FERNANDO CUNHA TRALLI

Modelagem Dinâmica de Rotores de Unidades Hidrogeradoras

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências

São Paulo

2018

FERNANDO CUNHA TRALLI

Modelagem Dinâmica de Rotores de Unidades Hidrogeradoras

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr.
Demétrio Cornílios Zachariadis

São Paulo

2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Tralli, Fernando Cunha

Modelagem Dinâmica de Rotores de Unidades Hidrogeradoras / F. C.

Tralli -- versão corr. -- São Paulo, 2018.

130 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.VIBRAÇÕES DE MÁQUINAS I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

Com o intuito de otimizar o projeto de unidades hidrogeradoras e, por conseguinte, aumentar a sua disponibilidade, uma previsão mais precisa do seu comportamento dinâmico é de fundamental importância. Assim, o presente trabalho se propôs a modelar uma unidade hidrogeradora de forma mais completa, considerando os efeitos do empuxo magnético, mancais, perturbações hidráulicas, desbalanceamento e selos labirintos de turbina Francis. A partir do modelo construído, foram realizadas análises modais, temporais e espectrais. Os resultados numéricos são comparados com os dados experimentais de uma unidade hidrogeradora de grande porte. Tanto sinais de tendência temporal, como órbitas, e espectros de frequência dos fenômenos envolvidos são analisados e comparados. Dessa forma, pretende-se obter o modelo menos complexo possível, mas que seja capaz de representar de forma aceitável a dinâmica da unidade hidrogeradora sujeita a diferentes condições de operação. A maior dificuldade encontrada foi na representação das excitações externas ao sistema, principalmente quando a máquina está operando em regime parcial. Constatou-se uma importante influência do selo labirinto na simulação do comportamento dinâmico da turbina Francis operando em carga parcial. Ao final, os aspectos do modelo que podem ser aprimorados são discutidos.

Palavras-chave: Dinâmica de rotores. Unidades hidrogeradoras. Vibrações. Modelagem.

ABSTRACT

In order to optimize the design of hydro-generating units and therefore increase their availability, a more accurate forecast of their dynamic behavior is of fundamental importance. Thus, the present work has proposed to model a more complete hydrogenerator unit, considering the effects of magnetic pull, guide bearings, hydraulic perturbations, unbalance and Francis turbine labyrinths. From this model, modal, temporal and spectral analyzes were performed. The numerical results are compared with experimental data of a large hydrogenerator unit. Temporal trend signals, orbits and frequency spectrum of the phenomena involved are analyzed and compared. In this way, it is intended to obtain the less complex model possible, but that is able to represent in an acceptable way the dynamics of the hydrogenerator unit under different operation conditions. The greatest difficulty found was in the representation of external excitations to the system, mainly under partial load. It was observed an important influence of the labyrinth seal in the simulation of the dynamic behavior of the Francis turbine operating in partial load. Finally, aspects of the model that can be improved are discussed.

Key-words: Rotor dynamics. Hydrogenerator unit. Vibration. Modeling.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	5
1.2	UNIDADES HIDROGERADORAS	7
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
1.4	OBJETIVOS	36
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	36
2	MODELAGEM DE ROTORES	38
2.1	ELEMENTOS DE VIGA.....	38
2.2	ELEMENTOS DE VEDAÇÃO (SELOS).....	39
2.3	MANCAIS	45
2.4	PROPRIEDADES DO SISTEMA EM ESTUDO.....	49
3	SOLUÇÃO DO MODELO PROPOSTO	53
3.1	ANÁLISE MODAL	53
3.2	ANÁLISE TRANSIENTE.....	57
4	RESULTADOS TEÓRICOS	68
4.1	ANÁLISE MODAL	68
4.2	ANÁLISE TRANSIENTE.....	85
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	110
5.1	CONDIÇÕES DO ENSAIO.....	110
5.2	INSTRUMENTAÇÃO.....	110
5.3	RESULTADOS	111
6	ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS.....	118
7	CONCLUSÕES.....	120
8	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE A - Matrizes dos elementos de viga.....	126

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O aumento contínuo da demanda de energia elétrica no país, juntamente com o lento crescimento da sua oferta, resulta em frequentes notícias sobre iminentes “apagões” aos quais o país está sujeito. Com esse cenário, as empresas produtoras de energia são pressionadas a terem a disponibilidade de suas usinas aumentada. A disponibilidade de uma usina consiste na razão entre o tempo em que ela está disponível para prover energia para rede (gerando ou não) e o tempo total do intervalo considerado.

Ao se tratar de disponibilidade das fontes de energia nacionais, é necessário se atentar para a forma como a matriz energética do país é composta. A partir da análise da matriz energética brasileira, apresentada na Figura 1, é possível perceber que parte considerável da energia elétrica (64%) provem de usinas hidrelétricas. Portanto, tratar do aumento da disponibilidade de usinas hidrelétricas é um assunto pertinente e de grande interesse econômico. Outra motivação para o aumento da sua disponibilidade é a possibilidade de ser necessário utilizar menos as centrais termelétricas, que representam uma fonte de geração elétrica mais cara e poluente.

Figura 1 – Matriz energética brasileira (ANEEL, 2018).

O principal obstáculo ao aumento da disponibilidade de usinas hidrelétricas, no tocante à unidade hidrogeradora (conjunto composto do gerador elétrico e turbina hidráulica e seus sistemas auxiliares), são as paradas de máquina não-programadas. Paradas não programadas ocorrem quando a máquina apresenta alguma falha e, por isso, não está disponível para fornecer energia elétrica para a rede. Elevados níveis de oscilação de eixo ou de vibração de mancais, elevadas temperaturas do gerador ou do óleo contido na cuba dos mancais e elevadas oscilações de potência elétrica são exemplos de falhas que podem levar a máquina a uma parada não-programada.

Enquanto algumas possíveis falhas de unidades hidrogeradoras são decorrentes de problemas de manutenção ou operação, outras têm sua origem na fase de projeto e montagem. Uma das principais falhas que ocorrem em unidades hidrogeradoras é o elevado nível da oscilação radial do eixo, também designada como vibração lateral ou excêntrica da linha de eixo. Altos níveis de oscilação de eixo podem ser devidos tanto a problemas de manutenção (sapatas do mancal mal ajustadas depois de uma eventual intervenção no mancal), operação (operar a máquina fora da faixa de potência e queda recomendada), montagem

(desalinhamento entre mancais) como de projeto (frequências de excitação muito próximas da frequência natural do conjunto girante).

Durante o projeto de unidades hidrogeradoras, as suas frequências naturais, especialmente de flexão do eixo, são estimadas e não devem estar próximas das frequências de excitação (mecânicas, hidráulicas e eletromagnéticas). Assim, quanto mais preciso for o modelo de estimativa das frequências naturais, pode-se garantir com maior segurança que elas não estarão próximas das frequências de excitação e, portanto, os níveis de oscilação de eixo serão menores. Também se pode obter uma estimativa da sua resposta ao longo do tempo, estimando a sua amplitude de oscilação e órbita.

1.2 UNIDADES HIDROGERADORAS

As unidades hidrogeradoras tratadas nesse trabalho consistem no conjunto turbina hidráulica e gerador elétrico síncrono trifásico que estão instalados dentro de usinas hidrelétricas para geração de energia elétrica. Nos próximos subitens são tratados com mais detalhes as principais estruturas e equipamentos constituintes de uma usina hidrelétrica típica.

Apesar de o foco do trabalho ser a turbina do tipo Francis e o seu selo labirinto, os demais tipos de turbinas são apresentados brevemente. A justificativa para a escolha da turbina Francis é o fato de ser o único tipo que apresenta selo labirinto.

1.2.1 USINAS HIDRELÉTRICAS

Uma típica usina hidrelétrica consiste basicamente em uma grande estrutura civil para represamento da água (Barragem), outra estrutura para permitir a passagem do excesso de água represada (Vertedouro), uma estrutura para comportar as unidades geradoras e diversos outros componentes auxiliares (Casa de força), uma estrutura para direcionar a água represada à unidade hidrogeradora

(Conduto forçado) e um conjunto de equipamentos para elevar a tensão gerada pelas unidades geradoras (Transformadores elevadores). A energia gerada é então transmitida aos consumidores através de linhas de transmissão e de transformadores que reduzem a tensão para níveis compatíveis com a utilizada pelos consumidores.

Uma representação de uma usina hidrelétrica é apresentada na Figura 2.

Figura 2 – Usina hidrelétrica típica (VOITH HYDRO; 2015).

1.2.2 PRINCIPAIS COMPONENTES DE UNIDADES GERADORAS

Os componentes de unidades hidrogeradoras podem ser divididos, de forma resumida, em três partes principais: componentes hidráulicos, gerador e mancais. Um exemplo de unidade hidrogeradora é apresentado na Figura 3 com seus principais componentes.

Figura 3 - Exemplo de unidade hidrogeradora (VOITH HYDRO, 2015).

1.2.2.1 Componentes hidráulicos

Os componentes hidráulicos são compostos da caixa espiral e do pré-distribuidor (que direcionam o fluxo do conduto à turbina), do distribuidor (que controla o fluxo da água à turbina), da turbina (que normalmente é do tipo Francis, Kaplan, Bulbo ou Pelton) e do tubo de sucção (que direciona a água da turbina à saída da casa de força).

A água é trazida do reservatório por condutos até a caixa espiral, que tem o formato de um “caracol” de forma a tentar equalizar o fluxo radialmente ao redor da turbina. A caixa espiral pode ser tanto metálica (para o caso de uma turbina Francis e Pelton), como de concreto (no caso de turbinas Kaplan), ou mesmo inexistente (turbinas Bulbo).

Ao sair da caixa espiral e antes de entrar em contato com a turbina, o fluxo de água é pré-direcionado de forma a possuir um ângulo de ataque (ângulo formado entre o escoamento e a aresta da pá da turbina). Esse pré-direcionamento é feito pelo pré-distribuidor com palhetas metálicas fixas. Depois desse componente, tem-

se o distribuidor, que possui palhetas metálicas móveis, de forma a conseguir controlar o fluxo de água que entra para a turbina.

Para turbinas Bulbo, o pré-direcionamento não é necessário devido à sua forma construtiva, sendo aplicável somente o distribuidor. Por outro lado, para turbinas Pelton, esse controle de fluxo de água é realizado por um componente conhecido por bico-injetor ao invés do uso de palhetas.

As turbinas hidráulicas são máquinas projetadas para transformar a energia hidráulica (energia de pressão e energia cinética) de um fluxo de água em torque mecânico para o eixo no qual está acoplada. Como mencionado anteriormente, tem-se vários tipos de turbinas hidráulicas e, na Figura 4, são apresentados os tipos mais comuns encontrados no Brasil.

Francis

Kaplan

Pelton

Bulbo

Figura 4 – Tipos de turbinas hidráulicas mais comuns no Brasil (VOITH HYDRO, 2015).

Os rotores Francis são turbinas hidráulicas do tipo de reação, ou seja, o seu torque é advindo da pressão da corrente de água sobre as pás. Alguns dos componentes de uma turbina Francis, além do seu rotor, são apresentados nas Figuras 5 e 6. Como pode ser visualizado, existe um aro de regulação acionado por servomotores que alteram o ângulo das palhetas diretrizes (distribuidor) para controle do fluxo. Após passagem da água pelo rotor da turbina, ela é conduzida para fora da usina através de um conduto chamado de tubo de sucção, sendo parte dele metálico e o restante de concreto. Apenas a parte exposta a altas velocidades ou pressões é revestida de metal.

Figura 5 – Turbina Francis e seus componentes (VOITH HYDRO, 2015).

Figura 6 – Rotor Francis (VOITH HYDRO, 2015).

Os rotores Kaplan (Figuras 7 e 8) também são turbinas do tipo de reação. Entretanto, diferentemente dos rotores Francis, os rotores Kaplan possuem pás móveis, ou seja, as suas pás podem rotacionar ao longo do seu próprio eixo radial. Assim, com as palhetas diretrizes e o movimento das próprias pás, a turbina Kaplan possui uma dupla regulação, conseguindo um melhor aproveitamento para uma faixa maior de vazões e quedas. O controle do movimento das pás do rotor Kaplan é feito por um servomotor interno ao seu cubo central.

Figura 7 – Turbina Kaplan e seus componentes (VOITH HYDRO, 2015).

Figura 8 – Rotor Kaplan (VOITH HYDRO, 2015).

As turbinas Bulbo (Figura 9) são praticamente turbinas Kaplan com o eixo horizontal ao invés de vertical. Dessa forma, não há mais caixa espiral e nem pré-distribuidor, pois o fluxo de água vem direto do reservatório até à turbina. Também possui dupla regulação no controle do fluxo de água.

Figura 9 – Turbina Bulbo e seus componentes (VOITH HYDRO, 2015).

Diferentemente dos outros tipos de turbinas, os rotores Pelton (Figura 10 e 11) são turbinas do tipo de ação, ou seja, o torque é proveniente da colisão direta do fluxo de água com as pás do rotor. Esse tipo de turbina opera a pressão ambiente e, portanto, possui um mecanismo de regulação do fluxo de água diferente. A sua caixa espiral possui bicos injetores na saída do fluxo para direcionar e controlar a quantidade de água que atinge as pás do rotor. Dentro do injetor há uma agulha móvel que controla a passagem da água.

Figura 10 – Turbina Pelton e seus componentes (VOITH HYDRO, 2015).

Figura 11 – Modelo de um rotor Pelton para ensaios (VOITH HYDRO, 2015).

1.2.2.2 Gerador

O gerador consiste no conjunto rotor-estator que é responsável pela conversão da energia mecânica em elétrica. Um exemplo de gerador vertical com seus componentes principais pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 – Exemplo de gerador vertical (ITAIPU, 2018).

O rotor do gerador é composto de uma estrutura metálica (cubo do rotor) que se acopla ao eixo acionado pela turbina e suporta a coroa do rotor e os polos. Corrente contínua é inserida nos polos através do anel coletor, que recebe essa corrente de excitação através de escovas de grafite presas em um porta-escovas. Como os polos estão girando, o estator 'enxerga' um campo variável, e, por conseguinte, uma tensão alternada surge no enrolamento do estator. O enrolamento é suportado por um núcleo magnético que, por sua vez, é sustentado pela caixa do estator.

1.2.2.3 Mancais

Os mancais consistem em componentes que guiam e suportam o rotor da unidade hidrogeradora. Tipicamente, em usinas hidrelétricas, são utilizados mancais hidrodinâmicos. Nesse tipo de mancal, há a formação de um filme de óleo de reduzida espessura que reduz o atrito entre a parte girante e as sapatas (segmentos) do mancal (parte estacionária). Os mancais podem ser tanto de guia, que suportam as forças radiais, como de escora, que suporta a força axial. Existem também mancais que suportam o eixo tanto radialmente como axialmente (mancal combinado).

Alguns exemplos de mancais guias utilizados em unidades hidrogeradoras podem ser vistos nas Figuras 13 e 14. Uma cunha de ajuste permite ajustar a folga do mancal (distância entre segmento e colar). Essa folga afeta diretamente a temperatura e rigidez do mancal. Por conseguinte, os níveis de vibração estão diretamente correlacionados com a folga do mancal.

Figura 13 - Exemplo de mancal guia (VOITH HYDRO, 2015).

Um exemplo de forma construtiva de um mancal combinado (escora e guia) é apresentado na Figura 15. O colar possui tanto uma superfície com usinagem fina

para ter contato com os segmentos radiais como uma superfície inferior para contato com os segmentos de escora.

Figura 14 - Detalhe do colar e o segmento de guia de um mancal radial (VOITH HYDRO, 2015).

Dependendo da disposição dos mancais, a unidade hidrogeradora recebe diferentes classificações de acordo com a norma IEC 60034-7 (Figura 16). Toda unidade deve possuir pelo menos dois mancais guia e um de escora para se ter estabilidade no conjunto girante. Os tipos mais comuns são o W1, W41 e W42.

Figura 15 - Mancal combinado e detalhe dos segmentos de escora (VOITH HYDRO, 2015).

Figura 16 - Denominação dos tipos de disposição de mancais conforme norma IEC 60034-7 (IEC, 1992).

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica foi dividida em duas partes. Na primeira parte, são apresentados e discutidos brevemente os aspectos que envolvem a dinâmica de rotores de unidades hidrogeradoras. As influências dos mancais de deslizamento, selos labirintos de turbinas, empuxo magnético e aspectos geométricos são alguns desses aspectos. Priorizou-se a apresentação didática dos conceitos e de modelos consolidados. O selo labirinto é tratado em maiores detalhes por ser o principal parâmetro analisado.

Em seguida, na segunda parte, é apresentado de maneira introdutória o método dos elementos finitos e como ele se aplica na resolução de problemas envolvendo a dinâmica de rotores. O referido método será o utilizado para a modelagem e resolução das equações tratadas no presente trabalho.

1.3.1 Dinâmica de rotores de unidades hidrogeradoras

Os primeiros estudos de dinâmica dos rotores são atribuídos a Laval por volta de 1883. A partir de simples condições de equilíbrio aplicadas em seu modelo (Figura 17), foi derivada a relação para a oscilação radial da linha de eixo (equação 1.1) onde é possível compreender qual deve ser o valor da rotação para se ter denominador nulo, resultando em uma oscilação radial de valor “infinito”. Tal rotação é denominada rotação crítica.

Figura 17 - Rotor estudado por Laval (RAO; 2011).

$$y = \frac{\omega^2 \cdot \delta}{k/m - \omega^2} \quad (1.1)$$

Onde,

y : Deflexão lateral do eixo;

ω : Velocidade angular do rotor;

δ : Excentricidade lateral do eixo;

k : Rigidez lateral da linha de eixo;

m : Massa do rotor.

Entretanto, o entendimento do comportamento dos rotores ainda não estava claro para qualquer velocidade de rotação até a publicação do trabalho de Jeffcott em 1919 (JEFFCOTT, 1919). Jeffcott formulou o problema do rotor como um problema de vibração forçada, onde o rotor girava em torno da sua configuração de equilíbrio estático. O modelo considerado por Jeffcott pode ser visualizado na Figura 18. As premissas utilizadas foram as seguintes:

- Eixo sem massa e rigidez flexional K ;
- Disco rígido com massa M ;
- O rotor gira em torno de seu eixo próprio com velocidade angular ω ;
- O rotor gira em torno da linha de centro dos mancais com velocidade angular ϑ (Jeffcott considerou o giro sincronizado, ou seja, $\vartheta = \omega$).

O ponto de estudo se concentra na deflexão do disco, que é representado na Figura 19. A partir do disco, são derivadas as equações de equilíbrio (equações 1.2 e 1.3).

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} [z + a \cdot \cos(\omega \cdot t)] + C \cdot \frac{dz}{dt} + K \cdot z = 0 \quad (1.2)$$

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} [y + a \cdot \sin(\omega \cdot t)] + C \cdot \frac{dy}{dt} + K \cdot y = 0 \quad (1.3)$$

Essas equações podem ser reduzidas, ao considerar a relação $r = z + i \cdot y$, para um sistema equivalente simples de um grau de liberdade (equação 1.4).

$$M \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + C \cdot \frac{dr}{dt} + K \cdot r = M \cdot a \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

A solução da equação 1.4 é a composição de duas partes distintas. Uma é a solução na qual se considera o sistema como sendo um sistema com vibração livre (solução homogênea). Para esse caso, o sistema vibra em sua frequência natural $\omega_n = \sqrt{K/M}$. A segunda parte da solução é obtida ao se considerar o termo forçante, chegando-se a amplitude de vibração forçada na forma da equação 1.5.

$$\bar{R} = \frac{R}{a} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \Omega)^2}} \quad (1.5)$$

Onde,

$$\Omega = \omega / \omega_n ;$$

$$\xi = C / (2 \cdot \sqrt{K \cdot M}) .$$

Da equação 1.5, é possível obter a expressão para o ângulo de fase ϕ (equação 1.6).

$$\phi = \frac{2 \cdot \xi \cdot \Omega}{1 - \Omega^2} \quad (1.6)$$

Mais aplicado ao estudo de vibração em unidades hidrogeradoras, Vladislavlev (1972) apresenta um trabalho bastante interessante e completo. Em seu trabalho são abordados desde os fundamentos de vibração, até as perturbações que aparecem durante a operação das máquinas, seja em regime permanente, ou transiente. Outra parte interessante de seu trabalho são os exemplos de falhas às quais esses tipos de máquinas estão sujeitas e as recomendações de como evitá-las. Procedimentos de balanceamento, alinhamento e boas práticas de projeto e montagem também são apresentados.

No tocante aos mancais hidrodinâmicos, que é o tipo mais utilizado em unidades hidrogeradoras, existem vários trabalhos a respeito. Silva (2004) apresenta, em seu trabalho sobre modelos matemáticos de mancais hidrodinâmicos, uma rica revisão sobre o assunto, tanto sobre trabalhos numéricos como experimentais. Já Zachariadis (2000) apresenta um estudo extenso sobre o efeito do desalinhamento angular nesse tipo de mancal e seu impacto nos esforços e dinâmica da máquina.

Gustavsson (2004) apresenta um estudo da dinâmica de hidrogeradores com ênfase na influência do empuxo magnético e da geometria na estabilidade da máquina. A estabilidade do rotor é avaliada a partir do sinal da parte real dos autovalores. Um exemplo dessa análise é apresentado na Figura 20. Em sua modelagem, a influência do rotor da turbina é desprezada, uma vez que a inércia de rotação do gerador é, normalmente, significativamente superior. O autor trata o empuxo magnético como se fosse uma mola com rigidez negativa, o que é comumente encontrado na literatura dessa natureza.

Xu e Li (2012) também tratam da influência do empuxo magnético na dinâmica de unidades hidrogeradoras. Em seu estudo, diferentes expressões analíticas que visam representar o empuxo magnético são aplicadas em um modelo

de elementos finitos, baseado em vigas de Timoshenko, de uma unidade hidrogeradora.

Figura 20 – (a) Região estável da unidade hidrogeradora (parte branca) em função de parâmetros geométricos e considerando um empuxo magnético 40% maior que o nominal; (b) Geometria do rotor considerada (GUSTAVSSON, 2004).

Dietzen et al (1986) comentam que, para selos labirintos lisos, tanto investigações experimentais como analíticas foram desenvolvidas e apresentaram uma boa predição dos coeficientes do modelo. Entretanto, não apresentavam boa correlação para geometrias ranhuradas. Dessa forma, propuseram uma extensão da teoria *Bulk-Flow* para cálculo dos coeficientes dinâmicos e fluxo de vazamento para selos labirintos com ranhuras paralelas na parte estacionária e lisa no rotor (Figura 21). Tal teoria é baseada na solução de comprimento infinito de Childs para selos labirintos lisos (CHILDS, 1983). Foram comparados resultados experimentais e teóricos para selos labirintos lisos e os correspondentes ranhurados. A interação entre rotor-estator que ocorre no selo labirinto é representada por um modelo linearizado descrito por coeficientes de rigidez, amortecimento e massa, como representado na equação 1.7; dessa forma, a investigação conduzida pretendia obter tais coeficientes.

Figura 21 – Modelo com ranhuras utilizado e representação das velocidades (DIETZEN et al; 1986).

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & m \\ -m & M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

A configuração ranhurada apresentou coeficientes de rigidez direta (K) e cruzada (k), assim como coeficientes de amortecimento direto (C) menores se comparados com os equivalentes lisos (Figura 22). Também se observou uma redução no fluxo de vazamento para o selo labirinto ranhurado.

Figura 22 – Coeficientes de rigidez e amortecimento experimentais e teóricos para o selo labirinto ranhurado estudado (DIETZEN et al; 1986).

Em sua publicação seguinte, Dietzen e Nordmann (1987) discutem novamente a ineficácia dos modelos da época em prever os coeficientes dinâmicos para selos labirintos ranhurados. Entretanto, dessa vez, propõem obter os coeficientes a partir de um método de diferenças finitas, onde o escoamento turbulento dentro do selo labirinto é modelado a partir de uma malha (Figura 23). O método foi utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes juntamente com um modelo de turbulência do tipo $K - \varepsilon$. Foi assumido o movimento do eixo ao redor da sua posição central teórica (Figura 24). Assim, o campo de escoamento e a distribuição de pressão foram obtidos e os coeficientes dinâmicos do selo labirinto determinados. Ao final se comparou os resultados numéricos com experimentais tanto para selos labirintos lisos como ranhurados. Na época da publicação de seu trabalho, os autores não possuíam dados experimentais para validar os resultados para a geometria ranhurada, apenas para a geometria lisa, que apresentou boa correlação. De qualquer forma, o comportamento (tendência) apresentado pelos dados numéricos para a geometria ranhurada estava de acordo com as medições de outro autor. O objetivo principal desse trabalho era demonstrar que era possível

utilizar o método das diferenças finitas na resolução de problemas com selos labirintos ranhurados.

Figura 23 – Malha utilizada para modelar o selo labirinto liso (DIETZEN; NORDMANN; 1987).

Figura 24 – Geometria do eixo excêntrico (DIETZEN; NORDMANN; 1987).

Dietzen e Nordmann (1988a) estenderam seu estudo anterior para a condição na qual o eixo está orbitando ao redor de um ponto diferente do centro geométrico do estator (Figura 25), mas se limitaram na configuração lisa para o selo labirinto. Nesse caso, a análise 2D utilizada na publicação anterior não era mais aplicável, sendo necessária uma malha 3D (Figura 26) para prever os coeficientes dinâmicos do selo labirinto. Outro fator importante a ser considerado nessa configuração é que,

devido ao aumento das folgas, pode ocorrer recirculação dentro do selo labirinto no sentido circunferencial, fenômeno que não pode ser observado com uma malha 2D. Apesar dos resultados obtidos não apresentarem uma boa correlação com os dados experimentais disponíveis, os comportamentos apresentados entre os dados experimentais e numéricos foram similares.

Figura 25 – Eixo excêntrico utilizado no estudo (DIETZEN; NORDMANN; 1988a).

Figura 26 – Malha 3D utilizada para o eixo excêntrico (DIETZEN; NORDMANN; 1988a).

A aplicação do método de análise 3D para selos labirintos lisos e ranhurados foi estudada por Dietzen e Nordmann (DIETZEN; NORDMANN; 1988b). Nesse estudo foi considerado o eixo orbitando ao redor do eixo do estator e foi feita uma comparação desse método com o de análise de perturbações, utilizado nos primeiros estudos sobre selos labirintos. Os autores questionam as hipóteses que são necessárias para a utilização da análise de perturbações:

- É assumido que o eixo se move em pequenas órbitas ao redor da posição central;
- A mudança da perturbação das variáveis do escoamento na direção circunferencial podem ser descritas por funções senos e cossenos;
- A mudança ao longo do tempo pode ser descrita por uma função exponencial imaginária, porque o eixo se move em uma órbita circular.

Para a análise 3D pelo método das diferenças finitas, as únicas hipóteses necessárias são que a turbulência pode ser descrita por um modelo de turbulência (nesse caso, o $K - \varepsilon$) e que o eixo se move em órbitas circulares ao redor do centro do selo labirinto. Em seu trabalho, os autores concluíram que, tanto o método de análise de perturbações como o de análise 3D pelo método das diferenças finitas, são capazes de reproduzir com boa precisão os resultados obtidos para selos labirintos simples (lisos ou com ranhura de apenas um lado). Entretanto, para ranhuras mais complexas, o método baseado na análise de perturbações não foi capaz de obter resultados razoáveis, enquanto o baseado no método das diferenças finitas apresentou uma boa precisão.

Xi e Rhode (2006) publicaram um interessante estudo numérico baseado em CFD (*Computer Dynamic Fluids* – Dinâmica dos fluidos computacional), onde foram simulados selos labirintos de turbinas a gás. Foi feita uma análise de sensibilidade dos parâmetros geométricos das ranhuras dos selos labirintos e da movimentação axial do rotor. Como resultado, constatou-se claramente a influência desses parâmetros sobre os coeficientes dinâmicos do selo labirinto.

Zhang et al (2013) também conduziram estudos numéricos e utilizaram diferentes tipos de modelos de turbulência. Seu principal objetivo era validar o software comercial de CFD Fluent para a modelagem de selos labirintos ranhurados. Os resultados obtidos conseguiram reproduzir os fenômenos de recirculação dentro das ranhuras que foram observados experimentalmente. Esse trabalho valida a utilização do modelo de turbulência padrão $K - \varepsilon$ para a simulação de selos labirintos ranhurados.

A fim de minimizar o vazamento nos selos, pode-se utilizar elementos deslizantes fixos na sua parte estacionária e em contato com a parte rotativa. Esses elementos são chamados de escovas e consistem em outra opção para os tradicionais selos. Entretanto apresentam maior desgaste e maior necessidade de manutenção. Assim, na vanguarda dos estudos dos selos ou vedações, Bäuerle e Hetzler (2017) conduziram seus estudos com um tipo de vedação híbrida (selo complacente) que combina ambos os tipos de selos (SAN ANDRÉS, 2015). Em seu trabalho, foi utilizado um modelo não linear para estudar estabilidade e comportamento para rotor balanceado e não-balanceado. Os resultados foram preliminares, mas há indicações de apresentar um comportamento estável para uma grande faixa de operação.

Čelič e Ondráčka (2015) estudaram o impacto das perdas na eficiência em turbinas Francis devido à influência do selo labirinto. Eles conduziram estudos utilizando softwares de dinâmica de fluidos computacional e dados experimentais. Constatou-se uma melhora na previsão da eficiência da turbina ao considerar a influência no selo labirinto, principalmente para baixas vazões.

1.3.2 O método dos elementos finitos aplicado à dinâmica de rotores

A partir de 1660, com a publicação da Lei de Hooke, que descreve que a deformação de um corpo é diretamente proporcional à força aplicada nele, e com a generalização dessa lei para o estado tridimensional e sua aplicação nas equações de Navier por volta de 1822, ambas por Cauchy, foram estabelecidos os fundamentos da Teoria da Elasticidade. Entretanto, as equações provenientes dessa

teoria representam um problema de difícil solução, mesmo para estruturas simples. Assim, utilizando o princípio de conservação de energia, métodos foram desenvolvidos para resolver os problemas da Teoria da Elasticidade. Tais métodos são chamados de Métodos de Energia.

Entre os Métodos de Energia mais conhecidos, podem ser citadas as Equações de Lagrange (1750), a Abordagem da Energia de Rayleigh (1877), o Método de Rayleigh-Ritz (1911), o Método de Galerkin (1915) e, também, o Princípio de Hamilton (1834). Todos eles se baseiam no fato de que a energia sempre deve ser conservada, ou seja, seu valor total sempre se conserva, mas pode mudar constantemente de forma: cinética, potencial, entre outras. Através dos Métodos de Energia, pode-se, por exemplo, determinar as velocidades críticas de rotores. Já para determinar campos de tensão e deformação das estruturas, uma abordagem baseada na Resistência dos Materiais, proveniente da Teoria da Elasticidade, é mais aplicável.

Até a década de 1950, a abordagem mais usual para resolução dos problemas de engenharia era a da resistência dos materiais. Essa abordagem é relativamente bem simplificada e a sua utilização para geometrias e carregamentos mais complexos leva à utilização de fatores de segurança maiores e a uma maior necessidade de experimentos. Entretanto, com o desenvolvimento de métodos de discretização de um problema complexo em subdomínios mais simples, combinado com o advento do computador e seu contínuo aumento de capacidade de processamento, surgiu o método dos elementos finitos.

São considerados como pioneiros dos métodos de elementos finitos, o engenheiro estrutural russo-canadense Alexander Hrennikoff (1896-1984) e o engenheiro e matemático germano-americano Richard Courant (1888-1972). Ambos trataram da discretização de um problema de engenharia em um número finito de subdomínios menores, chamados elementos, e de mais simples resolução. Uma ilustração da discretização de uma estrutura em elementos menores é apresentada na Figura 27, onde um exemplo de estrutura é representado através de elementos unidirecionais que suportam apenas tração e compressão, chamados de treliças.

Figura 27 - Exemplos de discretização de estruturas utilizando por elementos de treliça (AVELINO, 2000).

Para representar máquinas rotativas, comumente são utilizados elementos de viga, que proporcionam a rigidez flexional do sistema, e discos, que representam a inércia e massa do sistema. Um dos primeiros elementos de viga aplicados em cálculos de elementos finitos foram os elementos do tipo Bernoulli-Euler. Esse tipo de elemento considera apenas a rigidez devido à flexão da viga. Para também considerar o efeito do cisalhamento na deformação da seção viga, pode-se utilizar o elemento de viga de Timoshenko. Nelson (RAO, 2011) utilizou o elemento de viga de Timoshenko e incluiu as parcelas de massa e rigidez referentes à torção do elemento. O elemento de Nelson (Figura 28), por ser mais completo para dinâmica de rotores, é apresentado aqui e, ao final de sua exposição, são aplicadas as simplificações que são consideradas para o presente trabalho.

Figura 28 - Elemento tridimensional de viga desenvolvido por Nelson. Adaptado de (RAO; 2011).

A partir da abordagem Lagrangeana, a formulação da dinâmica do elemento é dada pela equação 1.8 e o vetor com os graus de liberdade na equação 1.9. Apenas a movimentação axial dos nós é desconsiderada.

$$[M^S] \cdot \{\ddot{d}^S\} + \omega \cdot [G^S] \cdot \{\dot{d}^S\} + [K^S] \cdot \{d^S\} = [F_S^S] \quad (1.8)$$

$$\{d\}^T = \{\hat{v}_1 \ \hat{w}_1 \ \hat{\theta}_1 \ \hat{\phi}_1 \ \hat{\alpha}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{w}_2 \ \hat{\theta}_2 \ \hat{\phi}_2 \ \hat{\alpha}_2\} \quad (1.9)$$

A matriz de massa $[M^S]$ é a composição das matrizes de massa devido à translação $[M_T^S]$, rotação $[M_R^S]$ e torção $[M_\theta^S]$, como apresentado nas equações 1.10 a 1.12. A matriz dos efeitos giroscópicos $[G^S]$ é a composição de três matrizes $[G^S]_0$, $[G^S]_1$ e $[G^S]_2$, como apresentado na equação 1.13. Por último, a matriz de rigidez do elemento $[K^S]$ é composta por duas matrizes de rigidez de flexão $[K^S]_0$ e $[K^S]_1$ e uma de rigidez torsional $[K_\theta^S]$, como pode ser visto na equação 1.14. Os parâmetros auxiliares das equações, como o índice de esbelteza (ϕ), por exemplo, são apresentados nas equações de 1.15 a 1.17 (RAO, 2011). As descrições de cada matriz são apresentadas no Apêndice A.

$$[M^S] = [M_T^S] + [M_R^S] + [M_\theta^S] \quad (1.10)$$

$$[M_T^S] = [M_T^S]_0 + \phi \cdot [M_T^S]_1 + \phi^2 \cdot [M_T^S]_2 \quad (1.11)$$

$$[M_R^S] = [M_R^S]_0 + \phi \cdot [M_R^S]_1 + \phi^2 \cdot [M_R^S]_2 \quad (1.12)$$

$$[G^S] = [G^S]_0 + \phi \cdot [G^S]_1 + \phi^2 \cdot [G^S]_2 \quad (1.13)$$

$$[K^S] = [K^S]_0 + \phi \cdot [K^S]_1 + [K_\theta^S] \quad (1.14)$$

$$\phi = \frac{12 \cdot E \cdot I}{K' \cdot G \cdot A \cdot L^2} \quad (1.15)$$

$$K' = \frac{6 \cdot (1+\nu) \cdot (1+m^2)^2}{(7+6 \cdot \nu) \cdot (1+m^2)^2 + (20+12 \cdot \nu) \cdot m^2} \quad (1.16)$$

$$m = r_i / r_o \quad (1.17)$$

As matrizes fornecidas relacionam os nós dos elementos. Para conhecer o comportamento do elemento (deslocamento e rotações) ao longo do seu comprimento, é necessário utilizar funções que relacionam esses parâmetros com os deslocamentos e rotações nodais. Essas funções são chamadas de “funções de forma” e, para o elemento de viga aqui considerado, são representadas pela equação 1.18.

$$\begin{Bmatrix} v(\hat{x}) \\ \omega(\hat{x}) \\ \theta(\hat{x}) \\ \phi(\hat{x}) \\ \alpha(\hat{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \cdot \{\hat{d}\} \quad (1.18)$$

1.4 OBJETIVOS

O cenário apresentado no item anterior mostra a necessidade de modelos para a estimativa do comportamento dinâmico de unidades hidrogeradoras considerando a influência dos selos labirintos da turbina do tipo Francis, empuxo magnético e rigidezes do sistema. Assim o presente trabalho se propõe a:

- A partir da metodologia consagrada, construir um modelo numérico, baseado no método dos elementos finitos, a fim de prever o comportamento da oscilação radial do eixo de unidades hidrogeradoras para diferentes condições de operação;
- Definir e aplicar carregamentos externos consistentes com a dinâmica da máquina;
- Obter a resposta modal da unidade geradora, ou seja, frequências naturais e respectivos modos de vibrar;
- Obter a resposta temporal da unidade geradora, ou seja, amplitude de oscilação e órbitas;
- Verificar a influência do selo labirinto e empuxo magnético no comportamento dinâmico da máquina;
- Utilizar dados obtidos em máquinas reais para comparação do modelo proposto.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 1, o presente trabalho é contextualizado e tem seus objetivos explicitados. São apresentadas as usinas hidrelétricas e as unidades hidrogeradoras

em maiores detalhes. Formas construtivas, nomes e funcionalidades dos componentes constituintes de uma unidade hidrogeradora são discutidos. Também é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a dinâmica de rotores aplicada a unidades hidrogeradoras e os principais aspectos que a influenciam, com ênfase nos selos labirintos.

Já no Capítulo 2, o equacionamento proveniente das técnicas de modelagem de unidades hidrogeradoras, utilizando o método dos elementos finitos, é apresentado. A sua estrutura e fontes de excitação são modeladas de forma a se obter as amplitudes de oscilação.

Como resolver o modelo proposto no capítulo anterior é o tema do Capítulo 3, tanto para a análise modal como para a transiente. Já no Capítulo 4, a partir do equacionamento apresentado no capítulo anterior, são obtidas as respostas dos modelos.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados de um ensaio feito em uma máquina real sujeita a diferentes condições de operação. Os seus sinais temporais, suas órbitas nos planos dos mancais e espectros de frequência são apresentados.

O Capítulo 6 contém a análise da comparação dos resultados experimentais e numéricos.

Por fim, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões provenientes dos resultados e análises apresentados no item anterior. Também são apresentadas propostas de trabalhos futuros dentro do assunto abordado no presente trabalho.

As referências utilizadas são listadas no Capítulo 8 e as matrizes dos elementos de viga utilizados no modelo são apresentadas no Apêndice A.

2 MODELAGEM DE ROTORES

A modelagem utilizada no presente trabalho para se obter o comportamento dinâmico de um hidrogerador é baseado em um artigo clássico sobre simulação dinâmica não-linear de modelos de máquinas hidrelétricas utilizando o Método dos Elementos Finitos (CARDINALI; NORDMANN; SPERBER; 1993).

A proposta do método é dividir a máquina em alguns tipos de elementos que representam a sua dinâmica e, em cada um desses elementos, aplicar as equações de movimento pertinentes. Como resultado das equações, se obtém o movimento para cada nó do modelo, que consiste nos deslocamentos no plano de análise e nos ângulos de distorção e torção.

A equação do comportamento dinâmico de sistemas rotativos pode ser descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias (equação 3.1) com o vetor de deslocamentos e rotações dados pela equação 3.2.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} + \{F(\dot{q}, q)\} \quad (3.1)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x \\ y_i \\ \theta_i \\ \phi_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

2.1 ELEMENTOS DE VIGA

Para modelagem da linha de eixo são utilizados elementos de viga do tipo Timoshenko (RAO, 2011). Nessa modelagem, o eixo é subdividido em diversos elementos desse tipo, onde a distribuição de massa, efeitos giroscópios, rigidez de flexão e os efeitos das deformações cisalhantes são considerados.

Algumas partes da máquina podem ser modeladas como discos rígidos quando sua inércia e rigidez são elevadas. Normalmente, a rigidez desses

elementos é desconsiderada por ser bastante superior à rigidez do eixo, assim, influenciando pouco na sua configuração deformada. Entretanto, sua inércia tem participação significativa no comportamento dinâmico da máquina. No presente trabalho, optou-se por representar esses componentes com a formulação geral da viga, uma vez que não representam gasto computacional adicional significativo e fornecem um resultado mais acurado. O mesmo princípio poderia ser aplicado à representação do eixo. Sua distribuição de massa e efeitos giroscópios poderiam ser ignorados e apenas sua rigidez representada, se houvessem ganhos computacionais significativos para isso.

As matrizes do elemento do tipo viga foram desenvolvidas na seção 1 e sua forma geral é apresentada na equação 1.8, considerando o vetor de posições 1.9.

$$[M^S] \cdot \{\ddot{d}^S\} + \omega \cdot [G^S] \cdot \{\dot{d}^S\} + [K^S] \cdot \{d^S\} = [F_S^S] \quad (1.8)$$

$$\{\hat{d}\}^T = \{\hat{v}_1 \ \hat{w}_1 \ \hat{\theta}_1 \ \hat{\phi}_1 \ \hat{a}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{w}_2 \ \hat{\theta}_2 \ \hat{\phi}_2 \ \hat{a}_2\} \quad (1.9)$$

2.2 ELEMENTOS DE VEDAÇÃO (SELOS)

Os selos labirintos de vedação do rotor da turbina são representados por elementos de vedação (Figura 29). Na modelagem do rotor, é importante considerar esse elemento, pois as forças do fluido que passam pelos selos labirintos têm forte influência no comportamento dinâmico da máquina (CARDINALI; NORDMANN; SPERBER; 1993). A equação 3.3 descreve o comportamento da vedação no contexto de vibrações lineares. Os seus coeficientes podem ser obtidos de forma experimental ou teórica. No presente trabalho será o método das diferenças finitas para cálculo dos coeficientes.

Figura 29 – Deslocamentos e forças agindo em um elemento de vedação (CARDINALI; NORDMANN; SPERBER, 1993).

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D & d \\ -d & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Os coeficientes das matrizes da eq. (3.3) podem ser obtidos ao se assumir uma órbita circular para o rotor com frequência de precessão dada por Ω . Com essas hipóteses, a distribuição de pressão pode ser calculada, utilizando o método de dinâmica dos fluidos computacional (CFD), e integrada ao longo da parede do rotor de modo a se obter as forças no plano do selo labirinto.

No presente trabalho as equações de Childs (CHILDS, 1983) são utilizadas a fim de se obter os coeficientes do selo labirinto. Sua formulação é apresentada a seguir.

2.2.1 MODELO DE CHILDS

Childs (CHILDS, 1983) formulou as equações para os coeficientes de selos labirintos baseado nas equações de lubrificação de Hirs. Em sua formulação são considerados os termos de inércia do fluido e o “redemoinho” do fluxo na entrada do selo labirinto. A teoria de selos curtos é utilizada em sua formulação. Suas hipóteses são:

- Escoamento turbulento na direção axial causada pela queda de pressão;
- Escoamento circunferencial como consequência da rotação do eixo;
- Pequenas perturbações radiais do eixo ao redor da posição centrada.

Os coeficientes podem ser apresentados de forma sumária pelas equações 3.4 a 3.19, que são apresentadas a seguir.

$$K = 2 \cdot A \cdot \left\{ 1,25 \cdot E - \frac{(\Omega \cdot T)^2}{4 \cdot \sigma} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + E \right) + \frac{2 \cdot v_0}{a} \cdot \left[\left(E + \frac{1}{a^2} \right) \cdot (1 - e^{-a}) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) \cdot e^{-a} \right] \right\} \right\} \quad (3.4)$$

$$k = \sigma \cdot \Omega \cdot T \cdot A \cdot \left\{ \frac{E}{\sigma} + \frac{B}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + E \right) + \frac{2 \cdot v_0}{a} \cdot \left\{ E \cdot B + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{B}{a} \right) \cdot \left[(1 - e^{-a}) \cdot \left(E + \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) - 1 \right] \right\} \right\} \quad (3.5)$$

$$C = 2 \cdot \sigma \cdot T \cdot A \cdot \left[\frac{E}{\sigma} + \frac{B}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + E \right) \right] \quad (3.6)$$

$$c = 2 \cdot \Omega \cdot T^2 \cdot A \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + E \right) + \frac{v_0}{a} \cdot \left[(1 - e^{-a}) \cdot \left(E + \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \right] \right\} \quad (3.7)$$

$$M = A \cdot \left(\frac{1}{6} + E \right) \cdot T^2 \quad (3.8)$$

$$A = \frac{\pi \cdot R \cdot \Delta P}{\lambda} \cdot \frac{\sigma}{1 + \xi + 2 \cdot \sigma} \quad (3.9)$$

$$\lambda = 0,066 \cdot R_a^{-0,25} \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot b^2} \right)^{0,375} \quad (3.10)$$

$$R_a = \frac{\rho \cdot V \cdot C}{\mu} \quad (3.11)$$

$$R_c = \frac{\rho \cdot R \cdot \Omega \cdot C}{\mu} \quad (3.12)$$

$$b = \frac{R_a}{R_c} = \frac{V}{R \cdot \Omega} \quad (3.13)$$

$$a = \sigma \cdot (1 + 0,75 \cdot \beta) \quad (3.14)$$

$$\beta = \frac{1}{1 + 4 \cdot b^2} \quad (3.15)$$

$$B = 1 + 4 \cdot b^2 \cdot \beta \cdot 0,75 \quad (3.16)$$

$$E = \frac{1 + \xi}{2 \cdot (1 + \xi + B \cdot \sigma)} \quad (3.17)$$

$$T = \frac{L}{V} \quad (3.18)$$

$$\sigma = \lambda \cdot \frac{L}{C} \quad (3.19)$$

Dois parâmetros fundamentais para aplicar nas equações anteriores são a diferença de pressão entre a entrada e saída do selo labirinto e a velocidade média do fluxo no selo labirinto. A diferença de pressão é conhecida e depende do circuito hidráulico e da turbina. No caso estudado, a pressão de entrada é de 100 bar e de saída é de 9 bar. Conhecidas a geometria do selo labirinto e a diferença de pressão, pode ser utilizado o método de diferenças finitas para estimar a velocidade média do

fluxo (ver exemplo de malha utilizada na Figura 30 e de distribuição de velocidade na Figura 31). A malha é composta majoritariamente de hexaedros regulares e alguns tetraedros. Foram consideradas as propriedades padrão da água à 25°C (massa específica = 997 kg/m³ e viscosidade cinemática = 0,893x10⁻⁶ m²/s).

Como a folga do selo labirinto varia conforme a excentricidade se altera, a velocidade do fluxo foi calculada para diferentes valores de folga. Os valores das velocidades são apresentados na Tabela 1.

Figura 30 – Exemplo de malha do selo labirinto do rotor utilizada para cálculo da velocidade do fluxo.

Figura 31 – Exemplo de distribuição de velocidade para cálculo da velocidade média do fluxo no selo labirinto.

Tabela 1 – Valores da velocidade do fluxo no selo labirinto em função da folga.

Folga [mm]	Porcentagem em relação à folga nominal	Velocidade no selo labirinto (m/s)
2,650	50%	24,3
3,975	75%	27,4
5,300	100%	29,3
6,625	125%	30,5
7,950	150%	32,4
Velocidade média no selo labirinto: 29 m/s		

2.3 MANCAIS

As forças de interação entre os segmentos dos mancais e o colar do eixo são dependentes do movimento relativo entre as partes. Como consequência, tem-se uma equação não-linear a ser resolvida a fim de se obter as forças de interação.

Para mancais hidrodinâmicos, o eixo é guiado (sustentado) por um campo de pressão formado entre a superfície do colar do eixo e os segmentos. Tal campo de pressão é formado no filme de óleo que se forma entre as partes rotativas e estacionárias. Um exemplo esquemático de um campo de pressão formado em mancais hidrodinâmicos é apresentado na Figura 32.

Figura 32 – Distribuição de pressão e forças em um mancal hidrodinâmico (CARDINALI; NORDMANN; SPERBER, 1993).

Para o presente trabalho, será utilizado um modelo linear simétrico ($K_{xx} = K_{yy}$ e $C_{xx} = C_{yy}$) e sem termos cruzados ($K_{xy} = K_{yx} = C_{xy} = C_{yx} = 0$) para simular a influência dos mancais de sapatas (*tilting pads*). Assim, os seus coeficientes que representam a rigidez do filme de óleo e da estrutura, assim como o seu amortecimento, devem ser definidos. Assim, a equação dos elementos de mancal é dada pela eq.(3.4).

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Para cálculo dos coeficientes de rigidez é necessário considerar a rigidez de cada elemento da máquina envolvida na transmissão dos esforços do eixo até a fundação. Os elementos podem ser divididos em quatro elementos principais: fundação, estrutura estática, filme de óleo e estrutura rotativa. Tendo a rigidez de cada elemento, pode-se obter a rigidez equivalente do mancal ao considerar todos esses elementos em série.

Tanto a rigidez da fundação como das estruturas normalmente são calculadas utilizando análise estática linear via método dos elementos finitos. As rigidezes (jargão do meio industrial) desses elementos são basicamente dependentes da geometria, material e fixação. Para os valores de rigidez das estruturas da máquina em questão, são utilizados os valores calculados pelo fabricante da máquina, considerados parâmetros de entrada para o cálculo da cadeia de rigidez.

Os mancais guias de deslizamento utilizados na máquina estudada são do tipo segmentado, cada um com 12 sapatas igualmente espalhadas ao redor de uma superfície usinada no eixo do rotor. Os coeficientes de rigidez do filme de óleo foram calculados utilizando a Teoria de Mancais Curtos (VANCE, 1988). Pode-se discutir se a Teoria de Mancais Curtos seria a mais aplicável para o caso de mancal de sapatas, uma vez que, ao se analisar isoladamente as sapatas, a razão entre altura e perímetro se aproxima mais da aplicação da Teoria de Mancais Finitos. Entretanto, como o filme de óleo apresenta rigidez bem maior que os outros elementos, a sua influência na cadeia de rigidez dos mancais é reduzida e se aprofundar ainda mais nesse assunto não traria ganhos adicionais às análises do presente trabalho. Além disso, os valores obtidos estão coerentes com os estimados para mancais segmentados para rotores verticais por LUND (1965) em seu extenso trabalho para obtenção dos coeficientes de rigidez de mancais de deslizamento de forma gráfica. Vale ressaltar que, no meio da indústria hidrelétrica, já se considera a possibilidade de não considerar mais a flexibilidade do filme de óleo e tratá-lo como infinitamente

rígido, uma vez que seu cálculo não é trivial e a sua influência na rigidez equivalente é reduzida. Para ilustrar essa discussão, na Figura 33, a influência da rigidez do filme de óleo na rigidez equivalente do mancal é exibida. A consideração da sua rigidez somente é importante se estiver muito próxima dos outros componentes que possuem rigidez reduzida (maior flexibilidade), que não é o caso estudado aqui.

Figura 33 – Influência do filme de óleo na cadeia de rigidez dos mancais.

Os coeficientes de amortecimento dos mancais também foram desconsiderados nesse estudo. Por se tratar de uma máquina vertical, ou seja, sem esforços radiais adicionais devido à massa do rotor, e com mancais de múltiplas sapatas, a desconsideração do amortecimento não afeta significativamente a sua dinâmica. Devido a esses fatores e a complexidade de se obter valores confiáveis de amortecimento para esse tipo de mancal, é uma prática comum na indústria não considerá-los nas análises de linha de eixo. De certa forma essa é uma abordagem conservadora, uma vez que o amortecimento reduziria ligeiramente os níveis de vibração e não afetaria significativamente os valores das frequências naturais.

Os valores finais das rigidezes dos mancais consideradas estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Coeficientes dinâmicos dos elementos dos mancais

Elemento	Mancal do gerador [kN/ μ m]	Mancal da turbina [kN/ μ m]
Fundação	15	5
Estrutura estática	3,5	0,7
Filme de óleo	16,67	16,67
Estrutura rotativa	10	10
Rigidez equivalente	2,0	0,5

Para representar o empuxo magnético, também podem ser utilizados os elementos de mancais. Entretanto, para esse caso, os coeficientes de amortecimento são nulos e as rigidezes são negativas, ou seja, quanto menor for a distância entre o rotor e o estator do gerador, maior será a força de atração. Segundo o projeto elétrico da máquina em estudo, o seu valor do empuxo magnético é de 0,227 kN/ μ m.

2.4 PROPRIEDADES DO SISTEMA EM ESTUDO

A partir do desenho construtivo e dados técnicos de uma máquina real, representada na Figura 34, o modelo de elementos finitos utilizado nesse trabalho foi construído e tem sua geometria apresentada na Figura 35.

As propriedades dos elementos internos do rotor (elementos de viga) são apresentadas na Tabela 3 e dos elementos externos (elementos de mancal e vedação) são apresentadas na Tabela 4.

Parâmetro	Valor
Tipo de turbina	Francis vertical
Mancais guias	2

Figura 34 - Corte da máquina em estudo.

Figura 35 - Representação do modelo de vigas.

Tabela 3 - Propriedades dos elementos internos.

Elemento	Nós	Componente	Raio Ext. [m]	Raio Int. [m]	Comprimento [m]	Massa [ton]
01	A-B	Turbina	4,41	4,10	1,815	118
02	B-C	Turbina	4,41	4,10	1,585	103
03	C-D	Turbina	4,41	4,10	0,953	62
04	D-E	Eixo	1,30	1,14	2,101	21
05	E-F	Eixo	1,30	1,14	5,287	52
06	F-G	Eixo	1,30	1,14	1,319	13
07	G-H	Gerador	8,97	7,75	1,240	624
08	H-I	Gerador	8,97	7,75	1,260	634
09	I-J	Eixo	0,80	0,62	1,990	13
10	J-K	Eixo	0,80	0,62	0,660	4
11	K-L	Eixo	0,80	0,62	1,190	8

Tabela 4 - Propriedades dos elementos externos.

Elemento	Nó	Componente	Massa [ton]				Rigidez [kN/ μ m]				Amortecimento [Ns/ μ m]			
			xx	xy	yx	yy	xx	xy	yx	yy	xx	xy	yx	yy
Vedação	B	Selo lab. da turbina	75	0	0	75	0,17	0,04	-0,04	0,17	8,8	0,67	-0,67	8,8
Mancal	E	Mancal guia da turbina	-	-	-	-	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0
Mancal	H	Empuxo magnético	-	-	-	-	-0,227	0	0	-0,227	0	0	0	0
Mancal	K	Mancal guia do gerador	-	-	-	-	2,0	0	0	2,0	0	0	0	0

3 SOLUÇÃO DO MODELO PROPOSTO

3.1 ANÁLISE MODAL

Depois de montar as matrizes globais do modelo de elementos finitos, foi realizada uma análise modal para obter as frequências naturais e os modos de vibrar do rotor da unidade geradora. Vale salientar que, devido à consideração dos efeitos giroscópios e dos coeficientes dinâmicos dos selos, tem-se que lidar matrizes assimétricas para a solução do modelo.

Para qualquer sistema linear não-amortecido, as equações de movimento podem ser dadas pela equação 4.1.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (4.1)$$

A solução para a equação 4.1 é assumida como sendo um movimento harmônico, representada pela equação 4.2.

$$\{q\} = \{\phi\} \cdot e^{j \cdot \lambda \cdot t} \quad (4.2)$$

Assim, a equação 4.1 pode ser reescrita como representado na equação 4.3.

$$(-\lambda^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \{\phi\} \cdot e^{j \cdot \lambda \cdot t} = 0 \quad (4.3a)$$

$$(-\lambda^2 \cdot [M] + [K]) \cdot \{\phi\} = 0 \quad (4.3b)$$

$$[K] \cdot \{\phi\} = \lambda^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \quad (4.3c)$$

Dessa maneira, chega-se a um problema de autovalor e autovetor que pode ser facilmente resolvido.

Entretanto, se amortecimento é adicionado ao sistema, a equação geral de movimento se modifica para o formato da equação 4.4.

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [C] \cdot \{\dot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = 0 \quad (4.4)$$

Para esse tipo de sistema, ao se propor uma solução no formato da equação 4.2, a equação geral do sistema (equação 4.4) se reduz ao representado na equação 4.5.

$$(-\lambda^2 \cdot [M] + j \cdot \lambda \cdot [C] + [K]) \cdot \{\phi\} \cdot e^{j \cdot \lambda \cdot t} = 0 \quad (4.5a)$$

$$(-\lambda^2 \cdot [M] + j \cdot \lambda \cdot [C] + [K]) \cdot \{\phi\} = 0 \quad (4.5b)$$

$$[K] \cdot \{\phi\} + j \cdot \lambda \cdot [C] \cdot \{\phi\} = \lambda^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \quad (4.5c)$$

Utilizando a equação 4.6 para retirar o símbolo de número imaginário da equação 4.5, chega-se na equação 4.7.

$$\bar{\lambda} = j \cdot \lambda \quad (4.6)$$

$$[K] \cdot \{\phi\} + \bar{\lambda} \cdot [C] \cdot \{\phi\} = -\bar{\lambda}^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \quad (4.7)$$

Para facilitar a extração das frequências naturais e modos de vibrar do sistema amortecido, a equação 4.7 foi reduzida para um formato análogo ao sistema não-amortecido (equação 4.3c) com o auxílio das equações 4.8 a 4.10. O resultado da redução é apresentado na equação 4.11.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [K] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} -[C] & -[M] \\ [I] & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\{\bar{\phi}\} = \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \bar{\lambda} \cdot \{\phi\} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$[\bar{K}] \cdot \{\bar{\phi}\} = \bar{\lambda} \cdot [\bar{M}] \cdot \{\bar{\phi}\} \quad (4.11)$$

A solução das equações 4.3 e 4.11 são equivalentes, mas, para o caso da equação 4.11, apenas os valores da primeira metade do autovetor $\{\bar{\phi}\}$ são considerados. Dessa maneira, retorna-se ao problema de autovalor e autovetor equivalente a um sistema não amortecido. Entretanto, tem que se ter em conta que são matrizes não simétricas.

O método empregado para resolver o problema de autovalores é um método baseado na abordagem de subespaços chamado Método Derivativo de Frequência (ANSYS; 2016). Esse método utiliza um conjunto ortogonal de uma sequência de vetores de Krylov (equação 4.12).

$$[Q] = [\{q_1\}\{q_2\}\{q_3\} \dots \{q_m\}] \quad (4.12)$$

Para obter a sequência de vetores ortogonais apropriados, a equação 4.11 é derivada em relação a $\bar{\lambda}$, resultando na equação 4.13. Assim, o vetor inicial q_0 é dado pela equação 4.14, onde o vetor $\{\tilde{q}_0\}$ é um conjunto de números não-nulos qualquer (randômico), e o vetor subsequente (q_1) é dado pela equação 4.15, considerando uma translação de “s”. A ideia de utilizar um valor de translação é que o método utilizado encontra mais facilmente as soluções de autovetores e autovalores ao redor de “s”. Assim, o valor de “s” é definido inicialmente como o limite inferior da faixa de frequências de interesse da solução. Dessa maneira, se a quantidade de modos de vibrar especificados não for encontrada com esse valor

inicial de translação, um novo valor mais alto é utilizado para tentar encontrar os modos de valor mais elevado. Para o caso de a faixa de interesse começar em 0 Hz (modos de corpo rígido), pode-se utilizar um valor inicial de -1, por exemplo.

$$[\bar{M}] \cdot \{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (4.13)$$

$$\{q_0\} = -[\bar{M}] \cdot \{\tilde{q}_0\} \quad (4.14)$$

$$([\bar{K}] - s \cdot [\bar{M}]) \cdot \{q_1\} = \{q_0\} \quad (4.15)$$

Assim, chega-se a expressão geral para os vetores dada pela equação 4.16.

$$([\bar{K}] - s \cdot [\bar{M}]) \cdot \{q_{j+1}\} = \{q_j\} \quad (4.16)$$

A equação 4.16 pode ser resolvida utilizando o método de matrizes esparsas, baseado na eliminação direta das equações ao invés de resolver de forma iterativa. Essa eliminação direta requer a fatorização das equações de um sistema linear esparsos para uma matriz triangular inferior (ver exemplo na Figura 36). Uma vez obtida essa matriz triangular inferior, o sistema pode ser resolvido aplicando uma substituição retroativa. Dessa forma, a matriz $[Q]$ é obtida e aplicada na equação 4.11, resultando na equação 4.17, que contém as matrizes finais diagonalizadas. Assim, os autovalores e autovetores da equação 4.17 podem ser extraídos pelo procedimento de solução direta de inversão de matriz. Maiores detalhes podem ser verificadas em ANSYS (2016).

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & & & & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n} \end{bmatrix}$$

Figura 36 - Exemplo de matriz triangular inferior.

$$[Q]^T \cdot [\bar{K}] \cdot [Q] \cdot \{\bar{\phi}\} = \bar{\lambda} \cdot [Q]^T \cdot [\bar{M}] \cdot [Q] \cdot \{\bar{\phi}\} \quad (4.17)$$

3.2 ANÁLISE TRANSIENTE

A equação geral que rege o movimento de um corpo ou sistema linear, sujeito a esforços externos, é apresentada na equação 4.18. Assim, para obter a resposta de um sistema, é necessário obter o vetor de deslocamento $\{q\}$ em determinados intervalos de tempo sujeitos forças externas dadas por $\{F\}$.

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [C] \cdot \{\dot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = \{F\} \quad (4.18)$$

Uma maneira de resolver esse sistema é através do Método HHT (Hilber-Hughes-Taylor), que é um método implícito de integração no tempo (uma extensão do Método de Newmark). A seguir são apresentados ambos os métodos de resolução da análise transiente.

3.2.1 MÉTODO DE NEWMARK

Para obtenção do vetor de deslocamentos, o Método de Newmark (NEWMARK, 1959) utiliza uma expansão de diferenças finitas em um dado intervalo de tempo Δ_t (equações 4.19 e 4.20).

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = \{\dot{q}_n\} + [(1 - \delta) \cdot \{\ddot{q}_n\} + \delta \cdot \{\ddot{q}_{n+1}\}] \cdot \Delta_t \quad (4.19)$$

$$\{q_{n+1}\} = \{q_n\} + \{\dot{q}_n\} \cdot \Delta_t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \cdot \{\ddot{q}_n\} + \alpha \cdot \{\ddot{q}_{n+1}\} \right] \cdot \Delta_t^2 \quad (4.20)$$

Aplicando as equações 4.19 e 4.20 na equação 4.18, chega-se na equação 4.21, onde é possível obter o valor do vetor de deslocamentos do próximo passo ($\{q_{n+1}\}$) a partir das informações do passo anterior ($\{\ddot{q}_n\}$, $\{\dot{q}_n\}$ e $\{q_n\}$). Isso significa que, a partir das condições iniciais e das matrizes do sistema, a resolução do problema pode ser facilmente obtida. Os coeficientes utilizados na equação 4.21 são definidos conforme as equações 4.22 a 4.29.

$$(a_o \cdot [M] + a_1 \cdot [C] + [K]) \cdot \{q_{n+1}\} = \{F\} + [M] \cdot (a_o \cdot \{q_n\} + a_2 \cdot \{\dot{q}_n\} + a_3 \cdot \{\ddot{q}_n\}) + \\ + [C] \cdot (a_1 \cdot \{q_n\} + a_4 \cdot \{\dot{q}_n\} + a_5 \cdot \{\ddot{q}_n\}) \quad (4.21)$$

$$a_o = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta_t^2} \quad (4.22)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta_t} \quad (4.23)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta_t} \quad (4.24)$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \cdot \alpha} - 1 \quad (4.25)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (4.26)$$

$$a_5 = \frac{\Delta_t}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (4.27)$$

$$a_6 = \Delta_t \cdot (1 - \delta) \quad (4.28)$$

$$a_7 = \Delta_t \cdot \delta \quad (4.29)$$

Uma vez obtido o vetor de deslocamentos para o próximo passo, os vetores de velocidade ($\{\dot{q}_{n+1}\}$) e aceleração ($\{\ddot{q}_{n+1}\}$) para o próximo passo também podem ser obtidos pelas equações 4.30 e 4.31, respectivamente.

$$\{\dot{q}_{n+1}\} = a_1 \cdot [\{q_{n+1}\} - \{q_n\}] - a_4 \cdot \{\dot{q}_n\} - a_5 \cdot \{\ddot{q}_n\} \quad (4.30)$$

$$\{\ddot{q}_{n+1}\} = a_0 \cdot [\{q_{n+1}\} - \{q_n\}] - a_2 \cdot \{\dot{q}_n\} - a_3 \cdot \{\ddot{q}_n\} \quad (4.31)$$

Para garantir a estabilidade da solução proposta pelo método, podem-se ajustar os valores dos parâmetros α e δ . Assim, a solução do método é incondicionalmente estável desde que as relações apresentadas nas inequações 4.32 a 4.34 sejam satisfeitas (HUGHES, 1987).

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 \quad (4.32)$$

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{2} + \delta + \alpha > 0 \quad (4.34)$$

Assim, introduzindo um parâmetro de fator de decaimento da amplitude (γ), os parâmetros para o Método de Newmark são propostos conforme as equações 4.35 e 4.36, e respeitando a inequação 4.37.

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot (1 + \gamma)^2 \quad (4.35)$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma \quad (4.36)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (4.37)$$

3.2.2 MÉTODO HHT

No método de Newmark, é possível controlar a quantidade de dissipação numérica da solução através de dois parâmetros (δ e γ). Entretanto, para baixas frequências, esse método não consegue manter uma boa precisão para um problema de segunda ordem, uma vez que, para garantir a estabilidade, obrigatoriamente se tem $\delta > 1/2$. Para corrigir essa questão, poderia ser utilizado um fator de decaimento da amplitude nulo, resultando em nenhum amortecimento numérico. Nesse caso, para obtenção das altas frequências da estrutura, níveis muito elevados de ruído numérico podem ser produzidos (HUGHES, 1987).

Para contornar esse problema, foi desenvolvido o Método HHT, o qual introduz uma dissipação numérica controlada em modos de maior frequência, eliminando esse “ruído” numérico e, ao mesmo tempo, mantendo uma boa precisão na resposta.

Para obter os deslocamentos do sistema, o Método HHT modifica a equação 4.18 para o formato apresentado na equação 4.38 e continua utilizando as equações 4.19 e 4.20.

$$[M] \cdot \{\ddot{q}_{n+1-\alpha_m}\} + [C] \cdot \{\dot{q}_{n+1-\alpha_f}\} + [K] \cdot \{q_{n+1-\alpha_f}\} = \{F_{n+1-\alpha_f}\} \quad (4.38)$$

As novas variáveis utilizadas na equação 4.38 são apresentadas nas equações de 4.39 a 4.42.

$$\{\ddot{q}_{n+1-\alpha_m}\} = (1 - \alpha_m) \cdot \{\ddot{q}_{n+1}\} + \alpha_m \cdot \{\ddot{q}_n\} \quad (4.39)$$

$$\{\dot{q}_{n+1-\alpha_f}\} = (1 - \alpha_f) \cdot \{\dot{q}_{n+1}\} + \alpha_f \cdot \{\dot{q}_n\} \quad (4.40)$$

$$\{q_{n+1-\alpha_f}\} = (1 - \alpha_f) \cdot \{q_{n+1}\} + \alpha_f \cdot \{q_n\} \quad (4.41)$$

$$\{F_{n+1-\alpha_f}\} = (1 - \alpha_f) \cdot \{F_{n+1}\} + \alpha_f \cdot \{F_n\} \quad (4.42)$$

Aplicando essas variáveis na equação 4.38, chega-se na equação 4.43, que relaciona o deslocamento do próximo passo de tempo com os deslocamentos, velocidades, acelerações e forças aplicadas do passo anterior. As velocidades e acelerações são então obtidas com a utilização das equações 4.30 e 4.31.

$$\begin{aligned} & (a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [C] + (1 - \alpha_f) \cdot [K]) \cdot \{q_{n+1}\} = (1 - \alpha_f) \cdot \{F_{n+1}\} + \alpha_f \cdot [K] \cdot \{q_n\} + \\ & + [M] \cdot (a_0 \cdot \{q_n\} + a_2 \cdot \{\dot{q}_n\} + a_0 \cdot \{\ddot{q}_n\}) + [C] \cdot (a_1 \cdot \{q_n\} + a_4 \cdot \{\dot{q}_n\} + a_5 \cdot \{\ddot{q}_n\}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Os novos parâmetros utilizados na equação 4.43 são apresentados nas equações de 4.44 a 4.49.

$$a_0 = \frac{1-\alpha_m}{\alpha \cdot \Delta_t^2} \quad (4.44)$$

$$a_1 = \frac{(1-\alpha_f) \cdot \delta}{\alpha \cdot \Delta_t} \quad (4.45)$$

$$a_2 = a_0 \cdot \Delta_t \quad (4.46)$$

$$a_3 = \frac{1-\alpha_m}{2 \cdot \alpha} - 1 \quad (4.47)$$

$$a_4 = \frac{(1-\alpha_f) \cdot \delta}{\alpha} - 1 \quad (4.48)$$

$$a_5 = (1 - \alpha_f) \cdot \left(\frac{\delta}{2 \cdot \alpha} - 1 \right) \cdot \Delta_t \quad (4.49)$$

Para garantir que o sistema seja incondicionalmente estável e preciso, os parâmetros δ , α , α_m e α_f devem atender as condições expressas na equação 4.50 e nas inequações 4.51 a 4.53.

$$\delta = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (4.50)$$

$$\alpha > \frac{1}{2} \cdot \delta \quad (4.51)$$

$$\alpha_m \leq 0 \quad (4.52)$$

$$0 \leq \alpha_f \leq \frac{1}{3} \quad (4.53)$$

Assim como apresentado no Método de Newmark, pode-se reduzir os quatro coeficientes anteriores por um único parâmetro de fator de decaimento da amplitude (γ), resultando nas equações de 4.54 a 4.57.

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot (1 + \gamma)^2 \quad (4.54)$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma \quad (4.55)$$

$$\alpha_f = \gamma \geq 0 \quad (4.56)$$

$$\alpha_m = 0 \quad (4.57)$$

Um valor recomendado para o fator de decaimento da amplitude é $\gamma = 0.05$, pois é um valor que consegue eliminar os ruídos em alta frequência e, ao mesmo tempo, manter uma boa precisão para os modos mais baixos (HUGHES, 1987).

3.2.3 FORÇAS APLICADAS

Para a simulação transiente, foram considerados no modelo, como carregamentos externos, o desbalanceamento residual e as forças hidráulicas radiais.

O desbalanceamento residual pode ser calculado a partir da ISO 1940, que classifica como admissível um resíduo de 6,3 mm/s (Classe G 6,3). A partir da rotação da máquina e o peso total do rotor, e considerando esse grau de balanceamento, pode-se calcular a força centrífuga resultante. Assim, para uma massa aproximada de 1,7 mil toneladas e rotação nominal da máquina, resulta uma estimativa para a força centrífuga de 98 kN. Vale ressaltar que essa força de desbalanceamento é válida somente se a máquina estiver no limiar da sua classe de balanceamento. Entretanto, a máquina comumente se encontra em um grau de balanceamento significativamente melhor, mas, pela dificuldade de se prever qual o grau de balanceamento que se encontrava a máquina no momento da aquisição dos dados, foi considerado o grau G 6,3 para efeitos de cálculo.

As forças hidráulicas provenientes do escoamento e incidentes no rotor da turbina podem ser divididas em duas parcelas: estática e flutuante. Devido a questões geométricas da caixa-espiral, existe uma força radial constante unilateral aplicada no rotor (Figura 37). Já as flutuações ocorrem ao redor do rotor e possuem uma frequência que é uma fração da frequência fundamental da máquina. Para consideração da força estática unilateral, é considerado o valor estimado pelo fabricante da turbina, que é de 760 kN.

Figura 37 – Vista de topo da caixa espiral com indicação da força hidráulica lateral estacionária. Adaptado de (VLADISLAVLEV; 1972)

As forças hidráulicas flutuantes ou oscilatórias são fortemente dependentes do ponto de operação da máquina (TRALLI; ZACHARIADIS, 2017). Por ponto de operação se entende a vazão e queda que estão sendo aplicadas na máquina. Toda turbina hidráulica possui um diagrama onde mostra os seus limites de operação no tocante aos parâmetros citados. Tal diagrama é chamado de Diagrama de Colina, exemplificado na Figura 38 (nesse caso, o diagrama está em função da queda e potência ativa). Na referida figura são demonstrados os distintos fenômenos hidráulicos que ocorrem na máquina dependendo do seu ponto de operação dentro do diagrama de colina. A área compreendida pelas linhas vermelhas do diagrama representa a região permitida de operação da turbina. No tocante às imagens do escoamento ao lado do diagrama, a imagem superior mostra um vórtice axissimétrico, condição típica para quando a máquina está operando em sobrepotência. Normalmente, tal condição não se reflete em aumento na amplitude da oscilação de eixo, mas tem um impacto mais significativo nas oscilações de pressão no tubo de sucção da máquina. Já a região denominada “Ponto ótimo” no Diagrama de Colina apresenta uma zona com o escoamento livre de vórtices, próxima à condição de projeto, sendo esse o escoamento típico encontrado na região do ponto ótimo da máquina (potência e queda nominais). Por apresentar um escoamento “bem comportado” nessa região, praticamente não é visível qualquer influência nas oscilações de eixo provenientes de excitações induzidas pelo escoamento, apenas pelo desbalanceamento residual. Por outro lado, a imagem intermediária apresenta a formação de uma trança com separação de fase, o que é típico de ocorrer quando a máquina opera em carga parcial. Usualmente, a frequência de oscilação dessa trança é de 25% (um quarto) da frequência de rotação da máquina. Outra condição típica de escoamento, abordada pela imagem inferior da Figura 38, é a condição que precede a formação e estabelecimento da trança. Essa condição é caracterizada por um escoamento turbulento com emissão generalizada de pequenos vórtices entre as pás, tanto nas arestas de entrada como saída, que acabam por produzir um espectro de frequências com uma larga banda de atuação.

Figura 38 – Exemplo de um Diagrama de Colina para uma turbina Francis (TRALLI; ZACHARIADIS, 2017).

Como mencionado no parágrafo anterior, cada condição diferente do regime hidráulico ao qual a turbina está submetida, reflete-se no espectro de frequências observado na oscilação de eixo da máquina. Um exemplo desse impacto para turbinas Francis é apresentado na Figura 39, que mostra de forma qualitativa os espectros de frequência obtidos experimentalmente. A frequência de atuação da força hidráulica flutuante é claramente definida (25% da rotação). Entretanto, não é tão trivial estimar a sua amplitude. O que se verifica nas medições da máquina em estudo é que a contribuição das forças hidráulicas flutuantes no espectro de frequências das oscilações de eixo corresponde à mesma magnitude da contribuição da frequência fundamental no mancal da turbina e a quatro vezes a contribuição da frequência fundamental no mancal do gerador, ambos os casos considerando carga parcial (60% da potência nominal). Baseado na proporção presente no mancal da turbina, mais próximo do ponto de aplicação da força hidráulica, a estimativa para a força hidráulica flutuante foi obtida. Cumpre ressaltar que o procedimento proposto para a estimativa da força hidráulica flutuante não encontra similar na bibliografia.

O resumo das forças externas aplicadas ao modelo é apresentado na Tabela 5. Foram considerados dois cenários distintos para efeitos de simulação numérica:

carga parcial, ou seja, turbina operando a 60% da potência nominal; e carga plena, ou seja, turbina operando a 100% da potência nominal.

Figura 39 – Exemplo do impacto do ponto de operação da máquina dentro do Diagrama de Colina no espectro de frequências da oscilação lateral de eixo em uma turbina Francis (TRALLI; ZACHARIADIS, 2017).

Tabela 5 – Magnitudes e frequências das forças externas laterais aplicadas na linha de eixo.

Cenário	Força	Ponto de aplicação	Valor [kN]	Frequência
Carga parcial (60% da potência nominal)	Desbalanceamento	Centro do gerador	98	Fundamental
	Força hidráulica unilateral	Centro da turbina	760	-
	Força hidráulica flutuante	Centro da turbina	98	$\frac{1}{4}$ da fundamental
Carga total (100% da potência nominal)	Desbalanceamento	Centro do gerador	98	Fundamental
	Força hidráulica unilateral	Centro da turbina	760	-
	Força hidráulica flutuante	Centro da turbina	0	-

4 RESULTADOS TEÓRICOS

Ao aplicar a metodologia apresentada na seção 4 para a solução do modelo proposto na seção 3, chegou-se aos resultados que são apresentados a seguir, tanto para a análise modal como para a análise transiente. Para tal propósito, foi utilizado o módulo de solução (*Solver*) do software comercial Ansys™ (ANSYS, 2018).

4.1 ANÁLISE MODAL

Para as análises modais, foram calculados os 6 primeiros modos considerando cinco valores de porcentagem da velocidade de rotação nominal (0%, 58%, 116%, 175% e 233%). Os diagramas de Campbell para 4 diferentes condições foram calculados a fim de se verificar a influência do empuxo magnético e do selo labirinto da turbina na dinâmica da máquina. Assim, as condições consideradas e os respectivos diagramas são:

- A. Selo labirinto da turbina Francis e empuxo magnético desconsiderados (Figura 40);
- B. Selo labirinto da turbina Francis considerado e empuxo magnético desconsiderado (Figura 44);
- C. Selo labirinto da turbina Francis desconsiderado e empuxo magnético considerado (Figura 48);
- D. Selo labirinto da turbina Francis e empuxo magnético considerados (Figura 52);

Os modos de vibrar também são apresentados, para cada uma das condições listadas anteriormente, após os respectivos diagramas de Campbell. A frequência indicada para cada modo, juntamente com o modo de vibrar, se refere à frequência de operação da máquina. Também é indicado o sentido de giro de cada modo. A

máquina opera girando no sentido horário, quando vista de topo, dessa forma, os modos que apresentam o mesmo sentido de giro, ou seja, sentido horário, são aqui denominados de “*Forward Whirl*” (FW) e os que apresentam giro no sentido oposto, de “*Backward Whirl*” (BW).

A seguir os modos de vibrar e diagramas de Campbell apresentados são analisados tomando como referência a condição “A” (selo labirinto e empuxo magnético desconsiderados). Um resumo dos valores para a rotação de operação e seus respectivos desvios em relação à referência são apresentados na Tabela 6.

Comparando aos resultados da condição C com a condição de referência, pode-se perceber que o empuxo magnético apresenta pouca influência em todos os modos de vibrar, mantendo praticamente inalterados os modos 1, 2 e 6 e alterando ligeiramente a deflexão na região da turbina para os demais modos. Já no Diagrama de Campbell, o empuxo magnético apresenta uma leve redução nas frequências naturais dos modos, o que é de certa forma esperado, uma vez que a rigidez do sistema é diminuída devido ao empuxo magnético.

Por outro lado, o selo labirinto da turbina (Condição B) apresenta uma influência mais significativa nos modos de vibrar e valores das frequências naturais. Enquanto os modos 1, 2, 3 e 6 são praticamente preservados (apenas ligeiras diferenças nas deflexões pontuais), os modos 4 e 5 são invertidos entre si. No respectivo diagrama de Campbell, os dois primeiros modos mantem-se praticamente inalterados, com um incremento devido ao aumento da rigidez do sistema. Já os 3º e 4º modos apresentam o mesmo formato até 110% da rotação e, após esse valor, apresentam um comportamento mais linear e uma disparidade menor entre seus valores. Por outro lado, os 5º e 6º modos apresentam o mesmo formato, mas com valores menores de frequências.

Ao se considerar os dois efeitos somados (selo labirinto da turbina e empuxo magnético do gerador, ou seja, Condição D) nos modos de vibrar, como esperado, é significativamente mais perceptível a influência do selo labirinto, tanto nos modos de vibrar como no Diagrama de Campbell. De qualquer forma, pode-se perceber que a frequência de rotação nominal da máquina está bem abaixo da sua primeira frequência natural, indicando não ser um caso de ressonância, o que poderia aumentar significativamente os níveis de vibração.

Tabela 6 - Valores de frequências naturais para a rotação nominal da máquina

Modo	Condição						
	A [Hz]	B		C		D	
		Valor [Hz]	Desvio [%]	Valor [Hz]	Desvio [%]	Valor [Hz]	Desvio [%]
1	2,64	3,36	27	2,61	-1,2	3,33	26
2	3,73	4,49	20	3,66	-1,8	4,45	19
3	6,27	6,29	0,2	5,96	-5,0	5,96	-4,9
4	6,54	6,53	-0,1	6,26	-4,3	6,22	-4,8
5	6,92	6,52	-5,8	6,90	-0,3	6,52	-5,8
6	8,87	8,65	-2,5	8,87	0,0	8,65	-2,5

Figura 40 - Diagrama de Campbell desconsiderando selo labirinto e empuxo magnético.

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
1 (2,64 Hz)		Anti-horário (BW)	2 (3,73 Hz)		Horário (FW)

Figura 41 - Modos de vibrar 1 e 2 desconsiderando selo labirinto e empuxo magnético

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
3 (6,27 Hz)		Anti-horário (BW)	4 (6,54 Hz)		Horário (FW)

Figura 42 - Modos de vibrar 3 e 4 desconsiderando selo labirinto e empuxo magnético

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
5 (6,92 Hz)		Anti-horário (BW)	6 (8,87 Hz)		Horário (FW)

Figura 43 - Modos de vibrar 5 e 6 desconsiderando selo labirinto e empuxo magnético

Figura 44 - Diagrama de Campbell considerando selo labirinto e desconsiderando empuxo magnético.

Figura 45 - Modos de vibrar 1 e 2 considerando selo labirinto e desconsiderando empuxo magnético

Figura 46 - Modos de vibrar 3 e 4 considerando selo labirinto e desconsiderando empuxo magnético

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
5 (6,52 Hz)		Anti-horário (BW)	6 (8,65 Hz)		Horário (FW)

Figura 47 - Modos de vibrar 5 e 6 considerando selo labirinto e desconsiderando empuxo magnético

Figura 48 - Diagrama de Campbell considerando empuxo magnético e desconsiderando selo labirinto.

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
1 (2,61 Hz)		Anti-horário (BW)	2 (3,66 Hz)		Horário (FW)

Figura 49 - Modos de vibrar 1 e 2 considerando empuxo magnético e desconsiderando selo labirinto

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
3 (5,96 Hz)		Anti-horário (BW)	4 (6,26 Hz)		Anti-horário (BW)

Figura 50 - Modos de vibrar 3 e 4 considerando empuxo magnético e desconsiderando selo labirinto

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
5 (6,90 Hz)	<p>Mancal guia do gerador</p> <p>Empuxo magnético</p> <p>Mancal guia da turbina</p> <p>Labirinto</p>	Horário (FW)	6 (8,87 Hz)	<p>Mancal guia do gerador</p> <p>Empuxo magnético</p> <p>Mancal guia da turbina</p> <p>Labirinto</p>	Horário (FW)

Figura 51 - Modos de vibrar 5 e 6 considerando empuxo magnético e desconsiderando selo labirinto

Figura 52 - Diagrama de Campbell considerando empuxo magnético e selo labirinto.

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
1 (3,33 Hz)		Anti-horário (BW)	2 (4,45 Hz)		Horário (FW)

Figura 53 - Modos de vibrar 1 e 2 considerando selo labirinto e empuxo magnético

Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro	Modo	Deflexão da linha de eixo	Sentido de giro
3 (5,96 Hz)		Anti-horário (BW)	4 (6,22 Hz)		Horário (FW)

Figura 54 - Modos de vibrar 3 e 4 considerando selo labirinto e empuxo magnético

Figura 55 - Modos de vibrar 5 e 6 considerando selo labirinto e empuxo magnético

4.1.1 ROTOR FRANCIS E PALHETAS DIRETRIZES

Além de verificar os modos de vibrar e os respectivos valores de frequências naturais da linha de eixo, é importante comprovar que as frequências naturais do rotor da turbina e das palhetas diretrizes estão bem afastadas dos valores de excitações conhecidas da máquina.

Portanto, utilizando o software comercial de modelamento tridimensional Solid EdgeTM (SIEMENS, 2018), o rotor da turbina Francis e as palhetas diretrizes foram modelados e tiveram suas frequências naturais calculadas. As malhas de elementos finitos utilizadas são apresentadas na Figura 56. As malhas foram construídas e os modos de vibrar calculados utilizando o software comercial AnsysTM (ANSYS, 2018). No modelo foram utilizados tetraedros e as propriedades padrão do aço (densidade 7.850 kg/m³ e módulo de elasticidade 200 GPa).

Como se pode observar na Figura 57 e Figura 58, as frequências naturais desses componentes são muito superiores às primeiras frequências naturais da

linha de eixo e das excitações. Portanto, a análise transiente isolada desses componentes e o seu impacto na dinâmica da máquina podem ser desconsiderados.

Figura 56 - Malhas de elementos finitos utilizadas para as análises modais do rotor da turbina e palheta (as setas em vermelho indicam as superfícies que tiveram seu movimento restringido em todas as direções para execução do cálculo).

Figura 57 - Modos e valores de frequências naturais de vibração do rotor Francis.

Figura 58 - Modos e valores de frequências naturais de vibração da palheta diretriz.

4.2 ANÁLISE TRANSIENTE

A análise numérica transiente consiste na simulação do modelo proposto considerando a rotação nominal e as forças descritas no item 4.2.1 (hidráulicas e desbalanceamento) para as 4 condições a seguir (equivalentes as consideradas na análise modal):

- A. Selo labirinto da turbina Francis e empuxo magnético desconsiderados (item 5.2.1);
- B. Selo labirinto da turbina Francis considerado e empuxo magnético desconsiderado (item 5.2.2);
- C. Selo labirinto da turbina Francis desconsiderado e empuxo magnético considerado (item 5.2.3);
- D. Selo labirinto da turbina Francis e empuxo magnético considerados (item 5.2.4).

Assim como pra análise modal, também foi utilizado o módulo de solução (*Solver*) do software comercial AnsysTM (ANSYS, 2018).

Foi considerado que o rotor parte do repouso com as forças já aplicadas. Entretanto, o tempo total do cálculo foi longo o suficiente para que o sistema atingisse a sua estabilidade (60 segundos). Os gráficos temporais apresentam a escala do tempo indo de 0 a 10 segundos, sendo esse intervalo é referente aos últimos 10 segundos da simulação.

Na resolução das equações da análise transiente foi utilizado o Método HHT (descrito no item 4.2.2), com um fator de decaimento da amplitude de $\gamma = 0.05$ e um passo de tempo de 0.01 segundos foi aplicado.

Para os casos onde não há nenhum amortecimento presente, o rotor vibraria com as suas frequências naturais até o fim da análise, enquanto o correto seria vibrar conforme as frequências de excitação. Dessa forma, para os casos A e C, um pequeno amortecimento (1.0 Ns/ μ m) foi adicionado nos elementos de mancal. Trata-

se de um amortecimento bem pequeno, mais de 8 vezes menor que o proporcionado pelo selo labirinto, portanto, não afetando significativamente os valores de oscilação e órbita, mas o suficiente para amortecer as frequências naturais iniciais depois de decorrido um certo intervalo de tempo. Como mencionado no tópico sobre os coeficientes dinâmicos dos mancais, existe uma grande dificuldade em se determinar os seus valores de rigidez e amortecimento para pouco ganho na compreensão da dinâmica da máquina. Portanto, tal desconsideração consiste em uma prática habitual da indústria, especialmente, para hidrogeradores verticais com mancais de sapatas (segmentado) com reduzida carga lateral.

A fim de se obter os espectros de frequência, uma janela de ponderação foi multiplicada pelos sinais transientes (foram considerados os últimos 4096 pontos do sinal) e, então, no sinal resultante dessa multiplicação, a Transformada de Fourier foi aplicada. Uma função janela é aplicada para diminuir o “espalhamento” do espectro, fenômeno também conhecido como “*leakage*”, uma vez que não se consegue ter um sinal perfeitamente periódico. Como as frequências inseridas nos carregamentos são conhecidas e se está interessado nas amplitudes resultantes em cada uma das frequências, foi aplicada a janela “*Flat Top*” (SMITH; 2011).

Os valores de oscilação pico a pico foram obtidos considerando o maior valor menos o menor valor do sinal, depois de atingido o equilíbrio do sistema.

A seguir são apresentados os valores de oscilação pico a pico para cada condição estudada na Tabela 7 e, de forma gráfica, na Figura 59.

Tabela 7 – Valores de oscilação da linha de eixo para diferentes condições e velocidades (Análise numérica).

Condição	Componente e carregamento		Oscilação de eixo [$\mu\text{m pp}$]	Desvio [%]
A	Mancal guia do gerador	Carga parcial	92	
		Carga plena	69	
	Mancal guia da turbina	Carga parcial	598	
		Carga plena	137	
B	Mancal guia do gerador	Carga parcial	82	-11
		Carga plena	72	4
	Mancal guia da turbina	Carga parcial	356	-40
		Carga plena	94	-31
C	Mancal guia do gerador	Carga parcial	94	2
		Carga plena	79	14
	Mancal guia da turbina	Carga parcial	634	6
		Carga plena	159	16
D	Mancal guia do gerador	Carga parcial	86	-7
		Carga plena	82	19
	Mancal guia da turbina	Carga parcial	376	-37
		Carga plena	107	-22

Figura 59 – Valores de oscilação da linha de eixo em função da potência (Análise numérica).

Como é possível perceber pela análise da Figura 59, a consideração da influência do selo labirinto (Caso B), aumenta a rigidez da turbina e reduz os níveis de oscilação, quando comparado com o caso de não consideração dessa influência (Caso A). Já para o caso do empuxo magnético (Caso C), as oscilações no mancal da turbina aumentaram se comparado com o Caso A. O que era esperado, uma vez que a rigidez do sistema foi diminuída. Ao se considerar ambos os efeitos, selo labirinto e empuxo magnético (Caso D), constata-se que a influência do selo labirinto é significativamente maior do que a do empuxo magnético. Também é possível perceber a influência da força flutuante nas vibrações da turbina, demonstrando ser a principal contribuidora para o nível de vibração se comparada com a força de desbalanceamento residual.

Já para o mancal do gerador a influência da força flutuante e das considerações de empuxo magnético e selo labirinto são bem menos relevantes e não afetam significativamente os níveis de vibração se comparados com o caso A.

Conforme esperado, as vibrações são praticamente iguais nas duas direções analisadas para cada mancal (X e Y). Já nos espectros dos sinais, é possível ver claramente a maior influência das forças hidráulicas nos mancais da turbina, e do desbalanceamento nos mancais do gerador. Tais relações já eram esperadas, uma vez que estão perto dos pontos de aplicação das respectivas forças.

Os formatos de onda gerados nos sinais temporais são bem similares independentemente da condição considerada, sendo somente dependentes da carga aplicada. Nas órbitas, percebe-se que não estão centradas, sendo resultado da aplicação da força hidráulica estática no rotor da turbina.

4.2.1 Condição A

Figura 60 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial da turbina - Condição A.

Figura 61 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial do gerador - Condição A.

Figura 62 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena da turbina - Condição A.

Figura 63 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena do gerador - Condição A.

Figura 64 - Órbitas do rotor em diferentes planos para condição A.

4.2.2 Condição B

Figura 65 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial da turbina - Condição B.

Figura 66 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial do gerador - Condição B.

Figura 67 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena da turbina - Condição B.

Figura 68 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena do gerador - Condição B.

Figura 69 - Órbitas do rotor em diferentes planos para condição B.

4.2.3 Condição C

Figura 70 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial da turbina - Condição C.

Figura 71 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial do gerador - Condição C.

Figura 72 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena da turbina - Condição C.

Figura 73 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena do gerador - Condição C.

Figura 74 - Órbitas do rotor em diferentes planos para condição C.

4.2.4 Condição D

Figura 75 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial da turbina - Condição D.

Figura 76 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga parcial do gerador - Condição D.

Figura 77 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena da turbina - Condição D.

Figura 78 - Sinais temporais de oscilação de eixo e espectro de frequência para carga plena do gerador - Condição D.

Figura 79 - Órbitas do rotor em diferentes planos para condição D.

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

5.1 CONDIÇÕES DO ENSAIO

A unidade hidrogeradora aqui estudada teve sua oscilação de eixo monitorada durante um ensaio de faixa operativa. A unidade foi ensaiada em 2 patamares de potência: carga parcial (60% da potência nominal) e plena (100% da potência nominal). Para cada patamar de potência, os sinais foram adquiridos após a estabilização térmica e dinâmica da unidade.

5.2 INSTRUMENTAÇÃO

Para os ensaios foram utilizados proximímetros na região dos mancais. Os sinais provenientes dos sensores foram amostrados com uma frequência de aquisição de 1000 Hz e um filtro *anti-aliasing* de 390 Hz, tendo o seu registro uma duração aproximada de 262 segundos (aproximadamente 262 mil pontos) para cada patamar de potência.

Os sensores utilizados na máquina podem ser visualizados nas Figuras 79 e 80.

Figura 80 - Sensores de proximidade do eixo instalados no mancal guia do gerador.

Figura 81 - Sensores de proximidade do eixo instalados no mancal guia da turbina.

5.3 RESULTADOS

Os valores pico a pico de oscilação lateral do eixo medidos em campo, nos planos da turbina e gerador, com rejeição de 3% de desvio, são apresentados na Figura 82. Assim como na análise transiente numérica, os espectros de frequência foram obtidos a partir da Transformada de Fourier com utilização da Janela do tipo “*Flat Top*”. Foram instalados dois sensores de proximidade para cada mancal guia, dispostos defasados a 90° entre si: $x=30^\circ$; $y=120^\circ$.

Os valores das amplitudes característica de vibração foram calculados para cada componente nos patamares de potência ensaiados. Para o cálculo desse valor característico de oscilação de eixo, foram desconsiderados 1,5% dos pontos com menor valor e 1,5% dos pontos com maior valor. Essa técnica é utilizada a fim de se eliminar pontos espúrios e ruídos que podem afetar os valores de forma equivocada. Tais valores são apresentados na Figura 82.

Nos espectros de frequência do mancal do gerador, é possível ver claramente a influência dominante da frequência fundamental (frequência de rotação) e como ela permanece praticamente constante em função da potência ensaiada. Há uma influência significativa da frequência sub-harmônica no seu espectro para a condição de carga parcial.

O espectro de frequência da turbina também apresenta influência da frequência fundamental, mas a contribuição da frequência sub-harmônica é muito mais significativa na condição de carga parcial.

Figura 82 – Valores de oscilação da linha de eixo em função da potência ativa (Resultado experimental).

Figura 83 - Espectros de frequência para o mancal guia do gerador.

Figura 84 - Espectros de frequência para o mancal guia da turbina.

Figura 85 - Sinais temporais de oscilação de eixo do gerador para potência de 60% (Unidades em milímetros).

Figura 86 - Sinais temporais de oscilação de eixo do gerador potência de 100% (Unidades em milímetros).

Figura 87 - Sinais temporais de oscilação de eixo da turbina para potência de 60% (Unidades em milímetros).

Figura 88 - Sinais temporais de oscilação de eixo da turbina para potência de 100% (Unidades em milímetros).

Figura 89 - Órbitas do rotor nos planos dos mancais

6 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Ao comparar os formatos de onda dos sinais temporais dos resultados numéricos com os experimentais, é possível notar que estão coerentes e apresentam comportamento similar. Uma diferença mais perceptível está presente no sinal do mancal do gerador para plena carga, onde é possível ver a atuação de uma frequência acima da fundamental que distorce um pouco o sinal.

As órbitas geradas pelos modelos também estão bem próximas. Na órbita para carga parcial do mancal da turbina, fica bem claro, em ambos os casos, a formação dos laços pela presença de uma frequência sub-harmônica. Como discutido ao longo do texto, isso se deve à atuação de uma trança originada das condições de escoamento para cargas parciais.

Os espectros gerados para os modelos numéricos possuem boa correlação com os experimentais com exceção do espectro para cargas parciais do mancal do gerador. No ensaio, a contribuição da frequência sub-harmônica na amplitude é muito mais elevada do que previsto nos modelos numéricos. Tal fato resulta em um aumento no nível de vibração para essa condição, como pode ser claramente visualizado na Figura 90.

Para previsão da vibração no mancal da turbina, os modelos considerando a presença do selo labirinto (Condições B e D) possuem uma melhor correlação com o ensaio. Por outro lado, para carga plena, a presença do selo labirinto resulta numa redução da correlação em relação à sua ausência (Condições A e C). De maneira geral, as presenças do selo labirinto e empuxo magnético (Condição D) resultaram em uma previsão melhor do nível de vibração.

Porém, para as vibrações no mancal do gerador, as condições não afetam significativamente o seu valor, que apresentou boa correlação para carga plena. Para carga parcial, a discrepância entre o valor medido e os calculados é significativa para todas as condições, como comentado no parágrafo anterior onde foi tratado sobre os espectros de frequência. Essa discrepância se deve à impossibilidade do modelo considerado de transferir os esforços sub-harmônicos

para o gerador. Nos modelos considerados, é possível perceber que a influência da força sub-harmônica no gerador é extremamente baixa.

Figura 90 - Comparação dos resultados numéricos e experimentais de oscilação de eixo.

7 CONCLUSÕES

O rotor de uma unidade geradora vertical com turbina Francis de alta potência foi modelado utilizando o método dos elementos finitos e análises numéricas modais e transientes (temporais, órbitas e espectros) foram feitas e comparadas com dados experimentais de uma máquina real. Para modelagem dos selos labirintos, cálculos de dinâmica dos fluidos computacional foram executados de forma a se obter as velocidades atuantes nas folgas dos selos labirintos. Tanto as simulações transientes como a máquina real tiveram seus dados avaliados para 2 patamares de potência. Para a carga parcial (60% da potência plena), foi possível analisar a influência da atuação da frequência sub-harmônica causada pela formação da trança no tubo de sucção. Para carga plena foi possível analisar a máquina em seu estado ótimo, tendo apenas o desbalanceamento residual como mecanismo de excitação.

A frequência de excitação resultante das forças hidráulicas flutuantes foi representada de acordo com o observado experimentalmente em turbinas Francis e é bem definida para o caso estudado. Entretanto, a estimativa da sua amplitude não é tão trivial de ser feita. Na ausência de uma alternativa mais precisa, foi proposta que a estimativa da sua amplitude fosse feita considerando as amplitudes do espectro de frequência do fenômeno que ela excita, ou seja, a oscilação lateral da linha de eixo. Como o espectro de frequências das oscilações de eixo apresenta a mesma amplitude tanto na frequência de excitação do desbalanceamento como para frequência de excitação das forças hidráulicas, ambas foram consideradas tendo a mesma magnitude de força. Essa foi uma proposta inovadora, mas que precisa de mais estudos e dados de outras máquinas Francis para poder ser validada.

No tocante ao comportamento da turbina, foi possível perceber a importância da consideração do selo labirinto no estudo do seu comportamento dinâmico sob regime de carga parcial. Os modelos que apresentaram menor desvio nessa condição eram os que tiveram o selo labirinto modelado. Por outro lado, para carga plena, todos os modelos previram valores abaixo do medido, com desvios maiores para os modelos com selo labirinto. Já no tocante ao gerador, os desvios relativos

entre os diversos modelos não é tão significativo, embora a consideração do empuxo magnético aparente ter um desvio menor em relação às medições.

Sendo prática comum na indústria considerar no cálculo de linha de eixo a máquina operando em carga plena e desconsiderando a influência do selo labirinto (Condição C), o presente trabalho demonstra que essa hipótese é razoavelmente boa. Entretanto, para estudos do seu comportamento para cargas parciais, essa aproximação já não é tão precisa no tocante à vibração da turbina. Para essa condição, a ausência do selo labirinto conduz a uma previsão de nível de vibração bem mais elevada do que se essa influência fosse considerada. O presente trabalho indica que essa influência não pode ser desconsiderada para cargas parciais.

Por fim, a unidade foi modelada com sucesso e foi possível entender melhor o seu comportamento dinâmico, tanto em relação aos modos naturais de vibrar e frequências naturais como para o comportamento em regime de operação parcial e plena. Aprimoramentos devem ser feitos nas equações que representam as excitações externas e considerações adicionais podem ser feitas no modelo a fim de se melhorar a estimativa da sua amplitude de oscilação. Dessa maneira, podem-se recomendar as seguintes linhas de estudo para futuros trabalhos:

- Levantamento de massas residuais de desbalanceamento em unidades hidrogeradoras;
- Formas alternativas de estimativa das forças hidráulicas atuantes em rotores (Francis, Pelton ou Kaplan) para a máquina operando em carga parcial e carga total;
- Estudar e modelar o desalinhamento angular entre turbina e gerador.
- Estudar e modelar diferentes tipos de selos labirintos para turbinas Francis e definir condições e geometrias de estabilidade.

8 REFERÊNCIAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL). Brasil. BIG - Banco de Informações de Geração. Disponível em: <<http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>>.

Acesso em: 09 abr. 2018.

ANSYS. Disponível em: < <https://www.ansys.com/academic>>. Acesso em: 01 abr. 2018.

ANSYS Workbench Guide. Disponível em: <https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_thry/thy_tool13.html> Acesso em: 26 jun. 2016.

AVELINO, A. F. Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE. São Paulo: Editora Érica, 2000.

BÄUERLE, S.; HETZLER, H. Non-linear dynamics of a rotor system with compliant seal. 9th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC), Budapest, Hungary, 2017.

CARDINALI, R.; NORDMANN, R.; SPERBER, A. DYNAMIC SIMULATION OF NON-LINEAR MODELS OF HYDROELECTRIC MACHINERY. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 7, n. 1, p. 29-44, 1993.

CHILDS, D. W., DYNAMIC ANALYSIS OF TURBULENT ANNULAR SEALS BASED ON HIRS' LUBRICATION.EQUATION, ASME Journal of Lubrication Technology, v. 105, p. 429-436, 1983.

ČELIČ, D., ONDRÁČKA, H., The influence of disc friction losses and labyrinth losses on efficiency of high head Francis turbine. Journal of Physics: Conference Series 579, p 11, 2015.

DIETZEN, F. J. et al. ROTORDYNAMIC COEFFICIENTS AND LEAKAGE FLOW OF PARALLEL GROOVED SEALS AND SMOOTH SEALS. Lewis Research Center Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, p 129-153, 1986.

DIETZEN, F. J.; NORDMANN, R. Calculating rotordynamic coefficients of seals by finite difference techniques. *Journal of Tribology*, n. 109, p. 388-394, 1987.

DIETZEN, F. J.; NORDMANN, R. FINITE DIFFERENCE ANALYSIS OF ROTORDYNAMIC SEAL COEFFICIENTS FOR AN ECCENTRIC SHAFT POSITION. *Lewis Research Center Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery*, p 269-284, 1988a.

DIETZEN, F. J.; NORDMANN, R. FINITE DIFFERENCE ANALYSIS OF ROTORDYNAMIC SEAL COEFFICIENTS FOR AN ECCENTRIC SHAFT POSITION. *Lewis Research Center Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery*, p 211-227, 1988b.

ETTER, S.; GUMMER, J. H; SEIDEL, U. MEASUREMENTS OF THE FORCES ON THE SHAFT OF A MODEL HYDRAULIC TURBINE AND THEIR APPLICATION TO THE PROTOTYPE. *20th IAHR Symposium: Hydraulic Machinery and Systems*, Charlotte (NC), USA, 2000.

GUSTAVSSON, R. K.; AIDANPÄÄ, J. THE INFLUENCE OF MAGNETIC PULL ON THE STABILITY OF GENERATOR ROTORS. *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, 10^a Edição, 2004, Honolulu, Hawaii.

HUGHES, T. J. R. THE FINITE ELEMENT METHOD LINEAR STATIC AND DYNAMIC FINITE ELEMENT ANALYSIS. Prentice-Hall, Inc.. Englewood Cliffs, NJ. 1987

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION. IEC 60034-7: Rotating electrical machines - Part 7: Classification of types of construction, mounting arrangements and terminal box position (IM Code). 1992.

ITAIPU BINACIONAL. Unidades Geradoras. Disponível em: <<https://www.itaipu.gov.br/energia/unidades-geradoras>>. Acesso em: 09 abr. 2018.

LUND, J. W. ROTOR-BEARING DYNAMICS DESIGN TECHNOLOGY. PART III: DESIGN HANDBOOK FOR FLUID FILM TYPE BEARINGS. Technical Report AFAPL-TR-65-45, Aero Propulsion Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

NEWMARK, N. M. "Method of Computation for Structural Dynamics". ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, v. 85, p. 67-94, 1959.

THE INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 1940: Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state - Part 1: Specification and verification of balance tolerances. Berlin, 2004.

JEFFCOTT, H. H. The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed – The Effect of Want of Balance. Philos Mag. Series 6, v. 37, p. 304, 1919.

KRÄMER, E. Maschinendynamik. Berlin: Springer Verlag, 1984.

PARSEL, J. K.; ALLAIRE, P. E.; BARRET, L. E. Frequency effects in tilting-pad journal bearing dynamic coefficients. ASLE Transactions, n. 26, p. 222-227, 1982.

RAO, J. S. History of Rotating Machinery Dynamics. Bangalore: Springer 2011.

SAN ANDRÉS, L.; ANDERSON, A. An all-metal compliant seal versus a labyrinth seal: A Comparison of Gas Leakage at High Temperatures. J. Eng. Gas Turb. Power 137, p 8, 2015.

SCHWIRZER, T. Dynamic stressing of hydroelectric units by stochastic hydraulic forces on the turbine runner. Water Power, n. 29, p. 39-44, 1977.

SILVA, E. L. DINÂMICA DE ROTORES: MODELO MATEMÁTICO DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS. 2004. 110 P. Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

SIEMENS. Solid Edge ST10. Disponível em: <https://docs.plm.automation.siemens.com/tdoc/se/110/se_help>. Acesso em: 12 abr. 2018.

SMITH, S. W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego, California, USA: California Technical Publishing. 2011.

TRALLI, F. C.; ZACHARIADIS, D. C., INFLUÊNCIA DO PONTO DE OPERAÇÃO NO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS PARA TURBINAS FRANCIS DE ALTA POTÊNCIA, 13º Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica, Lisboa, Portugal, 2017.

VANCE, J. M. Rotordynamics of turbomachinery. New York: Wiley, 1988.

VARGA, Z. E. Wellenbewegung, Reibung und Öldurchsatz beim segmetierten Radialgleitlager von beliebiger Spaltform unter konstanter und zeitlich veränder-licher Belastung. 1971. Dissertação - Instituto Federal de Tecnologia de Zurich, Zurich.

VLADISLAVLEV, L. A. Vibration of Hydro Units in Hydroelectric Power Plants. Moscou: Énergiya Publishers, 1972. 327 p.

VOITH HYDRO. Material didático e acervo interno: figuras 2D/3D e fotos. 2015.

WEDIG, W. Stochastische Schwingungen-Simulation, Schätzung un Stabilität. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, n. 67, p. 34-42, 1987.

XI, J.; RHODE, D. L. Rotordynamics of Turbine Labyrinth Seals with Rotor Axial Shifting. International Journal of Rotating Machinery, v. 2006, p 1-11, 2006.

XU, Y.; LI, Z. Computational Model for Investigating the Influence of Unbalanced Magnetic Pull on the Radial Vibration of Large Hydro-Turbine Generators. Journal of Vibration and Acoustics, v. 134, p. 051013, 2012.

ZACHARIADIS, D. C. ESTUDO DOS EFEITOS DO DESALINHAMENTO ANGULAR DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS NAS VIBRAÇÕES DE ROTORES FLEXÍVEIS. 2000. 180 P. Tese - Universidade de São Paulo, São Paulo.

ZHANG, M. et al. Numerical Simulation of the Flow Field in Circumferential Grooved Liquid Seals. Advances in Mechanical Engineering, v. 2013, p. 797201, 2013.

$$m_T = \frac{\rho \cdot \pi \cdot L \cdot (r_0^2 - r_i^2)}{840 \cdot (1 + \phi)^2} \quad (\text{A.4})$$

Nas equações de A.5 a A.8 são apresentadas as matrizes de massa devido à rotação do elemento.

$$[M_R^S]_0 = m_R \cdot \left[\begin{array}{cccccccccc} 36 & & & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & & & \\ 0 & -3 \cdot L & 4 \cdot L^2 & & & & & & & \\ 3 \cdot L & 0 & 0 & 4 \cdot L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3 \cdot L & 0 & 36 & & & & \\ 0 & -36 & 3 \cdot L & 0 & 0 & 0 & 36 & & & \\ 0 & -3 \cdot L & -L^2 & 0 & 0 & 0 & 3 \cdot L & 4 \cdot L^2 & & \\ 3 \cdot L & 0 & 0 & -L^2 & 0 & -3 \cdot L & 0 & 0 & 4 \cdot L^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{sim.} \quad (\text{A.5})$$

$$[M_R^S]_1 = m_R \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 15 \cdot L & 5 \cdot L^2 & & & & & & & \\ -15 \cdot L & 0 & 0 & 5 \cdot L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 15 \cdot L & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -15 \cdot L & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 15 \cdot L & -5 \cdot L^2 & 0 & 0 & 0 & 15 \cdot L & 5 \cdot L^2 & & \\ -15 \cdot L & 0 & 0 & -5 \cdot L^2 & 0 & 15 \cdot L & 0 & 0 & 5 \cdot L^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} sim. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (A.6)$$

$$[M_R^S]_2 = m_R \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 10 \cdot L^2 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 10 \cdot L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 5 \cdot L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \cdot L^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 5 \cdot L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \cdot L^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sim.} \quad (\text{A.7})$$

$$m_R = \frac{\rho \cdot \pi \cdot L \cdot (r_o^4 - r_i^4)}{120 \cdot L \cdot (1 + \phi)^2} \quad (A.8)$$

Na equação A.9 é apresentada a matriz de massa referente à torção do elemento.

$$[M_\theta^S] = \frac{1}{6} \cdot I_p^S \cdot L \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} sim. \\ \end{matrix} \quad (A.9)$$

Nas equações de A.10 a A.12 são apresentadas as matrizes antissimétricas dos efeitos giroscópicos do elemento.

$$[G^S]_0 = \frac{2 \cdot m_R}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ -360 & 0 & & & & & & & & & \\ 3 \cdot L & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 3 \cdot L & -4 \cdot L^2 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -36 & 3 \cdot L & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 36 & 0 & 0 & 3 \cdot L & 0 & -36 & 0 & & & & \\ 3 \cdot L & 0 & 0 & -L^2 & 0 & 3 \cdot L & 0 & 0 & & & \\ 0 & 3 \cdot L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \cdot L & -4 \cdot L^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} ant. sim. \\ \end{matrix} \quad (A.10)$$

$$[G^S]_1 = \frac{2 \cdot m_R}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ -15 \cdot L & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & -15 \cdot L & -5 \cdot L^2 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & -15 \cdot L & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -15 \cdot L & 0 & 0 & 0 & & & \\ -15 \cdot L & 0 & 0 & -5 \cdot L^2 & 0 & 15 \cdot L & 0 & 0 & & \\ 0 & -15 \cdot L & 5 \cdot L^2 & 0 & 0 & 0 & 15 \cdot L & -5 \cdot L^2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(A.11)} \quad \textit{ant.sim.}$$

$$[K^S]_1 = k^S \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & sim. \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & L^2 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & L^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

Na equação A.15 é apresentada a matriz de rigidez devido à torção do elemento.

$$[K_\theta^S]_1 = \frac{1}{6} \cdot I_p^S \cdot L \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & sim. \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.15)$$