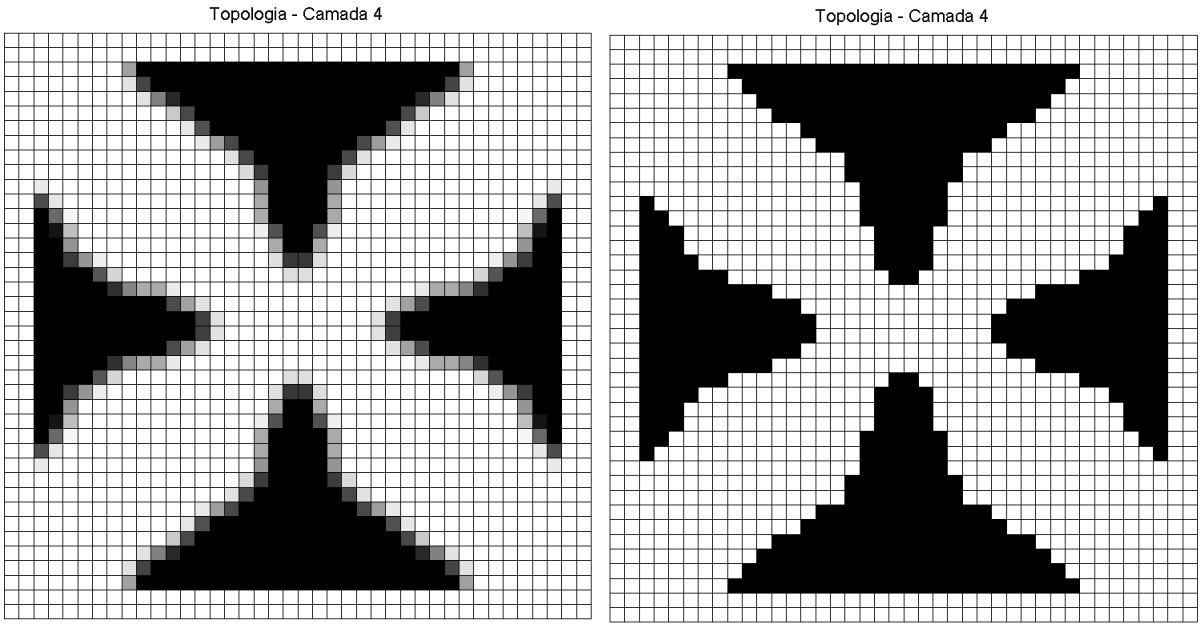
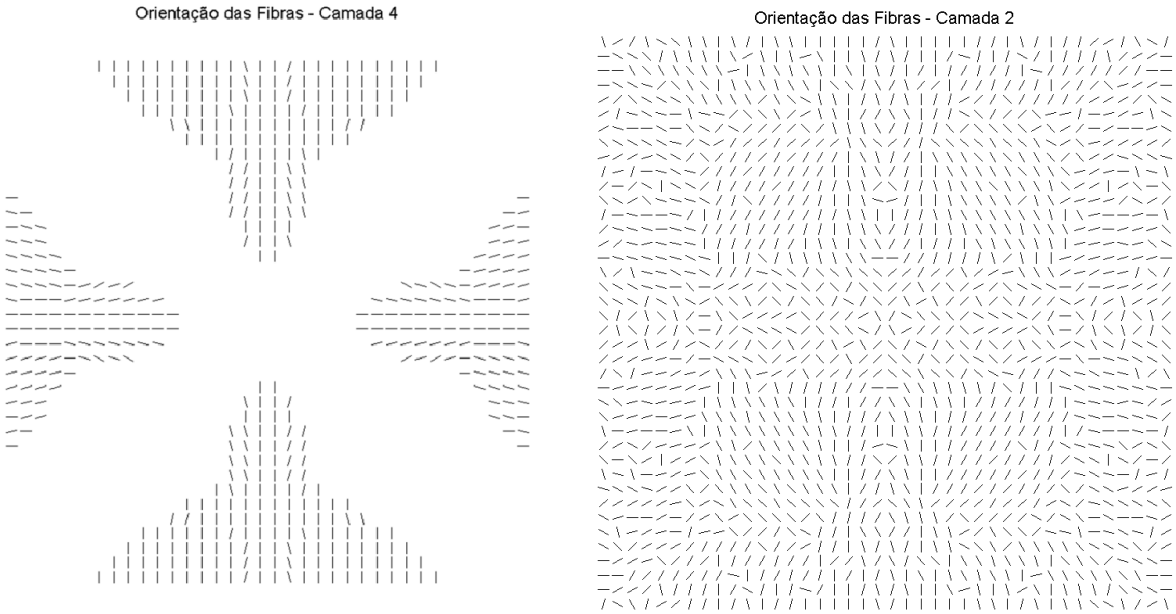


Figura 122 - Resultado de orientação das células do *"honeycomb"* (direção "L"), à esquerda; orientação das fibras em uma das camadas de laminado sólido (camada 2) à direita. Ambos com restrição de critério de falha.



Sugere-se, portanto, que não é necessária a utilização na fase de projeto conceitual da restrição de critério de falha para este tipo de aplicação. Isto em virtude do tipo de modelo de elementos finitos empregado não permitir capturar de forma detalhada as concentrações de tensão observadas nas "rampas" do laminado.

Logo, a discussão sobre os resultados apresentados nesta seção, feita a seguir, foi baseada no resultado da otimização sem restrição de critério de falha.

Observou-se através do resultado de topologia da camada de *"honeycomb"* (Figura 117) que o otimizador identificou como melhores regiões para colocação do *"honeycomb"* as regiões onde o máximo momento fletor é encontrado. No centro do painel, onde este esforço é reduzido, o ganho de inércia provocado pela inserção do *"honeycomb"* começa a não se tornar eficiente quando submetido a uma restrição de volume, fazendo com que a solução encontrada privilegiasse a utilização do *"honeycomb"* próximo das arestas do painel. A orientação das células de *"honeycomb"* (Figura 118, à esquerda) também foi de encontro a este conceito de estrutura, alinhando a direção de maior contribuição à rigidez do *"honeycomb"* (direção "L") no sentido de maiores esforços fletores do painel.

As orientações das fibras nas camadas de laminado sólido obtidas (Figura 118, à direita) buscaram de certa maneira complementar o emprego do *"honeycomb"*. As fibras se alinharam às direções principais de carga nas regiões em que o *"honeycomb"* não foi utilizado, como por exemplo, nas diagonais do painel. Além disso, o comportamento de alinhamento em "X" das orientações das fibras em uma faixa vertical e outra horizontal que se cruzam no meio do painel indicam que o emprego de um tecido de carbono seja mais eficiente que o emprego de fibras unidirecionais nestas regiões.

De maneira a comparar o desempenho da estrutura otimizada, a flexibilidade média ("*mean compliance"*) e a fração de volume ao final da otimização foram comparadas com as obtidas em um painel "*baseline"* típico, definido anteriormente nesta seção (Figura 116). A Tabela 4 sumariza os resultados que também podem ser lidos através da Figura 120.

Tabela 4 - Comparação de resultados obtidos através da metodologia de otimização.

	Flexibilidade	**Fração de Volume**	**Máximo *Tsai-Wu* no laminado**
"Baseline"	0.47	1	3.45
Otimizado	0.32	0.38	1.55
Variação	-46.1%	-62.1%	

Nota-se que mesmo com uma redução de cerca de 60% do volume de *"honeycomb"* utilizado, a flexibilidade é reduzida em cerca de 40%, o que se traduz em um aumento de rigidez da mesma ordem. É importante ressaltar que o valor de máximo *Tsai-Wu* foi apresentado apenas para uma comparação qualitativa. Observa-se uma redução do máximo *Tsai-Wu* encontrado no laminado após a otimização, no entanto, em função do nível de carga adotado em relação à quantidade de camadas do laminado consideradas, o mesmo é superior a 1 ao final das iterações. Isto indica a necessidade adição de camadas extras no laminado para o nível de carga que foi definido para o problema.

Este exemplo mostrou que as informações obtidas através da metodologia de otimização topológica ajudariam a direcionar o projeto conceitual deste tipo de estrutura, visando a maior rigidez possível com o menor peso.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo estudar duas técnicas de otimização aplicáveis a estruturas compósitas laminadas: otimização paramétrica e topológica.

Inicialmente foi apresentada a revisão bibliográfica do estado da arte em otimização de estruturas laminadas compósitas, levantando-se a teoria básica de materiais compósitos e sua modelagem estrutural. Foram definidas as formulações dos problemas de otimização paramétrica e topológica.

Comparações entre as metodologias de implementação da otimização paramétrica foram feitas, analisando-se à luz de critérios como desempenho do resultado, tempo necessário para obtenção da solução e ocorrência de mínimos locais, as vantagens e desvantagens dos algoritmos baseados em gradientes em relação ao algoritmo genético.

Como mostrado na seção 5.1.5, a metodologia de parametrização por ODM com algoritmo de otimização baseado em gradientes (MMA), foi escolhida como preferencial para otimização paramétrica. Esta escolha foi feita pela sua capacidade de gerar possíveis pontos ótimos com valores de função objetivo superiores aos outros métodos, por necessitar de um menor tempo de otimização para obtenção de um resultado com valor de função objetivo equivalente em relação aos outros métodos e também pela possibilidade de adoção de empilhamentos que incluam materiais isotrópicos e com número de camadas variável.

Uma série de resultados obtidos com a metodologia escolhida foram comparados com os de um projeto típico, sob diferentes condições de carregamento. Observou-se que, em todos os casos analisados, o ganho de função objetivo utilizando-se um conjunto de variáveis encontrado pelo otimizador resulta em projetos que superam, e de forma significativa, o desempenho obtido empregando-se configurações típicas de empilhamento, como a quasi-isotrópica.

Em seguida, a implementação de otimização topológica baseada em ODM foi aplicada em três casos de carregamento diferentes para o projeto de painéis laminados, envolvendo cisalhamento no plano, força pontual e pressão uniforme fora

do plano. Cada um destes tipos de carregamentos tiveram diferentes formulações de otimização aplicadas: apenas otimização de orientação das fibras; orientação e topologias das camadas; restrições de volume e critério de falha.

Como discutido na seção 5.3.4, de maneira consistente as estruturas otimizadas geraram configurações de laminados com características de rigidez e resistência superiores, sem penalidades desnecessárias na massa da estrutura. Além disso, os resultados obtidos de topologia e orientação das camadas são possíveis de fabricação em métodos construtivos atuais, variando-se por exemplo, o grau de detalhamento do pós-processamento e da interpretação da otimização em função da flexibilidade de cada método construtivo considerado.

Buscando-se exemplificar a aplicação da otimização topológica em um caso típico de otimização de painel aeronáutico reforçado exercitou-se o projeto de um painel laminado com núcleo em *"honeycomb"*, comparando-se os resultados de desempenho deste painel ao final da otimização com os valores encontrados em um painel de referência com configuração e empilhamento das lâminas típicos.

Através dos resultados apresentados na seção 5.4, entende-se que o otimizador identificou como melhores regiões para colocação do *"honeycomb"* as regiões onde o máximo momento fletor é encontrado, com a orientação das células de *"honeycomb"* alinhadas no sentido de maiores esforços fletores do painel. De maneira complementar, as orientações das fibras nas camadas de laminado sólido se alinharam às direções principais de carga nas regiões em que o *"honeycomb"* não foi utilizado, como por exemplo, nas diagonais do painel. Observou-se que mesmo com uma redução de cerca de 60% do volume de *"honeycomb"* utilizado, a flexibilidade foi reduzida em cerca de 40%, o que se traduziu em um aumento de rigidez da mesma ordem.

Comprova-se, portanto, que as ferramentas de otimização paramétrica e topológica apresentadas nesta dissertação são importantes para a obtenção de projetos de desempenho superior, com limitações claras, por exemplo, de massa da estrutura. As mesmas mostraram-se aplicáveis em casos reais de aplicação, reduzindo a complexidade da obtenção de um ponto de partida otimizado para o projeto estrutural.

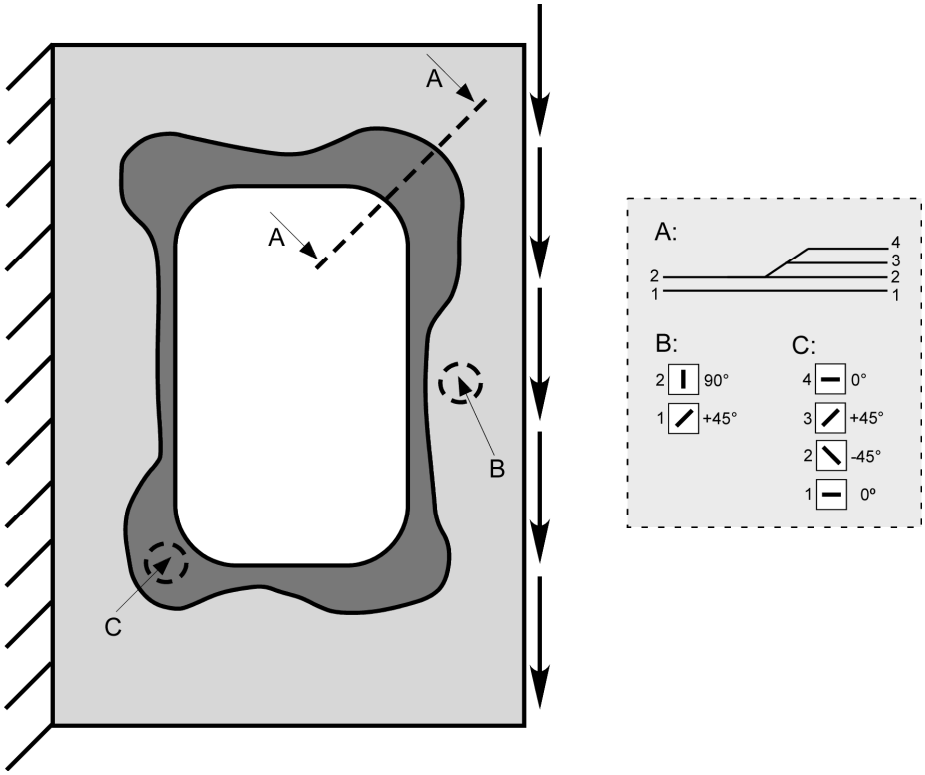
6.2 Trabalhos Futuros

O autor durante o desenvolvimento e aplicação da metodologia de otimização identificou oportunidades de trabalhos futuros a serem explorados, relacionados a seguir. O primeiro deles, seria a aplicação da otimização topológica de painéis laminados buscando o projeto conceitual ótimo do empilhamento das lâminas em uma abertura típica de fuselagem de aeronaves ("*cutout*", como conhecida em inglês). Este tipo de estrutura é necessária para o posicionamento de portas e janelas na fuselagem, e é submetida principalmente a esforços de cisalhamento provenientes das cargas de vôo e também de pressão, proveniente da pressurização da cabine. Estes esforços são críticos para as bordas da abertura, que limitam a vida em fadiga da aeronave e muitas vezes também o tamanho desta abertura.

A aplicação da metodologia de otimização, como representado de forma esquemática na Figura 123, permitiria definir as orientações ótimas das lâminas, além da quantidade de camadas e suas orientações nas regiões de reforço das bordas da abertura. As condições de contorno e carregamentos para o modelo poderiam ser resultado de uma simplificação da estrutura, como representado na Figura 123, como também poderiam ser retiradas a partir de um modelo global da fuselagem, empregando por exemplo, deslocamentos forçados nos limites do painel a ser otimizado.

Outro estudo de aplicação da metodologia poderia ser feito para o caso de painéis de revestimento da asa de aeronaves. No entanto, uma possibilidade adicional seria a implementação de uma função que determinasse os coeficientes aeroelásticos da estrutura resultante, permitindo ao projetista considerar por exemplo, restrições de rigidez aeroelástica. Isto evitaria configurações que levassem a ocorrência de fenômenos de instabilidade, como o "*flutter*", empregando uma distribuição de material otimizada que leva em conta este tipo de restrição de projeto. Este seria um estudo de partida para otimizações multidisciplinares mais completas, envolvendo estruturas compósitas laminadas, requisitos aerodinâmicos e de desempenho, carga máxima transportada, entre outros parâmetros dependentes da configuração estrutural e aerodinâmica.

Figura 123 - Representação esquemática da otimização topológica em painel compósito laminado, aplicada em uma abertura típica de fuselagem ("*cutout*").



REFERÊNCIAS

ABAQUS. Abaqus 6.10 Online Documentation: Analysis User's Manual. **Dassault Systèmes**, 2010a.

ABAQUS. Abaqus 6.10 Online Documentation: Theory Manual. **Dassault Systèmes**, 2010b.

AHMAD, S.; IRONS, B.; ZIENKIEWICZ, O. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, p. 419-451, 1970.

ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, **Journal of Computational Physics**, v. 194, p. 363-393, 2004.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BELBLIDIAA, F.; LEE, J.E.B.; RECHAK, S.; HINTON, E. Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model. **Advances in Engineering Software***,* v. 32, p. 159-168, 2001.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, v. 1, p.193-202, 1989.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization:** Theory, Methods and Applications. New York, U.S.A.: Springer Verlag, 2003.

BLACK, S. Getting to know "Black Aluminum", **Modern Machine Shop**, October, 2008. Disponível em: <http://www.mmsonline.com/articles/getting-to-know-black-aluminum>. Acesso em: 12 out. 2013.

BOHRER, R. Z. G.; DE ALMEIDA, S. F. M.; DONADON, M. V. Optimization of composite plates subjected to buckling and small mass impact using lamination parameters. **Composite Structures**, v. 120, p. 141-152, 2015.

BRUGGI, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 36, n. 2, p. 125-141, 2008.

BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering***,* v. 190, p. 3443-3459, 2001.

BRUYNEEL, M. SFP-a new parameterization based on shape functions for optimal material selection: application to conventional composite plies. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 1, p. 17–27, 2011.

BRUYNEEL, M.; FLEURY, C. Composite structures optimization using sequential convex programming. **Advances In Engineering Software**, v. 33, n. 7-10, p. 697-711, 2002.

BRUYNEEL, M.; BEGHIN, C.; CRAVEUR, G.; GRIHON, S.; SOSONKINA, M. Stacking sequence optimization for constant stiffness laminates based on a continuous optimization approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, n. 6, p. 783-794, 2012.

CHENG, G.; JIANG, Z. Study on topology optimization with stress constraints. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 20, n. 2, p. 129-148, 1992.

CHENG, G. D.; GUO, X. Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, v. 13, n. 4, p. 258-266, 1997.

CHU, D.; XIE, Y.; HIRA, A.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 21, p. 239-251, 1996.

COMPOSITES WORLD. The Plane in Spain. **High Performance Composites**, 6915 Valley Ave., Cincinnati, OH 45244 - USA, jan. 2012. Disponível em: <http://www.compositesworld.com/articles/the-plane-in-spain>. Acesso em: 12 out. 2012.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

DUYSINX, P.; BENDSOE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, v. 43, n. 8, p. 1453-1478, 1998.

ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review. **Applied Mechanics Reviews**, v. 54, p. 331-390, 2001.

ESCHENAUER, H. A.; KOBELEV, V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. **Structural optimization**, v.8, p. 42-51, 1994.

GAO, T.; ZHANG, W.; DUYSINX, P. A bi-value coding parameterization scheme for the discrete optimal orientation design of the composite laminate. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, v. 91, n. 1, p. 98-114, 2012.

GASBARRI, P.; CHIWIACOWSKY, L. D.; VELHO, H. F. DE C. A hybrid multilevel approach for aeroelastic optimization of composite wing-box. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 39, n. 6, p. 607-624, 2009.

GUEST, J. K.; ASADPOURE, A.; HA, S. H. Eliminating beta-continuation from heaviside projection and density filter algorithms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 44, n. 4, p. 443-453, 2011.

GUEST, J.; PREVOST, J.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238-254, 2004.

GROENWOLD, A.; HAFTKA, R. Optimization with non-homogeneous failure criteria like tsai-wu for composite laminates. **Structural And Multidisciplinary Optimization**, v. 32, p. 183-190, 2006.

GÜRDAL Z.; HAFTKA R. T.; HAJELA P. **Design and optimization of laminated composite materials**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.

HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. A new approach to variable-topology design using a constraint on the perimeter. **Structural optimization***,* v. 11, p. 1-12, 1996.

HEXCEL. **HexWeb Honeycomb Attributes and Properties**. Technical Literature from Hexcel Composite Materials, 1999.

HVEJSEL, C. F.; LUND, E. Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.43, p. 811-825, 2011.

HVEJSEL, C. F.; LUND, E.; STOLPE, M. Optimization strategies for discrete multi-material stiffness optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.44, p. 149-163, 2011.

IJSSELMUIDEN, S. T.; ABDALLA, M. M.; GURDAL, Z. Implementation of strength-based failure criteria in the lamination parameter design space. **AIAA Journal**, v. 46, n. 7, p. 1826-1834, 2008.

JOG, C. S., HABER, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering**, v. 130, n. 3-4, p. 203-226, 1996.

KAUFMANN, M.; ZENKERT, D.; WENNHAGE, P. Integrated cost/weight optimization of aircraft structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, n. 2, p. 325-334, 2010.

KENNEDY, G. J.; MARTINS, J. R. R. A. A laminate parameterization technique for discrete ply-angle problems with manufacturing constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 2, p. 379-393, 2013.

KERE, P.; KOSKI, J. Multicriterion stacking sequence optimization scheme for composite laminates subjected to multiple loading conditions. **Composite Structures**, v. 54, p. 225-229, 2000.

KHOSRAVI, P.; SEDAGHATI, R. Design of laminated composite structures for optimum fiber direction and layer thickness, using optimality criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, n. 2, p. 159-167, 2008.

KIM, H. A.; KENNEDY, D.; GUERDAL, Z. Special issue on optimization of aerospace structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 36, n. 1, 2008.

KIRSCH, U. On singular topologies in optimum structural design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 2, n. 3, p. 133-142, 1990.

KIYONO, C. Y. **Projeto de Transdutores Piezocompósitos de Casca Multi-Camada utilizando o Método de Otimização Topológica**. 2012. *Tese (Doutorado)* - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

LE, C.; NORATO, J.; BRUNS, T.; HA C.; TORTORELLI, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 605-620, 2010.

LIU, B.; HAFTKA, R. Single-level composite wing optimization based on flexural lamination parameters. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1-2, p. 111–120, 2004.

LUND, E. Buckling topology optimization of laminated multi-material composite shell structures. **Composite Structures**, v. 91, n. 2, p. 158-167, 2009.

MARINUCCI, G. **Materiais Compósitos Poliméricos: Fundamentos, Tecnologia e Aplicações**. [S.l.: s.n.], 2012. 103 p. Apostila para disciplina de pós-graduação do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, TNM-5796 - Materiais Compósitos Poliméricos.

NEUFELD, D.; BEHDINAN, K.; CHUNG, J. Aircraft wing box optimization considering uncertainty in surrogate models. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, n. 5, p. 745-753, 2010.

NIU, M. C. **Airframe Stress Analysis and Sizing**. Los Angeles: Hong Kong Conmilit Press, 1999.

NIU, M. C. **Airframe Structural Design:** Practical Design Information and Data on Aircraft Structures. [S.l.]: Adaso/Adastra Engineering Center, 2006.

PETERSSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 41, p. 1417-1434, 1998.

RAIS-ROHANI, M.; LOKITS, J. Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 34, n.1, p. 75-90, 2007.

REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. Oxford, U.K.: Oxford University Press, 2004.

ROZVANY, G.; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. New optimality criteria methods: forcing uniqueness of the adjoint strains by corner-rounding at constraint intersections. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 4, n. 3, p. 244-246, 1992.

SEATTLEPI. **Airbus starts making first composite barrel for A350 XWB**. Seattle, USA. 2010. Disponível em: <http://blog.seattlepi.com/aerospace/2010/12/07/airbus-starts-making-first-composite-barrel-for-a350-xwb>. Acesso em: 12 out. 2013.

SEIBEL, M.; GEIER, B.; ZIMMERMANN, R.; ESCHENAUER, H. Optimization and experimental investigations of stiffened, axially compressed CFRP-panels. **Structural Optimization**, v. 15, n. 2, p. 124-131, 1998.

SEO, Y. D.; KIM, H.J.; YOUN, S. K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, p. 1618-1640, 2010.

SIGMUND, O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. **International Journal of Solids and Structures***,* v. 31, p. 2313-2329, 1994.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization***,* v*. 33*, p. 401-424, 2007.

SIGMUND, O. On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization. **Structural And Multidisciplinary Optimization**, v. 43, n. 5, p. 589-596, 2011.

SORENSEN, S. N.; LUND, E. Topology and thickness optimization of laminated composites including manufacturing constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 2, p. 249-265, 2013.

SORENSEN, S. N.; SORENSEN, R.; LUND, E. DMTO - a method for Discrete Material and Thickness Optimization of laminated composite structures". **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 1, p. 25-47, 2014.

SPALLINO, R.; RIZZO, S. Multi-objective discrete optimization of laminated structures. **Mechanics Research Communications**, v. 29, n. 1, p. 17-25, 2002.

STEGMANN, J. **Analysis and optimization of laminated composite shell structures**. Aalborg University, Department of Mechanical Engineering, 2004.

STEGMANN, J.; LUND, E. Discrete material optimization of general composite shell structures. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, v. 62, n. 14, p. 2009-2027, 2005.

SUN, C. T. **Mechanics of Aircraft Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 359-373, 1987.

SVANBERG, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. **Siam Journal on Optimization**, v. 12, n. 2, p. 555-573, 2002.

TOPAL, U. Multiobjective optimization of laminated composite cylindrical shells for maximum frequency and buckling load. **Materials & Design**, v. 30, n. 7, p. 2584-2594, 2009.

TSAI, S. W.; PAGANO, N. J. Invariant properties of composite materials. In: Tsai, SW (ed) Composite materials workshop, vol. 1 of Progress in material science. **Technomic Publishing Co.**, p. 233-253, 1968.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications**. New York, EUA: McGraw-Hill, 1984.

WANG, K.; KELLY, D.; DUTTON, S. Multi-objective optimisation of composite aerospace structures. **Composite Structures**, v. 57, p. 141-148, 2002.

WENNBERG, D.; STICHEL, S. Multi-functional design of a composite high-speed train body structure". **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, n. 3, p. 475-488, 2014.

ZEIN, S.; COLSON, B.; GRIHON, S. A primal-dual backtracking optimization method for blended composite structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, n. 5, p. 669-680, 2012.

ZHANG Y. X.; YANG, C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 88, p. 147-157, 2009.

APÊNDICE A - MATERIAIS E MÉTODOS

A.1 Métodos construtivos

Materiais compósitos caracterizam-se pela composição de dois tipos de materiais, a fibra e a matriz. O processo de fabricação é responsável por combinar estes dois tipos de materiais em um formato desejado, passando pela impregnação da matriz na resina. Esta impregnação pode ocorrer durante a fabricação (sistema de impregnação na fabricação) ou antes da mesma (sistema pré-impregnado).

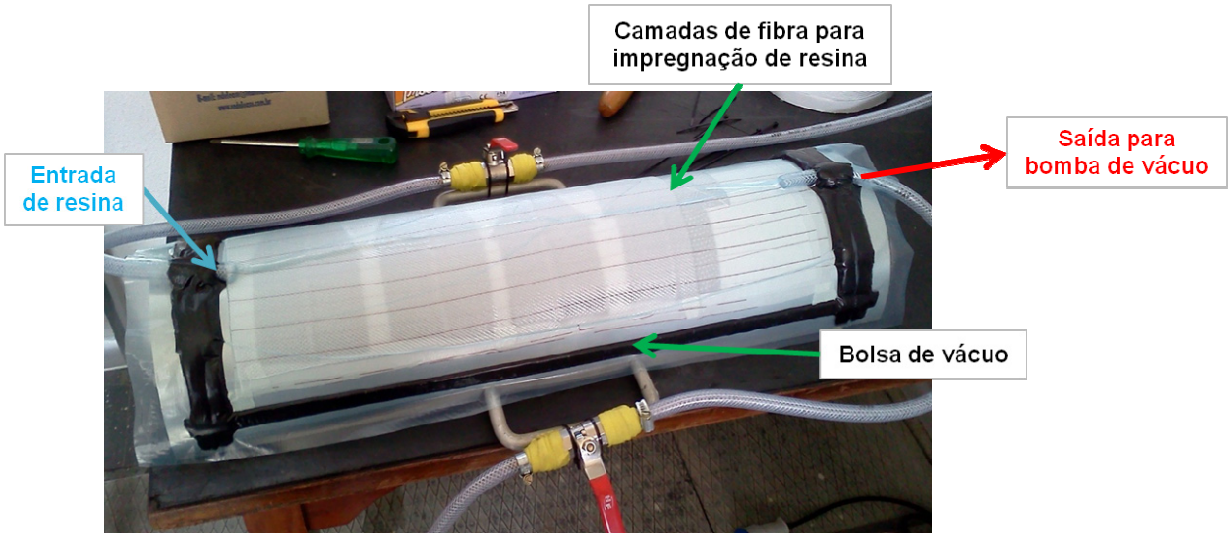
Em seguida, a peça passa pelo processo de cura da matriz, onde exposta aos agentes de cura adicionados à resina e à temperaturas e pressões (dependendo do tipo de matriz), observa-se a formação de arranjos tridimensionais nas ligações moleculares da matriz. É neste processo que o material compósito assume a sua "forma" e as propriedades mecânicas desejadas. A reação de cura da matriz é um processo altamente exotérmico, onde a peça é submetida a altas temperaturas. Assim, o molde da peça deve ser preparado, e possíveis tensões térmicas resultantes induzidas no material avaliadas antes da execução do processo de cura.

Existem uma série de processos diferentes dentro de cada tipo de sistema de impregnação. Uma revisão abrangente e cuidadosa de métodos de fabricação é apresentada em Marinucci (2012). Nesta seção será feita uma breve revisão de alguns processos aplicados na indústria aeronáutica.

Dentro do sistema de impregnação na fabricação, um dos primeiros processos que surgiram e um dos mais populares é a laminação manual. A fibra é depositada sobre um molde aberto e um operador é responsável por impregnar a mesma com a matriz polimérica (popularmente conhecida como resina). Esta impregnação é auxiliada por roletes metálicos, que promovem a compactação das fibras, retirada de ar e uma melhor impregnação da matriz. No entanto, a qualidade da peça e propriedades mecânicas resultantes são muito dependentes da experiência do operador e do cuidado na impregnação da matriz. Pela grande praticidade e baixo custo, este processo ainda é muito utilizado, porém encontra-se em extinção dentro da indústria aeronáutica pela sua baixa repetibilidade e grande dependência do processo na qualidade do material fabricado.

Um segundo processo baseado no sistema de impregnação na fabricação é a infusão à vácuo. As fibras são depositadas sobre um molde juntamente com mantas para auxiliar a impregnação da resina e a desmoldagem após a cura. Neste caso as fibras são impregnadas pela matriz através da sucção da matriz pelo vácuo formado dentro da bolsa de vácuo. A bolsa de vácuo é um filme plástico especial responsável por "fechar" o material a ser impregnado sobre o molde. A Figura 124 mostra um exemplo de processo de infusão à vácuo.

Figura 124 - Exemplo de processo de infusão à vácuo.



Este processo agrega uma maior repetibilidade e baixa influência do operador sobre a qualidade da peça fabricada. O cuidado passa pela verificação da geração de vácuo dentro do molde sem vazamentos de pressão, pela não admissão de bolhas de ar dentro da bolsa, que se tornam vazios indesejados dentro da matriz polimérica ao final da impregnação e pelo tempo de impregnação do reforço e do núcleo mais reduzido possível.

Como exemplos típicos dentro do sistema pré-impregnado, encontra-se o "*automated tape layering*" (ATL) e o "*fiber placement*" (FP). Ambas são tecnologias de manufatura de materiais compósitos que consistem na deposição automatizada de fibras pré-impregnadas com matriz sobre moldes que podem ser planos, curvos ou com geometrias complexas. Por estarem pré-impregnadas com a matriz, estes tipos de fibras devem ser mantidos em baixas temperaturas para evitar o início do processo de cura antes mesmo da sua deposição sobre o molde. Geralmente são

conservadas em grandes câmaras frigoríficas, e passam por um controle rígido de temperaturas e tempos expostos ao ambiente.

A deposição das fibras é controlada por computador, garantindo repetibilidade e o controle da fabricação das peças com variedades de ângulos de fibras, posicionamento e topologias. Após este processo, o empilhamento é curado de modo a constituir o laminado, geralmente em grandes autoclaves com pressões e temperaturas controladas.

A diferença entre o ATL e o FP consiste na maneira de depósito da fibra pré-impregnada sobre o molde, e consequentemente, na flexibilidade de projeto da peça resultante. O ATL deposita tiras ("*tapes"*) de material enquanto o FP deposita fios ("*tows*") em bandas, cujas distâncias entre os fios pode ser variável. Ambas tecnologias permitem o controle via computador das orientações de fibras depositadas, porém o FP permite uma maior flexibilidade no projeto das orientações, permitindo inclusive variações de orientação dentro de uma mesma lâmina do laminado. A Figura 125 apresenta um exemplo de máquina de FP em operação para produção do cone de cauda da fuselagem traseira da aeronave Airbus A350 XWB.

Figura 125 - Exemplo de máquina de "*fiber placement"* produzindo o cone de cauda do Airbus A350 XWB.

Fonte: (SEATTLEPI, 2010).

A.2 Propriedades mecânicas do laminado carbono-epóxi

O laminado considerado emprega lâmina de fita unidirecional prepreg da *Toray Composites (America)*, Toray T700GC-12K-31E/#2510 (P707AG-15), sistema de fibra de reforço de Carbono (150g/m²) com matriz de Epóxi. Estas propriedades foram obtidas a partir do relatório "*A-Basis and B-Basis Design Allowables for Epoxy-Based Prepeg Toray T700GC-12K-31E/#2510 Unidirectional Tape*", publicado pela AGATE ("*Advanced General Aviation Transport Experiments*") do NCAMP ("*National Center for Advanced Materials Performance"*) que pertence à Wichita State University dos Estados Unidos. O programa de experimentos ao qual estes resultados pertencem fazem parte de uma iniciativa da FAA ("*Federal Aviation Administration*") conjunta com a NASA ("*National Aeronautics and Space Administration"*) de prover um centro de validação e certificação de qualidade de materiais compósitos e avançados a serem aplicados na indústria aeronáutica comercial e militar.

Os laminados ensaiados nesse programa que foram considerados para as propriedades aqui empregadas possuem uma porcentagem de vazios de até 5%, volume de fibra entre 50% e 60%, conteúdo de resina entre 30% e 40% em peso, espessura das camadas entre 0,14 mm e 0,18 mm, e densidade do compósito entre 1,48 g/cm³ e 1,57 g/cm³. Para os ensaios no eixo da fibra e transversal a ele, empregou-se a norma D3039-5 e para o ensaio a cisalhamento, a norma D5379-93. Para este trabalho, foram tomados os valores das propriedades "*B-Basis*", que representam o intervalo de confiança de 95% do décimo percentil da população, medidas na temperatura de 75ºF, fabricadas pelo processo de "*vacuum bagging"*. Um resumo das propriedades mecânicas empregadas é apresentado na Tabela 5.

Tabela 5 - Propriedades do laminado carbono-epóxi considerado.

Propriedade	Valor
Módulo elasticidade a tração - Eixo 1 (E_1^t)	125,55 GPa
Resistência a tração - Eixo 1 (F_1^t)	1911,97 MPa
Módulo elasticidade a tração - Eixo 2 (E_2^t)	8,41 GPa
Resistência a tração - Eixo 2 (F_2^t)	42,80 MPa
Módulo elasticidade a compressão - Eixo 1 (E_1^c)	112,27 GPa
Resistência a compressão - Eixo 1 (F_1^c)	1280,95 MPa
Módulo elasticidade a compressão - Eixo 2 (E_2^c)	10,14 GPa
Resistência a compressão - Eixo 2 (F_2^c)	180,29 MPa
Coeficiente de Poisson (ν_{12})	0,309
Módulo de cisalhamento no plano (G_{12})	4,23 GPa
Resistência ao cisalhamento no plano (F_{12})	145,52 MPa

Segundo o próprio relatório dos ensaios, os limites de deformação à tração e compressão podem ser aproximados por meio de uma relação linear com a tensão (considerando-se a resistência e o módulo de elasticidade do ensaio e a relação $F = E\varepsilon$). Para o caso do limite de deformação a cisalhamento (ε_{adm}^{12}), em virtude do comportamento não linear da curva tensão-deformação, a relação linear não é praticada e então a aproximação adotada foi utilizar o valor de deformação máximo de 5%, conservativo em relação à curva do material. Um resumo dos valores de deformação limite empregados é apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 - Valores de deformação limite considerados para o laminado carbono-epóxi.

Propriedade	Valor
Limite deformação a tração - Eixo 1 ($\varepsilon_{adm}^{t,1}$)	1,52%
Limite deformação a tração - Eixo 2 ($\varepsilon_{adm}^{t,2}$)	0,51%
Limite deformação a compressão - Eixo 1 ($\varepsilon_{adm}^{c,1}$)	1,14%
Limite deformação a compressão - Eixo 2 ($\varepsilon_{adm}^{c,2}$)	1,78%
Limite deformação a cisalhamento (ε_{adm}^{12})	5,00%

A.3 Propriedades do carbono-epóxi para otimização topológica

As propriedades do laminado de fibra de carbono com matriz epóxi considerada para os exemplos de otimização topológica são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 - Propriedades mecânicas do laminado carbono-epóxi na otimização topológica.

Propriedade	Valor
Módulo elasticidade a tração - Eixo 1 (E_1^t)	135 GPa
Resistência a tração - Eixo 1 (F_1^t)	1500 MPa
Módulo elasticidade a tração - Eixo 2 (E_2^t)	10 GPa
Resistência a tração - Eixo 2 (F_2^t)	50 MPa
Resistência a compressão - Eixo 1 (F_1^c)	1200 MPa
Resistência a compressão - Eixo 2 (F_2^c)	250 MPa
Coeficiente de Poisson (ν_{12})	0,30
Módulo de cisalhamento no plano (G_{12})	5 GPa
Resistência ao cisalhamento no plano (F_{12})	70 MPa
Módulo de cisalhamento no plano XZ (G_{13})	5 GPa
Módulo de cisalhamento no plano YZ (G_{23})	3 GPa

A.4 Propriedades mecânicas do *"honeycomb"*

Para as propriedades mecânicas do *"honeycomb"* considerou-se uma matriz hexagonal de fibra de aramida com resina fenólica, HRH-10 - 1/8 - 4, cujos valores são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 - Propriedades mecânicas do *"honeycomb"* considerado na otimização [Hexcel, 1999].

Propriedade	Valor
Módulo elasticidade à tração - Eixos 1 e 2 ($E_1 = E_2$)	100 Pa (*)
Módulo elasticidade à compressão - Eixo 3 (E_3)	193 MPa
Módulo de cisalhamento no plano (G_{12})	100 Pa (*)
Módulo de cisalhamento no plano XZ (G_{13})	59.3 MPa
Módulo de cisalhamento no plano YZ (G_{23})	32.4 MPa

(*) O material *"honeycomb"* caracteriza-se por não possuir rigidez significativa nestas direções. Seu valor foi mantido baixo, porém diferente de zero, para evitar singularidades numéricas.

APÊNDICE B - VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

B.1 Placa isotrópica sem reforçadores

Um levantamento na literatura buscou resultados de carga crítica de flambagem analíticos ou empíricos. Sun (1998) apresenta um misto entre resultados analíticos e empíricos, dependendo das condições de contorno e carregamentos à que a placa está sujeita. Todos valores obedecem a uma mesma equação (193), sendo que um fator k é alterado conforme as condições de contorno e tipo de carregamentos.

$$N_{cr} = k\frac{\pi^2 D}{b^2} \tag{193}$$

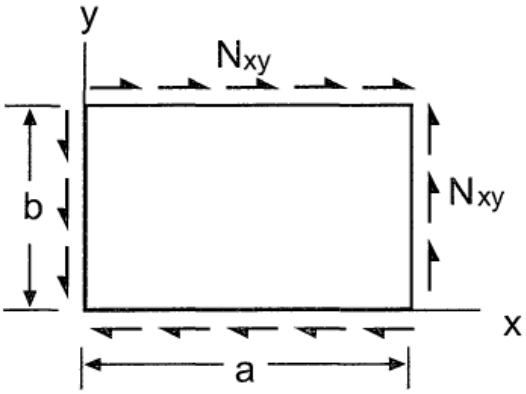
onde k é o coeficiente de flambagem, b a largura da placa (menor dimensão no plano da placa, 500mm nos casos aqui analisados) e D, a rigidez flexional da placa, é dada pela equação (194).

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{194}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material (70GPa em todas as análises de placa isotrópica), ν o coeficiente de Poisson do material (considerado 0,25 em virtude da validade dos valores de k disponíveis) e t a espessura da placa (considerada 2mm em todas as análises da placa isotrópica).

Carregamentos de cisalhamento

Figura 126 - Placa retangular sujeita a carregamentos de cisalhamento. Adaptado (SUN, 1998).



Para o caso da placa isotrópica sujeita a carregamentos de cisalhamento (Figura 126), foram consideradas as quatro arestas da placa simplesmente apoiadas (condição de contorno de apoio simples). Nesta situação, os valores de k nas diferentes condições de dimensões são dadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Valores do coeficiente de flambagem para cisalhamento (SUN, 1998).

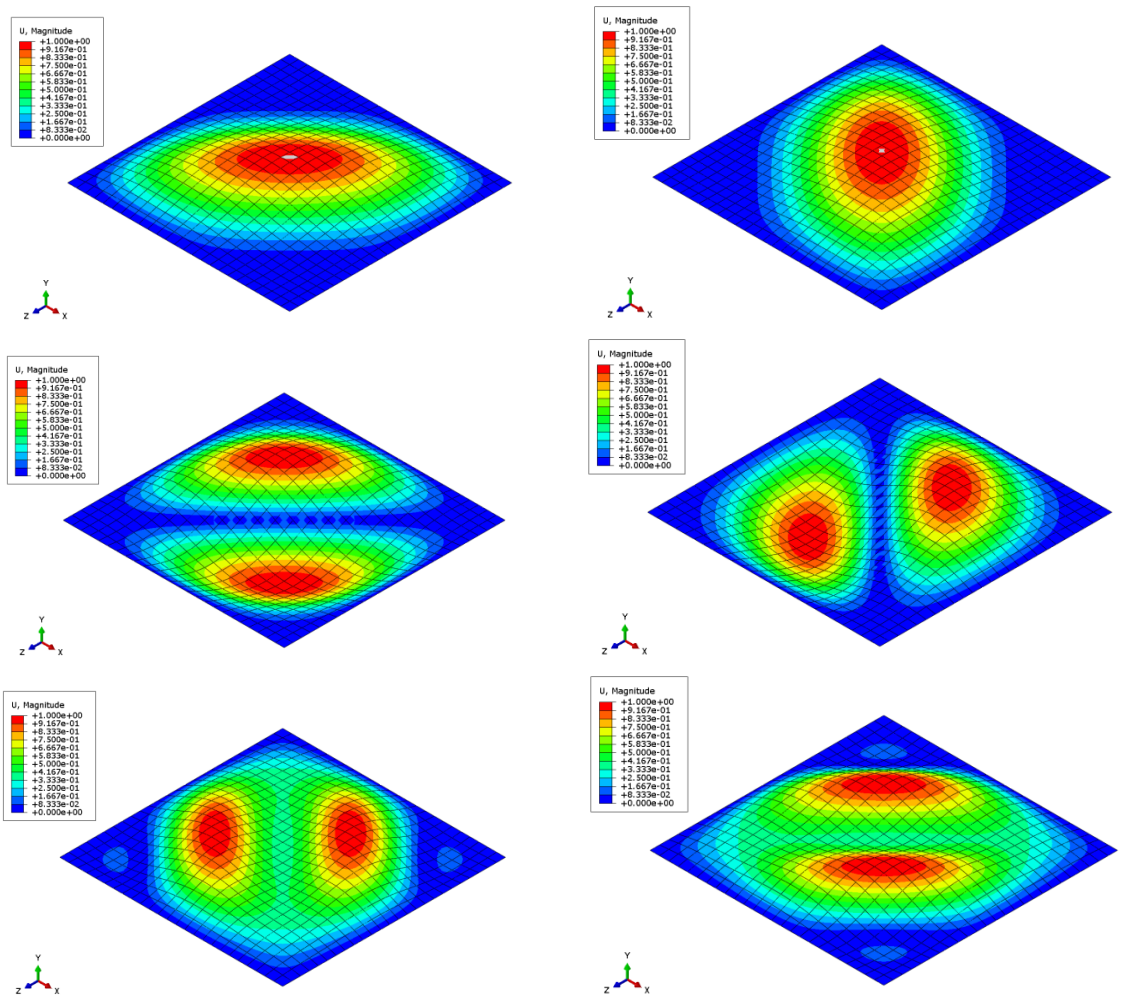
a/b	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0	∞
k	9.3	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.1	5.9	5.7	5.4

Foram testados três casos de razões de dimensões diferentes, todos obtendo um desvio inferior a 1% entre o resultado obtido pelo Abaqus e o proposto por Sun (1998), como mostrado na Tabela 10.

Tabela 10 - Comparação entre os resultados do Abaqus e os propostos por Sun (1998).

Caso	Analítico (N)	Abaqus (N)	Desvio
Carga Crítica (a/b=1)	18354	18265	-0.49%
Carga Crítica (a/b=1.5)	13953	13864	-0.64%
Carga Crítica (a/b=2)	12970	12847	-0.96%

Figura 127 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica sem reforçadores, sujeita à cisalhamento (a/b = 1), sem pré-carga aplicada.



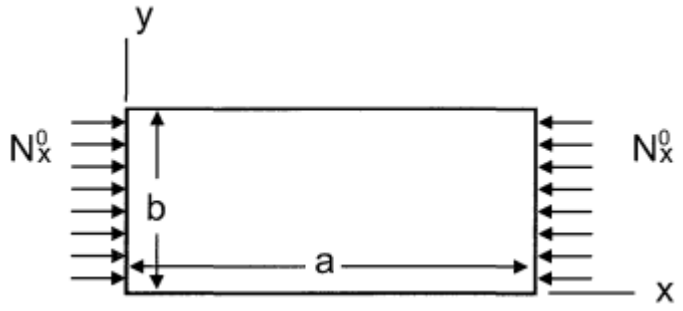
Foi feita uma análise de discretização da malha, e observou-se que a boa correlação entre os resultados do Abaqus e de Sun (1998) é mantida até valores de discretização de 40mm. Tamanhos de elemento superiores a este valor geram resultados com desvio superior a 1%.

Tabela 11 - Análise de discretização da malha.

Discretização (a/b=1)	Analítico (N)	Abaqus (N)	Desvio
80mm	18354	19892	7.73%
40mm	18354	18278	-0.42%
30mm	18354	18267	-0.48%
20mm	18354	18265	-0.49%
10mm	18354	18264	-0.49%
5mm	18354	18264	-0.49%

Carregamentos de compressão

Figura 128 - Placa retangular sujeita a carregamentos de compressão. Adaptado (SUN, 1998).



Neste caso, o maior número de resultados disponíveis para o coeficiente de flambagem permitiu que o modelo fosse verificado para diferentes condições de contorno.

Figura 129 - Condição de contorno de 4 arestas simplesmente apoiadas.

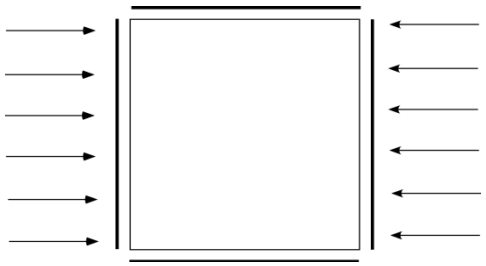


Tabela 12 - Resultados para placa à compressão, 4 arestas simplesmente apoiadas.

Caso	Analítico (N)	Abaqus (N)	Desvio
Carga Crítica (a/b=1)	7861	7743	-1.51%

Figura 130 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica sem reforçadores, sujeita a compressão (a/b = 1), 4 arestas simplesmente apoiadas, sem pré-carga.

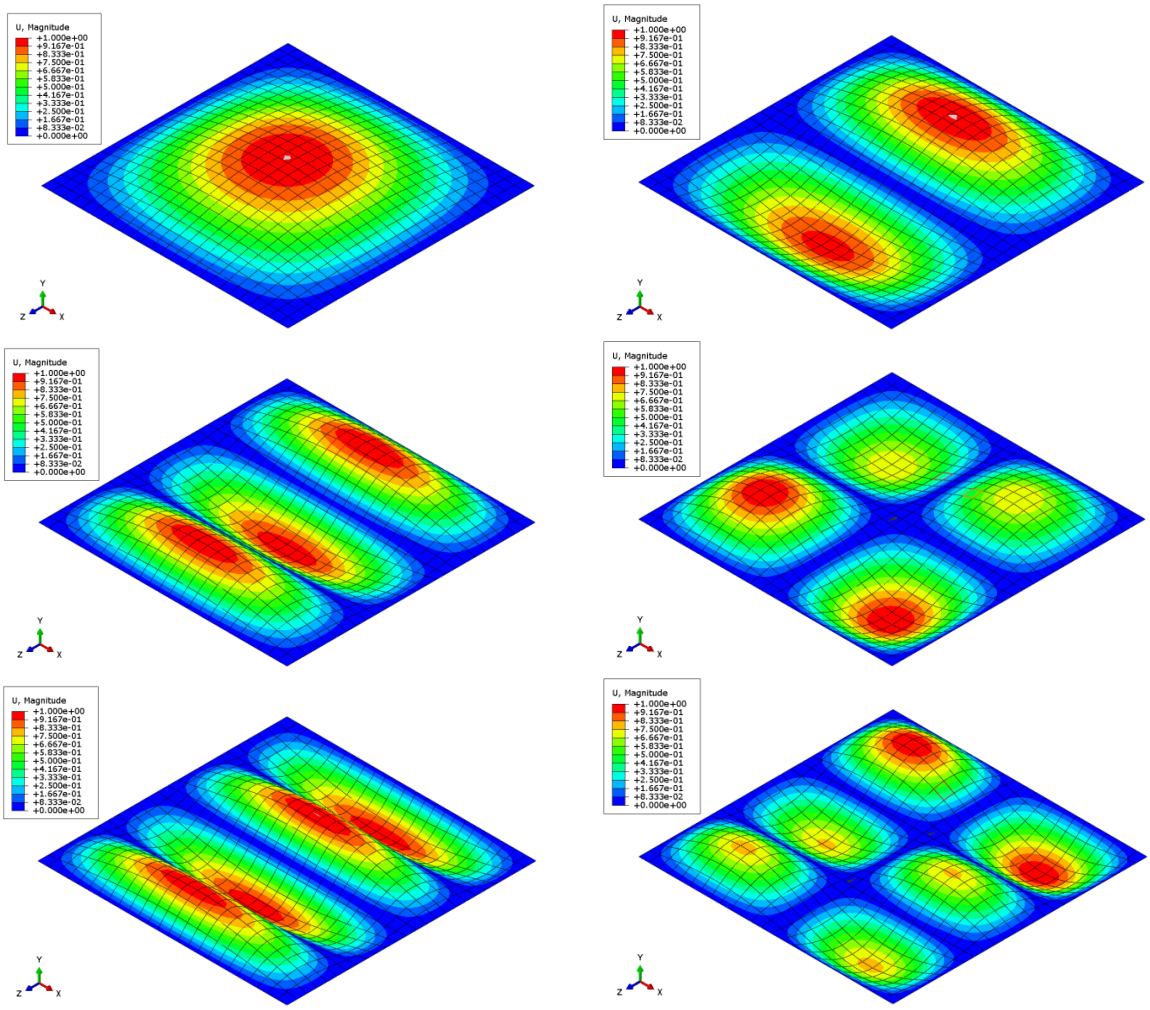


Figura 131 - Condição de contorno, 3 arestas simplesmente apoiadas e 1 livre.

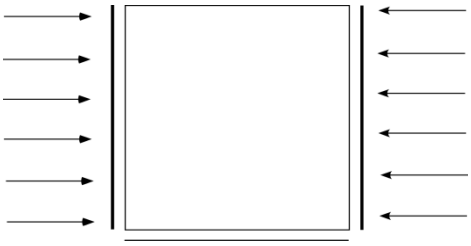


Tabela 13 - Resultados para placa à compressão, 3 arestas simplesmente apoiadas, 1 livre.

Caso	Analítico (N)	Abaqus (N)	Desvio
Carga Crítica (a/b=1)	2804	2830	0.92%

Figura 132 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica sem reforçadores, sujeita a compressão (a/b = 1), 3 arestas simplesmente apoiadas e 1 livre.

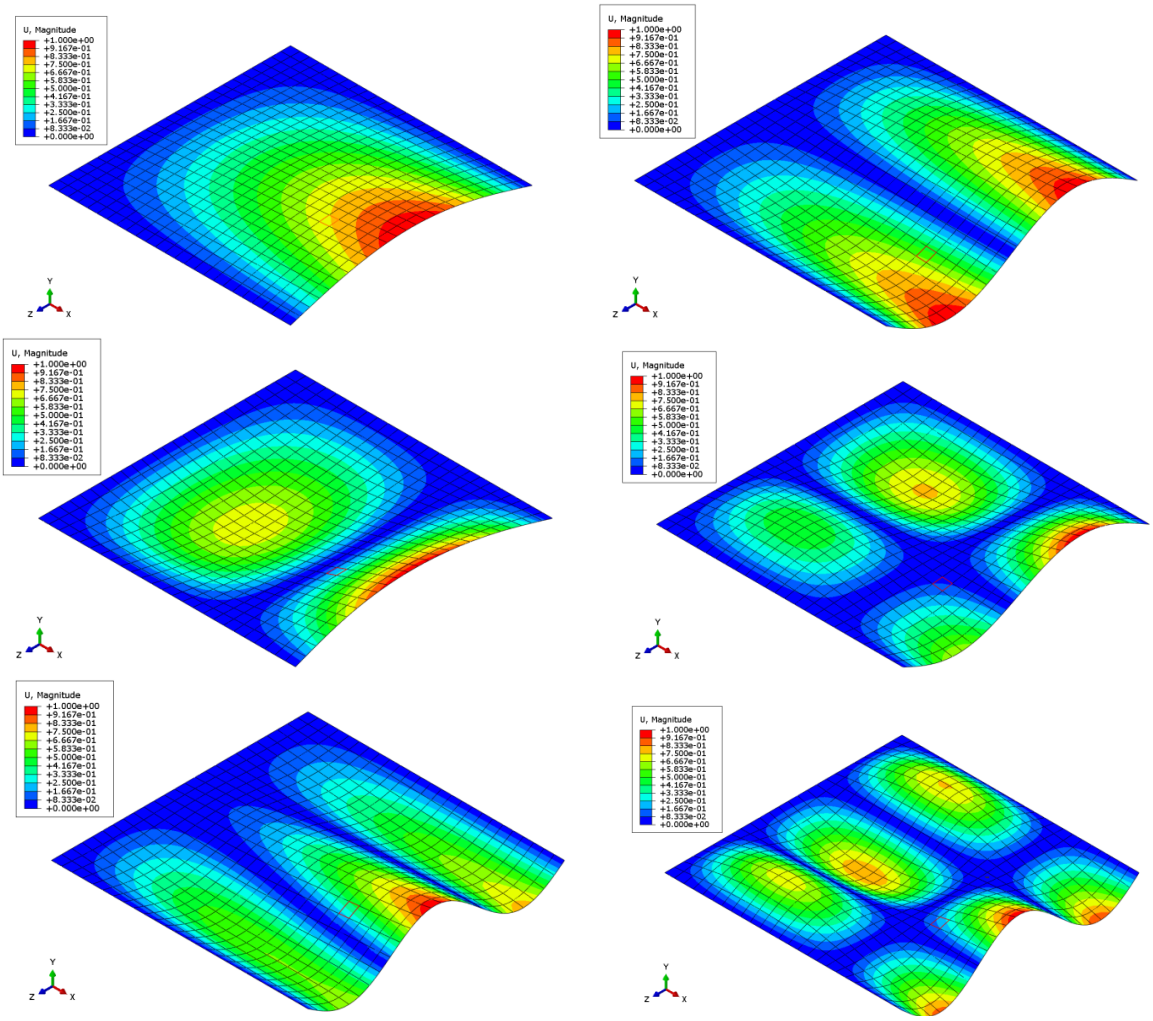


Figura 133 - Condição de contorno, 2 arestas simplesmente apoiadas, 1 livre e 1 engastada.

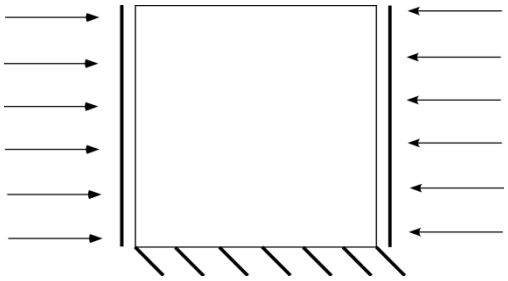
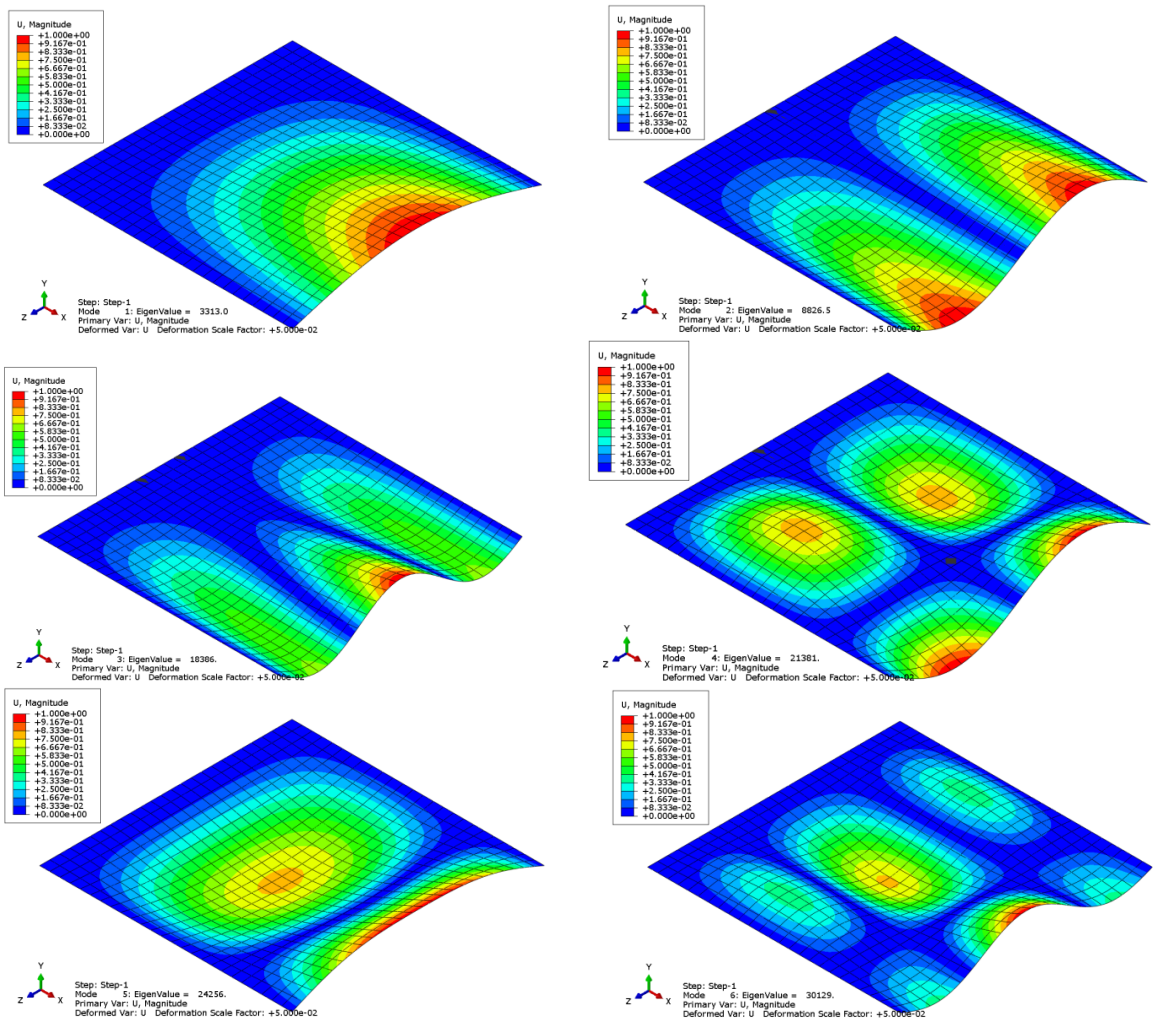


Tabela 14 - Resultados para placa à compressão, 2 arestas simplesmente apoiadas, 1 livre e 1 engastada.

Caso	Analítico (N)	Abaqus (N)	Desvio
Carga Crítica (a/b=1)	3341	3313	-0.85%

Figura 134 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica sem reforçadores, sujeita a compressão (a/b = 1), 2 arestas simplesmente apoiadas, 1 livre e 1 engastada, sem pré-carga.



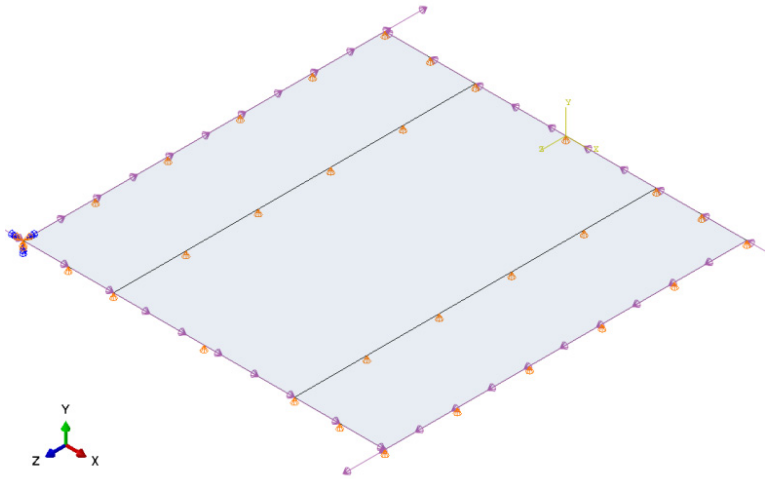
B.2 Placa isotrópica com reforçadores

Para o caso da placa isotrópica com reforçadores, Niu (2006) apresenta curvas que correlacionam a carga crítica de flambagem de um painel isotrópico sem reforçadores com o mesmo painel, porém dotado de reforçadores do tipo Z, de razão entre largura da base e altura do mesmo de 0,3. É feito um modelo dos reforçadores considerando-se que, devido a sua alta rigidez flexional em relação à rigidez do painel, os mesmos podem ser modelados como apoios simples (Figura 135).

Compara-se então a carga crítica de flambagem deste modelo com a placa isotrópica sem reforçadores.

Desta maneira, o objetivo aqui é comparar a carga crítica de flambagem obtida na modelagem simplificada dos reforçadores por meio de condições de contorno de apoio simples, com a obtida no caso da modelagem completa da geometria dos reforçadores em si, unidas perfeitamente ao painel, ambas análises feitas por meio do Abaqus. Segundo Niu (2006) esta simplificação produz bons resultados, o que permite verificar os resultados obtidos pelo Abaqus na modelagem dos reforçadores.

Figura 135 - Aplicação das condições de contorno para modelo simplificado de reforçadores.



Nota-se tanto pelos resultados quantitativos mostrados na Tabela 15, quanto pelos qualitativos apresentados através da comparação entre os modos de flambagem na Figura 136 e Figura 137 que o modelo de reforçadores isotrópicos implementado apresenta boa correlação com a simplificação indicada em Niu (2006).

Tabela 15 - Comparação da carga crítica obtida entre o modelo simplificado e o modelo completo com reforçadores do tipo I.

		Modelo com reforçadores	
Cisalhamento Puro	Modelo Simplificado (N)	"I" (N)	Desvio
Carga Crítica (a/b=1)	63518	62535	-1.57%

Figura 136 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica com reforçadores do tipo "I", sujeita a cisalhamento puro (a/b = 1), 4 arestas simplesmente apoiadas, sem pré-carga.

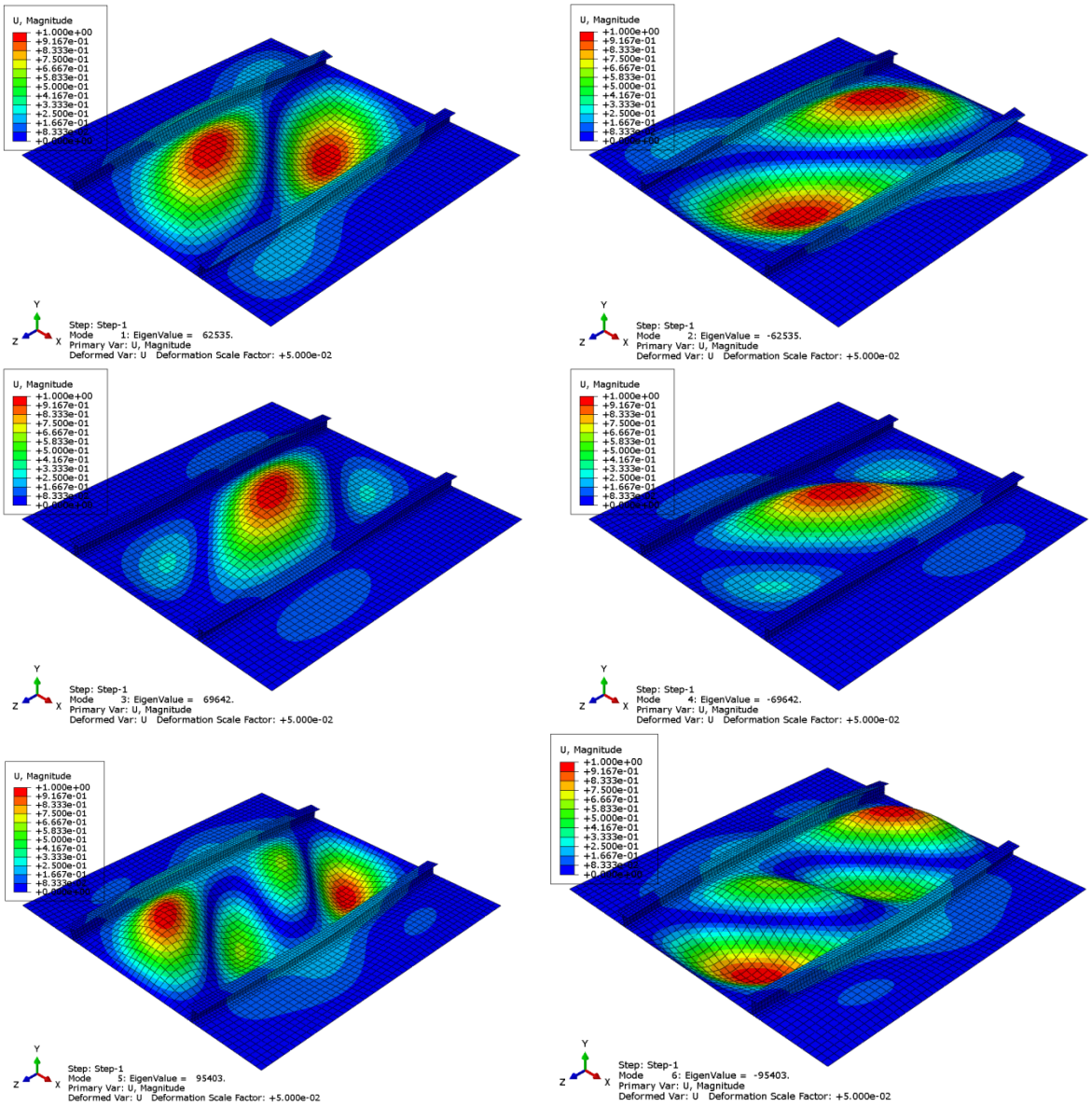
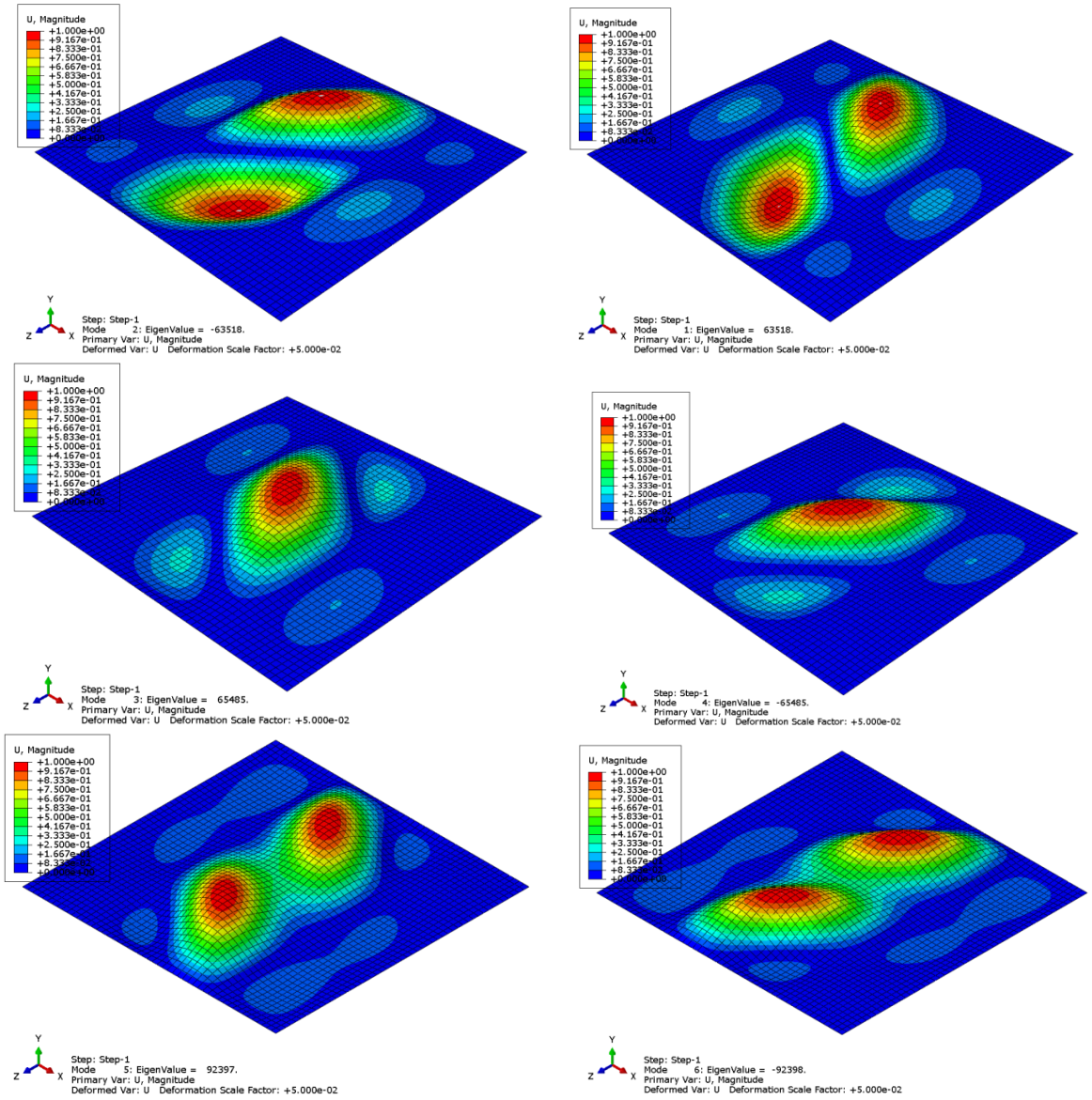


Figura 137 - Primeiros 6 modos de flambagem para o caso da placa isotrópica com os reforçadores sendo modelados através da aplicação de condições de contorno do tipo apoio simples. O painel está sujeito a cisalhamento puro (a/b = 1) e com as 4 arestas simplesmente apoiadas, sem pré-carga.



B.3 Placa compósita sem reforçadores

Para a verificação do modelo de placa compósita sem os reforçadores, foi utilizada a base de dados ESDU ("*Engineering Sciences Data Unit*"), mantido pela IHS e cujo acesso foi garantido pela rede de bibliotecas da Universidade de São Paulo (SIBI-USP). Esta base de dados oferece ferramentas de análise validadas, guias de projeto e resultados experimentais para aplicações de engenharia.

O documento ESDU número 81047 ("*Buckling of flat rectangular plates*") apresenta um modelo de análise de placas de material isotrópico, ortotrópico, laminado compósito e do tipo de sanduíche, implementado no software ESDUpac A8147V40 que acompanha o documento. O exemplo 2.5.3 deste mesmo documento apresenta um caso com os respectivos resultados de carga crítica de flambagem que será utilizado para verificação do modelo do Abaqus. Considera-se uma placa de material compósito laminado, de dimensões 173mm x 795mm, sujeita as condições de contorno e carregamentos da Figura 138. As arestas menores são consideradas engastadas e as maiores, simplesmente apoiadas. Os carregamentos são de compressão no sentido do comprimento (eixo y, com valor 20 N/mm) e calcula-se a carga crítica de flambagem por compressão no sentido da largura da placa (eixo x). O laminado possui 16 camadas de espessura 0,12 mm cada uma, cuja a sequência de laminação (em graus) $[22.5/-22.5/-22.5/22.5/0/-22.5/22.5/90]_S$ é simétrica e balanceada. O material possui as propriedades mecânicas relacionadas na Tabela 16.

Figura 138 - Condições de contorno e carregamentos considerados para verificação do modelo implementado em Abaqus.

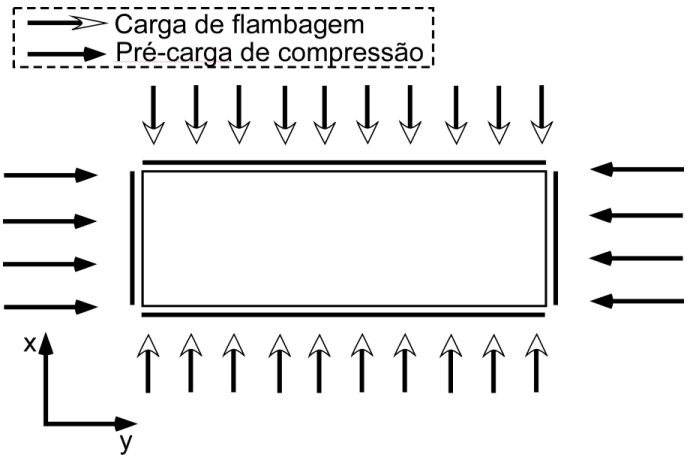


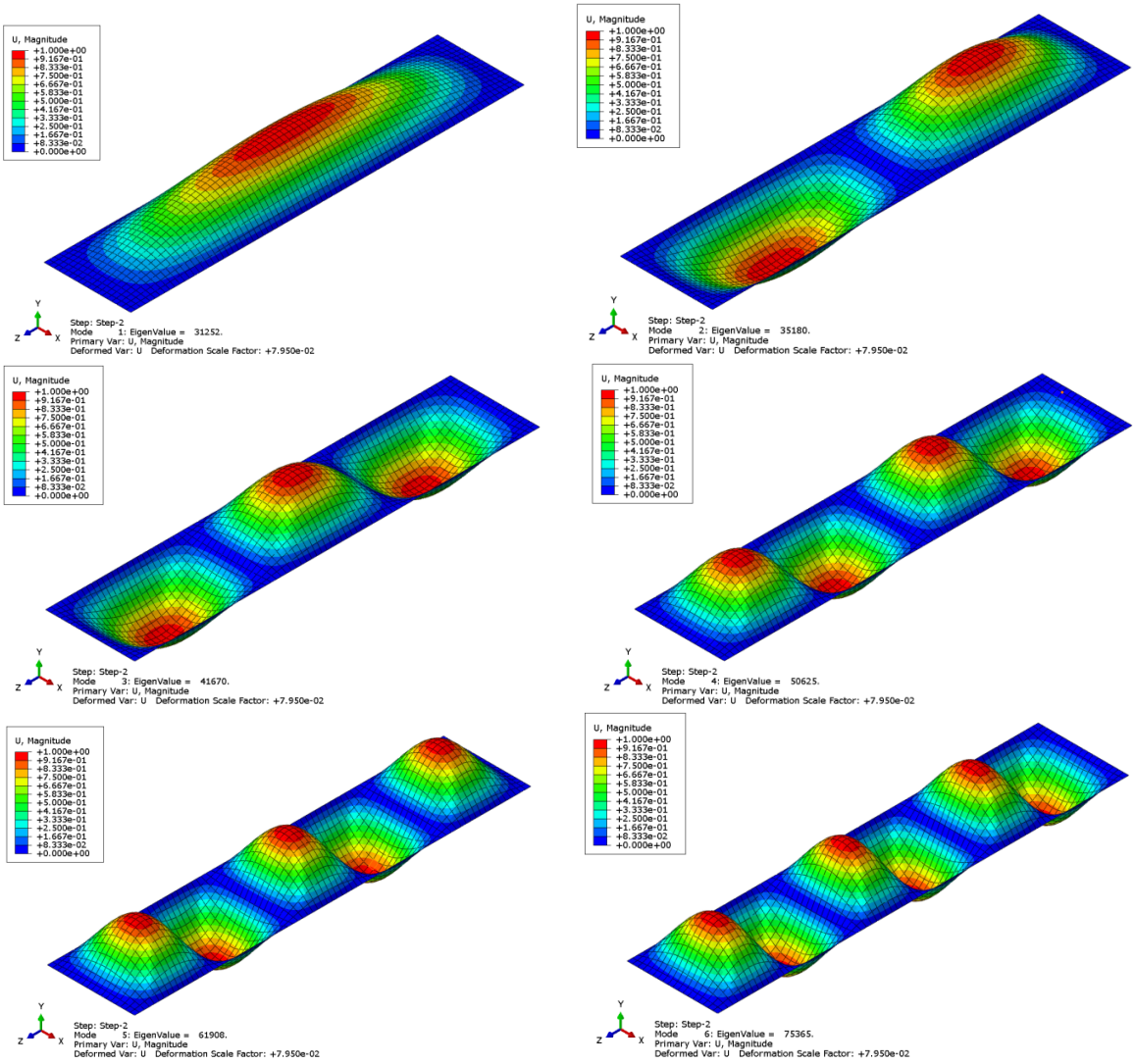
Tabela 16 - Propriedades mecânicas da camada do laminado consideradas no exemplo 2.5.3 de ESDU 81047.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	v_{12}	G_{12} (GPa)	ρ (kg/m^3)
207,0	7,6	0,3	5,0	1500,00

Para a definição deste modelo, foi necessário criar 2 "*steps"* de análise do Abaqus, procedimento descrito por ABAQUS (2010a), seção 6.2.3, para análises de flambagem em estruturas sujeitas a uma pré-carga. Para os casos analisados até aqui, isto não foi necessário pois não se considerava a estrutura pré-carregada para a análise de flambagem. Assim, no primeiro "*step"* é feita uma análise estática da estrutura, oferecendo o estado da mesma sob a pré-carga como entrada para o segundo *step* no qual a carga de flambagem é calculada.

O valor de carga crítica obtida, 31252 N/m é muito próximo do valor de 31,2 N/mm apresentado pelo ESDU. Os primeiros seis modos de flambagem são apresentados na Figura 139. Aproveitando-se da boa correlação entre os resultados obtidos, foi feita uma comparação dos resultados com o uso dos elementos tipo S4 contra os elementos tipo S8R. Observou-se que o elemento S8R resultou no mesmo valor de carga crítica que o fornecido pelo ESDU, enquanto o S4 apresentou um desvio de 0,52% em relação ao mesmo, como era esperado.

Figura 139 - Primeiros 6 modos de flambagem do caso exemplo 2.5.3 do ESDU 81047 com pré-carga e carga de flambagem de compressão.



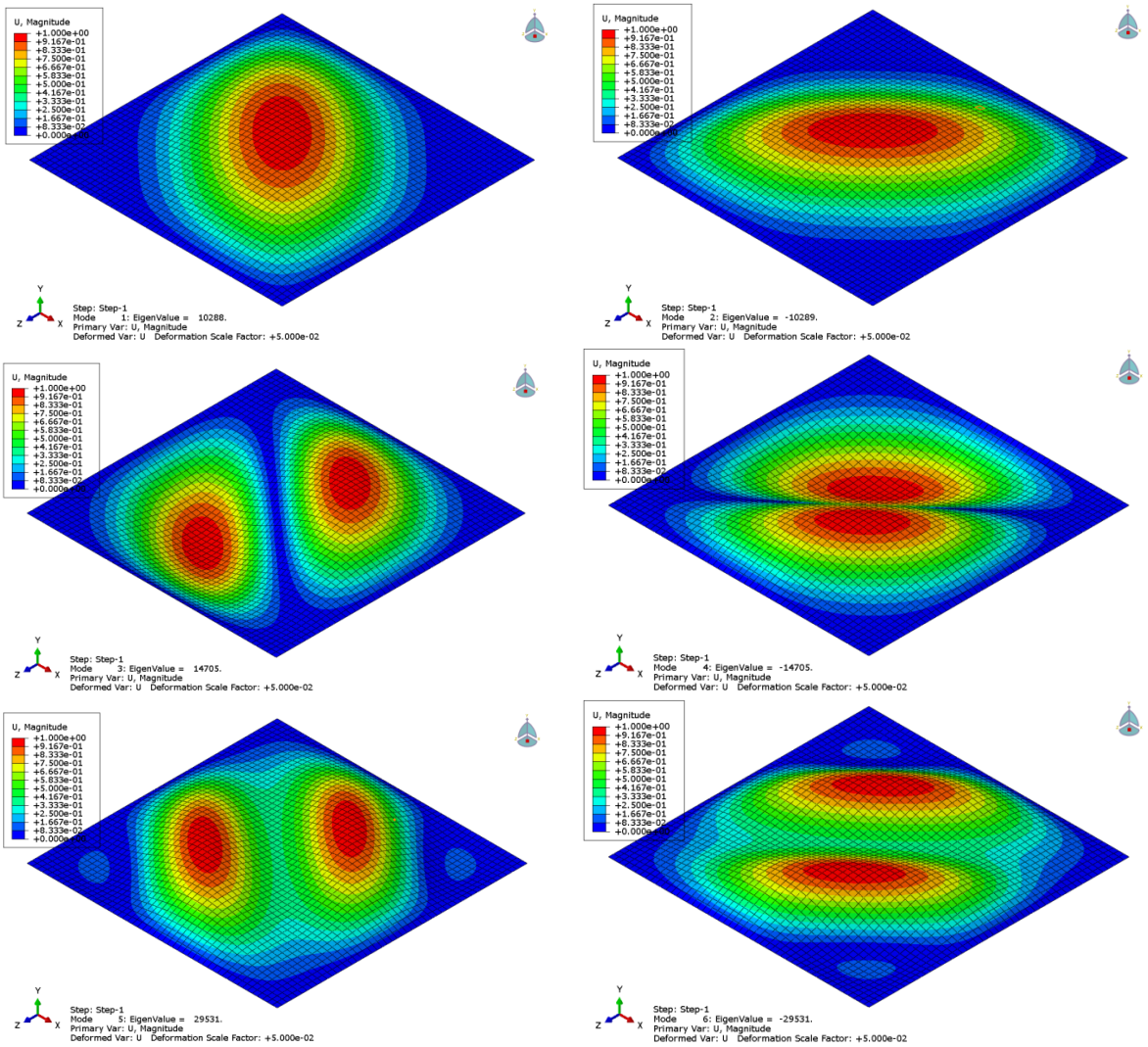
B.4 Placa compósita com reforçadores

Para o caso da validação dos resultados da placa compósita com reforçadores, empregaram-se os mesmos procedimentos de definição do modelo e da composição do laminado utilizados nas verificações anteriores. Avaliou-se o aumento da carga de flambagem com a utilização dos reforçadores, comparando-se este valor com os obtidos anteriormente utilizando materiais isotrópicos.

Através da mesma metodologia empregada na seção B.3, analisou-se o caso de uma placa quadrada compósita com a mesma composição do laminado utilizada

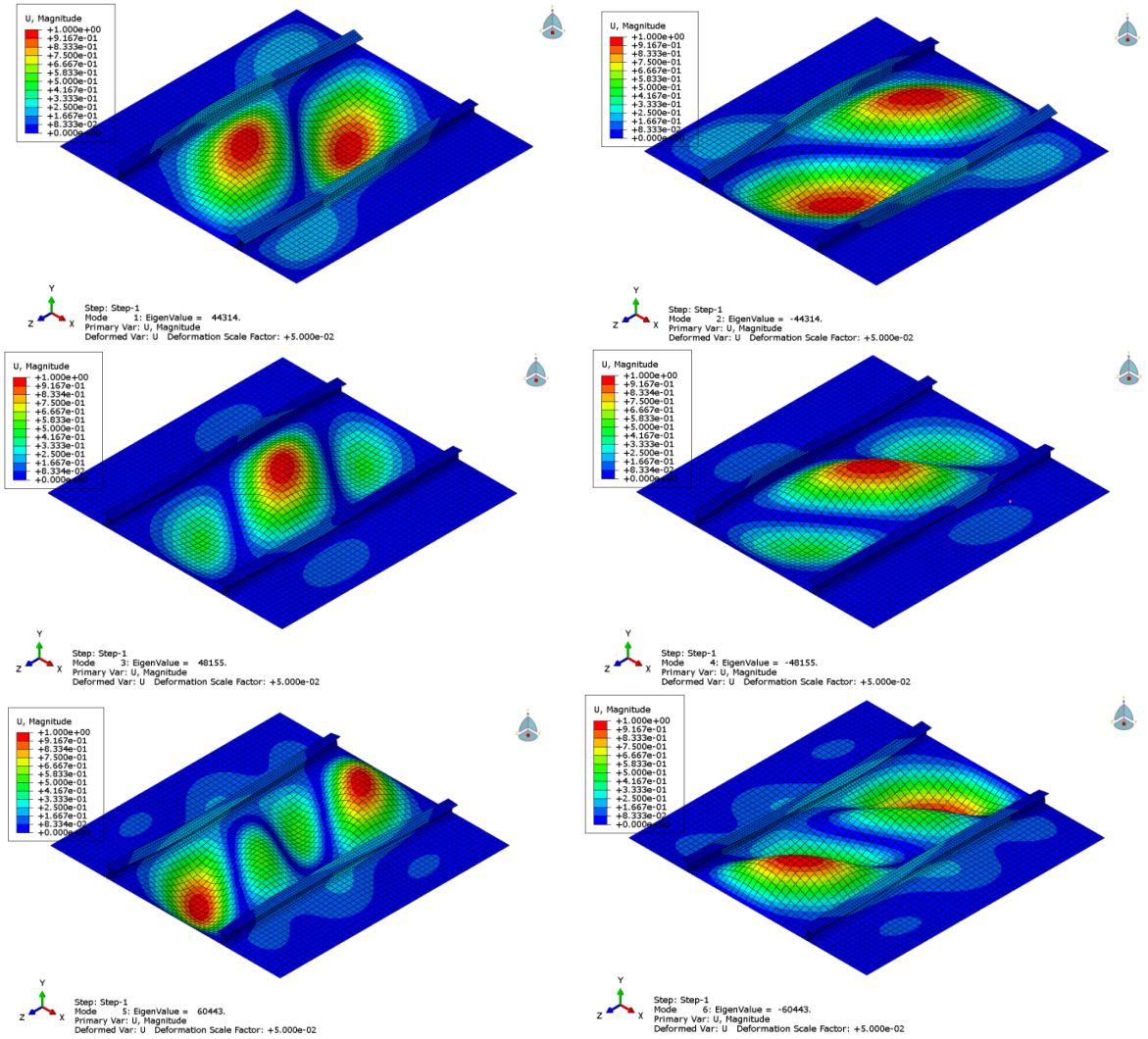
na seção B.3, considerando as 4 arestas simplesmente apoiadas e sujeitas ao carregamento de cisalhamento puro. Os primeiros seis modos de flambagem são apresentados na Figura 140.

Figura 140 - Seis primeiros modos de flambagem da placa compósita sem reforçadores, sob cisalhamento puro, sem aplicação de pré-carga.



Em seguida, foi implementado o modelo com reforçadores também compósitos, de mesma composição e sequência de empilhamento do painel. Consideraram-se as mesmas condições de contorno, dimensões e carregamentos do caso sem reforçadores. Os seis primeiros modos de flambagem são mostrados na Figura 141.

Figura 141 - Seis primeiros modos de flambagem da placa compósita com reforçadores, sob cisalhamento puro, sem pré-carga.



Para o caso do material isotrópico, as cargas de flambagem obtidas respectivamente, sem e com reforçadores foram de 18265 N e 62535 N, ou seja, 3,4 vezes maior quando considerados os reforçadores. Para o caso do emprego de material laminado, as cargas obtidas foram de 10288 N sem reforçadores e 44314 N com reforçadores, ou seja, a estrutura apresentou uma carga de flambagem 4,3 vezes maior quando utilizados os reforçadores. A ordem de grandeza do aumento da carga de flambagem quando utilizados reforçadores tanto no caso isotrópico, quanto no caso do material laminado, mostraram-se próximos entre si (3,4 vezes contra 4,3 vezes). Na ausência de dados para verificação dos modelos implementados no caso dos reforçadores laminados, pode-se considerar que para o objetivo de desenvolvimento de uma metodologia de otimização, os modelos implementados são adequados do ponto de vista de confiabilidade das análises.