DAN YAMASHITA

**Determinação das propriedades elásticas de laminados compósitos
carbono/epóxi pelo método de ultrassom por imersão**

São Paulo

2017

DAN YAMASHITA

**Determinação das propriedades elásticas de laminados compósitos
carbono/epóxi pelo método de ultrassom por imersão**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

Área de concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Julio Cezar
Adamowski

São Paulo
2017

DAN YAMASHITA

**Determinação das propriedades elásticas de laminados compósitos
carbono/epóxi pelo método de ultrassom por imersão**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

Área de concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Julio Cezar
Adamowski

São Paulo
2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Yamashita, Dan

Determinação das propriedades elásticas de laminados compósitos carbono/epóxi pelo método de ultrassom por imersão / D. Yamashita -- versão corr. -- São Paulo, 2017.

89 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Materiais compósitos 2.Ultrassom 3.Constante elástica I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski, pela orientação, suporte e compreensão além das minhas expectativas.

Ao Dr. Nicolás Pérez e Dr. Marco Aurélio Brizzotti Andrade, por todos os ensinamentos teóricos e práticos, orientação e desenvolvimento dos programas. Ao Dr. Silvo Granja por ajudado imensamente na utilização do goniômetro. Ao Dr. Flávio Buiochi e Dr. Pai Chi Nan pelos valiosos conselhos.

Ao Carlos e Tiago pela companhia e longas conversas, além de toda ajuda com o ingresso, e sempre me lembrando de todas as datas e eventos importantes do curso. Ao Timoteo, Alan e Rafael por toda ajuda com as amostras e desenvolvimento do controlador do goniômetro.

À EMBRAER/FAPESP por fornecer as amostras e recursos para aquisição de equipamentos utilizados neste trabalho.

Ao CNPq pela concessão de bolsa de mestrado (processo 161996/2013-2).

Ao Walter, Ricardo e Gustavo da Engemovi que foram minha inspiração para ingressar em um curso de mestrado.

Aos meus pais por sempre me apoiarem incondicionalmente em todas as decisões.

E finalmente, à minha noiva Daniela, por me apoiar e suportar o longo período de ausência, sempre com muito amor.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de determinar as constantes elásticas de laminados compósitos de carbono/epóxi através do método não destrutivo de ultrassom, utilizando a técnica da imersão. Foram implementados dois métodos de imersão em água para a determinação das constantes elásticas. Um que utiliza o percurso na água sem a amostra como referência (FRM), e outro que utiliza o percurso com incidência normal na amostra como referência (SRM). Laminados unidirecionais e biaxiais foram ensaiados em um goniômetro com elevada precisão de movimento angular, e a aquisição de sinais feita com alta taxa de amostragem e grande resolução de amplitude. Uma análise da influência da variação da temperatura e espessura foi feita e comprovada a superioridade do método SRM sobre o FRM. A compensação da temperatura através de um par de transdutores, bem como através de um termômetro com resolução de 0.01 °C foi implementada e comparada. As curvas de velocidade foram obtidas com transdutores de diferentes frequências centrais e comparadas. Foi realizada uma análise detalhada da sensibilidade das constantes elásticas com relação as velocidades em cada plano de medição, e através desta análise foram utilizados os planos mais adequados para reconstrução das constantes elásticas. Também foi verificada a polarização das ondas de cisalhamento para cada plano de medição, uma vez que é necessária a correta associação da velocidade experimental com a velocidade calculada para o procedimento de otimização. Um algoritmo de otimização foi utilizado para reconstruir as constantes elásticas dos laminados compósitos a partir da medição experimental das velocidades, onde foi avaliada a convergência utilizando a equação de Christoffel na forma implícita e explícita, para os materiais de simetria tetragonal e hexagonal.

Palavras-Chave: Ultrassom. Constante elástica. Materiais compósitos

ABSTRACT

The objective of this work is to obtain the elastic constants of carbon/epoxy composite laminates using ultrasonic non destructive testing, with immersion technique. Two immersion methods were implemented. One method uses as reference the path without sample, called fluid reference method (FRM), the second method uses the path with the specimen in normal incidence, called self-reference method (SRM). Unidirectional and biaxial laminates were tested using a goniometer with high angular resolution, and the signals were acquired with a high sample rate and amplitude resolution. Analyses of the influence of temperature and thickness variations were performed and concluded the superiority of the SRM over the FRM method. Temperature compensation using a pair of transducers and a 0.01° resolution thermometer was implemented and compared. Velocity curves were obtained and compared using transducers with different frequencies. A detailed analysis was performed to evaluate the sensitivity of the elastic constants to each velocity in different acquisition planes, and the results were used to reconstruct the elastic constants in the planes/velocities which they were most sensible to. As the correct association of each experimental velocity with the calculated velocities from Christoffel's equation is necessary, an analysis of the polarization mode of each velocity in the acquisition planes was also performed. An optimization algorithm was used to reconstruct the elastic constants of composite laminates from experimental velocities. Its convergence was evaluated for the implicit and explicit form of Christoffel's equation, and for materials with tetragonal and hexagonal symmetry.

Keywords: Ultrasonic. Elastic constant. Composite materials.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

LISTA DE ABREVIATURAS

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Visão geral	1
1.2	Motivação	2
1.3	Revisão da literatura	2
1.4	Objetivos	6
1.4.1	Objetivo geral	6
1.4.2	Objetivos específicos	6
1.5	Organização do texto	7
2	MATERIAIS COMPÓSITOS	9
2.1	Resina Epoxídica	10
2.2	Fibra de carbono	11
2.2.1	Forma de apresentação das fibras	12
2.3	Ensaio em materiais compósitos	15
3	CONSTANTES ELÁSTICAS	16
3.1	Tensão e deformação	16
3.2	Lei de Hooke generalizada	18
3.3	Notação reduzida	18
3.4	Trabalho e energia de deformação	19
3.5	Transformações	20
3.6	Sólidos anisotrópicos	21
3.6.1	Simetria ortotrópica	27
3.6.2	Simetria tetragonal	28
3.6.3	Simetria hexagonal	28
3.7	Constantes de engenharia	29
4	PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS	32
4.1	Velocidade de fase e grupo	35
4.2	Superfície de lentidão (inverso da velocidade)	38

5	MÉTODO DA IMERSÃO PARA DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS	40
5.1	Medições da velocidade acústica.....	43
5.2	Processamento de sinais	44
5.3	Método da auto-referência	45
5.4	Influência da temperatura.....	47
5.4.1	Compensação da temperatura	50
5.5	Sensibilidade.....	52
5.5.1	Análise de sensibilidade	52
5.6	Reconstrução das constantes elásticas através das velocidades experimentais	61
6	VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS	64
6.1	Processamento de sinais	66
6.2	Cálculo das velocidades.....	69
6.3	Sensibilidade angular	72
6.4	Reconstrução das constantes elásticas	73
6.4.1	Medição da densidade da amostra.....	73
6.4.2	Estabilidade do algoritmo de reconstrução	74
6.4.3	Laminado unidirecional (simetria hexagonal)	76
6.4.4	Laminado biaxial (simetria tetragonal)	78
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	82
7.1	Conclusão	82
7.2	Trabalhos futuros	84

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Comparativo resistência e rigidez específicas	10
Figura 2.2 - Tipos de tecido - a) tela; b) sarja; c) cesto; d) cetim.....	14
Figura 3.1 - Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal	16
Figura 3.2 – a) Deformação extensional	17
Figura 3.3 – Principais sistemas de simetria	22
Figura 3.4 - Transformações aplicadas para um material com simetria tetragonal ...	25
Figura 4.1 – Polarizações das ondas longitudinal e transversal nos modos puros e quasi.....	35
Figura 4.2 - Velocidade de fase x grupo para onda plana.....	37
Figura 4.3 - Velocidade fase x grupo para fonte pontual.....	37
Figura 4.4 - Curva de velocidade plano x1-x3.....	38
Figura 4.5 - Curva de lentidão plano x1-x3	39
Figura 5.1 – Orientação da amostra e ondas geradas para um plano de incidência fora do plano de simetria	41
Figura 5.2 - Laminado unidirecional com incidência oblíqua nos planos de simetria.....	41
Figura 5.3 - Medição das velocidades utilizando a técnica da transmissão	42
Figura 5.4 - Medição das velocidades utilizando a técnica da reflexão (dupla transmissão).....	43
Figura 5.5 - Sinal para incidência a 0°	47
Figura 5.6 - Erro nas velocidades sem compensação da temperatura para $l=180\text{mm}$ e $cam = 3000 \text{ m/s}$, com variação de espessura de 3mm a 9mm e variação da temperatura de 1°C	48
Figura 5.7 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_2) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. A onda transversal rápida tem caráter puro e, portanto não se acopla ao fluido e por isso está representada em linha tracejada.....	54
Figura 5.8 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_3) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. A onda transversal lenta tem caráter puro e, portanto não se acopla ao fluido e por isso está representada em linha tracejada.....	55

Figura 5.9 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 45^\circ$) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. As duas ondas de cisalhamento se propagam no fluído e podem ser medidas experimentalmente.....	56
Figura 5.10 - Variação das velocidades para uma variação no plano de incidência (x_1, φ), com ângulo $\varphi = 0^\circ, 5^\circ \text{ e } 10^\circ$ e $\varphi = 40^\circ, 45^\circ \text{ e } 50^\circ$. As velocidades são mais sensíveis a uma variação ou erro para o ângulo de 45°	57
Figura 5.11 - Variação das velocidades nos planos de incidência (x_1, x_3) e ($x_1, 45^\circ$) em relação a uma variação de 20% em c_{33}	57
Figura 5.12 – Polarização da onda em função do ângulo φ . Quando $P.n=0$ a onda tem modo de polarização de cisalhamento puro e portanto não se propaga no fluído.....	58
Figura 5.13 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_3) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial). A onda de cisalhamento lenta não se acopla ao fluído e por isso esta representada com linha tracejada	59
Figura 5.14 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 45^\circ$) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial). A onda de cisalhamento rápida não se acopla ao fluído e por isso esta representada com linha tracejada	60
Figura 5.15 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 20^\circ$) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial)	61
Figura 6.1 - Diagrama esquemático do sistema de aquisição de velocidades para determinação das constantes elásticas.....	65
Figura 6.2 – Amostra posicionada no goniômetro	65
Figura 6.3 - Sistema de aquisição de velocidades	66
Figura 6.4 - Velocidades obtidas utilizando a correlação cruzada e o cruzamento no 0	68
Figura 6.5 - Correlação cruzada aplicada no sinal com e sem intervalo de interesse.....	69
Figura 6.6 - Comparativo entre os métodos FRM e SRM com e sem compensação da temperatura.....	71

Figura 6.7 - Comparativo entre a compensação de temperatura através do termômetro e par de transdutores	71
Figura 6.8 - Variação da velocidade obtida utilizando diferentes reflexões e erros na espessura para incidência de 0°	72
Figura 6.9 - Velocidades obtidas com variações no ângulo φ	73
Figura 6.10 - Velocidades obtidas com diferentes frequências de transdutores	68
Figura 6.11 - Velocidades criadas a partir de um conjunto de constantes e com ruído uniforme de 10%	75
Figura 6.12 - Curvas de velocidade calculadas para o laminado unidirecional a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma explícita....	77
Figura 6.13 - Curvas de velocidade calculadas para o laminado unidirecional a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita....	77
Figura 6.14 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x1, 0^\circ)$ e $(x1, 90^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita simultânea	79
Figura 6.15 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x1, 45^\circ)$ e $(x1, 20^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita simultânea	79
Figura 6.16 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x1, 0^\circ)$ e $(x1, 90^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita por partes	80
Figura 6.17 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x1, 45^\circ)$ e $(x1, 20^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita por partes	80
Figura 6.18 - Velocidades obtidas no plano 1-3 e plano 1-2 para material de simetria tetragonal teórica	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 - Resistência e módulo de elasticidade para fibras de carbono PAN.....	12
Tabela 2-2 - Ensaio de materiais compósitos e respectivas normas.....	15
Tabela 5-1 - Erro experimental devido a uma variação de ± 4 ns causada por uma variação na temperatura para um compósito grafite/epóxi. Uma variação de $\pm 0.01^\circ$ gera uma variação no tempo de ± 2 ns.	50
Tabela 6-1 - Variação da solução obtida a partir de velocidades com diferentes níveis de ruído uniforme.....	75
Tabela 6-2 - Resultados obtidos a partir de velocidades sintetizadas com 5% de ruído com distribuição uniforme e diferentes vetores de partida.....	76
Tabela 6-3 - Constantes elásticas (GPa) e densidade para o laminado unidirecional.....	76
Tabela 6-4 - Constantes elásticas (GPa) e densidade para o laminado biaxial	78

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_{ij}	Tensor de tensão
ϵ_{ij}	Tensor de deformação
c_{ijkl}	Tensor de rigidez elástica
S_{ijkl}	Tensor de flexibilidade
a_{ik}	Coefficientes da matriz de transformação
M_{ij}	Coefficientes da matriz de Bond
E_i	Módulo de elasticidade
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
G_{ij}	Módulo de cisalhamento
u_i	Deslocamento da partícula
A	Área
ρ	Densidade
t	Tempo
A_0	Amplitude da onda
P_i	Polarização da onda
ω	Frequência angular
x_j	Vetor de posição
∂x_k	Derivada na direção x_k
V_p	Velocidade de fase
δ_{ik}	Delta de Kronecker
k_j	Vetor de onda
n_i	Componente do vetor unitário na direção x_i
Γ_{ij}	Tensor de Christoffel
λ	Autovetor
f	Frequência da onda
V_g	Velocidade de grupo
Δt	Diferença de tempo de vôo
h	Espessura
V_0	Velocidade da água
θ_r	Ângulo de refração

θ_i	Ângulo de incidência
φ	Ângulo de rotação no eixo x_1 com relação ao plano (x_1, x_3)
τ	Atraso
V_n	Velocidade da amostra para incidência normal
Δt_{θ_i}	Diferença de tempo entre incidência normal e oblíqua
Δt_n	Diferença de tempo entre o percurso sem amostra e a percurso para incidência normal na amostra
$V_{\text{água}}$	Velocidade na água
$\Delta t_{n-esima}$	Tempo entre reflexões na amostra
t_{am}	Tempo do percurso com amostra
t_w	Tempo do percurso sem amostra
c_w	Velocidade na água
d	Espessura
l	Distância entre transdutores no goniômetro
C	Correção devido diferença de temperatura na água
c_{am}	Velocidade na amostra
ξ	Erro no tempo devido deslocamento do sinal causado pela variação na temperatura
t_0	Tempo de vôo medido com o par de referência para compensação da temperatura
V_{calc}	Velocidades calculadas pela equação de Christoffel
V_{exp}	Velocidades obtidas experimentalmente
g	Aceleração da gravidade
M	Massa da amostra
V	Volume da amostra
F	Força

LISTA DE ABREVIATURAS

GFRP	Compósito de fibra de vidro
CFRP	Compósito de fibra de carbono
FRM	Método da referência no fluído
SRM	Método da auto-referência
PVDF	Fluoreto de polivinilideno

1 INTRODUÇÃO

1.1 Visão geral

O desenvolvimento contínuo dos materiais compósitos tem possibilitado cada vez mais seu emprego em aplicações críticas, com destaque para a indústria aeroespacial mas também com grande potencial para aplicação no setor de infraestrutura, como por exemplo em tubulações, trilhos, construções e pontes. Isto se deve as características apresentada por estes materiais tais como elevada rigidez e resistência específicas, além de ser possível projetar uma estrutura com a rigidez e resistência desejada nas direções dos esforços previstos. (BALASUBRAMANIAM; WHITNEY, 1996)

Entretanto antes que esses materiais possam ser utilizados em sua plena capacidade, grande conhecimento precisa ser obtido com relação as suas propriedades mecânicas uma vez que o conhecimento da matriz de rigidez elástica é fundamental para modelar e avaliar o comportamento desses materiais sob condições severas de carregamento. (REDDY et al., 2005)

Além disso existe a necessidade de monitorar e avaliar o comportamento da estrutura ao longo do tempo. A influência da absorção de água nas propriedades mecânicas dos materiais compósitos é um exemplo. O fenômeno pode induzir severas alterações no comportamento do material, degenerando as propriedades mecânicas, baixando a temperatura de transição vítrea e causando o aparecimento de microtrincas devido a indução de tensões residuais. (NIELSEN; TOFTEGAARD, 2000; FORTINEAU et al., 2007)

Outros danos causados na estrutura como microtrincas geradas por fadiga ou devido a elevadas temperaturas são outros exemplos, pois também podem introduzir uma anisotropia que não existia, além da diminuição da rigidez no material. (MARGUÈRES; MERAGHNI, 2013)

1.2 Motivação

Atualmente, o projeto de muitos compósitos é baseado em sua rigidez, e por este motivo métodos estáticos para medição da rigidez são amplamente utilizados.

Técnicas convencionais como ensaios de tração e compressão são destrutivos por natureza, fornecem apenas algumas constantes elásticas, possuem elevados custos na fabricação das amostras e são difíceis de serem realizadas *in loco*. Existe portanto a necessidade de desenvolver métodos de ensaios não destrutivos que não apenas detectem defeitos individuais, mas que sirvam para este propósito.

Quatro categorias de caracterização de materiais são: 1) determinação das constantes elásticas 2) determinação de fatores microestruturais e morfológicos como tamanho de grão, distribuição, textura, etc. 3) descontinuidades difusas como microporosidade ou microtrincas 4) propriedades mecânicas que são extrínsecas e dependem das propriedades elásticas, microestrutura do material e morfologia (REDDY et al., 2005).

Métodos por ultrassom são muito precisos e possuem grande acurácia, e por estes motivos têm sido utilizados extensivamente para determinação das constantes elásticas dos materiais. (ROKHLIN; WANG, 1992); (EVERY; SHCHSE, 1992); (ARISTEGUI; BASTE, 1997).

1.3 Revisão da literatura

Um dos primeiros trabalhos que utilizou velocidades de propagação ultrassônicas para determinar as constantes elásticas de materiais compósitos foi publicado em 1970 (ZIMMER; COST, 1970). Neste trabalho, Zimmer utilizou a técnica de transmissão por contato direto para determinar o conjunto de cinco constantes elásticas de uma amostra de compósito unidirecional de fibra de vidro/epóxi, e ao final os comparou com diversos outros resultados obtidos por modelos teóricos, validando assim o método. Este método, entretanto, possuía a desvantagem de necessitar o corte da amostra em diferentes direções, e em 1970, Markham (1970) propôs a técnica de imersão que permitia determinar as velocidades de propagação em diversas direções sem alteração da geometria da

amostra, e com estes resultados calculou as constantes elásticas para materiais compósitos unidirecionais.

Smith (1972) utilizou com sucesso a técnica de imersão para obter o conjunto de cinco constantes elásticas para diversas amostras transversalmente isotrópicas, e experimentos similares foram realizados por Gieske e Allred (1974) para obter o conjunto de nove constantes elásticas para uma amostra ortotrópica. Uma importante observação em seu trabalho foi de que as velocidades medidas por Markham eram as velocidades de grupo, porém são as velocidades de fase que estão relacionadas com a equação de Christoffel.

Pearson e Murri (1987) demonstraram que no plano de simetria os cálculos das velocidades de grupo e de fase eram coincidentes, desde que a velocidade fosse medida no ponto de máxima energia (velocidade de grupo), justificando desta forma os corretos resultados em alguns trabalhos já publicados.

A extensão para um material anisotrópico arbitrário foi feita por Rokhlin e Wang (1992), através da demonstração de que o tempo medido no ponto de máxima energia é o mesmo que o da velocidade de fase com um percurso diferente, e que portanto, através de relações trigonométricas é possível calcular a velocidade de fase medindo o tempo da velocidade de grupo. Entretanto existe um inconveniente em se medir o ponto de máxima energia, pois o ponto pode se encontrar deslocado no plano perpendicular ao plano de incidência, ou seja, para obter o ponto de máxima energia em uma incidência oblíqua em um material anisotrópico arbitrário, são necessárias varreduras em 2 eixos. A solução proposta para este problema publicada no mesmo trabalho foi o método da dupla transmissão, sendo o transdutor de recepção substituído por uma placa para reflexão do sinal, que retorna pelo material e tem ponto de saída coincidente com o ponto de emissão, eliminando portanto qualquer necessidade de ajuste. Este mesmo trabalho descreve como obter as constantes elásticas utilizando um procedimento de otimização baseado nos mínimos quadrados entre as diferenças das velocidades medidas experimentalmente, e as da solução da equação de Christoffel. Posteriormente, Kumar et al. (2006) propõem a utilização de um receptor de grande abertura de PVDF, que elimina a necessidade de reposicionamento do receptor, efeito da difração, e possibilita a detecção de múltiplas reflexões, além de ser uma solução de baixo custo.

Através do método da perturbação, Every e Sachse (1992) analisaram a acurácia das constantes elásticas obtidas de um material anisotrópico. Chu e Rokhlin (1994a) utilizaram fatores de polarização de deslocamento e definiram o grau de anisotropia dos materiais, e através da análise de sensibilidade das constantes elásticas com relação a dependência angular das velocidades medidas experimentalmente em dois planos de simetria, mostraram que é possível determinar as 5 constantes elásticas de materiais transversalmente isotrópicos e 7 das 9 constantes elásticas de materiais ortotrópicos, sendo que as duas constantes restantes não podem ser obtidas uma vez que são sensíveis às velocidades transversais com polarização horizontal pura, e estas não se acoplam no meio líquido. Calculando as constantes elásticas através do método dos mínimos quadrados, verificou através da introdução de ruído e de diferentes vetores de partida que a solução é única e estável no plano de simetria.

Pouco tempo depois Chu et al. (1994) analisaram a reconstrução das constantes elásticas de materiais ortotrópicos através dos planos de não simetria do material, e concluíram que se calculadas as nove constantes de forma simultânea, a solução era instável dependendo dos valores iniciais de partida e suscetível a ruídos, porém calculando primeiro as sete constantes possíveis de serem obtidas nos planos de simetria e posteriormente as duas restantes no plano de não simetria, a solução era única e estável. Ditre (1994) também estudou o problema onde mostrou que 15 das 21 constantes de um material anisotrópico podem ser recuperadas através de medições em 1 plano de aquisição, e 20 das 21 podem ser recuperadas através de medições em 2 planos.

No mesmo período, Chu e Rokhlin (1994b) propuseram um método para medição das velocidades de propagação utilizando o método da autoreferência (SRM), possuindo a vantagem de minimizar os erros causados por desvios na amostra como paralelismo, curvatura e atenuação, uma vez que as diferenças nos tempos são calculadas com base na própria amostra utilizando o tempo de voo da amostra a 0° como referência, ao contrário do método tradicional proposto por Markham que utiliza a referência como o percurso no fluido sem amostra (FRM). No mesmo estudo foi verificada a influência da temperatura e concluiu-se que erros experimentais na ordem de 15% poderiam ocorrer em seu ensaio caso houvesse variação da temperatura em apenas 1°C . Também demonstraram como estas

variações podem ser compensadas através da medição da temperatura, ou mais eficientemente através de um par de transdutores de referência.

A determinação das velocidades pela diferença dos atrasos utiliza uma equação simplificada para um meio anisotrópico arbitrário, pois a velocidade de fase baseada nas considerações geométricas não levam em consideração dois efeitos: um é o efeito da difração devido ao tamanho limitado da abertura do transdutor, e o outro é a distorção do sinal devido à mudança de fase nas interfaces. O efeito da difração na obtenção das velocidades é baixo, na ordem de 0.1% segundo Hosten (2001), porém Adamowski et al. (2010) analisaram o efeito da difração na velocidade e encontraram desvios na ordem de 1% para baixas frequências e 0.5% para frequências mais elevadas. O efeito da alteração de fase é significativo entre o primeiro e segundo ângulo crítico, porém pode ser corrigido de forma bem acurada. (WANG et al., 2003).

A grande maioria dos métodos sugeridos para determinação das constantes elásticas levavam em conta a simetria do material, simplificando desta forma os cálculos. Porém, a suposição da simetria pode ser prejudicial em alguns casos. Para compósitos unidirecionais, o plano transversal as fibras precisa ser isotrópico, entretanto o processo de fabricação pode induzir a uma anisotropia devido a distribuição desproporcional de fibras. Aristegui e Baste (1996) publicaram um detalhado trabalho mostrando como determinar simultaneamente as 21 constantes elásticas de um material através de um problema de otimização com restrições. Sua função de minimização utiliza a equação de Christoffel em sua forma explícita e não necessita a identificação da polarização da onda, o que pode ser difícil em planos de não simetria. Em um trabalho posterior, demonstrou como obter os planos de simetria através das velocidades de fase, bem como os ângulos de Euler. (ARISTEGUI; BASTE, 1997). Um trabalho semelhante foi realizado utilizando um algoritmo genérico, onde Vishnuvardhan et al. (2007) determinaram as constantes elásticas, simetria e os planos principais do material a partir das medições experimentais das velocidades, sem qualquer suposição prévia do material (VISHNUVARDHAN et al., 2008).

A estabilidade do método de inversão foi estudada por diversos autores. Rokhlin e Wang (1992) investigaram o efeito de diferentes níveis de ruído e de chutes iniciais no resultado da otimização, e concluíram que níveis de ruído de até 5% não influenciavam nos resultados quando as constantes eram obtidas nos

planos de simetria do material, bem como o vetor de partida também não tinha influência. Quando o plano de não simetria era utilizado, caso a obtenção das constantes fosse feita de maneira simultânea, o algoritmo se torna instável e muito suscetível a ruídos, porém caso as constantes sensíveis às medições nos planos de simetria fossem determinadas, e posteriormente as constantes restantes fossem obtidas através do plano de não simetria, então o algoritmo era estável (CHU; ROKHLIN, 1994a). Aristegui e Baste (1996) utilizando um algoritmo de otimização com restrição, e Balasubramaniam e Rao (1998) utilizando algoritmos genéticos concluíram que seus métodos eram estáveis com níveis de ruído em torno de 1.5%, quando calculadas simultaneamente as constantes elásticas do material. Também concluíram que nos planos de simetria um menor número de constantes podem ser obtidas do que nos planos de não simetria, entretanto quanto mais próximo ao plano de simetria a aquisição dos dados é feita, mais estável é o procedimento de inversão.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

Determinação das constantes elásticas de materiais com simetria hexagonal (laminado unidirecional) e tetragonal (laminado biaxial) através da medição das velocidades de propagação ultrassônicas utilizando a técnica da transparência por imersão.

1.4.2 Objetivos específicos

- Avaliar os diferentes métodos para obtenção das velocidades de propagação dos materiais
- Analisar a influência da temperatura, frequência do transdutor e geometria do material na obtenção das velocidades
- Avaliar a sensibilidade das constantes elásticas com relação às velocidades de propagação nos diferentes planos

- Desenvolver algoritmo para obtenção das velocidades e posteriormente das constantes elásticas dos materiais, e avaliar a estabilidade dos algoritmos de otimização

1.5 Organização do texto

Esse trabalho está organizado em sete capítulos, onde os capítulos de 2 a 5 contém a revisão teórica, o capítulo 6 apresenta os resultados experimentais, e o capítulo 8 a conclusão. Cada capítulo é descrito de forma resumida abaixo.

O capítulo 2 fornece uma introdução aos materiais compósitos. Uma breve descrição dos materiais compósitos e principais materiais utilizados é dada, bem como suas características. Em seguida uma informação mais detalhada sobre as matrizes e as fibras de carbono que são o objeto de estudo deste trabalho.

No capítulo 3 é apresentada uma revisão teórica das constantes elásticas. Primeiro, o conceito de tensão e deformação são apresentados, e a seguir, com a aplicação da lei de Hooke generalizada, as constantes elásticas. A utilização da notação reduzida é apresentada, e as diversas classes de simetria existentes dos materiais são detalhadas, com foco maior nas simetrias aplicadas aos materiais compósitos. Por fim as constantes elásticas são relacionadas com as constantes de Engenharia, que são mais comumente utilizadas nos ensaios mecânicos.

O capítulo 4 descreve a propagação de ondas em meios anisotrópicos, onde é apresentada a equação de Christoffel, que relaciona as constantes elásticas às velocidades de fase do material. Os modos puros e quasi de propagação das ondas são explicados, e por fim o conceito de velocidade de fase e grupo é dado.

O capítulo 5 descreve o método da imersão para determinação das constantes elásticas. Primeiro, uma descrição geral sobre o método é feita, e as técnicas de transmissão e dupla transmissão são apresentadas. Em seguida os métodos FRM e SRM para obtenção das velocidades são explicados, e a influência da temperatura é detalhadamente estudada, bem como os modos de compensação. Por fim, é apresentada uma análise de sensibilidade das constantes elásticas com relação as velocidades em cada plano, e as formas de utilização da equação de Christoffel para reconstrução das constantes elásticas.

O capítulo 6 detalha o arranjo experimental e apresenta o processo utilizado para medição das velocidades e reconstrução das constantes elásticas. Primeiro, os

resultados do processamento de sinais, comparação entre os métodos FRM e SRM, compensação de temperatura, sensibilidade angular e dependência da frequência são mostrados. Em seguida, uma avaliação da convergência do algoritmo utilizado é feita e as constantes elásticas são reconstruídas a partir das velocidades experimentais para os laminados unidirecionais e biaxiais.

O capítulo 7 apresenta as conclusões dos resultados obtidos neste trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Os laminados compósitos de plásticos reforçados são formados por fibras e uma matriz polimérica, podendo possuir um núcleo ou não. Dentre as fibras podemos destacar a fibra de vidro, a fibra de carbono e a aramida (kevlar), cada uma com características distintas. A aramida por exemplo, possui elevada tenacidade, enquanto que a fibra de carbono possui elevadas propriedades mecânicas como resistência à tração e rigidez, e a fibra de vidro como sendo um material mais economicamente viável para aplicações gerais, porém com boas propriedades mecânicas, possuindo resistência à tração superior a quase todos os metais. A vantagem que todos os materiais compósitos possuem no entanto é a elevada resistência específica, isto é, elevadas propriedades mecânicas associadas ao baixo peso. A Figura 2.1 mostra um comparativo entre os materiais compósitos com outros materiais tradicionalmente utilizados em projetos estruturais, onde GFRP se refere a um compósito de fibra de vidro e CFRP um compósito de fibra de carbono.

Com relação as matrizes poliméricas, estas podem ser classificadas em termoplásticas ou termofixas. Nas termoplásticas, os polímeros amolecem ou fundem quando aquecidos, uma vez que possuem fortes ligações intramoleculares e fracas ligações intermoleculares, que quando aquecidas permitem a movimentação relativa das moléculas. Dentre as principais vantagens podemos citar a alta resistência ao impacto quando comparada com resinas termofixas e a possibilidade de remodelar a forma. A principal desvantagem é o custo, já que o processo de fabricação e ferramental são mais complexos. Já as matrizes termofixas não podem ser amolecidas ou fundidas após a cura, e se aquecidas acima de certo limite, simplesmente se decompõe. Dentre as vantagens das matrizes termofixas podemos citar a maior resistência à elevadas temperatura em comparação aos termoplásticos, alta estabilidade dimensional e processo de fabricação mais fácil e econômico quando comparado às resinas termoplásticas, porém tendo como principal desvantagem o alto custo de reciclagem. (M. BALASUBRAMANIAN, 2014).

Dentre as matrizes termofixas podemos destacar o epóxi e o poliéster. A matriz epoxílica possui propriedades superiores a matriz de poliéster, no entanto com o avanço da tecnologia dos materiais, a resina poliéster tem ganhado cada vez

mais espaço por ser economicamente mais viável, devido por exemplo ao processo de cura que é mais simples.

Figura 2.1 - Comparativo resistência e rigidez específicas

Fonte: (M. BALASUBRAMANIAN, 2014)

2.1 Resina Epoxídica

As resinas epoxídicas, ou simplesmente epóxi, podem ser curadas com vários endurecedores e aceleradores, com aplicação ou não de temperatura, resultando em polímeros termofixos com elevado teor de ligações cruzadas e excelentes propriedades mecânicas, elevada temperatura de distorção térmica e transição vítrea, resistência ao envelhecimento pelo calor e ótima resistência química. A grande desvantagem, contudo, é o seu preço, ainda pouco competitivo com resinas como o poliéster ou mesmo a éster-vinílica, devido por exemplo ao processo de cura que é mais lento, bem como o custo da própria resina que é mais cara.

A aplicação da mesma vai de compósitos de alto-desempenho a tintas automotivas, passando por adesivos estruturais e encapsulamento de motores elétricos.

2.2 Fibra de carbono

As fibras de carbono são de longe as mais utilizadas em aplicações estruturais de alto desempenho, sobretudo os compósitos poliméricos. Propriedades como elevada resistência à tração, alto módulo de elasticidade e baixa densidade fazem deste o material de preferência para tais aplicações.

As propriedades das fibras de carbono são diretamente atribuídas à estrutura do cristal de grafite. Os átomos de carbono se organizam em camadas, também denominadas planos basais, alocando-se umas sobre as outras. Dentro do plano basal, os átomos são ligados por fortes ligações covalentes, enquanto as ligações na direção normal aos planos se dão por forças de Van der Waals, de grandeza muito inferior. Essa estrutura confere a anisotropia ao material, e por isso verifica-se que a resistência mecânica da fibra na direção transversal ao seu eixo é muito inferior àquela paralela ao mesmo.

A fibra de carbono é produzida pela oxidação controlada, carbonização e grafitização de um precursor rico em carbono, já na forma de fibra. O precursor mais comum é a poliacrilonitrila (PAN), pois é o que tem melhores resultados nas propriedades da fibra, mas outros precursores como o Rayon (fibra polimérica), e o piche mesofásico também são utilizados. Variações no processo de grafitização resultam em fibras com diferentes tensões de ruptura e módulos de elasticidade, e são classificadas como: fibras de alta resistência mecânica (high tensile strength, HT), fibras de alto módulo (high modulus, HM), e de módulo intermediário (intermediate modulus, IM). A Tabela 2-1 mostra as propriedades para os diversos tipos de fibra de carbono existentes fabricados a partir dos precursores do tipo PAN.

Tabela 2-1 - Resistência e módulo de elasticidade para fibras de carbono PAN

Grau	Módulo de elasticidade (GPa)	Tensão de fratura (GPa)
Alta resistência (<265 GPa) (HT)		
T300	230	3.53
T700	235	5.3
HTA	238	3.95
UTS	240	4.8
34-700	234	4.5
AS4	241	4.0
T650-35	241	4.55
Panex 33	228	3.6
F3C	228	3.8
TR50S	235	4.83
TR30S	234	4.41
Módulo intermediário (265-320 GPa) (IM)		
T800	294	5.94
M30S	294	5.49
IMS	295	4.12/5.5
MR40/MR50	289	4.4/5.1
IM6/IM7	303	5.1/5.3
IM9	310	5.3
T650-42	290	4.82
T40	290	5.65
Alto módulo (HM) (320-440 GPa)		
M40	392	2.74
M40J	377	4.41
HMA	358	3.0
UMS2526	395	4.56
MS40	340	4.8
HR40	381	4.8

Fonte: (GURIT, 2011)

2.2.1 Forma de apresentação das fibras

A fibra é o produto primário na escala dos materiais de reforço. São formadas por milhares de micro filamentos unidos por um agente aglutinante, e são apresentadas de duas formas básicas: fibras curtas (0,6 a 5cm) e fragmentadas, ou como fios contínuos.

Em sua forma curta, a fibra pode ser aplicada diretamente em um processo de laminação manual. É também possível que sejam encontradas na forma de véus

ou mantas, onde essas fibras particionadas são unidas por um material ligante, formando uma camada de fibra com distribuição aleatória de espessura aproximadamente uniforme.

2.2.1.1 Unidirecional

O laminado unidirecional pode ser fabricado a partir de fios contínuos (*rovings*) ou tecidos unidirecionais, dependendo do processo de fabricação. Uma pequena quantidade de fibras ou outros materiais podem existir em outras direções com a função de manter os fios na posição. Para aumentar as propriedades mecânicas, os tecidos unidirecionais podem ser do tipo preimpregnado (*prepeg*), onde não é necessário outros tipos de materiais para manter as fibras na posição, e esta função é feita pela resina. Quando o laminado é fabricado a partir de *rovings*, o processo de enrolamento filamentar ou pultrusão são os processos de fabricação utilizados.

2.2.1.2 Tecidos

A montagem por equipamentos especiais de fibra na direção do comprimento do fio, denominada urdume, e na direção transversal a ele, denominada trama, permite a fabricação de tecidos que conferem ao material resistência mecânica em duas direções.

Além da gramatura do tecido, é comum que se encontre uma indicação da quantidade da fibra na direção do urdume e da trama, tal que suas propriedades possam ser identificadas pelo usuário. A formação é dita balanceada quando há a mesma quantidade de fio em qualquer uma das direções principais.

De acordo com o arranjo de urdume e trama, tem-se a formação de tecidos tipo tela (*plain weave*), sarja (*twill weave*), cesto (*basket*) e cetim (*satín weave*), conforme Figura 2.2. A construção tipo tela é fabricada alternando-se o fio de urdume sobre e sob o fio de trama, tendo esta sequência invertida nas fileiras adjacentes, obtendo um tecido simétrico e com boa estabilidade. Entretanto, este tipo de tecido apresenta rigidez e módulo de elasticidade bastante baixos devido as ondulações que cada mecha faz ao longo da trama, e tecidos com tramas irregulares como os demais proporcionam melhores propriedades mecânicas

(MENDONÇA, 2005). Desta forma, mesmo que o tecido possua propriedades definidas pela sua orientação no plano 2-D, a ondulação causada pelo arranjo gera complexos campos de tensão/deformação 3-D, gerando diferentes possíveis modos de falha.

Mesmo quando um tecido é classificado como balanceado, o laminado fabricado pode possuir diferentes propriedades nas direções teoricamente balanceadas pois o tecido pode conter diferentes quantidade de ondulações em uma direção devido ao tipo de arranjo, diferentes quantidades de fibras mesmo que pequenas nas direções balanceadas (ADUMITROAIE; BARBERO, 2011), bem como podem ocorrer desvios durante o processo de fabricação, como por exemplo desvio da direção das fibras, fazendo com que um laminado classificado como balanceado não possua as mesmas propriedades nas direções assumidas de simetria (ARISTEGUI; BASTE, 1997).

Figura 2.2 - Tipos de tecido - a) tela; b) sarja; c) cesto; d) cetim

Fonte: (GURIT, 2011)

2.3 Ensaios em materiais compósitos

Dentre os diferentes ensaios realizados para caracterização de materiais compósitos, podemos citar os ensaios para caracterização da fibras e resinas, propriedades do laminado e ensaios mecânicos. Devido às características particulares dos materiais compósitos como, por exemplo, a anisotropia, diferentes resistências à tração e compressão e diferentes métodos de fabricação e disposição das fibras, existem de diversos ensaios específicos. Alguns dos ensaios aplicados nos materiais compósitos estão listados na Tabela 2-2.

Tabela 2-2 - Ensaios de materiais compósitos e respectivas normas

Ensaio	Norma ASTM
Densidade	D792
Fração volumétrica de fibra/resina	D3171
Conteúdo de vazios	D2584
Temperatura de transição vítrea	D4065
Tração 0°/90°	D3039
Compressão 0°/90°	D3410
Cisalhamento no plano	D3518, D5448, D5379
Cisalhamento interlaminar	D5379

Fonte: (Adams, 2010)

3 CONSTANTES ELÁSTICAS

3.1 Tensão e deformação

As tensões e deformações em um corpo podem ser divididas em 9 componentes: 3 longitudinais e 6 de cisalhamento. A Figura 3.1 mostra um elemento de volume infinitesimal, onde as tensões σ_{ii} são tensões longitudinais aplicadas na direção normal às faces do elemento, e as tensões $\sigma_{ij}, i \neq j$ são chamadas tensões de cisalhamento. A tensão σ_{11} é a tensão gerada pela por uma força atuando na direção x_1 no plano perpendicular a direção x_1 , enquanto que a tensão σ_{12} é a tensão gerada por uma força na direção x_2 no plano perpendicular a direção x_1 .

Figura 3.1 - Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal

Apesar de existirem nove componentes de tensões, como assumimos que a face do elemento não está girando, a resultante que atua sobre o corpo deve ser igual a zero, e consequentemente:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.1)$$

Portanto, as componentes de tensão são reduzidas a seis: três longitudinais, σ_{11} , σ_{22} e σ_{33} , e três de cisalhamento, σ_{12} , σ_{13} e σ_{23} .

A deformação tensorial de um corpo, dada por ϵ_{ij} , é relacionada aos deslocamentos u_{ij} através da equação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Pela equação (3.2), temos que as componentes de cisalhamento da deformação também são simétricas, já que $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

A Figura 3.2 ilustra os efeitos das tensões e consequentes deformações. As deformações para $i = j$ são representadas pela figura a, enquanto que as deformações para $i \neq j$ são representadas pela figura b.

Figura 3.2 – a) Deformação extensional

b) Deformação de cisalhamento

Fonte: (ROSENBAUM, 1988)

3.2 Lei de Hooke generalizada

Em um meio elástico ideal sujeito a forças e deslocamentos infinitesimais, a lei de Hooke generalizada pode ser aplicada e a equação constitutiva pode ser escrita de duas maneiras (HOSTEN, 2001):

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.3)$$

ou seu inverso

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.4)$$

onde c_{ijkl} são as constantes elásticas de rigidez e s_{ijkl} são as constantes de flexibilidade do material, e possuem $3^4 = 81$ termos.

A simetria das componentes de cisalhamento da tensão e deformação vistas anteriormente, resulta na seguinte relação de simetria das constantes elásticas de rigidez e flexibilidade:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{jilk} = c_{ijlk} \quad (3.5)$$

$$s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{jilk} = s_{ijlk} \quad (3.6)$$

Restando portanto apenas $6^2 = 36$ independentes de elasticidade e flexibilidade.

3.3 Notação reduzida

Dada a simetria dos tensores de tensão e de deformação, a notação de quatro índices pode ser reduzida substituindo cada par de índices ij ou kl por um único índice I ou J, conforme abaixo:

$$11 \rightarrow 1 \quad 22 \rightarrow 2 \quad 33 \rightarrow 3 \quad 23, 32 \rightarrow 4 \quad 13, 31 \rightarrow 5 \quad 12, 21 \rightarrow 6 \quad (3.7)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 11 & 12 \leftarrow 13 & \leftarrow 6 \leftarrow 5 \\ & \uparrow 23 & \uparrow \\ & 22 & 2 \\ & \searrow & \searrow \\ & & 33 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} & \\ & \\ & \\ 2 & 4 \\ & \uparrow \\ & 3 \end{array} \right)$$

As relações descritas anteriormente por $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$ e $\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$, são simplificadas para $\sigma_I = c_{IJ}\epsilon_J$ e $\epsilon_I = S_{IJ}\sigma_J$ no sistema de notação reduzida, ou na forma matricial, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

3.4 Trabalho e energia de deformação

O trabalho realizado por unidade de volume para uma dada deformação ϵ_{ij} é definido como:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} \quad (3.10)$$

Desta forma, a tensão e o tensor elástico podem ser obtidos por diferenciação:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.11)$$

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \quad (3.12)$$

Utilizando a notação reduzida, a energia de deformação tem a forma (HOSTEN, 2001):

$$U(\epsilon) = \frac{1}{2\rho} c_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \quad (3.13)$$

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = c_{ij} \epsilon_j \quad (3.14)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} \quad (3.15)$$

Como a ordem da diferenciação da equação (3.15) não importa, segue que:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (3.16)$$

Consequentemente a matriz de elasticidade é simétrica, e apresenta apenas 21 termos independentes, sendo que o mesmo é válido para a matriz de flexibilidade. Este é o número máximo de constantes independentes de um material anisotrópico, e pode ainda ser reduzido considerando os planos de simetria presentes nos materiais.

3.5 Transformações

A tensão e deformação são tensores de 2ª ordem e portanto obedecem a regra de transformação:

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (3.17)$$

Já o tensor de constantes elásticas é um tensor de 4ª ordem, e sua transformação é dada por (AULD, 1990):

$$T'_{mnop} = a_{mi}a_{nj}a_{ok}a_{pl}T_{ijkl} \quad (3.18)$$

onde T' é o tensor no novo sistema de coordenadas e a_{ij} são os coeficientes da matriz de transformação $[a]_{3 \times 3}$.

A utilização da notação reduzida simplifica de forma considerável as manipulações algébricas, e portanto é importante ter um método para realizar estas operações de transformação diretamente com esta notação.

Uma técnica muito eficiente foi desenvolvida por W.L. Bond (AULD, 1990), onde é construída uma matriz $[M]$ de transformação 6×6 , obtida a partir da matriz de transformação $[a]_{3 \times 3}$.

A matriz $[M]$ é definida por:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & 2a_{xy}a_{xz} & 2a_{xz}a_{xx} & 2a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & 2a_{yy}a_{yz} & 2a_{yz}a_{yx} & 2a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & 2a_{zy}a_{zz} & 2a_{zz}a_{zx} & 2a_{zx}a_{zy} \\ a_{yx}a_{zx} & a_{yy}a_{zy} & a_{yz}a_{zz} & a_{yy}a_{zz} + a_{yz}a_{zy} & a_{yx}a_{zz} + a_{yz}a_{zx} & a_{yy}a_{zx} + a_{yx}a_{zy} \\ a_{zx}a_{xx} & a_{zy}a_{xy} & a_{zz}a_{xz} & a_{xy}a_{zz} + a_{xz}a_{zy} & a_{xz}a_{zx} + a_{xx}a_{zz} & a_{xx}a_{zy} + a_{xy}a_{zx} \\ a_{xx}a_{yx} & a_{xy}a_{yy} & a_{xz}a_{yz} & a_{xy}a_{yz} + a_{xz}a_{yy} & a_{xz}a_{yx} + a_{xx}a_{yz} & a_{xx}a_{yy} + a_{xy}a_{yx} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A transformação para o tensão é dada por:

$$\sigma'_i = M_{ij}\sigma_j \quad (3.20)$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

e a transformação da matriz de constantes elásticas:

$$[c'] = [M][c][M]^t \quad (3.21)$$

ou

$$c'_{kl} = M_{ki}M_{lj}c_{ij} \quad (3.22)$$

3.6 Sólidos anisotrópicos

Como visto anteriormente, o número máximo de constantes elásticas de um material anisotrópico é 21. Entretanto a maioria dos materiais possuem algum grau

de simetria e o número constantes elásticas independentes pode ser reduzido considerando esta simetria através do Princípio de Neumann, que diz que a simetria de qualquer propriedade de um cristal deve incluir os elementos de simetria do grupo pontual deste cristal.

A aplicação do Princípio de Neumann é feita através da assunção que o tensor representando uma propriedade física, deve ser invariante com respeito a qualquer operação de simetria de um grupo pontual, ou seja, que o resultado de medições de uma propriedade realizada em direções de simetria vão resultar no mesmo coeficiente. Quando comparadas as constantes elásticas antes e depois das operações de simetria, e assumindo que devem se manter inalteradas devido ao Princípio de Neumann, concluímos que certas constantes elásticas são nulas.

Em três dimensões, existem 32 grupos pontuais de simetria que podem ser subdivididos em 14 redes de Bravais. Estes sistemas de cristalização podem ainda ser agrupados em 7 sistemas: triclínico, monoclínico, trigonal, hexagonal, ortorrômbico, tetragonal e cúbico. A Figura 3.3 mostra os principais sistemas de simetria, onde as linhas que conectam as partículas individuais representam molas com diferentes elasticidades, proporcionais a seus comprimentos. Desta forma o sistema cúbico, por exemplo, possui propriedades elásticas equivalentes somente nos eixos x_1 e x_2 .

Figura 3.3 – Principais sistemas de simetria

FONTE: (ROSENBAUM, 1988)

A simetria monoclínica apresenta apenas 1 plano de simetria. Assumindo que este plano de simetria seja o plano x_1x_2 , a operação de transformação de reflexão é dada por:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

a matriz [M] de Bond definida em (3.19), resulta em:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e, a transformação $[c']$ dada em (3.21):

$$[c'] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -c_{24} & -c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & -c_{34} & -c_{35} & c_{36} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & c_{44} & c_{45} & -c_{46} \\ -c_{51} & -c_{52} & -c_{53} & c_{54} & c_{55} & -c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & -c_{64} & -c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Finalmente, aplicando o Princípio de Neumann temos:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -c_{24} & -c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & -c_{34} & -c_{35} & c_{36} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & c_{44} & c_{45} & -c_{46} \\ -c_{51} & -c_{52} & -c_{53} & c_{54} & c_{55} & -c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & -c_{64} & -c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

concluindo que:

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{c_{46}} = c_{56} = 0 \quad (3.27)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Partindo da matriz monoclnica e adicionando mais um plano de simetria, por exemplo o plano x_1x_3 , e seguindo os mesmos procedimentos descritos anteriormente, temos:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & -c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & -c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & -c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{54} & c_{55} & 0 \\ -c_{61} & -c_{62} & -c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0 \quad (3.31)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Esta matriz é a matriz de simetria ortotrópica. É importante notar que uma operação adicional de reflexão ao 3º plano de simetria não traz qualquer alteração da matriz pois este plano não é independente.

Ao adicionarmos uma simetria adicional ao redor de um eixo, por exemplo x_3 , obtemos a matriz hexagonal que é representada por:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11} - c_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Uma outra forma bastante simples de realizar as operações de simetria é utilizando diretamente os subscritos. Como exemplo vamos utilizar um material de simetria tetragonal, que deve ser invariante a uma rotação de 90° ao redor do eixo x_3 e a uma inversão, conforme ilustrado na Figura 3.4 temos que:

Figura 3.4 - Transformações aplicadas para um material com simetria tetragonal

FONTE: (ROSENBAUM, 1988)

$$\begin{array}{lll} x \rightarrow y & y \rightarrow -x & z \rightarrow -z \\ 1 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow -1 & 3 \rightarrow -3 \end{array} \quad (3.34)$$

O operador pode ser escrito como (ROSENBAUM, 1988):

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Na notação ij , temos:

$$\begin{aligned}
 11 \rightarrow 22 \quad 22 \rightarrow (-1)(-1) = 11 \quad 33 \rightarrow (-3)(-3) = 33 \\
 23 \rightarrow (-1)(-3) = 13 \quad 13 \rightarrow (2)(-3) = -23 \quad 12 \rightarrow (2)(-1) = -21
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

ou na notação reduzida:

$$\begin{aligned}
 1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 1 \quad 3 \rightarrow 3 \quad 4(23) \rightarrow 5(13) \quad 5(13) \rightarrow -4(-23) \\
 6(12) \rightarrow -6(-21)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

A matriz de rigidez é então transformada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &\rightarrow c'_{22} \quad \text{porque } 1 \rightarrow 2 \\
 c_{12} &\rightarrow c'_{21} \quad \text{porque } 1 \rightarrow 2 \text{ e } 2 \rightarrow 1 \\
 c_{13} &\rightarrow c'_{23} \quad \text{porque } 1 \rightarrow 2 \text{ e } 3 \rightarrow 3 \\
 c_{14} &\rightarrow c'_{25} \quad \text{porque } 1 \rightarrow 2 \text{ e } 4 \rightarrow 5 \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Resultando em

$$c' = \begin{bmatrix} 22 & 21 & 23 & 25 & -24 & -26 \\ & 11 & 13 & 15 & -14 & -16 \\ & & 33 & 35 & -34 & -36 \\ & & & 55 & -54 & -56 \\ & & & & 44 & 46 \\ & & & & & 66 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Utilizando o Princípio de Neumann e igualando $c = c'$, temos que:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c'_{22}, c_{12} = c'_{21}, c_{13} = c'_{23}, c_{14} = c'_{25}, c_{15} = -c'_{24}, c_{16} = c'_{26} \\
 c_{22} &= c'_{11}, c_{23} = c'_{13}, c_{24} = c'_{15}, c_{25} = -c'_{14}, c_{26} = -c'_{16} \\
 c_{33} &= c'_{33}, c_{34} = c'_{35}, c_{35} = -c'_{34}, c_{36} = -c'_{36} \\
 c_{44} &= c'_{55}, c_{45} = -c'_{54}, c_{46} = -c'_{56} \\
 c_{55} &= c'_{44}, c_{56} = c'_{46} \\
 c_{66} &= c'_{66}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Concluindo que:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c'_{22}, c_{13} = c'_{23}, c_{55} = c'_{44}, c_{66} = c'_{66} \\
 c_{14} &= c'_{25} \text{ e } c_{25} = -c'_{14} \rightarrow c_{14} = c_{25} = 0 \\
 c_{15} &= -c'_{24} \text{ e } c_{24} = c'_{15} \rightarrow c_{15} = c_{24} = 0 \\
 c_{16} &= c'_{26} \text{ e } c_{26} = -c'_{16} \rightarrow c_{16} = c_{26} = 0 \\
 c_{34} &= c'_{35} \text{ e } c_{35} = -c'_{34} \rightarrow c_{34} = c_{35} = 0 \\
 c_{36} &= -c'_{36} \rightarrow c_{36} = 0 \\
 c_{45} &= -c'_{54} \rightarrow c_{45} = 0 \\
 c_{46} &= -c'_{56} \text{ e } c_{56} = c'_{46} \rightarrow c_{46} = c_{56} = 0
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

e então, obtemos a matriz para a simetria tetragonal, dada por:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Tratando-se de materiais compósitos, os tensores mais utilizados são os de simetria ortotrópica, tetragonal e hexagonal.

3.6.1 Simetria ortotrópica

A simetria ortorrômbica ou ortotrópica é caracterizada por 3 planos mútuos de simetria perpendiculares. Laminados biaxiais, usualmente classificados como tetragonais, e unidirecionais, classificados como hexagonais, podem ser inclusos nesta categoria uma vez que uma anisotropia pode ser induzida durante o processo de fabricação. A matriz ortotrópica possui 9 constantes elásticas independentes.

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

3.6.2 Simetria tetragonal

Este sistema pode ser considerado como a ortotrópica com a adição de um eixo de simetria quaternária. Este sistema possui 6 constantes elásticas independentes.

Quando a fração fibra/resina e o tipo de fibra são iguais, ou seja $E_{11} = E_{22}$, como é o caso típico para laminados biaxiais ($0^\circ - 90^\circ$), os materiais podem ser considerados como possuindo este tipo de simetria.

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.6.3 Simetria hexagonal

Não existe distinção entre a simetria hexagonal e a transversalmente isotrópica quando utilizada a notação reduzida para o tensor de constantes elásticas.

Materiais transversalmente isotrópicos ou com simetria hexagonal possuem uma simetria ortotrópica com a adição de que um dos planos principais é um plano de isotropia, e possuem 5 constantes elásticas independentes. Laminados com fibras unidirecionais se enquadram nessa classificação.

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11} - c_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.7 Constantes de engenharia

Mais comumente, as propriedades dos materiais são determinadas em laboratório em termos das constantes de engenharia como por exemplo módulo de Young, módulo de cisalhamento, e assim por diante. Estas constantes são usualmente medidas utilizando testes simples com tensão uniaxial ou cisalhamento puro. Por possuir um significado físico direto, as constantes de engenharia são utilizadas no lugar das constantes elásticas de rigidez e de flexibilidade.

Uma das consequências da linearidade é que o princípio da superposição pode ser aplicado. Isto é, se as cargas aplicadas e as restrições geométricas são independentes da deformação, a soma dos deslocamentos (e consequentemente deformação) produzidos por dois conjuntos de cargas é igual ao deslocamento produzido pela soma das cargas. Em particular, as deformações de mesmo tipo produzidas pela aplicação das componentes de tensão individuais podem ser sobrepostas (Reddy, 2014). Por exemplo, a deformação extensional $\varepsilon_{11}^{(1)}$ na direção x_1 do sistema de coordenadas do material devido a tensão σ_{11} na mesma direção, é dada por σ_{11}/E_1 , onde E_1 corresponde ao módulo de Young do material na direção x_1 . A deformação extensional $\varepsilon_{11}^{(2)}$ devido a tensão σ_{22} aplicada na direção x_2 é $-\nu_{12}\sigma_{22}/E_2$, onde E_2 é o módulo de Young do material na direção x_2 , e ν_{12} é o coeficiente de Poisson definido por:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (3.46)$$

Similarmente σ_{33} produz uma deformação $\varepsilon_{11}^{(3)}$ igual a $-\nu_{13}\sigma_{33}/E_3$. Desta forma, a deformação total ε_{11} devido à aplicação simultânea das três componentes normais de tensão é:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{11}^{(3)} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{31}\sigma_{33}}{E_3} \quad (3.47)$$

Onde a direção de carregamento é dado pelo sobrescrito. Similarmente, podemos escrever

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}\sigma_{33}}{E_3} \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{23}\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (3.49)$$

O ensaio de cisalhamento puro no material ortotrópico vai resultar em

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}, \quad 2\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \quad (3.50)$$

Onde ε_{ij} ($i \neq j$) é a mudança no ângulo entre as duas linhas paralelas a x_i e x_j em um ponto, σ_{ij} ($i \neq j$) é a tensão de cisalhamento no plano $x_i x_j$, e G_{ij} ($i \neq j$) são o módulo de cisalhamento no plano $x_i x_j$.

As equações podem ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

onde E_1, E_2, E_3 são o módulo de Young nas direções x_1, x_2 e x_3 respectivamente, ν_{ij} é o coeficiente de Poisson, definido como a razão entre a deformação transversal

na direção j e deformação axial na direção i quando aplicada uma tensão na direção i , e G_{23} , G_{13} , G_{12} são os módulos de cisalhamento nos planos x_2x_3 , x_1x_3 e x_1x_2 , respectivamente.

Comparando a matriz (3.51) com (3.9), concluímos que

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como a matriz de flexibilidade é simétrica, segue que

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (3.53)$$

Deve-se notar que ν_{12} é diferente de ν_{21} , porém devido a relação estabelecida acima, somente uma das duas é independente. Portanto para $i, j = 1, 2, 3$ as 9 constantes independentes para o material com simetria ortotrópica são:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23} \quad (3.54)$$

4 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

A equação de movimento de onda dada pela segunda Lei de Newton é descrita por (ROSENBAUM, 1988):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

ou simplificando,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, ρ é a densidade, e u_i é o deslocamento. Conforme mencionado anteriormente, para pequenas deformações a Lei de Hooke generalizada pode ser aplicada e a tensão e deformação são dadas respectivamente por:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.2), temos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (4.5)$$

A solução da equação para ondas harmônicas é dada por (CHU; ROKHLIN, 1992):

$$u_i = A_0 P_i e^{i(k_j x_j - \omega t)} \quad (4.6)$$

onde A_0 é a amplitude da onda, P_i é o vetor unitário de polarização, k_j é o vetor de onda na direção x_j , x_j é o vetor de posição, e ω é a frequência angular. Após substituir a equação (4.6) na equação (4.5), a equação de movimento toma a forma de um problema de autovalor polarizado no vetor P_k :

$$c_{ijkl}k_l k_j P_k - \rho \omega^2 \delta_{ik} P_k = 0 \quad (4.7)$$

Por definição, o modulo do vetor da velocidade de fase V_p e o vetor de onda k são relacionados por:

$$V_p = \frac{\omega}{k} \quad (4.8)$$

e

$$k_i = k n_i \quad (4.9)$$

onde n_i é a componente na direção x_i do vetor normal unitário que aponta para a direção de propagação da onda mecânica. O problema de autovalor pode ser rescrito em função da velocidade de fase e vetor normal de onda:

$$(c_{ijkl}n_l n_j - \rho V_p^2 \delta_{ik})P_k = 0 \quad (4.10)$$

Esta é a chamada equação de Christoffel, ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho V_p^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho V_p^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho V_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde:

$$\Gamma_{ik} = c_{ijkl}n_l n_j \quad (4.12)$$

e Γ_{ik} é o tensor de Christoffel, que é um tensor de segunda ordem simétrico, e tem sua forma expandida dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + 2c_{16}n_1n_2 + 2c_{15}n_1n_3 + 2c_{56}n_2n_3 \\ \Gamma_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{26}n_1n_2 + 2c_{46}n_1n_3 + 2c_{24}n_2n_3 \\ \Gamma_{33} &= c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + 2c_{45}n_1n_2 + 2c_{35}n_1n_3 + 2c_{34}n_2n_3 \\ \Gamma_{12} &= c_{16}n_1^2 + c_{26}n_2^2 + c_{45}n_3^2 + (c_{12}+c_{66})n_1n_2 + (c_{14}+c_{56})n_1n_3 \\ &\quad + (c_{25}+c_{46})n_2n_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13} &= c_{15}n_1^2 + c_{46}n_2^2 + c_{35}n_3^2 + (c_{14}+c_{56})n_1n_2 + (c_{13}+c_{55})n_1n_3 \\
&\quad + (c_{36}+c_{45})n_2n_3 \\
\Gamma_{23} &= c_{56}n_1^2 + c_{24}n_2^2 + c_{34}n_3^2 + (c_{25}+c_{46})n_1n_2 + (c_{36}+c_{45})n_1n_3 \\
&\quad + (c_{23}+c_{44})n_2n_3
\end{aligned}$$

Para obter as soluções não triviais, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$|c_{ijkl}n_l n_j - \rho V_p^2 \delta_{ik}| = 0 \quad (4.13)$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
f(\lambda, c_{ij}) &= -\lambda^3 + \lambda^2(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}) \\
&\quad + \lambda(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}\Gamma_{33}) \\
&\quad + 2\Gamma_{12}\Gamma_{13}\Gamma_{23} - (\Gamma_{12}^2\Gamma_{33} + \Gamma_{13}^2\Gamma_{22} + \Gamma_{23}^2\Gamma_{11}) = 0
\end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $\lambda = \rho V_p^2$

Se as propriedades do material são conhecidas, os autovalores (λ) fornecem três velocidades independentes de onda, e os autovetores (P_k) as polarizações para cada uma destas ondas. Por outro lado, se as velocidades de fase para uma dada direção de propagação são conhecidas, podemos obter as propriedades do material.

Como o tensor de Christoffel é simétrico, os autovalores são reais e os autovetores são mutualmente ortogonais, ou seja, os movimentos associados com as três diferentes ondas são perpendiculares entre si, porém apenas quando se propagam nas direções principais do material são perpendiculares ou paralelos com relação à direção de propagação da onda, quando são denominados modos puros.

Conforme representado na Figura 4.1, uma onda é dita longitudinal pura quando a velocidade da partícula é paralela a direção de propagação ($P = n$), já onda de cisalhamento pura possui a velocidade da partícula perpendicular a direção de propagação ($P \cdot n = 0$), e quando possuem componentes tanto na direção de propagação da onda, como na direção perpendicular, são denominadas quasilongitudinal e quasitransversal dependendo da polarização predominante. No caso geral, os modos não são puros: uma quasilongitudinal (QL), uma quasitransversal rápida (QT1) e uma lenta (QT2) são excitadas.

Figura 4.1 – Polarizações das ondas longitudinal e transversal nos modos puros e quasi

4.1 Velocidade de fase e grupo

Em materiais isotrópicos a velocidade de propagação das ondas são iguais em todas as direções. Já a propagação nos meios anisotrópicos é substancialmente diferente do caso isotrópico, onde a maior diferença é que as ondas elásticas se propagam com velocidades que dependem da direção.

As partículas que se encontram a um mesmo número de comprimentos de onda da fonte são consideradas como possuindo mesma fase, e as linhas que conectam as partículas de igual fase são chamadas frentes de onda. A frente de onda dos modos quasilongitudinais e quasitransversais, presentes nos meios anisotrópicos, não se encontram normais à direção de propagação da energia como nos materiais isotrópicos, e portanto as velocidades de fase e de grupo não coincidem.

A velocidade da modulação da onda é chamada de velocidade de grupo. Para uma onda com envelope unidimensional, é definida da seguinte forma. Uma onda modulada é construída por duas ondas com valores de ω e k ligeiramente diferentes (AULD, 1990):

$$\cos(\omega t - kz) + \cos((\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z) \quad (4.15)$$

Utilizando a regra dos cossenos, a equação que descreve a onda modulada é dada por:

$$2\cos\left\{\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\delta k}{2}\right)z\right\}\cos\left\{\left(\frac{\delta k}{2}\right)z - \left(\frac{\delta\omega}{2}\right)t\right\} \quad (4.16)$$

onde o primeiro termo desta equação é onda de alta frequência portadora e o segundo termo é a modulação de baixa frequência.

Isto mostra que a velocidade da portadora é a velocidade de fase

$$\frac{\omega + \frac{\delta\omega}{2}}{k + \frac{\delta k}{2}} \rightarrow \frac{\omega}{k} = c \quad (4.17)$$

e a velocidade de propagação da envoltória é a velocidade de grupo

$$V_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad (4.18)$$

Fisicamente, a diferença entre a velocidade de fase e a de grupo pode ser descrita considerando a Figura 4.2. A figura mostra o pacote de ondas planas propagando do transdutor ultrassônico. As frentes de onda são paralelas à superfície do transdutor e as velocidades das frentes de onda se propagam em direção normal à superfície do transdutor, dada pela velocidade de fase. Entretanto, devido a anisotropia do material, o pacote de onda desvia da direção normal e viaja na direção $V_g = V_e$, inclinado de um ângulo em relação a $\mathbf{k}$. A direção e velocidade da envoltória do pacote de onda, que é o mesmo da energia em um meio sem perdas, são dadas pela velocidade de grupo (AULD, 1990).

Devido a este fato é importante destacar que o sinal medido durante o ensaio por ultrassom está relacionado à velocidade de grupo, e isto significa também que o transdutor deve ser deslocado para a correta recepção do pulso.

Figura 4.2 - Velocidade de fase x grupo para onda plana

O conceito de velocidade de grupo e fase também pode ser entendido através da observação da propagação de uma onda oriunda de uma fonte pontual, conforme Figura 4.3. Imagine um observador em algum ponto do meio observando a onda se propagar. Se ele conhece a origem da fonte e quando ela foi emitida, ele pode facilmente obter a velocidade da energia (grupo) medindo o tempo que a onda leva para percorrer a distância ao longo da linha fonte-observador.

Entretanto, se o observador não sabe a origem e o tempo de emissão, ele ainda pode observar a frente de onda passando e identificar a sua direção e velocidade, porém estes relacionados à velocidade de fase.

Figura 4.3 - Velocidade fase x grupo para fonte pontual

- Direção da velocidade de grupo: ângulo ψ
- Direção da velocidade de fase: ângulo θ

4.2 Superfície de lentidão (inverso da velocidade)

A plotagem da velocidade de fase em função da direção do vetor de onda é chamada superfície de velocidade de fase. A plotagem da velocidade de grupo, ou velocidade da energia, pela direção de propagação da energia resulta na superfície da onda.

O inverso da superfície da velocidade de fase, obtida invertendo a velocidade de fase em cada ponto é chamada superfície de lentidão, ou inverso da velocidade, e pode ser calculada diretamente da equação de Christoffel.

Enquanto que a velocidade de fase tem direção perpendicular em relação à tangente da frente de onda, a velocidade de grupo tem direção perpendicular à tangente da superfície de lentidão.

Figura 4.4 - Curva de velocidade plano x1-x3

Figura 4.5 - Curva de lentidão plano x1-x3

5 MÉTODO DA IMERSÃO PARA DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS

A reconstrução das constantes elásticas através da medição velocidades de propagação é muito utilizado para materiais anisotrópicos. A principal vantagem do método por imersão para este fim é que a amostra não precisa ser cortada e preparada em diferentes ângulos, como se faz necessária na técnica de transmissão por contato (ARISTEGUI; BASTE, 2006).

No método por imersão, ondas ultrassônicas são geradas e recebidas por um par de transdutores piezoelétricos suportado por goniômetros, que permitem selecionar a direção da onda incidente n_i . O sistema de coordenadas para as medições ultrassônicas são escolhidos de forma que x_1 corresponda à normal da superfície de interface da amostra, e x_3 na direção das fibras para um laminado unidirecional, e φ é o ângulo de rotação ao redor de x_1 com relação ao plano (x_1, x_3) . Em um material ortotrópico arbitrário, 3 ondas elásticas podem ser geradas através da incidência de uma onda oblíqua: uma longitudinal e 2 de cisalhamento. Se o plano de incidência do líquido para o sólido for arbitrariamente orientado com relação aos planos de simetria, então todas as 3 ondas serão excitadas na amostra, uma vez que todas terão uma componente de deslocamento normal à superfície da amostra e serão transmitidas no líquido, conforme mostra a Figura 5.1. Se o plano de incidência coincidir com o plano de simetria, apenas 2 ondas poderão ser identificadas uma vez que uma das ondas transversais será pura com deslocamento perpendicular a este plano, ou seja, paralelo à superfície, e portanto não se acoplará no meio líquido.

Figura 5.1 – Orientação da amostra e ondas geradas para um plano de incidência fora do plano de simetria

A Figura 5.2 mostra um material compósito unidirecional com simetria transversalmente isotrópica onde as fibras estão alinhadas no eixo x_3 . Uma onda incidente no plano x_1x_3 gera 3 ondas onde apenas 2 serão transmitidas, uma vez que a onda transversal com polarização horizontal é pura. A onda quasitransversal com polarização vertical é a rápida, pois possui componente na direção das fibras. Uma onda incidente no plano x_1x_2 gera as 3 ondas, e novamente apenas 2 serão transmitidas uma vez que a onda com polarização horizontal também é pura, porém neste caso a onda quasitransversal vertical é a lenta, já que a transversal pura tem movimento das partículas alinhados com direção das fibras.

Figura 5.2 - Laminado unidirecional com incidência oblíqua nos planos de simetria

Existem basicamente duas técnicas para o ensaio de imersão, a técnica de transmissão e a da reflexão (dupla transmissão). A Figura 5.3 mostra a técnica da transmissão, onde um transdutor é utilizado para transmissão, e outro para a recepção do sinal que atravessa a amostra. As três ondas geradas pelo feixe oblíquo são mostradas na figura, as velocidades de fase estão representadas pela linha tracejada e as velocidades de grupo pela linha contínua. Como a onda longitudinal é mais rápida que a transversal, a onda longitudinal possui um desvio maior, conforme a lei de Snell. As três velocidades de fase sempre se encontram no plano de incidência, porém a velocidade de grupo pode sofrer um desvio fora do plano de incidência caso este não seja um plano de simetria do material. Para se obter o máximo do sinal (velocidade de grupo) em um plano de não simetria, o transdutor precisa então ser deslocado no plano perpendicular ao plano de incidência (ROKHLIN; WANG, 1992).

O uso de um receptor de grande abertura de PVDF compensa esta desvantagem além de eliminar os efeitos da difração quando utilizado transdutores de tamanhos convencionais para recepção dos sinais (ADAMOWSKI; BUIOCHI; HIGUTI, 2010).

Figura 5.3 - Medição das velocidades utilizando a técnica da transmissão

A segunda técnica ilustrada Figura 5.4, proposta por Rokhlin e Wang (1992), utiliza um refletor que faz com que a onda seja refletida e volte para o mesmo ponto de emissão. Esta técnica possui além da vantagem de não ser necessário o reposicionamento do transdutor, a de utilizar um percurso sônico duas vezes mais longo, reduzindo assim os erros.

Figura 5.4 - Medição das velocidades utilizando a técnica da reflexão (dupla transmissão)

5.1 Medições da velocidade acústica

As velocidades são calculadas levando consideração a diferença do tempo de vôo entre as medições sem amostra e com amostra. O tempo de vôo medido no entanto é relativo à velocidade de grupo, enquanto que são as velocidades de fase que estão relacionadas com as constantes elásticas do meio anisotrópico através da equação de Christoffel.

Rokhlin e Wang (1992) mostraram que medições de tempo das ondas passando pela amostra com superfícies paralelas e anisotropia arbitrária podem ser usadas para determinação das velocidades de fase. Enquanto que o tempo medido corresponde ao da velocidade de grupo, ele é igual ao da velocidade de fase atravessando por um percurso diferente, e que pode ser calculado através de considerações geométricas.

A velocidade de fase em função do tempo de vôo para o método transmissão é dada por:

$$V_P(\theta_r) = \left(\frac{1}{V_0^2} - \frac{2\Delta t \cos \theta_i}{hV_0} + \frac{\Delta t^2}{h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

onde V_P é a velocidade de fase, θ_r é o ângulo de refração, V_0 é a velocidade da água, θ_i é o ângulo de incidência, h é a espessura da amostra e Δt é a diferença de tempo entre o sinal com e sem amostra.

e o ângulo de refração é dado por:

$$\theta_r = \arcsin\left(\frac{V_p(\theta_r)\sin\theta_i}{V_0}\right) \quad (5.2)$$

Para identificar as constantes elásticas de um material anisotrópico arbitrário, dados experimentais são coletados nos planos (x_1, φ) , onde φ é o ângulo com relação ao plano (x_1, x_3) , e geralmente com valores de 0° , 90° e 45° .

5.2 Processamento de sinais

A técnica utilizada neste trabalho para determinar a diferença entre os tempos de vôo para medição com amostra e sem amostra foi a correlação cruzada.

A correlação é a operação que envolve o deslizamento de uma função sobre outra, onde em cada ponto é obtida a área, ou o produto interno. Quando os picos das duas funções coincidem, há uma grande contribuição para a integral, similarmente quando dois vales coincidem, eles também contribuem de forma significativa para a integral pois o produto de dois valores negativos é positivo. A correlação de duas funções idênticas é chamada de autocorrelação, e a de duas funções distintas chamada de correlação cruzada, e o ponto de máximo é o atraso entre as duas funções.

A correlação cruzada de duas funções f e g é definida por:

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t + \tau) dt \quad (5.3)$$

A variável τ é definida como atraso. Para funções discretas a correlação cruzada é definida por:

$$(f * g)[n] = \int_{m=-\infty}^{\infty} f[m] g[m + n] \quad (5.4)$$

Quando aplicado em um domínio finito $0 \leq m \leq N - 1$, onde N é o tamanho do sinal.

5.3 Método da auto-referência

O método descrito anteriormente utiliza como referência o percurso sônico sem a amostra e isto pode introduzir erros à medição. A geometria da peça tem grande influência na precisão das medições e um desvio no paralelismo ou curvatura da superfície tem impacto significativo nos resultados. Adicionalmente a alta atenuação característica dos materiais compósitos pode alterar o formato do sinal recebido causando erros quando comparado com o sinal de referência para determinação das diferenças de tempo.

O método da auto-referência (SRM – *self referenced method*) elimina estes problemas utilizando como referência o sinal obtido com incidência normal à amostra. A equação para obtenção das velocidades de fase utilizando a técnica da transmissão é (CHU;ROKHLIN, 1994b):

$$V_P(\theta_r) = \left(\frac{1}{V_n^2} + \frac{\Delta t_0 - (\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i}) \cos \theta_i}{hV_0} + \frac{\Delta t_{\theta_i}(2\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i})}{4h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

onde

$$\Delta t_0 = 2h \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_n} \right) \quad (5.6)$$

e

$$\Delta t_{\theta_i} = \Delta t_n - \Delta t_{\theta_i} \quad (5.7)$$

Δt_0 é a diferença de tempo de vôo entre o percurso na amostra e no fluido com comprimento igual ao dobro da espessura. $\Delta t_{\theta_i} = \Delta t_n - \Delta t_{\theta_i}$ é a diferença entre o tempo de vôo na incidência normal $t_n = t(0)$ e para a incidência oblíqua arbitrária t_{θ_i} no ângulo incidente θ_i . Para calcular Δt_0 deve-se apenas medir a velocidade no fluido V_0 e na amostra com incidência normal V_n . Para o cálculo de V_n deve-se utilizar as múltiplas reflexões de modo a calcular a velocidade com maior precisão.

A velocidade para incidência normal V_n levando em consideração a n-ésima reflexão do sinal pode ser calculada por:

$$V_n = \frac{(1 + 2n)V_{\text{água}}}{\frac{\Delta t_{n-\text{esima}} V_{\text{água}}}{h} + 1} \quad (5.8)$$

onde V_n é a velocidade com incidência normal, n é o número da reflexão (0 para transmissão direta, 1 para a 1ª reflexão, etc...), $\Delta t_{n-\text{esima}}$ é a diferença de tempo entre o sinal com amostra considerando a n -ésima reflexão e sem amostra, $V_{\text{água}}$ é a velocidade da água durante a medição do sinal com amostra, h é a espessura da amostra.

Ou simplesmente por:

$$V_n = \frac{\Delta t_{n-\text{esima}}}{2nh} \quad (5.9)$$

onde V_n é a velocidade para incidência normal, $\Delta t_{n-\text{esima}}$ é a diferença de tempo entre a n -ésima reflexão e o 1º sinal da transmissão direta, n é a quantidade de reflexões (1 para a 1ª reflexão, 2 para a 2ª reflexão, etc...), conforme Figura 5.5, e h é a espessura da amostra.

O ângulo de refração θ_r é obtido pela mesma fórmula descrita para a referência no fluido, e para transmissão basta substituir a espessura h por $\frac{h}{2}$ na equação (5.5).

A técnica da auto-referência (SRM) possui diversas vantagens quando comparada ao método da referência no fluido (FRM). Primeiro como apenas mudanças relativas do tempo de vôo devido à rotação e alterações no percurso sônico são medidas, é muito mais precisa do que a medição absoluta do tempo de vôo. Segundo, a velocidade de fase para incidência normal pode ser medida com precisão através das múltiplas reflexões, eliminando desta forma erros acumulativos. Terceiro, como todas as medições são relativas ao percurso sônico com a presença da amostra, a técnica é menos sensível a imperfeições geométricas. Finalmente, a diferença induzida pela alteração do sinal devido à atenuação é também reduzida.

Figura 5.5 - Sinal para incidência a 0°

5.4 Influência da temperatura

O controle da temperatura para as medições pelo método da imersão é crucial uma vez que a maior parte do percurso é dentro da água, e então mesmo uma pequena mudança na velocidade do som na água pode causar erros significativos.

Dada uma amostra com velocidade de propagação longitudinal c_{am} , distância l entre transdutores, temperatura inicial T_0 e espessura da amostra d . O tempo de propagação entre transdutores sem amostra t_w é dado por:

$$t_w = \frac{l}{c_{w0}} \quad (5.10)$$

onde c_{w0} é a velocidade de propagação na água na temperatura inicial T_0 .

O tempo de propagação entre transdutores com amostra t_{am} é dado por:

$$t_{am} = \frac{(l - d)}{c_w} + \frac{d}{c_{am}} \quad (5.11)$$

E a velocidade longitudinal de propagação na amostra para incidência normal pode então ser calculada da seguinte forma:

$$c_{am} = \frac{c_w}{1 - \frac{(t_w - t_{am})c_w}{d}} \quad (5.12)$$

Uma consideração porém é que a velocidade da água c_w para ambas medições deve se manter constante. Caso a temperatura não seja controlada, para cada medição de t_{am} temos uma nova velocidade da água c'_w , resultando em:

$$t'_{am} = \frac{(l-d)}{c'_w} + \frac{d}{c_{am}} \quad (5.13)$$

Portanto, supondo que a velocidade do material não se altere com pequenas variações na temperatura, a compensação da temperatura é dada por C:

$$t_{am} = t'_{am} - C = \frac{(l-d)}{c'_w} + \frac{d}{c_{am}} - (l-d) \left(\frac{1}{c'_w} - \frac{1}{c_{w0}} \right) \quad (5.14)$$

ou seja, supondo que a temperatura aumente em relação a quando foi obtida a referência, então a velocidade da água c'_w também irá aumentar, já que é proporcional, e o tempo t'_{am} será menor do que deveria ser. Como neste caso $\frac{1}{c'_w} - \frac{1}{c_{w0}} < 0$, consequentemente $C < 0$, e t'_{am} será compensado adicionando esta diferença.

A simulação mostrada na Figura 5.6 foi obtida alterando a temperatura T, e calculando c'_{am} em função de $t'_{am}(T)$, e então comparando com a velocidade correta assumida como $c_{am} = 3000 \text{ m/s}$.

Figura 5.6 - Erro nas velocidades sem compensação da temperatura para $l=180\text{mm}$ e $c_{am} = 3000 \text{ m/s}$, com variação de espessura de 3mm a 9mm e variação da temperatura de 1°C

Pode-se notar que apenas 1°C causa um erro na velocidade na ordem de 23% para estas condições de ensaio caso a temperatura não seja compensada ou controlada, erro que aumenta com o comprimento l , velocidade c , e diminuição da espessura da amostra. Outro fato a ser observado é que o erro reduz significativamente quando utilizada 3 espessuras, mesmo sem a compensação da temperatura, e por este motivo o método SRM é mais estável que o método FRM, pois a referência é o tempo da amostra a 0° calculada com múltiplas reflexões.

Chu e Rokhlin (1994b) avaliaram o erro gerado por variações da temperatura em amostras grafite/epóxi, analisando o efeito do deslocamento do sinal ξ causado por uma pequena variação na temperatura. Substituindo Δt_{θ_i} na equação (5.5) por $\Delta t_{\theta_i} + \xi$ (ξ pode ser positivo ou negativo). A velocidade de fase V_p' é dada por:

$$V_p' = \left(\frac{1}{V_p^2} + \frac{V_0(\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i}) - 2h \cos \theta_i}{2h^2 V_0} \xi + \frac{\xi^2}{4h^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Utilizando a aproximação de primeira ordem para ξ , tem-se:

$$V_p' = V_p \left(1 - \frac{V_0(\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i}) - 2h \cos \theta_i}{4h^2 V_0} V_p^2 \xi \right) \quad (5.16)$$

Portanto, o erro causado por ξ é proporcional a velocidade de fase ao quadrado. Para a onda quasilongitudinal, a velocidade aumenta conforme o ângulo de refração aumenta, e consequentemente o erro. A tabela Tabela 5-1 mostra os erros gerados por uma variação de $\pm 4ns$, onde em seu experimento uma variação na temperatura de $\pm 0.01^\circ C$, gera uma alteração no tempo na ordem de $\pm 2ns$

Tabela 5-1 - Erro experimental devido a uma variação de ± 4 ns causada por uma variação na temperatura para um compósito grafite/epóxi. Uma variação de $\pm 0.01^\circ$ gera uma variação no tempo de ± 2 ns.

Ângulo de refração (graus)	Velocidade (km/s)	Erro experimental (%)
(a) Onda quasilongitudinal		
2.16	3.25	0.29
10.84	3.39	0.31
14.90	3.65	0.33
19.90	4.16	0.35
23.03	4.53	0.38
27.89	5.14	0.42
42.37	6.88	0.46
(b) Onda quasitransversal		
17.50	2.90	0.26
23.75	2.93	0.24
33.39	2.84	0.23
40.79	2.75	0.18
49.90	2.64	0.15
55.24	2.56	0.12
62.52	2.46	0.10

5.4.1 Compensação da temperatura

O efeito da mudança de temperatura pode ser considerado de diversas formas. O mais direto é através da medição da temperatura a cada medição de velocidade, e a velocidade da água para cada temperatura pode ser obtida através do polinômio de quinta ordem dado por Bilaniuk e Wong (CHU; ROKHLIN;1994b):

$$V'_0(T) = \sum_{i=1}^5 k_i T^i \quad (5.17)$$

onde k_i são os coeficientes de quinta ordem do polinômio.

O tempo de atraso corrigido para a técnica de SRM é dado por:

$$t'_n = t'(0) = t_n + (l - h) \left(\frac{1}{V'_0} - \frac{1}{V_0} \right) \quad (5.18)$$

onde t_n é o tempo de vôo da referência com incidência normal medido na temperatura inicial, V_0 é a velocidade da água na temperatura inicial, l é a distância

entre o transdutor e o receptor, e h é a espessura da amostra. A desvantagem deste método é que temperatura deve ser medida com precisão da ordem de $0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$ para se obter valores precisos da velocidade de propagação na água.

Uma maneira mais eficiente de se compensar as variações da temperatura é através de um par de transdutores, que a cada medição da velocidade na amostra faz uma medição do tempo de propagação na água, e através desta medida a correção da referência inicial é realizada.

Para o FRM, a compensação da temperatura é dada levando em consideração a mudança da velocidade do som na água V'_0 , e a diferença do tempo de vôo $\Delta t = t'_0 - t'(\theta_i)$ na nova temperatura. A compensação da mudança da velocidade do som na água e a correção do tempo de atraso são suficientes, já que para pequenas mudanças de temperatura, a diferença de tempo devida à mudança de velocidade no sólido pode ser desprezada. A velocidade do som V'_0 na água na nova temperatura pode ser calculada utilizando a velocidade V_0 na temperatura inicial.

$$V'_0 = V_0 \frac{t_0}{t'_0} \quad (5.19)$$

onde t_0 e t'_0 são os tempos de vôo para o sinal na água na temperatura inicial e nova, respectivamente. A cada nova medida tomada em cada ângulo, a medição do sinal de referência na água é feito simultaneamente com o tempo de atraso da amostra, dando desta forma dados precisos da velocidade na amostra.

Para o método SRM, a correção da velocidade do som na água V'_0 é dada da mesma forma, porém a compensação do sinal é feita de forma diferente. A diferença do tempo de vôo é dada por:

$$\Delta t'_\theta = t'_n - t'(\theta_i) \quad (5.20)$$

onde a nova referência t'_n é dada por:

$$t'_n = t_n + (t'_0 - t_0) - 2h \left(\frac{1}{V'_0} - \frac{1}{V_0} \right) \quad (5.21)$$

e

$$V'_0 = V_0 \left(\frac{t_0}{t'_0} \right) \quad (5.22)$$

5.5 Sensibilidade

Para determinação das 5 constantes elásticas de um material transversalmente isotrópico, as medições podem ser realizadas exclusivamente nos planos de simetria do material, já para um material ortotrópico, 2 planos de simetria e um plano de não simetria são necessários. O meio ortotrópico possui 9 constantes elásticas, 7 delas são sensíveis às ondas quasilongitudinais e quasitransversais excitadas nos planos de simetria no ensaio de imersão, porém c_{23} e c_{44} são sensíveis às ondas transversais com polarização horizontal, e só podem ser excitadas no plano de não simetria do material.

Quanto maior for a simetria do material, ou quanto mais próximo da simetria isotrópica, mais difícil será a identificação das 2 ondas quasitransversais. O laminado biaxial, por exemplo, apresenta simetria tetragonal, onde as direções x_1 e x_2 são equivalentes, e portanto neste caso o plano $(x_1, 45^\circ)$ também é de simetria e só gerará uma onda transversal. Já para materiais de simetria transversalmente isotrópica os três modos são gerados no plano $(x_1, 45^\circ)$, e podem ser facilmente medidos experimentalmente.

5.5.1 Análise de sensibilidade

A partir de um conjunto de constantes elásticas para um material de simetria hexagonal e tetragonal, um conjunto de curvas de velocidades pode ser obtido variando individualmente cada constante, e então desta forma é possível avaliar a sensibilidade de cada constante para cada tipo de onda, em relação ao plano de medição das velocidades.

Para o material com simetria transversalmente isotrópica (laminado unidirecional), no plano (x_1, x_2) mostrado na Figura 5.7, a constante c_{11} tem grande influência na velocidade longitudinal e transversal lenta e a constante c_{12} boa sensibilidade com relação a onda transversal lenta. Para o plano (x_1, x_3) mostrado na Figura 5.8, a constante c_{33} tem alta sensibilidade com a velocidade longitudinal

próximo do ângulo crítico, a constante c_{44} tem boa sensibilidade com a velocidade longitudinal e transversal rápida, e a constante c_{13} tem baixa sensibilidade com a velocidade longitudinal e transversal rápida. Apesar de ser possível a identificação das 5 constantes elásticas para o material transversalmente isotrópico utilizando apenas os planos $0^\circ (x_1, x_3)$ e $90^\circ (x_1, x_2)$, o plano 45° possui uma sensibilidade consideravelmente maior para as constantes c_{13} e c_{44} , conforme pode ser observado na Figura 5.9, além de ser possível medir experimentalmente as 3 ondas neste plano de não simetria. Estes resultados são consistentes com os obtidos por Chu e Rokhlin (1994a).

Um ponto importante conforme ilustrado na Figura 5.10 é que as velocidades são pouco sensíveis a uma variação do ângulo φ nos arredores do plano (x_1, x_3) , o que significa que um erro de alinhamento para este plano não irá gerar erros significativos quando comparados a um erro de alinhamento para o plano de 45° . Já uma variação em c_{33} gera uma variação semelhante para os dois planos, sendo um pouco mais sensível no plano $(x_1, 45^\circ)$, conforme Figura 5.11.

Figura 5.7 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_2) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. A onda transversal rápida tem caráter puro e, portanto não se acopla ao fluido e por isso está representada em linha tracejada.

Figura 5.8 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_3) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. A onda transversal lenta tem caráter puro e, portanto não se acopla ao fluido e por isso está representada em linha tracejada.

Figura 5.9 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 45^\circ$) para materiais com simetria transversalmente isotrópica. As duas ondas de cisalhamento se propagam no fluido e podem ser medidas experimentalmente

Figura 5.10 - Variação das velocidades para uma variação no plano de incidência (x_1, φ), com ângulo $\varphi = 0^\circ, 5^\circ \text{ e } 10^\circ$ e $\varphi = 40^\circ, 45^\circ \text{ e } 50^\circ$. As velocidades são mais sensíveis a uma variação ou erro para o ângulo de 45° .

Figura 5.11 - Variação das velocidades nos planos de incidência (x_1, x_3) e ($x_1, 45^\circ$) em relação a uma variação de 20% em C_{33}

Para o laminado biaxial, com simetria tetragonal, os planos (x_1, x_3) e (x_1, x_2) são equivalentes. A Figura 5.12 mostra o tipo de polarização das ondas de cisalhamento rápida (pontilhada) e lenta (contínua) em função do ângulo de

incidência para diferentes planos de incidência (x_1, φ) . Para o ângulo de $0^\circ/90^\circ$, somente a velocidade longitudinal e a de cisalhamento rápida podem ser medidas experimentalmente, uma vez que a onda de cisalhamento lenta tem caráter puro ($P.n = 0$), paralela à superfície da amostra e não pode ser obtida. O plano de 45° , ao contrário do laminado uniaxial, é também um plano de simetria, porém neste a onda de cisalhamento rápida é que possui polarização pura horizontal. Para o ângulo de 20° é possível obter ambas ondas de cisalhamento uma vez que é um plano de não simetria.

As constantes c_{11} , c_{33} , c_{55} e c_{13} podem ser obtidas tanto no plano $(x_1, 0^\circ)$ como no plano $(x_1, 90^\circ)$, pois são equivalentes. As constantes c_{12} e c_{44} pode ser obtidas no plano $(x_1, 45^\circ)$ e $(x_1, 20^\circ)$, porém este último não traz muita informação adicional apesar de ser possível obter as 3 ondas.

Figura 5.12 – Polarização da onda em função do ângulo φ . Quando $P.n=0$ a onda tem modo de polarização de cisalhamento puro e portanto não se propaga no fluido.

Figura 5.13 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano (x_1, x_3) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial). A onda de cisalhamento lenta não se acopla ao fluido e por isso esta representada com linha tracejada

Figura 5.14 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 45^\circ$) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial). A onda de cisalhamento rápida não se acopla ao fluido e por isso esta representada com linha tracejada

Figura 5.15 - Sensibilidade das velocidades em função das constantes elásticas no plano ($x_1, 20^\circ$) para materiais com simetria tetragonal (laminado biaxial)

5.6 Reconstrução das constantes elásticas através das velocidades experimentais

Uma vez calculadas as velocidades a partir dos tempos coletados nos diversos planos do material, as constantes elásticas do material podem ser obtidas através da equação de Christoffel. Como existem mais dados do que constantes elásticas, um método de otimização não linear baseado nos mínimos quadrados pode ser aplicado utilizando a equação de Christoffel de forma implícita ou explícita.

Dada a equação de Christoffel:

$$f_p(\lambda_p(n), c_{ij}) = |\Gamma_{ij} - \delta_{ij}\lambda_p| \quad (5.23)$$

A forma implícita proposta por Rokhlin e Wang (1992), busca minimizar o quadrado das diferenças entre as velocidades medidas experimentalmente V_{exp} , e as

velocidades calculadas V_{calc} , obtidas pela equação (5.37) a partir de um conjunto de constantes elásticas.

As constantes elásticas são então obtidas quando:

$$(c_{ij}) = \min F_v(c_{ij}) \quad (5.24)$$

com

$$F_v(c_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{v_p \in U(\text{planos})} \{f v_p(v_p(n), c_{ij})\}^2 \quad (5.25)$$

onde

$$f v_p(v_p(n), c_{ij}) = V_{calc}(c_{ij}, n) - V_{exp}(n) \quad (5.26)$$

e

$$V_{calc} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \quad (5.27)$$

λ são os autovalores da equação de Christoffel.

Já a forma explícita utiliza diretamente a equação de Christoffel dada em (5.23). No caso geral, as três velocidades correspondentes aos três modos de onda são as soluções da equação cúbica. Devido aos erros experimentais, temos que:

$$\begin{aligned} f_p(\lambda_p(n), c_{ij}) = & -\lambda_p^3 + \lambda_p^2(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}) \\ & + \lambda_p(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}\Gamma_{33}) \\ & + \Gamma_{11}\Gamma_{22}\Gamma_{33} + 2\Gamma_{12}\Gamma_{23}\Gamma_{13} - \Gamma_{11}\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{22}\Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}\Gamma_{12}^2 \cong 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde

$$\lambda_p = \rho V_{exp}^2 \quad (5.29)$$

A otimização é feita então minimizando a função (ARISTEGUI; BASTE, 1996):

$$F(c_{ij}) = \sum_{p=1}^N \{f_p(\lambda_p(n), c_{ij})\}^2 \quad (5.30)$$

Este método tem a vantagem de não ser necessária a identificação da polarização das velocidades, uma vez que a incorreta identificação levará a erros na determinação das constantes elásticas, e pode ser difícil nos planos de não simetria dos materiais.

Para a realização do procedimento de otimização, os métodos usuais são o simplex e os que utilizam algum gradiente, como o de Newton-Raphson (BALASUBRAMANIAM; RAO, 1998). Algoritmos genéticos também vêm mostrando bons resultados conforme mostrado por Balasubramaniam e Rao (1998).

6 VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS

O arranjo experimental utilizado para a coleta das velocidades experimentais é mostrado no diagrama da Figura 6.1. Um transdutor de imersão com frequência central 5 MHz, modelo V307-SU, foi utilizado para emitir o sinal, e um receptor de grande abertura de PVDF para fazer a recepção do sinal. Como o transdutor de PVDF é de grande abertura, não é necessário a varredura para obtenção do ponto de máximo sinal, além de eliminar o efeito da difração. Um outro par de transdutores de 5 MHz do mesmo modelo é utilizado para fazer a compensação da variação de temperatura, uma vez que não existe controle da temperatura durante o experimento. Um termômetro, modelo HD2127.2 com resolução de 0.01 °C, também foi utilizado para medir as variações de temperatura e comparar com os resultados obtidos pelos transdutores. Duas sondas foram utilizadas para esta medição, sendo cada uma posicionada em uma extremidade do tanque de imersão, e as sondas utilizadas possuem resolução de 0.01 °C e precisão de 0.25 a 0.5 °C.

Os pulsadores utilizados são do modelo 5077PR e 5072PR da Panametrics. O sistema é ajustado de forma que o pulsador utilizado para medir a velocidade nas amostras, seja o gatilho (*trigger*) para o pulsador utilizado para compensação da temperatura, e também da placa de aquisição. O sinal é digitalizado por uma placa da Gage, modelo CS144002U, com taxa de amostragem máxima de 400 MHz e 14 bits.

O goniômetro utilizado possui resolução angular para θ (ângulo de incidência) de 0.01° e resolução angular para variação de φ (plano de incidência) de 0.04°. Para as amostras unidirecionais foram feitas medições nos planos 0°, 45° e 90°, e para as amostras biaxiais foram realizadas medições nos planos 0°, 20°, 45° e 90°. O alinhamento das amostras com relação ao plano de incidência foi realizado de forma visual tendo como referência a direção das fibras. A

Figura 6.2 e a Figura 6.3 mostram o sistema de aquisição de velocidades utilizado no laboratório.

As etapas para medição das velocidades em cada plano de incidência são:

- Coleta-se o sinal de referência sem amostra. Esta medição também pode ser realizada apenas no final, e é necessária apenas uma para todos os planos de incidência quando utilizado o método SRM com compensação da temperatura.

- A amostra é visualmente alinhada a 0° , ou seja, alinhar a direção das fibras ao eixo x_3 . Para os demais planos de medição, o goniômetro é utilizado para alterar o plano conforme o ângulo desejado.
- Para cada plano de medição, a amostra é alinhada (incidência inicial $\theta=0^\circ$) através da maximização da amplitude do sinal da n -ésima reflexão, utilizando pulso eco.
- O programa elaborado no Matlab é utilizado para fazer a aquisição dos tempos nos diferentes ângulos de incidência, onde é possível estabelecer o ângulo final de varredura e o incremento angular a cada medição. Para se obter dados satisfatórios, o incremento em θ deve ser inferior a 0.5° para que seja possível obter velocidades longitudinais próximas ao ângulo crítico, que é quando a constante c_{33} possui maior sensibilidade.

Figura 6.1 - Diagrama esquemático do sistema de aquisição de velocidades para determinação das constantes elásticas

Figura 6.2 – Amostra posicionada no goniômetro

Figura 6.3 - Sistema de aquisição de velocidades

6.1 Processamento de sinais

A aquisição dos sinais foi feita utilizando uma média de 2048 e uma taxa de aquisição de 400 MHz. Para determinar as velocidades, foi utilizada a correlação cruzada, e o sinal obtido para cada ângulo de incidência foi interpolado por 10, uma vez que para a taxa de aquisição utilizada de 400 MHz, a resolução no tempo é de 2.5 ns, e conforme reportado por Chu e Rokhlin (1994b) variações na ordem de 2 ns ocorrem para variações de 0.01 °C na temperatura.

A escolha da frequência do transdutor é feita considerando o compromisso entre resolução e o sinal/ruído. Um transdutor com frequência elevada possui um sinal mais estreito, o que facilita no processamento dos sinais uma vez que há

menor interferência entre os sinais das diferentes ondas geradas na amostra. Isto é particularmente importante em amostras finas, onde as diferenças de tempo de vôo entre as ondas são muito baixas. Por outro lado, frequências altas sofrem grande atenuação, e então dependendo do comprimento do percurso dentro da amostra o sinal é atenuado de tal forma que impossibilita sua utilização. Para as amostras utilizadas, foi verificado que uma frequência entre 5~7.5 MHz é adequada uma vez que frequências maiores resultam em uma atenuação excessiva próxima ao ângulo crítico da onda longitudinal, e impede a obtenção das velocidades, como mostrado na Figura 6.4.

Considerando a banda de frequências do transdutor utilizado, um instrumento com uma taxa de aquisição no mínimo da ordem de 25 MHz seria adequado para o ensaio, já que de acordo com o critério de Nyquist, uma taxa de aquisição de pelo menos duas vezes a maior frequência relevante do sinal em estudo deve ser utilizada a fim de evitar o fenômeno de *aliasing*.

A correlação cruzada foi comparada com o tempo obtido através de um método analógico de medição, utilizando como referência o cruzamento no zero entre o menor e maior pico do sinal. Os resultados da correlação cruzada ficaram muito próximos com o cruzamento no zero, com diferença inferior a 0.7%, com exceção do último ponto para a velocidade longitudinal onde a diferença ficou na ordem de 5%, conforme Figura 6.5.

Como a correlação cruzada retorna o valor de máximo produto interno, quando existem 2 ou 3 sinais gerados seja por reflexões ou presença de outros modos de onda, somente o de maior amplitude será medido caso não seja aplicada um intervalo no sinal de interesse. Isto é particularmente importante no caso da onda longitudinal na direção das fibras, pois neste caso as constantes são mais sensíveis para velocidades e ângulos de reflexão próximos ao crítico. A

Figura 6.6 mostra o resultado da aplicação da correlação cruzada diretamente no sinal obtido, e com a utilização de um intervalo.

Figura 6.4 - Velocidades obtidas com diferentes frequências de transdutores

Figura 6.5 - Velocidades obtidas utilizando a correlação cruzada e o cruzamento no 0

Figura 6.6 - Correlação cruzada aplicada no sinal com e sem intervalo de interesse

6.2 Cálculo das velocidades

Os métodos FRM e o SRM foram utilizados para os cálculos das velocidades e comparados com e sem compensação da temperatura, conforme Figura 6.7. O método FRM se mostrou significativamente mais suscetível a variação da temperatura, e mesmo quando compensada, não apresentou resultados tão precisos quanto o método SRM. No método SRM, a diferença devido a temperatura é inferior em qualquer situação. No caso de ser utilizado o tempo sem amostra como referência, a influência da temperatura é minimizada quando utilizada múltiplas espessuras, conforme mostrado anteriormente. No caso de utilizar diretamente a diferença de tempos entre o 1º sinal e a n -ésima reflexão dividido por n espessuras, a variação da temperatura entre a referência e a incidência 0° é irrelevante. Como as velocidades são todas calculadas tomando como referência o tempo na incidência normal, diferentemente do método FRM que utiliza sempre o tempo do percurso sem a amostra, as variações causadas pela temperatura são sempre menores.

A

Figura 6.9 mostra mais detalhadamente os erros introduzidos na velocidade para a incidência normal, quando utilizado o tempo sem amostra como referência, causado por uma variação da temperatura, ou variação na espessura. O cálculo da velocidade real foi feito considerando as diferenças de tempo entre 1º e o 4º sinal, obtidas por correlação cruzada, e a espessura da amostra de 1.59mm, que foi lapidada e apresentava variação de 0.03mm, resultando na velocidade de 3127m/s. Esta velocidade calculada utilizando a correlação cruzada e pelo cruzamento no zero, apresenta uma diferença na ordem de 20 m/s, sendo o maior valor para a correlação cruzada. A temperatura da água para o percurso sem amostra é de 20.74°C, e com amostra a 0°, de 20.38°C.

Considerando somente 1 espessura, a diferença entre a velocidade calculada com e sem compensação de temperatura é da ordem de 20%, para uma variação de apenas 0.36°C. Utilizando o segundo sinal, que representa 3 espessuras, este erro é significativamente reduzido, ficando em torno de 6%. Este resultado é coerente com a simulação mostrada anteriormente, e confirma a superioridade do método SRM, que utiliza múltiplas reflexões para o cálculo do tempo de referência com a amostra a 0°. Adicionalmente, o método SRM utiliza apenas a diferença incremental de tempo entre a medição de propagação com incidência normal e as demais medições angulares, e portanto, os erros causados pela precisão do termômetro são minimizados quando comparado com o método FRM, que utiliza medições absolutas da temperatura para o tempo de referência sem amostra, e os tempos de percurso com amostra. A inversão da inclinação da curva é explicada pelo fato de que para a 1º sinal, Δt é positivo já que $t_{sem\ amostra} > t_{com\ amostra}$, porém a partir do 2º sinal Δt é negativo.

O método de compensação da temperatura também foi avaliado conforme Figura 6.8. A correção da temperatura através do par de transdutores de referência e através do termômetro apresentaram resultados próximos, principalmente para o método SRM, pelos motivos explicados anteriormente. É importante notar que enquanto que os resultados obtidos foram próximos, a compensação através do par de transdutores é mais adequada, uma vez que leva em consideração a variação da temperatura em todo percurso do sinal, ao contrário do par de termômetros que mede apenas a variação da temperatura em dois pontos do tanque de imersão, e utiliza a média para a compensação. Durante os experimentos foi verificada uma diferença de 0.04°C entre as sondas.

Figura 6.7 - Comparativo entre os métodos FRM e SRM com e sem compensação da temperatura

Figura 6.8 - Comparativo entre a compensação de temperatura através do termômetro e par de transdutores

Figura 6.9 - Variação da velocidade obtida utilizando diferentes reflexões e erros na espessura para incidência de 0°

6.3 Sensibilidade angular

A amostra unidirecional foi alinhada visualmente para $\varphi = 0^\circ$, e as curvas das velocidades foram obtidas através do método SRM para os ângulos de 0° , 5° e 10° , e 40° , 45° e 50° . Os resultados mostrados na Figura 6.10 validam a simulação mostrada na figura 5.10, comprovando que erros de alinhamento na direção de 0° pouco influenciam nas curvas de velocidade quando comparadas ao plano 45° . Com este resultado, um procedimento de alinhamento da amostra pode ser proposto para laminados com simetria transversalmente isotrópica através da seguinte forma:

- Alinhar visualmente a amostra a $\varphi = 0^\circ$, ou seja, alinhar a direção das fibras ao eixo x_3 .
- Realizar a medição para a incidência normal (referência para SRM)
- Rotacionar através do goniômetro a amostra para $\varphi=45^\circ$ e $\theta=12^\circ$ (valores de θ próximos ao ângulo crítico) e obter a velocidade.
- Repetir para $\varphi=-45^\circ$ e $\theta=12^\circ$.
- Rotacionar a amostra em $\Delta\varphi$ para ajustar $\varphi = 0^\circ$. Se $v_{-45^\circ} < v_{45^\circ} \rightarrow \Delta\varphi < 0$

Os valores da correção $\Delta\phi$ para um ajuste eficiente precisa ser avaliado.

Figura 6.10 - Velocidades obtidas com variações no ângulo ϕ

6.4 Reconstrução das constantes elásticas

A partir do conjunto de velocidades obtidas para os diferentes planos de incidência, um programa no Matlab foi criado para obter as constantes elásticas através da minimização do problema utilizando a forma implícita e explícita da equação de Christoffel. O problema de minimização foi resolvido através da função *fminsearch* do Matlab, que utiliza o método simplex.

6.4.1 Medição da densidade da amostra

A densidade da amostra é necessária tanto quando a equação de Christoffel é utilizada da forma implícita, na equação (5.27), como na forma explícita, na equação (5.29). E uma maneira bastante precisa de se obter a densidade da amostra é através da aplicação do Princípio de Arquimedes.

Um objeto sólido de volume V mais denso que a água, quando completamente submerso, sofre uma força de empuxo $F_{empuxo} = \rho_{\text{água}} V g$, onde $\rho_{\text{água}}$ é a densidade da água e g é a gravidade. A massa do objeto M , quando medida no ar é $M = \rho V$, onde ρ é a densidade do objeto, e portanto o volume do objeto é dado por $V = \frac{M}{\rho}$. O peso aparente, $P_{aparente} = M_{aparente} g$, onde $M_{aparente}$ é

a massa medida com o objeto totalmente submerso, é dado pela diferença entre o peso do objeto no ar, P_{real} , e o empuxo.

$$P_{aparente} = P_{real} - F_{empuxo} \quad (6.1)$$

Portanto a densidade do objeto pode ser calculada como:

$$\rho = \frac{M\rho_{\acute{a}gua}}{M - M_{aparente}} \quad (6.2)$$

6.4.2 Estabilidade do algoritmo de reconstrução

A convergência do algoritmo de otimização foi testada para o laminado unidirecional, com simetria hexagonal (transversalmente isotrópica).

A partir de um conjunto de constantes elásticas foram obtidas as velocidades para diferentes ângulos, e então introduzindo um ruído com distribuição uniforme com níveis de 1%, 2.5%, 5% e 10%, foram reconstruídas as constantes elásticas através do procedimento de otimização. Para cada nível de ruído este procedimento foi realizado 50 vezes e os valores da Tabela 6-1 é o resultado da média.

Figura 6.11 - Velocidades criadas a partir de um conjunto de constantes e com ruído uniforme de 10%

Tabela 6-1 - Variação da solução obtida a partir de velocidades com diferentes níveis de ruído uniforme

Ruído	C(1,1)	C(1,2)	C(1,3)	C(2,2)	C(3,3)
10%	1,53%	2,74%	16,65%	1,99%	3,19%
5%	0,75%	1,45%	8,20%	1,18%	1,49%
2,5%	0,39%	0,67%	4,75%	0,47%	0,79%
1%	0,13%	0,24%	1,44%	0,20%	0,31%

Pode-se notar que a constante c_{13} é a mais suscetível aos ruídos, como era de se esperar levando em consideração que é a menos sensível à variação das velocidades como mostrado anteriormente nas análises de sensibilidade. As demais constantes tiveram pouca variação, sendo entre 1.5% a 3% para uma introdução de ruído de 10%.

Em seguida foi verificada a estabilidade do algoritmo a partir de diferentes vetores de partida. Introduzindo um ruído de 5% nas velocidades, foi alterado o vetor de partida (com base no que originou as velocidades) em 30%, 20% e 10%. Pode-se

verificar que a utilização de diferentes valores iniciais tem pouca influência na solução do problema para o laminado unidirecional com simetria hexagonal.

Tabela 6-2 - Resultados obtidos a partir de velocidades sintetizadas com 5% de ruído com distribuição uniforme e diferentes vetores de partida

Partida	C(1,1)	C(1,2)	C(1,3)	C(2,2)	C(3,3)
30,00%	0,72%	1,23%	9,54%	1,18%	1,55%
20,00%	0,77%	1,42%	9,80%	1,25%	1,50%
10,00%	0,70%	1,34%	8,57%	1,22%	1,80%

6.4.3 Laminado unidirecional (simetria hexagonal)

As velocidades para o laminado unidirecional foram obtidas utilizando método SRM com compensação de temperatura e transdutor de frequência central de 5 MHz, nos planos $\varphi = 0^\circ, 45^\circ$ e 90° . As constantes elásticas foram reconstruídas de forma simultânea, ou seja, variando todas as constantes em todos os planos de incidência sem considerar a sensibilidade. A equação de Christoffel foi utilizada na forma implícita e explícita, porém como mostrado na Figura 6.12, o processo de otimização não convergiu para forma explícita, somente para a forma implícita, conforme Figura 6.13. As constantes elásticas para o laminado unidirecional obtidas estão listadas na Tabela 6-3.

Tabela 6-3 - Constantes elásticas (GPa) e densidade para o laminado unidirecional

	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₃₃	C ₄₄	$\rho(\text{g/cm}^3)$
Unidirecional	15,74	8,05	8,32	126,31	5,70	1,59

Figura 6.12 - Curvas de velocidade calculadas para o laminado unidirecional a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma explícita

Figura 6.13 - Curvas de velocidade calculadas para o laminado unidirecional a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita

6.4.4 Laminado biaxial (simetria tetragonal)

O tensor de constantes elásticas apresentado na matriz (3.44), tem o eixo x_3 perpendicular à superfície da amostra. Para os experimentos realizados, o eixo perpendicular à superfície é o eixo x_1 . Neste sistema de coordenadas a matriz de elasticidade é dada por:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

As velocidades para o laminado biaxial foram obtidas utilizando método SRM com compensação de temperatura e transdutor de frequência central de 5 MHz, nos planos $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 45^\circ$ e 90° . O procedimento de minimização para o laminado tetragonal utilizando a forma implícita e busca simultânea, não convergiu conforme Figura 6.14 e Figura 6.15. Para garantir a convergência, as constantes c_{11}, c_{13}, c_{33} e c_{66} foram obtidas nos planos $\varphi = 0^\circ$ e 90° , e em seguida as constantes c_{23}, c_{44} foram obtidas dos planos $\varphi = 20^\circ$ e 45° .

Apesar de utilizar o modelo tetragonal, que considera iguais as propriedades nos eixos x_3 e x_2 , o laminado apresenta diferença de 2.5% nas velocidades próximas ao ângulo crítico, conforme mostrado a Figura 6.18. Como próximo do ângulo crítico as velocidades aumentam de forma exponencial, qualquer erro de alinhamento da amostra ou falta de planicidade pode justificar tal erro, bem como assimetrias no próprio tecido fornecido ou diferenças geradas durante a fabricação do laminado. O modelo ortotrópico que não considera a equivalência nos eixos x_3 e x_2 também foi testada, porém com resultados similares aos obtidos na simetria tetragonal, devido a limitação do algoritmo de minimização utilizado.

As constantes elásticas obtidas estão listadas na Tabela 6-4.

Tabela 6-4 - Constantes elásticas (GPa) e densidade para o laminado biaxial

	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{66}	C_{23}	C_{44}	$\rho(\text{g/cm}^3)$
Biaxial 20 Psi	14,17	7,27	61,29	4,13	2,67	7,51	1,54

Figura 6.14 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x_1, 0^\circ)$ e $(x_1, 90^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita simultânea

Figura 6.15 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x_1, 45^\circ)$ e $(x_1, 20^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita simultânea

Figura 6.16 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x_1, 0^\circ)$ e $(x_1, 90^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita por partes

Figura 6.17 - Curvas de velocidade calculadas para os planos $(x_1, 45^\circ)$ e $(x_1, 20^\circ)$ para o laminado biaxial a partir do conjunto de constantes elásticas obtidas pelo procedimento de minimização utilizando a equação de Christoffel na forma implícita por partes

Figura 6.18 - Velocidades obtidas no plano 1-3 e plano 1-2 para material de simetria tetragonal teórica

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusão

Foram implementados dois métodos de imersão em água para a determinação das constantes elásticas. Um que utiliza o percurso na água sem a amostra como referência (FRM), e outro que utiliza o percurso com incidência normal na amostra como referência (SRM).

O aparato experimental montado para realizar as verificações experimentais tem elevada precisão de movimento angular e possibilita a medição de velocidade de forma automática. A aquisição de sinais foi feita com alta taxa de amostragem (400MHz) e com grande resolução na medição da amplitude (14 bits) produzindo resultados precisos de velocidades de propagação.

Tanto a correlação cruzada como o cruzamento por zeros mostraram resultados semelhantes e suficientes para obtenção das velocidades nos planos de simetria do material, porém nos planos de não simetria, onde as ondas de cisalhamento se misturam com as ondas longitudinais, existe a necessidade de se desenvolver uma técnica de processamento de sinais mais adequada.

O método SRM se mostrou superior ao método FRM para determinar as velocidades. Como apenas mudanças relativas do tempo de vôo devido à rotação e alterações no percurso sônico são medidas, é muito mais precisa do que a medição absoluta do tempo de vôo como utilizado no método FRM. Além disso, a velocidade de fase para incidência normal foi obtida com maior precisão através das múltiplas reflexões, eliminando erros acumulativos como por exemplo devido a precisão do termômetro. Adicionalmente, como todas as medições são relativas ao percurso sônico com a presença da amostra, a técnica é menos sensível à imperfeições geométricas e alteração do sinal devido à atenuação.

A compensação da temperatura através do par de transdutores foi implementada com sucesso, e apresentou resultados próximos aos obtidos com a utilização do termômetro com resolução de 0.01°C , e precisão de 0.25°C para o método SRM. Como dito anteriormente, no método SRM apenas variações incrementais com relação à incidência normal são consideradas, e portanto, erros introduzidos pela temperatura são minimizados já que os valores utilizados não são absolutos. É importante notar que enquanto que os resultados obtidos foram

próximos, a compensação através do par de transdutores é mais adequada, uma vez que leva em consideração a variação no tempo de vôo causada pela variação da temperatura em todo percurso do sinal, ao contrário do par de termômetros que mede apenas a variação da temperatura em dois pontos do tanque de imersão, utilizando a média para a compensação, além de ser uma compensação indireta já que utiliza a temperatura para estimar a variação na velocidade de propagação da água para então calcular a variação no tempo de vôo. Durante os experimentos foi verificada uma diferença de 0.04°C entre as sondas.

As análises das influências de variação de temperatura e falta de paralelismos das amostras foram muito importantes para minimizar os erros experimentais.

A implementação da estratégia de verificar a sensibilidade de cada constante contribuiu para melhorar a precisão na determinação dessas constantes, e também para entender a falta de precisão em determinadas constantes. Este estudo foi utilizado para selecionar os planos de aquisição das velocidades mais adequados e na estratégia de minimização do problema, uma vez que para a simetria tetragonal, não houve convergência do algoritmo quando minimizadas todas as constantes de forma simultânea. A análise da polarização das ondas transversais em cada plano de aquisição também foi importante, pois foi utilizada a forma implícita da equação de Christoffel no problema de otimização, onde cada velocidade experimental deve ser relacionada a uma das velocidade calculadas a partir do conjunto de constantes, e portanto a incorreta identificação da polarização da onda leva a incorreta solução.

O algoritmo de otimização utilizando a função do Matlab `Fminsearch`, convergiu somente para materiais de simetria hexagonal utilizando a equação de Christoffel de forma implícita. Para a simetria tetragonal, assim como quando utilizada a forma explícita da equação de Christoffel, não houve convergência, e um algoritmo de otimização que utilize outras técnicas precisa ser desenvolvido, como por exemplo algoritmos genéticos. Uma outra consideração a ser feita é que apesar de o material ser fabricado com tecido biaxial balanceado, as propriedades nos eixos x_2 e x_3 podem não ser iguais, como suposto no modelo tetragonal utilizado, porém a minimização também foi realizada utilizando modelo ortotrópico, mas com resultados similares ao obtido para o modelo tetragonal, mostrando assim a limitação do algoritmo de otimização utilizado.

Para se obter as constantes elásticas dos materiais, foi considerado o conhecimento prévio dos planos de simetria do material, e como o alinhamento das

amostras com relação a estes planos de simetria foi realizado de forma visual, uma análise de sensibilidade das velocidades em relação a erros nos planos de aquisição foi feita. Através desta análise, uma proposta de alinhamento das amostras foi feita e tornará o método mais preciso.

A técnica de determinação das constantes elásticas por ultrassom se mostrou repetitiva e de fácil utilização e, portanto, tem um grande potencial de uso na caracterização mecânica de materiais compostos.

7.2 Trabalhos futuros

Os principais pontos a serem desenvolvidos em trabalhos futuros são:

- Verificação do efeito de porosidade nas constantes elásticas do compósito;
- Consideração das propriedades viscoelásticas e obtenção das constantes complexas;
- Processamento de sinais para sinais para melhorar a resolução de sinais sobrepostos;
- Desenvolvimento de algoritmo de otimização mais robusto para evitar mínimos locais e garantir convergência;
- Avaliação do conjunto de constantes elásticas obtido como solução do problema de minimização, por exemplo através da estimativa de intervalos de confiança;
- Extensão do método para materiais de simetria ortotrópica;
- Determinação das constantes elásticas sem prévia consideração do conhecimento dos planos de simetria do material;
- Ensaio em laminados com diferentes condições de fabricação como ondulações nas fibras no plano e fora do plano e diferentes níveis de tg;
- Comparação dos resultados obtidas com ensaios mecânicos;

REFERÊNCIAS

- ADAMOWSKI, J. C., Buiochi, Higuti, R. T., “*Ultrasonic material characterization using large-aperture PVDF receivers*”, *Ultrasonics* v. 50, pp. 110-115, 2010.
- ADAMS, D., “*Composite Materials Test Methods*”, 2010. Disponível em: < http://www.niar.wichita.edu/niarworkshops/portals/0/composite%20materials%20test%20methods_danadams.pdf>. Acesso em: 11 setembro de 2016.
- ANDRADE, M. A. B., “*Análise de Materiais piezelétricos compósitos para aplicações em transdutores de ultra-som*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.
- ARISTEGUI, C., Baste, S., “*Optimal recovery of the elasticity tensor of general anisotropic materials from ultrasonic velocity data,*” *J. Acoust. Soc. Am.* 101, pp. 813–833, 1997.
- ARISTEGUI, C., Baste, S., “*Optimal determination of the material symmetry axes and associated elasticity tensor from ultrasonic velocity data,*” *J. Acoust. Soc. Am.* 102, pp. 1503–1521, 1997.
- AULD, B. A., “*Acoustics Fields and Waves in Solids*”, n. 1, EUA, John Wiley & Sons, 2a ed., 1990.
- AUDOIN, B., Roux, J., “*An innovative application of the Hilbert transform to time delay estimation of overlapped ultrasonic echoes*”, *Ultrasonics* 34, pp. 25–33, 1996.
- BALASUBRAMANIAM, K., RAO, N. S., “*Inversion of composite material elastic constants from ultrasonic bulk wave phase velocity data using genetic algorithms*”, *Composites Part B*, V. 29B, pp 171-180, 1998.

- BALASUBRAMANIAM, K., Whitney, S. C., “*Ultrasonic through-transmission characterization of thick fibre-reinforced composites*”, NDT&E International, vol. 29, n. 4, pp. 225-236, 1996.
- BALASUBRAMANIAM, M., “*Composite materials and processing*”, EUA, CRC Press, 1^a ed. 2014.
- BOERI, D. V., “*Caracterização de materiais compósitos por ultra-som*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.
- CASTAGNEDE, B., Roux, J., Hosten, B., “*Correlation method for normal mode tracking in anisotropic media using an ultrasonic immersion system*”, Ultrasonics, v. 27, pp 280-287, 1989.
- CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Determination of macro-and micromechanical and interfacial elastic properties of composites from ultrasonic data*”, Journal of Acoustical Society of America v. 92, n. 2, pp. 920–931, 1992.
- CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Stability of determination of composite moduli from velocity data in planes of symmetry for weak and strong anisotropies*”, Journal of Acoustical Society of America v. 95, n. 1, pp. 213–225, 1994a.
- CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Comparative analysis of through-transmission ultrasonic bulk wave methods for phase velocity measurements in anisotropic materials*”, Journal of Acoustical Society of America v. 95, n. 6, pp. 3204–3212, 1994b.
- CHU, Y. C., Degtyar, A. D., Rokhlin, S. I., “*On Determination of Orthotropic Material Moduli from Ultrasonic Velocity Data in Nonsymmetry Planes*”, Journal of Acoustical Society of America v. 95, n. 6, pp. 3191–3203, 1994.

- DITRI, J. J., “*On the determination of the elastic moduli of anisotropic media from limited acoustical data*”, Journal of Acoustical Society of America v. 95, n. 4, pp. 1761–1767, 1994.
- EVERY, A. G., Sachse, W., “*Sensitivity of inversion algorithms for recovering elastic constants of anisotropic solids from longitudinal wavespeed data*”, Ultrasonics 30, pp. 43–48, 1992.
- FORTINEAU, J., Clézio, E. L., Meulen, F. V., Feuillard, G., “*Moisture content characterization in composite materials based on ultrasonic transmission measurements*”, Journal of Applied Physics, v. 101, pp. 114911-1 114911-8, 2007
- GIESKE, J. M., Allred, R. E., “*Elastic constants of B-A1 composites by ultrasonic velocity measurements*”, Exp. Mech. 14, pp. 158-165, 1974.
- GURIT, “*Guide to composites*”, 2011. Disponível em: <https://issuu.com/gurit/docs/guide_to_composites_2011>. Acesso em: 11 setembro de 2016.
- HOSTEN, B., “*Chap. 3 - Ultrasonic through-transmission method for measuring the complex stiffness moduli of composite materials*”, Handbook of Elastic Properties of Solids, Liquids and Gases, vol. 1, Academic Press, 2001.
- KUMMAR, P. P., Krishnamurthy, C. V., Balasubramaniam, K., “*Elastic Constants Inversion from Ultrasonic Transmission Spectra Obtained Using a Wide Aperture PVDF Sensor*”, in Review Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 25, pp. 1127-1132, 2006
- MARGUERES, P., Meraghni, F., “*Damage induced anisotropy and stiffness reduction evaluation in composite materials using ultrasonic wave transmission*”, Composites: Part A. v. 45, pp. 134-144, 2013.

- MARKHAM, M. F., *"Measurement of the elastic constants of fibre composite by ultrasonics"*, Composites, v. 1, pp. 145, 1970.
- MINACHI, A., Hsu, D. K., Thompson, R. B., *"Single-sided determination of elastic constants of thick composites using acoustoultrasonic technique"*, Journal of Acoustical Society of America v. 96, n. 1, pp 353-362, 1994.
- NIELSEN, S.A., Toftegaard, H., *"Ultrasonic measurement of elastic constants in fiber-reinforced polymer composites under influence of absorbed moisture"*, Ultrasonics, v. 38, pp. 242-246, 2000.
- NYE, J. F., *"Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices"*, New York - EUA, Oxford University Press, 1993.
- PEARSON, L. H., Murri, W. J., *"Measurement of ultrasonic wavespeeds in off-axis directions of composite materials"*, in Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 63, pp. 1093-1101, 1987
- REDDY, S., Balasubramaniam, K., Krishnamurthy, S., *"Ultrasonic goniometry immersion techniques for the measurement of elastic moduli"*, Composite Structures, v. 67, pp. 3-17, 2005.
- REDDY, J. N., *"Mechanics of laminated composite plates and shells"*, EUA, CRC Press, 2a ed. 2004
- ROKHLIN, S. I., Wang, W., *"Critical angle measurement of elastic constants in composite material"*, Journal of Acoustical Society of America v. 96, n. 5, pp. 1876-1882, 1989
- ROKHLIN, S. I., Wang, W., *"Ultrasonic evaluation of in-plane and out-of-plane elastic properties of composite materials"*, in Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 8B, pp 1489-1497, 1989

- ROKHLIN, S. I., Wang, W., “*Double through-transmission bulk wave method for ultrasonic phase velocity measurement and determination of elastic constants of composite materials*”, Journal of Acoustical Society of America v. 95, n. 6, pp. 3303– 3312, 1992.
- ROSENBAUM, J. F., “*Bulk Acoustic Wave Theory and Devices*”, London – UK, Artech House, 1988.
- SMITH, R. E., “*Ultrasonic elastic constants of carbon fibers and their composites*,” Journal of Applied Physics, v. 43, pp. 2555-2562, 1972
- SUN, M., “*Optimal Recovery of Elastic Properties for Anisotropic Materials through Ultrasonic Measurements*”, Dissertação de Mestrado, Maine – EUA, University of Maine, 2002.
- Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C. V., Balasubramaniam K., “*Genetic algorithm reconstruction of orthotropic composite plate elastic constants from a single non-symmetric plane ultrasonic velocity data*”. Composite Part B, v. 38, pp. 216–227, 2007.
- Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C. V., Balasubramaniam K., “*Determination of material symmetries from ultrasonic velocity measurements: A genetic algorithm based blind inversion method*”. Composite Science and Technology, v. 68, pp. 862–871, 2008.
- WANG, L., Lavrentyev, A. I., Rokhlin, S. I., “*Beam and phase effects in angle-beam-through-transmission method of ultrasonic velocity measurement*”, Journal of Acoustical Society of America v. 113, n. 3, pp. 1551–1559, 2003.
- ZIMMER, J. E., Cost J. R., “*Determination of the elastic Constants of a Unidirectional Fiber Composite Using Ultrasonic Velocity Measurements*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 47, pp. 795, 1970