MILTON SAULO RAIMUNDO

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO ADAPTATIVO BASEADO EM UM
SISTEMA SVR-WAVELET HÍBRIDO PARA PREVISÃO DE SÉRIES
TEMPORAIS FINANCEIRAS

São Paulo

2018

MILTON SAULO RAIMUNDO

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO ADAPTATIVO BASEADO EM UM
SISTEMA SVR-WAVELET HÍBRIDO PARA PREVISÃO DE SÉRIES
TEMPORAIS FINANCEIRAS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Uni-
versidade de São Paulo para obtenção do título
de doutor em Ciências

São Paulo
2018

MILTON SAULO RAIMUNDO

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO ADAPTATIVO BASEADO EM UM
SISTEMA SVR-WAVELET HÍBRIDO PARA PREVISÃO DE SÉRIES
TEMPORAIS FINANCEIRAS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em Ciências

Área de concentração:
Engenharia de Controle e Automação Mecânica

Orientador:
Jun Okamoto Júnior

São Paulo
2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 11 de Junho de 2018

Assinatura do autor:

Milton Sauls Raimundo

Assinatura do orientador:

R. S. Raimundo

Catálogo-na-publicação

Raimundo, Milton Saulo

Desenvolvimento de um modelo adaptativo baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido para previsão de séries temporais financeiras / M. S. Raimundo -- versão corr. -- São Paulo, 2018.

144 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.SVR 2.wavelets 3.Séries Temporais Financeiras 4.Expoente de Hurst 5.Estatística R/S I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

DEDICATÓRIA

À Maria Aparecida Raimundo (in memorian) e
à Irene Micucci Raimundo, que dignamente
me apresentaram à importância da família e o
caminho da honestidade e persistência.

À minha esposa Isabel e filhos, Gabriela e
Gustavo, pelo apoio incondicional em todos os
momentos. Sem vocês nenhuma conquista
valeria a pena.

Ao meu irmão Nilton Paulo, pela amizade e
companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me abençoar todos os dias e iluminar meu caminho, fortalecendo-me para seguir em frente.

Ao Prof. Jun Okamoto Jr., o meu reconhecimento pela oportunidade de realizar este trabalho ao lado de alguém que emana sabedoria. Meu respeito e admiração pela sua serenidade e pelo seu Dom no ensino da Ciência.

Aos membros da Secretaria do PPGEM - USP, que direta ou indiretamente contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, o meu reconhecimento e gratidão.

Porque eu sou do tamanho do que vejo
e não do tamanho da minha altura.
E o que vejo são os meus sonhos

(Alberto Caeiro - heterônimo de
Fernando Pessoa)

RESUMO

A necessidade de antecipar e identificar variações de acontecimentos apontam para uma nova direção nos mercados de bolsa de valores e vem de encontro às análises das oscilações de preços de ativos financeiros. Esta necessidade leva a argumentar sobre novas alternativas na predição de séries temporais financeiras utilizando métodos de aprendizado de máquinas e vários modelos têm sido desenvolvidos para efetuar a análise e a previsão de dados de ativos financeiros. Este trabalho tem por objetivo propor o desenvolvimento de um modelo de previsão adaptativo baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido, que integra modelos de wavelets e Support Vector Regression (SVR) na previsão de séries financeiras. O método consiste na utilização da Transformada de Wavelet Discreta (DWT) a fim de decompor dados de séries de ativos financeiros que são utilizados como variáveis de entrada do SVR com o objetivo de prever dados futuros de ativos financeiros. O modelo proposto é aplicado a um conjunto de ativos financeiros do tipo Foreign Exchange Market (FOREX), Mercado Global de Câmbio, obtidos a partir de uma base de conhecimento público. As séries são ajustadas gerando-se novas predições das séries originais, que são comparadas com outros modelos tradicionais tais como o modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis (ARIMA), o modelo Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis (ARFIMA), o modelo Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado (GARCH) e o modelo SVR tradicional com Kernel. Além disso, realizam-se testes de normalidade e de raiz unitária para distribuição não linear, tal como testes de correlação, para constatar que as séries temporais FOREX são adequadas para a comprovação do modelo híbrido SVR-wavelet e posterior comparação com modelos tradicionais. Verifica-se também a aderência ao Expoente de Hurst por meio da estatística de Reescalamento (R/S).

Palavras-chave: SVR, wavelets, Séries Temporais Financeiras, Expoente de Hurst, Estatística R/S.

ABSTRACT

The necessity to anticipate and identify changes in events points to a new direction in the stock exchange market and reaches the analysis of the oscillations of prices of financial assets. This necessity leads to an argument about new alternatives in the prediction of financial time series using machine learning methods. Several models have been developed to perform the analysis and prediction of financial asset data. This thesis aims to propose the development of SVR-wavelet model, an adaptive and hybrid prediction model, which integrates wavelet models and Support Vector Regression (SVR), for prediction of Financial Time Series, particularly Foreign Exchange Market (FOREX), obtained from a public knowledge base. The method consists of using the Discrete Wavelets Transform (DWT) to decompose data from FOREX time series, that are used as SVR input variables to predict new data. The series are adjusted by generating new predictions of the original series, which are compared with other traditional models such as the Autoregressive Integrated Moving Average model (ARIMA), the Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average model (ARFIMA), the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity model (GARCH) and the traditional SVR model with Kernel. In addition, normality and unit root tests for non-linear distribution, and correlation tests, are performed to verify that the FOREX time series are adequate for the verification of SVR-wavelet hybrid model and comparison with traditional models. There is also the adherence to the Hurst Exponent through the statistical Rescaled Range (R/S).

Keywords: SVR, wavelets, Financial Time Series, Hurst Exponent, Statistical R/S

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Função <i>wavelet Haar</i> $\Psi^H(t)$.	37
Figura 2	Representação de um hiperplano de separação onde se destacam os vetores de suporte, as distâncias $\frac{b}{\ w\ }$ e $\frac{2}{\ w\ }$ e as regiões $w \cdot x + b > 0$ e $w \cdot x + b < 0$.	40
Figura 3	Representação de um hiperplano de separação onde se evidenciam os vetores de suporte e a variável de folga ξ , conforme a equação 47.	42
Figura 4	Ilustração do conjunto de dados não lineares (a), da fronteira não linear no espaço de entradas (b) e da fronteira linear no espaço de características (c) (96).	43
Figura 5	Técnicas de <i>denoising</i> ou <i>wavelet shrinkage</i> (129).	52
Figura 6	Efeito das modificações proporcionadas pelos parâmetros (a) e (b) sob a função <i>wavelet</i> mãe (129).	52
Figura 7	Famílias de <i>wavelet Haar</i> , <i>Daubechie</i> de ordem 4 (db4), <i>Coiflet</i> de ordem 4 (coif4) e <i>Gaussian</i> de ordem 4 (gaus4) obtidas por meio do software MATLAB.	54
Figura 8	Modelo proposto para predição de séries temporais por meio do modelo SVR- <i>wavelet</i> híbrido.	55
Figura 9	Representação da metodologia adotada na predição de séries temporais por meio do modelo SVR- <i>wavelet</i> híbrido.	72
Figura 10	Gráficos contendo as séries históricas dos preços do ativo FOREX AUD-JPY com periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, com a aplicação de técnicas de <i>denoising</i> ou <i>wavelet shrinkage</i> para eliminação de ruídos contidos na série. Somente os últimos 2048 pontos são amostrados.	82
Figura 11	Macro fluxograma das principais tarefas no processo de montagem e execução dos testes.	83
Figura 12	Gráfico de dispersão para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	87
Figura 13	Gráficos sobrepostos da série prevista ($\times$), obtido por meio dos métodos <i>svm</i> e <i>predict</i> , e da série original ($\bullet$) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	88

Figura 14	Gráficos sobrepostos da série original ($\circ$) e sua Transformada <i>wavelet</i> inversa ($\times$) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	91
Figura 15	Gráficos sobrepostos da série original (Δ) e sua Transformada <i>wavelet</i> MODWT inversa ($\diamond$) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	92
Figura 16	Componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , decompostos pela MODWT, para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	94
Figura 17	Gráfico de Distribuição de Energia e seu equivalente Box Plot dos componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , decompostos pela MODWT, para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	95
Figura 18	Decomposição da série para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos, através da Transformada <i>wavelet</i> MODWT, com suas componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , em comparação com a aplicação de técnicas de <i>denoising</i> ou <i>wavelet shrinkage</i> para eliminação de ruídos contidos na série.	103
Figura 19	Gráfico com dispersão dos valores de $\log \{R/S_t\}$ em relação aos valores de $\log \{t\}$, para a relação entre as moedas AUD-JPY, contendo também a reta de tendência.	105
Figura 20	Gráfico da componente d_5 , com seus pontos marcados com ($\bullet$), gerada pela Transformada <i>wavelet</i> MODWT, da relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos, justaposto ao gráfico gerado pelo método <i>predict</i> , com seus pontos destacados com ($\times$).	107
Figura 21	Gráficos sobrepostos da série original ($\circ$) e da série predita através do modelo SVR- <i>wavelet</i> híbrido proposto ($\times$) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Interpretação admissível dos p-values (3).	66
Tabela 2	Resultados dos p-values dos métodos para testes de Normalidade.	84
Tabela 3	Resultados dos p-values dos métodos para testes de Raiz Unitária.	85
Tabela 4	Resultados dos p-values dos métodos para testes de Não-Linearidade.	86
Tabela 5	Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo SVR tradicional com Kernel.	89
Tabela 6	Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo SVR tradicional com Kernel.	90
Tabela 7	Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo híbrido SVR-wavelet.	97
Tabela 8	Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo híbrido SVR-wavelet.	98
Tabela 9	Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo ARIMA.	99
Tabela 10	Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo ARIMA.	100
Tabela 11	Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo ARFIMA.	101
Tabela 12	Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo ARFIMA.	102
Tabela 13	Resultados das métricas AIC e BIC, calculados pelo modelo GARCH.	104
Tabela 14	Valores parciais para a estimativa do expoente de Hurst (H) obtidos por meio das tarefas executadas, conforme descrição no método utilizado, para a relação entre as moedas AUD-JPY, com periodicidade de 1 em 1 dia.	104
Tabela 15	Valores estimados e estatísticas da regressão obtidos por meio das funções <i>lm</i> , <i>summary</i> e <i>coef</i> disponíveis no ambiente para análise de dados estatísticos R (47).	105
Tabela 16	Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARIMA e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.	109

Tabela 17	Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARFIMA e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.	110
Tabela 18	Comparação dos valores dos métodos AIC e BIC entre o modelo GARH e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet. . .	111
Tabela 19	Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo SVR tradicional com Kernel e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.	112
Tabela 20	Teste de significância, conforme sugerido por Couillard e Davison, utilizando-se da estatística $p - value < 0,001$, obtidos por meio da função <i>t.test</i> disponível no ambiente para análise de dados estatísticos R (47).	113
Tabela 21	Resultados obtidos por meio das funções desenvolvidas no ambiente para análise de dados estatísticos R (47), conforme metodologia desenvolvida por Mandelbrot e Wallis (85), baseada nos trabalhos de Hurst (62).	114

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	22
2 REGRESSÃO E MÉTODOS DE APRENDIZADO DE MÁQUINAS	25
2.1 ALGORITHMIC TRADING	25
2.2 ANÁLISE TÉCNICA E ANÁLISE FUNDAMENTALISTA	25
2.2.1 Análise Técnica	25
2.2.2 Análise Fundamentalista	26
2.3 MODELOS MATEMÁTICOS	26
2.3.1 Modelos Autorregressivos	27
2.3.2 Modelos de Médias Móveis	28
2.3.3 Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis	28
2.3.4 Modelos Autorregressivos Integrados de Médias Móveis	28
2.3.5 Modelos Autorregressivos Fracionários Integrados de Médias Móveis	29
2.3.6 Modelos Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade	30
2.3.7 Modelos ARCH Generalizados	30
2.4 MODELOS FRACTAIS	31
2.5 TRANSFORMADA WAVELET	31
2.5.1 Análise Multirresolução (MRA)	33
2.5.2 Transformada de Wavelet Discreta	35
2.5.3 Transformada Wavelet Discreta de Máxima Sobreposição	35
2.5.4 Wavelet Haar	37
2.6 MÉTODOS DE APRENDIZADO DE MÁQUINAS	38
2.6.1 Árvores de Regressão	38
2.6.2 Regressão por Redes Neurais	38
2.6.3 Regressão por Aprendizagem Bayesiana	39
2.6.4 Regressão por k-Vizinhos mais Próximos	39
2.7 MÁQUINAS DE SUPORTE VETORIAL	39
2.7.1 SVM e as Margens Rígidas	40
2.7.2 SVM e as Margens Suaves	41
2.7.3 SVM Não Lineares	43
2.8 REGRESSÃO POR MEIO DE MÁQUINAS DE SUPORTE VETORIAL	45
2.9 AJUSTES DE CURVAS	45
2.10 PREVISÕES	46
2.11 ANÁLISE DOS MODELOS E MÉTODOS APRESENTADOS	47

3	DEFINIÇÃO DO MODELO SVR-WAVELET	51
3.1	MODELOS HÍBRIDOS	51
3.1.1	O Modelo SVR-wavelet	51
3.1.2	Técnicas de <i>Denoising</i> ou <i>wavelet Shrinkage</i>	51
3.2	PREDIÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS POR MEIO DO MODELO SVR-WAVELET	
	HÍBRIDO	53
4	MÉTRICAS	56
4.1	TESTES DE NORMALIDADE	56
4.1.1	Anderson-Darling	56
4.1.2	Cramer-von Mises	57
4.1.3	(Lilliefors) Kolmogorov-Smirnov	57
4.1.4	Pearson chi-square	58
4.1.5	Shapiro-Wilk	58
4.1.6	Shapiro-Francia	59
4.1.7	Jarque-Bera	59
4.2	TESTES DE RAIZ UNITÁRIA	59
4.2.1	Dickey-Fuller Aumentado	59
4.2.2	Phillips-Perron	60
4.2.3	KPSS	60
4.3	TESTES DE NÃO-LINEARIDADE	61
4.3.1	Terasvirta Neural Network	61
4.3.2	White Neural Network	61
4.4	TESTES DE CORRELAÇÃO PELO GRÁFICO DE DISPERSÃO	62
4.5	MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICC, BIC	62
4.5.1	MSE - Erro Quadrático Médio	62
4.5.2	RMSE - Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio	62
4.5.3	MAE - Erro Absoluto Médio	63
4.5.4	MPE - Erro Porcentual Médio	63
4.5.5	MAPE - Erro Porcentual Absoluto Médio	63
4.5.6	MASE - Erro Escalado Absoluto Médio	64
4.5.7	ACF1 - Autocorrelação de Erros para uma Defasagem	64
4.5.8	AIC - Critério de Informação de Akaike	64
4.5.9	AICc - AIC de Segunda Ordem	65
4.5.10	BIC - Critério de Informação Bayesiano	65
4.6	INTERPRETAÇÃO DOS P-VALUES	65

4.7	CRITÉRIOS PARA SELEÇÃO DO MELHOR MODELO	66
4.8	EXPOENTE DE HURST E A ANÁLISE R/S	66
4.8.1	Método para Obtenção do Expoente de Hurst	69
4.8.2	Teste de Significância do Expoente de Hurst	70
5	METODOLOGIA	71
6	AMBIENTE DE PROGRAMAÇÃO PARA ANÁLISE DE DADOS ESTADÍSTICOS E GRÁFICOS R	73
6.1	USO DO MÉTODO SVM	73
6.2	USO DO MÉTODO PREDICT	74
6.3	USO DOS MÉTODOS WD E WR	75
6.4	USO DOS MÉTODOS WAVMODWT E RECONSTRUCT	76
6.5	USO DO MÉTODO THRESHOLD	77
6.6	USO DOS MÉTODOS SARIMA E SARIMA.FOR	77
6.7	USO DOS MÉTODOS ARFIMA E FORECAST	78
6.8	USO DO MÉTODO GARCHFIT	79
7	APLICAÇÃO DO MODELO SVR-WAVELET	80
7.1	SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS SÉRIES TEMPORAIS DO TIPO FOREX	80
7.2	TESTES DE NORMALIDADE, RAIZ UNITÁRIA E DE NÃO-LINEARIDADE	83
7.3	TESTES DE CORRELAÇÃO PELO GRÁFICO DE DISPERSÃO	86
7.4	AJUSTES POR MEIO DO MODELO SVR TRADICIONAL COM KERNEL	87
7.4.1	Aplicação do Método SVR tradicional com Kernel em R	88
7.4.2	Qualidade da Previsão por meio do Modelo SVR tradicional com Kernel	89
7.5	AJUSTES POR WAVELET: TRANSFORMADA E INVERSA	90
7.5.1	Aplicação da Transformada wavelet e sua Inversa em R	90
7.5.2	Qualidade da Transformada wavelet e sua Inversa	91
7.6	AJUSTES POR WAVELET MODWT UTILIZANDO A WAVELET HAAR	91
7.6.1	Aplicação da wavelet MODWT e sua Inversa em R	92
7.6.2	Qualidade da wavelet MODWT e sua Inversa	92
7.7	A DECOMPOSIÇÃO EM WAVELETS	93
7.8	MODELO HÍBRIDO SVR-WAVELET - AJUSTES E PREVISÃO DOS COMPONENTES WAVELETS	95
7.8.1	Qualidade da Previsão por meio do Modelo Híbrido SVR-wavelet	96
7.9	AJUSTES POR MEIO DO MODELO ARIMA	96
7.9.1	Qualidade da Previsão por meio do Modelo ARIMA	96

7.10 AJUSTES POR MEIO DO MODELO ARFIMA	97
7.10.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo ARFIMA	98
7.11 AJUSTES POR MEIO DO MODELO GARCH	98
7.11.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo GARCH	99
7.12 PARTE EXPERIMENTAL DO EXPOENTE DE HURST	100
8 ANÁLISE DOS RESULTADOS	106
8.1 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: ARIMA OU SVR-WAVELET HÍBRIDO	107
8.2 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: ARFIMA OU SVR-WAVELET HÍBRIDO	108
8.3 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: GARCH OU SVR-WAVELET HÍBRIDO	109
8.4 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: SVR TRADICIONAL COM KERNEL OU SVR-WAVELET HÍBRIDO	110
8.5 CONCLUSÕES SOBRE A ADERÊNCIA AO EXPOENTE DE HURST	111
8.5.1 Resultados obtidos dos cálculos do Expoente de Hurst	112
9 CONCLUSÃO	115
9.1 RESULTADOS OBTIDOS E CONTRIBUIÇÕES ALCANÇADAS	115
9.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	116
Referências	118
Anexo A – Métodos em R - Cálculo dos Testes de Normalidade e de Raiz Unitária, Correção de Dados Discrepantes, Técnicas de <i>Denoising</i> ou <i>Wa- velet Shrinkage</i> e Persistência de Plots	129
Anexo B – Métodos em R - Cálculo das Métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAE, ACF1, AIC1, AICc1 e BIC1	131
Anexo C – Métodos em R - Cálculo da Transformada wavelet e de sua Inversa	133
Anexo D – Métodos em R - Cálculo da Previsão dos Componentes wavelet	134
Anexo E – Métodos em R - Cálculo da Previsão dos Modelos Tradicionais e Comparação com o Modelo Proposto	136
Anexo F – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst - Médias e Desvio Padrão	137
Anexo G – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst por meio da Estatística R/S	138

Anexo H – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst - Plot da Reta	
de Tendência e Cálculo do Valor de p-value	139
Anexo I – Métodos em C# - Cálculo da Divisão das Séries em Períodos de	
15 min., 1 hora e 1 dia	140
Anexo J – Métodos em C# - Cálculo da Divisão dos Dados nos Períodos	
de 15 min., 1 hora e 1 dia	143

Nomenclatura

ACF1	Autocorrelation of Errors at Lag 1 - Autocorrelação de erros para uma defasagem
AIC	Akaike Information Criterion - Critério de Informação de Akaike
AICc	Second-Order AIC - AIC de Segunda Ordem
ANN	Artificial Neural Networks - Redes Neurais Artificiais
ANOVA	Analysis of Variance - Análise de Variância
AR(p)	Autoregressive Model (p) Order - Modelo Autorregressivo de Ordem (p)
ARCH(m)	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model m Order - Modelo Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade de Ordem m
ARFIMA(p, d, q)	Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Model (p, d, q) Order - Modelo Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis de Ordem (p, d, q)
ARIMA(p, d, q)	Autoregressive Integrated Moving Average Model (p, d, q) Order - Modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis de Ordem (p, d, q)
ARMA(p, q)	Autoregressive Moving Average Model (p, q) Order - Modelo Autorregressivo e de Médias Móveis de Ordem (p, q)
BIC	Bayesian Information Criterion - Critério de Informação Bayesiano
BL	Bayesian Learning - Aprendizagem Bayesiana
BLWF	Best Localized wavelet Filter - Filtro wavelet de melhor localização no tempo e frequência na decomposição de um sinal
BPR	Backpropagation with Bayesian Regularization - Algoritmo de Treinamento em Redes Neurais Artificiais
c.d.f.	Empirical Cumulative Distribution Functions - Função de Densidade Cumulativa Empírica
Candlestick	Nome de uma técnica de análise gráfica de mercado
CWT	Continuous Wavelet Transform - Transformada de Wavelet Contínua
DL	Deep Learning - Aprendizagem Profunda

DWT	Discrete Wavelet Transform - Transformada de Wavelet Discreta
EDOF	Effective Degrees of Freedom - Graus de liberdade efetivos
ERM	Empirical Risk Minimization - Princípio de Minimização do Risco Empírico
f.a.c.	Autocorrelation Function - Função de Autocorrelação
FOREX	Foreign Exchange Market - Mercado Global de Câmbio / Moedas
FX	Foreign Exchange - Câmbio / Moedas
GARCH(m, s)	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model (m, s) Order - Modelo Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado de Ordem (m, s)
H	Hurst Exponent - Expoente ou Coeficiente de Hurst
HAAR	Wavelet Haar proposta em 1909 por Alfréd Haar
HAC	Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent - Heterocedasticidade e Autocorrelação Consistente
i.i.d.	independent and identically distributed - independente e identicamente distribuído
ICWT	Inverse Continuous Wavelet Transform - Transformada Wavelet Contínua Inversa
IDWT	Inverse Discrete Wavelet Transform - Transformada de Wavelet Discreta Inversa
k-NN	k-Nearest Neighbors Algorithm - Algoritmo k-Vizinhos mais Próximos
LR	Logistic Regression - Regressão Logística
LS-SVM	Least Squares SVM - SVM por Mínimos Quadrados
MA(q)	Moving Average Model (q) Order - Modelo de Médias Móveis de ordem (q)
MACD	Moving Average Convergence-Divergence - Convergência/Divergência das Médias Móveis
MAE	Mean Absolute Error - Erro Absoluto Médio
MAPE	Mean Absolute Percentage Error - Erro Porcentual Absoluto Médio
MASE	Mean Absolute Scaled Error - Erro Escalado Absoluto Médio
MLE	Maximum-Likelihood Estimation - Estimativa por Máxima Verossimilhança

MMSE	Minimum Mean Square Error - Erro Quadrático Médio Mínimo
MODWT	Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform - Transformada Wavelet Discreta de Máxima Sobreposição
MPE	Mean Percentage Error - Erro Porcentual médio
MRA	Multiresolution Analysis - Análise Multirresolução
MSE	Mean Squared Error - Erro Quadrático Médio
NE	Normalized Error - Erro Normalizado
R	Statistical Data Analysis R - Ambiente de Programação para Análise de Dados Estatísticos e Gráficos R
R/S	Estatistic Rescaled Range - Estatística de Reescalonamento - Estatística R/S
RBF	Radial Basis Function Kernel - Função de Base Radial
RBFNN	Radial Basis Function Neural Network - Modelos de Redes Neurais
RMSE	Root Mean Square Error - Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio
RW	Random Walk - Passeio Aleatório
SARIMA	Seasonal ARIMA - Autoregressive Integrated Moving Average Model (p, d, q) Order - Modelo Sazonal Auto-Regressivo Integrado de Médias Móveis de Ordem (p, d, q)
SBP	Standard Backpropagation - Algoritmo de Treinamento em Redes Neurais Artificiais
SCG	Scaled Conjugate Gradient - Algoritmo de Treinamento em Redes Neurais Artificiais
sgn	Sign Function - Função Sinal
SOM	Self Organizing Map - Mapas Auto-Organizáveis - Mapas de Kohonen
SRM	Structural Risk Minimization - Princípio de Minimização do Risco Estrutural
SV	Support Vectors - Vetores de Suporte
SVM	Support Vector Machines - Máquinas de Suporte Vetorial
SVR	Support Vector Regression - Regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial

Notação

- a_t : ruído branco no instante t .
 α : Multiplicador de Lagrange
 b : Deslocamento (bias) de um hiperplano de separação para um SVR
 C : Constante de regularização de um SVR com margens suaves
 d : Distância entre os hiperplanos
 δ, κ, d : Parâmetros da função *Kernel* Polinomial
 δ, κ : Parâmetros da função *Kernel* Sigmoidal
 ξ : Variável de folga de um SVR
 $\mathfrak{S}$: Espaço de características
 Γ : Função gama
 ϕ : vetor de coeficientes autorregressivos
 $\Phi(x)$: Função de mapeamento de um conjunto de dados não lineares
 H_n : Hiperplano n , $n = 1 \dots \infty$
 $K(x_i, x_j)$: Função *Kernel* de um SVR
 $\mathcal{L}(w, b, \alpha)$: Função Lagrangiana
 n : Número de amostras de treino em um conjunto
 n_{SV} : Número de vetores de suporte em um SVR
 μ : média de um processo
 $\mathfrak{R}^n$: Espaço coordenado real ou espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathfrak{R}$
 σ : Parâmetro da função *Kernel* Gaussiano (RBF)
 T : Conjunto de treinamento
 θ : vetor de coeficientes de médias móveis
 w : Vetor de pesos em um SVR
 W_t : diferença de $X_t - X_{t-1}$, onde X_t é um vetor contendo dados históricos de uma determinada série temporal
 x_i : Vetor de entrada no i –ésimo item
 y_i : Vetor de rótulos no i –ésimo item

1 INTRODUÇÃO

Um dos objetivos da análise de séries temporais financeiras é a avaliação de riscos inerentes aos investimentos de carteiras de ativos financeiros (94). Este risco é normalmente medido em termos de variações de preços de ativos (95). Muitos dos estudos financeiros envolvem retornos de ativos. Campbell (18) fornece duas principais razões para a utilização dos retornos de ativos. Por um lado, para os investidores médios, o retorno de um ativo é um resumo completo e livre de escala da oportunidade de investimento. Por outro lado, as séries de retornos são mais fáceis de lidar do que séries de preços, porque os primeiros têm propriedades estatísticas mais atrativas como estacionariedade e ergodicidade.

Vários métodos e modelos têm sido desenvolvidos não somente para efetuar análise das oscilações de preços de ativos financeiros, mas também na previsão de dados de ativos financeiros e na seleção de dados relevantes e de comportamentos recorrentes (34) (104) (108), o que leva a argumentar sobre novas alternativas na predição de séries temporais financeiras.

Segundo Morettin (94), séries temporais podem ser modeladas por meio de processos do tipo Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis (ARFIMA) ou ARIMA Fracionário. Este processo é considerado de memória longa pois sua função de autocorrelação (f.a.c.) decresce hiperbolicamente para zero. As séries temporais financeiras também podem ser modeladas por meio de processos Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade (ARCH) e por processos ARCH Generalizados (GARCH) (142).

O mercado de câmbio, *Foreign Exchange Market* (FOREX), também conhecido como *Foreign Exchange* (FX) ou *Currency Market*, é um mercado global para a negociação descentralizada de moedas (50). Em termos de volume de negociação, é de longe o maior mercado do mundo (125). Os principais participantes deste mercado são os maiores bancos internacionais e são eles os responsáveis pela definição dos valores relativos das diferentes moedas.

Com a globalização econômica as empresas que operam neste mercado estão inevitavelmente expostas aos riscos da flutuação das taxas de câmbio tanto positiva quanto negativamente. A capacidade de uma empresa para competir internacionalmente depende de sua capacidade de gerenciar de forma adequada e eficaz os riscos decorrentes de operações multinacionais. Consequentemente, a previsão deste tipo de ativo financeiro tem um significado importante para as empresas multinacionais e é um fator crucial para o sucesso dos gestores de fundos financeiros (1).

Muitos fatores econômicos, políticos e até mesmo psicológicos afetam os movimentos das taxas de câmbio, o que torna a previsão deste tipo de série uma tarefa não muito fácil tampouco trivial. As séries históricas deste tipo de ativo financeiro geralmente possuem características de não-estacionariedade o que faz com que métodos estatísticos tradicionais não sejam adequados

nem eficientes na sua predição, sendo necessário a aplicação de técnicas e métodos de previsão mais avançados.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de previsão adaptativo baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido, que integra modelos de wavelets e Support Vector Regression (SVR), regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), para a previsão de séries financeiras. A utilização da Transformada de Wavelet Discreta (DWT), decompõe os dados de séries de ativos financeiros que posteriormente serão utilizados como variáveis de entrada do SVR para prever dados da série financeira. As séries ajustadas são comparadas com os modelos tradicionais Autorregressivo Integrado de Médias Móveis (ARIMA), Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis (ARFIMA), Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado (GARCH) e o modelo SVR tradicional com Kernel. Além disso, são efetuados testes de normalidade e de raiz unitária para distribuição não linear, tal como testes de correlação, para averiguar que as séries temporais FOREX são não-viciadas e apropriadas para a comprovação do modelo híbrido SVR-wavelet e comparação com modelos tradicionais. Suplementarmente o trabalho também verifica a aderência ao Expoente de Hurst, aplicando-se a estatística de Reescalamento (R/S).

A análise por meio de *wavelets* possibilita efetuar a eliminação de ruídos contidos nas séries por meio de filtros e técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para obtenção de uma versão mais limpa da série temporal original. Adiciona-se a isto o fato de que técnicas não-lineares como as Máquinas de Suporte Vetorial, *Support Vector Machines* (SVM), provaram ser eficazes na previsão de séries temporais (143) (124).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2, Regressão e Métodos de Aprendizado de Máquinas, apresenta alguns dos mais relevantes métodos utilizados para regressão, como os modelos matemáticos tradicionalmente utilizados como regressores de séries temporais financeiras e de aprendizado de máquinas; também destaca conceitos relacionados à SVR, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), e à Transformada *wavelet*; por fim, expressa uma análise crítica e o posicionamento deste trabalho frente às diversas iniciativas de pesquisa acadêmicas que vêm sendo desenvolvidas e realizadas sobre a utilização de métodos de aprendizado de máquinas na regressão de séries temporais. O Capítulo 3, Definição do Modelo SVR-wavelet, retrata os modelos híbridos (em particular o modelo de previsão por meio do sistema SVR-wavelet) que integram modelos *wavelets* e SVR e traz uma proposição para a definição matemática do modelo SVR-wavelet híbrido. O Capítulo 4, Métricas, discorre sobre uma variedade de testes estatísticos (como os de normalidade e de raiz unitária), com o propósito de confirmar que as séries temporais FOREX são apropriadas para a comprovação do modelo híbrido SVR-wavelet; também são apresentadas métricas da precisão da previsão do modelo ajustado; é discutido o Expoente de Hurst, por intermédio da estatís-

tica R/S , como uma métrica que permite verificar a existência da dinâmica fractal em séries temporais FOREX. O Capítulo 5, Metodologia, apresenta o método para previsão de séries temporais financeiras do tipo FOREX, baseando-se no modelo SVR-*wavelet* híbrido discutido no Capítulo 3. O Capítulo 6, Ambiente de Programação para Análise de Dados Estatísticos e Gráficos R , discorre sobre o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos R e os métodos estatísticos utilizados pelo trabalho. O Capítulo 7, Aplicação do modelo SVR-*wavelet*, efetua o ajuste e a previsão dos dados das séries temporais financeiras do tipo FOREX por meio do modelo SVR-*wavelet* híbrido, apresentando uma avaliação dos resultados do desempenho do modelo proposto e sua comparação com modelos tradicionais ARFIMA, ARIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel; também discorre sobre as séries temporais FOREX, Foreign Exchange Market, sua evolução e suas características, sob as quais são aplicados testes de normalidade e de raiz unitária, assim como testes de correlação, para se aferir a qualidade das séries FOREX; por fim, apresenta a parte experimental do Expoente de Hurst, por meio da estatística R/S . O Capítulo 8, Análise dos Resultados, desenvolve uma análise sobre a seleção do melhor modelo, comparando o modelo SVR-*wavelet* proposto com modelos tradicionais ARFIMA, ARIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel, traçando as conclusões sobre a aderência do Expoente de Hurst através da estatística R/S . O Capítulo 9, Conclusão, é dedicado à análise geral, às contribuições do trabalho, bem como sugestões para futuros trabalhos.

2 REGRESSÃO E MÉTODOS DE APRENDIZADO DE MÁQUINAS

A utilização de negociações eletrônicas por meio de algoritmos de negociação, o acompanhamento do mercado através da análise técnica e da análise fundamentalista e a utilização de modelos matemáticos por intermédio de métodos de aprendizado de máquinas na regressão de séries temporais são exemplos de iniciativas de pesquisas sobre a maximização de retornos financeiros.

2.1 ALGORITHMIC TRADING

A utilização de negociações eletrônicas por meio de algoritmos de negociação se procede por meio dos *Algorithmic Trading*, muitas vezes denominados por *Algo Trading* ou *Blackbox Trading*. Trata-se de sistemas de negociação que são dependentes de formulação matemática e de sistemas de computadores de alta velocidade para determinar estratégias de negociação (71) (74).

Estas estratégias usam plataformas eletrônicas que registram ordens de negociação através de um algoritmo que executa instruções de negociação pré-programados sobre uma variedade de variáveis como tempo, preço e volume (73).

Existem algumas características na utilização de negociações eletrônicas por intermédio dos *Algo Trading*, entre as quais se destacam (41): minimizar as emoções, preservar a disciplina, coerência, maior velocidade na entrada de ordens, controle de falhas mecânicas e capacidade de *back-test*.

2.2 ANÁLISE TÉCNICA E ANÁLISE FUNDAMENTALISTA

A perspectiva de acompanhamento do mercado financeiro por meio da análise técnica, empregando análise gráfica de ativos financeiros, bem como por meio da análise fundamentalista de ativos financeiros é outra motivação de pesquisa sobre a maximização de retornos financeiros.

2.2.1 Análise Técnica

A análise técnica é composta por um conjunto de ferramentas que o investidor dispõe para auxílio na decisão de investimentos com base em gráficos e indicadores técnicos. Ela é dividida em dois grupos de estudo: análise gráfica e análise técnica. Os gráficos do comportamento de preços ao longo do tempo constituem-se nas principais ferramentas de análise gráfica (52).

Os padrões gráficos são figuras que surgem com base na força de movimentos entre os compradores e os vendedores que, ao longo do tempo, delineiam tendências (13). Pelo padrão, é possível prever o comportamento subsequente de preços admitindo a existência da repetição de figuras e assim concretizar a possibilidade de previsão com base nos gráficos. Outras ferramentas como os *Candlestick*, gráfico de barras e os números de *Fibonacci*, utilizam gráficos de preço e de volume para prever o comportamento de ativos financeiros (13).

Esta análise consiste na realização de cálculos utilizando-se das cotações e dos volumes negociados do fechamento de pregões anteriores para projetar possíveis tendências futuras. Assim, a proposta da análise técnica é entender como os ativos financeiros realizam ou não movimentos, visando portanto capturar as principais reversões de mercado (52).

Os principais instrumentos produzidos a partir de ferramentas matemáticas e estatísticas são: Médias Móveis, Estocástico, *Momentum*, *Moving Average Convergence-Divergence* (MACD) (103).

Existem algumas características na utilização da análise técnica entre as quais se destacam (67): as notícias refletem os preços, identificação de tendências, indicação de recomendações de entrada e saída, sinais contraditórios entre outros indicadores técnicos e precisão da previsão que não é 100%.

2.2.2 Análise Fundamentalista

A análise fundamentalista adota a hipótese da existência de um valor intrínseco para cada ação, com base nos resultados apurados pelas empresas emitentes. O estudo dessa análise está baseado no desenvolvimento econômico das empresas e no processamento de avaliações e comparações setoriais, bursáteis e conjunturais (128).

Os principais subsídios desse critério de análise são os demonstrativos financeiros das empresas e os diversos dados e informações referentes aos setores de atividade econômica, ao mercado acionário e à conjuntura econômica (101).

Existem algumas características da análise fundamentalista entre as quais se destacam (27): conhecimentos específicos requeridos, prazo de investimento, movimento do mercado e a fama das empresas.

2.3 MODELOS MATEMÁTICOS

Da mesma forma que os métodos apresentados para acompanhamento do mercado através da análise técnica e da análise fundamentalista os modelos Autorregressivos $AR(p)$, de Médias Móveis $MA(q)$, Autorregressivos e de Médias Móveis $ARMA(p, q)$, Autorregressivos

Integrados de Médias Móveis $ARIMA(p, d, q)$, Autorregressivos Fracionários Integrados de Médias Móveis $ARFIMA(p, d, q)$, Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade $ARCH(m)$ e os modelos Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade Generalizados $GARCH(m, s)$ são muito utilizados em economia com a finalidade de se elaborar modelos de previsão (94).

Segundo Morettin e Toloi (94) há duas classes de modelos envolvendo séries temporais, de acordo com os números de parâmetros envolvidos: modelos paramétricos e não-paramétricos.

Para estes autores (94), na classe de modelos paramétricos, a análise é feita no domínio do tempo. Os modelos mais frequentemente usados são os modelos de regressão: modelos de memória longa - Autorregressivos Fracionários Integrados de Médias Móveis (ARFIMA), os modelos Autorregressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA) e os modelos Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade Generalizados (GARCH).

2.3.1 Modelos Autorregressivos

Segundo Morettin (94), o modelo autorregressivo de ordem p , $AR(p)$, é dado por:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + a_t \quad (1)$$

em que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo estocástico estacionário, $X_t \sim AR(p)$, $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p$ são parâmetros reais, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ é o vetor de coeficientes autorregressivos e $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ é o ruído branco no instante t .

Segue-se que $\mu = \mathbf{E}(X_t) = [\phi_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)]$ e o processo se escreve na forma:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad (2)$$

Assim, o valor de X_t depende dos p valores anteriores da série e do ruído branco no instante t . O caso mais simples, $AR(1)$, ocorre quando $p = 1$ e $\mu = 0$: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$, onde há a dependência de X_{t-1} e de a_t .

De modo mais conciso, com o operador retroativo, $B^s X_t = X_{t-s}$, $s \geq 1$, com $s = 1$, o modelo $AR(p)$, apresentado pela equação 1, com $\mu = 0$, pode ser reescrito como $\phi(B) X_t = a_t$.

2.3.2 Modelos de Médias Móveis

Um processo de médias móveis de ordem q , $MA(q)$, é também um processo estocástico estacionário, em que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ e $X_t \sim MA(q)$, satisfazendo a equação de diferenças (94):

$$X_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \quad (3)$$

em que $\mu, \theta_1, \dots, \theta_q$ são constantes reais, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ é o vetor de coeficientes de médias móveis e $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ é o ruído branco no instante t . O caso mais simples, $MA(1)$, ocorre quando $q = 1$ e $\mu = 0$: $X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$. O modelo $MA(q)$, expresso pela equação 3, com $\mu = 0$, também pode ser reescrito de modo mais sintético, por meio do operador retroativo, $B^s X_t = X_{t-s}$, $s \geq 1$, com $s = 1$, como $X_t = \theta(B) a_t$.

2.3.3 Modelos Autorregressivos e de Médias Móveis

Os modelos autorregressivos são muito utilizados em economia, onde é natural pensar o valor de alguma variável no instante t como função de valores defasados em relação ao instante t , com a finalidade de se elaborar um modelo de previsão (94).

Para modelar estes processos com um número pequeno de parâmetros, uma solução adequada é aquela que inclui termos autorregressivos e de médias móveis. Assim, o modelo $ARMA(p, q)$ é formulado como:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \quad (4)$$

em que $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ é o vetor de coeficientes autorregressivos, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ é o vetor de coeficientes de médias móveis e $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ é o ruído branco no instante t (94). Um modelo frequentemente utilizado é o $ARMA(1, 1)$, com $\mu = 0$: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$. O modelo $ARMA(p, q)$, indicado pela equação 4, com $\mu = 0$, pode ser também reescrito sucintamente, através do operador retroativo, $B^s X_t = X_{t-s}$, $s \geq 1$, com $s = 1$, como $\phi(B) X_t = \theta(B) a_t$.

2.3.4 Modelos Autorregressivos Integrados de Médias Móveis

Morettin (94) mostra que um processo $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ segue um modelo $ARIMA(p, d, q)$ se $\Delta^d X_t$ seguir um modelo $ARMA(p, q)$. Assim o modelo autorregressivo integrado de média

móvel (ARIMA) de ordem p, d, q , denotado por $ARIMA(p, d, q)$ é definido como:

$$\phi(B) \Delta^d X_t = \theta_0 + \theta(B) a_t \quad (5)$$

sendo p e q respectivamente as ordens de $\phi(B)$ e $\theta(B)$ (94). Este modelo supõe que a d -ésima diferença da série X_t pode ser representada por um modelo $ARMA$.

De modo similar, $\phi(B) W(t) = \theta_0 + \theta(B) a_t$, com $W(t) = \Delta^d X_t$. Verifica-se que $W(t) = \Delta^d X_t \iff X_t = S^d W(t)$, em que S é o operador soma ou integrador (94).

Casos particulares do modelo $ARIMA(p, d, q)$ são:

- $ARIMA(p, 0, 0) = AR(p)$;
- $ARIMA(0, 0, q) = MA(q)$; e
- $ARIMA(p, 0, q) = ARMA(p, q)$.

2.3.5 Modelos Autorregressivos Fracionários Integrados de Médias Móveis

Um processo de memória longa é um processo cuja função de autocorrelação (f.a.c.), ρ_j , decresce hiperbolicamente.

Procurando respeitar as características de uma série de memória longa, no decorrer do tempo ocorreu a definição de dois modelos importantes. No primeiro, foi introduzido o ruído gaussiano fracionário por Mandelbrot e Van Ness em 1968 (84). Mais tarde, em 1980, Granger e Joyeux (51) e posteriormente em 1981 Hosking (61) introduziram o modelo Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis (ARFIMA) ou ARIMA Fracionário, que é uma generalização do modelo ARIMA.

Assim uma série temporal $\{X_t\}$ é um processo autorregressivo fracionário integrado de médias móveis, ou $ARFIMA(p, d, q)$ com $d \in (-1/2, 1/2)$, se $\{X_t\}$ for estacionário, conforme modelo (94):

$$\phi(B) (1 - B)^d X_t = \theta(B) a_t \quad (6)$$

em que $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ é o ruído branco no instante t e $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios em B , respectivamente de graus p e q .

O processo $ARFIMA(p, d, q)$ é estacionário se $d < 1/2$ e todas as raízes de $\phi(B) = 0$ estiverem fora do círculo unitário e invertível se $d > -1/2$ e todas as raízes de $\theta(B) = 0$ também estiverem fora do círculo unitário (61), como nos processos estacionários e invertíveis (94):

- $ARFIMA(1, d, 0)$, equacionado como $(1 - B)^d (1 - \phi B) X_t = a_t$, se $|d| < 1/2$ e $|\phi| < 1$; e
- $ARFIMA(0, d, 1)$, equacionado como $(1 - B)^d X_t = (1 - \theta B) a_t$, se $|\theta| < 1$ e $|d| < 1/2$. Esta última formulação é definida como uma média móvel de primeira ordem de um ruído branco fracionário.

O caso mais simples é o ruído branco fracionário, isto é, $ARFIMA(0, d, 0)$, formulado como $(1 - B) X_t = a_t$, $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

2.3.6 Modelos Autorregressivos Condicionais com Heterocedasticidade

Os modelos autorregressivos condicionais com Heterocedasticidade de ordem m , $ARCH(m)$, são modelos econométricos para modelar a volatilidade de retornos de ativos (142), podendo ser formulado como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 \quad (7)$$

em que $\{\epsilon_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* com média zero e variância 1, $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i > 0$. A equação 7 também é equacionada como $a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t$. O caso mais simples ocorre quando $m = 1$, $ARCH(1)$, em que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1 \geq 0$: $a_t = \sigma_t \epsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$.

2.3.7 Modelos ARCH Generalizados

O modelo GARCH, Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado, ARCH Generalizado de ordem (m, s) ou simplesmente $GARCH(m, s)$, é outro modelo tradicionalmente usado como regressor de séries temporais financeiras, sendo equacionado como (142):

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

em que $\{\epsilon_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* com média 0 e variância 1, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$ (142).

Um modelo frequentemente aplicado à séries financeiras é o modelo $GARCH(1, 1)$:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \quad (9)$$

2.4 MODELOS FRACTAIS

Baseada na hipótese da existência de um Mercado Fractal, essa linha de pesquisa propõe a hipótese de que os Mercados Eficientes possuem algumas exceções ao pressuposto da normalidade (112). Osborne (104) havia constatado uma anomalia quando tentou plotar um gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição dos retornos. A distribuição apresentava curtose mais elevada que a distribuição normal, *leptocúrticas*, ou de cauda pesada. Desde Cootner (24) já era bastante conhecido a existência de um comportamento de caudas pesadas na distribuição de mudanças de preços.

Estudos mostram evidências no sentido de que os retornos de títulos nos mercados de capitais não são normalmente distribuídos (106) (36) (126). Assim, se os retornos não forem normalmente distribuídos, boa parte da análise estatística, aquela que vale de coeficientes de correlação, fica bastante comprometida podendo levar a resultados equivocados, sugerindo também que a idéia da ocorrência de passeio aleatório nos preços das ações é equivocada.

A Teoria Fractal começou a se impor como um contraponto às hipóteses criadas pela teoria financeira mais conservadoras pelo fato de oferecer um prisma mais realista sobre o funcionamento do Mercado Financeiro (83).

Chamados de auto similares, os fractais tem estruturas menos elaboradas, cujas mudanças de escala se manifestam de maneira proporcional em toda estrutura. Os fractais mais parecidos com o comportamento de preços são os auto afins, pois mudam de escalas em direções diversas e, conforme constatado por alguns autores (69) (133) (5) (119) (109) (32), os mercados financeiros globais apresentam simetria de escala, com características fractais.

2.5 TRANSFORMADA WAVELET

A análise de *wavelets* é uma técnica matemática muito útil para análise numérica e manipulação de sinais discretos uni ou multidimensionais. As *wavelets* ampliam intervalos de dados, separando-os em diferentes componentes de frequência e escala, permitindo a análise de cada componente em sua escala correspondente. A idéia de aproximação, mediante a superposição de funções, tem sua origem nos trabalhos de *Joseph Fourier* que, no século XIX descobriu que poderia utilizar senos e cossenos para representar outras funções (91).

A novidade em relação a *Fourier* é que a base das funções de *Fourier* são dependentes da frequência mas não do tempo, ou seja, pequenas alterações no domínio da frequência produzem alterações em todo o domínio do tempo. As *wavelets* são dependentes de ambos os domínios, da frequência, via dilatação, e do tempo, via translação, o que é uma vantagem em diversos casos (140). Esta é a razão pela qual elas podem distinguir as características locais

de um sinal em diferentes escalas e, por translações, elas cobrem toda a região na qual o sinal é estudado (37) (72).

Por causa de suas propriedades as *wavelets* são usadas em análise funcional, em estudo de propriedades multi-fractais, em reconhecimento de padrões, em compressão de imagens e de sons entre outros (8).

Assim, tanto na análise de Fourier, quanto na análise de wavelets, a idéia é aproximar uma função pela combinação linear de senos e cossenos ou wavelets, respectivamente (93).

Entretanto, na análise de Fourier, a função periódica tem período 2π , de quadrado integrável, $L^2(0, 2\pi)$, gerada pela superposição de exponenciais complexas, $\omega_n(t) = e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, obtidas por dilatação da função $\omega(t) = e^{it}$. Este conceito foi estendido para $L^2(\mathbb{R})$, em outras palavras, esse espaço é criado a partir de uma única função Ψ , chamada de *wavelet* mãe, gerado por dilatações e translações de Ψ , produzindo uma família de funções $\Psi_{a,b}$ (145):

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (10)$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Quando se trata de sinais discretos, frequentemente usam-se valores particulares para a e b , $a = 2^j$ e $b = k2^j$, com $k, j \in \mathbb{Z}$, conforme:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k) \quad (11)$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$, sendo que $\Psi_{j,k}(t)$ é obtida de $\Psi(t)$ por dilatação de 2^{-j} e uma translação $k2^j$.

As funções $\{\Psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ constituem uma base que obrigatoriamente não precisa ser ortogonal, todavia, empregando-se bases ortogonais é possível a reconstrução congênere do sinal original por meio dos coeficientes da transformada (93).

Ponderando uma base ortonormal gerada por Ψ , $\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k)$, com $j, k \in \mathbb{Z}$, de maneira que qualquer $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é formulado como (22):

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (12)$$

em que $f(t)$ é uma série de *wavelets* com coeficientes denotado por:

$$c_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt \quad (13)$$

Existem diferentes tipos de *wavelets* ortogonais e algumas possuem atributos mais apropriadas para determinadas aplicações. Um modo para geração de *wavelets* ortogonais é pela

função escala ou *wavelet* pai formulado como (80):

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad (14)$$

Essa formulação possibilita gerar uma família ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ conforme (93) (31):

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \quad (15)$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$. Então, nessas condições, Ψ pode computado por:

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k) \quad (16)$$

em que $g_k = (-1)^k h_{1-k}$. Chamadas equações de dilatação (93) (31) h_k e g_k são coeficientes de filtros passa-baixa e passa-alta usados para calcular a Transformada de *Wavelet* Discreta (DWT), conforme:

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt \quad (17)$$

e

$$g_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) \phi(2t - k) dt \quad (18)$$

Com isso, haja vista o sistema ortonormal $\{\phi_{j,k}(t), \Psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$, pode-se formular $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ como:

$$f(t) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (19)$$

em que:

$$c_{J,k} = \langle f(t), \phi_{J,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{J,k}(t) dt \quad (20)$$

e

$$d_{j,k} = \langle f(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt \quad (21)$$

2.5.1 Análise Multirresolução (MRA)

Introduzida por Mallat (80) a Análise Multirresolução (MRA) constitui-se de uma sequência de subespaços fechados V_j , onde $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, em que cada V_j usa diferentes resoluções, daí o nome Análise Multirresolução, atendendo (93) (31) (65):

- MR1) $\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$;
- MR2) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;
- MR3) $\overline{\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\}$;
- MR4) $f(t) \in V_j \subset L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1}, j \in \mathbb{Z}$ (Invariância em escala)
- MR5) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j, (j, k) \in \mathbb{Z}^2$ (Invariância em translações)
- MR6) Existência de uma função ϕ , função escala, em que $\{\phi_{j,k}; j \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal em V_j onde $\phi_{j,k}(t)$ é formulada pela equação 15.

Considerando uma série de tempo $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, da qual se quer obter aproximações em vários níveis de resolução, cada subespaço V_j é formado por aproximações de funções, em que a melhor aproximação é alcançada tendo em vista a projeção ortogonal (P_j) de f sobre cada V_j , assim (93):

$$\forall g(t) \in V_j, \|g(t) - f(t)\| \geq \|P_j(t) - f(t)\| \quad (22)$$

Afirmar que $V_j \subset V_{j-1}$ representa dizer que ao passar do nível de resolução j , escala 2^j , para o nível $j - 1$, ganha-se informação ou adiciona-se detalhes.

À medida que a resolução 2^{-j} aumenta, $j \rightarrow -\infty$, a função de aproximação converge para a função original, $P_j f \rightarrow f$, ou melhor, contém mais informações sobre f e obtém-se (MR2) (80). De outra forma, quando a resolução 2^{-j} decresce para zero, (MR3) provoca a perda de todas as informações de f .

A propriedade (MR4) está concernente com a (MR1), já que à medida que j decresce, refinando a escala, a resolução em frequência aumenta. Consequentemente, detalhes que aparecem em uma escala 2^j também devem estar presentes na escala 2^{j-1} (77). A propriedade (MR5) sugere que V_j é invariante a qualquer translação proporcional a escala 2^j .

A informação que é perdida quando se passa de V_{j-1} para V_j pode ser caracterizada pelo subespaço W_j , complemento ortogonal de V_j em V_{j-1} , conforme:

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1}, W_j \perp V_j \quad (23)$$

onde $\oplus$ indica a soma direta. Sucede que $V_j = \bigoplus_{k=j+1}^{+\infty} W_k$.

Haja vista $\Psi(t)$, determinada pela formulação 16, em que $\{\Psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortogonal para W_j , de maneira que, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, pode-se formular f como na equação 19.

A Análise Multirresolução (MRA) conduz a um método hierárquico rápido para o cálculo dos coeficientes *wavelet* de uma dada função.

2.5.2 Transformada de *Wavelet* Discreta

Para a formulação da Transformada de *Wavelet* Discreta (DWT) e com o propósito de se trabalhar com séries temporais, assume-se $\Psi_{a,b}$ como definida pela equação 11. De acordo com Von Sachs, Nason e Kroisandt (146), e Morettin (93), os coeficientes *wavelets* da DWT podem ser representados por:

$$d_{j,k,n} = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \Psi_{j,k}(t) \quad (24)$$

em que $j = 0, 1, 2, \dots, J$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^j$, $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$, J inteiro representando a escala mais grossa ou suave, perfazendo n coeficientes d , e $n = 2^J$ observações de um processo estocástico ou uma série temporal.

Considerando que uma série de tempo $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ possa ser representada em relação a uma base de *wavelets* como na equação 19, $f(t) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$, pode-se calcular os coeficientes $d_{j,k}$ e $c_{J,k}$ valendo-se da equação da função escala ϕ , equação 14, e da definição de *wavelet* Ψ , equação 16, conforme:

$$d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle_{L^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \langle f, \phi_{j-1, 2k+n} \rangle, \quad (25)$$

$$d_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} c_{j-1,n}, \quad (26)$$

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle_{L^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \langle f, \phi_{j-1, 2k+n} \rangle \quad (27)$$

e

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} c_{j-1,n} \quad (28)$$

sendo que h_k e g_k são formulados respectivamente pelas equações 17 e 18.

2.5.3 Transformada *Wavelet* Discreta de Máxima Sobreposição

A Transformada *wavelet* Discreta de Máxima Sobreposição (MODWT), é uma versão modificada da Transformada de *Wavelet* Discreta (DWT). A MODWT permite a utilização da Análise Multirresolução (MRA). Usa-se a MODWT para se resolver a limitação da Transformada de *Wavelet* Discreta (DWT), que requer $N = 2^J$ em que J é um inteiro positivo (157).

A definição da MODWT é obtida diretamente da DWT. Seja $\{h_{j,k}\}$ o filtro de *wavelet* DWT e $\{g_{j,k}\}$ o filtro de escala, sendo $k = 1, \dots, L$ o comprimento do filtro com j níveis de decomposição. O filtro de *wavelet* MODWT $\{\tilde{h}_{j,k}\}$ e o filtro de escala MODWT $\{\tilde{g}_{j,k}\}$ são definidos como $\tilde{h}_{j,k} = h_{j,k}/2^{j/2}$ e $\tilde{g}_{j,k} = g_{j,k}/2^{j/2}$.

Então, os coeficientes da *wavelet* MODWT de nível j são definidos como a convolução da série de tempo $\{X_t\}$ e os filtros MODWT são (157):

$$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{k=0}^{K_j-1} \tilde{h}_{j,k} X_{t-k \bmod N} \quad (29)$$

$$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{k=0}^{K_j-1} \tilde{g}_{j,k} X_{t-k \bmod N} \quad (30)$$

em que $K_j = (2^j - 1)(K - 1) + 1$.

Pelas formulações descritas, os coeficientes da *wavelet* MODWT em cada escala têm o mesmo comprimento que a série original X , sendo expressos em notação matricial como $\tilde{W}_j = \tilde{\omega}_j X$ e $\tilde{V}_j = \tilde{\nu}_j X$, onde cada linha da matriz $[\tilde{\omega}_j]_{N \times N}$ possui valores atribuídos por $\{\tilde{h}_{j,k}\}$. Enquanto que $[\tilde{\nu}_j]_{N \times N}$ possui valores atribuídos por $\{\tilde{g}_{j,k}\}$. Com isso tem-se (157):

$$\tilde{\omega}_j = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \cdots & \tilde{h}_{j,2} & \tilde{h}_{j,1} \\ \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} & \cdots & \tilde{h}_{j,3} & \tilde{h}_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{h}_{j,N-2} & \tilde{h}_{j,N-3} & \tilde{h}_{j,N-4} & \cdots & \tilde{h}_{j,0} & \tilde{h}_{j,N-1} \\ \tilde{h}_{j,N-1} & \tilde{h}_{j,N-2} & \tilde{h}_{j,N-3} & \cdots & \tilde{h}_{j,1} & \tilde{h}_{j,0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Da mesma forma a matriz $\tilde{\nu}_j$ é expressa como acima, com cada $\{\tilde{h}_{j,k}\}$ substituído por $\{\tilde{g}_{j,k}\}$. Assim a série original X pode ser expressa pela MODWT conforme:

$$X = \sum_{j=1}^J \tilde{\omega}_j^T \tilde{W}_j + \tilde{\nu}_J^T \tilde{V}_J = \sum_{j=1}^J \tilde{d}_j + \tilde{S}_J \quad (32)$$

que define a MODWT, baseada na Análise Multirresolução (MRA) de X , em termos dos j -ésimos componentes detalhes da MODWT, $\tilde{d}_j = \tilde{\omega}_j^T \tilde{W}_j$ e do J -ésimo componente de aproximação da MODWT $\tilde{S}_J = \tilde{\nu}_J^T \tilde{V}_J$.

A MODWT tem uma propriedade importante, que é ponto-chave no processamento de séries temporais não estacionárias. Sendo que X_t é um processo estocástico, cuja equação pode ser escrita por meio do operador retroativo, $B^s X_t = X_{t-s}$, $s \geq 1$, de d -ésima order como $Y_t = (1 - B)^d X_t = \sum_{k=0}^d \frac{d!}{k!(d-k)!} (-1)^k X_{t-k}$, determina-se que (157):

$$\overline{W}_{j,t} = \sum_{k=0}^{K_j-1} \tilde{h}_{j,k} X_{t-k}, \quad t \in Z \quad (33)$$

em que $\{\overline{W}_{j,t}\}$ configura a saída obtida pela decomposição de $\{X_t\}$ empregando-se o filtro $\{\tilde{h}_{j,k}\}$ da *wavelet* MODWT.

2.5.4 Wavelet Haar

A *wavelet Haar* é um filtro de comprimento $L = 2$. Ela representa a *wavelet* mais antiga e simples possível, sendo definida como:

$$\Psi^H(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{para } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (34)$$

cuja função escala é $\phi^H(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$ e

$$\Psi_{j,k}^H(t) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{para } 2^j k \leq t < 2^j(k + 1/2) \\ -2^{-j/2} & \text{para } 2^j(k + 1/2) \leq t < 2^j(k + 1) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (35)$$

Pela equação 14 a *wavelet* de Haar é formulado como:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(2t - 1) \quad (36)$$

Assim $h_0 = -h_1 = 1/\sqrt{2}$ e da mesma forma $g_0 = -g_1 = 1/\sqrt{2}$ (93).

A Figura 1 apresenta a *wavelet Haar* $\Psi^H(t)$.

Figura 1 - Função *wavelet Haar* $\Psi^H(t)$.

2.6 MÉTODOS DE APRENDIZADO DE MÁQUINAS

Diversos regressores foram propostos nos últimos anos, alguns utilizam árvores de regressão, outros redes neurais com regressão e existem algoritmos que se baseiam em modelos probabilísticos bayesianos.

2.6.1 Árvores de Regressão

As Árvores de Regressão são modelos preditivos não-lineares, que utilizam um treinamento supervisionado para a previsão de dados. Elas são idênticas as Árvores de Decisão porque elas também são representadas por um conjunto de nós de decisão (perguntas). Mas o resultado, ao contrário de uma categoria, é um escalar (87).

As Árvores de Regressão são compostas por dois tipos de nós: os nós internos da árvore, onde cada um desses nós corresponde a um teste feito em um dos atributos de entrada do conjunto de treinamento, e os nós-folha, onde são feitas as previsões do atributo-meta. Os nós-folha de uma Árvore de Regressão possuem uma função matemática para prever o atributo-meta (87).

2.6.2 Regressão por Redes Neurais

As Redes Neurais de Regressão são utilizadas para prever valores contínuos. Este modelo é frequentemente usado em áreas financeiras para Interpolação de curvas de juros.

Elas são formadas por um conjunto de nós de entrada, por uma ou mais camadas ocultas de neurônios e por uma camada de saída de neurônios. O sinal de entrada se propaga para a frente por meio da rede, de camada em camada. Cada camada possui sua própria matriz de pesos w , seu vetor polarizador b , um vetor de entrada v e um vetor de saída y (57).

Normalmente este modelo pode incluir também um viés aplicado externamente, representado por b_k . Esse viés tem o efeito de aumentar ou diminuir a entrada líquida da função de ativação, dependendo se ele é positivo ou negativo, respectivamente.

Em termos matemáticos, pode-se descrever um neurônio k a partir das seguintes equações (57):

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (37)$$

e

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (38)$$

sendo $x_1, x_2, \dots, x_m$ os sinais de entrada; $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$ os pesos sinápticos do neurônio k ; u_k a saída do combinador devido aos sinais de entrada; b_k o viés; $\varphi(.)$ a função de ativação; e y_k o sinal de saída do neurônio. O uso do viés b_k tem o efeito de aplicar uma transformação afim à saída u_k do combinador: $v_k = u_k + b_k$.

2.6.3 Regressão por Aprendizagem Bayesiana

Na Aprendizagem Bayesiana, *Bayesian Learning* (BL), a regra de Bayes de dependência é utilizada para calcular a distribuição de probabilidade *a posteriori* de X_i , dados os estados dos nós filhos de Y , representados por X_i , como (92):

$$P(Y|X_i) = \frac{P(X_i|Y) \times P(Y)}{P(X_i)} \quad (39)$$

2.6.4 Regressão por k-Vizinhos mais Próximos

Das técnicas da aprendizagem baseada em instâncias, a mais conhecida e referenciada na literatura é aquela que se baseia em critérios de vizinhança (10) (141) (9).

O algoritmo k-vizinhos mais próximos, *k-Nearest Neighbors Algorithm* (k-NN), é um método não-paramétrico utilizado para regressão. A entrada consiste em k exemplos de treinamento mais próximos no espaço de características. Na regressão k-NN, a saída é o valor da propriedade para o objeto. Este valor representa a média dos valores dos seus k vizinhos mais próximos.

O objetivo é gerar uma regressão pela interpolação dos pontos associados aos vizinhos mais próximos no conjunto de treinamento. Uma das possibilidades de algoritmo é aquela que usa a média ponderada pelo inverso da distância dos vizinhos mais próximos.

2.7 MÁQUINAS DE SUPORTE VETORIAL

Máquinas de Suporte Vetorial, *Support Vector Machines* (SVM), são máquinas lineares com implementação do método de Minimização do Risco Estrutural, que objetivam construir um hiperplano com superfície de decisão tal que a margem de separação entre exemplos positivos e negativos se tornem a máxima (144).

Um conceito importante da teoria de Vapnik e Chervonenkis (144) é a dimensão-VC, que representa uma medida da complexidade de um classificador estatístico, sendo definida como

a maior cardinalidade de um conjunto de pontos que um classificador pode separar.

2.7.1 SVM e as Margens Rígidas

SVM lineares com margens rígidas definem fronteiras lineares a partir de dados linearmente separáveis. Seja T um conjunto de treinamento com n dados $x_i \in X$ e seus respectivos rótulos $y_i \in Y$, em que X constitui o espaço dos dados e $Y = \{-1, +1\}$. T é linearmente separável se é possível isolar os dados das classes $+1$ e -1 por um hiperplano (124) (17) de equação:

$$f(x) = w \cdot x + b = 0 \quad (40)$$

em que $w \cdot x$ é o produto escalar entre os vetores w e x , $w \in X$ é o vetor normal ao hiperplano descrito e $\frac{b}{\|w\|}$ corresponde à distância do hiperplano em relação à origem, com $b \in \mathbb{R}$.

Esta equação separa o espaço dos dados X em duas regiões $w \cdot x + b > 0$ e $w \cdot x + b < 0$, conforme ilustra a Figura 2, obtida por meio do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos R (47).

A Figura 2 também destaca os vetores de suporte e as distâncias $\frac{b}{\|w\|}$ e $\frac{2}{\|w\|}$, sendo esta última a distância geométrica entre os dois hiperplanos.

Uma função sinal $g(x) = \text{sgn}(f(x))$ pode então ser empregada na obtenção das classificações (132).

Figura 2 - Representação de um hiperplano de separação onde se destacam os vetores de suporte, as distâncias $\frac{b}{\|w\|}$ e $\frac{2}{\|w\|}$ e as regiões $w \cdot x + b > 0$ e $w \cdot x + b < 0$.

A maximização da margem de separação dos dados em relação a $w \cdot x + b = 0$ pode ser obtida pela minimização de $\|w\|$ (16).

Assim, pode-se definir o problema de otimização (124):

$$\underset{w, b}{\text{Minimizar}} \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (41)$$

segundo a restrição $y_i = (w \cdot x_i + b) - 1 \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, que pode ser solucionado por meio de uma função Lagrangiana (124) (110):

$$\underset{\alpha}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) \quad (42)$$

segundo as restrições $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$ para $\forall i = 1, \dots, n$.

Esta formulação denomina-se de forma dual, enquanto o problema original é referenciado como forma primal.

O classificador $g(x)$ é apresentado pela equação (124) (113):

$$g(x) = \text{sgn}(f(x)) = \text{sgn}\left(\sum_{x_i \in SV} y_i \alpha_i^* x_i \cdot x + b^*\right) \quad (43)$$

em que sgn representa a função sinal, w^* é fornecido pela equação:

$$w^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i \quad (44)$$

e b^* pela equação:

$$b^* = \frac{1}{n_{SV}} \sum_{x_j \in SV} \left(\frac{1}{y_j} - \sum_{x_i \in SV} \alpha_i^* y_i x_i \cdot x_j \right) \quad (45)$$

Esta função linear representa o hiperplano que separa os dados com maior margem e assim com melhor capacidade de generalização.

2.7.2 SVM e as Margens Suaves

Em situações reais é difícil encontrar aplicações cujos dados sejam linearmente separáveis. Por este motivo o SVM linear de margens rígidas é estendido para lidar com conjuntos de treinamento mais gerais, permitindo assim que alguns dados possam violar a restrição.

$$y_i = (w \cdot x_i + b) - 1 \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (46)$$

Isso é possível pela introdução de variáveis de folga ξ_i , para todo $i = 1, \dots, n$ (132), o que suaviza as margens do classificador linear (124):

$$y_i = (w \cdot x_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (47)$$

A Figura 3, obtida por meio do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos R (47), exemplifica um hiperplano de separação onde se evidenciam os vetores de suporte e a variável de folga ξ , conforme a equação 47.

Figura 3 - Representação de um hiperplano de separação onde se evidenciam os vetores de suporte e a variável de folga ξ , conforme a equação 47.

Levando-se em consideração as variáveis de folga ξ_i , minimiza-se assim o erro sobre os dados de treinamento, e a função objetivo é definida como (16):

$$\underset{w, b, \xi}{\text{Minimizar}} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \quad (48)$$

onde a constante C é um termo de regularização que impõe um peso à minimização dos erros no conjunto de treinamento em relação à minimização da complexidade do modelo (110).

Portanto, com a introdução de uma função Lagrangiana e tornando suas derivadas parciais nulas tem-se o problema dual:

$$\underset{\alpha}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j) \quad (49)$$

segundo as restrições $0 \leq \alpha_i \leq C$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$ para $\forall i = 1, \dots, n$.

Com isso as variáveis ξ_i^* podem ser calculadas conforme a equação:

$$\xi_i^* = \max\{0, 1 - y_i \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j^* x_j \cdot x_i + b^*\} \quad (50)$$

sendo que a variável b^* provém de α^* e de condições de Khn-Tucker (113):

$$\alpha_i^* [y_i (w_i^* \cdot x_i + b^*) - 1 + \xi_i^*] = 0 \quad (51)$$

e

$$(C - \alpha_i^*) \xi_i^* = 0 \quad (52)$$

2.7.3 SVM No Lineares

Em muitos casos no possvel separar acertadamente e satisfatoriamente os dados de treinamento por um hiperplano.

Mapeando-se um conjunto de treinamento de seu espao original, referenciado como de entrada, para um novo espao de dimenso maior, chamado de *feature space* ou espao de caractersticas, o SVM tem a habilidade de lidar com problemas no lineares (58). Seja $\Phi : X \rightarrow \mathfrak{F}$ um mapeamento em que X o espao de entradas e $\mathfrak{F}$ o espao de caractersticas. A escolha apropriada de Φ faz com que o conjunto de treinamento mapeado em $\mathfrak{F}$ possa ser separado por um SVM linear.

Um exemplo apresentado na Figura 4, em que o uso de uma fronteira curva seria mais adequada na separao das classes.

Figura 4 - Ilustrao do conjunto de dados no lineares (a), da fronteira no linear no espao de entradas (b) e da fronteira linear no espao de caractersticas (c) (96).

A motivação para o uso desse procedimento é dado pelo teorema de Cover (56). Considerando-se um conjunto de dados não lineares, pela transformação dos dados de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$, tem-se o mapeamento representado pela equação:

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2) \quad (53)$$

o que torna possível encontrar um hiperplano capaz de separar esses dados (96):

$$f(x) = w \cdot \Phi(x) + b = 0 \quad (54)$$

Para realizar o mapeamento aplica-se Φ aos exemplos presentes no problema de otimização, conforme a equação:

$$\underset{\alpha}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)) \quad (55)$$

Assim o classificador extraído se torna:

$$g(x) = \text{sgn}(f(x)) = \text{sgn} \left(\sum_{x_i \in SV} \alpha_i^* y_i \Phi(x_i) \cdot \Phi(x) + b^* \right) \quad (56)$$

onde b^* pode ser calculado pela equação:

$$b^* = \frac{1}{n_{SV: \alpha^* < C}} \sum_{x_j \in SV: \alpha_j^* < C} \left(\frac{1}{y_j} - \sum_{x_i \in SV} \alpha_i^* y_i \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j) \right) \quad (57)$$

Pelas equações anteriores, a única informação necessária sobre o mapeamento é de como realizar o cálculo de produtos escalares entre os dados no espaço de características, pois tem-se $\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)$, para dois dados x_i, x_j em conjunto, produto que é obtido com o uso de funções *Kernels* (60):

$$K(x_i, x_j) = \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j) \quad (58)$$

Para o mapeamento dos dados de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$, apresentados no exemplo acima, o *Kernel* utilizado é (58):

$$K(x_i, x_j) = (x_{1i}^2, \sqrt{2}x_{1i}x_{2i}, x_{2i}^2) \cdot (x_{1j}^2, \sqrt{2}x_{1j}x_{2j}, x_{2j}^2) = (x_i \cdot x_j)^2 \quad (59)$$

Para garantir a convexidade do problema de otimização e que o *Kernel* represente mapeamentos nos quais seja possível os cálculos de produtos escalares, utiliza-se funções *Kernel* que seguem as condições estabelecidas pelo teorema de Mercer (88) (68) (132) (60).

São exemplos de *Kernels*:

- Polinomial: $[\delta(x_i \cdot x_j) + \kappa]^d$

- Gaussiano ou *Radial-Basis Function* (RBF): $\exp(-\sigma \|x_i \cdot x_j\|^2)$ e
- Sigmoidal: $\tanh(\delta(x_i \cdot x_j) + \kappa)$.

2.8 REGRESSÃO POR MEIO DE MÁQUINAS DE SUPORTE VETORIAL

A definição matemática para *Support Vector Regression* (SVR), regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), para predição de séries temporais, pode ser expressa por (7) (38):

$$\hat{y}_t = w_t \Phi(x_t) + b \quad (60)$$

onde $\hat{y}_t \in \mathbb{R}$ é o valor predito da série temporal, $x_t = \{y_{t-D}, y_{t-D+1}, \dots, y_{t-1}\}^T \in \mathbb{R}^D$ é o vetor de entrada do regressor e consiste nos dados históricos da série, $b \in \mathbb{R}$ é o termo de viés, $w_t \in \mathbb{R}^M$ é o vetor de pesos de x_t e $\Phi(x_t) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^M$ ($M > D$) é o espaço de características que transforma o vetor de entrada $x_t \in \mathbb{R}^D$ por meio do vetor de dimensão maior $\Phi(x_t) \in \mathbb{R}^M$.

A questão chave para resolver tal problema de previsão utilizando SVM é encontrar os valores ideais dos parâmetros SVM w_t e b . Isto pode ser feito por meio da resolução de um problema de otimização.

De acordo com a função objetivo do problema de otimização, a solução pode ser obtida por meio do SVM empregando mínimos quadrados (LS-SVM). Assim, nas condições de Mercer, o regressor LS-SVM é determinado como (131):

$$\hat{y}_t(x_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K(x_t, x_i) + b \quad (61)$$

onde α_i ($i = 1, \dots, N$) são os multiplicadores de Lagrange não negativos e $K(x_t, x_i) = \Phi(x_t) \Phi(x_i)$ são as funções do *Kernel*. O presente trabalho se concentra na utilização do *Kernel* Gaussiano (RBF), conforme (131) (130):

$$K(x_t, x_i) = \exp(-\sigma \|x_t \cdot x_i\|^2) \quad (62)$$

2.9 AJUSTES DE CURVAS

Sendo uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo, as séries temporais são passíveis de modelagem matemática com propósitos determinados, tais como descrever o comportamento da série, investigar o mecanismo gerador da série temporal, fazer previsão de valores futuros e procurar periodicidades relevantes nos dados (14) (95).

Estas modelagens são feitas no domínio do tempo e os mais frequentemente usados são os modelos de erro ou de regressão, descritos na seção Modelos Matemáticos e implementados computacionalmente por meio de Métodos de Aprendizado de Máquinas.

Para determinar qual modelo pode melhor representar uma série e posteriormente utilizá-la em previsões, pode-se seguir as etapas de: identificação do modelo, estimação, verificação e previsão (150).

Na abordagem de dados discretos o problema de ajuste de curvas dos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, com x_i pertencentes ao intervalo $[a, b]$, consiste em dadas $m + 1$ funções $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$, contínuas em $[a, b]$, obter-se $m + 1$ coeficientes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ de tal forma que $f(x) = \beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \dots + \beta_m g_m(x)$ se aproxime de $y(x)$, fornecendo os valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ dos pontos da curva (6).

Uma idéia para que a função $f(x)$ se ajuste aos pontos y_i é fazer com que o desvio, ou erro, $d_i = y_i - f(x_i)$ seja mínimo para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, definindo uma medida mais abrangente que envolve a soma destes desvios elevados ao quadrado tem-se (134):

$$D(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 \quad (63)$$

No ajuste linear simples a distribuição dos pontos no diagrama de dispersão assume aparência de uma reta, fazendo com que $g_0(x) = 1, g_1(x) = x$ e $g_2(x) = g_3(x) = \dots = g_m(x) = 0$, cuja solução geral é (134):

$$\beta_1 = \frac{(n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i)}{(n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (64)$$

e

$$\beta_0 = \frac{(\sum y_i - (\sum x_i) \cdot \beta_1)}{n} \quad (65)$$

No ajuste linear múltiplo a variável resposta depende de duas ou mais variáveis explicativas e o gráfico de dispersão apresenta um comportamento linear, fazendo com que $g_0(x) = 1, g_1(x) = X_1, g_2(x) = X_2, \dots, g_m(x) = X_m$.

No ajuste polinomial o diagrama de dispersão não apresenta as características lineares presentes nos outros tipos de ajuste. Nestas situações pode-se realizar o ajuste polinomial utilizando de funções $g_i(x)$: $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2, \dots, g_m(x) = x^m$.

2.10 PREVISÕES

A previsão de séries temporais é um método que utiliza um conjunto de valores históricos para prever um valor futuro. Este conjunto de valores históricos são observações igualmente

espaçadas ao longo do tempo e podem representar dados como preço de ativos financeiros negociados nas bolsas de valores. Neste trabalho, estuda-se em especial os dados que compõem históricos de preços de moedas, um conjunto de ativos financeiros do tipo FOREX obtidos a partir de uma base de conhecimento público (116).

Na previsão baseada em dados históricos é feita uma análise de uma janela de tempo, contendo dados passados e presentes, para determinar pontos futuros. Tal janela é formada por um conjunto de pontos da série que devem trazer, juntamente com os dados pré-processados, informações suficientes para a determinação dos acontecimentos futuros. Dessa forma, a escolha do conjunto de pontos da série é de fundamental importância para sua melhor caracterização.

Dada uma série de tempo $\{X_t\}$ o objetivo é efetuar a previsão de X_{T+h} , $\hat{X}_T(h)$, de origem T e horizonte h , ou seja, pretende-se prever X_{T+h} tendo-se observações até o instante T . Dessa maneira, a previsão é dada pela esperança condicional de X_{T+h} dado o passado $X_T, X_{T-1}, \dots$

Seja por exemplo um modelo ARIMA:

$$\varphi(B) = \phi(B) \Delta^d = (1 - \varphi_1(B) - \varphi_2(B)^2 - \dots - \varphi_{p+d}(B)^{p+d}).$$

A previsão através do Erro Quadrático Médio Mínimo (MMSE) de X_{T+h} é definida como (94):

$$\hat{X}_T(h) = \mathbf{E} [\varphi_1 X_{T+h-1} + \dots + \varphi_{p+d} X_{T+h-p-d} + \theta_0 + \varepsilon_{T+h} - \theta_1 \varepsilon_{T+h-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{T+h-q} \mid X_T, X_{T-1}, \dots].$$

Para se calcular as previsões segue-se os fatos (94):

$$\begin{aligned} 1. \mathbf{E} [X_{T+j} \mid X_T, X_{T-1}, \dots] &= \begin{cases} X_{T+j}, & \text{se } j \leq 0 \\ \hat{X}_T(j) & \text{se } j > 0 \end{cases} \\ 2. \mathbf{E} [\varepsilon_{T+j} \mid X_T, X_{T-1}, \dots] &= \begin{cases} \varepsilon_{T+j}, & \text{se } j \leq 0 \\ 0 & \text{se } j > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, para se calcular previsões é necessário (94):

1. a substituição das esperanças passadas ($j \leq 0$) por valores conhecidos, X_{T+j} e ε_{T+j} ; e
2. a substituição das esperanças futuras ($j > 0$) por previsões $\hat{X}_T(j)$ e 0.

2.11 ANÁLISE DOS MODELOS E MÉTODOS APRESENTADOS

Algumas iniciativas de pesquisas acadêmicas vêm sendo desenvolvidas e realizadas sobre a utilização de métodos de aprendizado de máquinas e a teoria de aprendizado estatístico na

regressão de séries temporais, das quais destacam-se conceitos relacionadas ao *SVR*, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (*SVM*), à Transformada *wavelet* e aos Modelos Tradicionais.

Modelos tradicionais, como Box-Jenkins e modelos autorregressivos, assumem que as série temporais em estudo são geradas por meio de um processo linear (155). Tais modelos lineares podem ser compreendidos e analisados em maiores detalhes e são fáceis de explicar e implementar. Entretanto, seu uso é inapropriado em casos onde a série possui característica não-linear. Estudos afirmam que séries financeiras possuem ruídos e são não-lineares (11), inviabilizando o uso de tais modelos para este problema específico.

Nos últimos anos, um crescente número de estudos tem aparecido sobre o uso de métodos de aprendizado de máquinas em previsões de séries temporais financeiras. Algumas características explicam seu uso nesta área (155). Primeiro, são modelos auto-adaptativos, de modo que aprendem a partir de exemplos e capturam relações estruturais dos dados mesmo que essas sejam desconhecidas ou difíceis de descrever. Esses modelos são conhecidos por serem aproximadores universais de funções, sendo capazes de aproximar qualquer função contínua a qualquer precisão desejada. Outro fator importante é sua habilidade em reconhecer padrões não lineares nos dados das séries temporais, característica essa encontrada nos movimentos do mercado financeiro. Além disso, métodos de aprendizado de máquinas podem inferir dados não apresentados no processo de treinamento mesmo se os padrões apresentarem ruídos devido à sua grande capacidade de generalização.

No âmbito financeiro, exemplos de uso de redes neurais, aprendizagem bayesiana, algoritmo genético e máquinas de suporte vetorial não só se limitam ao problema da previsão, mas são utilizadas também no reconhecimento de padrões em gráficos financeiros, na estimação do preço de opções e na formação de indicadores de compra ou venda de um determinado ativo financeiro, sobretudo ações.

Modelos como Algoritmos Genéticos e Computação Evolutiva mostraram-se extremamente úteis na procura de padrões e na mineração de dados permitindo a realização de buscas globais, oferecendo uma melhor interação entre os atributos (42) (48) (43).

Utilizando-se dos Algoritmos Genéticos e das redes neurais do tipo *Radial Basis Function* (RBFNN) na predição de taxas de câmbio, Rivas (120) obteve um bom desempenho quando comparado com outros modelos. Nesta mesma linha de motivação as redes neurais e os algoritmos genéticos também mostraram-se com um melhor desempenho quando comparados às abordagens de modelagem de séries estatísticas (97).

Modelos como *Standard Backpropagation* (SBP), *Scaled Conjugate Gradient* (SCG) e *Backpropagation with Bayesian Regularization* (BPR) são utilizados para prever taxas de câmbio (66). Outros modelos de redes neurais recorrentes mostram-se eficientes na otimização de

rentabilidade de estratégias de negociação com base nos resultados de previsões (137).

Quando utilizados separadamente de modelos híbridos, as redes neurais se mostraram com dificuldade de aprendizagem para efetuar previsões de séries temporais não-estacionárias (49).

Os modelos de regressão baseados em SVM, *Support Vector Regression* (SVR), mostram-se adequados para resolver problemas de estimação não lineares de regressão. Estes modelos têm sido aplicados na solução de problemas de mineração de dados de séries temporais financeiras e têm-se mostrados eficientes na previsão deste tipo de séries temporais (143) (136) (19).

Outros trabalhos como em Lu (76) e Tsay (135) comprovaram que a utilização do SVM em um modelo híbrido para previsão de séries temporais, mostrou-se superior aos modelo de redes neurais artificiais para o tipo de problema envolvendo séries temporais financeiras que muitas vezes apresentam padrões de não linearidade.

Vários outros estudos utilizando-se de modelos híbridos foram apresentados, como por exemplo:

- A utilização de *Self Organizing Map* (SOM) que converte uma série temporal em uma sequência de símbolos como entrada de uma rede neural recorrente na geração de novas previsões (49). Entretanto o autor não comparou o desempenho do modelo proposto com outras abordagens de aprendizado de máquina, perdendo a oportunidade de verificar a eficácia de seu método.
- A utilização da abordagem de redes neurais com modelos ARIMA, aproveitando-se das características individuais de cada modelo bem como dos resultados empíricos de seus trabalhos, Zhang (154) sugere que o modelo híbrido é melhor do que os dois modelos utilizados individualmente.
- O modelo híbrido ARIMA e SVM para a previsão do preço das ações (107).
- A metodologia híbrida que explora modelos *Seasonal* ARIMA (SARIMA) e SVM na previsão de séries temporais sazonais (21).
- O modelo híbrido formado por uma mistura de vários modelos de regressão de redes neurais, SVR e um conjunto selecionado de indicadores financeiros para efetuar a previsão de séries temporais de taxa de câmbio (102). O autor mostrou que a combinação de SVM e outros modelos eram superiores àquelas apresentadas nas previsões individuais.

Modelos para ajustes de séries temporais por meio de *wavelets* também foram propostos. Geralmente são trabalhos voltados para a análise matemática de modelos ajustados por meio de *wavelets*.

Assim, apesar dos bons resultados encontrados nos diversos estudos recentes o desafio de encontrar modelos com melhor capacidade para previsão de dados ainda está em aberto, seja para previsão de ativos das bolsas de valores ou para previsão de tendências para indicadores financeiros.

Alguns modelos *wavelets* híbridos têm sido utilizados para prever os preços do petróleo (151), índice de ações (4), demanda de eletricidade (40) (152) (153) e outras séries de tempo. Mas, não há aplicações de SVM e *wavelets* para a previsão de taxa de câmbio.

Um modelo híbrido utilizando-se *wavelets* pode ser bem adequado para previsão de taxas de câmbio, pois as *wavelets* podem decompor as séries temporais em seus componentes de escala de tempo e esta pode ser uma estratégia muito bem sucedida na tentativa de desvendar a relação entre variáveis econômicas (118) e a previsibilidade da série.

Pela argumentação exposta neste capítulo, este trabalho propõe o desenvolvimento de um modelo híbrido de previsão de séries temporais que integra *wavelets* e SVR, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), na previsão de séries financeiras, como uma alternativa aos modelos de previsão tradicionais. Oferece também uma comparação de desempenho deste novo modelo com os modelos ARFIMA, ARIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel, bem como sua aderência ao Expoente de Hurst por meio da estatística R/S.

3 DEFINIÇÃO DO MODELO SVR-WAVELET

3.1 MODELOS HÍBRIDOS

Modelos híbridos, adotando técnicas de inteligência artificial, podem ser utilizados para otimizar o poder dos métodos de aprendizado de máquinas. Seu principal papel neste caso é encontrar as melhores configurações para um problema específico. Desse modo, eles automatizam o processo de tentativa e erro, que em geral costuma ser muito tedioso.

3.1.1 O Modelo SVR-wavelet

O modelo de previsão adaptativo está fundamentado na associação de modelos de *wavelets* e SVR, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), ou seja, um sistema SVR-wavelet híbrido.

Este modelo utiliza a Transformada Discreta de *wavelet* (DWT) para efetuar a decomposição dos dados de séries de tempo, possibilitando com que componentes de alta e baixa frequências, contidos nos dados originais, possam ser separados.

Como resultado desta decomposição é possível identificar, por meio das baixas frequências, aspectos de tendências de longo prazo. Da mesma forma, por meio das altas frequências, é possível capturar descontinuidades, rupturas e singularidades contidas nos dados originais.

Após esta decomposição os componentes de aproximação e detalhes obtidos respectivamente das baixas e altas frequências, são utilizados como variáveis de entrada do SVR para prever dados futuros dos ativos financeiros.

A análise por meio de *wavelets* possibilita efetuar a eliminação de ruídos contidos nas séries por meio de filtros e técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para obtenção de uma versão mais limpa da série temporal original. Além disso, acrescentado o fato de que modelos não-lineares como as Máquinas de Suporte Vetorial, *Support Vector Machines* (SVM), são eficientes e eficazes na previsão de séries temporais.

Dessa maneira o sistema híbrido SVR-wavelet pode ser considerado um otimizador adaptativo em que os coeficientes de alimentação são devidamente alterados para minimizar o Erro Quadrático Médio (MSE).

3.1.2 Técnicas de *Denoising* ou *wavelet Shrinkage*

As *wavelets* possibilitam a eliminação de ruídos por meio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*. A série temporal financeira pode ser alterada com a adição de ruído $r(n)$, resultando

num sinal corrompido $y(n)$:

$$y(n) = x(n) + r(n) \quad (66)$$

Na realidade, as séries temporais financeiras podem apresentar outros dois componentes: $T(n)$, tendência, e $S(n)$, sazonalidade. Este último componente não é encontrado nas séries FOREX estudadas por este trabalho.

Através da transformada *wavelet*, uma parte do ruído é removida da série temporal antes da extração de atributos (129). A técnica de *wavelet denoising* tenta transformar $y(n)$ novamente em $x(n)$, ou pelo menos num sinal similar. O processo é ilustrado na Figura 5.

Figura 5 - Técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* (129).

Realizar a limpeza no domínio do tempo não é uma tarefa fácil tampouco prática, pois é complicado diferenciar o que é sinal do que é ruído em $y(n)$ (129). Uma alternativa inicial seria aplicar a transformada de *Fourier* discreta e fazer a análise no domínio da frequência.

A transformada *wavelet* é considerada como uma evolução da transformada de *Fourier*, trazendo flexibilidade para analisar séries temporais. A vantagem desta transformada é ser função de dois argumentos (129): um parâmetro (a) para alterar a escala horizontal da função mãe e um segundo parâmetro (b) para deslocar a função horizontalmente, trazendo uma informação de posição no tempo. A Figura 6 demonstra o efeito dessas modificações.

Figura 6 - Efeito das modificações proporcionadas pelos parâmetros (a) e (b) sob a função *wavelet* mãe (129).

3.2 PREDIÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS POR MEIO DO MODELO SVR-WAVELET HÍBRIDO

Embora os modelos SVM empregando mínimos quadrados (LS-SVM) se mostrem com bom potencial na previsão de séries temporais, devido à sua capacidade de generalização, algumas séries podem apresentar um comportamento não-estacionário. Esta não-estacionariedade leva a pensar sobre a utilização de modelos híbridos como a combinação de SVM com a decomposição *wavelet* na previsão de séries temporais. A solução pode ser obtida por meio da Transformada *wavelet* Discreta de Máxima Sobreposição (MODWT) como um pré-processador do conjuntos de dados de entrada.

Por intermédio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* efetua-se a eliminação de ruídos, possivelmente contidos nas séries financeiras. Em seguida, por meio da decomposição Multirresolução (MRA) a transformada *wavelet* é capaz de produzir novas subséries, cada uma fornecendo informações em uma escala de tempo específico. Em escalas de baixa resolução ou altas frequências, a transformada *wavelet* pode expressar características de curto prazo, enquanto em escalas de alta resolução ou baixas frequências, a função *wavelet* permite identificar o comportamento de longo prazo, tais como padrões de tendência e ciclos no conjunto de dados.

Conforme destacado neste trabalho, o princípio da análise *wavelet* é a de expressar ou aproximar um sinal ou função por uma família de funções geradas por dilatações e translações.

O presente trabalho salienta a utilização da *wavelet Haar* para a implementação da transformada *wavelet*. Entretanto, outras famílias de *wavelet* tais como as *Daubechies*, *Coiflets* e *Gaussian* podem ser utilizadas e analisadas para se verificar qual delas é mais adequada e aderente às séries temporais financeiras.

A Figura 7 ilustra as famílias de *wavelet Haar*, *Daubechie* de ordem 4 (db4), *Coiflet de ordem 4* (coif4) e *Gaussian* de ordem 4 (gaus4) por meio do software MATLAB.

Seja X um vetor de tamanho N que contenha uma série de tempo $\{X_t\}$, e seja J_0 um número inteiro positivo. A MODWT mapeia o vetor de entrada de dados X do domínio do tempo para a escala de tempo de *wavelet* gerando $J_0 + 1$ vetores $\tilde{W}_j$, $j = 1, \dots, J_0$ e $\tilde{V}_{J_0}$ cada uma de dimensão N . Os $\tilde{W}_j$ são composições de coeficientes da MODWT *wavelet* na escala 2^{j-1} enquanto que $\tilde{V}_{J_0}$ contém os coeficientes escalares da MODWT na escala 2^{J_0} . Na forma matricial, os coeficientes da MODWT podem ser expressos por (4) (40) (151) (152):

$$\left[\tilde{W}_j \right]_{N \times N} = \tilde{\omega}_j X, \quad j = 1, \dots, J_0 \quad (67)$$

Figura 7 - Famílias de *wavelet* *Haar*, *Daubechie* de ordem 4 (db4), *Coiflet* de ordem 4 (coif4) e *Gaussian* de ordem 4 (gaus4) obtidas por meio do software MATLAB.

e

$$\left[\tilde{V}_{J_0} \right]_{N \times N} = \tilde{\nu}_{J_0} X \quad (68)$$

em que $\tilde{W}_j$ e $\tilde{V}_{J_0}$ são composições da *wavelet* MODWT e dos coeficientes de filtro escalar.

Por intermédio da decomposição Multirresolução (MRA) o vetor original de entrada de X pode ser calculado como:

$$X = \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{\omega}_j^T \tilde{W}_j + \tilde{\nu}_{J_0}^T \tilde{V}_{J_0} = \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{d}_j + \tilde{S}_{J_0} \quad (69)$$

em que os componentes $\tilde{d}_j$, $j = 1, \dots, J_0$, são as *wavelet* detalhes da subsérie gerada. O componente de aproximação $\tilde{S}_{J_0} = X - \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{d}_j$ representa uma versão suavizada da série $\{X_t\}$ na escala 2^{J_0} .

A Figura 8 ilustra a proposta do modelo para predição de séries temporais por meio do modelo SVR-*wavelet* híbrido.

Dada uma série de tempo $\{X_t\}$ o objetivo é efetuar a previsão de X_{T+h} , $\hat{X}_T(h)$, de origem T e horizonte h .

O sistema de previsão proposto envolve quatro etapas: Primeiramente, efetua-se a eliminação de ruídos, possivelmente contidos nas séries financeiras do tipo FOREX, por meio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*. Depois, a MODWT expressa pela MRA é aplicada sobre o conjunto de dados de entrada e então é realizada a redução para o nível J_0 . A série original é então representada como a soma dos componentes de aproximação $\tilde{S}_{J_0}$ e das *wavelets* detalhes $\tilde{d}_j$, $j = 1, \dots, J_0$.

Em seguida, ao invés de prever a série original, os componentes da MRA são previstos independentemente em cada escala de resolução por meio de um LS-SVM.

Figura 8 - Modelo proposto para predição de séries temporais por meio do modelo SVR-wavelet híbrido.

Por fim os componentes de aproximação $\tilde{S}_{J_0}$ e as *wavelets* detalhes $\tilde{d}_j$, $j = 1, \dots, J_0$, são recombinaadas para gerar uma previsão agregada. Isto é feito utilizando-se da estrutura de adição da decomposição MRA, da seguinte maneira:

$$\{\hat{X}_t\} = MRA_{union} \left\{ \left[\hat{S}_{J_0}(t+1) \right] + \left[\sum_{j=1}^{J_0} \hat{d}_j(t+1) \right] \right\} \quad (70)$$

onde $\hat{S}_{J_0}(t+1) = \left[\tilde{S}_{J_0}(t) + \tilde{S}_{J_0}(t-1) + \dots + \tilde{S}_{J_0}(t-p) \right]$
 e $\hat{d}_j(t+1) = \left[\tilde{d}_j(t) + \tilde{d}_j(t-1) + \dots + \tilde{d}_j(t-q_j) \right]$, $j = 1, \dots, J_0$.

em que as defasagens de tempo p e q_j , $j = 1, \dots, J_0$, são aludidas como as dimensões dos componentes para estimativa dentro da estrutura de regressão LS-SVM.

A lógica por trás desta estratégia é que as séries temporais presentes no mundo real são geralmente não-estacionárias, com muito ruído e sujeitas à várias irregularidades. Além disso, elas podem conter fenômenos como tendências, ciclos, sazonalidades e flutuações de curto prazo. Explorando as propriedades inerentes à transformada *wavelet*, a MRA isola as dinâmicas de baixa frequência das dinâmicas de alta frequência, tendo como resultado um conjunto de subséries com mecanismos geradores mais fáceis. Por conseguinte, o treinamento do regressor LS-SVM para estas novas séries temporais é mais eficiente do que com os dados de entrada sem tratamento.

4 MÉTRICAS

Com o objetivo de demonstrar que as séries temporais FOREX são não-viciadas e apropriadas para a comprovação do modelo híbrido SVR-wavelet, são propostos alguns testes estatísticos como os de normalidade e de raiz unitária para se comprovar que as séries em questão possuem distribuição não linear e também atestar o nível de correlação entre os períodos das séries.

Similarmente são apresentadas algumas métricas da precisão da previsão do modelo ajustado (142) (94) (127), das quais este trabalho destaca: Erro Quadrático Médio (MSE), Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE), Erro absoluto médio (MAE), Erro Porcentual médio (MPE), Erro Porcentual Absoluto Médio (MAPE), Erro escalado Absoluto Médio (MASE), Autocorrelação de erros para uma defasagem (ACF1), Critério de Informação de Akaike (AIC), AIC de Segunda Ordem (AICc) e Critério de informação Bayesiano (BIC).

Suplementarmente aos testes, também se avalia a aderência ao Expoente de Hurst por meio da estatística R/S.

4.1 TESTES DE NORMALIDADE

Os testes de normalidade são utilizados para se constatar se a distribuição de probabilidade, associada às séries FOREX, pode ser aproximada pela distribuição normal, empregando-se os seguintes testes: Anderson-Darling, Cramer-von Mises, (Lilliefors) Kolmogorov-Smirnov, Pearson chi-square, Shapiro-Francia, Shapiro-Wilk e Jarque-Bera.

4.1.1 Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling é utilizado quando uma amostra de dados provém de uma população com uma distribuição específica, fazendo-se uso desta distribuição para calcular os valores críticos. Por um lado tem-se a vantagem de permitir um teste mais sensível, da outra a desvantagem de que os valores críticos devem ser calculados para cada distribuição. Sendo uma alternativa ao qui-quadrado e ao teste de Kolmogorov-Smirnov, o teste de Anderson-Darling pode ser definido como (64):

$$A_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - F_0(x)]^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x) \quad (71)$$

em que F_n é a distribuição empírica dos dados. Verifica-se que a distribuição de A_n é dependente de F_0 , o que contrasta com a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov. Considera-se apenas o caso uniforme em que $F_0(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$.

4.1.2 Cramer-von Mises

Em geral, o teste Cramer-von Mises é empregado para testar a normalidade de qualquer variável e é um critério aplicado para apurar a qualidade do ajuste de uma função de distribuição cumulativa F^* em comparação com uma dada função de distribuição empírica F_n , ou para comparar duas distribuições empíricas.

O teste de Cramer-von Mises determina se a hipótese nula é uma suposição razoável baseada na distribuição populacional de uma amostra aleatória X , para um dado nível de confiança. O teste é baseado em um processo de interpolação sob restrição com um nível de significância limitado a $0,001 \leq \alpha \leq 0,10$. A decisão de rejeitar a hipótese nula é tomada quando a estatística de teste excede o valor crítico.

Seja $S(x)$ a Função de Densidade Cumulativa Empírica (*c.d.f.*) estimada a partir do vetor de amostra X e $F(x)$ a população normal correspondente à *c.d.f.*, com média zero e desvio padrão unitário. A hipótese de Cramer-Von Mises e a estatística de teste são calculadas como (64):

$$W^2 = \int_0^1 (S(x) - F(x))^2 dF(x) \quad (72)$$

onde X é um vetor linha representando uma amostra aleatória. Em aplicações de uma amostra, F^* é a distribuição teórica e F_n é a distribuição empiricamente observada.

4.1.3 (Lilliefors) Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov, não paramétrico, pode ser usado para comparar uma amostra com uma distribuição de probabilidade de referência. A estatística Kolmogorov-Smirnov quantifica a distância entre a função de distribuição empírica da amostra da função de distribuição cumulativa da distribuição de referência.

No caso especial de testar a normalidade de uma distribuição, as amostras são padronizadas e comparadas com uma distribuição normal padrão, estabelecendo a média e a variância da distribuição de referência iguais às estimativas da amostra.

A função de distribuição empírica F_n onde n é independente e identicamente distribuído (*i.i.d.*) com observações X_i , é definida como (64):

$$F_n(x) = 1/n \sum_{i=1}^n I_{[-\infty, x]}(X_i) \leq x \quad (73)$$

em que $I_{[-\infty, x]}(X_i)$ é uma função indicadora, que é igual a 1 se $X_i \leq x$ e igual a 0 caso

contrário. As estatísticas de Kolmogorov-Smirnov para um dado $F(x)$, *c.d.f.*, é:

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F(x)| \quad (74)$$

onde $\max_x$ representa a maior distância.

4.1.4 Pearson chi-square

Duas variáveis aleatórias x e y são independentes se a distribuição de probabilidade de uma das variáveis não for afetada pela presença de outra.

Suponha que f_{ij} seja a frequência observada de eventos pertencentes tanto à i – *ésima* categoria de x quanto à j – *ésima* categoria de y . Suponha também que e_{ij} seja a frequência esperada correspondente se x e y forem independentes. A hipótese nula da suposição de independência é rejeitada se o valor de p da estatística de teste de *Qui – quadrado*, χ^2 , definida como (64):

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (75)$$

for menor que um dado nível de significância.

4.1.5 Shapiro-Wilk

A estatística Shapiro-Wilk mede o afastamento da normalidade. Ela é calculada com valores de dados observados ordenados como (64):

$$W^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n A_i X_i)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (76)$$

em que $A_i = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m^T)^{1/2}}$ são constantes, $m^T = (m_1, \dots, m_n)^T$ são os valores esperados das estatísticas de ordem das variáveis aleatórias *i.i.d* da distribuição normal padrão e V é a matriz de covariância dessas estatísticas de ordem. A Hipótese é rejeitada se o valor W_2 for muito alto.

4.1.6 Shapiro-Francia

O teste de Shapiro-Francia é uma simplificação do teste de Shapiro-Wilk para se comprovar a normalidade de uma população com base nos dados da amostra. Ele é definido como (64):

$$W' = \frac{\text{cov}(x, m)}{\sigma_x \sigma_m} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(m_i - \bar{m})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)(\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2)}} \quad (77)$$

em que x e m são respectivamente a amostra tomada para o teste e m sua média.

4.1.7 Jarque-Bera

A estatística de Jarque-Bera utiliza os terceiro e quarto momentos centrais como medidas da partida entre distribuição observada e distribuição normal. A estatística é calculada como (64):

$$JB = \frac{N}{6} [S^2 + 1/4(K - 3)^2] \quad (78)$$

em que onde N é o tamanho da amostra, S é a assimetria da amostra, K é a curtose da amostra.

4.2 TESTES DE RAIZ UNITÁRIA

Um dos propósitos de se analisar dados de séries temporais não-estacionárias é verificar a estacionariedade dos dados. Por este prisma adota-se os conseguintes testes, amplamente utilizados em estatística.

4.2.1 Dickey-Fuller Aumentado

O teste Dickey-Fuller Aumentado é um teste para uma raiz unitária em uma amostra de séries temporais. Sendo uma versão aumentada do teste Dickey-Fuller para um conjunto maior de modelos de séries temporais, este teste apresenta-se com um número estatístico negativo e quanto mais negativo for o número mais forte é a tendência de se rejeitar a hipótese de que existe uma raiz unitária a um dado nível de confiança. O procedimento para este teste é o mesmo que para o teste Dickey-Fuller, conforme (114):

$$\Delta y_t = \alpha + \beta_t + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (79)$$

Onde α é uma constante, β é o coeficiente de uma tendência temporal e p é a ordem da defasagem do processo autoregressivo. Lembrando que estabelecendo as restrições $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, corresponder-se-à modelagem de um Passeio Aleatório, e que empregando-se a restrição $\beta = 0$, corresponder-se-à modelagem de um Passeio Aleatório com deslocamento.

Ao se integrar as defasagens de ordem p , a formulação *Dickey-Fuller Aumentado* possibilita processos de autorregressão de ordem superior, o que exprime que o tamanho da defasagem p deva ser determinado, quando se aplica o teste por meio da estatística AIC.

4.2.2 Phillips-Perron

Outro teste de raiz unitária largamente utilizado em análise de séries temporais. Ele baseia-se no teste Dickey-Fuller da hipótese nula $\delta = 0$ em $\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t$, primeiro operador diferença. Tal como no teste *Dickey-Fuller Aumentado*, o teste Phillips-Perron aborda a questão de que o processo de geração de dados para y_{t-1} pode ter uma ordem mais elevada de autocorrelação. O teste Phillips-Perron aborda esta questão, introduzindo defasagens de Δy_t como regressores na equação de teste (78).

$$\Delta y_t = \beta' \mathcal{D}_t + \delta y_{t-1} + u_t \quad (80)$$

onde u_t tem ordem de integração 0, $I(0)$.

4.2.3 KPSS

Possivelmente o teste mais conhecido para a estacionariedade em Econometria, o teste KPSS, introduzido por Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin em 1992, rejeita a hipótese de estacionariedade como verdadeira, o que conduz à preferência pela hipótese de não estacionariedade da raiz unitária (53).

$$KPSS = 1/T^2 \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_\infty^2} \quad (81)$$

em que $S_t = \sum_{s=1}^t \hat{e}_s$, onde $\hat{e}_t$ é o resíduo da regressão e $\hat{\sigma}_\infty^2$ é um estimador consistente de autocorrelação com variância $\hat{e}_t$.

4.3 TESTES DE NÃO-LINEARIDADE

4.3.1 Terasvirta Neural Network

Esse tipo de teste de linearidade para séries temporais foi introduzido com base em conceitos da teoria das redes neurais (138), podendo ser equacionado como (33):

$$u_t = \phi_1 \nabla (\alpha_0 + A^T X_{t-1}) - 1/3 \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=j_1}^n \sum_{j_3=j_2}^n \phi_{2j_1 j_2 j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} + u_t^* \quad (82)$$

4.3.2 White Neural Network

Um outro teste de linearidade foi introduzido por White em 1989 (147). White desenvolveu um teste para não-linearidade negligenciada, fundamentando-se no teste de rede neural em que uma função de teste $h(x_t)$ selecionada entre as ativações das camadas internas $\psi(x_t \Gamma_j)$, $j = 1, \dots, q$, onde Γ_j são vetores colunas, aleatórios e independentes de x_t , sendo expresso como (70):

$$\mathbf{E}[\psi(x_t \Gamma_j) \varepsilon_t^* | \Gamma_j] = \mathbf{E}[\psi(x_t \Gamma_j) \varepsilon_t^*] = 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (83)$$

em que $\mathbf{E}(\Psi_t \varepsilon_t^*)$ para H_0 e $\Psi_t = (\psi(x_t \Gamma_1), \dots, \psi(x_t \Gamma_q))'$ é o vetor de ativação das camadas internas.

Em condições de regularidade adequadas, conserva-se o teorema do limite central e se dispondo de um estimador consistente para a matriz de covariância assintótica, $\hat{W}_n$, a estatística assintótica de qui-quadrado pode ser equacionada como (70):

$$\left(n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \psi \hat{\varepsilon}_t \right)' \hat{W}_n^{-1} \left(n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \psi \hat{\varepsilon}_t \right) \xrightarrow{d} \chi^2(q^*) \quad (84)$$

Realizando-se um teste em $q^* < q$ nos componentes principais de Ψ_t , não colineares com x_t , por exemplo Ψ_t^* , e empregando-e a estatística de teste equivalente, N_{q,q^*} , tem-se que (70):

$$N_{q,q^*} \equiv nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2(q^*) \quad (85)$$

onde R^2 é uma correlação múltipla quadrada não centrada da regressão linear padrão de $\hat{\varepsilon}_t$ em Ψ_t^* e x_t .

4.4 TESTES DE CORRELAÇÃO PELO GRÁFICO DE DISPERSÃO

O gráfico de dispersão mostra as relações ou associações entre duas variáveis quantitativas. A relação entre duas variáveis é chamada de correlação (20).

Segundo Michael (44) o gráfico de dispersão é usado para verificar se existe relação de causa e efeito entre duas variáveis de natureza quantitativa determinando se existe relação e qual a intensidade da relação entre elas.

O gráfico de dispersão possibilita construir uma regressão linear, determinando-se uma reta que aponta a relação entre duas variáveis e indica a função que dá o comportamento da relação entre elas.

Quando o valor de uma variável cai com o aumento do valor de outra variável, diz-se que as variáveis são negativamente correlacionadas. E quando o valor de uma variável sobe com o aumento do valor de outra variável, diz-se que as variáveis são positivamente correlacionadas.

4.5 MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICC, BIC

4.5.1 MSE - Erro Quadrático Médio

O Erro Quadrático Médio ou *Mean Squared Error* (MSE), é a soma das diferenças entre o valor estimado e o valor real dos dados, ponderados pelo número de termos. Com tal característica, o ME dos valores previstos $\hat{y}_t$ das observações no instante t da variável dependente da regressão y_t é avaliado para n diferentes previsões como (123):

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n} \quad (86)$$

4.5.2 RMSE - Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio

A Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio ou *Root Mean Square Error* (RMSE) é uma medida das diferenças entre valores preditos por um modelo e os valores realmente observados. Ele equivale ao desvio padrão da amostra das diferenças entre valores previstos e valores observados. Essas diferenças individuais são chamadas de resíduos.

Deste modo RMSE dos valores previstos $\hat{y}_t$ das observações no instante t da variável dependente da regressão y_t é calculado para n diferentes previsões como a raiz quadrada da média

dos quadrados dos desvios (115):

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}} \quad (87)$$

4.5.3 MAE - Erro Absoluto Médio

O Erro Absoluto Médio ou *Mean Absolute Error* (MAE), é a média de todos os erros absolutos, diferença entre valores ajustados $\hat{y}_t$ das observações no instante t da variável dependente da regressão y_t , sendo determinado como (122):

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t|}{n} \quad (88)$$

onde n é o tamanho da série.

4.5.4 MPE - Erro Porcentual Médio

O Erro Porcentual Médio ou *Mean Percentage Error* (MPE), é a média calculada de erros percentuais pelos quais as previsões do modelo diferem das observações no instante t da variável dependente da regressão y_t . É computado como (139):

$$MPE = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \quad (89)$$

onde y_t são as observações no instante t da variável dependente da regressão, $\hat{y}_t$ são os valores ajustados e n é o tamanho da série.

4.5.5 MAPE - Erro Porcentual Absoluto Médio

O Erro Porcentual Absoluto Médio ou *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), é uma medida da precisão de previsão na estimativa de tendência e pode ser formulado como (139):

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \quad (90)$$

onde y_t são as observações no instante t da variável dependente da regressão, $\hat{y}_t$ são os valores ajustados e n é o tamanho da série.

4.5.6 MASE - Erro Escalado Absoluto Médio

O Erro Escalado Absoluto Médio ou *Mean Absolute Scaled Error* (MASE), é uma medida da precisão das previsões e pode ser avaliado como (105):

$$MASE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{|e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |y_t - y_{t-1}|} \right) \quad (91)$$

em que o numerador e_t é o erro de previsão para um determinado período, no qual y_t são as observações no instante t da variável dependente da regressão, $\hat{y}_t$ são os valores ajustados, e n é o tamanho da série. O denominador representa o Erro Absoluto Médio (MAE) da previsão para um período à frente.

4.5.7 ACF1 - Autocorrelação de Erros para uma Defasagem

A Autocorrelação de Erros para uma Defasagem ou *Autocorrelation of Errors at Lag 1* (ACF1), mede a autocorrelação dos resíduos para uma defasagem. Para duas variáveis y_1 e y_2 , o ACF1 é calculado como (94):

$$\rho = \frac{E(y_1 - \mu_1)(y_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{cov}(y_1 - y_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (92)$$

em que E é o operador esperança, μ_1 e μ_2 são respectivamente as médias para as variáveis y_1 e y_2 , e σ_1 e σ_2 são seus desvios padrão.

4.5.8 AIC - Critério de Informação de Akaike

O Critério de Informação de Akaike ou *Akaike Information Criterion* (AIC), é uma medida relativa da quantidade de ajustes de um modelo estatístico estimado. Dada uma coleção de modelos para os dados, AIC estima a qualidade de cada modelo, em relação a cada um dos outros modelos. Portanto, o AIC fornece um meio para a seleção do modelo, sendo determinado como (156) (35):

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L}) \quad (93)$$

em que k é o número de parâmetros estimados no modelo e $\hat{L}$ é o valor maximizado da função de verossimilhança do modelo estudado.

4.5.9 AICc - AIC de Segunda Ordem

O AIC de Segunda Ordem ou *Second-Order AIC* (AICc) é o AIC com uma correção para tamanhos de amostra finitos. A fórmula para AICc depende do modelo estatístico. Supondo que o modelo é univariante, linear e tem resíduos distribuídos normalmente, o AICc é computado como (156):

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \quad (94)$$

em que AIC é o Critério de Informação de Akaike, k é o número de parâmetros estimados no modelo, $\hat{L}$ é o valor maximizado da função de verossimilhança do modelo estudado e n indica o tamanho da amostra.

4.5.10 BIC - Critério de Informação Bayesiano

Critério de Informação Bayesiano ou *Bayesian Information Criterion* (BIC), é um critério para a avaliação de modelos definido em termos de probabilidade a posteriori. É formulado como (156) (35):

$$BIC = \ln(n) k - 2 \ln(\hat{L}) \quad (95)$$

em que $\hat{L}$ é o valor maximizado da função de verossimilhança do modelo estudado, n é o número de observações ou o tamanho da amostra e k é o número de parâmetros estimados.

4.6 INTERPRETAÇÃO DOS P-VALUES

Em estatística, o p-value, chamado de nível descritivo ou probabilidade de significância, é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que aquela observada em uma amostra, sob a hipótese nula. O p-value está diretamente relacionado ao tamanho da amostra. A Tabela 1 apresenta uma interpretação admissível dos p-values (3). Os valores estatísticos de p-values mostrados na Tabela 1 são considerados razoáveis pois a quantidade de pontos amostrados neste trabalho são superiores a 3000 pontos por série estudada.

Usualmente define-se duas hipóteses, a nula, H_0 , e a alternativa, H_A . Em estatística convencionam-se definir a hipótese alternativa como a hipótese proposta pelo pesquisador, ao passo que a hipótese nula é o seu complemento. Inicialmente, a hipótese nula é considerada a verdadeira. Ao se confrontar a hipótese nula com os obtidos de uma amostra aleatória tomada de uma população de interesse, verifica-se sua legitimidade em termos probabilísticos, o que

Tabela 1 - Interpretação admissível dos p-values (3).

p-value	Interpretação
$p < 0,01$	evidência muito forte contra H_0
$0,01 \leq p < 0,05$	evidência moderada contra H_0
$0,05 \leq p < 0,10$	evidência sugestiva contra H_0
$0,10 < p$	pouca ou nenhuma evidência real contra H_0

leva a rejeitar-se ou não H_0 . Se não se rejeita H_0 , então ela é considerada como verdadeira; caso contrário, adota-se H_A como verdadeira.

4.7 CRITÉRIOS PARA SELEÇÃO DO MELHOR MODELO

A escolha do modelo apropriado, sob a luz da estatística, é uma questão excessivamente indispensável na análise de dados (15). Buscam-se modelos mais parcimoniosos ou aqueles que envolvam o mínimo de parâmetros possíveis a serem estimados e que expliquem bem o comportamento da variável resposta.

Nesta linha, diversos critérios para seleção de modelos são apresentados na literatura (15) (148) (75). Dentre os critérios para seleção de modelos, os critérios baseados na Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) são os mais empregados, com maior ênfase ao Critério de Informação de Akaike (AIC), ao Critério AIC de Segunda Ordem (AICc) e ao Critério de Informação Bayesiano (BIC).

Os três critérios, apesar de conceitualmente diferentes acerca dos modelos em avaliação, utilizam o mesmo critério estatístico, o máximo da função de verossimilhança como medida do ajuste, contudo, definem valores críticos diferentes. Esta é a diferença fundamental entre os três métodos.

Com o teste da razão de verossimilhança, considera-se por hipótese que o modelo mais simples é o de melhor ajuste, até que se observem, dado um nível de significância, diferenças estatísticas para um modelo mais completo.

4.8 EXPOENTE DE HURST E A ANÁLISE R/S

É possível encontrar características fractais em séries temporais de taxas de câmbio por meio da análise dos intervalos de tempo de amostras diárias e intra-diárias (2) (25).

A estatística de Reescalamento R/S, *Rescaled Range*, de Hurst é uma métrica que permite verificar a existência da dinâmica fractal numa série e investigar a presença de memória longa

persistente, anti-persistente ou a identificação de passeio aleatório (94) (2).

O Expoente de Hurst foi sugerido pelo engenheiro e hidrólogo inglês Harold Hurst em 1951, que inspirando-se nas definições de processo aleatório sugeridas por Einstein, obteve o Expoente de Hurst (H), parte da estatística R/S (62) (28). Estudado por Hurst, se a série de valores do nível do rio Nilo se configurasse como um passeio aleatório, o valor do desvio padrão seria igual a $\sigma_\varepsilon t^{\frac{1}{2}}$.

O Expoente de Hurst (H) fornece informações concretas sobre correlação e persistência, o que torna H um excelente índice para estudar processos complexos nomeadamente as séries temporais financeiras, estudadas neste trabalho. Os valores do Expoente de Hurst das séries temporais são estimados por intermédio do método Análise R/S (117) (39).

O valor deste expoente varia entre 0 e 1. Quanto mais distintos de 0.5, maior é a memória de longo prazo. Portanto, são processos de memória longa aqueles processos que tenham $H > 0.5$, processos persistentes, ou $H < 0.5$, processos anti-persistentes. Para $H = 0.5$ o sinal ou processo é aleatório ou ainda um Movimento Browniano. Consequentemente, a Estatística R/S , introduzida por Hurst (1951), tem como propósito testar a existência de memória longa em séries temporais.

Seja uma sequência de valores ε_t , $t \geq 1$, independentes e identicamente distribuídos (*i.i.d.*), com média μ_ε e variância σ_ε^2 . A sequência $W_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$ é definida como um passeio aleatório e também:

$$\mathbf{E}(W_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_1) + \mathbf{E}(\varepsilon_2) + \dots + \mathbf{E}(\varepsilon_t) = t\mu_\varepsilon \quad (96)$$

$$\text{Var}(W_t) = \text{Var}(\varepsilon_1) + \text{Var}(\varepsilon_2) + \dots + \text{Var}(\varepsilon_t) = t\sigma_\varepsilon^2 \quad (97)$$

onde $\mathbf{E}(\varepsilon)$ é a Esperança matemática de ε e $\text{Var}(\varepsilon)$ é a Variância de ε .

Caso a série temporal financeira se configure como um passeio aleatório, então o valor do desvio padrão é igual a $\sigma_\varepsilon t^{\frac{1}{2}}$. A estatística R/S testa a hipótese nula do expoente da variável t ser igual a $\frac{1}{2}$. Chamado de expoente H , homenagem de Mandelbrot a Hurst e ao matemático Ludwig Otto Hölder (82), pode-se definir o teste pela hipótese nula $H_0 : H = \frac{1}{2}$ e pela hipótese alternativa $H_0 : H \neq \frac{1}{2}$.

Mandelbrot (81) também desenvolveu um método para estimar o parâmetro H . Por ele, se rejeita a hipótese nula porque $H > \frac{1}{2}$ (caso de persistência) ou porque $H < \frac{1}{2}$ (caso de antipersistência).

Pode-se obter o método desenvolvido por Mandelbrot acompanhando a apresentação de Couillard (29) e abordado por Peters (106), conforme descrito a seguir.

Seja uma série temporal com N observações para intervalos iguais de tempo. Divide-se as

observações em M subperíodos com o mesmo número de observações t , de tal forma que $M \times t = N$, define-se I_m , $m = 1, 2, \dots, M$, como cada um dos M subperíodos e $N_{k,m}$, $k = 1, 2, \dots, t$, como cada elemento de determinado subperíodo. Com isso pode-se definir a média μ_{I_m} e o desvio padrão S_{I_m} de cada subperíodo como:

$$\mu_{I_m} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t N_{k,m} \quad (98)$$

$$S_{I_m} = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t (N_{k,m} - \mu_{I_m})^2} \quad (99)$$

A Partir dos valores das médias pode-se reconstruir a série original e obter uma série com M sequências I_m compostas, cada uma, por t desvios acumulados em relação a μ_{I_m} . Estes desvios acumulados são definidos conforme:

$$X_{k,m} = \sum_{k=1}^t (N_{k,m} - \mu_{I_m}), \quad (100)$$

sendo a amplitude dos desvios médios acumulados em cada sequência I_m é definida por:

$$R_{I_m} = \max(X_{k,m}) - \min(X_{k,m}) \quad (101)$$

Então a série com M valores R_{I_m} é normalizada dividindo estes valores de amplitude pelos seus correspondentes desvios padrões S_{I_m} . A média destes valores padronizados mantém a relação entre H e t . Portanto, a estatística é definida como:

$$\frac{R}{S} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{R_{I_m}}{S_{I_m}} = ct^H, \quad (102)$$

sendo c uma constante.

Para obter-se o valor de H e testá-lo deve-se calcular uma série de estatísticas R/S_t para diferentes valores de t , linearizar a igualdade $R/S_t = ct^H$ e, com isso, estimar o valor de H . Para linearizar a igualdade $R/S_t = ct^H$, basta aplicar o logaritmo:

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) = \log(c) + H \log(t) \quad (103)$$

Com tal característica, o valor de H pode ser estimado mediante uma regressão linear simples. Como R_{I_m} é sempre maior ou igual a zero e S_{I_m} é sempre maior que zero, o valor de H terá limite inferior perto de zero, dependendo do valor de c . Como R_{I_m}/S_{I_m} são somatórios de t valores normalizados, seu valor máximo tende a t e, portanto, o valor máximo de H tende a 1, dependendo de c .

A questão na realização deste teste é definir o tamanho dos subperíodos I_m de forma a conservar, para cada valor de R/S_t um número o mais próximo possível de variáveis. Também, os valores de t devem ser preferencialmente divisores inteiros de N , ou números inteiros o mais próximo possível de algum divisor do tamanho da série, de forma que a quantidade de dados excluídos possa ser mínima.

4.8.1 Método para Obtenção do Expoente de Hurst

O método utilizado para o cálculo estimado do Expoente de Hurst (H) por meio da análise R/S segue a metodologia desenvolvida Mandelbrot e Wallis (85), baseada nos trabalhos de Hurst (62) (28).

O método aqui apresentado consiste na execução das subseqüentes etapas, destacadas na apresentação de Couillard (29) e explorado por Peters (106):

- Seleção dos dados da série temporal, previamente executada para o ajuste mediante o modelo híbrido SVR-wavelet;
- Obtenção da média (E_m) e o desvio padrão (S_m) da subsérie ($Z_{i,m}$);
- Normalização dos dados da subsérie ($Z_{i,m}$) pela subtração da média das amostras $X_{i,m} = Z_{i,m} - E_m$, para $i = 1, \dots, N$;
- Geração da série de tempo acumulativa $Y_{i,m} = \sum_{j=1}^i X_{j,m}$, para $i = 1, \dots, N$;
- Obtenção da variação $R_m = \max \{Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m}\} - \min \{Y_{1,m}, \dots, Y_{n,m}\}$;
- Obtenção da estatística (R_m/S_m);
- Obtenção da médio $(R/S)_n$ da estatística (R_m/S_m) de todas as subséries de tamanho n .

Considerando-se que a Estatística R/S assintoticamente segue a relação $(R/S)_n \approx cn^H$, o valor do expoente de Hurst (H) pode ser calculado por meio de uma regressão linear simples: $\log(R/S)_n = \log c + H \log n$.

Se o processo for um movimento Browniano, H tem de ser $\frac{1}{2}$; quando H for persistente é então maior do que $\frac{1}{2}$; e quando for anti-persistente H é menor do que $\frac{1}{2}$. Para uma tendência linear simples $H = 1$ e para um ruído branco $H = 0$. Portanto H tem de estar entre 0 e 1.

4.8.2 Teste de Significância do Expoente de Hurst

Segundo Couillard e Davison (29) a maioria dos estudos falham na constatação de $H \neq \frac{1}{2}$ por não fornecerem um teste de significância. Assim, para este trabalho realiza-se o teste sugerido por Couillard e Davison, utilizando-se da estatística $p\text{-value} < 0,001$.

5 METODOLOGIA

Em um primeiro momento tem-se o desenvolvimento do modelo SVR-*wavelet* híbrido que incorpora modelos de *wavelets* e SVR, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM). A Figura 8 ilustra a proposta do modelo para predição de séries temporais por meio do modelo SVR-*wavelet* híbrido.

O próximo passo é efetuar a seleção e preparação do conjunto de ativos financeiros do tipo FOREX, obtidos a partir de uma base de conhecimento público (116). Segundo alguns autores, o tratamento de dados é considerado uma tarefa complexa, delicada e que possui fundamental relevância nos processos de análise de dados (45) (86). Esta tarefa é responsável pela eliminação de dados irrelevantes do conjunto de resultados a serem analisados que inclui desde a correção de dados até o ajuste da formatação dos dados a serem utilizados para os modelos de ajustes de séries temporais (55) (149).

Depois demonstra-se que as séries são apropriadas e favoráveis à utilização da estratégia SVR-*wavelet* híbrida. São realizados testes estatísticos como os de normalidade e de raiz unitária para se comprovar que as séries em estudo possuem distribuição não linear e também evidenciar o nível de correlação entre os períodos das séries por meio dos testes de correlação por meio do gráfico de dispersão.

A esse conjunto de ativos financeiros do tipo FOREX é aplicado o modelo proposto SVR-*wavelet* em que uma parte dos dados é selecionada e separada como dados de treino e outra parte dos dados é selecionada e separada como dados de teste.

Em seguida efetua-se o ajuste deste conjunto de ativos financeiros do tipo FOREX segundo os modelos tradicionais ARFIMA, ARIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel.

Logo depois são efetuados testes quanto a precisão dos modelos ajustados (142) (94) (127), dos quais este trabalho destaca: Erro Quadrático Médio (MSE), Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE), Erro Absoluto Médio (MAE), Erro Porcentual Médio (MPE), Erro Porcentual Absoluto Médio (MAPE), Erro Escalado Absoluto Médio (MASE), Autocorrelação de Erros para uma Defasagem (ACF1), Critério de Informação de Akaike (AIC), AIC de Segunda Ordem (AICc) e Critério de Informação Bayesiano (BIC).

Com a série ajustada pelos modelos tradicionais e pelo modelo SVR-*wavelet* realiza-se a previsão de alguns períodos à frente, comparando-se os resultados. Nesta etapa também se faz a verificação quando a aderência ao Expoente de Hurst, obtido antes e depois da previsão dos períodos à frente, por meio da estatística R/S.

Por último, desenvolve-se a análise dos resultados verificando-se também se o modelo proposto por este trabalho consegue superar a previsão efetuada pelos modelos tradicionais.

Com a completude dos testes é apresentada uma análise geral do trabalho onde se discorre

acerca dos problemas enfrentados nos testes e sua aceitação frente aos modelos tradicionais.

A Figura 9 ilustra a metodologia adotada na predição de séries temporais por meio do modelo SVR-*wavelet* híbrido.

Figura 9 - Representação da metodologia adotada na predição de séries temporais por meio do modelo SVR-*wavelet* híbrido.

6 AMBIENTE DE PROGRAMAÇÃO PARA ANÁLISE DE DADOS ESTATÍSTICOS E GRÁFICOS R

Neste capítulo são apresentadas as bibliotecas e também os métodos utilizados na aplicação do modelo híbrido *SVR-wavelet* para previsão de séries temporais financeiras, valendo-se do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47).

Embora exista uma lista suficientemente extensa de métodos que possivelmente possam ser utilizados para a aplicação do modelo proposto, percebeu-se que, durante a realização do modelo *SVR-wavelet*, elas não eram totalmente adequadas ou mesmo robustas no desenvolvimento do modelo híbrido proposto.

Com isso, uma solução composta, envolvendo o emprego da linguagem de programação *R* e o uso de determinadas bibliotecas, fez-se necessária e se mostrou mais eficiente e consistente que aquela que emprega métodos nativos do ambiente *R*.

No conjunto de programas desenvolvidos para a realização do modelo proposto estão as métricas adotadas por este trabalho, MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, incluindo o método desenvolvido por Mandelbrot (de acordo com a apresentação de Couillard) para determinação do Expoente de Hurst (*R*) por meio da Análise R/S (29), o fluxo de execução das bibliotecas e métodos em *R*, tal como a preparação dos dados FOREX selecionados.

A lista completa dos programas desenvolvidos em *R* é apresentada como anexo a este trabalho.

6.1 USO DO MÉTODO SVM

O método *svm* é utilizado para treinar a Máquina de Suporte Vetorial com o objetivo de realizar regressões não-lineares estimando um valor condicional não esperado (89). Em *R*, este método possui os seguintes parâmetros (12) (90):

svm (*formula*, *data*, *scale*, *type*, *kernel*, *gamma*, *cost*, *tolerance*, *epsilon*, *shrinking*, *fitted*)
(104)

em que *formula* é a Notação de Fórmula Estatística em *R* do modelo a ser ajustado; *data* contém as variáveis no modelo; *scale* é um vetor lógico e indica que os dados (as variáveis *x* e *y*) são tratados com média zero, $\mu = 0$, e variância unitária, $\sigma^2 = 1$; *type* é o tipo do SVM utilizado, i.e. regressão, e contém o valor *eps – regression*; *kernel* é o kernel usado no treinamento e previsão, e.g. *radial*; *gamma* é o parâmetro gama empregado em alguns kernels como o kernel *radial* (12); *cost* é a constante *C* do termo de regularização de *Lagrange*,

também aplicado em alguns kernels como o *radial* (12); *tolerance* é a tolerância do critério de término e frequentemente é 0,001 (12); *epsilon* é a função de perda ε – *insensível*, *loss function*, geralmente 0,1 (12); *shrinking* é o indicador lógico para o uso de funções de reduções e *fitted* é o valor lógico indicando se os valores ajustados devem ser calculados e incluídos no modelo.

Para o escopo deste trabalho somente são utilizados os parâmetros apresentados no parágrafo anterior. Contudo, segundo o manual de utilização da biblioteca *e1071* (90), existem muitos outros parâmetros, que podem ser melhores estudados em pesquisas futuras.

A Notação de Fórmula Estatística em *R* é ampla e com muitas variantes (54). Contudo, uma breve explicação se faz necessária. *formula* é a descrição simbólica do modelo a ser ajustado e seu formato básico é: *variável de resposta* $\sim$ *variáveis preditoras*, onde $\sim$ é lido como *é modelado como uma função das*. Consequentemente, para se efetuar a análise de uma regressão básica, o formato da *formula* seria: $Y \sim X$.

Então, pode-se ajustar um modelo por meio do *svm*, regredindo Y em X como $\text{modelo} \leftarrow \text{svm}(Y \sim X)$, onde X é a variável preditora e Y é a variável de resposta. Valendo-se da notação matemática, este modelo de regressão é apresentado como $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \omega_i$.

Variáveis explicativas adicionais podem ser incluídas usando o símbolo $+$. Para adicionar outra variável preditora Z , a *formula* é expressa como $Y \sim X + Z$; em *R* é apresentada como $\text{modelo} \leftarrow \text{svm}(Y \sim X + Z)$, produzindo uma regressão múltipla com dois preditores. A correspondente notação matemática é: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \omega_i$.

Em *R*, *data* é usado para armazenar tabelas de dados. É uma lista de vetores de igual comprimento. Se X e Z forem componentes deste tipo de estrutura de dados, a expressão $\text{modelo} \leftarrow \text{svm}(Y \sim X + Z)$ pode ser simplificada pela expressão: $\text{modelo} \leftarrow \text{svm}(Y \sim ., \text{data} = D)$, onde o símbolo $.$ indica a inclusão de todas as variáveis, no caso X e Y , contidas na lista de vetores D .

Nos exemplos expostos na Notação de Fórmula Estatística em *R* optou-se simplificar o uso do método *svm* somente como uma forma de facilitar a explicação do uso da notação. Todavia, para os testes por meio do método *svm*, todos os parâmetros previamente descritos são empregados.

6.2 USO DO MÉTODO PREDICT

O método *predict* é empregado para prever valores futuros baseando-se em modelos previamente treinados pelo método *svm* (89). Em *R* este método possui os seguintes parâmetros (12) (90):

$$\text{predict}(\text{object}, \text{newdata}) \quad (105)$$

em que *object* é o modelo criado pelo método *svm* e *newdata* é a matriz que contém os novos dados de entrada. À vista disso, usando o método *predict*, um exemplo de previsão empregando-se parte dos dados de entrada, seria: $pred \leftarrow predict(modelo, Y[, -100])$.

Um terceiro método, *tune*, pode ser empregado para se regular os parâmetros de entrada do método *svm*. Também disponível para uso na biblioteca *e1071*, o método *tune* ajusta hiperparâmetros de métodos estatísticos usando procedimentos de pesquisa sobre os parâmetros fornecidos.

6.3 USO DOS MÉTODOS WD E WR

Existem disponíveis algumas possibilidades de decomposição em coeficientes *wavelet*, das quais duas são mais frequentemente aplicadas.

A primeira delas é por meio da execução da biblioteca *wavethresh* (98). Dentre muitos métodos, esta biblioteca dispõe dos métodos *wd*, para efetuar a Transformada *wavelet*, e *wr*, para realizar o cálculo de sua Transformada Inversa.

Embora encontrem-se disponíveis alguns parâmetros para a aplicação do método *wd*, somente os parâmetros *data* e *family* são de fato importantes para este método, em conformidade com o formato (98):

$$wd(data, family) \quad (106)$$

em que *data* é um vetor de potência de 2 contendo os dados a serem decompostos e *family* define a família de *wavelet* a ser empregada nos cálculos da Transformada *wavelet*.

As possíveis famílias para o parâmetro *family* são *DaubExPhase* e *DaubLeAsymm* para as *wavelets* *Daubechies*, *Coiflets* para as *wavelets* *Coiflets*, *Lawton* para as *wavelets* *Lawton*, *LittlewoodPaley* para as *wavelets* *Littlewood – Paley* e *LinaMayrand* para as *wavelets* *Lina – Mayrand – Daubechies* (98).

Sua inversa, o método *wr*, tem como parâmetro a Transformada *wavelet* (98):

$$wr(wd) \quad (107)$$

Diante disso, um exemplo da aplicação da Transformada *wavelet* e de sua Transformada inversa, empregando-se os dados de entrada como um vetor de potência 2 e recorrendo-se do uso da *wavelet* *Daubechies* *DaubExPhase*, seria: $wavelet \leftarrow wd(vetor.p2, family = "DaubExPhase")$ e $vetor.p2 \leftarrow wr(wavelet)$.

6.4 USO DOS MÉTODOS WAVMODWT E RECONSTRUCT

Outra possibilidade para decomposição em coeficientes *wavelet*, valendo-se do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), é através do uso da biblioteca *wmtsa* (23). Esta biblioteca possui os métodos *wavMODWT*, para efetuar a Transformada *wavelet* Discreta de Máxima Sobreposição (MODWT), e *reconstruct*, para realizar o cálculo de sua Transformada inversa (23), escopo do estudo deste trabalho.

Apesar de haver múltiplos parâmetros para a aplicação do método *wavMODWT*, não mais que quatro parâmetros são necessários e significativos para o uso deste método, de acordo com o modelo (23):

$$\text{wavMODWT}(\text{data}, \text{wavelet} = \text{"family"}, \text{n.level} = \text{integer}, \text{keep.series} = \text{boolean}) \quad (108)$$

em que *data* é o vetor contendo a série temporal, *wavelet* qualifica a família *wavelet*, *n.level* estabelece o número de níveis de decomposição e *keep.series*, com os valores lógicos *TRUE* ou *FALSE*, indicando a preservação da série original como um objeto de saída.

Para este método as prováveis famílias *wavelets* aplicáveis são (111) (30):

- *daublet*: "haar", "d2", "d4", "d6", "d8", "d10", "d12", "d14", "d16", "d18" e "d20";
- *symmlet*: "s2", "s4", "s6", "s8", "s10", "s12", "s14", "s16", "s18" e "s20";
- *Best Localized (BL)*: "l2", "l4", "l6", "l14", "l18" e "l20"; e
- *coiflet*: "c6", "c12", "c18", "c24" e "c30".

em que o número de índice refere-se ao número de coeficientes.

Sua inversa, calculada pelo método *reconstruct*, apenas possui um parâmetro, a Transformada *wavelet* gerada por uma das classes *wavTransform* da biblioteca *wmtsa*, no caso *wavMODWT* (23):

$$\text{reconstruct}(\text{wavMODWT}) \quad (109)$$

Segundo Cornish (26), o MODWT oferece vantagens sobre a Transformada de *Wavelet* Discreta (DWT). A redundância do MODWT facilita o alinhamento dos componentes de frequência e escala, decompostos em cada nível da série temporal original, permitindo uma comparação imediata entre a série e sua decomposição. As Análises de Variância (ANOVA), procedentes do uso do MODWT, não são influenciadas pelo deslocamento, mesmo circular, das séries temporais de entrada, enquanto que os valores obtidos utilizando-se o DWT dependem do ponto de partida da série. Finalmente, a redundância dos coeficientes da *wavelet* MODWT

aumenta os Graus de Liberdade Efetivos (EDOF) em cada escala e, conseqüentemente, diminui a variância de certas estimativas estatísticas baseadas em *wavelets*. Pela característica do MODWT em conservar a energia, ele também é adequado para analisar a dependência de escala da variabilidade em estudos de ANOVA.

Isso posto, um exemplo da aplicação da MODWT e sua Transformada inversa, para decomposição em coeficientes *wavelet* através da utilização dos métodos *wavMODWT* e *reconstruct*, valendo-se dos dados de entrada e servindo-se do uso da *wavelet daublet haar* ou *d2*, seria: $wavelet \leftarrow wavMODWT(data, wavelet = "haar", n.level = 5, keep.series = TRUE)$ e $data \leftarrow reconstruct(wavelet)$.

6.5 USO DO MÉTODO THRESHOLD

Para efetuar a eliminação de ruídos, por meio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*, o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47) dispõe de algumas bibliotecas.

Os métodos *denoise.dwt.2d* e *denoise.modwt.2d*, encontrados na biblioteca *waveslim* (46), são adequados no tratamento de ruídos contidos em imagens.

Já a biblioteca *rwt* (121), com seu método *denoise.dwt*, e a biblioteca *wavethresh* (99), com seu método *threshold*, se manifestam mais apropriadas no tratamento de ruídos contidos em séries financeiras. Contudo, efetuando-se a reconstrução da série original e comparando os erros quadráticos médios (MSE) gerados, o método *threshold* se mostrou mais aderente às séries financeiras do que o método *denoise.dwt*.

Dessa forma, este trabalho emprega o método *threshold*, acessível por intermédio da biblioteca *wavethresh*, para a eliminação de ruídos, possivelmente contidos nas séries financeiras do tipo FOREX, por meio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*, conforme os parâmetros (100):

$$threshold(object) \quad (110)$$

em que *object* é a Transformada de Wavelet Discreta (DWT) da série original.

6.6 USO DOS MÉTODOS SARIMA E SARIMA.FOR

Em *R*, servindo-se da biblioteca *astsa* (127), é possível ajustar séries temporais ao modelo ARIMA mediante à aplicação do método *sarima*, bem como realizar previsões *n* passos à frente de séries temporais através de seu método *sarima.for*.

Dentro dos possíveis parâmetros utilizáveis em *R* o método *sarima* dispõe de quatro principais parâmetros (127):

$$\text{sarima}(\text{object}, p, d, q) \quad (111)$$

em que *object* é a série original a ser modelada e *p*, *d*, *q* são os parâmetros de ordem do modelo ARIMA.

Sendo assim, operando o método *sarima*, um exemplo de ajuste empregando-se dos dados de entrada seria $\text{prices.fit.sarima} \leftarrow \text{sarima}(\text{prices.ts}, 1, 0, 1)$, onde *prices.ts* é a série original a ser modelada através do modelo ARIMA, e 1, 0, 1 é a ordem do modelo.

Há uma variedade de parâmetros acessíveis em *R* para o método *sarima.for*. Apesar disso, cinco parâmetros são ademais relevantes (127):

$$\text{sarima.for}(\text{object}, n.\text{ahead}, p, d, q) \quad (112)$$

em que *object* é a série temporal inicial, *n.ahead* é o número de períodos para previsão e *p*, *d*, *q* são os parâmetros de ordem do modelo ARIMA. Pois então, *sarima.for*, um exemplo de previsão de *n* passos à frente empregando-se a série original, seria $\text{prices.pred.sarima} \leftarrow \text{sarima.for}(\text{prices.ts}, n.\text{ahead} = 1, 1, 0, 1)$, no qual *prices.pred.sarima* é o objeto contendo os *n* — ésimos pontos preditos, *n* passos à frente, *prices.ts* é o vetor contendo a série temporal originária, e *n.ahead* = 1 é o número de períodos para previsão, que neste exemplo é 1, *h* = 1, um passo à frente.

6.7 USO DOS MÉTODOS ARFIMA E FORECAST

Valendo-se do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), provida da biblioteca *forecast* (63), é possível ajustar séries temporais mediante à aplicação do método *arfima* bem como realizar previsões *n* passos à frente de séries temporais ou modelos de séries temporais, através de seu método *forecast*.

Dentro dos variados parâmetros disponíveis em *R* o método *arfima* dispõe de três principais parâmetros (63):

$$\text{arfirma}(\text{object}, \text{drange}, \text{estim}) \quad (113)$$

em que *object* é a série original a ser modelada, *drange* permite que sejam considerados os valores *d*, tendo como padrão $\text{drange} = c(0, 0.5)$ o que garante ajustes de modelos estacionários, e $\text{estim} = c("mle")$ para ajustes de modelos através da Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE).

À vista disso, um exemplo de ajuste empregando-se dos dados de entrada, seria:

$prices.fit.arfima \leftarrow arfima(prices.ts, drange = c(0, 0.5), estim = c("mle"))$.

Entre os diversos parâmetros acessíveis em *R* o método *forecast* possui dois parâmetros relevantes (63):

$$forecast(object, h) \quad (114)$$

em que *object* é a série temporal ou o modelo para o qual a previsão é requerida e *h* é o número de períodos para previsão. Diante disso, um exemplo de previsão de *n* passos à frente empregando-se a série original seria $prices.fcast.arfima \leftarrow forecast(prices.fit.arfima, h = 1)$, no qual *prices.fcast.arfima* é o objeto contendo os *n* – ésimos pontos preditos, *n* passos à frente, *prices.fit.arfima* é o vetor contendo o modelo de série temporal e *h* é o número de períodos para previsão, (*h* = 1), um passo à frente.

6.8 USO DO MÉTODO GARCHFIT

Com suas bibliotecas em *R*, em particular a biblioteca *fGarch* (142), é possível ajustar as séries temporais mediante a aplicação do método *garchFit*, bem como realizar previsões *n* passos à frente de séries temporais através do método *predict*, especificado na última seção.

Em *R*, o método *fGarch* possui os seguintes parâmetros relevantes para este trabalho:

$$garchFit(formula = \sim garch(1, 1), data = data\ object, trace = boolean) \quad (115)$$

em que *formula* é a Notação de Fórmula Estatística em *R* do modelo a ser ajustado, *data* contém as variáveis no modelo e *trace* possibilita a impressão imediata de dados estatísticos do modelo.

Um exemplo de ajuste por meio do método *garchFit* aplicado aos dados de entrada, seria $prices.fit.garch \leftarrow garchFit(prices \sim garch(1, 1), data = prices.data, trace = FALSE)$, em que *prices* e *prices.data* contém a série original a ser modelada através do modelo GARCH, e *trace* = *FALSE* desabilita a imediata impressão de dados estatísticos do modelo.

Usando o método *forecast*, um exemplo de previsão de *n* passos à frente empregando-se a série original, seria $prices.pred.garch \leftarrow forecast(prices.fit.garch, h = 1)$, no qual *prices.pred.garch* é o objeto contendo os *n* – ésimos pontos preditos, *n* passos à frente, *prices.fit.garch* é o vetor contendo o modelo de série temporal, e *h* é o número de períodos para previsão, neste exemplo é um passo à frente.

7 APLICAÇÃO DO MODELO SVR-WAVELET

Apresentação e aplicação do método proposto conforme a metodologia apresentada neste trabalho.

7.1 SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS SÉRIES TEMPORAIS DO TIPO FOREX

O mercado de câmbio FOREX, *Foreign Exchange Market* (116), é um mercado global para a negociação descentralizada de moedas. Em termos de volume de negociação, é de longe o maior mercado do mundo. Os principais participantes deste mercado são os maiores bancos internacionais. São eles os responsáveis pela definição dos valores relativos das diferentes moedas.

A atual estrutura do mercado FOREX evoluiu a partir das taxas de câmbio flutuantes. Os pares de moedas mais negociados no mercado à vista FOREX hoje são (114): 27% EUR-USD, 13% USD-JPY e 12% GBP-USD. Um fato importante é que desde a criação da moeda única europeia, em janeiro de 1999, o comércio de Euro cresceu consideravelmente. O mercado FOREX negocia cinco dias por semana sem parar e é influenciado por muitos fatores econômicos e geopolíticos, como a balança de pagamentos em cada país, a balança comercial, as políticas fiscal e monetária, a estabilidade política e a solidez de crédito dos governos. Os principais centros FOREX são Nova York, Londres, Singapura, Tóquio e Hong Kong.

Para este trabalho foram selecionadas cinco séries temporais financeiras do tipo FOREX. São utilizadas as seguintes relações entre moedas globalizadas:

- Dólar Australiano (AUD) e Yen Japonês (JPY);
- Franco Suíço (CHF) e Yen Japonês (JPY);
- Euro (EUR) e Franco Suíço (CHF);
- Euro (EUR) e Yen Japonês (JPY); e
- Libra Britânica (GBP) e Yen Japonês (JPY).

Os ativos FOREX listados são séries temporais que compõem históricos de preços de moedas entre o período de 01/01/2003 a 30/12/2014, com periodicidade de 1 em 1 minuto, obtidos a partir da base de conhecimento público (116).

É criado um *framework*, desenvolvido em Visual Studio .NET, Framework 4.6.2 (59), 64-bits, Ambiente *Windows*, para geração e seleção de três novas periodicidades para execução

dos testes deste trabalho, totalizando uma quantidade ao redor de 3000 valores por série gerada e selecionada, a saber:

- Série temporal com dados selecionados com intervalos de 1 em 1 dia;
- Série temporal com dados selecionados com intervalos de 1 em 1 hora; e
- Série temporal com dados selecionados com intervalos de 15 em 15 minutos, conforme fontes de programação anexos a este trabalho.

Com relação aos períodos destacados das séries, obtidos a partir da base de conhecimento público (116), originalmente com periodicidade de 1 em 1 minuto, são efetuadas seleções aleatórias de períodos contínuos de dados para os intervalos de 1 em 1 hora, de 15 em 15 minutos e para os intervalos de 1 em 1 dia. Este procedimento tem por objetivo garantir que o método adotado neste trabalho possa ser testado e validado com imparcialidade contra períodos distintos de datas.

A partir daí, as séries de dados temporais são tratadas para eliminação de dados irrelevantes do conjunto de resultados a serem processados, o que inclui desde a correção de dados até o ajuste da formatação dos dados para os algoritmos de mineração de dados que serão utilizados, representando a fase principal do KDD (*Knowledge Discovery in Databases*) (79).

Para tratamento do conjunto de dados dos ativos financeiros do tipo FOREX, com suporte as fases do KDD - Descoberta de Conhecimento em Bases de Dados, assegurando assim a qualidade, completude, veracidade e integridade dos fatos por eles representados, é utilizado uma função chamada de Tunelamento de Preços, desenvolvida usando-se o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos R (47), versão 3.3.2 de 31/10/2016, utilizando a plataforma *mac OS* ©, processador *3.3 GHz Core i7*, com *16 GB* de memória.

O algoritmo desta função tem por objetivo verificar distorções nos preços de um dado período da série, por meio de uma variação percentual ΔP_t do valor atual do preço P_t em relação ao preço anterior P_{t-1} . Normalmente esta variação percentual ΔP_t , adotada nos mercados financeiros, não é superior a 5% do preço atual P_t tanto para cima como para baixo em relação ao preço anterior P_{t-1} .

Assim a variação ΔP_t , respeitando-se o túnel de preços, é expressa por:

$$0.95 < \Delta P_t < 1.05 \quad (116)$$

Se o preço atual P_t estiver fora to túnel de preços o algoritmo gera um preço P_t aleatório, a partir do preço anterior P_{t-1} , respeitando os limites do túnel de preços.

Foram amostrados 3009 pontos por série histórica dos preços do ativo FOREX, gerados com periodicidades de 1 em 1 dia, 1 em 1 hora e 15 em 15 minutos, respectivamente para os períodos de: 01/01/2003 a 30/12/2014, 07/11/2012 a 06/05/2013 e 15/03/2012 a 29/04/2012.

A Figura 10 apresenta os gráficos contendo as séries históricas dos preços do ativo FOREX AUD-JPY com periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, com a aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série. Somente os últimos 2048 pontos são amostrados.

Figura 10 - Gráficos contendo as séries históricas dos preços do ativo FOREX AUD-JPY com periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, com a aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série. Somente os últimos 2048 pontos são amostrados.

7.2 TESTES DE NORMALIDADE, RAIZ UNITÁRIA E DE NÃO-LINEARIDADE

Anteriormente a construção de qualquer modelo, os dados devem ser avaliados para se constatar se as séries a serem estudadas são apropriadas para utilização. Para o uso desses conjuntos de dados do tipo FOREX, faz-se necessário testar suas características de não-linearidade e não-estacionariedade aplicando-se alguns testes estatísticos, como o teste de Anderson-Darlin, o teste de Smirnov-Cramer-Von Mises, o teste de Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov), o teste de Qui-quadrado de Pearson, o teste de Mickey-Fuller e o teste de Elliott-Rothenberg. São também apresentados outros testes estatísticos como AIC, AICc e o BIC, bem como testes de Raiz Unitária e de Correlação.

Foram usadas as séries temporais que compõem históricos de preços de moedas, um conjunto de ativos financeiros de taxas de câmbio, obtidos a partir de uma base de conhecimento público (116), entre o período de 01/01/2003 a 30/12/2014, para as relações entre as moedas: Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY), Franco Suíço (CHF) e o Yen Japonês (JPY), Euro (EUR) e o Franco Suíço (CHF), Euro (EUR) e o Yen Japonês (JPY), e a Libra Britânica (GBP) e o Yen Japonês (JPY), com periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia.

Os testes foram efetuados usando-se o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), versão 3.3.2 de 31/10/2016, utilizando a plataforma *mac OS*®, processador *3.3 GHz Core i7*, com *16 GB* de memória e suas bibliotecas *nortest*, *astsa* e *tseries* para os testes de Normalidade. A biblioteca *tseries* também foi utilizada para os testes de Raiz Unitária e de Não-Linearidade.

Para a montagem e execução dos testes foram adotados alguns passos de acordo com que está exibido na Figura 11 com o macro fluxograma das principais tarefas no processo de montagem e execução dos testes.

Figura 11 - Macro fluxograma das principais tarefas no processo de montagem e execução dos testes.

São apresentados os resultados para os testes de Normalidade para uma distribuição não linear, conforme métodos expostos neste trabalho.

Primeiramente empregando-se os métodos para testes de Normalidade, depois operando-se com os métodos para testes de Raiz Unitária e na sequência efetuando-se os testes de Não-Linearidade.

Dessa forma, a Tabela 2 sumariza os resultados encontrados, empregando-se os métodos Anderson-Darling (AD), Cramer-von Mises (CVM), (Lilliefors) Kolmogorov-Smirnov (LKS), Pearson chi-square (PCS), Shapiro-Francia (SF), Shapiro-Wilk (SW) e Jarque-Bera (JB) para testes de Normalidade.

Observa-se pela Tabela 2 que para as séries AUD-JPY, CHF-JPY, EUR-CHF, EUR-JPY e GBP-JPY, com as periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, o p-value experimentado é muito pequeno, $p < 0,01$, representando então uma evidência muito forte contra H_0 , o que leva a sua rejeição e a aceitação da hipótese alternativa. Decorre-se assim que as séries apresentadas para estudo deste relatório possuem uma distribuição não linear.

Tabela 2 - Resultados dos p-values dos métodos para testes de Normalidade.

Série/Métodos	AD	CVM	LKS	PCS	SF	SW	JB
AUDJPY 15 min.	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	1.544e-12	4.145e-14	3.037e-10
AUDJPY 1 hora	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	4.552e-13	1.089e-14	1.638e-10
AUDJPY 1 dia	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	6.003e-14	1.182e-15	2.492e-12
CHFJPY 15 min.	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	6.402e-13	2.492e-14	0.0001535
CHFJPY 1 hora	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	4.173e-10	2.699e-11	1.994e-06
CHFJPY 1 dia	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
EURCHF 15 min.	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
EURCHF 1 hora	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
EURCHF 1 dia	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
EURJPY 15 min.	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	1.224e-14	<2.2e-16	6.162e-14
EURJPY 1 hora	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	2.222e-14	3.651e-16	6.078e-06
EURJPY 1 dia	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
GBPJPY 15 min.	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16
GBPJPY 1 hora	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	8.706e-14	1.893e-15	1.514e-07
GBPJPY 1 dia	<2.2e-16	<7.37e-10	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16

Depois foram empregados os métodos para testes de Raiz Unitária Augmented Dickey-Fuller (ADF), Phillips-Perron (PP) e KPSS. Os resultados dos testes de Raiz Unitária são exibidos na Tabela 3.

Constata-se pela Tabela 3 que para as séries AUD-JPY, CHF-JPY, EUR-CHF, EUR-JPY e GBP-JPY, com as periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, os p-values experimentados são de $0,10 < p$, configurando-se como pouca ou nenhuma evidência real contra H_0 , exceto pela métrica KPSS onde os p-values estão muito mais próximos daqueles caracterizados como uma evidência moderada contra H_0 , $0,01 \leq p < 0,05$, o que também, como nas duas outras métricas, ADF e PP, leva a sua aceitação e a rejeição da hipótese alternativa de que as séries são estacionárias. Dessa maneira, sucede-se que as séries apresentadas para estudo deste relatório possuem uma distribuição não estacionária.

Tabela 3 - Resultados dos p-values dos métodos para testes de Raiz Unitária.

Série/Métodos	ADF	PP	KPSS
AUDJPY 15 min.	0.2653	0.3947	0.01
AUDJPY 1 hora	0.4905	0.6681	0.01
AUDJPY 1 dia	0.2443	0.3216	0.01
CHFJPY 15 min.	0.4801	0.5153	0.01
CHFJPY 1 hora	0.5467	0.7296	0.01
CHFJPY 1 dia	0.6391	0.7691	0.01
EURCHF 15 min.	0.4647	0.01	0.01
EURCHF 1 hora	0.7099	0.2396	0.01
EURCHF 1 dia	0.1756	0.02661	0.01
EURJPY 15 min.	0.1589	0.0727	0.01
EURJPY 1 hora	0.2651	0.4253	0.01
EURJPY 1 dia	0.7185	0.8215	0.01
GBPJPY 15 min.	0.6029	0.5828	0.01
GBPJPY 1 hora	0.4999	0.6461	0.01
GBPJPY 1 dia	0.6409	0.716	0.01

Em seguida foram aplicados os métodos para testes de Não-Linearidade Terasvirta Neural Network (TNN) e White Neural Network (WNN). Os resultados dos testes de Não-Linearidade são retratados na Tabela 4.

Nota-se pela Tabela 4 que para as séries AUD-JPY, CHF-JPY, EUR-CHF, EUR-JPY e GBP-JPY, com as periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia, os p-values experimentados são de $0,10 < p$, configurando-se como pouca ou nenhuma evidência real contra H_0 , o que induz na sua aceitação e na rejeição da hipótese alternativa. À vista disso, verifica-se que as séries identificadas no estudo deste relatório se mostram claramente não lineares.

Tabela 4 - Resultados dos p-values dos métodos para testes de Não-Linearidade.

Série/Métodos	TNN	WNN
AUDJPY 15 min.	0.5242	0.5206
AUDJPY 1 hora	0.7144	0.8683
AUDJPY 1 dia	0.0724	0.1635
CHFJPY 15 min.	2.03e-07	1.31e-06
CHFJPY 1 hora	0.0350	0.0885
CHFJPY 1 dia	0.8109	0.8714
EURCHF 15 min.	1.0000	1.0000
EURCHF 1 hora	0.6017	0.6017
EURCHF 1 dia	9.33e-04	0.2314
EURJPY 15 min.	0.01728	0.0463
EURJPY 1 hora	0.5579	0.5147
EURJPY 1 dia	0.4749	0.4962
GBPJPY 15 min.	0.0830	0.0773
GBPJPY 1 hora	0.3483	0.5007
GBPJPY 1 dia	0.4797	0.4674

7.3 TESTES DE CORRELAÇÃO PELO GRÁFICO DE DISPERSÃO

Valendo-se das séries temporais de taxas de câmbio (116), apresentadas nos Testes de Normalidade, Raiz Unitária e de não-linearidade, e empregando-se novamente do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47) e sua biblioteca *astsa*, realizou-se a execução dos Testes de Correlação servindo-se do método *lag1.plot* o qual fornece uma grade de gráficos de dispersão das séries em contraste com os valores defasados das séries.

A finalidade deste teste é comprovar se as defasagens das séries estudadas, $t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}, \dots, t_{-n}$, possuem correlação fraca ou mesmo não são relacionadas entre si.

A Figura 12 apresenta o gráfico de dispersão para a série temporal de relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos.

Para os testes de correlação entre as defasagens das séries examinadas, por intermédio do método *lag1.plot*, somente se levou em consideração as primeiras nove defasagens, $t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}, \dots, t_{-9}$, visto que se constatou que mesmo nas primeiras defasagens, t_{-1}, t_{-2} e t_{-3} , a correlação entre as defasagens das séries eram muito fraca.

Foram efetuados os testes de correlação em todos os períodos das séries AUD-JPY, CHF-

Figura 12 - Gráfico de dispersão para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

JPY, EUR-CHF, EUR-JPY e GBP-JPY, com as periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia. Todas elas apresentaram o mesmo padrão de correlação entre as defasagens, ou seja, possuem uma correlação fraca ou mesmo não são relacionadas entre si.

7.4 AJUSTES POR MEIO DO MODELO SVR TRADICIONAL COM KERNEL

O modelo SVR tradicional com Kernel mostra-se apropriado para resolver problemas de estimação não lineares de regressão, sendo uma alternativa adequada para previsão de dados não-lineares.

Mapeando-se um conjunto de treinamento de seu espaço original para um novo espaço de dimensão maior, o SVM e seu regressor SVR têm a habilidade de lidar com problemas não lineares (58) por meio do uso de funções *Kernels*: $K(x_t, x_i) = \Phi(x_t) \Phi(x_i)$ (60).

Para os justes por meio do modelo SVR tradicional com Kernel optou-se pela utilização do *Kernel* Gaussiano (RBF): $K(x_t, x_i) = \exp(-\sigma \|x_t - x_i\|^2)$ (131).

Para se criar um modelo SVR usando-se o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), com a sua biblioteca *e1071* (90), adotou-se sobretudo dois

métodos: *svm* e *predict*.

7.4.1 Aplicação do Método SVR tradicional com Kernel em R

O método *svm* é utilizado para treinar a Máquina de Suporte Vetorial para realizar regressões não-lineares estimando um valor condicional não esperado, enquanto que o método *predict* é aplicado para prever valores futuros, previamente treinados pelo método *svm*. Também um terceiro método, *tune*, pode ser empregado para se regular os parâmetros de entrada do método *svm*.

A Figura 13 apresenta o gráfico da série prevista, gerada por meio dos métodos *svm* e *pred*, com seus pontos marcados com pequenos xis (×) azuis, sobreposto à série original, marcada com pequenos círculos (●) pretos em seus pontos, para a relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos.

Figura 13 - Gráficos sobrepostos da série prevista (×), obtido por meio dos métodos *svm* e *predict*, e da série original (●) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

7.4.2 Qualidade da Previsão por meio do Modelo SVR tradicional com Kernel

Analisando-se os gráficos sobrepostos, observa-se que a previsão efetuada foi adequada, que é comprovada pelas métricas adotadas.

As métricas Erro Quadrático Médio (MSE), Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE), Erro Absoluto Médio (MAE), Erro Porcentual Médio (MPE), Erro Porcentual Absoluto Médio (MAPE), Erro Escalado Absoluto Médio (MASE), Autocorrelação de Erros para uma Defasagem (ACF1), Critério de Informação de Akaike (AIC), AIC de Segunda Ordem (AICc) e Critério de Informação Bayesiano (BIC) são aplicadas com o propósito de medir a qualidade do modelo (142) (94) (127).

As Tabelas 5 e 6 sintetizam os resultados encontrados, com o intuito de se aferir a qualidade do modelo apresentado por intermédio dos métodos *svm* e *predict*.

Tabela 5 - Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo SVR tradicional com Kernel.

Série/Métodos	MSE	RMSE	MAE	MPE	MAPE
AUDJPY 15 min.	-0.00016993720	0.04917307000	0.03522102000	-0.00016929760	0.04196051000
AUDJPY 1 hora	0.00317499000	0.16157420000	0.11929530000	0.00338283800	0.11881740000
AUDJPY 1 dia	-0.00089911060	0.57459460000	0.41281460000	0.00278828700	0.47088310000
CHFJPY 15 min.	-0.00438221400	0.10703260000	0.05915611000	-0.00498914300	0.06676004000
CHFJPY 1 hora	-0.00358073200	0.08923372000	0.06850564000	-0.00397893400	0.07808360000
CHFJPY 1 dia	0.01369226000	0.76593830000	0.58791300000	0.01751008000	0.60531530000
EURCHF 15 min.	-0.00024552390	0.00154972200	0.00066504020	-0.01579134000	0.04277633000
EURCHF 1 hora	0.00005907420	0.00143734900	0.00071705390	0.00383386800	0.04636850000
EURCHF 1 dia	-0.00024107200	0.00767428300	0.00419220500	-0.02051068000	0.34561970000
EURJPY 15 min.	0.00138731600	0.06934656000	0.05281129000	0.00107364300	0.03951979000
EURJPY 1 hora	-0.00273741900	0.06440713000	0.04906748000	-0.00195126800	0.03548949000
EURJPY 1 dia	0.00852138300	0.81944750000	0.67583740000	0.01344046000	0.56702870000
GBPJPY 15 min.	0.00101734700	0.04542055000	0.03567964000	0.00086960470	0.02994245000
GBPJPY 1 hora	0.04598120000	0.50084810000	0.39570810000	0.02345161000	0.20355450000
GBPJPY 1 dia	0.02547556000	1.00168800000	0.83649770000	0.02494798000	0.58638860000

Tabela 6 - Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo SVR tradicional com Kernel.

Série/Métodos	MASE	ACF1	AIC	AICc	BIC
AUDJPY 15 min.	1.39586200000	0.75221	-3255.428	-3255.404	-3235.702
AUDJPY 1 hora	1.72473200000	0.79459	-819.089	-819.065	-799.363
AUDJPY 1 dia	1.57735400000	0.83628	1779.209	1779.232	1798.935
CHFJPY 15 min.	1.55772500000	0.70681	-1662.520	-1662.496	-1642.794
CHFJPY 1 hora	1.51748200000	0.76054	-2034.998	-2034.975	-2015.272
CHFJPY 1 dia	2.06830800000	0.84266	2367.879	2367.903	2387.605
EURCHF 15 min.	2.61667800000	0.46447	-10335.920	-10335.890	-10316.190
EURCHF 1 hora	2.82133100000	0.39520	-10490.080	-10490.060	-10470.360
EURCHF 1 dia	1.43546200000	0.65876	-7059.529	-7059.506	-7039.803
EURJPY 15 min.	1.67535200000	0.82285	-2551.386	-2551.363	-2531.660
EURJPY 1 hora	1.64381700000	0.78528	-2702.717	-2702.694	-2682.991
EURJPY 1 dia	2.02889900000	0.85889	2506.178	2506.202	2525.904
GBPJPY 15 min.	1.71375800000	0.77196	-3418.001	-3417.978	-3398.275
GBPJPY 1 hora	1.87251300000	0.76520	1497.892	1497.915	1517.617
GBPJPY 1 dia	2.33357300000	0.89099	2917.440	2917.463	2937.166

7.5 AJUSTES POR WAVELET: TRANSFORMADA E INVERSA

Para se decompor uma série em coeficientes *wavelet* mediante o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), com a sua biblioteca *wavethresh* (98), e posterior recomposição das séries originais, este trabalho se valeu de dois métodos: *wd* e *wr*.

7.5.1 Aplicação da Transformada wavelet e sua Inversa em R

O método *wd* é utilizado para efetuar a transformada *wavelet*, enquanto que o método *wr* é aplicado para executar a transformada *wavelet* Inversa.

Somente com o propósito de ilustração das qualidades de representação da transformada *wavelet*, a Figura 14 expõe o gráfico da série original com seus pontos marcados com pequenos círculos (○) azuis, e sua Transformada *wavelet* inversa, marcada com pequenos xis (×) vermelhos em seus pontos, gerada por meio dos métodos *wd* e *wr*, sobreposta à série original para a relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos.

Figura 14 - Gráficos sobrepostos da série original (○) e sua Transformada *wavelet* inversa (×) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

7.5.2 Qualidade da Transformada *wavelet* e sua Inversa

Analisando-se os gráficos sobrepostos, observa-se que a Transformada *wavelet* inversa é muito semelhante, senão idêntica à série original. Por certo esta característica ou mesmo esta similitude entre os gráficos já era esperada, senão toda formulação do modelo híbrido SVR-*wavelet*, valendo-se de *wavelets*, não teria sentido.

Assim, somente a título de dilucidação, efetuando-se algumas métricas entre os pontos das séries originais e suas Transformadas *wavelet* inversas chega-se a medidas muito pequenas, como por exemplo a $RMSE = 3.449136e - 09$, o que já era previsível.

7.6 AJUSTES POR WAVELET MODWT UTILIZANDO A WAVELET HAAR

Outra possibilidade para se decompor uma série em coeficientes *wavelet*, através da aplicação do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), com a sua biblioteca *wmtsa* e posterior recomposição da série original, é pela utilização dos métodos *wavMODWT* e *reconstruct*.

7.6.1 Aplicação da wavelet MODWT e sua Inversa em R

O método *wavMODWT* é usado para efetuar a Transformada *wavelet* Discreta de Máxima Sobreposição (MODWT), à medida que o método *reconstruct* é utilizado para realizar o cálculo de sua Transformada inversa, escopo do estudo deste trabalho.

Novamente, meramente com o intuito de elucidação das propriedades de representação da transformada *wavelet* MODWT, a Figura 15 exibe o gráfico da série original com seus pontos destacados com pequenos triângulos ($\triangle$) azuis, e sua Transformada *wavelet* MODWT inversa, destacados com pequenos losangos ($\diamond$) vermelhos em seus pontos, obtida por meio dos métodos *wavMODWT* e *reconstruct*, sobreposta à série original para a relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos.

Figura 15 - Gráficos sobrepostos da série original ($\triangle$) e sua Transformada *wavelet* MODWT inversa ($\diamond$) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

7.6.2 Qualidade da wavelet MODWT e sua Inversa

Averiguando-se os gráficos justapostos, constata-se que a Transformada *wavelet* MODWT inversa é análoga, senão equivalente à série original. Como previamente clarificado na seção que aludiu à Transformada *wavelet* e sua Inversa, esta identidade ou mesmo esta similaridade

entre os gráficos já era esperada, caso contrário toda concepção e elaboração do modelo híbrido SVR-wavelet, beneficiando-se das wavelets, não teria aceção.

Ademais, unicamente a título de esclarecimento, realizando-se algumas medidas entre os pontos das séries originais e suas Transformadas *wavelet* MODWT inversas chega-se à dimensões muito pequenas. Deveras, a $RMSE = 1.424281e - 13$, o que já era aguardada.

7.7 A DECOMPOSIÇÃO EM WAVELETS

O princípio da análise *wavelet* é a de expressar ou aproximar um sinal ou função por uma família de funções geradas por dilatações e translações de um *wavelet* mãe.

Depois da execução dos testes com o método *wavMODWT* obteve-se novas séries como resultado da decomposição dos componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 .

Pode-se comprovar a decomposição produzida pela somatória dos valores de cada componente, que deve ser igual ao valor original da série.

Tomando-se como exemplo o primeiro componente de cada detalhe, d_1 a d_5 , e o correspondente componente de aproximação, s_5 , com a aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série, todos com índice [1], e o primeiro valor da série original, constata-se sua soma e igualdade, conforme:

- $prices.modwt\$data\$d1[1] = 0.0112905004969619$,
- $prices.modwt\$data\$d2[1] = 0.00883984638146273$,
- $prices.modwt\$data\$d3[1] = -0.0129682480685034$,
- $prices.modwt\$data\$d4[1] = -0.0605947777243614$,
- $prices.modwt\$data\$d5[1] = -0.00706702507418555$,
- $prices.modwt\$data\$s5[1] = 84.0763590584155$ e
- $prices2.ts[1] = 84.015859$

onde *prices.modwt* é a variável de saída do método *wavMODWT*, *data* são os componentes obtidos, contento os valores de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , e *prices2.ts* é o vetor contendo a série original, tal que:

$$[(0.0112905004969619) + (0.00883984638146273) + (-0.0129682480685034) + (-0.0605947777243614) + (-0.00706702507418555) + (84.0763590584155)] = 84.015859.$$

A decomposição dos componentes de aproximação e detalhes por intermédio da Transformada *wavelet* MODWT, para a relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos, é exposta na Figura 16, em que também é apresentada, no topo da Figura, a série original.

Figura 16 - Componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , decompostos pela MODWT, para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

Percebe-se, pelos pontos das séries obtidas como resultado da decomposição dos componentes de aproximação, s_5 , e os detalhes, d_1 a d_5 , que a distribuição de energia está concentrada no componente de aproximação, s_5 , em concordância com que é exibido na Figura 17, pelos gráficos de Distribuição de Energia e seu equivalente Box Plot.

Figura 17 - Gráfico de Distribuição de Energia e seu equivalente Box Plot dos componentes de aproximação e detalhes, respectivamente $s5$ e $d1$ a $d5$, decompostos pela MODWT, para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

7.8 MODELO HÍBRIDO SVR-WAVELET - AJUSTES E PREVISÃO DOS COMPONENTES WAVELETS

As *wavelets* possibilitam a eliminação de ruídos por meio de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*. Por intermédio da transformada *wavelet*, uma parte do ruído é removida da série original antes da extração de atributos ([129]). A técnica de *wavelet denoising* tenta transformar $y(n)$ novamente em $x(n)$, ou pelo menos em um sinal similar, como pode ser percebido na Figura [18], que ilustra a decomposição da série para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos, através da Transformada *wavelet* MODWT, com suas componentes de aproximação e detalhes, respectivamente $s5$ e $d1$ a $d5$, em comparação com a aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série.

Pelos gráficos apresentados na Figura [18], identifica-se que a série original supostamente possui adição de um ruído $r(n)$, assim como ela também revela outro componente, o de tendência $T(n)$, comumente encontrado nas séries FOREX ([116]), estudo deste trabalho.

Também pela apresentação e comparação entre a série original e os componentes de apro-

ximação, s_5 , e detalhes, d_1 a d_5 , sobrevivem que as componentes são suavizações da série original, proporcionada pela Transformada *wavelet* MODWT, *principalmente após a aplicação* de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série.

A decomposição dos componentes de aproximação e detalhes são utilizados como variáveis de entrada do SVR para prever dados futuros dos ativos financeiros.

Dessa maneira a Transformada *wavelet* MODWT é colocada como um pré-processador do conjuntos de dados de entrada, conforme ilustrado pela Figura 8, modelo proposto para predição de séries temporais por meio da estratégia SVR-*wavelet* híbrida.

7.8.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo Híbrido SVR-*wavelet*

As métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC também são empregadas com a finalidade de medir a qualidade do modelo híbrido proposto.

São exibidos os resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, segundo suas respectivas definições, anteriormente aludidas neste trabalho. As Tabelas 7 e 8 condensam os resultados obtidos, com o propósito de verificar a qualidade do modelo híbrido proposto, como um pré-processador do conjuntos de dados de entrada, com o objetivo de prever dados futuros dos ativos financeiros do tipo FOREX, em concordância com a Figura 8.

7.9 AJUSTES POR MEIO DO MODELO ARIMA

Um modelo tradicional frequentemente utilizado como regressor de séries temporais financeiras é o modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis (ARIMA) de ordem (p, d, q) .

As séries ajustadas por intermédio do modelo híbrido SVR-*wavelet* podem ser comparadas com este modelo.

Em R, servindo-se da biblioteca *astsa* (127), é possível ajustar as séries originais ao modelo ARIMA mediante à aplicação do método *sarima*, bem como realizar previsões n passos à frente de séries temporais através de seu método *sarima.for*.

7.9.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo ARIMA

Identicamente, as métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC são lidadas para comparar as características do modelo ARIMA em oposição ao modelo proposto baseado em um sistema SVR-*wavelet* híbrido.

São denotados os produtos das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1,

Tabela 7 - Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo híbrido SVR-wavelet.

Série/Métodos	MSE	RMSE	MAE	MPE	MAPE
AUDJPY 15 min.	0.003769474	0.029037880	0.021846580	0.004395223	0.026029350
AUDJPY 1 hora	-0.008094633	0.123794100	0.101444300	-0.009831646	0.101238000
AUDJPY 1 dia	-0.000946800	0.392750200	0.340413300	-0.027584370	0.387377100
CHFJPY 15 min.	0.002622926	0.065786500	0.043294690	0.002616942	0.048863600
CHFJPY 1 hora	0.006250253	0.073482910	0.057785630	0.006381544	0.065816800
CHFJPY 1 dia	-0.035338230	0.709598120	0.619334730	-0.109489280	0.638716170
EURCHF 15 min.	-0.000065229	0.000983200	0.000404835	-0.004274114	0.026048590
EURCHF 1 hora	0.007886270	0.046991400	0.040134880	0.005567794	0.029022230
EURCHF 1 dia	-0.034075460	0.815840230	0.744326040	-0.102338860	0.628002860
EURJPY 15 min.	-0.000433032	0.047534990	0.041100150	-0.000509092	0.030760350
EURJPY 1 hora	0.007886270	0.046991400	0.040134880	0.005567794	0.029022230
EURJPY 1 dia	-0.034075460	0.815840230	0.744326040	-0.102338860	0.628002860
GBPJPY 15 min.	0.005416988	0.041690770	0.033354460	0.004417095	0.027985000
GBPJPY 1 hora	-0.046711990	0.500528910	0.377088290	-0.030638720	0.192854460
GBPJPY 1 dia	-0.114355100	1.104917200	0.975509100	-0.164341200	0.685634500

AIC, AICc e BIC, segundo suas concernentes temáticas, supradito neste relatório. As Tabelas 9 e 10 compendiam os resultados apurados, com o propósito de validar a qualidade do modelo ARIMA, apresentado por meio dos métodos *sarima* e *sarima.for*, para previsão de dados de ativos FOREX e conseguinte comparação com o modelo proposto baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido, evidenciado anteriormente pela Figura 8.

7.10 AJUSTES POR MEIO DO MODELO ARFIMA

As séries ajustadas por intermédio do modelo híbrido SVR-wavelet podem ser comparadas com outros modelos tradicionais tais como o modelo Autorregressivo Fracionário Integrado de Médias Móveis (ARFIMA) ou ARIMA Fracionário.

Valendo-se do ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), provido da biblioteca *forecast* (63), é possível ajustar as séries originais mediante à aplicação do método *arfima* bem como realizar previsões *n* passos à frente de séries temporais ou modelos de séries temporais, através de seu método *forecast*.

Tabela 8 - Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo híbrido SVR-wavelet.

Série/Métodos	MASE	ACF1	AIC	AICc	BIC
AUDJPY 15 min.	0.865812800	0.479377200	-4334.202	-4334.178	-4314.476
AUDJPY 1 hora	1.466648000	0.709609300	-1364.563	-1364.540	-1344.837
AUDJPY 1 dia	1.300711000	0.754438200	999.963	999.987	1019.689
CHFJPY 15 min.	1.140055000	0.390209200	-2659.319	-2659.296	-2639.594
CHFJPY 1 hora	1.280021000	0.646169300	-2432.732	-2432.709	-2413.006
CHFJPY 1 dia	2.178850780	0.805693210	2211.406	2211.430	2231.132
EURCHF 15 min.	1.592869000	-0.207162200	-11267.800	-11267.770	-11248.070
EURCHF 1 hora	1.344564000	0.693024700	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURCHF 1 dia	2.234505490	0.859891060	2497.143	2497.166	2516.869
EURJPY 15 min.	1.303835000	0.758676700	-3324.814	-3324.791	-3305.088
EURJPY 1 hora	1.344564000	0.693024700	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURJPY 1 dia	2.234505490	0.859891060	2497.143	2497.166	2516.869
GBPJPY 15 min.	1.602075000	0.645801500	-3593.484	-3593.460	-3573.758
GBPJPY 1 hora	1.784403220	0.661645370	1496.586	1496.609	1516.312
GBPJPY 1 dia	2.721371700	0.849545000	3118.316	3118.339	3138.042

7.10.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo ARFIMA

Similarmente, as métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC são aplicadas com a função de aferir as características do modelo ARFIMA.

São expostos os resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE, MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, segundo seus respectivos conteúdos, anteriormente referidos neste relatório. As Tabelas 11 e 12 condensam os resultados constatados, com o propósito de validar a qualidade do modelo ARFIMA, apresentado por meio dos métodos *arfima* e *forecast*, para previsão de dados de ativos FOREX e consequente comparação com o modelo proposto baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido.

7.11 AJUSTES POR MEIO DO MODELO GARCH

O modelo GARCH, Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado, é outro modelo tradicionalmente usado como regressor de séries temporais financeiras.

As séries ajustadas por intermédio do modelo híbrido SVR-wavelet podem ser contrastadas

Tabela 9 - Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo ARIMA.

Série/Métodos	MSE	RMSE	MAE	MPE	MAPE
AUDJPY 15 min.	0.0000628946	0.06768088	0.04866654	0.0000400302	0.05797705
AUDJPY 1 hora	-0.0000317264	0.18769970	0.13045890	-0.0001293830	0.12989150
AUDJPY 1 dia	-0.0001910640	0.69370640	0.51200940	-0.0036240220	0.58391940
CHFJPY 15 min.	0.0000811184	0.10899270	0.06286427	0.0000026521	0.07099687
CHFJPY 1 hora	0.0000539385	0.11706850	0.08491374	0.0000040283	0.09680131
CHFJPY 1 dia	0.0001968890	0.72047260	0.49741820	-0.0040388630	0.51354630
EURCHF 15 min.	0.0000015143	0.00139596	0.00032705	0.0000468887	0.02103233
EURCHF 1 hora	0.0000015047	0.00147483	0.00031272	0.0000330088	0.02020792
EURCHF 1 dia	0.0000003992	0.00700141	0.00326238	-0.0018331130	0.26838970
EURJPY 15 min.	0.000140960	0.08862456	0.06608863	0.0000844043	0.04947692
EURJPY 1 hora	0.000135040	0.07649206	0.05382387	0.0000776646	0.03891701
EURJPY 1 dia	-0.004769378	0.87363660	0.63969740	-0.0086722430	0.54034920
GBPJPY 15 min.	0.000114738	0.05766623	0.04159196	0.0000809079	0.03489244
GBPJPY 1 hora	0.000167809	0.51821260	0.34059260	-0.0002383680	0.17637870
GBPJPY 1 dia	0.015015380	0.93259160	0.68259830	0.0049445250	0.47596490

com o modelo ARCH Generalizado de ordem (m, s) ou simplesmente *GARCH* (m, s) .

No ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), e suas bibliotecas, em particular a biblioteca *fGarch* (142), é possível ajustar as séries originais mediante à aplicação do método *garchFit*, bem como realizar previsões n passos à frente de séries temporais através do método *predict*.

7.11.1 Qualidade da Previsão por meio do Modelo GARCH

A obtenção dos valores gerados pelo modelo GARCH não são triviais em *R*. Seus métodos somente expõem dados de características estatísticas do modelo, encapsulando os demais valores. Entretanto algumas métricas, como os valores AIC e BIC, são expostos e são utilizados para se comparar suas características àquelas do modelo proposto baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido.

Portanto, para esta comparação, somente são empregados os valores das métricas AIC e BIC. A Tabela 13 sintetiza os resultados obtidos, com o propósito de validar a qualidade do modelo GARCH, apresentado por meio dos métodos *garchFit* e *predict*, para previsão de dados de ativos FOREX e subsequente comparação com o modelo proposto baseado em um

Tabela 10 - Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo ARIMA.

Série/Métodos	MASE	ACF1	AIC	AICc	BIC
AUDJPY 15 min.	0.9979129	0.004630544	-2601.179	-2601.155	-2581.453
AUDJPY 1 hora	1.0012720	-0.007479716	-512.137	-512.113	-492.411
AUDJPY 1 dia	0.9895630	0.000153460	2165.019	2165.043	2184.745
CHFJPY 15 min.	0.9982948	0.010324950	-1625.353	-1625.330	-1605.627
CHFJPY 1 hora	1.0003080	-0.000330550	-1478.966	-1478.942	-1459.240
CHFJPY 1 dia	0.9945253	0.011852200	2242.554	2242.577	2262.280
EURCHF 15 min.	1.2868190	-0.018625390	-10549.910	-10549.890	-10530.190
EURCHF 1 hora	1.2304390	0.000390112	-10437.360	-10437.340	-10417.630
EURCHF 1 dia	1.0871060	-0.007935175	-7247.461	-7247.438	-7227.736
EURJPY 15 min.	0.9986509	-0.008755548	-2049.027	-2049.003	-2029.301
EURJPY 1 hora	1.0036790	0.030916450	-2350.538	-2350.514	-2330.812
EURJPY 1 dia	0.9977746	-0.000628297	2637.320	2637.344	2657.046
GBPJPY 15 min.	1.0020860	-0.015329730	-2929.129	-2929.105	-2909.403
GBPJPY 1 hora	1.0003050	-0.002158059	1567.693	1567.717	1587.419
GBPJPY 1 dia	0.9906483	0.030577950	2771.061	2771.084	2790.786

sistema SVR-wavelet híbrido, mostrado previamente pela Figura 8.

7.12 PARTE EXPERIMENTAL DO EXPOENTE DE HURST

Para evidenciar que as séries preditas obtidas após o ajuste por intermédio do modelo híbrido proposto, com o objetivo de prever dados futuros dos ativos financeiros do tipo FOREX, em concordância com a Figura 8, são processos Hurst ou passeios aleatórios enviesados, procedeu-se a execução das tarefas conforme método adotado, preliminarmente singularizado por este trabalho.

Para obtenção da média (E_m) e do desvio padrão (S_m) e geração das subséries ($Z_{i,m}$) foram utilizadas três funções, desenvolvidas e escritas no ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos R (47), conforme fontes de programação anexos a este trabalho.

Para normalização dos dados da subsérie ($Z_{i,m}$), bem como a geração da série de tempo acumulativa ($Y_{i,m}$), foi utilizada a função *cumsum* (*Cumulative Sums*), disponível nas bibliotecas padrões do ambiente para análise de dados estatísticos R (47); fontes de programação estão disponíveis no anexo a este trabalho.

O restante das tarefas descritas no método, para o cálculo R_m e da média do R_m/S_m , foram

Tabela 11 - Resultados das métricas MSE, RMSE, MAE, MPE e MAPE, calculados para o modelo ARFIMA.

Série/Métodos	MSE	RMSE	MAE	MPE	MAPE
AUDJPY 15 min.	-0.000038411	0.06753559	0.0486958	-0.000112369	0.0580122
AUDJPY 1 hora	0.006240266	0.22181590	0.1499488	0.005092418	0.1493700
AUDJPY 1 dia	0.041078600	0.74568730	0.5494820	0.027758120	0.6249453
CHFJPY 15 min.	0.000519787	0.10898450	0.0628009	0.000427509	0.0709306
CHFJPY 1 hora	-0.003390516	0.14242530	0.0961857	-0.004420334	0.1095720
CHFJPY 1 dia	0.073625970	0.85052643	0.5848464	0.042137390	0.6038383
EURCHF 15 min.	-0.000001015	0.00137549	0.0004302	-0.000144365	0.0276688
EURCHF 1 hora	-0.000001386	0.00147177	0.0003899	-0.000180425	0.0251959
EURCHF 1 dia	-0.000088755	0.00707360	0.0032534	-0.010404500	0.2675972
EURJPY 15 min.	-0.004310275	0.09684945	0.0708941	-0.003351474	0.0530655
EURJPY 1 hora	-0.005789479	0.08151225	0.0586681	-0.004299801	0.0424261
EURJPY 1 dia	0.092424080	0.99269800	0.7342927	0.042058350	0.6181907
GBPJPY 15 min.	-0.005443010	0.06888378	0.0470746	-0.004665444	0.0394940
GBPJPY 1 hora	-0.044079550	0.68078874	0.4220548	-0.026015220	0.2174034
GBPJPY 1 dia	0.130793820	1.09033803	0.8086128	0.055316480	0.5615499

obtidos por meio de operações e funções matemáticas convencionais; fontes de programação também disponíveis no anexo a este trabalho.

A Tabela 14 sumariza parcialmente os valores de t , M , R/S_t , $x = \log \{R/S_t\}$ e $y = \log \{t\}$, para relação predita entre as moedas AUD-JPY, com periodicidade de 1 dia, onde $\log$ é o logaritmo natural de um número, e (x, y) são os pontos do gráfico com dispersão dos valores de $\log \{R/S_t\}$ mostrados na Figura 19.

A Figura 19 mostra o gráfico com dispersão dos valores de $\log \{R/S_t\}$ em relação aos valores de $\log \{t\}$, para a relação entre as moedas AUD-JPY, com periodicidade de 1 dia. A Figura 19 também apresenta a reta de tendência obtida por meio da função *lm* (*Fitting Linear Models*) e *abline* (*Add Straight Lines to a Plot*), disponíveis nas bibliotecas padrões do ambiente para análise de dados estatísticos R (47).

A Tabela 15 apresenta os valores para a estimativa do intercepto $\hat{b}$ e a inclinação da reta do gráfico contido na Figura 19. Esta inclinação representa o valor estimado do expoente de Hust ($\hat{H}$). Estes valores foram obtidos por meio da função *lm* (*Fitting Linear Models*), *summary* (*Summary of the Results of Model Fitting Function*) e *coef* (*Extracts Model Coefficients from Modeling Function*), também disponíveis nas bibliotecas padrões do ambiente para análise de dados estatísticos R (47).

Tabela 12 - Resultados das métricas MASE, ACF1, AIC, AICc e BIC, calculados para o modelo ARFIMA.

Série/Métodos	MASE	ACF1	AIC	AICc	BIC
AUDJPY 15 min.	0.998513	0.00141561	-2605.580	-2605.556	-2585.854
AUDJPY 1 hora	1.150856	-0.09768307	-170.112	-170.089	-150.387
AUDJPY 1 dia	1.061987	-0.00038125	2313.003	2313.026	2332.729
CHFJPY 15 min.	0.997288	-0.04490894	-1625.507	-1625.483	-1605.781
CHFJPY 1 hora	1.133095	-0.10913820	-1077.437	-1077.414	-1057.712
CHFJPY 1 dia	1.169327	-0.07730520	2582.415	2582.439	2602.141
EURCHF 15 min.	1.692863	0.00310802	-10580.170	-10580.150	-10560.450
EURCHF 1 hora	1.534088	0.00097054	-10441.610	-10441.590	-10421.880
EURCHF 1 dia	1.084101	0.01852829	-7226.452	-7226.428	-7206.726
EURJPY 15 min.	1.071266	-0.02741805	-1867.270	-1867.246	-1847.544
EURJPY 1 hora	1.094012	0.02137883	-2220.354	-2220.330	-2200.628
EURJPY 1 dia	1.145321	0.00634013	2898.977	2899.000	2918.703
GBPJPY 15 min.	1.134180	-0.08975571	-2565.099	-2565.076	-2545.373
GBPJPY 1 hora	1.239556	-0.17945516	2126.523	2126.547	2146.249
GBPJPY 1 dia	1.173532	-0.01514771	3091.113	3091.137	3110.839

MODWT - usando wavelet Haar

[utilizando-se wavelet denoising]

MODWT - usando wavelet Haar

[utilizando-se wavelet denoising]

Figura 18 - Decomposição da série para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos, através da Transformada wavelet MODWT, com suas componentes de aproximação e detalhes, respectivamente s_5 e d_1 a d_5 , em comparação com a aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série.

Tabela 13 - Resultados das métricas AIC e BIC, calculados pelo modelo GARCH.

Série/Métodos	AIC	BIC
AUDJPY 15 min.	0.079	0.099
AUDJPY 1 hora	3.244	3.263
AUDJPY 1 dia	6.019	6.038
CHFJPY 15 min.	1.435	1.454
CHFJPY 1 hora	2.157	2.177
CHFJPY 1 dia	7.063	7.082
EURCHF 15 min.	-10.210	-10.191
EURCHF 1 hora	-8.148	-8.128
EURCHF 1 dia	-5.737	-5.717
EURJPY 15 min.	1.894	1.914
EURJPY 1 hora	1.200	1.219
EURJPY 1 dia	7.537	7.557
GBPJPY 15 min.	0.850	0.870
GBPJPY 1 hora	6.017	6.037
GBPJPY 1 dia	7.554	7.573

Tabela 14 - Valores parciais para a estimativa do expoente de Hurst (H) obtidos por meio das tarefas executadas, conforme descrição no método utilizado, para a relação entre as moedas AUD-JPY, com periodicidade de 1 em 1 dia

t	M	R/S_t	$x = \log \{t\}$	$y = \log \{R/S_t\}$
43	24	16.858010	3.761200	2.824826
59	17	22.225800	4.077537	3.101254
79	13	29.292140	4.369448	3.377319
97	11	35.077250	4.574711	3.557553
149	7	58.272940	5.003946	4.065138
199	5	63.229060	5.293305	4.146764
257	4	86.857240	5.549076	4.464266
313	3	102.258190	5.746203	4.627501
773	1	193.642740	6.650279	5.266015

Figura 19 - Gráfico com dispersão dos valores de $\log \{R/S_t\}$ em relação aos valores de $\log \{t\}$, para a relação entre as moedas AUD-JPY, contendo também a reta de tendência.

Tabela 15 - Valores estimados e estatísticas da regressão obtidos por meio das funções *lm*, *summary* e *coef* disponíveis no ambiente para análise de dados estatísticos *R* (47).

```
> summary(model)
Call: lm(formula = y1 ~ x1, data = mydf)
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.12154  -0.05220  -0.02321   0.07172   0.13166

Coefficients:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.26964    0.13637  -1.977   0.0794 .
          x1   0.83996    0.02549  32.951 1.08e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.08217 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9918, Adjusted R-squared:  0.9909
F-statistic: 1086 on 1 and 9 DF, p-value: 1.075e-10

> coef(model)

(Intercept)          x1
-0.2696410    0.8399617
```

8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Conforme a metodologia apresentada, são detalhados os resultados encontrados na aplicação do modelo híbrido SVR-*wavelet*.

Preliminarmente, usando-se o ambiente de programação para análise de dados estatísticos e gráficos *R* (47), efetuou-se a eliminação de ruídos contidos nas séries financeiras do tipo *FOREX* mediante à utilização de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*. Depois, após a aplicação da Transformada *wavelet* MODWT e obtenção dos componentes decompostos de aproximação, *s5*, e detalhes, *d1* a *d5*, empregou-se, com o auxílio da biblioteca *e1071* (90), o método *svm* em cada componente da Transformada *wavelet* MODWT, exemplificado pelo uso da componente detalhe *d1*, conforme:

```
d1.model ← svm ( d1 ~ lts, d1.data, scale = TRUE, type = "eps - regression",
kernel = "radial", gama = 800, cost = 10000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05,
shrinking = TRUE, fitted = TRUE )
```

em que os parâmetros passados como argumento do método *svm* foram obtidos por intermédio do método *tune*, também disponível para uso na biblioteca *e1071*, que ajusta hiperparâmetros de métodos estatísticos usando procedimentos de pesquisa sobre os parâmetros fornecidos.

Em seguida aplicou-se o método *predict* sobre os modelos calculados, por intermédio do método *svm*, para se apurar a eficiência do procedimento. A título de exemplo, analisando-se uma das componentes, a componente detalhe *d5*, Figura 20, é legítimo dizer, pela investigação e exame do gráfico da componente *d5*, gerada pela Transformada *wavelet* MODWT, com seus pontos marcados com pequenos círculos (●) pretos, justaposto ao gráfico gerado pelo método *predict*, marcado com pequenos xis (×) azuis, que eles são congêneres, além do mais, entabulando-se certas métricas chega-se à diferenças muito pequenas, como a maior diferença entre os pontos das séries originais e dos pontos gerados pelo método *predict*, 0.005383408, e a *RMSE* = 0.003482003.

A Figura 21 exibe o gráfico da série original com seus pontos marcados com pequenos círculos (○) azuis, e o gráfico da série predita através do modelo SVR-*wavelet* híbrido proposto, marcado com pequenos xis (×) vermelhos em seus pontos, sobreposto sobre a série original para a relação entre as moedas Dólar Australiano (AUD) e o Yen Japonês (JPY) com periodicidade de 15 minutos.

Figura 20 - Gráfico da componente d_5 , com seus pontos marcados com (●), gerada pela Transformada *wavelet* MODWT, da relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos, justaposto ao gráfico gerado pelo método *predict*, com seus pontos destacados com (×).

8.1 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: ARIMA OU SVR-WAVELET HÍBRIDO

O AIC, tal como o AICc e o BIC, considera o melhor modelo aquele com menores valores, o que pode ser constatado na Tabela [16](#), comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARIMA e o modelo híbrido SVR-*wavelet*.

Na Tabela [16](#), as linhas destacadas em verde, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-*wavelet*, são a maioria (80%), enquanto que as linhas destacadas em vermelho, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo ARIMA são a minoria (20%), o que comprova que o modelo baseado em um sistema SVR-*wavelet* híbrido para previsão de séries temporais financeiras é mais adequado do que aquele modelado por meio do modelo ARIMA.

Alguns testes também foram efetuados antes da aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série. Os resultados obtidos por meio destes testes também mostraram que as séries modeladas através do modelo híbrido SVR-*wavelet* superavam e eram mais adequadas em aproximadamente 73% do que aquelas séries modeladas por meio do modelo ARIMA, com somente 27% dos casos favoráveis.

Figura 21 - Gráficos sobrepostos da série original (○) e da série predita através do modelo SVR-*wavelet* híbrido proposto (×) para a relação entre as moedas AUD e JPY com periodicidade de 15 minutos.

8.2 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: ARFIMA OU SVR-WAVELET HÍBRIDO

Como evidenciado nas últimas seções, o AIC, tanto quanto o AICc e o BIC, pressupõe que o melhor modelo é aquele com os menores valores, o que pode ser apurado pela Tabela 17, comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARFIMA e o modelo híbrido SVR-*wavelet*.

Na Tabela 17 as linhas destacadas em verde, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-*wavelet*, novamente são a maioria (80%), enquanto que as linhas destacadas em vermelho, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo ARFIMA são a minoria (20%), o que corrobora que o modelo baseado em um sistema SVR-*wavelet* híbrido para previsão de séries temporais financeiras é mais adequado do que aquele modelado por meio do modelo ARFIMA.

De modo similar aos testes com o modelo ARIMA, foram efetuados alguns testes antes da aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série. Os resultados conseguidos por meio destes testes igualmente mostraram que as séries modeladas através do modelo híbrido SVR-*wavelet* superavam e eram mais adequadas em aproximadamente 93% do que aquelas séries modeladas por meio do modelo ARFIMA, com

Tabela 16 - Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARIMA e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.

	AIC	AICc	BIC	AIC	AICc	BIC
Série	Modelo ARIMA			Modelo Híbrido SVR-wavelet		
AUDJPY 15 min.	-2601.179	-2601.155	-2581.453	-4334.202	-4334.178	-4314.476
AUDJPY 1 hora	-512.137	-512.113	-492.411	-1364.563	-1364.540	-1344.837
AUDJPY 1 dia	2165.019	2165.043	2184.745	999.963	999.987	1019.689
CHFJPY 15 min.	-1625.353	-1625.330	-1605.627	-2659.319	-2659.296	-2639.594
CHFJPY 1 hora	-1478.966	-1478.942	-1459.240	-2432.732	-2432.709	-2413.006
CHFJPY 1 dia	2242.554	2242.577	2262.280	2211.406	2211.430	2231.132
EURCHF 15 min.	-10549.910	-10549.890	-10530.190	-11267.800	-11267.770	-11248.070
EURCHF 1 hora	-10437.360	-10437.340	-10417.630	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURCHF 1 dia	-7247.461	-7247.438	-7227.736	2497.143	2497.166	2516.869
EURJPY 15 min.	-2049.027	-2049.003	-2029.301	-3324.814	-3324.791	-3305.088
EURJPY 1 hora	-2350.538	-2350.514	-2330.812	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURJPY 1 dia	2637.320	2637.344	2657.046	2497.143	2497.166	2516.869
GBPJPY 15 min.	-2929.129	-2929.105	-2909.403	-3593.484	-3593.460	-3573.758
GBPJPY 1 hora	1567.693	1567.717	1587.419	1496.586	1496.609	1516.312
GBPJPY 1 dia	2771.061	2771.084	2790.786	3118.316	3118.339	3138.042

somente 7% dos casos favoráveis.

8.3 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: GARCH OU SVR-WAVELET HÍBRIDO

Destacados na Tabela 18 estão os valores das métricas AIC e BIC gerados pelo modelo GARCH, através de seus métodos *garchFit* e *predict*, e pelo modelo híbrido SVR-wavelet.

Na Tabela 18, as linhas destacadas em verde, com menores valores de AIC e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet, são mais uma vez o maior número (aproximadamente 67%), ao passo que as linhas destacadas em vermelho, com menores valores de AIC e BIC para o modelo GARCH são a minoria (aproximadamente 33%), o que constata que o modelo baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido para previsão de séries temporais financeiras é mais adequado do que aquele modelado por meio do modelo GARCH.

De modo análogo aos testes com o modelo ARFIMA, foram efetuados alguns testes antes da aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos

Tabela 17 - Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo ARFIMA e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.

	AIC	AICc	BIC	AIC	AICc	BIC
Série	Modelo ARFIMA			Modelo Híbrido SVR-wavelet		
AUDJPY 15 min.	-2605.580	-2605.556	-2585.854	-4334.202	-4334.178	-4314.476
AUDJPY 1 hora	-170.112	-170.089	-150.387	-1364.563	-1364.540	-1344.837
AUDJPY 1 dia	2313.003	2313.026	2332.729	999.963	999.987	1019.689
CHFJPY 15 min.	-1625.507	-1625.483	-1605.781	-2659.319	-2659.296	-2639.594
CHFJPY 1 hora	-1077.437	-1077.414	-1057.712	-2432.732	-2432.709	-2413.006
CHFJPY 1 dia	2582.415	2582.439	2602.141	2211.406	2211.430	2231.132
EURCHF 15 min.	-10580.170	-10580.150	-10560.450	-11267.800	-11267.770	-11248.070
EURCHF 1 hora	-10441.610	-10441.590	-10421.880	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURCHF 1 dia	-7226.452	-7226.428	-7206.726	2497.143	2497.166	2516.869
EURJPY 15 min.	-1867.270	-1867.246	-1847.544	-3324.814	-3324.791	-3305.088
EURJPY 1 hora	-2220.354	-2220.330	-2200.628	-3348.369	-3348.345	-3328.643
EURJPY 1 dia	2898.977	2899.000	2918.703	2497.143	2497.166	2516.869
GBPJPY 15 min.	-2565.099	-2565.076	-2545.373	-3593.484	-3593.460	-3573.758
GBPJPY 1 hora	2126.523	2126.547	2146.249	1496.586	1496.609	1516.312
GBPJPY 1 dia	3091.113	3091.137	3110.839	3118.316	3118.339	3138.042

na série. Todavia os resultados conseguidos por meio destes teste foram os mesmos, ou seja as séries modeladas através do modelo híbrido SVR-wavelet superaram e foram mais adequadas em aproximadamente 67% do que aquelas séries modelas por meio do modelo GARCH, com somente 33% dos casos favoráveis.

8.4 SELEÇÃO DO MELHOR MODELO: SVR TRADICIONAL COM KERNEL OU SVR-WAVELET HÍBRIDO

Como demonstrado pelas seções precedentes, o AIC, tanto quanto o AICc e o BIC, admite que o modelo mais razoável é aquele com os menores valores, o que pode ser averiguado pela Tabela 19, comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo SVR tradicional com Kernel e o modelo híbrido SVR-wavelet.

Na Tabela 19, as linhas marcadas em verde, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet, novamente são a maioria 80%, enquanto que as linhas marcadas

Tabela 18 - Comparação dos valores dos métodos AIC e BIC entre o modelo GARH e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.

	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>	<i>BIC</i>	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>	<i>BIC</i>
<i>Série</i>	<i>Modelo GARCH</i>			<i>Modelo Híbrido SVR-wavelet</i>		
<i>AUDJPY 15 min.</i>	0.079		0.099	-4334.202	-4334.178	-4314.476
<i>AUDJPY 1 hora</i>	3.244		3.263	-1364.563	-1364.540	-1344.837
<i>AUDJPY 1 dia</i>	6.019		6.038	999.963	999.987	1019.689
<i>CHFJPY 15 min.</i>	1.435		1.454	-2659.319	-2659.296	-2639.594
<i>CHFJPY 1 hora</i>	2.157		2.177	-2432.732	-2432.709	-2413.006
<i>CHFJPY 1 dia</i>	7.063		7.082	2211.406	2211.430	2231.132
<i>EURCHF 15 min.</i>	-10.210		-10.191	-11267.800	-11267.770	-11248.070
<i>EURCHF 1 hora</i>	-8.148		-8.128	-3348.369	-3348.345	-3328.643
<i>EURCHF 1 dia</i>	-5.737		-5.717	2497.143	2497.166	2516.869
<i>EURJPY 15 min.</i>	1.894		1.914	-3324.814	-3324.791	-3305.088
<i>EURJPY 1 hora</i>	1.200		1.219	-3348.369	-3348.345	-3328.643
<i>EURJPY 1 dia</i>	7.537		7.557	2497.143	2497.166	2516.869
<i>GBPJPY 15 min.</i>	0.850		0.870	-3593.484	-3593.460	-3573.758
<i>GBPJPY 1 hora</i>	6.017		6.037	1496.586	1496.609	1516.312
<i>GBPJPY 1 dia</i>	7.553		7.573	3118.316	3118.339	3138.042

em vermelho, com menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo SVR tradicional com Kernel são a minoria 20%, o que ratifica que o modelo baseado em um sistema SVR-wavelet híbrido para previsão de séries temporais financeiras é mais apropriado do que aquele modelado por meio do modelo SVR tradicional com Kernel.

De maneira equivalente aos testes com o modelo GARCH, foram efetuados alguns testes antes da aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage* para eliminação de ruídos contidos na série. Os resultados atingidos por meio destes testes semelhantemente mostraram que as séries modeladas através do modelo híbrido SVR-wavelet superavam e eram mais adequadas em aproximadamente 60% do que aquelas séries modeladas por meio do modelo SVR tradicional com Kernel, com somente 40% dos casos favoráveis.

8.5 CONCLUSÕES SOBRE A ADERÊNCIA AO EXPOENTE DE HURST

A Tabela 20 sumariza o teste de significância, conforme sugerido por Couillard e Davison, utilizando-se da estatística $p\text{-value} < 0,001$. Estes valores foram obtidos por meio da função

Tabela 19 - Comparação dos valores dos métodos AIC, AICc e BIC entre o modelo SVR tradicional com Kernel e o modelo híbrido SVR-wavelet, destacando-se em verde, os menores valores de AIC, AICc e BIC para o modelo híbrido SVR-wavelet.

	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>	<i>BIC</i>	<i>AIC</i>	<i>AICc</i>	<i>BIC</i>
<i>Série</i>	<i>Modelo SVR tradicional com Kernel</i>			<i>Modelo Híbrido SVR-wavelet</i>		
<i>AUDJPY 15 min.</i>	-3255.428	-3255.404	-3235.702	-4334.202	-4334.178	-4314.476
<i>AUDJPY 1 hora</i>	-819.089	-819.065	-799.363	-1364.563	-1364.540	-1344.837
<i>AUDJPY 1 dia</i>	1779.209	1779.232	1798.935	999.963	999.987	1019.689
<i>CHFJPY 15 min.</i>	-1662.520	-1662.496	-1642.794	-2659.319	-2659.296	-2639.594
<i>CHFJPY 1 hora</i>	-2034.998	-2034.975	-2015.272	-2432.732	-2432.709	-2413.006
<i>CHFJPY 1 dia</i>	2367.879	2367.903	2387.605	2211.406	2211.430	2231.132
<i>EURCHF 15 min.</i>	-10335.920	-10335.890	-10316.190	-11267.800	-11267.770	-11248.070
<i>EURCHF 1 hora</i>	-10490.080	-10490.060	-10470.360	-3348.369	-3348.345	-3328.643
<i>EURCHF 1 dia</i>	-7059.529	-7059.506	-7039.803	2497.143	2497.166	2516.869
<i>EURJPY 15 min.</i>	-2551.386	-2551.363	-2531.660	-3324.814	-3324.791	-3305.088
<i>EURJPY 1 hora</i>	-2702.717	-2702.694	-2682.991	-3348.369	-3348.345	-3328.643
<i>EURJPY 1 dia</i>	2506.178	2506.202	2525.904	2497.143	2497.166	2516.869
<i>GBPJPY 15 min.</i>	-3418.001	-3417.978	-3398.275	-3593.484	-3593.460	-3573.758
<i>GBPJPY 1 hora</i>	1497.892	1497.915	1517.617	1496.586	1496.609	1516.312
<i>GBPJPY 1 dia</i>	2917.440	2917.463	2937.166	3118.316	3118.339	3138.042

t.test (*Student's t-Test*), disponível nas bibliotecas padrões do ambiente para análise de dados estatísticos *R* (47).

8.5.1 Resultados obtidos dos cálculos do Expoente de Hurst

A Tabela 21 sintetiza os resultados obtidos dos cálculos do Expoente de Hurst por meio dos funções desenvolvidas no ambiente para análise de dados estatísticos *R* (47), conforme metodologia desenvolvida por Mandelbrot e Wallis (85), baseada nos trabalhos de Hurst (62).

Conforme destacou Mandelbrot (85), que desenvolveu seus estudos baseados nos trabalhos de Hurst (62), um movimento Browniano tem $H = 0.5$, enquanto que um processo persistente tem $H > 0.5$ e um processo anti-persistente tem $H < 0.5$. Portanto, pela Tabela 21, é possível verificar que as séries históricas de preços das paridades entre as moedas apresentadas nesta Tabela se mostram como processos persistentes, ou seja, $H > 0.5$.

Um outro fato destacado na Tabela 21, contendo os resultados sumarizados, é que o Ex-

Tabela 20 - Teste de significância, conforme sugerido por Couillard e Davison, utilizando-se da estatística $p\text{-value} < 0,001$, obtidos por meio da função *t.test* disponível no ambiente para análise de dados estatísticos R (47).

```
> ttest
One Sample t-test

data:  y1
t = 16.006, df = 10, p-value = 1.871e-08
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:

 3.571566   4.726769
sample estimates:

mean of x = 4.149168

> ttest[['statistic']]

t = 16.00571

> ttest[['p.value']]

[1] 1.871171e-08
```

poente de Hurst ficou constante entre as periodicidades de 1 dia, 1 hora e 15 minutos, o que mostra que o Expoente de Hurst pode ser considerado válido para as séries históricas apresentadas nesta Tabela.

Tabela 21 - Resultados obtidos por meio das funções desenvolvidas no ambiente para análise de dados estatísticos R (47), conforme metodologia desenvolvida por Mandelbrot e Wallis (85), baseada nos trabalhos de Hurst (62).

Série	Hurst	(Intercept)	t-statistic	p.value
AUDJPY 15 min.	0.78944730	-0.02336953	16.77667	1.18723e-08
AUDJPY 1 hora	0.8324442	-0.2153603	16.13222	1.73416e-08
AUDJPY 1 dia	0.8399617	-0.2696410	16.00571	1.871171e-08
CHFJPY 15 min.	0.8534669	-0.3911333	15.48972	2.566635e-08
CHFJPY 1 hora	0.8184394	-0.1341707	16.29031	1.578194e-08
CHFJPY 1 dia	0.8545995	-0.3065525	15.80562	2.112716e-08
EURCHF 15 min.	0.8954869	-0.6836513	14.46114	4.966747e-08
EURCHF 1 hora	0.8845434	-0.5429375	14.60365	4.521147e-08
EURCHF 1 dia	0.7519774	0.1453708	17.09724	9.882615e-09
EURJPY 15 min.	0.8285461	-0.2140661	16.21255	1.652901e-08
EURJPY 1 hora	0.78266634	0.03470801	16.91379	1.097201e-08
EURJPY 1 dia	0.8545435	-0.2964951	15.86572	2.036754e-08
GBPJPY 15 min.	0.8529881	-0.3298242	15.61343	2.377259e-08
GBPJPY 1 hora	0.8781442	-0.4207742	15.42134	2.678384e-08
GBPJPY 1 dia	0.8567473	-0.3236433	15.79052	2.132282e-08

9 CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos e as contribuições alcançadas, uma análise geral do trabalho, e sugestões para trabalhos futuros.

9.1 RESULTADOS OBTIDOS E CONTRIBUIÇÕES ALCANÇADAS

A previsão de dados futuros não mais reside no domínio de matemáticos e estatísticos e vem se tornando um assunto interdisciplinar. Atualmente, diversas áreas do conhecimento vêm adotando completamente a metodologia de previsão de séries temporais não-lineares e não-estacionárias como parte de suas operações primárias.

A previsão de séries temporais financeiras do tipo FOREX, não-lineares e não-estacionárias, tem sido um estímulo para utilização de sistemas híbridos aplicando aprendizagem de máquinas e a teoria da aprendizagem estatística. As técnicas de previsão clássica, incluindo os modelos matemáticos clássicos, desenvolvidas para processos lineares são inconvenientes quando se trata de dados de séries temporais não-lineares e não-estacionárias.

Neste estudo, destacou-se alguns dos mais relevantes métodos utilizados para regressão, como os modelos matemáticos tradicionalmente utilizados como regressores de séries temporais financeiras, e de aprendizado de máquinas, particularmente ao SVR, regressão por meio de Máquinas de Suporte Vetorial (SVM), e à Transformada *wavelet*, como alternativas adequadas para previsão de dados não-lineares e não-estacionárias.

Em um esforço para compreender as limitações de cada tipo de modelo e seus *trade-offs* este estudo efetuou uma análise crítica frente às diversas iniciativas de pesquisa acadêmicas desenvolvidas mediante a aplicação de métodos de aprendizado de máquinas na regressão de séries temporais.

Também neste estudo, evidenciou-se um novo modelo de previsão, retratado por modelos híbridos, em particular o modelo de previsão por meio do sistema SVR-*wavelet*, que integra modelos *wavelets* e SVR na previsão dos dados das séries temporais financeiras do tipo FOREX.

O modelo híbrido SVR-*wavelet* manifestou ser capaz e eficiente na previsão dos dados das séries temporais financeiras do tipo FOREX. Seu desempenho, quando comparado com outros modelos, tais como os modelos matemáticos tradicionais, mostrou-se significativamente melhor na previsão de séries temporais não-lineares e não-estacionárias (próximo de 67% na pior predição e igual a 80% na melhor predição). Algumas medidas de desempenho, tais como MSE, RMSE, MAE, MPE, MAPE e MASE também evidenciaram que o modelo híbrido SVR-*wavelet* superou os outros modelos tradicionais, tais como os modelos ARIMA, ARFIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel. Comprovou-se também que após a eliminação de ruídos

contidos na série, pela aplicação de técnicas de *denoising* ou *wavelet shrinkage*, os resultados de desempenho encontrados, comparando-se os modelos ARIMA, ARFIMA, GARCH e o modelo SVR tradicional com Kernel com o modelo híbrido SVR-*wavelet*, mostraram-se consistentes entre as séries AUD-JPY, CHF-JPY, EUR-CHF, EUR-JPY e GBP-JPY, com periodicidades de 15 minutos, 1 hora e 1 dia.

Similarmente neste estudo, integrou-se modelos *wavelets* e SVR culminando em um novo modelo híbrido para se prever dados não-lineares de séries temporais não-estacionárias, como as séries Financeiras do tipo FOREX. Depois de combinar essas duas abordagens inovadoras e aplicá-las em um novo modelo de predição, conseguiu-se uma predição robusta, como verificado pelas métricas AIC, AICc e BIC, comparando-a com os métodos tradicionais e com o modelo SVM padrão, executado sem a adição de *wavelet*.

As séries financeiras do tipo FOREX também se mostraram aderentes ao Expoente de Hurst e foi possível verificar que as séries históricas de preços das paridades entre as moedas, apresentadas neste trabalho, se mostraram como processos persistentes.

Entretanto a previsão de séries temporais não-lineares e não-estacionárias ainda precisa de consideráveis pesquisas acadêmicas para garantir que se atinja a maturidade e possa dispor de todo o seu potencial.

Em síntese, esta pesquisa produziu resultados satisfatórios, e cumpriu seu objetivo em conceituar um novo modelo híbrido de previsão por meio do sistema SVR-*wavelet*, integração de modelos *wavelets* e SVR, na previsão dos dados das séries temporais financeiras do tipo FOREX.

Ao final desta pesquisa e trabalho realizados, acredito que ainda há espaço para pesquisa e melhoria da precisão da previsão do modelo híbrido proposto. Desejo que esta tese incentive outros interesses em pesquisas sobre esse assunto, que o modelo de previsão estudado por este trabalho seja melhorado e que também possa ser aplicado para resolver questões fora do mundo acadêmico.

9.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como considerações finais, após a análise dos resultados, alguns temas e assuntos pesquisados podem completar ou ainda aumentar as contribuições deste trabalho. Seguem os assuntos:

Há uma variedade de séries temporais financeiras que podem servir como casos de uso do modelo híbrido proposto e da metodologia apresentada neste trabalho para previsão de séries temporais genéricas, tais como séries do Dólar Futuro, do Índice BOVESPA, de preços de *commodities* como açúcar, café, bezerro, entre tantas outras séries existentes no Mercado

Financeiro.

A Aprendizagem Profunda (DL), é um paradigma para a realização de aprendizagem de máquina, e a tecnologia tornou-se um tema da atualidade devido aos resultados inigualáveis em aplicações como visão computacional, reconhecimento de fala e compreensão de linguagem natural. Desse modo estudos comparativos entre modelos híbridos empregando modelos de Aprendizagem Profunda (DL) podem ser temas interessantes de pesquisas futuras.

Os padrões gráficos, utilizados pela Análise Técnica, fundamentados na força de movimentos entre os compradores e os vendedores, delineiam tendências. Pelos padrões dos gráficos, usualmente chamados na Área Financeira de *Candlestick*, é possível prever o comportamento subsequente de preços admitindo a existência da repetição de figuras, consequentemente com possibilidade de previsão de preços futuros. À vista disso, estudos destes padrões gráficos, por meio de modelos híbridos, aparecem como temas relevantes de investigações futuras.

Segundo o que foi apresentado no Capítulo 6, Ambiente de Programação para Análise de Dados Estatísticos e Gráficos R, para o escopo deste trabalho somente parte dos parâmetros foram utilizados para os cálculos do modelo híbrido proposto. Todavia existem uma variedade de outros parâmetros que podem ser melhores estudados em futuras pesquisas.

O cálculo estimado do Expoente de Hurst (H), exposto por este trabalho, abordou uma das propriedades deste índice. A suposição da existência de um Mercado Fractal, pela hipótese de que os Mercados Eficientes possuem alguma anomalia, destacado por alguns autores apontados neste trabalho, serve como incentivo a novas pesquisas, especialmente pela possibilidade de sua aplicação por intermédio de aprendizagem de máquina.

Referências

- 1 Carlos Aguiló. Cambios significativos en el mundo empresarial. *Economía Industrial*, Vol. VI(no. 330):308, 1999.
- 2 B. W. Ambrose, E. W. Ancel, and M. D. Griffiths. Fractal structure in the capital markets revisited. *Financial Analysts Journal*, Vol. 49:pp. 73–77, 1993.
- 3 H. Arsham. Kuiper's p-value as a measuring tool and decision procedure for the goodness-of-fit test. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 15(no. 2):pp. 131–135, 2006.
- 4 A. Aussem, J. Campbell, and F. Murtagh. Wavelet-based feature extraction and decomposition strategies for financial forecasting. *Journal of Computational Intelligence in Finance*, Vol. 6(no. 2):pp. 5–12, 1998.
- 5 J. Barkoulas, W. C. Labys, and J. Onochie. Fractional dynamics in international commodity prices. *Journal of Futures Markets*, Vol. 17:pp. 161–189, 1997.
- 6 L. C. Barroso, M. M. A. Barroso, F. F. Campos, M. L. B. Carvalho, and M. L. Maia. *Cálculo Numérico*. 2a edition, 1987.
- 7 D. Basak, S. Pal, and D. C. Patranabis. Support vector regression. *Neural Information Processing - Letters and Reviews*, Vol. 11(no. 10), 2007.
- 8 J. C. Berg. Wavelets in physics. *Cambridge University Press*, 2004.
- 9 B. Bhattacharya, K. Mukherjee, and G. Toussaint. Geometric decision rules for instance-based learning problems. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Vol. 3776:pp. 60–69, 2005.
- 10 B. K. Bhattacharya, R. S. Poulsen, and G. T. Toussaint. Application of proximity graphs to editing nearest neighbor decision rule. *International Symposium on Information Theory*, pages 1–25, 1992.
- 11 L. Bódis. *Financial Time Series Forecasting Using Artificial Neural Networks*. PhD thesis, Babes-Bolyai University, 2004.
- 12 D. Bonesso. Estimación dos parâmetros do kernel em um classificador svm na classificação de imagens hiperespectrais em uma abordagem multiclasse. *UFRGS - Centro Estadual de Sensoriamento Remoto e Metrologia - Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto*, 2013.

- 13 F. A. Botelho. *Análise Técnica e estratégia Operacional*. Enfoque Gráfico, São Paulo, 1a edition, 2004.
- 14 G. E. P. Box, G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. *Time Series Analysis: Forecasting and control*. 4th edition, 1994.
- 15 H. Bozdogan. Model selection and akaike's information criterion (aic): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, Vol. 52(no. 3):pp. 345–370, 1987.
- 16 C. J. C. Burges. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Knowledge Discovery and Data Mining*, Vol. 43:pp. 1–43, 1998.
- 17 C. Campbell. An introduction to kernel methods kernel methods. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. 66:pp. 155–192, 2001.
- 18 J. Y. Campbell, A. W. Lo, and A. C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1st edition, 1997.
- 19 L. J. Cao and F. H. Tay. Support vector machine with adaptive parameters in financial time series forecasting. *IEEE transactions on neural networks / a publication of the IEEE Neural Networks Council*, Vol. 14(no. 6):pp. 1506–1518, 2003.
- 20 J. Chambers, Cleveland W., Kleiner B., and Tukey P. Graphical methods for data analysis. *Wadsworth*, 1983.
- 21 K. Y. Chen and C. H. Wang. A hybrid sarima and support vector machines in forecasting the production values of the machinery industry in taiwan. *Expert Systems with Applications*, Vol. 32(no. 1):pp. 254–264, 2007.
- 22 C. K. Chui. *An introduction to wavelets*. Boston, 1992.
- 23 W. Constantine and D. Percival. wmtsa: Wavelet methods for time series analysis. *CRAN*, 2016.
- 24 H. Cootner. *The random character of stock market prices*. MIT Press, 1964.
- 25 M. Corazza, A. G. Malliaris, and C. Nardelli. Searching for fractal structure in agricultural futures markets. *Journal of Futures Markets*, Vol. 17:pp. 433–473, 1997.
- 26 C. R. Cornish, C. S. Bretherton, and D. B. Percival. Maximal overlap wavelet statistical analysis with application to atmospheric turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 119(no. 2):pp. 339–374, 2006.

- 27 I. J. Costa and Vargas J. Análise fundamentalista e análise técnica: Agregando valor a uma carteira de ações. *DESTARTE*, Vol. 1(no. 1), 2011.
- 28 N. S. S. Costa. Detecção de quebras estruturais em séries temporais: Implementação dos testes de shimotsu com uma aplicação em séries do mercado de câmbio. Master's thesis, Universidade de Brasília - Departamento de Estatística, 2016.
- 29 M. Couillard and M. Davison. A comment on measuring the hurst exponent of financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 348(no. 348):pp. 404–418, 2005.
- 30 I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41:pp. 909–996, 1988.
- 31 I. Daubechies, S. Mallat, and A. Willsky. *Introduction to the special issue on wavelet transforms and multiresolution signal analysis*, volume Vol. 2, pages 528–532. 1992.
- 32 T. Di Matteo, T. Aste, and M. M. Dacorogna. Long term memories of developed and emerging markets: Using the scalinganalysis to characterize their stage of development. *J. Bank. Financ.*, Vol. 29:pp. 827–851, 2005.
- 33 S. Dietz. Autoregressive neural network processes univariate, multivariate and cointegrated models with application to the germa automobile industry. *Wirtschaftswissenschaften - Universität Passau*, 2010.
- 34 Z. Y. Dong, T. K. Saha, and K. P. Wong. Business applications and computational intelligence. *Group, Idea*, pages 131–154, 2005.
- 35 Paulo César Emiliano. Fundamentos e aplicações dos critérios de informação: Akaike e bayesiano. *Universidade Federal de Lavras*, 2009.
- 36 E. F. Fama. The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, Vol. 38:p. 34, 1965.
- 37 F. Family. Book review: Fractal growth phenomena. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 66:pp. 683–686, 1992.
- 38 A. A. Farag and R. M. Mohamed. Regression using support vector machines: Basic foundations. *University of Louisville - Electrical and Computer Engineering - Department Computer Vision and Image Processing Laboratory*, 2004.
- 39 A. B. Favaretto. Estimativa do expoente de hurst de séries temporais de chuvas do estado de são paulo usando as transformadas de fourier, wavelets e análise r/s. *UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas*, 2004.

- 40 D. Fay and J. Ringwood. A wavelet transfer model for time series forecasting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17(no. 10):pp. 3691–3696, 2007.
- 41 F. Folger and Leibfarth L. *Make Money Trading: How to Build a Winning Trading Business with foreword*. Marketplace Books, Inc., Columbia, MD, 1st edition, 2007.
- 42 A. A. Freitas. A survey of evolutionary algorithms for data mining and knowledge discovery. *Curitiba*, 2003.
- 43 A. A. Freitas. A review of evolutionary algorithms for data mining. *Canterbury*, 2007.
- 44 Michael Friendly and Daniel Denis. The early origins and development of the scatterplot. *Journal of the History of the Behavioral Sciences*, Vol. 41(2):pp. 103–130, 2005.
- 45 Y. Fu. Distributed data mining: an overview. *IEEE Technical Committee on Distributed Processing newsletter*, 2001.
- 46 R. Gencay, F. Selcuk, and B. Whitcher. An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics. *Academic Press*, 2001.
- 47 R. Gentleman and R. Ihaka. The r foundation for statistical computing, 2017.
- 48 A. Ghosh and Freitas A. A. Guest editorial: Data mining and knowledge discovery with evolutionary algorithms. *Springer*, 2003.
- 49 C. L. Giles, S. Lawrence, and A. C. Tsoi. Noisy time series prediction using a recurrent neural network and grammatical inference. *Machine Learning*, Vol. 44(no. 1):pp. 161–183, 2001.
- 50 D. Glassman. The foreign exchange market. *Journal of International Economics*, Vol. 30(no. 3-4):pp. 385–387, 1991.
- 51 C. W. J. Granger and R. Joyeux. An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1(no. 1):pp. 15–29, 1980.
- 52 O. C. Guarnieri. *Um Estudo Empírico da Eficiência da Análise Técnica como Instrumento na Predição do Comportamento dos Preços das Ações: O Caso Embraer*. PhD thesis, Universidade de Taubaté, 2006.
- 53 K. Hadri and Y. Rao. Kpss test and model misspecifications. *Applied Economics Letters*, Vol. 16(no. 12):pp. 1187–1190, 2009.
- 54 R. Hahn. R formula notation tutorial. *Econometrics and Statistics Group - University of Chicago Booth School of Business - Business Statistics 41000*, 2017.

- 55 J. Han and M. Kamber. *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann Publishers, 2nd. ed., 2006.
- 56 S. Haykin. *Neural Networks - A Comprehensive Foundation*. Prentice-Hall, New Jersey, 2nd edition, 1999.
- 57 S. Haykin. *Redes neurais: princípios e prática*. Bookman, 2001.
- 58 M. A. Hearst, B. Scholkopf, S. Dumais, E. Osuna, and J. Platt. Trends and controversies - support vector machines. *IEEE Intelligent Systems*, Vol. 13(no. 4):pp. 18–28, 1998.
- 59 A. Hejlsberg. Visual studio .net framework 4.6.2, 2016.
- 60 R. Herbrich. Learning kernel classifiers: Theory and algorithms. *MIT Press*, 2001.
- 61 J. R. M. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, Vol. 68(no. 1):pp. 165–176, 1981.
- 62 H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 116(no. 1):pp. 770–799, 1951.
- 63 R. Hyndman, M. O'Hara-Wild, C. Bergmeir, S. Razbash, and Wang E. Forecast: Forecasting functions for time series and linear models. *CRAN*, 2017.
- 64 L. Jäntschi and S. D. Bolboaca. Distribution fitting 2. pearson-fisher, kolmogorov-smirnov, anderson-darling, wilksshapiro, cramer-von-misses and jarque-bera statistics. *Technical University of Cluj-Napoca, 400641 Cluj-Napoca*, 2009.
- 65 B. Jawerth and W. Sweldens. *An overview of wavelet based multiresolution analyses*, volume Vol. 36, pages 377–412. 1994.
- 66 J. Kamruzzaman and R. A. Sarker. Forecasting of currency exchange rates using ann: a case study. *International Conference on Neural Networks and Signal Processing, 2003. Proceedings of the 2003*, Vol. 1(no. 1):pp. 793–797, 2003.
- 67 G. Kristopher. A guide to technical indicators, dow theory, and elliott wave theory. *Market Realist*, 2014.
- 68 Massaroppe L. *Estimação da causalidade de Granger no caso de interação não-linear*. PhD thesis, Escola Politécnica - Electronic Systems, 2016.
- 69 M. Larrain. Testing chaos and nonlinearities in t-bill rates. *Financial Analysts Journal*, Vol. 47:pp. 51–62, 1991.

- 70 T.-H. Lee. Neural network test and nonparametric kernel test for neglected nonlinearity in regression models. *Department of Economics University of California*, 2000.
- 71 T. P. Lemke and G. T. Lins. *Soft Dollars and Other Brokerage Arrangements*. Glasser LegalWorks, 2002 edition, 2001.
- 72 P. C. Lima. Wavelets: Uma introdução. *Departamento de Matemática - ICEx - UFMG*, 2003.
- 73 T. C. W. Lin. The new investor. *UCLA Law Review*, Vol. Review 678(no. 60), 2013.
- 74 T. C. W. Lin. The new financial industry. *Alabama Law Review*, Vol. Review 567(no. 65), 2014.
- 75 R. C. Littell, G. A. Milliken, W. W Stroup, and R. D. Wolfinger. Sas system for mixed models. *Cary: Statistical Analysis System Institute*, page 633, 2002.
- 76 C.-J. Lu, T.-S. Lee, and C.-C. Chiu. Financial time series forecasting using independent component analysis and support vector regression. *Decision Support Systems*, Vol. 47(no. 2):pp. 115–125, 2009.
- 77 Oliveira H. M. *Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via wavelets*. Rio de Janeiro, 244p, 2007.
- 78 L. Mahadeva and P. Robinson. Unit root testing to help model building. *Handbooks in Central Banking*, (no. 22), 2004.
- 79 O. Maimon and L. Rokach. *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*. Springer, 2nd edition, 2005.
- 80 S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. USA, 577p, 1998.
- 81 B. B. Mandelbrot. Long-run linearity, locally gaussian process, h-spectra and infinite variances. *International Economic Review*, Vol. 10:p. 82, 1969.
- 82 B. B. Mandelbrot. *Misbehavior of markets*. 1st ed. edition, 2004.
- 83 B. B. Mandelbrot and R. L. Hudson. *The (Mis)behavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*. Basic Books, 2004.
- 84 B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. Vol. 10(no. 4):pp. 422–437, 1968.

- 85 B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis. Robustness of the rescaled range r/s in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, Vol. 5:p. 967, 1969.
- 86 G. A. Marcoulides. *Discovering Knowledge in Data: an Introduction to Data Mining*, volume 100. Wiley, 2005.
- 87 A. B. T. Martins, C. A. Taconeli, P. J. Ribeiro Jr., and A. C. A. Gonçalves. Análise de dados composicionais via árvores de regressão. *Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Estatística*, 2009.
- 88 J. Mercer. Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 209(no. 441-458):pp. 415–446, 1909.
- 89 D. Meyer. Support vector machines - the interface to libsvm in package e1071. *FH Technikum Wien, Austria*, 2017.
- 90 D. Meyer, E. Dimitriadou, K. Hornik, A. Weingessel, F. Leisch, C.-C. Chang, and C.-C. Lin. e1071: Misc functions of the department of statistics, probability theory group. *CRAN*, 2017.
- 91 M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J.-M. Poggi. Wavelet toolbox: for use with matlab. *The Math Works, Inc.*, 1997.
- 92 T. M. Mitchell. *Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach*, volume II. Morgan Kaufmann, 1st edition, 1997.
- 93 P. A. Morettin. *Ondas e Ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas*. São Paulo, Brazil, 272p, 1999.
- 94 P. A. Morettin. *Econometria Financeira : Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. Blucher, 2nd edition, 2011.
- 95 P. A. Morettin. Mae-0518 - modelagem em séries temporais financeiras. IME/USP, 2014.
- 96 K. R. Muller, S. Mika, G. Ratsch, K. Tsuda, and B. Scholkopf. An introduction to kernel-based learning algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12:pp. 181–201, 2001.
- 97 A. Nag and A. Mitra. Forecasting daily foreign exchange rates using genetically optimized neural networks. *Journal of Forecasting*, Vol. 511(July):pp. 501–511, 2002.
- 98 G. Nason. wavethresh: Wavelets statistics and transforms. *CRAN*, 2016.

- 99 G.P. Nason and T. Sapatinas. Wavelet packet transfer function modeling of nonstationary time series. *Statistics and Computing*, Vol. 12:pp. 45–56, 2002.
- 100 Guy Nason. wavethresh - wavelets statistics and transforms. *CRAN - The Comprehensive R Archive Network*, page 308, 2016.
- 101 A. A. Neto and Araujo A. M. P. A contabilidade e a gestão baseada no valor. *Unidversidad León - Espanha*, page 43, 2000.
- 102 H. Ni and H. Yin. Neurocomputing exchange rate prediction using hybrid neural networks and trading indicators. *Neurocomputing*, Vol. 72(no. 13-15):pp. 2815–2823, 2009.
- 103 M. Noronha. *Análise Técnica: Teorias, Ferramentas e Estratégias*. Editec - Livros Técnicos, Rio de Janeiro, 1a edition, 1995.
- 104 M. F. M. Osborne. Brownian motion in the stock market. Vol. 7:pp. 145–173, 1959.
- 105 Miles Osborne. *Statistical Machine Translation*, pages 912–915. Springer US, 2010.
- 106 Edgar E. P. *Fractal market analysis : Applying chaos theory to investment and economics*. John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- 107 P. F. Pai and C. S. Lin. A hybrid arima and support vector machines model in stock price forecasting. *Omega*, Vol. 33(no. 6):pp. 497–505, 2005.
- 108 W. Palma. *Long-Memory Time Series: Theory and Methods*. New Jersey, 2007.
- 109 E. Panas. Long memory and chaotic models of prices on the london metal exchange. *Resources Policy*, Vol. 27:pp. 235–246, 2001.
- 110 A. Passerini. Kernel methods, multiclass classification and applications to computational molecular biology. *Universita Degli Studi di Firenze*, 2004.
- 111 D. B. Percival and A. T. Walden. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1st edition, 2006.
- 112 E. E. Peters and D. A. Hsieh. American finance association chaos and order in the capital markets : A new view of cycles, prices, and market volatility. Vol. 48:pp. 2041–2044, 2014.
- 113 M. Pontil and A. Veri. Support vector machines for 3d object recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 20:pp. 637–646, 1998.

- 114 B. Premanode. Prediction of nonlinear nonstationary time series data using a new digital filter and support vector regression. *Imperial College London Department of Electrical and Electronic Engineering*, 2013.
- 115 Cecilia M. Procopiuc. *Projective Clustering*, pages 806–811. Springer US, 2010.
- 116 Conhecimento Público. Free forex historical data. *HistData.com*, 2017.
- 117 R. Racine. Estimating the hurst exponent. pages 1–30, 2011.
- 118 J. B. Ramsey. Wavelets in economics and finance: Past and future. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 6(no. 3), 2002.
- 119 G. R. Richards. The fractal structure of exchange rates: measurement and forecasting. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, Vol. 10:pp. 163–180, 2000.
- 120 V. M. Rivas, J. J. Merelo, P. A. Castillo, M. G. Arenas, and J. G. Castellano. Evolving rbf neural networks for time-series forecasting with evrbf. *Information Sciences*, Vol. 165(no. 3-4):pp. 207–220, 2004.
- 121 P. Roebuck. rwt - rice wavelet toolbox wrapper. *CRAN - The Comprehensive R Archive Network*, page 3, 2013.
- 122 Claude Sammut and Geoffrey I. Webb, editors. *Mean Absolute Error*, pages 652–652. Springer US, 2010.
- 123 Claude Sammut and Geoffrey I. Webb, editors. *Mean Error*, pages 652–652. Springer US, 2010.
- 124 B. Scholkopf. Learning with kernels. *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 129(November):p. 2865, 2002.
- 125 B. I. Settlements. Triennial central bank survey. foreign exchange turnover in april 2013: preliminary global results. *Bank for International Settlements*, (April):p. 24, 2013.
- 126 W. Sharpe. *Portfolio theory and capital markets*. 1970.
- 127 R. H. Shumway and D. S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer Texts in Statistics. Springer, 3rd edition, 2012.
- 128 S. G. Silva. Uso da tecnologia da informação no setor bancário: Um diagnóstico do uso da internet no banco do brasil, agência príncipe de joinville. *Trabalho de Pós-Graduação em Administração e Gestão de Negócios Financeiros - UFRGS*, page 64, 2007.

- 129 J. K. Siqueira. Reconhecimento de voz contínua com atributos mfcc, ssch e pncc, wavelet denoising e redes neurais. *Sistemas Maxwell - PUC-RIO*, Certificação Digital n.o 0912874/CA, 2011.
- 130 A. J. Smola and B. Schölkopf. On a kernel-based method for pattern recognition, regression, approximation, and operator inversion. *Algorithmica*, Vol. 22(no. 1-2):pp. 211–231, 1998.
- 131 A. J. Smola and B. Schölkopf. A tutorial on support vector regression. 2004.
- 132 A. J. Smola, B. Schölkopf, P. L. Bartlett, and D. Schuurmans. Introduction to large margin classifiers. *Advances in Large Margin Classifiers*, pages 1–29, 2000.
- 133 M. K. P. So. Long-term memory in stock market volatility. *Applied Financial Economics*, Vol. 10(no. 5):pp. 519–524, 2000.
- 134 D. Sperandio, J. T. Mendes, and L. H. M. Silva. *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*. 2003.
- 135 F. E. H. Tay and L. J. Cao. Application of support vector machines in financial time series forecasting. *Omega*, Vol. 29(no. 4):pp. 309–317, 2001.
- 136 F. E. H. Tay and L. J. Cao. Modified support vector machines in financial time series forecasting. *Neurocomputing*, Vol. 48(no. 1-4):pp. 847–861, 2002.
- 137 P. Tenti. Forecasting foreign exchange rates using recurrent neural networks. *Applied Artificial Intelligence*, Vol. 10(no. 6):pp. 567–582, 1996.
- 138 T. Teräsvirta, C.-F. Lin, and C. W. J. Granger. Power of the neural network linearity test. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 14(no. 2):pp. 209–220, 1993.
- 139 Kai Ming Ting. *Error Rate*, pages 331–331. Springer US, 2010.
- 140 C. Torrence and G. A. Compo. A practical guide to wavelets analysis. *Bulletin of the American Meteorology Society*, Vol. 79(no. 1):pp. 61–78, 1998.
- 141 G. Toussaint. Proximity graphs for nearest neighbor decision rule: Recent progress. *Proc. of Interface*, 2002.
- 142 R. S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. University of Chicago, 2nd edition, 2005.
- 143 V. Vapnik, S. Golowich, and A. J. Smola. Support vector method for function approximation, regression estimation and signal processing. *Advances in Neural Information Processing Systems 9*, Vol. 9, 1996.

- 144 V. Vapnik, S. Golowich, and A. J. Smola. Support vector method for multivariate density estimation. *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 12(MIT Press):pp. 659–665, 1999.
- 145 M. Vetterli and J. kovačević. *Wavelets and subband coding*. New Jersey, 488p, 1995.
- 146 R. Von Sachs, G. P. Nason, and G. Kroisandt. *Adaptive estimation of the evolutionary wavelet spectrum*. Stanford, 1997.
- 147 H. White. An additional hidden unit tests for neglected nonlinearity in multilayer feed-forward networks. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. II:pp. 451–455, 1989.
- 148 R. D. Wolfinger. Covariance structure selection in general mixed models. *Communications in Statistics*, Vol. 22:pp. 1079–1106, 1993.
- 149 Y. Yang, Geoffrey I. Webb, and X. Wu. *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*. Springer, 2nd edition, 2010.
- 150 J. Yim. *Previsão de Séries de Tempo: Modelos ARIMA, Modelos Estruturais e Redes Neurais Artificiais*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- 151 S. Yousefi, I. Weinreich, and D. Reinarz. Wavelet-based prediction of oil prices. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 25(no. 2):pp. 265–275, 2005.
- 152 B. L. Zhang, R. Coggins, M. A. Jabri, D. Dersch, and B. Flower. Multiresolution forecasting for futures trading using wavelet decompositions. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12(no. 4):pp. 765–775, 2001.
- 153 B. L. Zhang and Z. Y. Dong. An adaptive neural-wavelet model for short term load forecasting. *Electric Power Systems Research*, Vol. 59(no. 2):pp. 121–129, 2001.
- 154 G. P. Zhang. Time series forecasting using a hybrid arima and neural network model. *Neurocomputing*, Vol. 50:pp. 159–175, 2003.
- 155 G. P. Zhang, B. E. Patuwo, and Hu M. Y. Forecasting with artificial neural networks: The state of the art. *International Journal of Forecasting*, Vol. 14:pp. 35–62, 1998.
- 156 Xinhua Zhang. *Regularization*, pages 845–849. Springer US, 2010.
- 157 Li Zhu, Yanxin Wang, and Qibin Fan. Modwt-arma model for time series prediction. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38:pp. 1859–1865, 2014.

Anexo A – Métodos em R - Cálculo dos Testes de Normalidade e de Raiz Unitária, Correção de Dados Discrepantes, Técnicas de *Denoising* ou *Wavelet Shrinkage* e Persistência de Plots

```

1 *****
2 * Função para efetuar a normalização e correção de dados discrepantes *
3 *****
4 myPriceTunnel <- function(closedPrice, periodPrice) {
5     priceTunnel <- closedPriceQualificação
6     Qualificação
7     if(periodPrice != 0) {
8         price10PMore = round(periodPrice * Qualificação1.1, 2);
9         price10Pless = round(periodPrice * .9, 2);
10
11         * Verifica tunelamento de preços para 10%
12         if (closedPrice < price10Pless || closedPrice > price10PMore) {
13             priceTunnel <- price10Pless + round(runif(1) * (price10PMore - price10Pless), 2)
14         }
15
16         return(priceTunnel)
17     }
18 }
19
20 *****
21 * Função para efetuar a verificação quanto a normalização dos dados *
22 *****
23 myCheckPriceTunnel <- function(prices) {
24     pricesTunnel <- prices
25     periodPrice <- 0
26
27     for(n in 1:length(pricesTunnel)) {
28         closedPrice <- pricesTunnel[n]
29
30         * Verifica se o Preço de Fechamento é coerente
31         if(periodPrice != 0) pricesTunnel[n] <- myPriceTunnel(closedPrice, periodPrice)
32
33         periodPrice = pricesTunnel[n]
34     }
35
36     return(pricesTunnel)
37 }
38
39 *****
40 * Função para efetuar filtros usando técnicas de denoising ou wavelet shrinkage *
41 *****
42 library("wavethresh")
43
44 myDenoising <- function(prices) {
45     prices.wy <- wd(prices)
46     prices.thresh <- threshold(prices.wy, type="soft")
47
48     prices.yr <- wr(prices.thresh)
49     prices.mtrx <- ts(matrix(prices.yr), names="prices", start=c(1), frequency = 1)
50
51     return(prices.mtrx)
52 }
53
54 *****
55 * Função para persistir os PLOTS *
56 *****
57 toPrint <- function(n, s, t) {
58     p <- substring(toString(n), 2, 3);
59     n <- n + 1;
60
61     pName <- gsub("TXT", "PNG", paste(s, p, t, "Hurst", sep=""));
62     dev.copy(png, pName);
63     dev.off()
64
65     return(n)

```

```

66 }
67
68 *****
69 * Normaliza a série temporal com N observações para iguais intervalos de tempo *
70 *****
71 prices2 <- myCheckPriceTunnel(prices2)
72 prices <- myCheckPriceTunnel(prices) * Trata tunelamento de Preços
73
74 *****
75 * Efetua filtros usando técnicas de denoising ou wavelet shrinkage *
76 *****
77 prices3 <- prices2; recno3 <- recno2 # série com RUÍDOS
78 prices2 <- myDenosing(prices2); # Trata Elininação de ruídos por técnicas de denoising
79 prices <- myDenosing(prices);
80
81 *****
82 * Testes de Normalidade *
83 *****
84 library('nortest')
85 ad.test(prices.ts) * Anderson-Darling normality test
86 cvm.test(prices.ts) * Cramer-von Mises test for normality
87 lillie.test(prices.ts) * Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) test for normality
88 pearson.test(prices.ts) * Pearson chi-square test for normality
89 sf.test(prices.ts) * Shapiro-Francia test for normality
90
91 library("astsa")
92 shapiro.test(prices.ts) * Shapiro-Wilk normality test
93
94 library("tseries")
95 jarque.bera.test(prices.ts) * Jarque-Bera Test
96
97 *****
98 * Testes de Raiz Unitária *
99 *****
100 library("tseries")
101 adf.test(prices.ts) * Dickey-Fuller Aumentado Test
102 pp.test(prices.ts) * Phillips-Perron Unit Root Test
103 kpss.test(prices.ts) * KPSS Test for Stationarity
104 terasvirta.test(prices.ts) * Terasvirta Neural Network Test for Nonlinearity
105 white.test(prices.ts) * White Neural Network Test for Nonlinearity

```

Anexo B – Métodos em R - Cálculo das Métricas MSE, RMSE, MAE, MPE, MAE, ACF1, AIC1, AICc1 e BIC1

```

1
2 *****
3 * mse - Erro Quadrático Médio *
4 *****
5 mse <- function(res) { mean(res, na.rm = TRUE) }
6
7 *****
8 * RMSE - Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio *
9 *****
10 rmse <- function(res) { sqrt(mean(res^2, na.rm = TRUE)) }
11
12 *****
13 * MAE - Erro absoluto médio *
14 *****
15 mae <- function(res) { mean(abs(res), na.rm = TRUE) }
16
17 *****
18 * MPE - Erro Porcentual médio *
19 *****
20 mpe <- function(res, y) { mean(100 * res / y, na.rm = TRUE) }
21
22 *****
23 * MAPE - Mean Absolute Percentage Error *
24 *****
25 maape <- function(res, y) { mean(100 * abs(res) / y, na.rm = TRUE) }
26
27 *****
28 * MASE - Erro escalado Absoluto Médio *
29 *****
30 mase <- function(res, serie) {
31   nd <- diff(serie)
32   scale <- mean(abs(nd), na.rm = TRUE)
33   mase <- mean(abs(res / scale), na.rm = TRUE)
34
35   return(mase)
36 }
37
38 *****
39 * ACF1 - Autocorrelação de erros para uma defasagem *
40 *****
41 acf1 <- function(res) { acf(res, plot = FALSE, lag.max = 2, na.action = na.pass)$acf[2, 1, 1] }
42
43 *****
44 * AIC - Critério de Informação de Akaike *
45 *****
46 aic1 <- function(n, res, rank, model) {
47   w <- rep(1, n)
48
49   if(is.na(model[1])) ll <- 0.5 * (sum(log(w)) - n * (log(2 * pi) + 1 - log(n) + log(sum(w * res^2))))
50   else ll <- logLik(model)[1]
51   df.ll <- rank + 1
52
53   aic1 <- -2 * ll + 2 * df.ll
54   return(aic1)
55 }
56 *****
57 * AICc - AIC de Segunda Ordem *
58 *****
59 aicc1 <- function(n, res, rank, model) {
60   w <- rep(1, n)
61
62   if(is.na(model[1])) ll <- 0.5 * (sum(log(w)) - n * (log(2 * pi) + 1 - log(n) + log(sum(w * res^2))))
63   else ll <- logLik(model)[1]
64   df.ll <- rank + 1
65
66   aic1 <- -2 * ll + 2 * df.ll
67   aicc1 <- aic1 + 2 * rank * (rank + 1) / (n - rank - 1)

```

```

68     return(aicc1)
69 }
70
71 *****
72 * BIC - Critério de informação Bayesiano *
73 *****
74 bic1 <- function(n, res, rank, model) {
75     w <- rep(1, n)
76
77     if(is.na(model[1])) ll <- 0.5 * (sum(log(w)) - n * (log(2 * pi) + 1 - log(n) + log(sum(w * res^2))))
78     else                ll <- logLik(model)[1]
79     df.ll <- rank + 1
80
81     bic1 <- -2 * ll + log(n) * df.ll *bic-BIC(model)==0 *TRUE
82     return(bic1)
83 }
84
85 *****
86 * calcula geral - mse, RMSE, MAE, MPE, MAE, ACF1, AIC1, AICc1 e BIC1 *
87 *****
88 effectiveness <- function(y, yhat, serie, residuals, rank, model) {
89     if(is.na(residuals[1])) res <- y - yhat
90     else                res <- residuals
91
92     mse <- mean(res, na.rm = TRUE)
93     rmse <- sqrt(mean(res^2, na.rm = TRUE))
94     mae <- mean(abs(res), na.rm = TRUE)
95     mpe <- mean(100 * res / y, na.rm = TRUE)
96     mape <- mean(100 * abs(res) / y, na.rm = TRUE)
97
98     nd <- diff(serie)
99     scale <- mean(abs(nd), na.rm = TRUE)
100     mase <- mean(abs(res / scale), na.rm = TRUE)
101
102     acf1 <- acf(res, plot = FALSE, lag.max = 2, na.action = na.pass)$acf[2, 1, 1]
103
104     n <- length(serie)
105     w <- rep(1, n)
106
107     if(is.na(model[1])) ll <- 0.5 * (sum(log(w)) - n * (log(2 * pi) + 1 - log(n) + log(sum(w * res^2))))
108     else                ll <- logLik(model)[1]
109     df.ll <- rank + 1
110
111     aic1 <- -2 * ll + 2 * df.ll
112     aicc1 <- aic1 + 2 * rank * (rank + 1)/(n - rank - 1)
113     bic1 <- -2 * ll + log(n) * df.ll *bic-BIC(model)==0 *TRUE
114
115     out <- c(mse, rmse, mae, mpe, mape, mase, acf1, aic1, aicc1, bic1)
116     names(out) <- c("MSE", "RMSE", "MAE", "MPE", "MAPE", "MASE", "ACF1", "AIC", "AICc", "BIC")
117
118     return(out)
119 }

```

Anexo C – Métodos em R - Cálculo da Transformada wavelet e de sua Inversa

```

1 *****
2 * wavelet - cálculo *
3 *****
4 library("MASS")
5 library("wavethresh")
6
7 prices.wd <- wd(prices2.ts, family = "DaubExPhase")
8 summary(prices.wd)
9
10 prices.wr <- wr(prices.wd)
11 "prices.mx.diff <- "; max(abs(prices.wr - prices2.ts))
12 prices.error <- prices2.ts - prices.wr
13 "prices.rmse <- "; sqrt(mean(prices.error^2)) *rmse
14
15 *****
16 * wavelet - cálculo - via MODWPT *
17 *****
18 library("MASS")
19 library("wmtsa")
20
21 prices.modwpt <- wavMODWPT(prices2.ts, wavelet = "haar", n.levels = 5)
22 summary(prices.modwpt) *sumariza a transformada
23
24 *****
25 * Reconstrução da transformada *
26 *****
27 prices.modwpt$xform * errado: esta como "modwpt"
28 prices.modwpt$xform <- "dwpt" * certo: tem que ser como "dwpt"
29
30 prices.recon <- wmtsa::reconstruct(prices.modwpt)
31
32 "prices.mx.diff <- "; max(abs(prices.recon - prices2.ts))
33 prices.error <- prices2.ts - prices.recon
34 "prices.rmse <- "; sqrt(mean(prices.error^2)) *rmse
35
36 prices.modwpt$dictionary$wavelet
37
38 *****
39 * MODWT - Cálculo *
40 *****
41 prices.modwt <- wavMODWT(prices2.ts, wavelet = "haar", n.levels = 5, keep.series = TRUE)
42
43 c(prices.modwt$data$d1[1], prices.modwt$data$d2[1],
44   prices.modwt$data$d3[1], prices.modwt$data$d4[1],
45   prices.modwt$data$d5[1], prices.modwt$data$s5[1], "=", prices2.ts[1])
46
47 prices.modwt$data$d1[1]+prices.modwt$data$d2[1]+
48   prices.modwt$data$d3[1]+prices.modwt$data$d4[1]+
49   prices.modwt$data$d5[1]+prices.modwt$data$s5[1]; prices2.ts[1]
50
51 c(prices.modwt$data$d1[len], prices.modwt$data$d2[len],
52   prices.modwt$data$d3[len], prices.modwt$data$d4[len],
53   prices.modwt$data$d5[len], prices.modwt$data$s5[len], "=", prices2.ts[len])
54
55 prices.modwt$data$d1[len]+prices.modwt$data$d2[len]+
56   prices.modwt$data$d3[len]+prices.modwt$data$d4[len]+
57   prices.modwt$data$d5[len]+prices.modwt$data$s5[len]; prices2.ts[len]
58
59 summary(prices.modwt) *sumariza a transformada
60
61 prices.recon <- wmtsa::reconstruct(prices.modwt)
62
63 "prices.mx.diff <- "; max(abs(prices.recon - prices2.ts))
64 prices.error <- prices2.ts - prices.recon
65 "prices.rmse <- "; sqrt(mean(prices.error^2)) *rmse
66
67 prices.modwt$dictionary$wavelet

```

Anexo D – Métodos em R - Cálculo da Previsão dos Componentes wavelet

```

1 *****
2 * SVR para previsão da dos componentes wavelets *
3 *****
4 head(prices.data); tail(prices.data); summary(prices.data)
5
6 library("e1071")
7 library("timeDate")
8
9 prices.model <- svm(prices ~ recno, prices.data, scale = TRUE, type = "eps-regression",
10                    kernel = "radial", gamma = 800, cost = 10000, tolerance = 0.005,
11                    epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, fitted = TRUE)
12
13 prices.predicted <- predict(prices.model, prices.data)
14 prices.error <- prices.data$prices - prices.predicted
15 "prices.prediction.RMSE <-"; rmse(prices.error)
16
17 prices2.model <- prices.model
18 prices2.predicted <- prices.predicted
19
20 prices2.error <- prices2.data$prices - prices2.predicted
21 "prices2.prediction.RMSE <-"; rmse(prices2.error); max(rmse(prices2.error))
22
23 effectiveness(y=prices2.data$prices, yhat=prices2.predicted, serie=prices2.data$prices,
24              residuals=NA, rank=3, model=NA)
25
26 *****
27 * Executa o SVR - verifica melhor ajuste *
28 *****
29 lt <- (length(prices.modwt$data$d1)); lts <- c(1 : lt)
30 d1 <- d2 <- d3 <- d4 <- d5 <- s5 <- lts * 0;
31 for(c in c(1 : lt)) {
32   d1[c] <- (prices.modwt$data$d1[c])
33   d2[c] <- (prices.modwt$data$d2[c])
34   d3[c] <- (prices.modwt$data$d3[c])
35   d4[c] <- (prices.modwt$data$d4[c])
36   d5[c] <- (prices.modwt$data$d5[c])
37   s5[c] <- (prices.modwt$data$s5[c])
38 }
39
40 d1.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, d1=d1))
41 d2.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, d2=d2))
42 d3.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, d3=d3))
43 d4.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, d4=d4))
44 d5.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, d5=d5))
45 s5.data <- as.data.frame(cbind(lt=lts, s5=s5))
46
47 d1.model <- svm(d1 ~ lts, d1.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
48               gamma = 1000, cost = 26000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,
49               * gamma = 1000, cost = 23000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * CHFJPY
50               * gamma = 1000, cost = 23000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * EURJPY
51               * gamma = 1000, cost = 15000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * GBPJPY
52               fitted = TRUE);
53 d2.model <- svm(d2 ~ lts, d2.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
54               gamma = 1000, cost = 17000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,
55               * gamma = 1000, cost = 14000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * CHFJPY
56               * gamma = 1000, cost = 14000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * GBPJPY
57               fitted = TRUE);
58 d3.model <- svm(d3 ~ lts, d3.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
59               * gamma = 1000, cost = 7000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * CHFJPY
60               * gamma = 1000, cost = 7000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * GBPJPY
61               gamma = 1000, cost = 10000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,
62               fitted = TRUE);
63 d4.model <- svm(d4 ~ lts, d4.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
64               gamma = 1000, cost = 10000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,
65               * gamma = 1000, cost = 7000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * CHFJPY
66               * gamma = 1000, cost = 7000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * EURJPY
67               fitted = TRUE);
68 d5.model <- svm(d5 ~ lts, d5.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
69               gamma = 1700, cost = 50000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,

```

```

70         * gamma = 1700, cost = 45000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE, * EURCHF
71         fitted = TRUE);
72 s5.model <- svm(s5 ~ lts, s5.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial",
73         gamma = 1700, cost = 50000, tolerance = 0.005, epsilon = 0.05, shrinking = TRUE,
74         fitted = TRUE);
75
76 summary(d1.model); summary(d2.model); summary(d3.model);
77 summary(d4.model); summary(d5.model); summary(s5.model);
78
79 d1.model.predicted <- predict(d1.model, d1.data)
80 d2.model.predicted <- predict(d2.model, d2.data)
81 d3.model.predicted <- predict(d3.model, d3.data)
82 d4.model.predicted <- predict(d4.model, d4.data)
83 d5.model.predicted <- predict(d5.model, d5.data)
84 s5.model.predicted <- predict(s5.model, s5.data)
85
86 d1.data.error <- d1.data$d1 - d1.model.predicted;
87 "d1.data.prediction.RMSE <-"; rmse(d1.data.error)
88
89 d2.data.error <- d2.data$d2 - d2.model.predicted;
90 "d2.data.prediction.RMSE <-"; rmse(d2.data.error)
91
92 d3.data.error <- d3.data$d3 - d3.model.predicted;
93 "d3.data.prediction.RMSE <-"; rmse(d3.data.error)
94
95 d4.data.error <- d4.data$d4 - d4.model.predicted;
96 "d4.data.prediction.RMSE <-"; rmse(d4.data.error)
97
98 d5.data.error <- d5.data$d5 - d5.model.predicted;
99 "d5.data.prediction.RMSE <-"; rmse(d5.data.error)
100
101 s5.data.error <- s5.data$s5 - s5.model.predicted;
102 "s5.data.prediction.RMSE <-"; rmse(s5.data.error)
103
104 *****
105 * Move todos os dados preditos para as componentes *
106 *****
107 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$d1[[c]] = d1.model.predicted[c] }
108 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$d2[[c]] = d2.model.predicted[c] }
109 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$d3[[c]] = d3.model.predicted[c] }
110 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$d4[[c]] = d4.model.predicted[c] }
111 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$d5[[c]] = d5.model.predicted[c] }
112 for(c in c(1 : lt)) { prices.modwt$data$s5[[c]] = s5.model.predicted[c] }
113
114 d1.data.error <- prices.modwt$data$d1 - d1.model.predicted;
115 rmse(d1.data.error)
116
117 d2.data.error <- prices.modwt$data$d2 - d2.model.predicted;
118 rmse(d2.data.error)
119
120 d3.data.error <- prices.modwt$data$d3 - d3.model.predicted;
121 rmse(d3.data.error)
122
123 d4.data.error <- prices.modwt$data$d4 - d4.model.predicted;
124 rmse(d4.data.error)
125
126 d5.data.error <- prices.modwt$data$d5 - d5.model.predicted;
127 rmse(d5.data.error)
128
129 d5.data.error <- prices.modwt$data$d5 - d5.model.predicted;
130 rmse(d5.data.error)
131
132 s5.data.error <- prices.modwt$data$s5 - s5.model.predicted;
133 rmse(s5.data.error)
134
135 prices.new.recon <- wmtsa::reconstruct(prices.modwt) *reconstrucao da serie temporal
136 length(prices.new.recon)
137
138 effectiveness(y=prices2.data$prices, yhat=prices.new.recon, serie=prices2.data$prices,
139         residuals=NA, rank=3, model=NA)

```


Anexo E – Métodos em R - Cálculo da Previsão dos Modelos Tradicionais e Comparação com o Modelo Proposto

```

1 *****
2 * Ajustes e previsões com SARIMA *
3 *****
4 library("astsa")
5 prices.fit.sarima <- sarima(prices.ts, 2, 1, 2)
6 prices.pred.sarima <- sarima.for(prices.ts, n.ahead = 10, p = 1, d = 0, q = 1)
7
8 prices.fit.sarima$fit
9 prices.fit.sarima
10
11 effectiveness(y=prices.data$prices, yhat=NA, serie=prices.data$prices,
12               residuals=prices.fit.sarima$fit$residuals, rank=3, model=NA)
13
14 *****
15 * Ajustes e previsões com ARIMA *
16 *****
17 library("forecast")
18 prices.fit.arima <- auto.arima(prices.ts)
19
20 prices.fit.arima
21 effectiveness(y=prices.fit.arima$x, yhat=prices.fit.arima$fitted, serie=prices.data$prices,
22               residuals=NA, rank=3, model=NA)
23
24 *****
25 * Ajustes e previsões com ARFIMA *
26 *****
27 library("forecast")
28 library("astsa")
29
30 prices.fit.arfima <- forecast::arfima(prices.ts, drange = c(0, 0.5), estim = c("mle"))
31 prices.arfima.pf1 <- summary(prices.pred.arfima
32                             <- forecast::forecast(prices.fit.arfima, h = 10), print=FALSE)$'Point Forecast'
33
34 effectiveness(y=prices.pred.arfima$x, yhat=prices.pred.arfima$fitted, serie=prices.data$prices,
35               residuals=NA, rank=3, model=NA)
36
37 *****
38 * Ajustes e previsões com GARCH *
39 *****
40 library("astsa")
41 library("fBasics")
42 library("fGarch")
43
44 prices.fit.garch <- garchFit(prices ~ garch(1, 1), data = prices.data, trace = FALSE)
45 prices.pred.garch <- predict(prices.fit.garch, n.ahead = 10, plot = FALSE, crit_val = 2)
46
47 prices.pred.garch$meanError
48 summary(prices.fit.garch) * AIC, BIC, SIC, HQIC
49
50 *****
51 * Kernel Gaussiano ou Radial-Basis Function (RBF) via SVM tradicional *
52 *****
53 library("e1071")
54
55 prices.model <- svm(prices3 ~ recno, prices3.data, scale = TRUE, type = "eps-regression", kernel = "radial") # SEM denosing
56
57 prices.predicted <- predict(prices.model, prices3.data)
58 prices.error <- prices3.data$prices - prices.predicted
59
60 effectiveness(y=prices.predicted, yhat=NA, serie=prices3.data$prices,
61               residuals=prices.error, rank=3, model=NA)

```

Anexo F – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst - Médias e Desvio Padrão

```

1 *****
2 * Divide as observações em M subperíodos com o mesmo número t de observações *
3 *****
4 mySplit <- function(max1, array1) {
5   qdata1 <- seq_along(array1)
6   sdata1 <- split(array1, ceiling(qdata1 / max1)) * gera e separa a sequência de dados em "n" subperíodos
7
8   return(sdata1)
9 }
10
11 *****
12 * Cálculo das médias de cada subperíodo *
13 *****
14 myMean <- function(array2) {
15   ndata2 <- names(array2)
16   mdata2 <- rep(0, length(array2)) * gera array para as médias calculadas por subperíodo
17
18   for(n in 1:length(array2)) {
19     adata2 <- ndata2[n]
20     sdata2 <- array2[[adata2]]
21     mdata2[n] <- mean(sdata2) * calcula a média do subperíodo
22   }
23
24   return(mdata2)
25 }
26
27 *****
28 * Cálculo do desvio padrão de cada subperíodo *
29 *****
30 myStdDev <- function(array3) {
31   ndata3 <- names(array3)
32   pdata3 <- rep(0, length(array3)) * gera array para as médias calculadas por subperíodo
33
34   for(n in 1:length(array3)) {
35     adata3 <- ndata3[n]
36     sdata3 <- array3[[adata3]]
37     pdata3[n] <- sd(sdata3) * calcula o desvio padrão do subperíodo
38   }
39
40   return(pdata3)
41 }

```

Anexo G – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst por meio da Estatística R/S

```

1 *****
2 * Cálculo dos valores da Análise R/S *
3 *****
4 myR_s <- function(t5, array5) {
5   n <- t5
6
7   data5 <- mySplit(n, array5)           * divide as observações em M subperíodos
8   M <- myMean(data5)
9   x <- myStdDev(data5)
10
11   ndata5 <- names(data5)
12   R_s <- rep(0,length(data5))           * gera array para os R/S calculados por subperíodo
13
14   for (i in 1:length(data5)) {
15     adata5 <- ndata5[i]
16     N <- data5[[adata5]]
17     mi <- M[i]                           * seleciona a média mi do subperíodo
18     Y <- cumsum(N - mi)                   * desvios acumulados em relação a mi do subperíodo
19
20     maxY <- max(Y)
21     minY <- min(Y)
22     R <- maxY - minY
23
24     s <- x[i]                             * seleciona o desvio padrão do subperíodo
25     R_s[i] <- R / s                       * calcula o valor da da Análise R/S do subperíodo
26   }
27
28   return(mean(R_s))
29 }
30
31 *****
32 * pontos (x, y) gerados pela função R/S *
33 *****
34 R_s1 <- rep(0,length(t))                 * Contém os retornos dos R/S
35 x1 <- rep(0,length(t))
36 y1 <- rep(0,length(t))
37
38 for (j in 1:length(t)) {
39   n <- t[j]
40   R_s1[j] <- myR_s(n, prices.new.recon)   * Calcula o valor da Análise R/S
41                                           * para os valores da reconstrução da série temporal
42
43   x1[j] <- log(n)                         * ponto x do gráfico
44   y1[j] <- log(R_s1[j])                   * ponto y do gráfico
45 }
46
47 R_s1; x1; y1
48

```

Anexo H – Métodos em R - Cálculo do Expoente de Hurst - Plot da Reta de Tendência e Cálculo do Valor de p-value

```

1 *****
2 * plot o gráfico log(R/S) x log(n) e encontra a reta de tendência, onde a inclinação *
3 * da reta representa o valor estimado do expoente de Hurst (H) *
4 *****
5 mydf <- data.frame(x = x1, y = y1)
6 model <- lm(y1 ~ x1, data = mydf)
7
8 summary(model)
9 coef(model)
10
11 par(mfrow=c(1, 1))
12 plot(y1 ~ x1, data = mydf, main=paste("Gráfico log(R/S) x log(n):", serie, type1, sep=" "),
13      col.main="red", col.sub="blue", col.lab="darkgreen", lwd=2,
14      sub="Análise R/S", pch = 19, ylab="log(R/S)", xlab="log(n)"); grid()
15
16 abline(a=coef(model)[1], b=coef(model)[2], lty = 2, col = "blue", lwd=2)
17
18 *****
19 * A inclinação da reta representa o valor estimado do expoente de Hurst (H) *
20 *****
21 Hurst = coef(model)[2]
22 Hurst
23
24 *****
25 * Cálculo do valor de p-value e t-statistic *
26 *****
27 ttest = t.test(y1)
28 names(ttest)
29 ttest
30 ttest[['statistic']]
31 ttest[['p.value']]

```

Anexo I – Métodos em C# - Cálculo da Divisão das Séries em Períodos de 15 min., 1 hora e 1 dia

```

1 *****
2 * Método para divisão da séries em períodos de 15 min., 1 hora e 1 dia *
3 *****
4 private void btnProcess_Click(object sender, EventArgs e)
5 {
6     *****
7     * Instancia as variáveis para processamento de data *
8     *****
9     string periodicityBuffer_1_Day = "";
10    string periodicityBuffer_1_Hour = "";
11    string periodicityBuffer_15_Minutes = "";
12    string periodicityBuffer_1Range_Hour = "";
13    string periodicityBuffer_15Range_Minutes = "";
14
15    *****
16    * Instancia variáveis de controle de registros gerados *
17    *****
18    long c_1_Day = 0;
19    long c_1_Hour = 0;
20    long c_15_Minutes = 0;
21
22    *****
23    * Instancia as variáveis com os nomes dos arquivos de saída *
24    *****
25    string dirOutFile = Path.GetDirectoryName(Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()))
26        + "\\ForexData" + "\\" + Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6);
27
28    string dirOutFiles_1_Day = string.Format(@"{0}\1_Day"
29        , Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()));
30
31    string dirOutFiles_1_Hour = string.Format(@"{0}\1_Hour"
32        , Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()));
33
34    string dirOutFiles_15_Minutes = string.Format(@"{0}\15_Minutes"
35        , Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()));
36
37    string dirOutFiles_1Range_Hour = string.Format(@"{0}\1Range_Hour"
38        , Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()));
39
40    string dirOutFiles_15Range_Minutes = string.Format(@"{0}\15Range_Minutes"
41        , Path.GetDirectoryName(lstFileNames.Items[0].ToString()));
42
43    *****
44    * Instancia dados dos diretórios de saída dos dados processados *
45    *****
46    DirectoryInfo dirI = new DirectoryInfo(dirOutFile);
47    DirectoryInfo dirI_1_Day = new DirectoryInfo(dirOutFiles_1_Day);
48    DirectoryInfo dirI_1_Hour = new DirectoryInfo(dirOutFiles_1_Hour);
49    DirectoryInfo dirI_15_Minutes = new DirectoryInfo(dirOutFiles_15_Minutes);
50    DirectoryInfo dirI_1Range_Hour = new DirectoryInfo(dirOutFiles_1Range_Hour);
51    DirectoryInfo dirI_15Range_Minutes = new DirectoryInfo(dirOutFiles_15Range_Minutes);
52
53    *****
54    * Gera os diretórios de saída dos dados processados *
55    *****
56    if (dirI.Exists) { deleteDirectory(dirOutFile); }
57    Directory.CreateDirectory(dirOutFile);
58
59    if (dirI_1_Day.Exists) { deleteDirectory(dirOutFiles_1_Day); }
60    Directory.CreateDirectory(dirOutFiles_1_Day);
61
62    if (dirI_1_Hour.Exists) { deleteDirectory(dirOutFiles_1_Hour); }
63    Directory.CreateDirectory(dirOutFiles_1_Hour);
64    if (dirI_15_Minutes.Exists) { deleteDirectory(dirOutFiles_15_Minutes); }
65    Directory.CreateDirectory(dirOutFiles_15_Minutes);
66
67    if (dirI_1Range_Hour.Exists) { deleteDirectory(dirOutFiles_1Range_Hour); }

```

```

68 Directory.CreateDirectory(dirOutFiles_1Range_Hour);
69
70 if (dirI_15Range_Minutes.Exists) { deleteDirectory(dirOutFiles_15Range_Minutes); }
71 Directory.CreateDirectory(dirOutFiles_15Range_Minutes);
72
73 *****
74 * Gera os nomes dos arquivos de saída dos dados processados *
75 *****
76 string outFile1Day = string.Format(@"{0}\{1}_1_Day.txt", dirOutFile
77     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
78
79 string outFile1Hour = string.Format(@"{0}\{1}_1_Hour.txt", dirOutFile
80     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
81
82 string outFile15Min = string.Format(@"{0}\{1}_15_Min.txt", dirOutFile
83     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
84
85 string outFile_1_Day = string.Format(@"{0}\{1}_1_Day.txt", dirOutFiles_1_Day
86     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
87
88 string outFile_1_hour = string.Format(@"{0}\{1}_1_Hour.txt", dirOutFiles_1_Hour
89     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
90
91 string outFile_15_Minutes = string.Format(@"{0}\{1}_15_Min.txt", dirOutFiles_15_Minutes
92     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
93
94 string outFile_1Range_hour = string.Format(@"{0}\{1}_1Range_Hour.txt", dirOutFiles_1Range_Hour
95     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
96
97 string outFile_15Range_Minutes = string.Format(@"{0}\{1}_15Range_Min.txt", dirOutFiles_15Range_Minutes
98     , Path.GetFileName(lblDirectory.Text).Substring(0, 6));
99
100 *****
101 * Para cada arquivo contido na lista de arquivos a processar *
102 *****
103 for (int i = 0; i < lstFileNames.Items.Count; i++)
104 {
105     string file = lstFileNames.Items[i].ToString();
106
107     *****
108     * Abre o arquivo da lista de arquivos a serem processados *
109     *****
110     using (StreamReader sr = new StreamReader(file))
111     {
112         *****
113         * Efetua a leitura de todo o arquivo e gera ARRAY com os registros *
114         *****
115         String buffer = sr.ReadToEnd();
116         string[] lines = buffer.Split('\n');
117
118         *****
119         * Para cada linha lida do arquivo de trabalho *
120         *****
121         foreach (string line in lines)
122         {
123             *****
124             * Verifica se linha contem dados, gera ARRAY com as colunas do registro *
125             *****
126             if (string.IsNullOrEmpty(line)) continue;
127             string[] fields = line.Split(';');
128
129             *****
130             * Obtem dados de Timestamp (Data + Horário) e Preço de Fechamento *
131             *****
132             DateTime date = Convert.ToDateTime(string.Format("{0}-{1}-{2} {3}:{4}:{5}"
133                 , fields[0].Substring(0, 4)
134                 , fields[0].Substring(4, 2)
135                 , fields[0].Substring(6, 2)
136                 , fields[0].Substring(9, 2)
137                 , fields[0].Substring(11, 2)
138                 , fields[0].Substring(13, 2)));
139
140             double closedPrice = Convert.ToDouble(fields[4]);
141

```

```

142      *****
143      * Verifica se Timestamp para 15 minutos é maior que o último persistido *
144      *****
145      if (periodicityDate_15_Minutes == Convert.ToDateTime("1900-01-01 00:00:00") ||
146          date >= periodicityDate_15_Minutes)
147      {
148          *****
149          * Persiste os dados de Timestamp e Preço de Fechamento para 15 minutos *
150          *****
151          periodicityBuffer_15_Minutes += string.Format("{0};{1};{2}\n"
152              , ++c_15_Minutes, date.ToString("yyyy-MM-dd HH:mm:ss")
153              , closedPrice.ToString("N2"));
154
155          periodicityDate_15_Minutes = date.AddMinutes(+15);
156      }
157  }
158  }
159  }
160
161      *****
162      * Geração de Dados de 1 hora e 1 dia a partir dos dados de 15 min *
163      *****
164      generate1Hour1DayOfData(periodicityBuffer_15_Minutes
165          , ref periodicityBuffer_1_Hour
166          , ref periodicityBuffer_1_Day
167          , c_15_Minutes
168          , ref c_1_Hour
169          , ref c_1_Day
170          , startTime);
171
172      *****
173      * Geração de Dados de 1 hora e 15 minutos para o range de dados de 1 dia *
174      *****
175      periodicityBuffer_1Range_Hour = getRangeOfData(periodicityBuffer_1_Hour
176          , c_1_Day, c_1_Hour);
177
178      periodicityBuffer_15Range_Minutes = getRangeOfData(periodicityBuffer_15_Minutes
179          , c_1_Day, c_15_Minutes);
180
181      *****
182      * Persiste no arquivo de saída dados de Timestamp e Preço de Fechamento *
183      *****
184      File.WriteAllText(outFile_1_Day, periodicityBuffer_1_Day);
185      File.WriteAllText(outFile_1_hour, periodicityBuffer_1_Hour);
186      File.WriteAllText(outFile_15_Minutes, periodicityBuffer_15_Minutes);
187      File.WriteAllText(outFile_1Range_hour, periodicityBuffer_1Range_Hour);
188      File.WriteAllText(outFile_15Range_Minutes, periodicityBuffer_15Range_Minutes);
189      File.WriteAllText(outFile1Day, periodicityBuffer_1_Day);
190      File.WriteAllText(outFile1Hour, periodicityBuffer_1Range_Hour);
191      File.WriteAllText(outFile15Min, periodicityBuffer_15Range_Minutes);
192  }

```

Anexo J – Métodos em C# - Cálculo da Divisão dos Dados nos Períodos de 15 min., 1 hora e 1 dia

```

1 *****
2 * Metodo para a geração de Dados, 1 hora e 1 dia, dos dados de 15 min *
3 *****
4 private void generate1Hour1DayOfData(string periodicityBuffer_15_Minutes
5                                     , ref string periodicityBuffer_1_Hour
6                                     , ref string periodicityBuffer_1_Day
7                                     , long c_15_Minutes
8                                     , ref long c_1_Hour
9                                     , ref long c_1_Day
10                                    , DateTime startTime)
11 {
12     *****
13     * Instancia as variáveis de timestamp para a periodicidade *
14     *****
15     DateTime periodicityDate_1_Day = Convert.ToDateTime("1900-01-01 00:00:00");
16     DateTime periodicityDate_1_Hour = Convert.ToDateTime("1900-01-01 00:00:00");
17
18     *****
19     * Efetua a leitura dos dados e gera ARRAY com os registros de 15 minutos *
20     *****
21     string[] period_Range = periodicityBuffer_15_Minutes.Split('\n');
22     for (long c = 0; c < c_15_Minutes; c++)
23     {
24         *****
25         * Verifica se contem dados, gera ARRAY com col. do registro 15 minutos *
26         *****
27         if (string.IsNullOrEmpty(period_Range[c])) continue;
28         string[] fields = period_Range[c].Split(';');
29
30         DateTime date = Convert.ToDateTime(fields[1]);
31         double closedPrice = Convert.ToDouble(fields[2]);
32
33         *****
34         * Verifica se o Timestamp para 1 day é maior que o último persistido *
35         *****
36         if (periodicityDate_1_Day == Convert.ToDateTime("1900-01-01 00:00:00") ||
37             date >= periodicityDate_1_Day)
38         {
39             *****
40             * Persiste os dados de Data, Horário e Preço de Fechamento para 1 dia *
41             *****
42             periodicityBuffer_1_Day += string.Format("{0};{1};{2}\n", ++c_1_Day
43                 , date.ToString("yyyy-MM-dd HH:mm:ss"), closedPrice.ToString("N2"));
44
45             periodicityDate_1_Day = DateTimeExtensions.AddWorkDays(Convert.ToDateTime(date), +1);
46         }
47
48         *****
49         * Verifica se o Timestamp para 1 hora é maior que o último persistido *
50         *****
51         if (periodicityDate_1_Hour == Convert.ToDateTime("1900-01-01 00:00:00") ||
52             date >= periodicityDate_1_Hour)
53         {
54             *****
55             * Persiste os dados de Timestamp e Preço de Fechamento para 1 hora *
56             *****
57             periodicityBuffer_1_Hour += string.Format("{0};{1};{2}\n", ++c_1_Hour
58                 , date.ToString("yyyy-MM-dd HH:mm:ss"), closedPrice.ToString("N2"));
59
60             periodicityDate_1_Hour = date.AddHours(+1);
61         }
62     }
63 }
64
65 *****
66 * Método para geração de Dados, 1 hora e 15 minutos, para range de 1 dia *
67 *****

```



```

68 private string getRangeOfData(string periodicityBuffer, long cDay, long cPeriod)
69 {
70     Random rnd = new Random();
71     string periodicityBufferRange = "";
72
73     long cRange = 0;
74     long c_rnd = 0;
75     do
76     {
77         *****
78         * Encontra Range de Dados aleatório a partir da quantidade de 1 dia *
79         *****
80         c_rnd = (long)Math.Round(rnd.NextDouble() * ((double)cPeriod - 1.0) + 1.0, 0);
81     } while (cDay + c_rnd > cPeriod);
82
83     *****
84     * Efetua a leitura dos dados e gera ARRAY com os regs. Range encontrado *
85     *****
86     string[] period_Range = periodicityBuffer.Split('\n');
87     for (long j = c_rnd; j < cDay + c_rnd; j++)
88     {
89         *****
90         * Verifica se contem dados, gera ARRAY com col. do reg. Range encontrado *
91         *****
92         if (string.IsNullOrEmpty(period_Range[j])) continue;
93         string[] fields = period_Range[j].Split(';');
94
95         *****
96         * Persiste dados de Timestamp e Preço de Fechamento do Range encontrado *
97         *****
98         periodicityBufferRange += string.Format("{0};{1};{2}\n", ++cRange, fields[1], fields[2]);
99     }
100
101     return periodicityBufferRange;
102 }

```