ÉVERTON LINS DE OLIVEIRA

**Modelagem e controle do manipulador de uma escavadeira
hidráulica**

São Paulo

2018

ÉVERTON LINS DE OLIVEIRA

**Modelagem e controle do manipulador de uma escavadeira
hidráulica**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Ciências

São Paulo
2018

ÉVERTON LINS DE OLIVEIRA

**Modelagem e controle do manipulador de uma escavadeira
hidráulica**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Ciências

Área de concentração:
Engenharia de Controle e Automação
Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Décio Crisol Donha

São Paulo

2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Oliveira, Éverton Lins de
Modelagem e controle do manipulador de uma escavadeira hidráulica /
E. L. Oliveira -- versão corr. -- São Paulo,
2018. 310 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Sistemas não lineares 2.Simulação (Modelagem) 3.Robótica
4.Sistemas de controle I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria
Adeilda e José Valter.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de realizar este trabalho, pois sem ele nada seria possível.

Ao Prof. Dr. Renato Marques de Barros, pelo incentivo e pela sua orientação no trabalho de conclusão de curso na Fundação Educacional Inaciana (FEI).

Ao meu amigo e orientador, Prof. Dr. Décio Crisol Donha, pelo apoio, orientação, paciência e por acreditar no trabalho.

Ao Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury, pelo incentivo, atenção e sugestões sobre o trabalho, e por ter sido um tutor na Universidade de São Paulo (USP).

Aos Profs. Drs. Celso Pupo Pesce e Eduardo Aoun Tannuri, pelas valiosas sugestões e correções no exame de qualificação que auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Profs. Drs. Alberto Luiz Serpa e Bruno Augusto Angélico, pela participação na banca de defesa desta dissertação.

À Escola Politécnica da USP, pela oportunidade que tive de realizar o curso de mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de mestrado que possibilitou a realização dessa pesquisa.

A todos aqueles que colaboraram para o desenvolvimento desta dissertação.

Finalmente, aos meu pais, Maria Adeilda e José Valter, que sempre se doaram muito a minha educação. Este trabalho é dedicado a eles.

“Viva como se fosse morrer amanhã.
Aprenda como se fosse viver para sempre”.

Mahatma Gandhi

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível”.

São Francisco de Assis

RESUMO

OLIVEIRA, E. L. **Modelagem e controle do manipulador de uma escavadeira hidráulica**. 2018. 310 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Escavadeiras hidráulicas são máquinas versáteis, amplamente utilizadas na construção civil e mineração. Máquinas melhores, mais produtivas, eficientes e que oferecem segurança ao operador são uma demanda constante da indústria. Devido a estes fatores, o controle para a automação de uma escavadeira hidráulica tem sido investigado. Este estudo tem o seu foco voltado para o controle do manipulador do equipamento, que é considerado como um dos elementos fundamentais para o desenvolvimento de uma escavadeira automática. Para desenvolver um sistema de controle viável, primeiramente, foi realizado a modelagem matemática dos subsistemas mecânico e hidráulico do manipulador; posteriormente esses modelos foram acoplados para representar a interação dos subsistemas. Todos os modelos desenvolvidos foram comparados com modelos de referência, obtidos a partir de *softwares* comerciais dedicados a modelagem de sistema dinâmicos. Tendo sido verificado a capacidade de representação física dos modelos, a fase de projeto do controlador para o manipulador foi iniciada. Para que o controlador seja eficiente, este deve ter duas propriedades essenciais: robustez para lidar com as incertezas e distúrbios severos, e adaptabilidade para lidar com um ambiente de operação altamente dinâmico. A fim de projetar um controlador que considera a dinâmica de cada subsistema do manipulador, a técnica de controle em cascata foi adotada. Esta consiste em dividir o sistema global em subsistemas, de tal forma que seja possível projetar um controlador para cada subsistema. Devido à complexidade do modelo matemático, técnicas avançadas de controle linear e não linear foram combinadas no projeto dos controladores dos subsistemas. O controlador sintetizado foi testado através de simulação numérica, em ambiente MATLAB/Simulink®, na execução de um ciclo completo de trabalho pelo manipulador. Os resultados obtidos foram considerados satisfatórios, mesmo na presença de incertezas, distúrbios severos e de ruídos. Posteriormente, na comparação

desses resultados com os de outros controladores, ficou claro que o melhor desempenho foi obtido com o controlador proposto. Isto indica a possível aplicabilidade de tal controlador para a automação deste tipo de equipamento.

Palavras-chave: Escavadeira hidráulica. Manipulador hidráulico. Modelagem matemática. Controle em cascata. Controle robusto.

ABSTRACT

OLIVEIRA, E. L. **Modeling and control of the manipulator of a hydraulic excavator**. 2018. 310 p. Thesis (Master's Degree) - Polytechnic School, University of São Paulo, São Paulo, 2018.

Hydraulic excavators are versatile machines, widely used in civil construction and in mining. Better, more productive, and efficient machines that offer operator safety are a constant industry demand. Due to these factors, the control for the automation of a hydraulic excavator has been investigated. This study focuses on the control of the equipment's manipulator, which is considered as one of the fundamental elements for the development of an automatic excavator. To develop a viable control system, first, the mathematical modeling of the mechanical and hydraulic subsystems of the manipulator was carried out; later these models were coupled to represent the interaction between the subsystems. All the developed models were compared with reference models, obtained from a commercial software dedicated to dynamic system modeling. Having verified the physical representation capacity of the analytical models, the design phase of the controller was started. For the controller to be efficient, it must have two essential properties: robustness to deal with severe uncertainties and disturbances, and adaptability to handle a highly dynamic operating environment. To design a controller that considers the dynamics of each subsystem of the manipulator, the cascade control technique was adopted. This consists of dividing the global system into subsystems, in such a way that it is possible to design a controller for each subsystem. Due to the complexity of the mathematical model, advanced linear and non-linear control techniques were combined in subsystem controllers design. The synthesized controller was tested by numerical simulation, in MATLAB/Simulink® environment, in the execution of a complete work operation by the manipulator. The results obtained were considered satisfactory, even in the presence of uncertainties, severe disturbances and noise. Subsequently, in the comparison of these results with those of others controllers, it was clear that the best performance was obtained with the proposed controller. This indicates the possible applicability of such a controller to the automation of this type of equipment.

Keywords: Hydraulic Excavator. Hydraulic manipulator. Mathematical modeling. Cascade control. Robust control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aplicações das escavadeiras hidráulicas	32
Figura 2 - Implementos	33
Figura 3 - Principais componentes de uma escavadeira hidráulica	34
Figura 4 - Demandas da indústria	36
Figura 5 - Simuladores.....	37
Figura 6 - Miniescavadeira para operações de resgate	38
Figura 7 - Limpeza do local do evento.....	39
Figura 8 - Modelo do manipulador de uma escavadeira Terex O&K RH 200 no SimMechanics™	42
Figura 9 - Processo de modelagem e simulação de sistemas hidráulicos	44
Figura 10 - Modelo do manipulador de uma escavadeira hidráulica no LMS.AMESim®.....	45
Figura 11 - Simulação da operação de escavação com o <i>pack</i> EDEM no MSC.ADAMS®	46
Figura 12 - Esquema de controle de uma miniescavadeira hidráulica	47
Figura 13 - Operação remota através do módulo CAT® COMMAND MINESTAR ...	52
Figura 14 - Manipulador do tipo miniescavadeira hidráulica utilizado	57
Figura 15 - Sistemas de coordenadas, coordenadas generalizadas e pontos.....	59
Figura 16 - Esforços ativos do subsistema mecânico do manipulador.....	68
Figura 17 - Atuação dos vetores de força hidráulica do cilindro i	71
Figura 18 - Comprimento dos cilindros hidráulicos.....	73
Figura 19 - Sistemas de coordenadas, pontos e dimensões características	75
Figura 20 - Orientação dos cilindros e das barras.....	76
Figura 21 - Direção da força de escavação e ângulos característicos	87
Figura 22 - Dimensões especificadas para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba	90
Figura 23 - Cinemática inversa do manipulador	92
Figura 24 - Trajetória de verificação dos modelos no espaço de trabalho	94
Figura 25 - Trajetória de verificação dos modelos.....	95
Figura 26 - Execução da trajetória de verificação pelo manipulador	96

Figura 27 - Modelo do manipulador no SOLIDWORKS/Motion®	97
Figura 28 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1 com o modelo reduzido	98
Figura 29 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2 com o modelo reduzido	99
Figura 30 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3 com o modelo reduzido	99
Figura 31 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4 com o modelo reduzido	100
Figura 32 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1 com o modelo completo	100
Figura 33 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2 com o modelo completo	101
Figura 34 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3 com o modelo completo	101
Figura 35 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4 com o modelo completo	102
Figura 36 - Diagrama de blocos do subsistema hidráulico do manipulador	104
Figura 37 - Diagrama esquemático do atuador hidráulico	105
Figura 38 - Escoamento unidirecional em um volume de controle	107
Figura 39 - Escoamento através de um orifício	109
Figura 40 - Solenoide proporcional de acionamento da válvula	111
Figura 41 - Diagrama de corpo livre do carretel da válvula	112
Figura 42 - Válvula direcional de 4 vias e 3 posições em corte	114
Figura 43 - Tubulações e cilindro diferencial em corte	115
Figura 44 - Diagrama esquemático do sistema haste mais carga	118
Figura 45 - Força gerada pelo modelo de atrito dos cilindros	119
Figura 46 - Diagrama de blocos do modelo de 6ª ordem	120
Figura 47 - Diagrama de blocos do modelo de 4ª ordem	122
Figura 48 - Diagrama de blocos do modelo de 3ª ordem	126
Figura 49 - Deslocamento linear da haste do cilindro	128
Figura 50 - Velocidade linear da haste do cilindro	128
Figura 51 - Força hidráulica gerada pelo atuador	129
Figura 52 - Diagramas de blocos dos modelos acoplados do manipulador	139
Figura 53 - Modelo acoplado de referência criado com o Simscape™	140
Figura 54 - Gráfico da tensão de comando para verificação dos modelos	141
Figura 55 - Deslocamento angular da junta da base	142
Figura 56 - Deslocamento angular da junta da lança	142
Figura 57 - Deslocamento angular da junta do braço	143
Figura 58 - Deslocamento angular da junta da caçamba	143

Figura 59 - Velocidade angular da junta da base	144
Figura 60 - Velocidade angular da junta da lança	144
Figura 61 - Velocidade angular da junta do braço	145
Figura 62 - Velocidade angular da junta da caçamba	145
Figura 63 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1	146
Figura 64 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2	146
Figura 65 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3	147
Figura 66 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4	147
Figura 67 - Resposta do modelo linear ao impulso unitário	156
Figura 68 - Ganhos das funções de transferência do modelo linear	157
Figura 69 - Frequências naturais do modelo linear	157
Figura 70 - Fatores de amortecimento do modelo linear	158
Figura 71 - Pólos da velocidade linear dos cilindros	158
Figura 72 - Pólos da pressão de carga dos cilindros	159
Figura 73 - Estrutura de um sistema em cascata	161
Figura 74 - Diagrama de blocos do controle em cascata para um manipulador hidráulico	164
Figura 75 - Incertezas estruturadas	169
Figura 76 - Incertezas não estruturadas	170
Figura 77 - Diagrama de blocos do sistema de controle genérico com realimentação negativa	171
Figura 78 - Barreiras de robustez e especificações para as funções de sensibilidade do sistema	173
Figura 79 - Estabilidade robusta para o caso escalar	175
Figura 80 - Desempenho robusto para o caso escalar	178
Figura 81 - Ponderação das funções de sensibilidade	180
Figura 82 - Configuração genérica de dois portos	181
Figura 83 - Modelo de impedância do manipulador com o ambiente	187
Figura 84 - Superfície de escorregamento para $n = 2$	190
Figura 85 - Sequência de filtros em cascata	191
Figura 86 - Trajetória típica de um sistema de 2ª ordem controlado	192
Figura 87 - Fenômeno de <i>chattering</i>	196

Figura 88 - Camada limite.....	197
Figura 89 - Controle de impedância baseado na força.....	203
Figura 90 - Controle de impedância baseado na força para o manipulador.....	205
Figura 91 - Dinâmica do subsistema hidráulico após a aplicação da linearização por realimentação	216
Figura 92 - Diagrama de blocos do esquema de controle robusto do subsistema hidráulico.....	217
Figura 93 - Configuração geral para a síntese do controlador	218
Figura 94 - Estrutura do controlador robusto do subsistema hidráulico	219
Figura 95 - Funções de ponderação escolhidas.....	220
Figura 96 - Formatação da função de sensibilidade.....	221
Figura 97 - Formatação da função de sensibilidade complementar.....	221
Figura 98 - Formatação da função de sensibilidade do controlador.....	222
Figura 99 - Diagrama de blocos do controle em cascata para o manipulador	224
Figura 100 - Fases da operação de escavação	228
Figura 101 - Trajetória de referência para o teste do controlador	229
Figura 102 - Seguidores do ângulo de ataque da caçamba	231
Figura 103 - Deslocamentos angulares desejados	231
Figura 104 - Demanda de vazão e pressão do atuador 1	235
Figura 105 - Demanda de vazão e pressão do atuador 2	235
Figura 106 - Demanda de vazão e pressão do atuador 3	236
Figura 107 - Demanda de vazão e pressão do atuador 4	236
Figura 108 - Sensores	238
Figura 109 - Seguimento dos deslocamentos angulares com ISMC+RFL.....	242
Figura 110 - Seguimento dos deslocamentos angulares com PID+P	242
Figura 111 - Seguimento dos deslocamentos angulares com SMC+P	243
Figura 112 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com ISMC+RFL.....	243
Figura 113 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com PID+P	244
Figura 114 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com SMC+P	244
Figura 115 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com ISMC+RFL .	245
Figura 116 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com PID+P	245
Figura 117 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com SMC+P	246

Figura 118 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com ISMC+RFL.....	246
Figura 119 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com PID+P	247
Figura 120 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com SMC+P	247
Figura 121 - Tensões de comando com ISMC+RFL	248
Figura 122 - Tensões de comando com PID+P.....	248
Figura 123 - Tensões de comando com SMC+P.....	249
Figura 124 - Espaço de fase do erro de seguimento com ISMC+RFL.....	249
Figura 125 - Espaço de fase do erro de seguimento com PID+P	250
Figura 126 - Espaço de fase do erro de seguimento com SMC+P	250
Figura 127 - Índices ITAE dos controladores testados.....	253
Figura 128 - Índices IAE dos controladores testados	254
Figura 129 - Índices IAU dos controladores testados.....	254
Figura 130 - Dimensões características do manipulador	276
Figura 131 - Diagrama de blocos do modelo do subsistema mecânico no SimMechanics™	284
Figura 132 - Representação gráfica do modelo do subsistema mecânico no Simscape™.....	285
Figura 133 - Diagrama de blocos do modelo do acionamento da válvula no Simscape™	286
Figura 134 - Diagrama de blocos do modelo da válvula no SimHydraulics®.....	287
Figura 135 - Diagrama de blocos do modelo do cilindro diferencial no SimHydraulics®	288
Figura 136 - Diagrama de blocos do batente translacional no SimMechanics™	290
Figura 137 - Diagrama de blocos do modelo do subsistema hidráulico no Simscape™.....	292
Figura 138 - Diagrama de blocos de uma interface translacional ideal criada com o Simscape™.....	293
Figura 139 - Ciclo de solução do modelo criado com o Simscape™	294
Figura 140 - Simulador do sistema controlado no Simulink®.....	306
Figura 141 - Modelo do subsistema hidráulico no Simulink®.....	307
Figura 142 - Modelo completo do subsistema mecânico no Simulink®	307
Figura 143 - UKF no Simulink®.....	308

Figura 144 - Gerador da trajetória desejada no Simulink®	308
Figura 145 - Controlador em cascata no Simulink®	309
Figura 146 - Controlador do subsistema mecânico no Simulink®	309
Figura 147 - Controlador do subsistema hidráulico no Simulink®	310

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Trabalhos sobre a modelagem do subsistema mecânico	43
Tabela 2 - Trabalhos sobre o controle do manipulador	51
Tabela 3 - Parâmetros da tensão de comando para verificação dos modelos acoplados.....	141
Tabela 4 - Pontos da trajetória de referência para o teste do controlador	230
Tabela 5 - Ângulo de ataque da caçamba para a trajetória de referência.....	230
Tabela 6 - Estados iniciais do modelo de 24ª ordem do manipulador	240
Tabela 7 - Índices de performance dos controladores	253
Tabela 8 - Dimensões lineares e angulares do manipulador	274
Tabela 9 - Propriedades de massa dos elos do manipulador	275
Tabela 10 - Parâmetros do modelo da força de escavação	277
Tabela 11 - Parâmetros para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba	277
Tabela 12 - Parâmetros da unidade de suprimento	278
Tabela 13 - Parâmetros das válvulas direcionais	278
Tabela 14 - Parâmetros do cilindro hidráulico de verificação	279
Tabela 15 - Parâmetros do subsistema mecânico de verificação	279
Tabela 16 - Parâmetros do fluido hidráulico	279
Tabela 17 - Parâmetros dos cilindros hidráulicos.....	280
Tabela 18 - Parâmetros do modelo de atrito dos cilindros hidráulicos	280
Tabela 19 - Juntas entre os elos do manipulador.....	283
Tabela 20 - Parâmetros dos sensores para a representação dos ruídos.....	300
Tabela 21 - Parâmetros utilizados no projeto do UKF	300
Tabela 22 - Parâmetros utilizados no projeto do controlador subótimo	304
Tabela 23 - Parâmetros do controlador ISMC+RFL	305
Tabela 24 - Parâmetros dos controladores PID+P e SMC+P	305

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DOF	<i>Degree of Freedom</i>
PC	<i>Position Control</i>
PID	<i>Proportional, Integral and Derivative</i>
CTC	<i>Computed Torque Control</i>
TD	<i>Time Delay</i>
FPC	<i>Force and Position Control</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
ADAMS	<i>Advanced Dynamics Analysis of Mechanical Systems</i>
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i>
ISMC	<i>Impedance Sliding Mode Control</i>
RFL	<i>Robust Feedback Linearization</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
ITAE	<i>Integral Time-weighted Absolute Error</i>
IAE	<i>Integral Absolute Error</i>
IAU	<i>Integral Absolute Control</i>
MEMS	<i>Micro Electromechanically Systems</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Nas relações apresentadas a seguir tem-se que a notação em negrito é utilizada para indicar funções vetoriais e matriciais, e as letras em itálico i e j são utilizadas para representar índices.

Modelagem do subsistema mecânico

θ	Deslocamento angular
R	Matriz de rotação
r	Vetor de posição
v	Vetor de velocidade
a	Vetor de aceleração
Θ	Vetor de orientação angular
ω	Vetor de velocidade angular
α	Vetor de aceleração angular
I	Tensor de inércia
T	Função de energia cinética
U	Função de energia potencial
L	Função Lagrangiana
Q	Força generalizada
Q^{nc}	Força generalizada não conservativa
q	Coordenada generalizada
m	Massa
n	Número de coordenadas generalizadas
ν	Número de graus de liberdade
N	Número de elos
N^*	Número de pontos materiais
F	Vetor de forças ativas

G	Vetor de força peso
g	Aceleração da gravidade
τ	Torque motor
F	Força ativa generalizada
F^*	Força inercial generalizada
M	Vetor de momentos ativos
$\dot{\mathbf{H}}$	Vetor de variação de quantidade de movimento angular
δq	Deslocamento virtual
δW	Somatória dos trabalhos virtuais
D	Matriz de acoplamento
f	Vetor de forças ativas e inerciais
e	Vetor de equações de movimento
λ_l	Multiplicadores de Lagrange
g_l	Equações vinculares
F_e	Força de escavação
F_t	Forças tangencial de escavação
F_n	Forças normal de escavação
δ_e	Ângulo da força de escavação
θ_e	Ângulo de escavação
$\mathbf{F}_e$	Vetor das forças de escavação
$\boldsymbol{\tau}_e$	Vetor dos torques de escavação
k_p, k_s	Resistências específicas ao corte do solo
b, h	Largura e altura da fatia de solo
μ	Coeficiente de atrito entre a caçamba e o solo
F_p	Forças de pressão da caçamba com o solo
ε	Coeficiente de resistência ao enchimento da caçamba
V_b	Volume da caçamba
V_s	Volume do prisma de solo
Δx_i	Deslocamento horizontal relativo no plano de escavação

τ_s	Vetor dos torques de enchimento da caçamba
m_s	Massa de solo amontado na caçamba
V_e	Volume em excesso da caçamba
ρ_s	Densidade do solo
V_h	Volume total da caçamba
t	Tempo

Modelagem do subsistema hidráulico

R_b	Resistência das bobinas do solenoide
u_v	Tensão de comando aplicada na bobina
i_m	Corrente produzida nas bobinas
τ_s	Constante de tempo do solenoide
m_v	Massa do carretel
b_v	Coeficiente de amortecimento viscoso do carretel
k_v	Constante elástica da mola de centragem do carretel
F_v	Força magnética exercida pelo solenoide
k_f	Ganho de força do solenoide
x_v	Deslocamento do carretel
ω_v	Frequência natural do carretel
ζ_v	Coeficiente de amortecimento do carretel
k_{em}	Constante eletromecânica
$Q_{a,b}$	Vazões das câmaras a e b do cilindro
$p_{a,b}$	Pressões das câmaras a e b do cilindro
$k_{a,b}$	Coeficientes de vazão dos orifícios a e b da válvula
$K_{a,b}$	Constantes hidráulicas dos orifícios a e b
p_s	Pressão de suprimento
p_t	Pressão do tanque
Δp	Diferenças entre as pressões das câmaras do cilindro

β	Módulo de elasticidade volumétrica do fluido hidráulico
β_e	Módulo de elasticidade volumétrica efetivo do fluido hidráulico
C_{in}	Coeficiente de vazamento interno entre as câmaras do cilindro
$V_{a,b}$	Volumes das câmaras a e b do cilindro
$A_{a,b}$	Área de seção transversal das câmaras a e b do cilindro
$\tilde{l}_{a,b}$	Comprimentos iniciais das câmaras a e b do cilindro
y_c	Deslocamento da haste do cilindro
V_{tub}	Volume das tubulações
F_{in}	Força de inércia do cilindro
F_{at}	Força de atrito do cilindro
F_l	Força de carga
F_g	Força peso do cilindro
F_h	Força hidráulica do cilindro
m_c	Massa total em movimento
m_h	Massa da haste
m_l	Massa da carga
m_f	Massa efetiva do fluido em movimento
F_c	Força de atrito de Coulomb
k_{est}	Coeficiente de atrito estático
c_v	Coeficiente de transição
B_v	Coeficiente de atrito viscoso
v_{tr}	Velocidade de transição da camada limite
σ_v	Relação entre as constantes hidráulicas da válvula
α_c	Relação entre as áreas de seção transversal do cilindro
r_v	Relação entre os volumes das câmaras do cilindro
p_l	Pressão de carga
Q_l	Vazão de carga
K_l	Coeficiente de vazão de carga
λ_l, γ_l	Coeficientes do modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico

τ	Vetor de torques gerados pelos atuadores nas juntas
q	Vetor de coordenadas generalizadas
M	Matriz de inércia
C	Matriz dos termos de aceleração centrípeta e de Coriolis
G	Vetor dos torques gravitacionais
F	Vetor das forças resultantes nos cilindros
$A_{a,b}$	Matrizes das áreas de seção transversal das câmaras a e b
$p_{a,b}$	Vetores das pressões das câmaras a e b
M_c	Matriz da massa da parte móvel dos cilindros
G_c	Vetor de torques gravitacionais da parte móvel dos cilindros
F_{at}	Vetor de forças de atrito dos cilindros
J	Matriz Jacobiana
F_h	Vetor de forças hidráulicas
y_c	Vetor de comprimentos dos cilindros
ω_v	Vetor de frequências naturais das válvulas
K_{em}	Matriz de constantes eletromecânicas
ζ_v	Matriz de coeficientes de amortecimento
x_v	Vetor de deslocamento dos carretes
u_v	Vetor de tensões de comando
E, F, D	Matrizes dos modelos do subsistema hidráulico
C_{in}	Matriz de coeficientes de vazamento interno
Δp	Vetor de diferença de pressão entre as câmaras dos cilindros
p_l	Vetor de pressão de carga
B_v	Matriz de coeficientes de atrito viscoso
k_q	Coeficiente de vazão da válvula
k_{qp}	Coeficiente de pressão da válvula
C_l	Coeficiente de vazamento relacionado à pressão de carga
λ_l, γ_l	Matrizes de coeficientes λ_{li} e γ_{li}
K_q	Matriz de coeficientes de vazão das válvulas

$\mathbf{K}_{qp}$	Matriz de coeficientes de pressão das válvulas
$\mathbf{C}_l$	Matriz de coeficientes C_{li}

Controle do manipulador

$\mathbf{x}$	Vetor de estados do sistema
$\mathbf{y}$	Vetor de saídas do sistema
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas do sistema
$\mathbf{A}$	Matriz de estados do sistema
$\mathbf{B}$	Matriz de entradas de controle do sistema
$\mathbf{C}$	Matriz de saídas medidas do sistema
$\mathbf{D}$	Matriz de transmissão direta do sistema
$\mathbf{G}_\Delta$	Planta real
$\mathbf{G}$	Planta nominal
Δ_E	Incerteza estruturada
Δ_A	Incerteza aditiva
Δ_M	Incerteza multiplicativa
$\mathbf{S}$	Função de sensibilidade
$\mathbf{T}$	Função de sensibilidade complementar
$\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{S}$	Função de sensibilidade do controlador
$\mathbf{W}_s$	Função de ponderação da sensibilidade
$\mathbf{W}_T$	Função de ponderação da sensibilidade complementar
$\mathbf{W}_C$	Função de ponderação da sensibilidade do controlador
$\mathbf{W}_M$	Função de ponderação das incertezas
$\mathbf{L}(s)$	Função de transferência de malha
$\mathbf{P}(s)$	Planta generalizada
$\mathbf{K}(s)$	Controlador
$\mathbf{w}$	Distúrbios externos e entradas exógenas
$\mathbf{z}$	Sinal ponderado

M_d, B_d, K_d	Inércia, amortecimento e rigidez desejadas
M_e, B_e, K_e	Inércia, amortecimento e rigidez do meio
F_d	Força desejada
F_e	Forças de interação do efetuator com o meio
$Z_d(s)$	Impedância desejada
u	Entrada de controle
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas de controle com termos u_j
$b(\mathbf{x}, t)$	Função da entrada u
$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$	Matriz das entradas com termos b_{ij}
$b_{\min}, b_{\max}$	Limites inferior e superior da função b
$d(t)$	Distúrbio
D	Limite superior do distúrbio d
$f(\mathbf{x}, t)$	Função não linear da dinâmica do sistema
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$	Vetor de funções não lineares com termos f_i
F	Limite superior da função f
k	Ganho do termo descontínuo de controle
n	Ordem do sistema
$s(\mathbf{x}, t)$	Variável escalar da superfície de escorregamento
$S(t)$	Superfície de escorregamento
t_{alcance}	Tempo de alcance
T_A	Tempo de atraso
$\hat{u}$	Termo de linearização por realimentação
ν_r	Frequência do primeiro modo ressonante não modelado
$V(s, t)$	Candidata à função de Lyapunov
x_d	Estado desejado
$\mathbf{x}_d$	Vetor de estado desejados com termos x_{di}
λ	Parâmetro de controle por modos deslizantes
$\mathbf{M}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{K}_d$	Matrizes de inércia, amortecimento, e rigidez desejadas
$\mathbf{K}$	Matriz de ganhos do controlador do subsistema mecânico

Λ, Γ	Matrizes de ganhos do observador de distúrbios
K_{∞}	Matriz de ganhos do controlador do subsistema hidráulico

Simbologia especial

T	(Sobrescrito) Transposição
-1	(Sobrescrito) Inversão
$-T$	(Sobrescrito) Inversão da transposição
$\wedge$	(Sobre a variável) Parcela conhecida ou estimada
$\sim$	(Sobre a variável) Erro - diferença entre valor real e valor deseja
$-$	(Sobre a variável) Valor no ponto de operação
$\cdot$	(Sobre a variável) Derivada primeira em relação ao tempo
$\ddot{}$	(Sobre a variável) Derivada segunda em relação ao tempo
$máx$	(Subscrito) Valores máximos
$mín$	(Subscrito) Valores mínimos
$\Re$	Conjunto dos reais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	32
1.1 MOTIVAÇÃO.....	34
1.1.1 Aumento da produtividade, eficiência e segurança	35
1.1.2 Desenvolvimento de simuladores	36
1.1.3 Auxílio nas operações de busca e salvamento.....	38
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	39
1.2.1 Modelagem do subsistema mecânico.....	39
1.2.2 Modelagem do subsistema hidráulico.....	43
1.2.3 Modelagem da interação ferramenta-solo na perspectiva do controle	45
1.2.4 Controle.....	47
1.3 PERSPECTIVA GERAL.....	52
1.4 OBJETIVO	53
1.5 METODOLOGIA	53
1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	54
2 MODELAGEM DO SUBSISTEMA MECÂNICO	56
2.1 DESCRIÇÃO DO SUBSISTEMA MECÂNICO.....	56
2.2 CINEMÁTICA DIRETA DO SUBSISTEMA MECÂNICO.....	57
2.2.1 Hipóteses simplificadoras para o modelo da cinemática direta	58
2.2.2 Atribuição de referências aos elos principais.....	58
2.2.3 Orientação e posição	59
2.2.4 Velocidades.....	62
2.2.5 Acelerações	63
2.2.6 Representação dos vetores absolutos no sistema móvel.....	66
2.3 DINÂMICA DO SUBSISTEMA MECÂNICO.....	66
2.3.1 Hipóteses simplificadoras para modelagem do subsistema mecânico.....	66
2.3.2 Modelagem pelo método de Euler-Lagrange.....	67
2.3.3 Modelagem pelo método de Kane	69
2.3.4 Modelagem pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	70

2.4	FORÇAS HIDRÁULICAS	71
2.4.1	Comprimento dos cilindros.....	72
2.5	CINEMÁTICA DIRETA DOS CILINDROS E DAS BARRAS.....	74
2.5.1	Atribuição de referências aos cilindros e as barras	74
2.5.2	Orientação dos cilindros e das barras.....	75
2.5.3	Modelo da cinemática direta dos cilindros e das barras	78
2.6	DINÂMICA COMPLETA SUBSISTEMA MECÂNICO	80
2.6.1	Método de Kane na forma matricial	80
2.6.2	Método Euler-Lagrange com multiplicadores.....	84
2.6.3	Equações de Maggi	85
2.7	ESFORÇOS GENERALIZADOS DE OPERAÇÃO	86
2.7.1	Forças generalizadas de escavação.....	86
2.7.2	Forças generalizadas de carregamento.....	88
2.8	CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR	91
2.9	VERIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA MECÂNICO	93
2.9.1	Trajetória para a verificação dos modelos	93
2.9.2	Resultados da comparação com o modelo de referência.....	97
2.10	CONCLUSÃO	102
3	MODELAGEM DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	104
3.1	DESCRIÇÃO DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO.....	104
3.2	REVISÃO DE CONCEITOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS	105
3.2.1	Conservação de massa	106
3.2.2	Conservação de energia	108
3.3	MODELAGEM DOS COMPONENTES DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO ...	110
3.3.1	Hipóteses simplificadoras para modelagem do subsistema hidráulico.....	110
3.3.2	Equação da tensão do motor linear	111
3.3.3	Equação de movimento do carretel da válvula	112
3.3.4	Equação da vazão nos orifícios da válvula	113
3.3.5	Variação das pressões nas câmaras do cilindro.....	115

3.3.6	Equação de movimento da parte móvel do cilindro	116
3.4	MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	119
3.4.1	Modelo de 6ª ordem do subsistema hidráulico	120
3.4.2	Modelo de 4ª ordem do subsistema hidráulico	121
3.4.3	Modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico	122
3.5	VERIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	127
3.6	CONCLUSÃO	130
4	MODELO ACOPLADO DO MANIPULADOR	131
4.1	ACOPLAMENTO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA MECÂNICO	131
4.1.1	Forma matricial das equações de movimento dos elos	131
4.1.2	Acoplamento entre as dinâmicas dos elos e dos cilindros.....	132
4.2	GENERALIZAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	134
4.2.1	Generalização do modelo de 6ª ordem.....	134
4.2.2	Generalização do modelo de 4ª ordem.....	136
4.2.3	Generalização do modelo de 3ª ordem.....	137
4.3	ACOPLAMENTO DOS MODELOS DOS SUBSISTEMAS	138
4.4	VERIFICAÇÃO DOS MODELOS ACOPLADOS.....	138
4.4.1	Simulação dos modelos acoplados.....	140
4.5	MODELO LINEAR DO MANIPULADOR	148
4.5.1	Modelo do subsistema mecânico no espaço dos atuadores	149
4.5.2	Linearização do subsistema mecânico	150
4.5.3	Linearização do subsistema hidráulico	151
4.5.4	Modelo acoplado linear	153
4.5.5	Simulação do modelo acoplado linear	156
4.6	CONCLUSÃO	160
5	CONTROLE DO MANIPULADOR	161
5.1	TÉCNICA DE CONTROLE EM CASCATA	161
5.1.1	Controle em cascata para o manipulador	163

5.2	REVISÃO DAS TÉCNICAS DE CONTROLE.....	164
5.2.1	Controle robusto linear	164
5.2.2	Controle por impedância	185
5.2.3	Linearização por realimentação	188
5.2.4	Controle não linear por modos deslizantes.....	189
5.3	PROJETO DO CONTROLADOR EM CASCATA	200
5.3.1	Projeto do controlador do subsistema mecânico	201
5.3.2	Projeto do controlador do subsistema hidráulico	213
5.3.3	Controlador em cascata do manipulador	223
5.4	CONCLUSÃO	225
6	RESULTADOS DO CONTROLE	226
6.1	TRAJETÓRIA PARA O CONTROLE DO MANIPULADOR	226
6.1.1	Descrição da trajetória de referência	226
6.1.2	Demanda de potência para a execução da operação	232
6.2	SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR.....	237
6.2.2	Resultados das simulações	241
6.3	CONCLUSÃO	255
7	CONCLUSÕES	256
7.1	TRABALHOS FUTUROS	258
	REFERÊNCIAS	259
	APÊNDICE A - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	271
	APÊNDICE B - PARÂMETROS DO MANIPULADOR	274
B.1	PARÂMETROS DO SUBSISTEMA MECÂNICO	274
B.1.1	Propriedades dos elos do subsistema mecânico.....	274
B.1.2	Parâmetros dos esforços generalizados de operação.....	277
B.2	PARÂMETROS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	278
	APÊNDICE C - MODELAGEM DO MANIPULADOR COM O SIMSCAPE™.....	282
C.1	MODELO DO SUBSISTEMA MECÂNICO.....	282

C.2	MODELO DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	285
C.2.1	Modelo do acionamento da válvula direcional	286
C.2.2	Modelo da válvula direcional	286
C.2.3	Modelo do cilindro hidráulico	288
C.2.4	Modelo do atuador hidráulico	291
C.3	ACOPLAMENTO DOS MODELOS DOS SUBSISTEMAS	293
C.3.1	Co-simulação do modelo acoplado	293
APÊNDICE D - ESTIMAÇÃO DE ESTADOS		295
D.1	FILTRO DE KALMAN UNSCENTED	295
D.1.1	Algoritmo do UKF	295
D.1.2	Modelo do processo	298
D.1.3	Modelo das medidas	298
D.1.4	Parâmetros do UKF	299
APÊNDICE E - CONTROLADORES DE COMPARAÇÃO		301
E.1	CONTROLADORES DO SUBSISTEMA MECÂNICO	301
E.1.1	PID	301
E.1.2	SMC	301
E.2	CONTROLADOR DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO	302
APÊNDICE F - PARÂMETROS DOS CONTROLADORES		304
F.1	PARÂMETROS DE PROJETO DO CONTROLADOR SUBÓTIMO	304
F.2	PARÂMETROS DO CONTROLADOR PROPOSTO	304
F.3	PARÂMETROS DOS CONTROLADORES DE COMPARAÇÃO	305
APÊNDICE G - SIMULADOR COMPUTACIONAL		306

1 INTRODUÇÃO

Escavadeiras hidráulicas são os equipamentos de terraplanagem mais utilizados na construção civil e mineração, e continuarão a desempenhar um papel importante nos próximos anos (XU; YOON, 2016). Isto se deve à capacidade de trabalho, versatilidade e adequação, do equipamento, aos vários tipos de tarefas exigidas na indústria em geral (HAGA; HIROSHI; FUJISHIMA, 2001; SHI; WANG; LEVER, 1996).

O conjunto de aplicações em que este tipo de equipamento pode ser empregado é vasto, além da construção civil e mineração, estas máquinas também são muito utilizadas na agricultura, no manejo de resíduos, na remoção de detritos, no transporte de cargas, em operações militares ou de busca e salvamento, além de qualquer aplicação que envolva a escavação. A Figura 1 ilustra algumas das aplicações mais comuns para o equipamento.

Figura 1 - Aplicações das escavadeiras hidráulicas. (a): Escavação; (b): Carregamento; (c): Mineração; (d): Içamento.

(a)

(b)

(c)

(d)

Fonte: (a): Caterpillar (2017a); (b): Volvo (2017); (c): Liebherr (2017); (d): Caterpillar (2017a).

Uma escavadeira hidráulica consiste basicamente de um sistema de translação (ou propulsão), constituído por um chassi com esteiras (ou rodas), e uma plataforma

giratória dotada de um manipulador articulado, para realizar o trabalho. A plataforma é acoplada ao sistema de translação através de um rolamento de escora, que permite o movimento de giro da estrutura superior em relação ao chassi. O manipulador é conectado à base da plataforma através de juntas de revolução. Vários tipos de implementos podem ser anexados ao manipulador, dependendo do tipo de operação que se deseja realizar, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Implementos. (a): Britador; (b): Cerra circular; (c): Garra; (d): Perfurador.

(a)

(b)

(c)

(d)

Fonte: (a): Doosan (2017); (b): Volvo (2017); (c): For Construction Pros (2014); (d): Premier (2017).

Geralmente, as escavadeiras hidráulicas são propelidas por um motor diesel, no entanto, já existem sistemas híbridos em diversas dessas máquinas. O motor é responsável por acionar uma ou mais bombas hidráulicas, que fornecem óleo, a alta pressão, para o sistema hidráulico que aciona as diferentes funções de trabalho do equipamento. Os elos do manipulador são atuados por cilindros hidráulicos, enquanto o sistema de propulsão e o movimento de giro da plataforma superior são acionados

por motores hidráulicos. Na Figura 3 é ilustrada uma escavadeira hidráulica, do fabricante Caterpillar, modelo CAT 320D, com os seus principais componentes indicados na lista ao lado.

Figura 3 - Principais componentes de uma escavadeira hidráulica.

Fonte: adaptado de Caterpillar (2017).

Não é uma tarefa fácil operar este tipo de equipamento de forma eficientemente e segura. Isto porque é necessário um elevado nível de habilidade, já que algumas operações típicas, como a escavação ou o carregamento, requerem a manipulação coordenada dos elos do manipulador. Portanto, um sistema automatizado de escavação pode auxiliar operadores menos experientes a concluir determinadas tarefas de maneira eficiente, em termos de tempo, e com boa qualidade de trabalho. Além disso, escavadeiras automáticas têm potencial para facilitar operações em ambientes que representam risco ao operador, como subterrâneos, aterros sanitários ou locais onde ocorrem desastres (SINGH, 1997; YU; LIU; HASAN, 2010).

1.1 MOTIVAÇÃO

A automação das escavadeiras hidráulicas, através da implementação de controladores automáticos, dotados de trajetórias ótimas, resultantes de movimentação

planejada, não só melhoraria a produtividade e o tempo geral de atividade dessas máquinas, como também aumentaria a segurança para o operador, além de preservar o equipamento, aumentando assim a sua vida útil (KIM et al., 2013).

O desenvolvimento de simuladores é uma área de aplicação relevante para a modelagem matemática deste tipo de equipamento. Os simuladores podem ser utilizados para o treinamento dos operadores e no desenvolvimento de sistemas de controle, o que geraria redução nos custos de treinamento dos operadores, e de automação do equipamento (SCHMIDT; PROETZSCH; BERNIS, 2010; TAO et al., 2008). Simuladores capazes de fornecer um treinamento visual, com características dinâmicas realistas, poderão até contribuir para o desenvolvimento de novas tecnologias no meio de aplicação (CHACKO et al., 2014).

Outra possível aplicação das escavadeiras automáticas é nas operações de resgate, mais especificamente as operações de busca e salvamento, que caracterizam um elevado risco ao operador, e são onde as características deste tipo equipamento poderiam ser melhor aproveitadas (KOIVO, 1994; TAO et al., 2008; WERFEL; PETERSEN; NAGPAL, 2014).

Nas próximas seções, as motivações que foram apresentadas, para o desenvolvimento de uma escavadeira hidráulica automática, serão melhor tratadas separadamente.

1.1.1 Aumento da produtividade, eficiência e segurança

A indústria constantemente exige dos equipamentos de construção uma maior produtividade, diminuição dos custos operacionais (consumo de combustível, manutenção do equipamento e mão de obra), redução dos riscos de operação, e aumento da vida útil do equipamento. Sabe-se que a automação das máquinas de construção, como as escavadeiras hidráulicas, deverá reduzir os acidentes de trabalho (LINGARD; COOKE; GHARAIE, 2013), aumentar a eficiência (ŠALINIĆ; BOŠKOVIĆ; NIKOLIĆ, 2014) e a capacidade do equipamento de operar em ambientes perigosos (KIM et al., 2013). Com a automação do equipamento, os operadores deverão se concentrar em tarefas de alto nível como, por exemplo, especificar a área de escavação. Isto irá diminuir a carga de trabalho (fadiga) sobre o operador e, conseqüentemente, reduzir os

erros operacionais. Na Figura 4 são ilustradas algumas aplicações onde as escavadeiras automáticas seriam benéficas para a indústria.

Figura 4 - Demandas da indústria. (a): Abertura supervisionada de vala; (b): Manutenção do subsistema hidráulico; (c): Terraplanagem na beira de um penhasco.

Fonte: (a): Newbury Market (2009); (b): Forester Network (2015); (c): Safety Management (2017).

Em relação à operação de escavação, esta é subjetiva, isto é, varia de acordo com diversos fatores, como o grau de habilidade do operador, o tipo de equipamento e o local de trabalho (SAKAIDA et al., 2008). Portanto, identificar parâmetros operacionais ótimos e integrá-los em um ambiente de construção planejado seria vantajoso em termos de produtividade, eficiência e de qualidade de operação (WERFEL; PETERSEN; NAGPAL, 2014).

1.1.2 Desenvolvimento de simuladores

Já é conhecido o potencial que os simuladores têm para a redução dos custos relacionados ao treinamento de novos operadores, além de aumentar a segurança do operador iniciante nesta fase. Os principais fabricantes de escavadeiras hidráulicas desenvolvem sistemas de simulação visual, para o treinamento dos operadores. Nesses simuladores, a escavadeira virtual é controlada com *joysticks*, e a realimentação

visual é fornecida por dispositivos de realidade virtual, como óculos 3D e fones de ouvido ou por um conjunto de monitores. Na Figura 5 são ilustrados alguns simuladores utilizados para treinamento dos operadores.

Figura 5 - Simuladores. (a): Immersive Technologies; (b) Volvo Simulator; (c) e-Tech Simulation.

Fonte: (a): Immersive Technologies (2017); (b): Meng News (2017); (c): e-Tech Simulation (2017).

Os simuladores virtuais trazem para o treinamento uma representação visual realista do equipamento, terreno e ambiente, juntamente com um modelo matemático da dinâmica do equipamento (TAO et al., 2008). No entanto, neste tipo de simulador, tem sido dado mais importância à sua capacidade de representação visual, ao invés de fornecer uma dinâmica mais realista do equipamento (SCHMIDT; PROETZSCH; BERNIS, 2010). Portanto, simuladores mais realistas, dotados de modelos matemáticos mais acurados, dos vários subsistemas do equipamento, podem ser empregados para: 1) proporcionar um treinamento virtual realista, 2) no desenvolvimento de sistemas de controle para a escavação automática, 3) na simulação e desenvolvimento de sensores e 4) como plataforma de testes para controladores e novas arquiteturas do equipamento. De acordo com Chacko et al. (2014), um modelo mais realista da dinâmica do equipamento pode até reduzir o ciclo de desenvolvimento de novos produtos, a partir da perspectiva do projeto de engenharia.

1.1.3 Auxílio nas operações de busca e salvamento

Os desastres urbanos têm destacado a importância de robôs dedicados às tarefas de resgate, devido a sua capacidade de acesso a locais perigosos para o trabalho humano. O trabalho nesses locais exige a interação homem-máquina, bem como no controle compartilhado de robôs semiautônomos. Os operadores desses robôs muitas vezes são fadigados, e seus sentidos são ocluídos pela poeira, ruídos, temperatura e pelos produtos químicos presentes no local. Esses fatores tornam difícil a operação remota tradicional (WERFEL; PETERSEN; NAGPAL, 2014). Outro fator que dificulta este tipo de operação é o limite de tempo para a sua realização, pois a taxa de sobrevivência das vítimas é maior dentro das 72 horas após o evento (CHACKO et al., 2014). Portanto, escavadeiras automáticas, capazes de trabalhar em ambientes de risco elevado à vida humana, podem acelerar as operações de resgate e, consequentemente, aumentar a chance de sobrevivência das vítimas. Na Figura 6 é mostrado uma miniescavadeira adaptada para operações de resgate.

Figura 6 - Miniescavadeira para operações de resgate.

Fonte: Construction Equipment (2017).

Muitas vezes verifica-se que a dificuldade de acesso ao local do evento caracteriza um grande impedimento para as operações de resgate. Nestes casos, as escavadeiras automáticas podem ser utilizadas para preparar o acesso ao local para robôs especializados, e para equipes humanas de resgates. As operações posteriores ao evento, como gerenciamento e limpeza do local, também podem ser auxiliadas com

as escavadeiras automáticas, como ilustrado na Figura 7, o que ajudaria ainda mais a reduzir o risco à vida humana.

Figura 7 - Limpeza do local do evento. (a): Jakarta, Indonésia; (b): Hualien, Taiwan.

Fonte: (a): Media Indonesia (2017); (b): Earthquake News (2016).

Desta forma, um sistema automatizado de escavação é desejável para realizar o acesso a ambientes inóspitos em operações de resgate, que caracterizam perigo à vida humana, e para o gerenciamento do local após o evento (PERRIN et al., 2010).

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma revisão, dos principais trabalhos sobre o tema, será apresentada nesta seção. Esta revisão será dividida em 3 partes, sendo elas: 1) modelagem do subsistema mecânico, 2) modelagem do subsistema hidráulico, 3) modelagem da interação ferramenta-solo na perspectiva do controle, e 4) controle.

1.2.1 Modelagem do subsistema mecânico

Em relação a modelagem do subsistema mecânico do manipulador, o algoritmo de Denavit-Hartenberg tem sido aplicado extensivamente na análise cinemática do mecanismo. Modelos para a dinâmica do subsistema mecânico foram derivados pelos métodos de Newton-Euler, Euler-Lagrange, e pelo método de Kane, ou utilizando-se *softwares* comerciais, dedicados a modelagem de sistemas multicorpos, como é o caso do SimMechanics™ do MATLAB/Simulink®. Uma revisão mais detalhada sobre

os principais aspectos da modelagem do subsistema mecânico do manipulador é apresentada a seguir.

1.2.1.1 Modelo cinemático do subsistema mecânico do manipulador

Vähä e Skibniewski (1993a) desenvolveram um modelo da cinemática do manipulador, com três graus de liberdade, fazendo a atribuição de um sistema de coordenadas para cada junta ativa do mecanismo. Koivo (1994) apresentou um modelo da cinemática do manipulador, considerando os três graus de liberdade do mecanismo no plano vertical. Neste também foi apresentado um modelo da cinemática inversa das juntas e dos cilindros do manipulador. E nos trabalhos de Frankel (2004) e de Patel e Prajapati (2014) foram desenvolvidos modelos da cinemática do manipulador de uma retroescavadeira, considerando-se os quatro graus de liberdade do mecanismo, sendo que no trabalho de Frankel (2004) também foi apresentado um modelo da cinemática inversa dos cilindros hidráulicos. Em relação aos trabalhos mencionados até aqui, verifica-se que o algoritmo de Denavit-Hartenberg foi extensivamente empregado para o desenvolvimento dos modelos cinemáticos. Este foi utilizado para a atribuição dos sistemas de coordenadas dos elos, e para a obtenção das matrizes de transformação homogênea, utilizadas para realizar as transformações entre os sistemas de coordenadas atribuídos.

Em Šalinić, Bošković e Nikolić (2014) foi apresentado o modelo da cinemática do manipulador de uma escavadeira hidráulica, com os três graus de liberdade utilizados na operação de escavação. Os autores fizeram uso das matrizes de rotação, obtidas através da fórmula de Rodrigues, para realizar as transformações entre os sistemas de coordenadas das juntas do manipulador. Com isto, foi necessário apenas a direção e o sentido de rotação de cada junta ativa para obter as matrizes de rotação. Neste trabalho também foi apresentado o modelo da cinemática inversa dos cilindros hidráulicos do manipulador. Comparando-se os trabalhos que utilizaram o algoritmo de Denavit-Hartenberg com o de Šalinić, Bošković e Nikolić (2014), verificou-se que neste último foi possível gerar certa recursividade ao modelo, pois as matrizes de rotação são geradas diretamente pela fórmula de Rodrigues. Isto acarretou num caráter mais recursivo ao modelo desenvolvido.

Analisando-se os modelos comentados nesta seção, verificou-se que estes foram desenvolvidos pelos autores apenas como pré-requisito para obtenção do modelo dinâmico do manipulador. Na próxima seção, os trabalhos mais relevantes para a modelagem do subsistema mecânico do manipulador serão discutidos.

1.2.1.2 Modelo dinâmico do subsistema mecânico do manipulador

Vähä e Skibniewski (1993a) desenvolveram um modelo do manipulador, para a operação de escavação, com três graus de liberdade. Neste trabalho, foi utilizado o método de Newton-Euler para derivar as equações de movimento. No entanto, algumas hipóteses simplificadoras em relação aos tensores de inércia e a posição dos centros de massa dos elos, não foram realistas. Por sua vez, estas hipóteses comprometem de maneira considerável a representação física do manipulador fornecida pelo modelo desenvolvido por Vähä e Skibniewski (1993a).

Koivo et al. (1996) desenvolveram um modelo do manipulador, com três graus de liberdade, utilizando o método de Newton-Euler. Neste modelo foram superadas todas as deficiências apresentadas no modelo de Vähä e Skibniewski (1993a). Este modelo inclui os esforços de operação, provenientes da escavação, e a conversão de torque motor para forças hidráulicas também é realizada. Aqui ainda é apresentado um exemplo de aplicação do modelo derivado para a síntese de um controlador não linear, com ação proporcional e derivativa (PD). Ressalta-se que o modelo desenvolvido por Koivo et al. (1996) é considerado como um dos mais completos na literatura, podendo ser empregado no projeto do controlador do manipulador para a escavação automática (PATEL, 2012).

Frankel (2004) apresentou as equações de movimento para o manipulador de uma retroescavadeira, considerando os quatro graus de liberdade do mecanismo. Essas equações foram obtidas através do método de Euler-Lagrange. Neste trabalho, a conversão dos torques motores para as forças hidráulicas também foi realizada. Porém, os esforços de operação não foram considerados no modelo.

Sleiman, Melin e Vidolov (2005) desenvolveram um modelo do manipulador de uma escavadeira 12MXT MECALAC utilizando o SimMechanics™ do Simscape™, em ambiente MATLAB/Simulink®. Neste modelo, os cilindros hidráulicos foram incluídos

na dinâmica como corpos separados, conectados por juntas prismáticas. De maneira semelhante, em Janssen e Nievelstein (2005) foi desenvolvido o modelo do manipulador de uma escavadeira hidráulica, modelo Terex O&K RH 200 de 500 toneladas, utilizando o SimMechanics™, como é mostrado na Figura 8.

Figura 8 - Modelo do manipulador de uma escavadeira Terex O&K RH 200 no SimMechanics™.

Fonte: adaptado de Janssen e Nievelstein (2005).

Patel e Prajapati (2014) desenvolveram um modelo da dinâmica do manipulador de uma retroescavadeira, com três graus de liberdade, para a operação de escavação, utilizando o método de Euler-Lagrange. Neste trabalho, os esforços de operação, provenientes da escavação, foram incluídos no modelo, sendo que ainda foi realizado uma comparação com o modelo de Koivo et al. (1996). O modelo desenvolvido por Patel e Prajapati (2014) apresentou resultados considerados satisfatórios pelos autores. De forma similar, em Šalinić, Bošković e Nikolić (2014) foi criado o modelo da dinâmica do manipulador de uma escavadeira, com três graus de liberdade, também para a operação de escavação. No entanto, neste trabalho, o método de Kane foi utilizado para a derivação do modelo, sendo que as forças generalizadas de escava-

ção também são incluídas. Os torques motores obtidos pelo método de Kane são convertidos em forças hidráulicas utilizando as relações obtidas com a análise de cinemática inversa dos cilindros hidráulicos.

Os trabalhos de Patel e Prajapati (2014) e de Šalinić, Bošković e Nikolić (2014), tiveram como foco o desenvolvimento do modelo dinâmico do manipulador na operação de escavação. Dentre os trabalhos da literatura mais atual, estes podem ser considerados como os mais completos. No entanto, verifica-se que o desenvolvimento do modelo de Šalinić, Bošković e Nikolić (2014) é apresentado de maneira mais clara e analítica se comparado com o de Patel e Prajapati (2014).

A Tabela 1 sumariza os trabalhos revisados sobre a modelagem do subsistema mecânico do manipulador. Esta indica os autores de cada trabalho, o número de graus de liberdade, ou *degrees of freedom* (DOFs), que foram utilizados em cada modelo, e os métodos utilizados para a modelagem do mecanismo.

Tabela 1 - Trabalhos sobre a modelagem do subsistema mecânico.

Autor	DOFs	Método (Cinemática / Dinâmica)
Vähä e Skibniewski (1993a)	3	Denavit-Hartenberg / Newton-Euler
Koivo et al. (1996)	3	Denavit-Hartenberg / Newton-Euler
Frankel (2004)	4	Denavit-Hartenberg / Euler-Lagrange
Sleiman, Melin e Vidolov (2005)	3	SimMechanics™
Janssen e Nievelstein (2005)	3	
Patel e Prajapati (2014)	3	Denavit-Hartenberg / Euler-Lagrange
Šalinić, Bošković e Nikolić (2014)	3	Rodrigues / Kane

Fonte: o autor.

1.2.2 Modelagem do subsistema hidráulico

No manipulador de uma escavadeira hidráulica, as forças motoras são produzidas por um sistema de acionamento hidráulico, que incluem bombas, válvulas e atuadores (KRISHNA; BARES, 1998; ZHANG et al., 2012). Portanto, a modelagem e simulação desse tipo de sistema é de grande importância na tarefa de controle do ma-

nipulador. Conforme é apresentado no processo de modelagem de sistemas hidráulicos, na Figura 9, um procedimento de simplificação do modelo é necessário devido à complexidade do sistema.

A modelagem matemática desses sistemas é realizada de maneira semelhante na grande maioria nos trabalhos revisados (BU; YAO, 2000; CUNHA, 2001; DRIEMEYER, 2002; NGUYEN, 2000; SANTOS, 2001a; VALDIERO, 2005). Esta consiste na aplicação de leis físicas para obter as equações de governo que descrevem a dinâmica de cada componente do sistema, como é ilustrado pela Figura 9.

Figura 9 - Processo de modelagem e simulação de sistemas hidráulicos.

Fonte: adaptado de Chacko et al. (2014).

Um caminho alternativo para a modelagem de sistemas hidráulicos é a utilização de *softwares* dedicados à modelagem de sistemas dinâmicos, como mostrado na Figura 9. Estes *softwares* são dotados de ferramentas específicas para a modelagem de circuitos hidráulicos, como o MATLAB/Simulink® com a biblioteca SimHydraulics® do Simscape™, e o LMS.AMESim® com sua biblioteca de aplicações hidráulicas. Em algumas publicações recentes, *softwares* deste tipo foram aplicados na modelagem de sistemas semelhantes (CHUNG et al., 2009; LE et al., 2013; VĚCHET; KREJSA, 2009). Esses *softwares* apresentam recursos gráficos que permitem ao usuário construir o modelo de um determinado sistema através da organização dos modelos dos seus componentes, sendo que esta organização deve ser feita de maneira fisicamente

representativa. Também é possível acoplar modelos de diferentes sistemas neste tipo *software*, como mostrado na Figura 10. Nesta é ilustrado o acoplamento entre os subsistemas mecânico e hidráulico de uma escavadeira, que foram modelados com as bibliotecas do LMS.AMESim®.

Figura 10 - Modelo do manipulador de uma escavadeira hidráulica no LMS.AMESim®.

Fonte: adaptado de Siemens (2017).

1.2.3 Modelagem da interação ferramenta-solo na perspectiva do controle

Modelos matemáticos para descrição da interação ferramenta-solo são altamente não lineares (ALTHOEFER et al., 2009; SINGH, 1995a). As forças de escavação que surgem dessa interação variam em função do tempo, e representam o problema de maior não estruturação na construção civil (BERNOLD, 1993). Segundo Tan et al. (2005), o comportamento do solo é complexo, sendo que uma pequena variação nas suas propriedades pode acarretar numa mudança significativa no seu comportamento. A força de escavação é influenciada por fatores como: geometria e material da ferramenta, condições operacionais e propriedades do solo (densidade, compactação, coesão e ângulo de fricção interna). Mesmo para uma única seção do solo, as propriedades podem variar através de diferentes estratos, o que caracteriza o seu comportamento como não isotrópico.

Existem duas estratégias para o tratamento da força de interação da caçamba com o solo no problema de controle do manipulador, durante a operação de escavação, que são: 1) tratá-la como um distúrbio, projetando um controlador robusto o suficiente para lidar com essa perturbação, ou 2) incluir no projeto do controlador um modelo eficiente da interação ferramenta-solo, que possa descrever com precisão as forças de escavação em tempo real, sendo que um dos principais desafios na concepção de um controlador eficiente, para uma escavadeira hidráulica, é realizar compensação dessa força.

Modelos reológicos e o método dos elementos finitos são capazes de descrever o comportamento do solo, durante a escavação, com precisão (ALTHOEFER et al., 2009; SINGH, 1995a). O método dos elementos discretos também pode ser utilizado para descrever a interação da caçamba com o solo, sendo que este é muito utilizado nos *softwares* de modelagem de sistemas multicorpos, devido a possibilidade de acoplamento com a dinâmica do mecanismo, como ilustrado pela Figura 11. No entanto, esses modelos possuem elevado custo computacional e, portanto, sua aplicação num controlador dinâmico ainda é impraticável.

Figura 11 - Simulação da operação de escavação com o *pack* EDEM no MSC.ADAMS®.

Fonte: adaptado de MSC Software (2017).

Segundo Vähä et al. (2013), sensores também podem ser empregados para o fornecimento de informações que tornem os controladores aptos a lidar com tais distúrbios. Uma pesquisa bem detalhada sobre este tema pode ser encontrada no trabalho de Vähä et al. (2013).

1.2.4 Controle

O comportamento dinâmico do manipulador de uma escavadeira é dominado pela dinâmica dos subsistemas mecânico e hidráulico, juntamente com a força resultante da interação da caçamba com o solo. Isto torna o controle do manipulador de uma escavadeira hidráulica diferente dos manipuladores convencionais, uma vez que no projeto do controlador deve-se considerar os aspectos supracitados.

Em Nguyen (2000), a arquitetura de controle de uma miniescavadeira hidráulica é dividida em dois níveis, como mostrado na Figura 12.

Figura 12 - Esquema de controle de uma miniescavadeira hidráulica.

Fonte: adaptado de Nguyen (2000).

O primeiro é o controle de alto nível, que envolve esquemas de controle comportamental, baseados na decomposição de tarefas típicas em elementos de tarefa de máquinas robóticas, que são enviados para o módulo de planejamento de movimento. Neste módulo é determinada a trajetória a ser executada pelo manipulador, através das informações recebidas pelo planejador de tarefa, bem como dos sensores. A trajetória de referência que foi criada é enviada para o segundo nível de controle, denominado de controle de baixo nível. Neste nível, o controlador deve ter duas

propriedades essenciais: 1) robustez para lidar com as incertezas e distúrbios, e 2) adaptabilidade para lidar com um ambiente de operação altamente dinâmico. Este trabalho foca no desenvolvimento do controle de baixo nível da arquitetura de controle proposta por Nguyen (2000).

1.2.4.1 Controle de posição

Há muitos métodos que lidam com o controle de posição, ou *position control* (PC), de escavadeiras hidráulicas. Esses métodos tentam compensar a dinâmica não linear do manipulador, bem como a variação de seus parâmetros e as perturbações externas, para a execução de uma determinada trajetória predeterminada.

Controladores dos tipos proporcional e derivativo (PD), e proporcional integral e derivativo (PID) foram adaptados por Sepehri et al. (1994), Koivo et al. (1996) e por Gao, Yanchao e Qin (2009) para o controle do manipulador, onde resultados satisfatórios, em aplicações relativamente simples, foram obtidos. Liu et al. (2010) empregou as técnicas de controle por torque computado, ou *computed torque control* (CTC), e a de controle robusto ao subsistema mecânico do manipulador. Estas proporcionaram um seguimento aceitável da trajetória desejada pelo manipulador, sob condições de carga constante e sem carga, nas simulações que foram realizadas.

Para compensar a dinâmica não linear do subsistema hidráulico, a técnica de linearização por realimentação foi proposta por Nguyen et al. (1999). Esta foi testada em uma miniescavadeira de 1,5 toneladas, no seguimento de uma trajetória de referência no espaço livre, e na operação de escavação. Em ambas as situações foram obtidos resultados satisfatórios, no entanto, uma das principais desvantagens dessa técnica é que ela requer um modelo exato do subsistema hidráulico, o que é difícil de se obter, visto a sua complexidade. Posteriormente, Ha et al. (2001) introduziram um controlador por modos deslizantes, ou *sliding mode control* (SMC), com uma parcela de controle *fuzzy* para reduzir a vibração do equipamento durante a operação, e para fornecer um meio eficaz e robusto de controlar o sistema na presença de incertezas e distúrbios severos. Experimentos foram realizados com este controle em miniescavadeira, onde observou-se uma atenuação dos sinais de alta frequência no sinal de controle. Verificou-se que também foi possível realizar um bom seguimento da trajetória

de referência na operação de escavação, mesmo com as incertezas no modelo e os distúrbios externos.

Um controlador adaptativo, baseado num modelo de referência, com um algoritmo *self-tuning online*, foi adotado por Chiang e Huang (2004) para realizar o seguimento de trajetórias complexas, com uma escavadeira robótica de 4,5 toneladas. Os resultados experimentais foram satisfatórios, sendo que nestes foram alcançados erros de ± 2 centímetros em relação ao seguimento da trajetória desejada.

Em Chang e Lee (2000) um controle por tempo de atraso, ou *time-delay* (TD), dotado de compensadores resultantes de uma análise das não linearidades do sistema, foi proposto. Este método de controle foi empregado no seguimento de uma linha reta por uma escavadeira de 13 toneladas. Nos experimentos realizados, bons resultados foram obtidos, se estes forem comparados com os de um operador experiente. Posteriormente, Lee e Chang (2002) propuseram um controlador por TD e SMC, utilizando uma superfície de escorregamento do tipo integral. Este controlador foi aplicado em uma escavadeira de 21 toneladas. Os experimentos realizados também mostraram um bom desempenho do controlador para o seguimento da trajetória de referência.

1.2.4.2 Controle de força e posição

O controle robusto não linear de posição foi proposto para lidar com as não linearidades dos subsistemas mecânico e hidráulico, além das incertezas presentes em todo o sistema. No entanto, as escavadeiras estão sempre sujeitas a uma ampla variação da força resultante da interação da caçamba com o solo, durante o processo de escavação. O controle de força e posição, ou *force and position control* (FPC), é considerado mais adequado do que o de posição, pois permite que a escavadeira automática opere em todos os estados de movimento identificados por Bernold (1993), que são: 1) o movimento livre no espaço, 2) o contato com o meio, e 3) na realização de uma força contra o meio.

Uma estratégia cognitiva de controle de força foi desenvolvida por Vähä e Skibniewski (1993b). Esta consiste em regular a profundidade e a velocidade da escavação de acordo com a força do atuador. Em Cetto e Koivo (1995) foi proposto um

esquema de controle utilizando CTC, juntamente com um controlador secundário, do tipo PD, para o seguimento da trajetória desejada, e um controlador proporcional, para o seguimento da força de referência e para lidar com os distúrbios externos, considerando uma trajetória simples para a operação de escavação. As simulações foram realizadas considerando o subsistema mecânico do manipulador, sendo que nestas foram obtidos bons resultados. No entanto, nesta abordagem é necessário um modelo exato da interação da caçamba com o solo para o cálculo da força de escavação.

Um controlador híbrido de força e posição foi proposto por Nguyen (2000), para o seguimento da trajetória e de uma força de referência. A desvantagem do controle híbrido está na necessidade de alternar entre o controle de força e o de posição, o que pode ocasionar forças transitórias excessivas no instante de contato.

Ha et al. (2000) combinaram o controle por impedância com um controlador *fuzzy* por modos deslizantes, para aplicação numa miniescavadeira. O controlador proposto foi testado no seguimento de uma trajetória de referência na operação de escavação, onde bons resultados foram obtidos. Nos experimentos também foi verificado uma redução na oscilação das velocidades e acelerações das juntas do manipulador. Em Tafazoli et al. (2002) foi adotado um controlador por impedância baseado na posição, para uma miniescavadeira. Os resultados experimentais mostraram que no modo de impedância, o seguimento da trajetória desejada era satisfatório, sendo que as forças transitórias foram menores e as forças de contato no estado estacionário tendiam a zero, enquanto que no controle de posição, as forças de interação foram significativamente maiores. Richardson-Little e Damaren (2005) propuseram um controle similar ao de impedância, baseado na posição, para escavações robóticas. Este controlador foi testado, e os resultados obtidos foram comparados com os fornecidos por controladores do tipo PD e PID. Nesta comparação, foi mostrado que o controlador por impedância permitiu um melhor controle do ciclo completo de escavação. Porém, no controlador proposto é necessário um bom conhecimento dos parâmetros do modelo considerado para a interação da caçamba com o solo.

As técnicas de SMC e de controle adaptativo foram combinadas e aplicadas por He et al. (2006) ao manipulador de uma escavadeira hidráulica. Este controlador foi testado na lança do equipamento, para o seguimento de uma trajetória simples,

descrita por uma função senoidal, no espaço livre. Os resultados obtidos foram satisfatórios, mostrando a capacidade do controlador em lidar com as não linearidades do sistema, em especial com as do subsistema hidráulico.

A Tabela 1 sumariza os trabalhos revisados referentes ao controle do manipulador. Nesta são especificados os autores, o tipo de controle realizado, e as estratégias de controle consideradas.

Tabela 2 - Trabalhos sobre o controle do manipulador.

Autor	Tipo	Método
Vähä e Skibniewski (1993b)	FPC	Estratégia cognitiva
Sepehri et al. (1994)	PC	PD
Cetto e Koivo (1995)	FPC	CTC, PD e P
Koivo et al. (1996)	PC	PD
Nguyen et al. (1999)	PC	Linearização por realimentação
Nguyen (2000)	FPC	Controle híbrido (força e posição)
Ha et al. (2000)	FPC	Impedância, SMC e controle <i>fuzzy</i>
Chang e Lee (2000)	PC	TD e compensadores
Ha et al. (2001)	PC	SMC e controle <i>fuzzy</i>
Lee e Chang (2002)	PC	TD e SMC
Tafazoli et al. (2002)	FPC	Impedância
Chiang e Huang (2004)	PC	Controle adaptativo
Richardson-Little e Damaren (2005)	FPC	Impedância
He et al. (2006)	FPC	SMC e controle adaptativo
Gao, Yanchao e Qin (2009)	PC	PID
Liu et al. (2010)	PC	CTC e SMC

Fonte: o autor.

Analisando-se os trabalhos revisados, pode-se afirmar que o controle por modos deslizantes é visto como sendo altamente eficaz, devido à redução do erro de

seguimento durante o trabalho, mais especificamente em relação à operação escavação, e por demonstrar um melhor desempenho na execução da trajetória, quando o sistema é submetido a distúrbios severos. Em relação ao controle por impedância, verifica-se que este proporciona uma abordagem unificada, tanto ao movimento livre no espaço, como durante a interação da caçamba com o solo (operação de escavação). Acredita-se que este tipo de controle é um dos mais adequados para a escavação robótica. Logo, um controlador que combine essas duas estratégias de controle é vantajoso para o desenvolvimento de uma escavadeira automática.

1.3 PERSPECTIVA GERAL

As escavadeiras automáticas podem oferecer benefícios, como o aumento do desempenho e da eficiência do equipamento, além de minimizar os riscos no trabalho em ambientes perigosos e diminuir sensivelmente a carga de trabalho que é imposta sobre o operador. No entanto, a automação total ou parcial das escavadeiras tem sido lentamente aceita pela indústria. À medida que as tecnologias de computação e sensoriamento vêm sendo constantemente melhoradas, a automação do processo de escavação através da adoção de tecnologias da robótica deverá ser alcançada.

Recentemente, a empresa Caterpillar introduziu um novo módulo de operação denominado de CAT® COMMAND MINESTAR que é ilustrado na Figura 13.

Figura 13 - Operação remota através do módulo CAT® COMMAND MINESTAR. (a): Retroescavadeira utilizada para regastes. (b): Içamento com escavadeira.

(a)

(b)

Fonte: (a): Caterpillar (2017a); (b): Finning (2017).

Com este módulo é possível alcançar diferentes níveis de automação em operações relacionadas à mineração (CATERPILLAR, 2017b). Este módulo também oferece a possibilidade de gerenciamento e monitoramento de todos os recursos (equipamentos) no local de trabalho, o que torna a operação de máquinas de construção deveras mais segura. Isto é um indicativo de que a indústria está se preparando para um maior grau de automação do equipamento, em áreas e tarefas que representam risco para o trabalho humano.

1.4 OBJETIVO

O objetivo central deste trabalho, é desenvolver um sistema de controle viável e eficiente, para o manipulador de uma miniescavadeira, que permita a automação do equipamento em um ciclo completo de trabalho, e que possa ser aplicado em qualquer miniescavadeira hidráulica de topologia semelhante.

1.5 METODOLOGIA

A metodologia que foi adotada para o desenvolvimento deste trabalho, e consequentemente do controlador da miniescavadeira, pode ser dividida nos seguintes tópicos:

- Desenvolver modelos matemáticos dos sistemas mecânico e hidráulico do manipulador de uma miniescavadeira hidráulica, e realizar o acoplamento desses modelos.
- Verificar a capacidade da representação física dos modelos matemáticos desenvolvidos, através da comparação com modelos de referências, obtidos a partir de *softwares* comerciais, dedicados à modelagem de sistemas dinâmicos.
- Projetar controladores para o manipulador da escavadeira, que sejam capazes de lidar com as incertezas e os distúrbios severos, utilizando os modelos desenvolvidos.
- Avaliar e comparar o desempenho dos controladores projetados, na execução de um ciclo completo de trabalho pelo manipulador, através de simulação numérica.

1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Na sequência do texto é apresentado o capítulo 2, onde são desenvolvidos os modelos matemáticos da cinemática e da dinâmica do subsistema mecânico do manipulador. Neste capítulo, os esforços provenientes das operações de escavação e carregamento também são descritos, e incluídos na dinâmica do subsistema mecânico. Por fim, uma comparação é realizada entre os esforços motores obtidos com os modelos analíticos, e os fornecidos por modelos computacionais, criados em um *software* comercial para a modelagem de sistemas multicorpos.

O capítulo 3 é dedicado à modelagem matemática do subsistema hidráulico do manipulador. Primeiramente, um modelo considerando os componentes principais do sistema é desenvolvido. Posteriormente, simplificações são realizadas neste modelo, resultando em versões de ordem reduzida. Os modelos derivados são verificados através da comparação com um modelo de referência, obtido através de um *software* comercial para modelagem de sistemas dinâmicos.

No capítulo 4, os modelos dos subsistemas mecânico e hidráulico são acoplados, para obtenção dos modelos acoplados. A capacidade desses modelos em representar a dinâmica do manipulador é verificada através da comparação com um modelo de referência, também criado em um *software* comercial para a modelagem de sistemas dinâmicos. Posteriormente, o modelo analítico mais eficiente é linearizado para o estudo das características dinâmicas do sistema global.

O capítulo 5 apresenta a técnica de controle em cascata que será empregada na síntese do controlador do manipulador. Em seguida, uma revisão das técnicas de controle que serão utilizadas no projeto do controlador também é apresentada. Ao final, com base na estrutura em cascata e nas técnicas apresentadas, projeta-se um controlador para cada subsistema do manipulador e, por consequência, obtém-se o controlador em cascata do sistema.

No capítulo 6, a trajetória de referência para a simulação dos controladores é criada, e a demanda de potência para a execução dessa trajetória é verificada. Em seguida é apresentado o sensoriamento empregado ao manipulador. Mais adiante, o controlador em cascata sintetizado no capítulo 6 é testado através de simulação computacional na execução da trajetória de referência pelo manipulador. Posteriormente,

os resultados obtidos na simulação são analisados e comparados com os de outros controladores.

Por fim, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Este capítulo é dedicado à modelagem matemática do subsistema mecânico do manipulador. Primeiro é apresentado a descrição desse subsistema. Em seguida, a modelagem da cinemática direta do manipulador é realizada. O modelo da sua dinâmica, considerando somente os corpos principais, é derivado por 3 métodos diferentes. São eles, respectivamente, o método de Euler-Lagrange, de Kane e pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Posteriormente, a relação entre os torques motores e as forças hidráulicas é obtida, a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Em seguida, o modelo do subsistema mecânico, considerando os cilindros e as barras, também é derivado por 3 métodos distintos. São eles, nessa mesma ordem, o método de Kane na forma matricial, o método de Euler-Lagrange com multiplicadores, e através das equações de Maggi. Posteriormente, o modelo de cinemática inversa do manipulador é obtido. As forças generalizadas das operações de escavação e carregamento também são descritas. Por fim, é realizada uma comparação entre os modelos matemáticos derivados para o subsistema mecânico e um modelo de referência, obtido a partir de um *software* comercial dedicado a modelagem de sistemas multicorpos.

2.1 DESCRIÇÃO DO SUBSISTEMA MECÂNICO

O manipulador em questão, que é mostrado na Figura 14, é um mecanismo serial com 4 graus de liberdade, pois cada uma das 4 juntas ativas (juntas da base, lança, braço e caçamba) pode realizar o movimento de rotação em relação a um respectivo eixo local. O manipulador é um sistema multicorpos, formado por 14 elos, ou corpos, sendo eles os corpos principais (base, lança, braço e caçamba) totalizando 4 corpos; os 4 cilindros, cada um formado por uma camisa e uma haste, o que totaliza 8 corpos; e as barras, que totalizam 3 corpos. No entanto, estas últimas podem ser descritas como um mecanismo de 2 barras, se as propriedades de massa e inércia da barra 1 foram dobradas, devido à simetria no tipo de vínculo cinemático. Na Figura 14 são ilustrados os corpos do manipulador que foram mencionados anteriormente.

Ainda em relação ao manipulador, este pode ser dividido em 4 mecanismos, que podem ser controlados independentemente. O primeiro mecanismo é responsável pelo giro da base e é atuado pelo cilindro 1. O segundo mecanismo é encarregado da

rotação da lança e é atuado pelo cilindro 2, sendo que se considerada a base, a lança e o cilindro 2, nota-se um mecanismo do tipo biela-manivela. Já o terceiro mecanismo realiza a rotação do braço e é atuado pelo cilindro 3, e se considerado a lança, o braço e o cilindro 3, verifica-se um mecanismo do tipo biela-manivela invertido. O quarto e último mecanismo é responsável pelo movimento de rotação da caçamba e é atuado pelo cilindro 4. Esse movimento deve ser de grande amplitude, e por isso é utilizado um conjunto de barras para conectar o cilindro 4 à caçamba. Considerando as barras, o braço, a caçamba e o cilindro 4, identifica-se um mecanismo de seis barras.

Figura 14 - Manipulador do tipo miniescavadeira hidráulica utilizado.

Fonte: o autor.

2.2 CINEMÁTICA DIRETA DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Nesta seção, o modelo de cinemática direta do subsistema mecânico do manipulador será derivado. Primeiramente, algumas hipóteses simplificadoras serão adotadas. Em seguida, referenciais e sistemas de coordenadas serão atribuídos aos elos do manipulador. Posteriormente, a orientação dos elos e a posição dos centros de massa serão descritas, bem como suas velocidades e acelerações. Por fim, os vetores absolutos obtidos serão expressos nos sistemas de coordenadas móveis dos elos.

2.2.1 Hipóteses simplificadoras para o modelo da cinemática direta

A seguir são apresentadas as hipóteses simplificadoras que foram utilizadas para no modelo da cinemática direta do subsistema mecânico do manipulador:

- Os elos do manipulador são assumidos como corpos rígidos, portanto, qualquer efeito relativo à flexibilidade é negligenciado.
- As juntas do manipulador são admitidas como ideais, logo, folgas e forças dissipativas não são consideradas.

2.2.2 Atribuição de referências aos elos principais

Tomando o manipulador com os seus elos principais (base, lança, braço e caçamba), para descrever sua cinemática direta, um referencial inercial, denominado aqui como I , dotado de um sistema de coordenadas retangulares (O_0, x_0, y_0, z_0) , é fixado no centro da junta da base do manipulador. O referencial 1, solidário à base do manipulador, com origem coincidente com a origem do referencial inercial, ou seja, $O_0 = O_1$, e com um sistema de coordenadas retangulares (O_1, x_1, y_1, z_1) , também é criado. Esse referencial tem a função de descrever a posição da base em relação ao referencial I , através do deslocamento angular θ_1 , que será definido positivo quando for realizado no sentido anti-horário, ou seguindo a regra da mão-direita. Sendo assim, para descrever a posição da lança em relação ao referencial solidário à base, e assim sucessivamente até que seja possível descrever a posição da caçamba em relação ao referencial solidário ao braço, são utilizados os referenciais locais 2, 3 e 4, que são solidários à lança, ao braço e à caçamba, respectivamente. Desta forma, os sistemas de coordenadas 2, 3 e 4, ou ainda (O_2, x_2, y_2, z_2) , (O_3, x_3, y_3, z_3) e (O_4, x_4, y_4, z_4) juntamente com os deslocamentos angulares θ_2 , θ_3 e θ_4 são relativos aos referenciais 2, 3 e 4, respectivamente. O conjunto de deslocamentos angulares $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ representa as coordenadas generalizadas do subsistema mecânico. Por conveniência, serão atribuídos números aos centros das juntas e aos elos do manipulador: o centro da junta da base com o chão será o ponto 0; o centro da junta da lança com a base será o ponto 1; o centro da junta da lança com o braço será o ponto 2; o centro da junta do braço com a caçamba será o ponto 3, e a ponta dos dentes da caçamba será o ponto 4. Em relação aos corpos principais, à base, à lança, o braço e à caçamba serão os

corpos 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Na Figura 15 são ilustrados os sistemas de coordenadas, coordenadas generalizadas, pontos e os corpos que foram definidos previamente no texto.

Figura 15 - Sistemas de coordenadas, coordenadas generalizadas e pontos. (a): Representação no plano xz ; (b): Representação no plano xy .

Fonte: o autor.

2.2.3 Orientação e posição

Nesta seção, primeiramente, é realizado a descrição da orientação dos elos do manipulador, sendo que em seguida é apresentado a descrição da posição dos centros de massa desses elos.

2.2.3.1 Orientação dos elos

Para a descrição da orientação dos elos do manipulador, tomam-se os sistemas de coordenadas j e $j-1$, com $j=1, \dots, m$ sistemas de coordenadas. Considera-se que as origens O_j e O_{j-1} são coincidentes. Desta forma, a rotação de j para $j-1$ é dada pela projeção de versores de j em $j-1$. Realiza-se esta projeção através da matriz ${}^{j-1}\mathbf{R}_j \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, denominada matriz de cossenos diretores, que é uma matriz ortogonal (BARUH, 1999; MEIROVITCH, 2003), ou seja, ${}^{j-1}\mathbf{R}_j = {}^j\mathbf{R}_{j-1}^T = {}^j\mathbf{R}_{j-1}^{-1}$, onde os sobrescritos T e -1 indicam, respectivamente, a transposta e a inversa de ${}^{j-1}\mathbf{R}_j$. Considera-se agora o sistema de coordenadas $j^* < j$, com $j^* = 0, 1, \dots, m$ sistemas de coordenadas e $j^* = 0 \Rightarrow I$, a projeção dos versores de j em j^* é dada pela seguinte matriz de rotação:

$${}^{j^*}\mathbf{R}_j = \prod_{r=j^*+1}^j {}^r\mathbf{R}_j = \prod_{r=j^*+1}^j \left[\mathbf{I} + (1 - \cos \theta_r) {}^r\tilde{\mathbf{e}}_r^2 + {}^r\tilde{\mathbf{e}}_r \sin \theta_r \right] \quad (2.1)$$

onde ${}^r\mathbf{R}_j \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de Rodrigues (ŠALINIĆ; BOŠKOVIĆ; NIKOLIĆ, 2014), $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é a matriz identidade, e ${}^r\tilde{\mathbf{e}}_r \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é a matriz antissimétrica associada ao vetor de rotação ${}^r\mathbf{e}_r = [e_x \ e_y \ e_z]^T$. Este vetor é definido de acordo com a direção e o sentido de rotação de cada junta, como demonstrado a seguir:

$${}^r\mathbf{e}_r = {}^{r-1}\mathbf{e}_r = \begin{cases} [0 \ 1 \ 0]^T & \text{se } j=1 \\ [0 \ 0 \ 1]^T & \text{se } j=2,3,4 \end{cases} \quad (2.2)$$

Desenvolvendo a equação (2.1) para $j^* = j-1$, obtém-se a matriz de rotação ${}^{j-1}\mathbf{R}_j$, que é expressa por:

$${}^{j-1}\mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} c_{\theta_r} + e_x^2(1 - c_{\theta_r}) & e_x e_y(1 - c_{\theta_r}) - e_z s_{\theta_r} & e_y s_{\theta_r} + e_x e_z(1 - c_{\theta_r}) \\ e_z s_{\theta_r} + e_x e_y(1 - c_{\theta_r}) & c_{\theta_r} + e_y^2(1 - c_{\theta_r}) & -e_x s_{\theta_r} + e_y e_z(1 - c_{\theta_r}) \\ -e_y s_{\theta_r} + e_x e_z(1 - c_{\theta_r}) & e_x s_{\theta_r} + e_y e_z(1 - c_{\theta_r}) & c_{\theta_r} + e_z^2(1 - c_{\theta_r}) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde $s_{\theta_k} = \sin \theta_k$, $c_{\theta_k} = \cos \theta_k$ e $r = j^* + 1 = j$.

A matriz de rotação ${}^{j-1}\mathbf{R}_j$ será fundamental no desenvolvimento do modelo da cinemática direta e, consequentemente, no modelo da dinâmica do subsistema mecânico do manipulador.

2.2.3.2 Posição dos centros de massa

Para realizar a descrição da posição dos centros de massa dos elos, o ponto CGi , referente ao centro de massa do elo i , é considerado. O vetor absoluto de posição deste ponto é escrito como a soma do vetor ${}^I\mathbf{r}_{O_j}$, que é relativo à posição do ponto O_j , com o vetor ${}^I\mathbf{r}_{O_j-CGi}$, que expressa a posição do ponto CGi em relação ao ponto O_j . Desta forma, o vetor absoluto de posição do ponto CGi fica expresso como mostrado a seguir (SANTOS, 2001b):

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{r}_{CGi} &= {}^I\mathbf{r}_{O_j} + {}^I\mathbf{r}_{O_j-CGi} \\ {}^I\mathbf{r}_{CGi} &= {}^I\mathbf{r}_{O_j} + {}^I\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{r}_{O_j-CGi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

com ${}^I\mathbf{R}_j = {}^I\mathbf{R}_i$ sendo a matriz de rotação obtida quando $j^* = j-1=0$ na expressão (2.1), ou seja, $j^* = 0 \Rightarrow I$, para $\forall i \leq n$, com $i = j$. Portanto, a relação $i = j$ é válida, e implica em uma simplificação na notação, o que irá facilitar o desenvolvimento das expressões cinemáticas. Assim, a equação (2.4) fica reescrita como:

$${}^I\mathbf{r}_{CGi} = {}^I\mathbf{r}_{O_i} + {}^I\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{r}_{O_i-CGi} \quad (2.5)$$

com os vetores ${}^I\mathbf{r}_{O_j}$ e ${}^I\mathbf{r}_{O_j-CGi}$ sendo dados, respectivamente, por:

$${}^I\mathbf{r}_{O_i} = {}^I\mathbf{r}_{O_{i-1}} + {}^I\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{r}_{O_{i-1}-O_i} \quad (2.6)$$

$${}^i\mathbf{r}_{O_i-CGi} = \begin{bmatrix} l_{O_i-CGi} \cos \alpha_{CGi} & l_{O_i-CGi} \sin \alpha_{CGi} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.7)$$

onde ${}^I\mathbf{r}_{O_{i-1}} = \mathbf{0} \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ para $i=1$, l_{O_i-CGi} é a distância linear entre os pontos O_i e CGi , α_{CGi} é o ângulo definido entre o vetor ${}^i\mathbf{r}_{O_i-CGi}$ e o eixo x_i , do sistema de coordenadas $j=i$, e ${}^i\mathbf{r}_{O_{i-1}-O_i}$ é expresso por:

$${}^i\mathbf{r}_{O_{i-1}-O_i} = \begin{bmatrix} l_{O_{i-1}-O_i} \cos \delta_i & l_{O_{i-1}-O_i} \sin \delta_i & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.8)$$

sendo $l_{O_{i-1}-O_i}$ a distância linear entre os pontos O_{i-1} e O_i , e δ_i o ângulo entre o vetor ${}^i\mathbf{r}_{O_{i-1}-O_i}$ e o eixo x_i do sistema de coordenadas $j=i$, que é definido como:

$$\delta_i \triangleq \begin{cases} \delta_{BA3} & \text{se } i=1 \\ 0 & \text{se } i=2,3,4 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde δ_{BA3} é um ângulo característico da base do manipulador. Este será melhor especificado nas análises de cinemática inversa que serão realizadas mais adiante.

Com a equação (2.5) obtém-se o vetor absoluto de posição do centro de massa do i -ésimo elo do manipulador.

2.2.4 Velocidades

Nesta seção, primeiramente, é apresentada a derivação dos vetores de velocidade angular dos elos, sendo que posteriormente também é realizada a derivação dos vetores de velocidade dos centros massa.

2.2.4.1 Velocidade angular dos elos

Seja ${}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1_j}$ o vetor de velocidade angular do sistema de coordenadas j em relação e expresso em $j-1$. Logo, para obter o vetor absoluto de velocidade angular de j é necessário considerar o vetor ${}^I\boldsymbol{\omega}_{j-1}$, mais a rotação do vetor ${}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1_j}$ de $j-1$ para I , de tal forma que (SANTOS, 2001b):

$$\begin{aligned} {}^I\boldsymbol{\omega}_j &= {}^I\boldsymbol{\omega}_{j-1} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{j-1_j} \\ {}^I\boldsymbol{\omega}_j &= {}^I\boldsymbol{\omega}_{j-1} + {}^I\mathbf{R}_{j-1} {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1_j} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como $j=i$ é uma relação verdadeira, então a equação anterior fica reescrita da seguinte forma:

$${}^I\boldsymbol{\omega}_i = {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^I\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1_i} \quad (2.11)$$

onde ${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = \dot{q}_r {}^r\mathbf{e}_r$, com $r=j=i$ e ${}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ se $i=1$.

Na literatura, a equação (2.11) é reescrita como (SANTOS, 2001b):

$${}^I\boldsymbol{\omega}_i = {}^I\boldsymbol{\omega}_{arri} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{reli} \quad (2.12)$$

sendo ${}^I\boldsymbol{\omega}_{arri}$ o vetor de velocidade angular de arrastamento, e ${}^I\boldsymbol{\omega}_{reli}$ o vetor de velocidade angular relativa.

A seguir, reúnem-se os termos da equação (2.12):

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{arri} = {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1} \quad (2.13)$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{reli} = {}^I\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1_i} \quad (2.14)$$

A equação (2.12) expressa o vetor absoluto de velocidade angular do i -ésimo elo do manipulador.

2.2.4.2 Velocidade dos centros de massa

O vetor absoluto velocidade do centro de massa CGi é escrito como a derivada primeira do vetor ${}^I\mathbf{r}_{CGi}$ em relação ao tempo, ou seja:

$${}^I\mathbf{v}_{CGi} = \dot{{}^I\mathbf{r}_{CGi}} = \dot{{}^I\mathbf{r}_{O_i}} + \dot{{}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}} \quad (2.15)$$

No desenvolvimento da equação (2.15), realizam-se as seguintes passagens até a obtenção da expressão final (SANTOS, 2001b):

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}_{CGi} &= \dot{{}^I\mathbf{r}_{O_i}} + {}^I\dot{\mathbf{R}}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi} \\ {}^I\mathbf{v}_{CGi} &= {}^I\mathbf{v}_{O_i} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) + {}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{v}_{O_i-CGi} \\ {}^I\mathbf{v}_{CGi} &= {}^I\mathbf{v}_{O_i} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde ${}^I\mathbf{v}_{O_i}$ é o vetor velocidade do ponto O_i e ${}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi}$ é o vetor de velocidade relativa, definido entre os pontos O_i e CGi , que é dado pela derivada primeira do vetor ${}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}$ em relação ao tempo.

A equação (2.16) é reescrita como mostrado a seguir (SANTOS, 2001b):

$${}^I\mathbf{v}_{CGi} = {}^I\mathbf{v}_{arri} + {}^I\mathbf{v}_{reli} \quad (2.17)$$

onde ${}^I\mathbf{v}_{arri}$ é o vetor de velocidade de arrastamento, e ${}^I\mathbf{v}_{reli}$ é o vetor de velocidade relativa.

A seguir, colecionam-se os termos da equação (2.17):

$${}^I\mathbf{v}_{arri} = {}^I\mathbf{v}_{O_i} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{v}_{O_i} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) \quad (2.18)$$

$${}^I\mathbf{v}_{reli} = {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{v}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi} \quad (2.19)$$

Utilizando a equação (2.17), obtém-se o vetor absoluto de velocidade do centro de massa do i -ésimo elo manipulador.

2.2.5 Acelerações

Esta seção é dedicada à derivação dos vetores de aceleração angular dos elos do manipulador, sendo que aqui também é realizada a derivação dos vetores de aceleração dos seus centros massa.

2.2.5.1 Aceleração angular dos elos

O vetor absoluto de aceleração angular ${}^I\mathbf{a}_i$, referente ao i -ésimo, é obtido a partir da derivada primeira do vetor ${}^I\mathbf{\omega}_i$ em relação ao tempo, como demonstrado a seguir:

$${}^I\mathbf{a}_i = {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_i = {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1} + {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1_i} \quad (2.20)$$

As passagens para o desenvolvimento da expressão anterior, até a obtenção da equação final, são realizadas da forma que se segue (SANTOS, 2001b):

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{a}_i &= {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1} + {}^I\dot{\mathbf{R}}_{i-1}^{i-1}\mathbf{\omega}_{i-1_i} + {}^I\mathbf{R}_{i-1}^{i-1}\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1_i} \\ {}^I\mathbf{a}_i &= {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1} + {}^I\mathbf{\omega}_{i-1} \wedge ({}^I\mathbf{R}_{i-1}^{i-1}\mathbf{\omega}_{i-1_i}) + {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1_i} \\ {}^I\mathbf{a}_i &= {}^I\mathbf{a}_{i-1} + {}^I\mathbf{\omega}_{i-1} \wedge {}^I\mathbf{\omega}_{i-1_i} + {}^I\mathbf{a}_{i-1_i} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A equação (2.21) pode ser escrita da seguinte forma (SANTOS, 2001b):

$${}^I\mathbf{a}_i = {}^I\mathbf{a}_{arri} + {}^I\mathbf{a}_{reli} + {}^I\mathbf{a}_{resi} \quad (2.22)$$

sendo ${}^I\mathbf{a}_{arri}$ o vetor de aceleração angular de arrastamento, ${}^I\mathbf{a}_{reli}$ o vetor de aceleração angular relativa, e ${}^I\mathbf{a}_{resi}$ o vetor de aceleração de Resal ou complementar.

A seguir, colecionam-se os termos da equação (2.22):

$${}^I\mathbf{a}_{arri} = {}^I\mathbf{a}_{i-1} = {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1} \quad (2.23)$$

$${}^I\mathbf{a}_{reli} = {}^I\mathbf{a}_{i-1_i} = {}^I\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1_i} = {}^I\mathbf{R}_{i-1}^{i-1}\dot{\mathbf{\omega}}_{i-1_i} \quad (2.24)$$

$${}^I\mathbf{a}_{resi} = {}^I\mathbf{\omega}_{i-1} \wedge {}^I\mathbf{\omega}_{i-1_i} = {}^I\mathbf{\omega}_{i-1} \wedge ({}^I\mathbf{R}_{i-1}^{i-1}\mathbf{\omega}_{i-1_i}) \quad (2.25)$$

Com a equação (2.22) obtém-se o vetor absoluto de aceleração angular relativo ao i -ésimo elo do manipulador.

2.2.5.2 Aceleração dos centros de massa

O vetor absoluto de aceleração do centro de massa CGi é escrito como a derivada primeira do vetor ${}^I\mathbf{v}_{CGi}$, ou como a derivada segunda do vetor ${}^I\mathbf{r}_{CGi}$ em relação ao tempo, logo:

$${}^I\mathbf{a}_{CGi} = {}^I\dot{\mathbf{v}}_{CGi} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{CGi} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{O_i_CGi} \quad (2.26)$$

As passagens para o desenvolvimento da expressão anterior, até a obtenção da equação final, são realizadas da forma que se segue (SANTOS, 2001b):

$$\begin{aligned}
{}^I\mathbf{a}_{CGi} &= {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi} + {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i-CGi} \\
{}^I\mathbf{a}_{CGi} &= {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\dot{\mathbf{R}}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi}) + \dots \\
&\quad {}^I\dot{\mathbf{R}}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{v}}_{O_i-CGi} \\
{}^I\mathbf{a}_{CGi} &= {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge [{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi})] + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi}) + \dots \\
&\quad {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi}) + {}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{v}}_{O_i-CGi} \\
{}^I\mathbf{a}_{CGi} &= {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}) + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} + \dots \\
&\quad {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} + {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i-CGi} \\
{}^I\mathbf{a}_{CGi} &= {}^I\mathbf{a}_{O_i} + {}^I\mathbf{a}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{a}_{O_i-CGi} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

onde ${}^I\mathbf{a}_{O_i}$ é o vetor aceleração do ponto O_i , e ${}^I\mathbf{a}_{O_i-CGi}$ é o vetor de aceleração relativa, definido entre os pontos O_i e CGi .

Na literatura, a equação (2.27) é reescrita como (SANTOS, 2001b):

$${}^I\mathbf{a}_{CGi} = {}^I\mathbf{a}_{arri} + {}^I\mathbf{a}_{corri} + {}^I\mathbf{a}_{reli} \quad (2.28)$$

onde ${}^I\mathbf{a}_{arri}$ é o vetor de aceleração de arrastamento, ${}^I\mathbf{a}_{corri}$ é o vetor de aceleração de Coriolis ou complementar, e ${}^I\mathbf{a}_{reli}$ é o vetor de aceleração relativa entre os pontos O_i e CGi .

A seguir, reúnem-se os termos da equação (2.28):

$$\begin{aligned}
{}^I\mathbf{a}_{arri} &= {}^I\mathbf{a}_{O_i} + {}^I\mathbf{a}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}) = {}^I\dot{\mathbf{v}}_{O_i} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi}) + \dots \\
&\quad {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge [{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_{O_i-CGi})] \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$${}^I\mathbf{a}_{cori} = 2{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} = 2{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi}) \quad (2.30)$$

$${}^I\mathbf{a}_{reli} = {}^I\mathbf{a}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^i \mathbf{a}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{v}}_{O_i-CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^i \ddot{\mathbf{r}}_{O_i-CGi} \quad (2.31)$$

A equação (2.28) fornece o vetor absoluto de aceleração do centro de massa do i -ésimo elo do manipulador.

Reunindo-se os vetores absolutos de posição, velocidade e aceleração dos elos e dos seus centros de massa, obtém-se o modelo da cinemática direta do sub-sistema mecânico do manipulador.

2.2.6 Representação dos vetores absolutos no sistema móvel

De acordo com Santos (2001b), a representação dos vetores absolutos no sistema de coordenada móvel é de grande valia para a derivação do modelo da dinâmica do manipulador, pois evita a rotação dos tensores de inércia para o sistema de coordenadas do referencial inercial, além de reduzir significativamente o tamanho das expressões da cinemática direta. A fim de representar um vetor absoluto qualquer ${}^I\boldsymbol{\eta}_i$, associado ao i -ésimo elo, no sistema de coordenadas móvel $j=i$, faz-se a seguinte rotação: ${}^I\boldsymbol{\eta}_i = {}^I\mathbf{R}_i^T {}^I\boldsymbol{\eta}_i$. Para simplificar a notação, o vetor ${}^I\boldsymbol{\eta}_i$ será expresso por $\boldsymbol{\eta}_i$, ou seja, ${}^I\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_i$, sendo assim, esta notação será utilizada para vetores absolutos expressos no sistema de coordenadas móvel $j=i \neq 0$. Os tensores de inércia $\mathbf{I}_i = {}^i\mathbf{I}_i$ que, de fato, são calculados no sistema de coordenadas móvel, serão a única exceção para a notação aqui apresentada.

2.3 DINÂMICA DO SUBSISTEMA MECÂNICO

A dinâmica do subsistema mecânico do manipulador será modelada pelo método de Euler-Lagrange, pelo método de Kane, e pelo princípio dos trabalhos virtuais. Ressalta-se que os métodos aqui aplicados são todos oriundos do princípio dos trabalhos virtuais, como pode ser visto em Meirovitch (2003) e em Baruh (1999). Antes da modelagem, algumas hipóteses simplificadoras serão realizadas a fim de simplificar a modelagem deste subsistema.

2.3.1 Hipóteses simplificadoras para modelagem do subsistema mecânico

As hipóteses simplificadoras que foram adotadas para a modelagem do subsistema mecânico do manipulador são apresentadas a seguir:

- A contribuição inercial dos cilindros e das barras para a dinâmica do subsistema mecânico é negligenciada *a priori*, portanto, somente os corpos principais são considerados.
- Os efeitos dissipativos são desconsiderados na modelagem do subsistema mecânico. Posteriormente, esses efeitos serão incluídos no modelo acoplado do manipulador.

2.3.2 Modelagem pelo método de Euler-Lagrange

Segundo Meirovitch (2003), as equações de movimento de um sistema do tipo mecânico podem ser obtidas pelo método de Euler-Lagrange, através da aplicação da expressão a seguir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (2.32)$$

com $T = T(q_k, \dot{q}_k)$ sendo a função de energia cinética do sistema, Q_k a força generalizada associada à k -ésima coordenada generalizada, e $q_k = \theta_k$ à k -ésima coordenada generalizada. Para o manipulador, a função de energia cinética pode ser escrita como a soma dos termos de energia cinética translacional e rotacional dos elos:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{v}_{CGi}^T m_i \mathbf{v}_{CGi} + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \right) \quad (2.33)$$

onde m_i e $\mathbf{I}_i$ são, respectivamente, a massa e o tensor de inércia do i -ésimo elo, com $i = 1, \dots, N$ elos. A força generalizada associada à k -ésima coordenada generalizada é dada por:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N^*} \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (2.34)$$

sendo $\mathbf{F}_i$ o vetor da resultante das forças ativas no i -ésimo ponto material, com $i = 1, \dots, N^*$ pontos, e $\mathbf{r}_i$ é o vetor de posição do respectivo ponto. Desenvolvendo Q_k para o subsistema mecânico, obtém-se que:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{CGi}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{CGi}}{\partial q_k} + \tau_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{CGi}^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CGi}}{\partial \dot{q}_k} + \tau_k \quad (2.35)$$

com $\mathbf{G}_{CGi}$ e τ_k sendo, respectivamente, o vetor de força peso do i -ésimo elo, e o torque motor relativo à k -ésima coordenada generalizada. O vetor de força peso em relação à I é dado por: ${}^I\mathbf{G}_{CGi} = [0 \quad -m_i g \quad 0]^T$, onde g é a aceleração da gravidade na direção vertical. Logo, para representar ${}^I\mathbf{G}_{CGi}$ no sistema de coordenadas móvel, realiza-se a seguinte rotação: $\mathbf{G}_{CGi} = {}^I\mathbf{R}_i^T {}^I\mathbf{G}_{CGi}$. Os vetores ${}^I\mathbf{G}_{CGi}$ e os torques τ_k serão denominados de esforços ativos. Na Figura 16 são ilustrados os esforços ativos do subsistema mecânico do manipulador.

Figura 16 - Esforços ativos do subsistema mecânico do manipulador. (a): Esforços ativos no plano xz ; (b): Esforços ativos no plano xy .

(a)

(b)

Fonte: o autor.

Ressalta-se que a equação (2.32) é um caso particular da equação de Euler-Lagrange, onde os esforços que derivam de um potencial generalizado são agrupados com as forças generalizadas não conservativas. Na sua forma original, a equação de Euler-Lagrange é escrita como mostrado a seguir (MEIROVITCH, 2003):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{nc} \quad (2.36)$$

onde $L = T - U$ é a Lagrangiana do sistema, obtida com as suas funções de energia cinética T , e de energia potencial gravitacional U ; o termo Q_k^{nc} representa a força

generalizada não conservativa (que não deriva de um potencial generalizado) associada a k -ésima coordenada generalizada. Para o subsistema mecânico do manipulador, tem-se que: $Q_k^{nc} = \tau_k$.

A função de energia potencial gravitacional do subsistema mecânico é obtida pela expressão seguinte:

$$U = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{CGi}^T \mathbf{r}_{CGi} \quad (2.37)$$

Realizando-se as derivadas parciais do lado esquerdo da equação (2.36), e as igualando com a força generalizada não conservativa Q_k^{nc} , até à k -ésima coordenada generalizada, obtêm-se assim as equações de movimento do subsistema mecânico pelo método de Euler-Lagrange através da equação original.

2.3.3 Modelagem pelo método de Kane

Deriva-se o modelo do subsistema mecânico do manipulador pelo método de Kane, através do equilíbrio dinâmico entre as forças ativas e inerciais do sistema, como demonstrado na equação (2.38), adaptada de Baruh (1999).

$$F_k = F_k^* \quad (2.38)$$

onde F_k e F_k^* são, respectivamente, a força ativa generalizada e a força de inercial generalizada, ambas associadas à k -ésima coordenada generalizada. A força ativa generalizada F_k é dada pela seguinte expressão:

$$F_k = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CGi}}{\partial \dot{q}_k} + \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (2.39)$$

sendo $\mathbf{F}_i$ o vetor de forças ativas, e $\mathbf{M}_i$ o vetor de momentos ativos, que agem sobre o i -ésimo elo; os termos $\partial \mathbf{v}_{CGi} / \partial \dot{q}_k$ e $\partial \boldsymbol{\omega}_i / \partial \dot{q}_k$ são as velocidades parciais lineares e angulares, respectivamente. No problema proposto, o vetor de forças ativas $\mathbf{F}_i$ e a somatória dos momentos ativos generalizados $\mathbf{M}_i^T (\partial \boldsymbol{\omega}_i / \partial \dot{q}_k)$ são expressos pelas equações (2.40) e (2.41), respectivamente.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} = \tau_k \quad (2.40)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{G}_{CGi} \quad (2.41)$$

As forças inerciais generalizadas F_k^* , são obtidas a partir do produto escalar dos termos inerciais, da equação de Newton-Euler, pelas velocidades parciais, como demonstrado na equação (2.42):

$$F_k^* = \sum_{i=1}^N \left(m_i \mathbf{a}_{CGi}^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CGi}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{\mathbf{H}}_i^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (2.42)$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_i$ é o vetor que representa a variação da quantidade de movimento angular do elo i , que é dado por:

$$\dot{\mathbf{H}}_i = \mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (2.43)$$

Aplicando as equações (2.39) e (2.42) até a k -ésima coordenada generalizada, obtêm-se as equações de movimento do subsistema mecânico pelo método de Kane.

2.3.4 Modelagem pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais

A somatória dos trabalhos virtuais realizados por todas as forças do sistema, incluindo as forças motoras, forças de inércia e forças gravitacionais, é igual a zero (MEIROVITCH, 2003). Sendo assim, pode-se escrever a resultante dos trabalhos virtuais como demonstrado na equação (2.44).

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{CGi}^T \delta \mathbf{r}_{CGi} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_{CGi}^T \delta \mathbf{r}_{CGi} + \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{I}_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \wedge (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right]^T \delta \boldsymbol{\Theta}_i \quad (2.44)$$

sendo $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \cdots \ \tau_n]^T$ o vetor de torques motores, e $\mathbf{q} = [q_1 \ \cdots \ q_n]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas. Os termos $\delta \mathbf{r}_{CGi}$ e $\delta \boldsymbol{\Theta}_i$ são os vetores de deslocamentos virtuais dos centros de massa e dos elos, respectivamente, que são dados por:

$$\delta \mathbf{r}_{CGi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{CGi}}{\partial q_k} \delta q_k \quad (2.45)$$

$$\delta \boldsymbol{\Theta}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (2.46)$$

As equações anteriores são análogas às expressões de velocidade dos centros de massa e velocidade angular dos elos. Esta semelhança fica evidente se os vetores $\mathbf{v}_{CGi}$ e $\boldsymbol{\omega}_i$ forem expandidos em derivadas parciais, como demonstrado a seguir:

$$\mathbf{v}_{CGi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{CGi}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_{CGi}}{\partial t} \quad (2.47)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}_i}{\partial t} \quad (2.48)$$

Verifica-se, portanto, que para realizar o cálculo dos vetores de deslocamentos virtuais, $\delta \mathbf{r}_{CGi}$ e $\delta \boldsymbol{\Theta}_i$, basta substituir $\dot{q}_k$ por δq_k , nas expressões dos vetores de velocidade, $\mathbf{v}_{CGi}$ e $\boldsymbol{\omega}_i$, respectivamente.

Segundo Meirovitch (2003), a somatória dos trabalhos virtuais deve ser igual a zero para qualquer deslocamento virtual. Desta forma, para obter as equações de movimento do subsistema mecânico, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, igualam-se a zero as somatórias dos termos da equação (2.44) que multiplicam cada um dos deslocamentos virtuais $(\delta \theta_1, \dots, \delta \theta_n)$, ou seja, $\partial \delta W / \partial \delta q_k = 0$ para $\forall \delta q_k \in \delta \mathbf{q}$.

2.4 FORÇAS HIDRÁULICAS

Na Figura 17 são ilustrados os vetores de força hidráulica $\mathbf{F}_{hi}$ e $-\mathbf{F}_{hi}$, que são resultantes da atuação do i -ésimo cilindro sobre o subsistema mecânico. Também são mostrados os vetores absolutos de posição $\mathbf{r}_{O_Ci}$ e $\mathbf{r}_{O_Hi}$, referentes aos pontos Ci e Hi do manipulador, respectivamente.

Figura 17 - Atuação dos vetores de força hidráulica do cilindro i .

Fonte: o autor.

O torque motor gerado pelo i -ésimo atuador (com $i = 1, \dots, n$ atuadores), pode ser relacionado com a força hidráulica F_{hi} através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (ŠALINIĆ; BOŠKOVIĆ; NIKOLIĆ, 2014). Para tanto, escreve-se o trabalho virtual realizado pelos vetores de força $\mathbf{F}_{hi}$ e $-\mathbf{F}_{hi}$, como sendo:

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}_{hi}^T \delta \mathbf{r}_{O_{-}Ci} - \mathbf{F}_{hi}^T \delta \mathbf{r}_{O_{-}Hi} \\ \delta W &= \mathbf{F}_{hi}^T (\delta \mathbf{r}_{O_{-}Ci} - \delta \mathbf{r}_{O_{-}Hi}) \\ \delta W &= \mathbf{F}_{hi}^T \delta (l_{CiHi} \mathbf{u}_{Ci})\end{aligned}\tag{2.49}$$

onde $\mathbf{u}_{Ci} = \mathbf{r}_{CiHi} / l_{CiHi}$ é o vetor unitário principal do cilindro i , l_{CiHi} é o comprimento do i -ésimo cilindro, que corresponde à magnitude do vetor $\mathbf{r}_{CiHi}$.

Desenvolvendo a equação (2.49), obtém-se:

$$\delta W = F_{hi} \frac{\partial l_{CiHi}}{\partial q_k} \delta q_k\tag{2.50}$$

Analisando a equação (2.50), vem que a relação entre torque motor e força hidráulica para i -ésimo atuador é dada por:

$$\tau_k = F_{hi} \frac{\partial l_{CiHi}}{\partial q_k}\tag{2.51}$$

sendo $i = k$. Com a equação (2.51) realiza-se a conversão dos torques motores em forças hidráulicas. As derivadas parciais apresentas na equação (2.51), até à k -ésima coordenada generaliza, podem ser agrupadas em uma matriz diagonal, denominada de matriz jacobiana ou de acoplamento. No capítulo 4, as derivadas parciais de (2.51) serão agrupadas nesta matriz.

2.4.1 Comprimento dos cilindros

Para expressar o comprimento dos cilindros hidráulicos (distância entre as suas extremidades) em função das coordenadas generalizadas, é necessário obter o seu modelo de cinemática inversa. Este modelo é obtido através da aplicação de geometria no subsistema mecânico (ŠALINIĆ; BOŠKOVIĆ; NIKOLIĆ, 2014), seguindo como referência a Figura 18.

Figura 18 - Comprimento dos cilindros hidráulicos. (a): Cilindro 1; (b): Cilindros 2 e 3; (c): Cilindro 4.

Fonte: o autor.

Baseando-se na Figura 18 (a), obtém-se para o cilindro 1:

$$\alpha_{BA} = \theta_1 + \delta_{BA1} \quad (2.52)$$

$$l_{C1_H1} = \sqrt{l_{0_C1}^2 + l_{0_H1}^2 - 2l_{0_C1}l_{0_H1}\cos\alpha_{BA}} \quad (2.53)$$

Da Figura 18 (b) e (c) para os cilindros 2 e 3, respectivamente, vem que:

$$\alpha_L = \frac{\pi}{2} + \theta_2 - (\delta_{L1} - \delta_{L2}) \quad (2.54)$$

$$l_{C2_H2} = \sqrt{l_{1_H2}^2 + l_{1_C2}^2 - 2l_{1_H2}l_{1_C2}\cos\alpha_L} \quad (2.55)$$

$$\alpha_{BR} = \pi - \theta_3 - (\delta_{BR1} + \delta_{BR2}) \quad (2.56)$$

$$l_{C3_H3} = \sqrt{l_{2_C3}^2 + l_{2_H3}^2 - 2l_{2_C3}l_{2_H3}\cos\alpha_{BR}} \quad (2.57)$$

E pela Figura 18 (c) chega-se nas relações do cilindro 4:

$$\gamma_C = \pi - \theta_4 - (\delta_{C1} + \delta_{C2}) \quad (2.58)$$

$$l_{B1_B2} = \sqrt{l_{3_B2}^2 + l_{3_B1}^2 - 2l_{3_B2}l_{3_B1}\cos\gamma_C} \quad (2.59)$$

$$\alpha_C = \arccos\left(\frac{l_{B2_H4}^2 - l_{B1_B2}^2 - l_{B1_H4}^2}{2l_{B1_B2}l_{B1_H4}}\right) - \arcsin\left(\frac{l_{3_B2}\sin\gamma_C}{l_{B1_B2}}\right) - \delta_{C3} \quad (2.60)$$

$$l_{C4_H4} = \sqrt{l_{C4_B1}^2 + l_{B1_H4}^2 - 2l_{C4_B1}l_{B1_H4}\cos\alpha_C} \quad (2.61)$$

A análise do cilindro 4 é mais complexa devido a presença do mecanismo de seis barras mencionado anteriormente.

2.5 CINEMÁTICA DIRETA DOS CILINDROS E DAS BARRAS

Nesta seção, deriva-se o modelo da cinemática direta dos cilindros e das barras. Para tanto, realizam-se as passagens de atribuição de referências e sistemas de coordenadas, além da descrição da orientação desses corpos. Por fim, obtém-se o modelo da cinemática dos cilindros e das barras.

2.5.1 Atribuição de referências aos cilindros e as barras

A fim de considerar os cilindros e as barras no modelo dinâmico do subsistema mecânico, é necessário, primeiro, descrever a orientação desses corpos. Para tanto,

é fixado um referencial local J_{Ci} ao cilindro i , que é dotado de um sistema de coordenadas $j_{Ci} \Rightarrow (Ci, x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci})$. Em seguida, a orientação de j_{Ci} em relação a j , com $j \in [0,1]$, é expressa através do ângulo θ_{Ci} , que depende das coordenadas generalizadas q_k , logo, $\theta_{Ci} = \theta_{Ci}(q_k)$. De maneira semelhante, um referencial J_{Bi} com um sistema de coordenadas $j_{Bi} \Rightarrow (Bi, x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi})$, é fixado na barra i ; sendo que a orientação de j_{Bi} em relação a j , com $j=1$, é expressa pelo ângulo θ_{Bi} , que também depende das coordenadas generalizadas q_k , ou seja, $\theta_{Bi} = \theta_{Bi}(q_k)$. Na Figura 19 são ilustrados os sistemas de coordenadas j_{Ci} e j_{Bi} , e os pontos $CGCi$, $CGHi$ e $CGBi$, relativos aos centros de massa da camisa i , haste i e da barra i , respectivamente; também são mostradas as dimensões características dos cilindros e das barras, além dos ângulos θ_{Ci} e θ_{Bi} .

Figura 19 - Sistemas de coordenadas, pontos e dimensões características. (a): i -ésimo cilindro formado pela camisa i e pela haste i ; (b): i -ésima barra.

Fonte: o autor.

2.5.2 Orientação dos cilindros e das barras

Para determinar os ângulos θ_{Ci} e θ_{Bi} , é utilizado um procedimento geométrico, semelhante ao utilizado para determinar os comprimentos dos cilindros, em função das coordenadas generalizada; a Figura 20 é utilizada como referência na análise que se segue.

Figura 20 - Orientação dos cilindros e das barras. (a): Cilindro 1; (b): Cilindros 2 e 3; (c): Cilindro 4; (d): Barras.

Fonte: o autor.

Tomando como base a Figura 20 (a), tem-se para o cilindro 1 que:

$$\beta_{BA} = \arccos\left(\frac{l_{0_C1}^2 + l_{C1_H1}^2 - l_{0_H1}^2}{2l_{0_C1}l_{C1_H1}}\right) \quad (2.62)$$

$$\theta_{C1} = \delta_{BA2} - \beta_{BA} \quad (2.63)$$

Pela Figura 20 (b), obtêm-se para os cilindros 2 e 3, respectivamente, que:

$$\beta_L = \arccos\left(\frac{l_{1_C2}^2 + l_{C2_H2}^2 - l_{1_H2}^2}{2l_{1_C2}l_{C2_H2}}\right) \quad (2.64)$$

$$\theta_{C2} = \pi - (\beta_L + \delta_{L3}) \quad (2.65)$$

$$\beta_{BR} = \arccos\left(\frac{l_{2_C3}^2 + l_{C3_H3}^2 - l_{2_H3}^2}{2l_{2_C3}l_{C3_H3}}\right) \quad (2.66)$$

$$\theta_{C3} = \beta_{BR} - (\delta_{BR1} - \theta_2) \quad (2.67)$$

e da Figura 20 (c), vem para o cilindro 4 que:

$$\beta_C = \arccos\left(\frac{l_{C4_B1}^2 + l_{C4_H4}^2 - l_{B1_H4}^2}{2l_{C4_B1}l_{C4_H4}}\right) \quad (2.68)$$

$$\theta_{C4} = \beta_C + \theta_2 + \theta_3 - \delta_{C4} \quad (2.69)$$

Por fim, tomando como base a Figura 20 (d), têm-se para as barras 1 e 2, respectivamente, que:

$$\alpha_{B1} = \arccos\left(\frac{l_{B1_H4}^2 + l_{B1_B2}^2 - l_{B2_H4}^2}{2l_{B1_H4}l_{B1_B2}}\right) + \arccos\left(\frac{l_{3_B1}^2 + l_{B1_B2}^2 - l_{3_B2}^2}{2l_{3_B1}l_{B1_B2}}\right) \quad (2.70)$$

$$\theta_{B1} = \alpha_{B1} + \theta_2 + \theta_3 - \delta_{C1} \quad (2.71)$$

$$\alpha_{B2} = \arccos\left(\frac{l_{B2_H4}^2 + l_{B1_B2}^2 - l_{B1_H4}^2}{2l_{B2_H4}l_{B1_B2}}\right) \quad (2.72)$$

$$\beta_{B2} = \arccos\left(\frac{l_{B1_H4}^2 + l_{B1_B2}^2 - l_{B2_H4}^2}{2l_{B1_H4}l_{B1_B2}}\right) \quad (2.73)$$

$$\theta_{B2} = \pi + \theta_{B1} - (\alpha_{B2} + \beta_{B2}) \quad (2.74)$$

Utilizando-se as equações anteriores determina-se a orientação dos cilindros e das barras. Para o cilindro 1 a orientação é especificada em relação ao eixo x_0 , e para os demais cilindros e barras a orientação é relativa ao eixo x_1 .

2.5.3 Modelo da cinemática direta dos cilindros e das barras

Com a descrição da orientação dos cilindros e das barras, obtém-se o modelo da cinemática direta desses elos. Para tanto, utilizam-se as equações da cinemática direta dos elos principais, derivadas anteriormente. As equações dos elos principais são reescritas a seguir:

Elos principais:

$${}^I\mathbf{r}_{CGPi} = {}^I\mathbf{r}_{O_i} + {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} \quad (2.75)$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{Pi} = {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1-i} \quad (2.76)$$

$${}^I\mathbf{v}_{CGPi} = {}^I\mathbf{v}_{O_i} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Pi} \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} \quad (2.77)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Pi} = {}^I\mathbf{a}_{i-1} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1} \wedge {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-1-i} + {}^I\mathbf{a}_{i-1-i} \quad (2.78)$$

$${}^I\mathbf{a}_{CGPi} = {}^I\mathbf{a}_{O_i} + {}^I\mathbf{a}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{r}_{O_i-CGi}) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\mathbf{v}_{O_i-CGi} + {}^I\mathbf{a}_{O_i-CGi} \quad (2.79)$$

onde o subscrito Pi adicionado ao lado esquerdo tem como função ressaltar que os vetores de posição, velocidade e aceleração indicados são referentes ao i -ésimo elo principal do manipulador.

Com base nas equações dos elos principais, obtém-se os vetores (absolutos) de posição, velocidade e aceleração dos cilindros e das barras. A seguir, esses vetores são colecionados:

Camisas dos cilindros:

$${}^I\mathbf{r}_{CGCi} = {}^I\mathbf{r}_{Ci} + {}^I\mathbf{r}_{Ci-CGCi} \quad (2.80)$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} = {}^I\boldsymbol{\omega}_i + {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-Ci} \quad (2.81)$$

$${}^I\mathbf{v}_{CGCi} = {}^I\mathbf{v}_{Ci} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci-CGCi} + {}^I\mathbf{v}_{Ci-CGCi} \quad (2.82)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Ci} = {}^I\mathbf{a}_i + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\boldsymbol{\omega}_{i-Ci} + {}^I\mathbf{a}_{i-Ci} \quad (2.83)$$

$${}^I\mathbf{a}_{CGCi} = {}^I\mathbf{a}_{Ci} + {}^I\mathbf{a}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci-CGCi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci-CGCi}) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{v}_{Ci-CGCi} + \dots \quad (2.84)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Ci-CGCi}$$

com ${}^I\mathbf{r}_{Ci-CGCi} = {}^I\mathbf{R}_{Ci} {}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci-CGCi}$, ${}^I\mathbf{v}_{Ci-CGCi} = {}^I\mathbf{R}_{Ci} {}^{Ci}\dot{\mathbf{r}}_{Ci-CGCi}$, onde ${}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci-CGCi} = [l_{Ci-CGCi} \ 0 \ 0]^T$, sendo $l_{Ci-CGCi}$ o comprimento entre os pontos Ci e $CGCi$, e ${}^I\mathbf{R}_{Ci} = {}^I\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{R}_{Ci}$ com $j=0$ se $i=1$, e $j=1$ se $i=2,3,4$; sendo ${}^I\boldsymbol{\omega}_{i-Ci} = {}^I\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_{i-Ci}$, ${}^I\mathbf{a}_{i-Ci} = {}^I\mathbf{R}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-Ci}$ e ${}^I\mathbf{a}_i = {}^I\mathbf{R}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$, onde ${}^i\boldsymbol{\omega}_{i-Ci} = \dot{\theta}_{Ci} {}^{Ci}\mathbf{e}_{Ci}$ com:

$${}^{Ci}\mathbf{e}_{Ci} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{se } i=1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T & \text{se } i=2,3,4 \end{cases} \quad (2.85)$$

A matriz de rotação ${}^j\mathbf{R}_{Ci}$ é obtida com a substituição do deslocamento θ_{Ci} na equação (2.3), e considerando ${}^{Ci}\mathbf{e}_{Ci} = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}^T$ para $\forall i$, ou seja:

$${}^j\mathbf{R}_{Ci} = \begin{bmatrix} c_{\theta_{Ci}} + e_x^2(1 - c_{\theta_{Ci}}) & e_x e_y(1 - c_{\theta_{Ci}}) - e_z s_{\theta_{Ci}} & e_y s_{\theta_{Ci}} + e_x e_z(1 - c_{\theta_{Ci}}) \\ e_z s_{\theta_{Ci}} + e_x e_y(1 - c_{\theta_{Ci}}) & c_{\theta_{Ci}} + e_y^2(1 - c_{\theta_{Ci}}) & -e_x s_{\theta_{Ci}} + e_y e_z(1 - c_{\theta_{Ci}}) \\ -e_y s_{\theta_{Ci}} + e_x e_z(1 - c_{\theta_{Ci}}) & e_x s_{\theta_{Ci}} + e_y e_z(1 - c_{\theta_{Ci}}) & c_{\theta_{Ci}} + e_z^2(1 - c_{\theta_{Ci}}) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

onde $s_{\theta_{Ci}} = \sin \theta_{Ci}$ e $c_{\theta_{Ci}} = \cos \theta_{Ci}$.

Hastes dos cilindros:

$${}^I\mathbf{r}_{CGHi} = {}^I\mathbf{r}_{Ci} + {}^I\mathbf{r}_{Ci_CGHi} \quad (2.87)$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} = {}^I\boldsymbol{\omega}_{Hi} \quad (2.88)$$

$${}^I\mathbf{v}_{CGHi} = {}^I\mathbf{v}_{Ci} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci_CGHi} + {}^I\mathbf{v}_{Ci_CGHi} \quad (2.89)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Ci} = {}^I\mathbf{a}_{Hi} \quad (2.90)$$

$${}^I\mathbf{a}_{CGHi} = {}^I\mathbf{a}_{Ci} + {}^I\mathbf{a}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci_CGHi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Ci_CGHi}) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}_{Ci} \wedge {}^I\mathbf{v}_{Ci_CGHi} + \dots \quad (2.91)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Ci_CGHi}$$

sendo ${}^I\mathbf{r}_{Ci_CGHi} = {}^I\mathbf{R}_{Ci} {}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci_CGHi}$, ${}^I\mathbf{v}_{Ci_CGHi} = {}^I\mathbf{R}_{Ci} {}^{Ci}\dot{\mathbf{r}}_{Ci_CGHi}$, com ${}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci_CGHi} = {}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci_Hi} - {}^{Ci}\mathbf{r}_{GHi_Hi}$, onde ${}^{Ci}\mathbf{r}_{Ci_Hi} = \begin{bmatrix} l_{Ci_Hi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e ${}^{Ci}\mathbf{r}_{GHi_Hi} = \begin{bmatrix} l_{GHi_Hi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, sendo l_{Ci_Hi} o comprimento entre os pontos Ci e Hi , e com l_{GHi_Hi} sendo o comprimento entre os pontos $CGHi$ e Hi .

Barras:

$${}^I\mathbf{r}_{CGBi} = {}^I\mathbf{r}_{Bi} + {}^I\mathbf{r}_{Bi_CGBi} \quad (2.92)$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_{Bi} = {}^I\boldsymbol{\omega}_i + {}^I\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_{i_Bi} \quad (2.93)$$

$${}^I\mathbf{v}_{CGBi} = {}^I\mathbf{v}_{Bi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Bi} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Bi_CGBi} + {}^I\mathbf{v}_{Bi_CGBi} \quad (2.94)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Bi} = {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^I\boldsymbol{\omega}_i \wedge {}^I\boldsymbol{\omega}_{i_Bi} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i_Bi} \quad (2.95)$$

$${}^I\mathbf{a}_{CGBi} = {}^I\mathbf{a}_{Bi} + {}^I\mathbf{a}_{Bi} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Bi_CGBi} + {}^I\boldsymbol{\omega}_{Bi} \wedge ({}^I\boldsymbol{\omega}_{Bi} \wedge {}^I\mathbf{r}_{Bi_CGBi}) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}_{Bi} \wedge {}^I\mathbf{v}_{Bi_CGBi} + \dots \quad (2.96)$$

$${}^I\mathbf{a}_{Bi_CGBi}$$

com ${}^I\mathbf{r}_{Bi_CGBi} = {}^I\mathbf{R}_{Bi} {}^{Bi}\mathbf{r}_{Bi_CGBi}$, onde ${}^{Bi}\mathbf{r}_{Bi_CGBi} = [l_{Bi_CGBi} \cos \alpha_{Bi} \quad l_{Bi_CGBi} \sin \alpha_{Bi} \quad 0]^T$, sendo l_{Bi_CGBi} o comprimento entre os pontos Bi e $CGBi$, e com ${}^I\mathbf{v}_{Bi_CGBi} = {}^I\mathbf{R}_{Bi} {}^{Bi}\dot{\mathbf{r}}_{Bi_CGBi}$, ${}^I\mathbf{R}_{Bi} = {}^I\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{R}_{Bi}$ com $j=1$ para $\forall i$; e sendo ${}^I\boldsymbol{\omega}_{i_Bi} = {}^I\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_{i_Bi}$ e ${}^I\mathbf{a}_{i_Bi} = {}^I\mathbf{R}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i_Bi}$, com ${}^i\boldsymbol{\omega}_{i_Bi} = \dot{\theta}_{Bi} {}^{Bi}\mathbf{e}_{Bi}$ onde ${}^{Bi}\mathbf{e}_{Bi} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ para $\forall i$.

A matriz de rotação ${}^j\mathbf{R}_{Bi}$ é construída substituindo-se os deslocamento θ_{Bi} na equação (2.3), e considerando ${}^{Bi}\mathbf{e}_{Bi} = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T$ para $\forall i$, como mostrado pela expressão a seguir:

$${}^j\mathbf{R}_{Bi} = \begin{bmatrix} c_{\theta_{Bi}} + e_x^2(1 - c_{\theta_{Bi}}) & e_x e_y(1 - c_{\theta_{Bi}}) - e_z s_{\theta_{Bi}} & e_y s_{\theta_{Bi}} + e_x e_z(1 - c_{\theta_{Bi}}) \\ e_z s_{\theta_{Bi}} + e_x e_y(1 - c_{\theta_{Bi}}) & c_{\theta_{Bi}} + e_y^2(1 - c_{\theta_{Bi}}) & -e_x s_{\theta_{Bi}} + e_y e_z(1 - c_{\theta_{Bi}}) \\ -e_y s_{\theta_{Bi}} + e_x e_z(1 - c_{\theta_{Bi}}) & e_x s_{\theta_{Bi}} + e_y e_z(1 - c_{\theta_{Bi}}) & c_{\theta_{Bi}} + e_z^2(1 - c_{\theta_{Bi}}) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

com $s_{\theta_{Bi}} = \sin \theta_{Bi}$ e $c_{\theta_{Bi}} = \cos \theta_{Bi}$.

2.6 DINÂMICA COMPLETA SUBSISTEMA MECÂNICO

Nesta seção, o modelo do subsistema mecânico do manipulador, considerando os cilindros e as barras, será derivado por três métodos diferentes, sendo eles o método de Kane na forma matricial, o método de Euler-Lagrange com multiplicadores, e utilizando a equações de Maggi.

2.6.1 Método de Kane na forma matricial

A fim de derivar um modelo onde os cilindros e as barras são considerados na dinâmica do subsistema mecânico recorre-se, primeiramente, ao método de Kane na forma matricial. Esta forma de aplicar o método de Kane foi apresentado por Kane e Levinson (1985) e, em geral, facilita a derivação das equações de movimento para um sistema do tipo multicorpos, com um número elevado de corpos.

Segundo Trigo, Coelho e Barbosa (2015), essa abordagem consiste em reescrever a equação (2.42) matricialmente. Para tanto, os termos relativos às velocidades parciais, representados por $\partial(\bullet)/\partial \dot{q}_k$, são agrupados nas matrizes de acoplamento, como mostrado a seguir:

Elos principais:

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{CGP1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{P1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGPN_p}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{PN_p}^T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{CGP1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{P1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGPN_p}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{PN_p}^T}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Camisas dos cilindros:

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{CGC1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{C1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGCN_c}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{CN_c}^T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{CGC1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{C1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGCN_c}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{CN_c}^T}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Hastes dos cilindros:

$$\mathbf{D}_H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{CGH1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{H1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGHN_H}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{HN_H}^T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{CGH1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{H1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGHN_H}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{HN_H}^T}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Barras:

$$\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_{CGB1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{B1}^T}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGBN_B}^T}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{BN_B}^T}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{CGB1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{B1}^T}{\partial \dot{q}_n} & \dots & \frac{\partial \mathbf{v}_{CGBN_B}^T}{\partial \dot{q}_n} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{BN_B}^T}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

com $\mathbf{D}_p \in \Re^{n \times \lambda N_p}$, $\mathbf{D}_c \in \Re^{n \times \lambda N_c}$, $\mathbf{D}_H \in \Re^{n \times \lambda N_H}$ e $\mathbf{D}_B \in \Re^{n \times \lambda N_B}$, onde λ é o número de graus de liberdade no espaço geométrico do mecanismo (TSAI, 2001). Como o manipulador opera no espaço, então $\lambda = 6$; os termos N_p , N_c , N_H e N_B são o número de elos principais, camisas, hastes e barras, respectivamente.

Os termos restantes da equação (2.42) são os vetores de forças ativas e forças inerciais. Estes termos são agrupados nos vetores de forças generalizadas, como é mostrado a seguir (TRIGO; COELHO; BARBOSA, 2015):

Elos principais:

$$\mathbf{f}_p = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,P1} - m_{P1} \mathbf{a}_{CGP1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,P1} - (\mathbf{I}_{P1} \boldsymbol{\alpha}_{P1} + \boldsymbol{\omega}_{P1} \wedge (\mathbf{I}_{P1} \boldsymbol{\omega}_{P1}^T)) \\ \vdots \\ \sum \mathbf{F}_{at,PN_p} - m_{PN_p} \mathbf{a}_{CGPN_p} \\ \sum \mathbf{M}_{at,PN_p} - (\mathbf{I}_{PN_p} \boldsymbol{\alpha}_{PN_p} + \boldsymbol{\omega}_{PN_p} \wedge (\mathbf{I}_{PN_p} \boldsymbol{\omega}_{PN_p}^T)) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Camisas dos cilindros:

$$\mathbf{f}_c = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,C1} - m_{C1} \mathbf{a}_{CGC1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,C1} - (\mathbf{I}_{C1} \boldsymbol{\alpha}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_{C1} \wedge (\mathbf{I}_{C1} \boldsymbol{\omega}_{C1}^T)) \\ \vdots \\ \sum \mathbf{F}_{at,CN_c} - m_{CN_c} \mathbf{a}_{CGCN_c} \\ \sum \mathbf{M}_{at,CN_c} - (\mathbf{I}_{CN_c} \boldsymbol{\alpha}_{CN_c} + \boldsymbol{\omega}_{CN_c} \wedge (\mathbf{I}_{CN_c} \boldsymbol{\omega}_{CN_c}^T)) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Hastes dos cilindros:

$$\mathbf{f}_H = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,H1} - m_{H1} \mathbf{a}_{CGH1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,H1} - (\mathbf{I}_{H1} \boldsymbol{\alpha}_{H1} + \boldsymbol{\omega}_{H1} \wedge (\mathbf{I}_{H1} \boldsymbol{\omega}_{H1}^T)) \\ \vdots \\ \sum \mathbf{F}_{at,HN_H} - m_{HN_H} \mathbf{a}_{CGHN_H} \\ \sum \mathbf{M}_{at,HN_H} - (\mathbf{I}_{HN_H} \boldsymbol{\alpha}_{HN_H} + \boldsymbol{\omega}_{HN_H} \wedge (\mathbf{I}_{HN_H} \boldsymbol{\omega}_{HN_H}^T)) \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Barras:

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{at,B1} - m_{B1} \mathbf{a}_{CGB1} \\ \sum \mathbf{M}_{at,B1} - (\mathbf{I}_{B1} \boldsymbol{\alpha}_{B1} + \boldsymbol{\omega}_{B1} \wedge (\mathbf{I}_{B1} \boldsymbol{\omega}_{B1}^T)) \\ \vdots \\ \sum \mathbf{F}_{at,BN_B} - m_{BN_B} \mathbf{a}_{CGBN_B} \\ \sum \mathbf{M}_{at,BN_B} - (\mathbf{I}_{BN_B} \boldsymbol{\alpha}_{BN_B} + \boldsymbol{\omega}_{BN_B} \wedge (\mathbf{I}_{BN_B} \boldsymbol{\omega}_{BN_B}^T)) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

onde $\mathbf{f}_p \in \mathfrak{R}^{\lambda N_p}$, $\mathbf{f}_c \in \mathfrak{R}^{\lambda N_c}$, $\mathbf{f}_H \in \mathfrak{R}^{\lambda N_H}$ e $\mathbf{f}_B \in \mathfrak{R}^{\lambda N_B}$ são as matrizes que reúnem os vetores de forças ativas e inerciais dos corpos principais, camisas, hastes e barras, respectivamente. Nas equações (2.102) a (2.104), os termos $\sum(\bullet)$ são relativos à somatória de forças e momentos ativos, sendo que estes termos são dados por:

$$\sum \mathbf{F}_{at, Pi} = \mathbf{G}_{CGPi} = {}^I \mathbf{R}_{Pi}^T {}^I \mathbf{G}_{CGPi} \quad (2.106)$$

$$\sum \mathbf{F}_{at, Ci} = \mathbf{G}_{CGCi} = {}^I \mathbf{R}_{Ci}^T {}^I \mathbf{G}_{CGCi} \quad (2.107)$$

$$\sum \mathbf{F}_{at, Hi} = \mathbf{G}_{CGHi} = {}^I \mathbf{R}_{Hi}^T {}^I \mathbf{G}_{CGHi} \quad (2.108)$$

$$\sum \mathbf{F}_{at, Bi} = \mathbf{G}_{CGBi} = {}^I \mathbf{R}_{Bi}^T {}^I \mathbf{G}_{CGBi} \quad (2.109)$$

$$\sum \mathbf{M}_{at, Pi} = \boldsymbol{\tau}_k - \boldsymbol{\tau}_{k-1} \quad (2.110)$$

$$\sum \mathbf{M}_{at, Ci} = \sum \mathbf{M}_{at, Hi} = \sum \mathbf{M}_{at, Bi} = \mathbf{0} \in \mathfrak{R}^3 \quad (2.111)$$

sendo $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}^3$ o vetor nulo. Nas equações (2.106) a (2.109), os vetores absolutos de força peso são dados, respectivamente, por:

$${}^I \mathbf{G}_{CGPi} = [0 \quad m_{Pi}g \quad 0]^T \quad (2.112)$$

$${}^I \mathbf{G}_{CGCi} = [0 \quad m_{Ci}g \quad 0]^T \quad (2.113)$$

$${}^I \mathbf{G}_{CGHi} = [0 \quad m_{Hi}g \quad 0]^T \quad (2.114)$$

$${}^I \mathbf{G}_{CGBi} = [0 \quad m_{Bi}g \quad 0]^T \quad (2.115)$$

E na equação (2.110), o vetor de torque motor, $\boldsymbol{\tau}_k$, relativo a k -ésima coordenada generalizada é expresso por:

$$\boldsymbol{\tau}_k = \begin{cases} [0 \quad \tau_k \quad 0]^T & \text{se } k=1 \\ [0 \quad 0 \quad \tau_k]^T & \text{se } k=2,3,4 \end{cases} \quad (2.116)$$

Ainda em relação à equação (2.110), quando $k=1$ tem-se que $k-1=0$, portanto, $\boldsymbol{\tau}_{k-1} = \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0} \in \mathfrak{R}^3$.

Agrupando-se as equações (2.98) a (2.101) (matrizes de acoplamento) na matriz $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_P \quad \mathbf{D}_C \quad \mathbf{D}_H \quad \mathbf{D}_B] \in \mathfrak{R}^{n \times \lambda(N_P + N_C + N_H + N_B)}$, e as equações (2.102) a (2.105) (vetores de forças generalizadas) no vetor $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_P \quad \mathbf{f}_C \quad \mathbf{f}_H \quad \mathbf{f}_B]^T \in \mathfrak{R}^{\lambda(N_P + N_C + N_H + N_B)}$, obtêm-se as equações de movimento do subsistema mecânico da seguinte forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{f} = \mathbf{D}_P\mathbf{f}_P + \mathbf{D}_C\mathbf{f}_C + \mathbf{D}_H\mathbf{f}_H + \mathbf{D}_B\mathbf{f}_B = \mathbf{0} \quad (2.117)$$

onde $\mathbf{e} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de equações de movimento, e $\mathbf{0} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor nulo.

A equação (2.117) representa o modelo completo do subsistema mecânico do manipulador, incluindo as barras e os cilindros.

Os pinos das juntas não foram considerados na modelagem, pois a sua contribuição para a dinâmica foi considerada irrelevante se comparada com as dos outros

corpos. No entanto, esses corpos podem ser considerados como massas concentradas nas extremidades dos outros elos, e facilmente incluídos na dinâmica do subsistema mecânico.

2.6.2 Método Euler-Lagrange com multiplicadores

Introduzindo-se os multiplicadores de Lagrange na equação (2.36), encontra-se um balanço entre os esforços ativos, a variação de energia sistema (energia cinética e potencial) e os esforços vinculares (MEIROVITCH, 2003). Para tanto, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{nc} + \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_k} \quad (2.118)$$

onde q_k é a k -ésima coordenada generalizada, com $k=1, \dots, n$ onde n é o número de coordenadas generalizadas; λ_l e g_l são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange e as equações vinculares, com $l=1, \dots, m$ onde m é, simultaneamente, o número de multiplicadores e de equações vinculares. Na equação (2.118), as derivadas parciais das equações vinculares, $\partial g_l / \partial q_k$, podem ser interpretadas como contribuições às forças generalizadas não conservativas Q_k^{nc} , ponderadas pelos multiplicadores de Lagrange.

Para a modelagem do subsistema mecânico pelo método de Euler-Lagrange com multiplicadores, as coordenadas generalizadas q_k , para $n=14$ coordenadas generalizadas, são dadas por:

$$\begin{aligned} q_{1, \dots, 4} &= \theta_1, \dots, \theta_4 \\ q_{5, \dots, 8} &= \theta_{C1}, \dots, \theta_{C4} \\ q_{9, 10} &= \theta_{B1}, \theta_{B2} \\ q_{11, \dots, 14} &= l_{C1H1}, \dots, l_{C4H4} \end{aligned} \quad (2.119)$$

As equações vinculares g_l do subsistema mecânico, com $m=10$ equações vinculares, são expressas a seguir:

$$\begin{aligned} g_{1, \dots, 4} &= \theta_{C1} - q_5, \dots, \theta_{C4} - q_8 \\ g_{5, 6} &= \theta_{B1} - q_8, \theta_{B2} - q_{10} \\ g_{7, \dots, 10} &= l_{C1H1} - q_{11}, \dots, l_{C4H4} - q_{14} \end{aligned} \quad (2.120)$$

As coordenadas generalizadas devem ser tratadas como independentes, desta forma, as funções de energia do sistema (cinética e potencial) ficarão escritas em função do conjunto de coordenadas escolhidas.

Sobre a escolha dessas coordenadas, considera-se a orientação dos cilindros e das barras, bem como o comprimento dos cilindros, como coordenadas generalizadas, sendo que esses foram determinados através da utilização de geometria, como demonstrado anteriormente. Assim, a escolha desses termos como coordenadas generalizadas acarreta em uma redução significativa no tamanho e complexidade das equações de movimento do modelo completo do subsistema mecânico (considerando os cilindros e as barras), pois as coordenadas redundantes serão tratadas como independentes.

2.6.3 Equações de Maggi

No trabalho de Malvezzi, Orsino e Hess-Coelho (2017), os multiplicadores de Lagrange são eliminados da equação (2.118) realizando-se um complemento ortogonal à contribuição das equações vinculares para as forças generalizadas Q_k^{nc} . Para tanto, tem-se que:

$$\sum_{r=1}^v C_{k,r} \Phi_{q_k} = 0 \quad (2.121)$$

onde,

$$\Phi_{q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k^{nc} \quad (2.122)$$

Os termos da matriz $\mathbf{C} = [C_{k,r}]$ são obtidos da expressão das variações δq_k , associadas às coordenadas generalizadas q_k , que podem ser escritas como combinações lineares de tantas variações arbitrárias, indicadas por δq_r , como o número v de graus de liberdade do sistema (MALVEZZI; ORSINO; HESS-COELHO, 2017). Assim, as variações δq_k ficam expressas por:

$$\delta q_k = \sum_{r=1}^v C_{k,r} \delta q_r \quad (2.123)$$

com,

$$C_{k,r} = \frac{\partial q_k}{\partial q_r} \quad (2.124)$$

De acordo com Trigo, Coelho e Barbosa (2015), a matriz $\mathbf{C} = [C_{k,r}]$ pode ser empregada no método de Kane na forma matricial, considerando-se coordenadas redundantes, da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{e} = \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

ou ainda,

$$\mathbf{C}^T \mathbf{e} = \mathbf{C}^T \mathbf{D}_P \mathbf{f}_P + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_C \mathbf{f}_C + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_H \mathbf{f}_H + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_B \mathbf{f}_B = \mathbf{0} \quad (2.126)$$

onde $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{n \times v}$.

2.7 ESFORÇOS GENERALIZADOS DE OPERAÇÃO

Nesta seção, os esforços ativos provenientes das operações de escavação e carregamento serão descritos e generalizados, para a sua inclusão na dinâmica do subsistema mecânico do manipulador.

2.7.1 Forças generalizadas de escavação

Na Figura 21, F_e é a força de escavação, F_n e F_t são suas componentes na direção normal e tangencial, respectivamente; δ_e é o ângulo da força de escavação, δ_{C6} é o ângulo entre o fundo da caçamba e o eixo x_4 , e θ_e é o ângulo de escavação. Este último pode ser determinado a partir de δ_{C6} , e da configuração das juntas ativas, como sendo: $\theta_e = \pi - \theta_{234} - \delta_{C6}$, onde $\theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.

Em relação ao ângulo δ_e , este varia no intervalo $0,10 \leq \delta_e \leq 0,45 \text{ rad}$, e depende do ângulo de escavação, das condições de escavação, bem como do desgaste da aresta de corte dos dentes da caçamba (VÄHÄ; KOIVO; SKIBNIEWSKI, 1991; VÄHÄ; SKIBNIEWSKI, 1993a). Nas simulações é frequentemente considerado que esse ângulo é constante e igual à $0,10 \text{ rad}$ (KOIVO et al., 1996; VÄHÄ; KOIVO; SKIBNIEWSKI, 1991; VÄHÄ; SKIBNIEWSKI, 1993a).

Em Vähä, Koivo e Skibniewski (1991) é dito que um ângulo de escavação pequeno deve ser mantido entre o fundo da caçamba e a direção da escavação para

que a força de reação resultante seja paralela a direção de escavação, diminuindo assim as forças motoras necessárias para realizar a escavação.

Figura 21 - Direção da força de escavação e ângulos característicos.

Fonte: adaptado de Šalinić, Bošković e Nikolić (2014).

Para derivar o vetor de forças generalizadas de escavação, ou dos torques de escavação, F_e é projetada no sistema de coordenadas da caçamba, como mostrado na expressão a seguir:

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} -F_e \cos(\delta_e + \delta_{C6}) & F_e \sin(\delta_e + \delta_{C6}) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.127)$$

Generalizando o vetor de força de escavação $\mathbf{F}_e$, obtêm-se os torques de escavação, que são dados por:

$$\tau_{e,k} = \mathbf{F}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial q_k} = \mathbf{F}_e^T \frac{\partial \mathbf{v}_4}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.128)$$

Finalmente, o vetor de forças generalizadas de escavação $\boldsymbol{\tau}_e$ é obtido a partir da equação (2.128), como sendo: $\boldsymbol{\tau}_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} & \dots & \tau_{e,n} \end{bmatrix}^T$.

2.7.1.1 Modelo de interação ferramenta-solo

Durante a operação de escavação, a força de reação na ponta da caçamba, devido a interação da caçamba com o solo, segundo Alekseeva et al. (1986), é dada pela seguinte expressão:

$$F_e = k_p \left[k_s b h + \mu F_p + \varepsilon \left(1 + \frac{V_b}{V_s} \right) b h \sum_i \Delta x_i \right] \quad (2.129)$$

onde k_p e k_s são resistências específicas ao corte do solo, b e h são a largura e a espessura da fatia de solo, respectivamente, μ é o coeficiente de fricção da caçamba com o solo, F_p é a força de pressão da caçamba com o solo, ε é o coeficiente de resistência ao enchimento da caçamba e ao movimento do prisma de solo, V_b e V_s são os volumes da caçamba e dos primas do solo, respectivamente, e Δx_i é o incremento na direção horizontal.

A força de resistência ao movimento do prisma de solo, e ao enchimento da caçamba, tem pouca influência sobre a força de escavação, representando menos de 10 % da força total, e a constante k_p tem valor muito próximo do unitário ($k_p = 1,005$), o que leva a considerar $k_p \cong 1$ (VÄHÄ; KOIVO; SKIBNIEWSKI, 1991). Isto acarreta em uma expressão simplificada para o cálculo da força de escavação resultante, que é dada por:

$$F_e = k_s b h + \mu F_p \quad (2.130)$$

Neste trabalho, para representar a interação da caçamba com o solo durante a operação de escavação, a equação (2.130) será utilizada.

2.7.2 Forças generalizadas de carregamento

Devido ao enchimento da caçamba, outros esforços ativos, além da força de escavação são experimentados no manipulador, pois as propriedades de massa do volume de solo que é amontoado na caçamba são relevantes para a dinâmica do sistema. Estes esforços são denominados aqui de forças generalizadas de carregamento, e podem ser obtidos a partir da aplicação do método de Kane, como demonstrado a seguir:

$$\tau_{s,k} = m_s \mathbf{a}_{CGs}^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CGs}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{\mathbf{H}}_s^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_s}{\partial \dot{q}_k} - \mathbf{G}_s^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CGs}}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.131)$$

onde m_s é a massa do solo, $\mathbf{a}_{CGs}$ é o vetor de aceleração do centro de massa do volume de solo; os termos $\dot{\mathbf{H}}_s$ e $\mathbf{G}_s$ são, respectivamente, os vetores de variação de quantidade de movimento angular e de força peso associados ao volume de solo na caçamba. Para simplificar a expressão referente às forças generalizadas de carregamento, as seguintes hipóteses simplificadoras são adotadas:

- O movimento executado pelo manipulador é lento, portanto, a variação de quantidade de movimento linear é desprezível, logo, $m_s \mathbf{a}_{CGs} \cong \mathbf{0} \in \mathcal{R}^3$.
- A contribuição da variação de quantidade de movimento angular é desprezível, ou seja, $\dot{\mathbf{H}}_s \cong \mathbf{0} \in \mathcal{R}^3$.
- O centro de massa do volume de solo coincide com o centro de massa da caçamba, sendo assim, $\mathbf{r}_{CGs} = \mathbf{r}_{CG4}$, logo, $\mathbf{v}_{CGs} = \mathbf{v}_{CG4}$.

Com as hipóteses simplificadoras que foram adotadas, a equação (2.131) fica reescrita da seguinte forma:

$$\tau_{s,k} = -\mathbf{G}_s^T \frac{\partial \mathbf{v}_{CG4}}{\partial \dot{q}_k} = -\mathbf{G}_s^T \frac{\partial \mathbf{r}_{CG4}}{\partial q_k} \quad (2.132)$$

onde,

$$\mathbf{G}_s = {}^I \mathbf{R}_s^T \mathbf{G}_s \quad (2.133)$$

$${}^I \mathbf{G}_s = [0 \quad -m_s g \quad 0]^T \quad (2.134)$$

com m_s sendo a massa de solo, calculada com base na máxima capacidade volumétrica da caçamba e no tipo de solo. Logo, o vetor de forças generalizadas de carregamento, $\boldsymbol{\tau}_s$, é obtido a partir da expressão (2.132), como sendo: $\boldsymbol{\tau}_s = [\tau_{s,1} \quad \dots \quad \tau_{s,n}]^T$.

Para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba, têm-se as seguintes normas:

- 1) SAE J296 - *Mini Excavator and Backhoe Bucket Volumetric Rating*, e
- 2) CECE - *Committee of European Construction Equipment*.

A diferença entre os procedimentos especificados pelas duas normas está no cálculo do volume em excesso. Este é calculado com um ângulo de repouso de 1:1

segundo a SAE J296, e com um ângulo de repouso de 1:2 segundo o CECE. Na Figura 22 são ilustradas as dimensões especificadas pela SAE J296 e pelo CECE.

No procedimento de cálculo que é demonstrado a seguir, V_s é o volume útil da caçamba, e V_e é o volume em excesso, que são dados, respectivamente, por:

$$V_s = P_{\text{área}} \left(\frac{W_s + W_r}{2} \right) \quad (2.135)$$

$$V_e = \begin{cases} \frac{L_b W_f^2}{4} - \frac{W_f^3}{12} & \text{SAE J296} \\ \frac{L_b W_f^2}{8} - \frac{W_f^3}{24} & \text{CECE} \end{cases} \quad (2.136)$$

Figura 22 - Dimensões especificadas para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba. (a): Dimensões especificadas pela SAE J296; (b) Dimensões especificada pelo CECE.

Fonte: Patel (2012).

O volume total de terra, V_h , é a soma do volume útil com o volume em excesso, ou seja, $V_h = V_s + V_e$. Para o cálculo da massa de solo, m_s , faz-se a multiplicação do volume total pela densidade do solo, ρ_s , logo, $m_s = \rho_s V_h$.

A relevância da contribuição das forças generalizadas de carregamento para a dinâmica do manipulador é maior após o final da operação de escavação. Isto ocorre porque depois do final dessa operação o manipulador não exerce mais força sobre o solo, sendo assim, as forças generalizadas de escavação deixam de agir sobre o manipulador. No entanto, o volume de solo ainda é presente na caçamba, sendo que este

continua a gerar $\tau_{s,k}$ forças generalizadas sobre o manipulador, até a execução do descarregamento da caçamba.

Durante a escavação, a massa m_s é considerada diretamente proporcional ao deslocamento horizontal da ponta da caçamba Δx , que por sua vez depende da configuração das juntas. Já no descarregamento, a massa m_s é considerada inversamente proporcional ao ângulo de referência α_r , que será definido na análise da cinemática inversa do manipulador. Logo, a massa de solo amontoado na caçamba fica definida em função do tipo de operação, da forma que se segue:

$$m_s = \begin{cases} \frac{(m_s)_{\text{máx}}}{\Delta x_{\text{máx}}} \Delta x & \text{Escavação} \\ (m_s)_{\text{máx}} - \alpha_r \left(\frac{m_s}{\alpha_r} \right)_{\text{máx}} & \text{Descarregamento} \end{cases} \quad (2.137)$$

2.8 CINEMÁTICA INVERSA DO MANIPULADOR

A fim de determinar a configuração das juntas a partir da posição e orientação da caçamba, as equações do modelo de cinemática inversa do manipulador devem ser obtidas. Em Tafazoli, Lawrence e Salcudean (1999), estas equações foram obtidas para o manipulador de uma miniescavadeira, considerando o movimento no plano vertical (xy). Tomando a Figura 23 como referência, estas equações serão estendidas para o movimento no espaço, visando a aplicação em outras tarefas, onde o movimento fora do plano vertical é exigido, como a tarefa de carregamento.

Fazendo uso de geometria, calcula-se a distância entre os pontos 1 e 4, l_{1-4} , e o ângulo ξ_1 , respectivamente.

$$l_{1-4} = \sqrt{\left(\frac{x}{\cos \theta_1} - l_{0-1} \cos \delta_{BA3} \right)^2 + \left(y - l_{0-1} \sin \delta_{BA3} \right)^2} \quad (2.138)$$

$$\xi_1 = \text{atan} \left(\frac{y - l_{0-1} \sin \delta_{BA3}}{\frac{x}{\cos \theta_1} - l_{0-1} \cos \delta_{BA3}} \right) \quad (2.139)$$

Com o ângulo ξ_1 , obtém-se a distância entre os pontos 1 e 3, l_{1-3} , dada por:

$$l_{1-3} = \sqrt{l_{1-4}^2 + l_{3-4}^2 - 2l_{1-4}l_{3-4}\cos(\xi_1 - \alpha_r)} \quad (2.140)$$

onde α_r é o ângulo de referência da caçamba, medido em relação ao eixo x_1 ; este ângulo é dado por: $\alpha_r = \pi - \alpha_a$, sendo α_a o ângulo de ataque da caçamba, que é definido positivo no sentido anti-horário, como ilustrado na Figura 23 (b).

Figura 23 - Cinemática inversa do manipulador. (a): Cinemática inversa no plano xz ; (b): Cinemática inversa no plano xy .

Fonte: adaptado de Tafazoli, Lawrence e Salcudean (1999).

Determina-se o ângulo ξ_2 em função da distância l_{1-3} e do ângulo α_r , como demonstrado a seguir:

$$\xi_2 = \text{asen} \left(\frac{y - l_{0-1} \text{sen} \delta_{BA3} - l_{3-4} \text{sen} \alpha_r}{l_{1-3}} \right) \quad (2.141)$$

Por fim, a configuração de cada junta é determinada da seguinte forma:

$$\theta_1 = -\text{atan} \left(\frac{z}{x} \right) \quad (2.142)$$

$$\theta_2 = \xi_2 + \text{acos} \left(\frac{l_{1-2}^2 + l_{1-4}^2 - l_{2-3}^2}{2l_{1-2}l_{1-4}} \right) \quad (2.143)$$

$$\theta_3 = \text{acos} \left(\frac{l_{1-2}^2 + l_{2-3}^2 - l_{1-4}^2}{2l_{1-2}l_{2-3}} \right) - \pi \quad (2.144)$$

$$\theta_4 = \alpha_r - \theta_3 - \theta_2 \quad (2.145)$$

Para ordenar as equações anteriores, estas são agrupadas no vetor de cinemática inversa $\mathbf{h}_\theta \in \mathfrak{N}^n$, onde $h_{\theta_i} = \theta_i(x, y, z)$ com $i = 1, \dots, n$.

2.9 VERIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Nesta seção o modelo do subsistema mecânico que foi desenvolvido, será comparado com um modelo de referência, obtido a partir de um *software* comercial, dedicado à análise de sistemas multicorpos. Primeiramente, uma trajetória será proposta para a simulação. Depois, as equações do modelo de cinemática inversa serão aplicadas nessa trajetória para determinar o deslocamento angular das juntas do manipulador e o comprimento dos cilindros hidráulicos. Em seguida, o modelo de referência utilizado na comparação será apresentado. Por fim, os resultados obtidos serão expostos e discutidos.

2.9.1 Trajetória para a verificação dos modelos

Uma trajetória foi proposta para a verificação dos modelos do subsistema mecânico do manipulador. Esta trajetória foi especificada para a ponta dos dentes da caçamba, ou seja, o ponto 4 do manipulador.

A Lemnisca, assim chamada (DEMASI, 2012), foi escolhida como trajetória de verificação, por ser uma curva fechada, com uma intersecção, como é ilustrado pela Figura 24.

Figura 24 - Trajetória de verificação dos modelos no espaço de trabalho.

Fonte: o autor.

As equações dessa trajetória, em metros, e no espaço tridimensional, são mostradas a seguir:

$$x(t) = 0,7 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + 1,5 \quad (2.146)$$

$$y(t) = 0,7 \quad (2.147)$$

$$z(t) = 0,7 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad (2.148)$$

Determinam-se os deslocamentos angulares para a trajetória proposta com o modelo de cinemática inversa do manipulador, considerando $\alpha_r = -2\pi / 5 \text{ rad}$. Na Figura 25 (a) são mostrados os deslocamentos angulares obtidos. Com esses deslocamentos e utilizando as equações da cinemática inversa dos cilindros, determina-se os comprimentos dos cilindros para a trajetória proposta. Estes comprimentos são ilustrados pela Figura 25 (b).

Figura 25 - Trajetória de verificação dos modelos. (a): Espaço das juntas; (b): Espaço dos cilindros.

Fonte: o autor.

Na Figura 26 é ilustrada a execução da trajetória de verificação, no espaço tridimensional, pelo manipulador da escavadeira hidráulica, em 6 instante diferentes de tempo t .

Figura 26 - Execução da trajetória de verificação pelo manipulador.

$t = 0\text{ s}$

$t = 1,5\text{ s}$

$t = 3\text{ s}$

$t = 4,5\text{ s}$

$t = 6\text{ s}$

$t = 7,5\text{ s}$

$t = 9\text{ s}$

$t = 10\text{ s}$

Fonte: o autor.

2.9.2 Resultados da comparação com o modelo de referência

A verificação dos modelos analíticos que foram derivados neste capítulo, se dá pela comparação com um modelo computacional, denominado aqui de modelo de referência. Tal modelo é baseado na geometria do manipulador, que foi obtida com ferramentas de *computer-aided design* (CAD). Na Figura 27 é ilustrado o modelo de referência que foi criado com a ferramenta de análise dinâmica Motion® do software SOLIDWORKS® 2017.

Figura 27 - Modelo do manipulador no SOLIDWORKS/Motion®.

Fonte: o autor.

Segundo Lee (2015), no Motion® é utilizado o *solver* de análise dinâmica avançada de sistemas mecânicos, ou *advanced dynamics analysis of mechanical systems* (ADAMS), que recorre aos princípios da mecânica Lagrangiana para derivar as equações de movimento do sistema analisado (MCCONVILLE, 2015). O Motion® possui uma interface para a exportação dos seus modelos para o MSC.ADAMS®, sendo possível criar o modelo no Motion®, exportá-lo, e realizar a simulação no MSC.ADAMS®.

A verificação foi realizada para o modelo reduzido, onde somente os corpos principais são considerados, e posteriormente para o modelo completo, no qual são incluídos os cilindros e as barras. Para realizar a verificação de forma adequada, no

modelo de referência, as mesmas hipóteses simplificadoras realizadas no desenvolvimento dos modelos analíticos são consideradas. Portanto, na verificação do modelo reduzido, o modelo de referência não considera os cilindros e nem as barras. Para tanto, as propriedades de massa desses corpos no modelo CAD do manipulador foram reduzidas até um valor mínimo, que praticamente anula a contribuição desses corpos no modelo. Já na verificação do modelo completo, as propriedades de massa dos cilindros e das barras são consideradas integralmente. Nas simulações dos modelos de referência, o maior passo de tempo utilizado foi de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

As equações de movimento dos modelos analíticos foram obtidas com auxílio do *toolbox* de cálculo simbólico do MATLAB® R2017a. No apêndice A são reunidas algumas das principais equações dos modelos do subsistema mecânico.

Os parâmetros do subsistema mecânico, utilizados nas simulações aqui apresentadas, são reunidos no apêndice B.

As Figuras 28 a 31 mostram os resultados da comparação das forças hidráulicas para o modelo reduzido. E nas Figuras 32 a 35 são mostrados os resultados da comparação das forças hidráulicas para o modelo completo do subsistema mecânico.

Figura 28 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1 com o modelo reduzido.

Fonte: o autor.

Figura 29 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2 com o modelo reduzido.

Fonte: o autor.

Figura 30 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3 com o modelo reduzido.

Fonte: o autor.

Figura 31 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4 com o modelo reduzido.

Fonte: o autor.

Figura 32 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1 com o modelo completo.

Fonte: o autor.

Figura 33 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2 com o modelo completo.

Fonte: o autor.

Figura 34 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3 com o modelo completo.

Fonte: o autor.

Figura 35 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4 com o modelo completo.

Fonte: o autor.

Nos resultados referentes à comparação do modelo reduzido, com os do modelo de referência, não é notado nenhuma diferença significativa entre as forças hidráulicas. Na comparação dos resultados referente ao modelo completo com os do modelo de referência, também não é verificado nenhuma diferença relevante. Logo, pode-se afirmar que os modelos analíticos desenvolvidos apresentam boa capacidade de representação da dinâmica do subsistema mecânico do manipulador, mediante as hipóteses simplificadoras adotadas.

Comparando-se os resultados do modelo reduzido com os do modelo completo do subsistema mecânico, verifica-se que os cilindros e barras tem uma influência razoavelmente significativa na dinâmica do subsistema mecânico do manipulador. Isto porque as magnitudes das forças hidráulicas do modelo completo são perceptivelmente maiores do que as do modelo reduzido.

2.10 CONCLUSÃO

Foi desenvolvido, por três métodos diferentes, o modelo da dinâmica do manipulador de uma escavadeira hidráulico de pequeno porte (miniescavadeira) com 4

graus de liberdade e 4 elos. As equações de movimento obtidas pelos 3 métodos são idênticas. Em relação aos métodos utilizados, o princípio dos trabalhos virtuais e o método de Kane mostraram-se mais eficientes que o método de Euler-Lagrange para a implementação computacional. Isto porque não é necessário derivar uma função escalar para obter as equações de movimento.

Posteriormente, o modelo do subsistema mecânico com 14 elos e 4 graus de liberdade (modelo completo do subsistema mecânico) foi derivado por 3 métodos diferentes, sendo eles o método de Kane na forma matricial, o método de Euler-Lagrange com multiplicadores, e através das equações de Maggi. Substituindo-se as expressões dos comprimentos cilindros e da orientação dos cilindros e das barras, nas equações de movimento dos modelos com coordenadas redundantes, chegou-se nas mesmas equações fornecidas pelo método de Kane na forma matricial. Verificou-se que a modelagem do subsistema mecânico pelo método de Euler-Lagrange com Multiplicadores e através das equações de Maggi facilitou a implementação computacional. Isto é devido à introdução das coordenadas redundantes que reduziram significativamente o tamanho das equações de movimento do modelo. Entre o método de Euler-Lagrange com Multiplicadores e as equações de Maggi, a obtenção das equações de movimento foi mais direta com o último, devido à eliminação dos multiplicadores de Lagrange.

Por fim, foi realizada a comparação dos esforços motores (forças hidráulicas) obtidos com os modelos analíticos (reduzido e completo) com os fornecidos por um *software* comercial dedicado à análise de sistemas multicorpos. Todos os modelos analíticos apresentaram excelentes resultados na comparação.

3 MODELAGEM DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Este capítulo traz a modelagem do subsistema hidráulico do manipulador da escavadeira hidráulica. Primeiramente, a descrição desse subsistema e dos seus principais componentes é apresentada. Em seguida, realiza-se a revisão de alguns conceitos básicos da mecânica dos fluidos, como embasamento para a modelagem matemática apresentada neste capítulo. Posteriormente, a modelagem do subsistema hidráulico é realizada, considerando somente os seus componentes principais. O modelo desse subsistema é obtido a partir da aplicação de lei físicas para a modelagem dos seus componentes. O modelo resultante é simplificado, o que resulta em versões de ordem reduzida. Ao final, é realizada uma comparação entre os modelos derivados e um modelo de referência, obtido a partir de um *software* comercial para modelagem de sistemas dinâmicos.

3.1 DESCRIÇÃO DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Na Figura 36 é ilustrado um diagrama esquemático do subsistema hidráulico do manipulador da escavadeira hidráulica. Este diagrama tem a função de demonstrar o funcionamento desse subsistema, considerando somente os seus componentes principais.

Figura 36 - Diagrama de blocos do subsistema hidráulico do manipulador.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

Durante a operação, é considerado que o fluido hidráulico é fornecido por uma unidade de suprimento sob condições de pressão e vazão constantes. O sistema é

acionado por uma tensão de controle u_v que energiza as bobinas dos solenoides proporcionais da válvula direcional, produzindo um deslocamento x_v do carretel da válvula. Por sua vez, este deslocamento gera a abertura dos orifícios de passagem da válvula, permitindo assim o fornecimento de fluido hidráulico à alta pressão para uma das câmaras do cilindro hidráulico, e o retorno de fluido da outra câmara para o tanque. Em consequência, tem-se a variação das pressões nas câmaras do cilindro, resultando numa força que movimenta a parte móvel do cilindro (haste) em um deslocamento y_c . Em relação ao atuador hidráulico considerado na modelagem, este é constituído de uma válvula direcional proporcional do tipo carretel de 4 vias e 3 posições, e um cilindro hidráulico diferencial, conforme ilustrado no diagrama da Figura 37.

Figura 37 - Diagrama esquemático do atuador hidráulico.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

3.2 REVISÃO DE CONCEITOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

No geral, as propriedades físicas que caracterizam um fluido são a massa específica ρ , definida como a quantidade de massa por volume, a viscosidade μ , sendo a propriedade de atrito que provoca a dissipação de energia em um fluido corrente, e

o módulo de elasticidade volumétrica β , interpretado como a medida da compressibilidade do fluido. O módulo de elasticidade volumétrica é definido pela seguinte relação diferencial (MERRIT, 1967):

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial p}{\beta} \quad (3.1)$$

sendo $\partial \rho$ o incremento na massa específica de um fluido com uma massa específica inicial ρ , que é exposto a um incremento de pressão ∂p . O valor do módulo de elasticidade volumétrica é de difícil determinação, pois varia com a pressão, com a temperatura e com a presença de outros fluidos, como o ar, no ambiente em que o fluido hidráulico está contido (MERRIT, 1967). No entanto, para a maioria dos fluidos hidráulicos, pode ser considerado que o módulo de elasticidade volumétrica tem um valor elevado, da ordem de 10^9 N/m^2 . Isto indica que é necessário uma elevada variação de pressão para produzir uma pequena variação na massa específica, sendo que este fato que justifica a suposição frequente de que os fluidos hidráulicos são incompressíveis (DRIEMEYER, 2002).

Segundo Merit (1967), a dinâmica do escoamento de um fluido é descrita com a sua velocidade v , e com a pressão estática do fluido p , definida como a força por unidade de área. Para relacionar essas variáveis utilizam-se dois princípios básicos, sendo eles o princípio da conservação da massa e o princípio da conservação da energia, que serão abordados a seguir.

3.2.1 Conservação de massa

A lei de conservação da massa afirma que a massa de determinado sistema sob a condição de escoamento constante (regime permanente) é invariante em relação ao tempo (DRIEMEYER, 2002). Portanto, a variação da massa desse sistema, em função do tempo, é nula, sendo assim, tem-se que:

$$\dot{m}_s = 0 \quad (3.2)$$

com m_s sendo a massa do sistema.

Para analisar o escoamento através de uma região, determina-se o volume de controle (VC), que é referente a região do espaço utilizada na análise. A fronteira do

volume de controle é denominada de superfície de controle (SC). Para um volume de controle qualquer, a variação da massa é dada seguinte expressão:

$$\dot{m}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho v dA \quad (3.3)$$

onde dV é um elemento de volume, v é a velocidade medida em relação à superfície de controle (SC), e dA é um vetor elemento de área.

Desta forma, igualando-se as equações (3.2) e (3.3), obtém-se a lei da conservação da massa para um volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho v dA = 0 \quad (3.4)$$

logo, o fluxo líquido de massa através da superfície de controle é igual à variação da massa no interior do volume de controle (DRIEMEYER, 2002).

Considera-se o escoamento unidirecional, em regime permanente, ilustrado na Figura 38, onde ρ_i , v_i e A_i são, respectivamente, a massa específica, a velocidade e a área da seção de entrada, e com ρ_o , v_o e A_o , sendo, nessa mesma ordem, a massa específica, a velocidade e a área da seção de saída. Em relação ao escoamento, é assumido que a massa específica é igual em todos os pontos, logo, $\rho_i = \rho_o = \rho$.

Figura 38 - Escoamento unidirecional em um volume de controle.

Fonte: adaptado de Driemeyer (2002).

Considerando-se que a normal à superfície aponta para fora do volume de controle, obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (-v_i) dA + \int_{SC} \rho (v_o) dA = 0 \quad (3.5)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \rho(v_o A_o - v_i A_i) = 0 \quad (3.6)$$

Sendo a vazão $Q_{i,o}$ obtida através produto da velocidade $v_{i,o}$ pela área $A_{i,o}$, e com $d(\rho V)/dt = \dot{\rho}V + \rho\dot{V}$, desta forma, a equação (3.6) fica reescrita como:

$$Q_i - Q_o = \dot{V} + \frac{V}{\rho} \dot{\rho} \quad (3.7)$$

Substituindo a relação diferencial do módulo de elasticidade volumétrica, referente a expressão (3.1), em (3.7), chega-se na equação da continuidade:

$$Q_i - Q_o = \dot{V} + \frac{V}{\beta} \dot{p} \quad (3.8)$$

3.2.2 Conservação de energia

Considerando um escoamento incompressível, isotérmico, constante, com propriedades uniformes nas seções, sem a presença de máquinas, e onde as perdas por atrito podem ser desprezadas, logo, não existe dissipação de energia. Sendo assim, para este escoamento, a soma das energias cinética e potencial é constante em relação tempo, portanto, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh + p = cte \quad (3.9)$$

onde h é a altura relativa a um nível de referência. A equação (3.9) é conhecida como a equação de Bernoulli (MERRIT, 1967), que tem o seu primeiro termo representando a energia cinética, o segundo a energia potencial gravitacional, e o terceiro a energia potencial na forma de pressão (DRIEMEYER, 2002).

Aplicando-se a equação de Bernoulli ao escoamento em regime permanente de um fluido ideal através de um orifício, mostrado na Figura 39, onde p_i e v_i são a pressão e a velocidade na seção de entrada, p_o e v_o são a pressão e a velocidade na seção de saída, e A_{oi} é a área do orifício, desta forma, obtém-se que:

$$\frac{1}{2} \rho v_i^2 + \rho gh_i + p_i = \frac{1}{2} \rho v_o^2 + \rho gh_o + p_o \quad (3.10)$$

com h_i e h_o sendo, respectivamente, as alturas relativas das seções de entrada e saída, e g a aceleração da gravidade.

Figura 39 - Escoamento através de um orifício.

Fonte: adaptado de Driemeyer (2002).

Considera-se uma brusca redução da seção de escoamento. O fluido contido em uma câmara a alta pressão (p_i) escoar através de um pequeno orifício para uma segunda câmara a baixa pressão (p_o). O escoamento pelo orifício se dá através da aceleração do fluido, implicando em um aumento da velocidade que, por sua vez, gera uma queda de pressão ($\Delta p = p_i - p_o$) através do orifício. Considerando que não há variação de altura, logo, $h_i = h_o$, e que $v_i \ll v_o$, desta forma, vem que:

$$p_i \approx \frac{1}{2} \rho v_o^2 + p_o \quad (3.11)$$

Isolando v_o da equação (3.11) e multiplicando os dois lados da equação resultante pela área de passagem do orifício, A_{or} , obtém-se a vazão através do orifício:

$$Q_{or} = A_{or} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_i - p_o)} \quad (3.12)$$

Para representar as perdas na vazão por causa atrito devido à viscosidade do fluido, na equação (3.12) é introduzido um fator de perda denominado coeficiente de descarga, $C_d < 1$ (MERRIT, 1967). Este fator depende da geometria do orifício e das características do escoamento que são obtidas experimentalmente. Logo, a equação final da vazão através de um orifício fica sendo dada por:

$$Q_{or} = C_d A_{or} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_i - p_o)} \quad (3.13)$$

3.3 MODELAGEM DOS COMPONENTES DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

A modelagem dos componentes principais do subsistema hidráulico será apresentada nesta seção. Na modelagem, foram aplicadas a Lei de Kirchhoff das tensões para descrever a dinâmica do motor linear da válvula, a equação da continuidade para a dinâmica das pressões nas câmaras do cilindro, e a 2ª lei de Newton para a dinâmica das partes moveis da válvula e do cilindro. Antes de iniciar a modelagem do subsistema hidráulico, algumas hipóteses sobre o subsistema e os seus componentes serão adotadas, a fim de simplificar a modelagem matemática.

3.3.1 Hipóteses simplificadoras para modelagem do subsistema hidráulico

As hipóteses simplificadoras consideradas para a modelagem do subsistema hidráulico do manipulador são as seguintes:

- A unidade de suprimento proporciona pressão e vazão de forma contínua e constante.
- O regime do fluxo através dos orifícios da válvula direcional é considerado como turbulento.
- A temperatura de trabalho do subsistema hidráulico é constante.
- O possível comportamento dinâmico das pressões nas tubulações, entre as válvulas e os cilindros é negligenciável, de tal forma que estas podem ser modeladas como volumes ineficientes.
- Não ocorre cavitação ou saturação nas tubulações.
- A perda de carga que ocorre nos componentes é desprezível.
- A válvula direcional é simétrica e de centro crítico, ou seja, a largura do ressalto é igual à do orifício; portanto, os efeitos da zona morta são desconsiderados.
- A geometria da válvula direcional é ideal, isto é, não há nenhuma geometria de transição (arredondamentos ou chanfros), entre as arestas dos orifícios, e nem folgas, portanto, todo tipo de vazamento interno é desprezado.
- O efeito de histerese presente na válvula direcional é considerado desprezível.
- As câmaras dos cilindros são assumidas como sendo rígidas, ou seja, não é considerada a flexibilidade das suas paredes. A rigidez das câmaras dos cilindros é muito maior do que a compressibilidade do fluido hidráulico. Desta

forma, quando operando à mesma pressão, o efeito da flexibilidade das paredes dos cilindros é considerado negligenciável em comparação com a compressibilidade do fluido.

- A compressibilidade do fluido hidráulico, também denominada como módulo de elasticidade volumétrica, é considerada constante, mesmo sabendo que esta depende da pressão, temperatura e da quantidade de ar presente no fluido.
- O vazamento entre a haste do atuador e o selo da camisa é negligenciado. Isto porque a vazão de fuga para o exterior da camisa pode ser evitada pelo uso de vedação adequada.
- As forças de escoamento que agem sobre o carretel da válvula direcional não são consideradas na modelagem, pois supõe-se que parâmetros como a frequência natural e o coeficiente de amortecimento sejam suficientes para descrever a dinâmica da parte móvel da válvula.

3.3.2 Equação da tensão do motor linear

Na Figura 40 é ilustrado o motor linear, ou solenoide proporcional, responsável pelo acionamento da válvula.

Figura 40 - Solenoide proporcional de acionamento da válvula.

Fonte: adaptado de De Negri (1987).

Considerando o motor linear, independentemente do tipo de ligação das bobinas e do amplificador, como um motor de força elétrica de corrente contínua, através

da aplicação da Lei de Kirchhoff das tensões, obtém-se um modelo linear, de 1ª ordem, para a sua dinâmica (VALDIERO, 2005). Este modelo é expresso por:

$$\tau_s \frac{di_m}{dt} + i_m = \frac{u_v}{R_b} \quad (3.14)$$

onde R_b é a resistência das bobinas do solenoide, u_v é a tensão aplicada na bobina, i_m é a corrente gerada nas bobinas, τ_s é a constante de tempo do solenoide, obtida em catálogos ou em testes experimentais.

3.3.3 Equação de movimento do carretel da válvula

A força necessária para movimentar a parte móvel da válvula (carretel), é obtida aplicando a 2ª lei de Newton no sistema de forças mostrado na Figura 41.

Figura 41 - Diagrama de corpo livre do carretel da válvula.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

Pelo equilíbrio das forças que atuam sobre o carretel, obtém-se que:

$$m_v \ddot{x}_v + b_v \dot{x}_v + k_v x_v = F_v = k_f i_m \quad (3.15)$$

onde m_v e x_v são, respectivamente, a massa e o deslocamento do carretel, b_v é o coeficiente de amortecimento viscoso, k_v é a constante elástica da mola de centragem do carretel que inclui a rigidez associada à força de escoamento sobre o carretel, e F_v é a força magnética exercida pelo solenoide sobre o carretel na passagem de uma corrente elétrica i_m nas bobinas. Segundo Valdiero (2005), esta força pode ser escrita em função da corrente i_m e do ganho de força k_f do solenoide, considerando que o deslocamento do solenoide é igual ao deslocamento do carretel.

A equação (3.15) pode ser reescrita na forma mostrada em (3.16), ou seja, em função da frequência natural ω_v e do fator de amortecimento ζ_v . Estes parâmetros são estimados a partir do diagrama de resposta em frequência, o qual é fornecido no catálogo do fabricante da válvula ou obtido através de ensaios (VALDIERO, 2005).

$$\frac{1}{\omega_v^2} \ddot{x}_v + \frac{2\zeta_v}{\omega_v} \dot{x}_v + x_v = \frac{k_f}{k_v} i_m \quad (3.16)$$

onde ω_v é a frequência natural da válvula que é dada por:

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m_v}} \quad (3.17)$$

e ζ_v é o fator de amortecimento da válvula, que é dado pela equação (3.18).

$$\zeta_v = \frac{b_v}{2} \sqrt{\frac{1}{k_v m_v}} \quad (3.18)$$

Combinando-se a dinâmica do solenoide e a dinâmica do movimento do carretel, obtém-se um modelo de 3ª ordem para a dinâmica da válvula. Em Cunha (2001) é apresentado um modelo reduzido de 2ª ordem, obtido considerando-se desprezível a dinâmica do solenoide proporcional, em relação a dinâmica do movimento do carretel. Na equação (3.19) é apresentado o modelo de 2ª ordem.

$$\ddot{x}_v = k_{em} \omega_v^2 u_v - \omega_v^2 x_v - 2\zeta_v \omega_v \dot{x}_v \quad (3.19)$$

onde k_{em} é a constante eletromecânica, que representa o ganho estático entre a tensão de controle u_v e o deslocamento x_v do carretel, que é dada por:

$$k_{em} = \frac{k_f}{k_v R_b} \quad (3.20)$$

Mais adiante, a expressão (3.20) será utilizada para obter os coeficientes de vazão da válvula, quando a dinâmica do acionamento eletromecânico for desprezível.

3.3.4 Equação da vazão nos orifícios da válvula

As vazões dos orifícios da válvula, ilustradas na Figura 42, são determinadas em função do deslocamento x_v , a partir da equação de Bernoulli (DRIEMEYER, 2002; MERRIT, 1967; VALDIERO, 2005) como foi demonstrado anteriormente.

Figura 42 - Válvula direcional de 4 vias e 3 posições em corte.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

Considerando-se uma válvula assimétrica de centro crítico, ao se deslocar o carretel de uma distância x_v , são geradas vazões pelos seus orifícios que podem ser calculadas pelas seguintes equações:

$$Q_a = k_a g_a(p_a, \text{sin}(\alpha_v)) x_v \quad (3.21)$$

$$Q_b = -k_b g_b(p_b, \text{sin}(\alpha_v)) x_v \quad (3.22)$$

onde p_a , p_b , Q_a e Q_b são, respectivamente, as pressões e as vazões nas câmaras a e b , k_a e k_b são, respectivamente, os coeficientes de vazão dos orifícios a e b da válvula. De acordo com Valdiero (2005), esses coeficientes representam as características geométricas da válvula e também agregam propriedades consideradas constantes para o escoamento e para o fluido, como por exemplo o coeficiente de descarga e a massa específica do fluido.

Nas equações (3.21) e (3.22), as funções $g_a(p_a, \text{sin}(\alpha_v))$ e $g_b(p_b, \text{sin}(\alpha_v))$ são definidas por Bu e Yao (2000) como:

$$g_a(p_a, \text{sin}(\alpha_v)) = \begin{cases} \sqrt{p_s - p_a} & \text{se } x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_a - p_t} & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$g_b(p_b, \text{sin}(\alpha_v)) = \begin{cases} \sqrt{p_b - p_t} & \text{se } x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_s - p_b} & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

onde os Δp são as quedas de pressão nos orifícios da válvula, p_s é a pressão de suprimento e p_t é a pressão do tanque.

3.3.5 Variação das pressões nas câmaras do cilindro

Em relação ao cilindro diferencial mostrado na Figura 43, o modelo matemático para a variação das pressões é obtido aplicando a equação da continuidade nas câmaras do cilindro.

Figura 43 - Tubulações e cilindro diferencial em corte.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

Segundo Merrit (1967), de uma forma geral, a equação da continuidade, aplicada a um volume de controle V , pode ser expressa por:

$$\sum Q_e - \sum Q_s = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta_e} \frac{dp}{dt} \quad (3.25)$$

onde Q_e e Q_s são as vazões de entrada e saída, respectivamente, p é a pressão efetiva, e β_e é o módulo de elasticidade volumétrica efetivo do fluido hidráulico. Logo, aplicando-se a equação (3.25) nas câmaras a e b do cilindro, obtém-se que:

$$Q_a - C_{in}(p_a - p_b) = \frac{dV_a}{dt} + \frac{V_a}{\beta_e} \frac{dp_a}{dt} \quad (3.26)$$

$$C_{in}(p_a - p_b) + Q_b = \frac{dV_b}{dt} + \frac{V_b}{\beta_e} \frac{dp_b}{dt} \quad (3.27)$$

sendo V_a e V_b os volumes das câmaras a e b , respectivamente, e C_{in} o coeficiente de vazamento interno entre as câmaras do cilindro. Os volumes das câmaras do cilindro são funções do deslocamento y_c , e são dados por:

$$V_a = A_a(\tilde{l}_a + y_c) + V_{tub} \quad (3.28)$$

$$V_b = A_b(\tilde{l}_a - y_c) + V_{tub} \quad (3.29)$$

onde A_a e A_b são, respectivamente, as áreas de seção transversal das câmaras a e b , $\tilde{l}_a = l_a(t_0)$ e $\tilde{l}_b = l_b(t_0)$ são os comprimentos iniciais das câmaras do cilindro, e V_{tub} é o volume das tubulações que conectam o cilindro à válvula, considerando que os volumes das tubulações a e b são iguais.

Nas equações (3.26) e (3.27) aparecem os termos relativos à variação temporal dos volumes das câmaras, que são expressos da seguinte forma:

$$\frac{dV_a}{dt} = A_a \dot{y}_c \quad (3.30)$$

$$\frac{dV_b}{dt} = -A_b \dot{y}_c \quad (3.31)$$

Substituindo-se as equações (3.28) a (3.31) em (3.26) e (3.27), obtém-se a dinâmica da pressão em cada câmara do cilindro:

$$\dot{p}_a = \frac{\beta_e}{A_a(\tilde{l}_a + y_c) + V_{tub}} \left[k_a g_a(p_a, \text{sin}(\alpha_v)) x_v - A_a \dot{y}_c - C_{in}(p_a - p_b) \right] \quad (3.32)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\beta_e}{A_b(\tilde{l}_b - y_c) + V_{tub}} \left[A_b \dot{y}_c + C_{in}(p_a - p_b) - k_b g_b(p_b, \text{sin}(\alpha_v)) x_v \right] \quad (3.33)$$

3.3.6 Equação de movimento da parte móvel do cilindro

Aplicando a 2ª lei de Newton para descrever a dinâmica da parte móvel do cilindro hidráulico, chega-se na seguinte equação de equilíbrio dinâmico:

$$F_{in} + F_{at} + F_l + F_g = F_h \quad (3.34)$$

onde F_{in} é a força inercial, F_{at} é a força de atrito, F_l é a força de carga, F_g é a força peso, e F_h é a força hidráulica. Os termos presentes na equação (3.34) são mais detalhados a seguir:

- F_{in} é devido à aceleração da massa do sistema, ou seja, $F_{in} = m_c a_c = m_c \ddot{y}_c$, onde m_c é a massa total em movimento.
- F_{at} é devido aos efeitos dissipativos presentes no sistema, sendo que o seu modelo será abordado detalhadamente na próxima seção.
- F_l é proveniente do tipo de carregamento que é empregado no sistema.
- F_g é devido a inclinação do cilindro hidráulico com a horizontal, desta forma, $F_g = m_c g \sin \theta_c$, onde θ_c é o ângulo de inclinação, determinado no capítulo 2.
- F_h é resultante do balanço das pressões nas câmaras a e b do cilindro hidráulico, sendo assim, $F_h = p_a A_a - p_b A_b$.

A massa total em movimento, m_c , é obtida pela soma da massa da parte móvel do cilindro (haste), m_h , com a massa da carga, m_l , e com a massa efetiva do fluido em movimento, m_f , ou seja, $m_c = m_h + m_l + m_f$. Em De Negri (1987), a massa efetiva do fluido em movimento é calculada como:

$$m_f = \rho V_i + \sum_{i=1}^n \rho V_i \left(\frac{A_{a,b}}{A_i} \right)^2 \quad (3.35)$$

onde V_i é o volume total de fluido nas câmaras do cilindro, V_i e A_i são, respectivamente, o volume de fluido e a área de seção transversal referentes ao i -ésimo segmento de canalização, e n é o número de segmentos de canalização.

A massa efetiva do fluido deve ser considerada no cálculo da massa total devido à aceleração do óleo contido nas linhas hidráulicas. Em alguns casos, m_f pode ser relevante na dinâmica da parte móvel do cilindro (DE NEGRI, 1987). Neste trabalho, no entanto, este termo será considerado desprezível mediante a contribuição dos outros termos para m_c , logo, $m_h + m_l \gg m_f$, portanto, $m_c \cong m_h + m_l$.

Utilizando-se os termos especificados anteriormente, a dinâmica da parte móvel do cilindro hidráulico, referente à equação (3.34), pode ser reescrita da forma que é mostrada a seguir:

$$m_c \ddot{y}_c + F_{at} + F_l + F_g = p_a A_a - p_b A_b = F_h \quad (3.36)$$

O equilíbrio dinâmico representado pela equação (3.36) é ilustrado através do diagrama esquemático da Figura 44.

Figura 44 - Diagrama esquemático do sistema haste mais carga.

Fonte: adaptado de Valdiero (2005).

Para expressar a aceleração da parte móvel do cilindro $\ddot{y}_c$, resultante da ação das forças envolvidas no equilíbrio dinâmico, a equação (3.36) é reescrita na forma de dinâmica direta, como apresentado a seguir:

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (p_a A_a - p_b A_b - F_{at} - F_l - F_g) \quad (3.37)$$

3.3.6.1 Modelo de atrito dos cilindros hidráulicos

Neste trabalho, o modelo de atrito utilizado para os cilindros hidráulicos, foi proposto por Armstrong-Hélouvry, Dupont e De Wit (1994). Este modelo leva em consideração o atrito estático, o atrito de Coulomb, o atrito viscoso e o efeito de Stribeck, como mostrado pela seguinte expressão:

$$F_{at} = F_c \left[1 + (k_{est} - 1) e^{-c_v |\dot{y}_c|} \right] \text{sin}(\dot{y}_c) + B_v \dot{y}_c \quad (3.38)$$

onde F_c é a força de atrito de Coulomb, considerada constante, k_{est} é coeficiente de atrito estático, c_v é o coeficiente de transição, $\dot{y}_c$ é a velocidade relativa do cilindro, e B_v é o coeficiente de atrito viscoso.

A Figura 45 mostra o gráfico da força de atrito gerada pelo modelo. Nesta também é mostrado a contribuição de cada uma das parcelas consideradas no modelo, onde F_{at} é a força de atrito total, F_{est} é a força de atrito estático, F_c é a força de atrito

de Coulomb ou de atrito cinético, F_{str} é a força de atrito devido ao efeito de Stribeck, e F_v é a força de atrito viscoso.

Figura 45 - Força gerada pelo modelo de atrito dos cilindros.

Fonte: o autor.

Para evitar descontinuidades quando $\dot{y}_c = 0$, uma pequena região chamada de camada limite, delimitada por $|\dot{y}_c| < v_{tr}$, é introduzida em torno de $\dot{y}_c = 0$, onde v_{tr} é denominada velocidade de transição. Nessa região as forças de fricção são assumidas como sendo linearmente proporcionais à velocidade $\dot{y}_c$. Logo, a força de atrito F_{at} , fica definida em função da velocidade $\dot{y}_c$, como expresso a seguir:

$$F_{at} = \begin{cases} F_c \left[1 + (k_{est} - 1) e^{-c_v |\dot{y}_c|} \right] \text{sin}(\dot{y}_c) + B_v \dot{y}_c & \text{se } |\dot{y}_c| \geq v_{tr} \\ F_c \left[1 + (k_{est} - 1) e^{-c_v v_{tr}} \right] (\dot{y}_c / v_{tr}) + B_v \dot{y}_c & \text{se } |\dot{y}_c| < v_{tr} \end{cases} \quad (3.39)$$

3.4 MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Nesta seção os modelos dos componentes do subsistema hidráulico, serão agrupados para a formação do modelo do subsistema hidráulico. Também serão realizadas simplificações no modelo resultante, a fim criar um modelo mais eficiente para a síntese do controlador.

3.4.1 Modelo de 6ª ordem do subsistema hidráulico

Combinando as equações (3.21) e (3.22) das vazões nos orifícios de controle da válvula, com a dinâmica da variação das pressões nas câmaras do cilindro, dada por (3.32) e (3.33), juntamente com a equação (3.37) referente à dinâmica do movimento da parte móvel do cilindro, obtém-se o modelo não linear de 6ª ordem (ou 6 estados), que é descrito pelas seguintes equações:

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (p_a A_a - p_b A_b - F_{at} - F_l - F_g) \quad (3.40)$$

$$\dot{p}_a = \frac{\beta_e}{A_a (\tilde{l}_a + y_c) + V_{tub}} \left[k_a g_a(p_a, \text{sin}(\dot{x}_v)) \dot{x}_v - A_a \dot{y}_c - C_{in}(p_a - p_b) \right] \quad (3.41)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\beta_e}{A_b (\tilde{l}_b - y_c) + V_{tub}} \left[A_b \dot{y}_c + C_{in}(p_a - p_b) - k_b g_b(p_b, \text{sin}(\dot{x}_v)) \dot{x}_v \right] \quad (3.42)$$

$$\ddot{x}_v = k_{em} \omega_v^2 u_v - \omega_v^2 x_v - 2\zeta_v \omega_v \dot{x}_v \quad (3.43)$$

A Figura 46 ilustra o diagrama de blocos do modelo não linear de 6ª ordem do subsistema hidráulico. Este diagrama foi construído com esquema de integração das equações anteriores.

Figura 46 - Diagrama de blocos do modelo de 6ª ordem.

Fonte: o autor.

O modelo de não linear de 6ª ordem poder ainda ser reescrito na forma de espaço de estados, definindo-se variáveis de estado x_i , com $i=1, \dots, 6$ estado, como mostrado a seguir:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_v \quad (3.44)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_v = k_{em} \omega_v^2 u_v - \omega_v^2 x_1 - 2\zeta_v \omega_v x_2 \quad (3.45)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{p}_a = \frac{\beta_e}{A_a(\tilde{l}_a + x_5) + V_{tub}} \left[k_a g_a(x_3, \text{sin}(\alpha_1)) x_1 - A_a x_6 - C_{in}(x_3 - x_4) \right] \quad (3.46)$$

$$\dot{x}_4 = \dot{p}_b = \frac{\beta_e}{A_b(\tilde{l}_b - x_5) + V_{tub}} \left[A_b x_6 + C_{in}(x_3 - x_4) - k_b g_b(x_4, \text{sin}(\alpha_1)) x_1 \right] \quad (3.47)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{y}_c \quad (3.48)$$

$$\dot{x}_6 = \ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (x_3 A_a - x_4 A_b - F_{at}(x_6) - F_l - F_g(x_5)) \quad (3.49)$$

onde $x_1 = x_v$, $x_2 = \dot{x}_v$, $x_3 = p_a$, $x_4 = p_b$, $x_5 = y_c$ e $x_6 = \dot{y}_c$.

3.4.2 Modelo de 4ª ordem do subsistema hidráulico

Considerando que a dinâmica da válvula é rápida o suficiente para ser desprezada, obtém-se um modelo não linear de 4ª ordem para o subsistema hidráulico, que é dado por:

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (p_a A_a - p_b A_b - F_{at} - F_l - F_g) \quad (3.50)$$

$$\dot{p}_a = \frac{\beta_e}{A_a(\tilde{l}_a + y_c) + V_{tub}} \left[K_a g_a(p_a, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a \dot{y}_c - C_{in}(p_a - p_b) \right] \quad (3.51)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\beta_e}{A_b(\tilde{l}_b - y_c) + V_{tub}} \left[A_b \dot{y}_c + C_{in}(p_a - p_b) - K_b g_b(p_b, \text{sin}(\alpha_v)) u_v \right] \quad (3.52)$$

onde K_a e K_b são as constantes hidráulicas que, segundo Cunha (2001), podem ser expressas da seguinte forma:

$$K_a = k_a \frac{k_f}{k_v R_b} = k_a k_{em} \quad (3.53)$$

$$K_b = k_b \frac{k_f}{k_v R_b} = k_b k_{em} \quad (3.54)$$

Analisando-se as equações anteriores verifica-se que $x_v = k_{em} u_v$, logo, as constantes hidráulicas expressam uma relação linear entre o deslocamento do carretel e a tensão de comando aplicada no solenoide proporcional.

A Figura 47 mostra o diagrama de blocos do modelo não linear de 4ª ordem do subsistema hidráulico, construído com o esquema de integração das equações anteriores.

Figura 47 - Diagrama de blocos do modelo de 4ª ordem.

Fonte: o autor.

Para reescrever o modelo de não linear de 4ª ordem na forma de espaço de estados, definem-se variáveis de estado x_i , onde $i=1,\dots,4$ estados. Dessa forma, obtém-se que:

$$\dot{x}_1 = \dot{p}_a = \frac{\beta_e}{A_a(\tilde{l}_a + x_3) + V_{ub}} \left[K_a g_a(x_1, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a x_4 - C_{in}(x_1 - x_2) \right] \quad (3.55)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{p}_b = \frac{\beta_e}{A_b(\tilde{l}_b - x_3) + V_{ub}} \left[A_b x_4 + C_{in}(x_1 - x_2) - K_b g_b(x_2, \text{sin}(\alpha_v)) u_v \right] \quad (3.56)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y}_c \quad (3.57)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (x_1 A_a - x_2 A_b - F_{at}(x_4) - F_l - F_g(x_3)) \quad (3.58)$$

sendo $x_1 = p_a$, $x_2 = p_b$, $x_3 = y_c$ e $\dot{x}_4 = \dot{y}_c$.

3.4.3 Modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico

Introduzindo a relação entre os ganhos da válvula direcional, $\sigma_v = K_b / K_a$, e a relação entre as áreas do atuador, $\alpha_c = A_b / A_a$, é possível obter um modelo de 3ª para o subsistema hidráulico, como será demonstrado.

Considerando o deslocamento do carretel da válvula direcional no sentido positivo, ou seja, $u_v > 0$, as equações das vazões através dos orifícios da válvula são dadas por:

$$Q_a = K_a u_v \sqrt{p_s - p_a} \quad (3.59)$$

$$Q_b = -\sigma_v K_a u_v \sqrt{p_b - p_t} \quad (3.60)$$

Negligenciando o vazamento e a compressibilidade do fluido hidráulico, desta forma, tem-se que a relação $\alpha_c Q_a = -Q_b$ se faz verdadeira. Inserindo as relações σ_v e α_c juntamente com as equações (3.59) e (3.60) nessa nova relação, e resolvendo para p_a , vem que:

$$\begin{aligned}\alpha_c K_a u_v \sqrt{p_s - p_a} &= \sigma_v K_a u_v \sqrt{p_b - p_t} \\ \alpha_c \sqrt{p_s - p_a} &= \sigma_v \sqrt{p_b - p_t} \\ \alpha_c^2 (p_s - p_a) &= \sigma_v^2 (p_b - p_t) \\ p_a &= \frac{\alpha_c^2 p_s + \sigma_v^2 p_t - \sigma_v^2 p_b}{\alpha_c^2}\end{aligned}\quad (3.61)$$

De forma similar, resolvendo para p_b , obtém-se:

$$p_b = \frac{\alpha_c^2 p_s + \sigma_v^2 p_t - \alpha_c^2 p_a}{\sigma_v^2}\quad (3.62)$$

Para um cilindro diferencial assimétrico, a pressão de carga é definida por:

$$p_l \triangleq p_a - \alpha_c p_b\quad (3.63)$$

Substituindo a equação (3.61) em (3.63) e resolvendo para p_a , e substituindo a equação (3.62) em (3.63) e resolvendo para p_b , resulta, respectivamente, em:

$$p_a = \frac{\alpha_c^3 p_s + \sigma_v^2 p_l + \alpha_c \sigma_v^2 p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}\quad (3.64)$$

$$p_b = \frac{\alpha_c^2 p_s - \alpha_c^2 p_l + \sigma_v^2 p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}\quad (3.65)$$

Inserindo as equações (3.64) e (3.65) em (3.59) e (3.60), respectivamente, obtêm-se as equações das vazões através dos orifícios da válvula, em termos da pressão de carga, para $u_v > 0$, como sendo:

$$Q_a = \sigma_v K_a u_v \sqrt{\frac{p_s - p_l - \alpha_c p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}}\quad (3.66)$$

$$Q_b = -\alpha_c \sigma_v K_a u_v \sqrt{\frac{p_s - p_l - \alpha_c p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}}\quad (3.67)$$

No caso em que o deslocamento do carretel da válvula é realizado no sentido negativo, ou seja, $u_v < 0$, as equações das vazões são obtidas por:

$$Q_a = K_a u_v \sqrt{p_a - p_t} \quad (3.68)$$

$$Q_b = -\sigma_v K_a u_v \sqrt{p_s - p_b} \quad (3.69)$$

Para $u_v < 0$, as pressões p_a e p_b são obtidas em função da pressão de carga através da relação $\alpha_c Q_a = -Q_b$, só que agora com as equações (3.68) e (3.69), o que resulta em:

$$p_a = \frac{\alpha_c^3 p_t + \alpha_c \sigma_v^2 p_s + \sigma_v^2 p_l}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} \quad (3.70)$$

$$p_b = \frac{\alpha_c^2 p_t + \sigma_v^2 p_s - \alpha_c^2 p_l}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} \quad (3.71)$$

Escrevendo as equações (3.68) e (3.69) em função da pressão de carga com as equações (3.70) e (3.71), estas ficam expressas como:

$$Q_a = \sigma_v K_a u_v \sqrt{\frac{\alpha_c p_s + p_l - p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \quad (3.72)$$

$$Q_b = -\alpha_c \sigma_v K_a u_v \sqrt{\frac{\alpha_c p_s + p_l - p_t}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \quad (3.73)$$

Substituindo-se as equações (3.59) e (3.72) na relação $\alpha_c Q_a = -Q_b$ obtém-se a equação da vazão de carga, que é definida como:

$$Q_l \triangleq Q_a = -\alpha_c^{-1} Q_b$$

$$Q_l = u_v \frac{\sigma_v K_a}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_l(u_v))) \quad (3.74)$$

onde,

$$g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_l(u_v))) = \begin{cases} \sqrt{p_s - p_l - \alpha_c p_t} & \text{se } u_v \geq 0 \\ \sqrt{\alpha_c p_s + p_l - p_t} & \text{se } u_v < 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

As equações da dinâmica das pressões das câmaras do cilindro hidráulico são reescritas a seguir:

$$\dot{p}_a = \frac{\beta_e}{V_a} (Q_a - C_{in} \Delta p - A_a \dot{y}_c) \quad (3.76)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\beta_e}{V_b} (A_b \dot{y}_c + C_{in} \Delta p + Q_b) \quad (3.77)$$

onde $\Delta p = p_a - p_b$.

Considerando-se as equações (3.76) e (3.77), a relação $\alpha_c Q_a = -Q_b$, e introduzindo-se a relação entre os volumes das câmaras do cilindro, $r_v = V_b / V_a$, desta forma, a derivada da pressão de carga, ou seja, $\dot{p}_l = \dot{p}_a - \alpha_c \dot{p}_b$, fica reescrita como:

$$\begin{aligned}\dot{p}_l &= \frac{\beta_e}{V_a} (Q_a - C_{in} \Delta p - A_a \dot{y}_c) - \frac{\alpha_c \beta_e}{V_b} (A_b \dot{y}_c + C_{in} \Delta p + Q_b) \\ \dot{p}_l &= \frac{\beta_e}{V_a} (Q_a - C_{in} \Delta p - A_a \dot{y}_c) - \frac{\alpha_c \beta_e}{V_b} (\alpha_c A_a \dot{y}_c + C_{in} \Delta p - \alpha_c Q_a) \\ \dot{p}_l &= \frac{\beta_e}{V_a} (Q_a - C_{in} \Delta p - A_a \dot{y}_c) - \frac{\alpha_c^2 \beta_e}{r_v V_a} \left(A_a \dot{y}_c + \frac{C_{in}}{\alpha_c} \Delta p - Q_a \right)\end{aligned}\quad (3.78)$$

Rearranjando-se a expressão (3.78) obtém-se que:

$$\begin{aligned}\dot{p}_l &= \frac{\beta_e}{V_a} \left[\left(1 + \frac{\alpha_c^2}{r_v} \right) (Q_a - A_a \dot{y}_c) - \left(1 + \frac{\alpha_c}{r_v} \right) C_{in} \Delta p \right] \\ \dot{p}_l &= \frac{\beta_e}{V_a} \left[\left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) (Q_a - A_a \dot{y}_c) - \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) C_{in} \Delta p \right]\end{aligned}\quad (3.79)$$

onde o termo Δp , que é referente a diferença de pressão entre as câmaras do cilindro, pode ser escrito em função da pressão de carga. Para tanto, substitui-se as equações (3.64), (3.65), (3.70) e (3.71) em $\Delta p = p_a - p_b$, sendo que após certa manipulação algébrica chega-se na seguinte expressão para Δp :

$$\Delta p = \begin{cases} \frac{\alpha_c^3 - \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_s + \frac{\alpha_c \sigma_v^2 - \sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_t + \frac{\sigma_v^2 + \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_l & \text{se } u_v \geq 0 \\ \frac{\alpha_c \sigma_v^2 - \sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_s + \frac{\alpha_c^3 - \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_t + \frac{\sigma_v^2 + \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} p_l & \text{se } u_v < 0 \end{cases}\quad (3.80)$$

Finalmente, o modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico pode ser expresso pelas seguintes equações:

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (p_l A_a - F_{at} - F_l - F_g) \quad (3.81)$$

$$\dot{p}_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) \left[\frac{\sigma_v K_a}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a \dot{y}_c \right] - \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) C_{in} \Delta p \quad (3.82)$$

A equação (3.82) pode ser reescrita de forma mais simplificada. Para tanto, agrupam-se os termos onde módulo de elasticidade volumétrica efetivo é presente. Fazendo isso, obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{p}_l = \lambda_l \left[K_l g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a \dot{y}_c \right] - \gamma_l C_{in} \Delta p \quad (3.83)$$

onde,

$$\lambda_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) \quad (3.84)$$

$$K_l = \frac{\sigma_v K_a}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \quad (3.85)$$

$$\gamma_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) \quad (3.86)$$

sendo que o termo K_l é referente ao coeficiente de vazão do modelo de 3ª ordem, denominado aqui como coeficiente de vazão de comando.

Com o esquema de integração das equações acima, constrói-se o diagrama de blocos do modelo 3ª ordem do subsistema hidráulico, ilustrado na Figura 48.

Figura 48 - Diagrama de blocos do modelo de 3ª ordem.

Fonte: o autor.

Definindo-se variáveis de estado x_i , com $i = 1, \dots, 3$ estados, obtém-se o modelo não linear de 3ª ordem do subsistema hidráulico, reescrito na forma de espaço de estados, como é mostrado a seguir:

$$\dot{x}_1 = \dot{p}_l = \lambda_l(x_2) \left[K_l g_l(x_1, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a x_3 \right] - \gamma_l(x_2) C_{in} \Delta p(x_1) \quad (3.87)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_c \quad (3.88)$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y}_c = \frac{1}{m_c} (x_1 A_a - F_{at}(x_3) - F_l - F_g(x_2)) \quad (3.89)$$

onde $x_1 = p_l$, $x_2 = y_c$ e $x_3 = \dot{y}_c$.

3.5 VERIFICAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Os modelos matemáticos do subsistema hidráulico foram simulados em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a. Para realizar a integração numérica das equações dos modelos foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de integração de $1 \cdot 10^{-3} s$. Os resultados obtidos foram comparados com os de um modelo de referência, também criado em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a com as bibliotecas SimMechanics™ e SimHydraulics® do Simscape™.

Para efeito de simulação, um sistema do tipo massa-mola-amortecedor foi incluído na dinâmica da parte móvel do cilindro, logo, esta fica expressa por:

$$m_c \ddot{y}_c = p_a A_a - p_b A_b - B_v \dot{y}_c - K_e y_c \quad (3.90)$$

onde B_v é coeficiente de amortecimento viscoso do amortecedor, e K_e é a constante elástica da mola.

No modelo de referência não foi considerado o vazamento interno entre as câmaras do cilindro, portanto, para efeito de comparação, este também será desconsiderado nos modelos analíticos.

O modelo de referência utilizado na comparação é apresentado na forma de diagrama de blocos no apêndice C.

Para representar o sinal de controle u_v foi considerado uma função do tipo senoidal, ou seja, $u_v = u_{máx} \sin(\omega t)$, onde $u_{máx} = 10 V$ e $\omega = 2\pi rad/s$.

Os parâmetros do subsistema hidráulico e do sistema massa-mola-amortecedor utilizados na simulação são reunidos no apêndice B.

Nas Figuras 49 e 50 são apresentados, respectivamente, os gráficos do deslocamento e da velocidade linear da haste do cilindro. E na Figura 51 é mostrado o gráfico da força hidráulica gerada pela diferença de pressão entre as câmaras do cilindro hidráulico.

Figura 49 - Deslocamento linear da haste do cilindro.

Fonte: o autor.

Figura 50 - Velocidade linear da haste do cilindro.

Fonte: o autor.

Figura 51 - Força hidráulica gerada pelo atuador.

Fonte: o autor.

No gráfico de deslocamento linear, nota-se uma boa correspondência entre os deslocamentos dos modelos analíticos com o modelo de referência, durante todo o movimento. No entanto, nos gráficos de velocidade linear e de força hidráulica, mais especificamente na região de regime transitório, verifica-se certa diferença entre as amplitudes das velocidades lineares e das forças hidráulicas dos modelos analíticos, em comparação com as do modelo de referência. Isto se deve, principalmente, ao fato de que no modelo de referência, alguns efeitos, como o vazamento das válvulas direcionais, não podem ser totalmente retirados do modelo, mas apenas reduzidos, o que explica a oscilação um pouco mais amortecida para a velocidade linear e para a força hidráulica do modelo de referência, se comparadas com as dos modelos de 4ª e 6ª ordem. Outro exemplo de efeito que não pode ser retirado do modelo de referência é a transição entre os regimes de escoamento laminar e turbulento, que é considerada no modelo da válvula direcional no SimHydraulics®. No modelo de 3ª ordem, a região transitória não é bem representada, devido à hipótese de regime permanente que é realizada para a sua derivação. Após o instante de tempo $t = 0,15 \text{ s}$, verifica-se uma boa concordância entre as velocidades lineares e as forças hidráulicas dos modelos analíticos, com as do modelo de referência. Logo, pode-se afirmar que os modelos

analíticos são suficientemente capazes de representar a dinâmica do subsistema hidráulico, mediante as hipóteses simplificadoras adotadas.

3.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram desenvolvidos 3 modelos para o subsistema hidráulico do manipulador. Estes modelos foram simulados e comparados com um modelo de referência, obtido a partir de um *software* comercial para a modelagem de sistemas dinâmicos. Todos modelos analíticos apresentaram bons resultados na comparação com o modelo de referência. Isto indica a boa capacidade desses modelos de representar a dinâmica do subsistema hidráulico. Em relação a implementação computacional, o modelo de 3ª ordem apresentou o melhor desempenho. No entanto, ainda não é possível afirmar que esse modelo pode ser utilizado para representar a dinâmica do manipulador, devido a necessidade de verificar os resultados obtidos quanto este for acoplado ao modelo do subsistema mecânico.

4 MODELO ACOPLADO DO MANIPULADOR

Este capítulo apresenta o acoplamento entre os modelos dos subsistemas mecânico e hidráulico do manipulador. Primeiramente, o modelo da dinâmica dos elos do manipulador é acoplado com o a dinâmica da parte móvel dos cilindros. Em seguida, os modelos do subsistema hidráulico derivados no capítulo 3 são generalizados para um número arbitrário de atuadores. Posteriormente, realiza-se o acoplamento do modelo estendido do subsistema mecânico, considerando o atrito dos cilindros, com os modelos generalizados do subsistema hidráulico, o que resulta em três modelos acoplados do manipulador. Mais adiante, estes modelos são verificados, através da comparação com um modelo de referência, obtido do a partir de um *software* comercial para modelagem de sistemas dinâmicos, com interface para o acoplamento de sistemas multi-físicos. Por fim, o modelo acoplado mais eficiente é linearizado para o estudo do comportamento do sistema.

4.1 ACOPLAMENTO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Nessa seção, a dinâmica dos elos é acoplada com a dinâmica da parte móvel dos cilindros. Para tanto, as equações de movimento dos elos são apresentadas na forma matricial. Em seguida, a relação entre torque motor e força hidráulica, derivada no capítulo 2, é utilizada para realizar o acoplamento entre os modelos.

4.1.1 Forma matricial das equações de movimento dos elos

O modelo completo da dinâmica do subsistema mecânico do manipulador, obtido no capítulo 2, pode ser escrito na forma matricial. Esta forma de representar a dinâmica do subsistema mecânico, facilita a interpretação dos fenômenos físicos envolvidos e o projeto do controlador, como é mostrado a seguir:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques gerados nas juntas do manipulador pelos atuadores, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades generalizadas, e $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de acelerações generalizadas; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz positiva, definida e simétrica, que é denominada matriz de inércia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é

a matriz dos termos de aceleração centrípeta e de Coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor dos torques gravitacionais.

4.1.2 Acoplamento entre as dinâmicas dos elos e dos cilindros

Aplicando-se a 2ª lei de Newton para descrever a dinâmica da parte móvel dos cilindros hidráulicos, obtém-se que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_a \mathbf{p}_a - \mathbf{A}_b \mathbf{p}_b - \mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{G}_c(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{at}(\dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{F} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de forças resultantes nos cilindros, $\mathbf{A}_a \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{A}_b \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ são matrizes diagonais das áreas das seção transversal das câmaras dos cilindros; $\mathbf{p}_a \in \mathfrak{R}^n$ e $\mathbf{p}_b \in \mathfrak{R}^n$ são, respectivamente, os vetores das pressões nas câmaras a e b dos cilindros; os termos $\mathbf{M}_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{G}_c \in \mathfrak{R}^n$ são, nessa ordem, a matriz diagonal de massa, e o vetor de forças peso da parte móvel dos cilindros, e $\mathbf{F}_{at} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de forças de atrito dos cilindros hidráulicos.

Para acoplar a dinâmica dos elos com a da parte móvel dos cilindros é introduzido a seguinte relação: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$, onde $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz jacobiana ou matriz de acoplamento, que é dada por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{c1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_{c1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{cn}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_{cn}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde l_{CiHi} é o comprimento do i -ésimo cilindro, com $i=1, \dots, n$ cilindros. A matriz Jacobiana é oriunda da relação entre torque motor e força hidráulica que foi derivada no capítulo 2.

Aplicando-se a relação $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$ na equação (4.2), chega-se em:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\mathbf{A}_a \mathbf{p}_a - \mathbf{A}_b \mathbf{p}_b) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}_c(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_{at}(\dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.4)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_h - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}_c(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_{at}(\dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{F}_h \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de forças hidráulicas, que é dado por: $\mathbf{F}_h = \mathbf{p}_a^T \mathbf{A}_a - \mathbf{p}_b^T \mathbf{A}_b$.

Os vetores de velocidade e aceleração dos cilindros, $\dot{\mathbf{y}}_c \in \mathfrak{R}^n$ e $\ddot{\mathbf{y}}_c \in \mathfrak{R}^n$, podem ser escritos em função dos vetores de velocidade e aceleração das juntas, $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$, utilizando as relações cinemáticas que transformam os movimentos lineares dos atuadores em movimentos rotacionais das juntas (DRIEMEYER, 2002; SANTOS, 2001a; VALDIERO, 2005). Para as velocidades lineares, essa relação é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_c &= \frac{d}{dt} [l_{C1H1} \quad \dots \quad l_{CnHn}]^T \\ \dot{\mathbf{y}}_c &= \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{y}}_c &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

e para as acelerações lineares tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{y}}_c &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{C1H1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_{CnHn}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{y}}_c &= \dot{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Substituindo-se as equações (4.6) e (4.7) em (4.5) chega-se em:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_h - (\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_c\mathbf{J}(\mathbf{q}))\ddot{\mathbf{q}} - (\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_c\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}_c(\mathbf{q}) - \dots \\ &\quad \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_{at}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\end{aligned}\tag{4.8}$$

Com a inclusão da equação (4.8) em (4.1) obtém-se que:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_h = \mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{D}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tag{4.9}$$

onde,

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_c\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tag{4.10}$$

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tag{4.11}$$

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_c(\mathbf{q})\tag{4.12}$$

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{F}_{at}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{p}_a^T \mathbf{A}_a - \mathbf{p}_b^T \mathbf{A}_b \quad (4.14)$$

O acoplamento entre a dinâmica dos corpos principais do manipulador e a da parte móvel dos cilindros é representado pela equação (4.9). No entanto, esta não se aplica para o modelo dinâmico onde os cilindros e as barras foram considerados, pois a contribuição das hastes seria contabilizada novamente. Assim, (4.9) só é válida para o modelo onde somente os corpos principais são considerados. Logo, para incluir os efeitos dinâmicos de interesse, como o atrito dos cilindros, no modelo completo do subsistema mecânico, deve-se desconsiderar os termos $\mathbf{J}^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{J}}$, $\mathbf{J}^T \mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{J}}$ e $\mathbf{G}_c$ presentes nas equações (4.10) a (4.12), pois estes são referentes à contribuição da parte móvel dos cilindros para a dinâmica do subsistema mecânico.

4.2 GENERALIZAÇÃO DOS MODELOS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Nesta seção, os modelos matemáticos do subsistema hidráulico que foram derivados no capítulo 3 serão generalizados para $i = 1, \dots, n$ atuadores. Para tanto, recorre-se à forma matricial apresentada em Santos (2001a) e Driemeyer (2002).

4.2.1 Generalização do modelo de 6ª ordem

A dinâmica do acionamento eletromecânico pode ser expressa na forma matricial, rescrevendo-se a equação (3.43) da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{K}_{em} \omega_v^2 \mathbf{u}_v - \omega_v^2 \mathbf{x}_v - 2\zeta_v \omega_v \dot{\mathbf{x}}_v \quad (4.15)$$

onde $\omega_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_{em} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\zeta_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes diagonais de frequências naturais, constantes eletromecânicas e de fatores de amortecimento, respectivamente; os termos $\mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}_v \in \mathbb{R}^n$ são os vetores de deslocamentos dos carretes e de tensões de comando, respectivamente.

Substituindo-se as equações (3.21) e (3.22) em (3.41) e (3.42), respectivamente, e utilizando-se a relação (4.6), obtém-se a dinâmica das pressões:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{sin}(\mathbf{x}_v)) \mathbf{x}_v - \mathbf{F}_a(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_a(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (4.16)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_b = -\mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{sin}(\mathbf{x}_v)) \mathbf{x}_v + \mathbf{F}_b(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_b(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (4.17)$$

onde,

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{sin}(\mathbf{x}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} k_a g_{ai}(p_{ai}, \text{sin}(x_{vi})) \right] \quad (4.18)$$

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{sin}(\mathbf{x}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} k_b g_{bi}(p_{bi}, \text{sin}(x_{vi})) \right] \quad (4.19)$$

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} A_{ai} \right] \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_b(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} A_{bi} \right] \quad (4.21)$$

$$\mathbf{D}_a(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \right] \quad (4.22)$$

$$\mathbf{D}_b(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} \right] \quad (4.23)$$

e sendo $\mathbf{C}_{in} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz diagonal de coeficientes de vazamento interno entre as câmaras dos cilindros, e $\Delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de diferenças de pressão entre as câmaras dos cilindros, ou seja, $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b$.

As equações (4.18) a (4.23) são matrizes diagonais de funções não lineares, que dependem dos deslocamento angulares do subsistema mecânico, das pressões nas câmaras dos cilindros, e do sinal do deslocamento de cada carretel.

Reescreve-se a seguir o vetor de forças hidráulicas que são geradas pela diferença de pressão nos cilindros hidráulicos:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{p}_a^T \mathbf{A}_a - \mathbf{p}_b^T \mathbf{A}_b \quad (4.24)$$

Tem-se que a variação desse vetor em relação ao tempo é dada pela derivada temporal da expressão (4.24), ou seja:

$$\dot{\mathbf{F}}_h = \dot{\mathbf{p}}_a^T \mathbf{A}_a - \dot{\mathbf{p}}_b^T \mathbf{A}_b \quad (4.25)$$

Substituindo-se as equações (4.16) e (4.17) em (4.25) obtém-se $\dot{\mathbf{F}}_h$ em função das equações (4.18) a (4.23) como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_h = & \left[\mathbf{A}_a \mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{signal}(\mathbf{x}_v)) + \mathbf{A}_b \mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{signal}(\mathbf{x}_v)) \right] \mathbf{x}_v - \dots \\ & \left[\mathbf{A}_a \mathbf{F}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{A}_b \mathbf{F}_b(\mathbf{q}) \right] \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \left[\mathbf{A}_a \mathbf{D}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{A}_b \mathbf{D}_b(\mathbf{q}) \right] \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \end{aligned} \quad (4.26)$$

As equações (4.15) a (4.26) representam a dinâmica do subsistema hidráulico do manipulador, expresso pelo modelo não linear de 6ª ordem.

4.2.2 Generalização do modelo de 4ª ordem

De maneira semelhante ao modelo de 6ª ordem, só que agora considerando a dinâmica do acionamento eletromecânico desprezível, obtém-se a dinâmica generalizada das pressões para o modelo do subsistema hidráulico de 4ª ordem:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{signal}(\mathbf{u}_v)) \mathbf{u}_v - \mathbf{F}_a(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_a(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_b = -\mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{signal}(\mathbf{u}_v)) \mathbf{u}_v + \mathbf{F}_b(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_b(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \quad (4.28)$$

onde,

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{signal}(\mathbf{u}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} K_a g_{ai}(p_{ai}, \text{signal}(u_{vi})) \right] \quad (4.29)$$

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{signal}(\mathbf{u}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} K_b g_{bi}(p_{bi}, \text{signal}(u_{vi})) \right] \quad (4.30)$$

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} A_{ai} \right] \quad (4.31)$$

$$\mathbf{F}_b(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} A_{bi} \right] \quad (4.32)$$

$$\mathbf{D}_a(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \right] \quad (4.33)$$

$$\mathbf{D}_b(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{bi}(\tilde{l}_{bi} - y_{ci}) + V_{tubi}} \right] \quad (4.34)$$

As equações (4.29) a (4.34) são semelhantes às do modelo de 6ª ordem, no entanto, (4.29) e (4.30) dependem das constantes hidráulicas e dos sinais das tensões de comando.

Substituindo-se as equações (4.27) e (4.28) em (4.25) obtém-se $\dot{\mathbf{F}}_h$ em função das equações (4.29) a (4.34), como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_h = & \left[\mathbf{A}_a \mathbf{E}_a(\mathbf{q}, \mathbf{p}_a, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) + \mathbf{A}_b \mathbf{E}_b(\mathbf{q}, \mathbf{p}_b, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) \right] \mathbf{u}_v - \dots \\ & \left[\mathbf{A}_a \mathbf{F}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{A}_b \mathbf{F}_b(\mathbf{q}) \right] \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \left[\mathbf{A}_a \mathbf{D}_a(\mathbf{q}) + \mathbf{A}_b \mathbf{D}_b(\mathbf{q}) \right] \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \end{aligned} \quad (4.35)$$

As equações (4.27) a (4.35) representam a dinâmica do subsistema hidráulico do manipulador, considerando o modelo não linear de 4ª ordem.

4.2.3 Generalização do modelo de 3ª ordem

O modelo de 3ª ordem é generalizado escrevendo-se a derivada da pressão de carga dada pela equação (3.82) na forma matricial juntamente com a relação (4.6), o que resulta em:

$$\dot{\mathbf{p}}_l = \mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) \mathbf{u}_v - \mathbf{F}_l(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_l(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_l) \quad (4.36)$$

onde $\mathbf{p}_l \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das pressões de carga, e os termos $\mathbf{E}_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{F}_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{D}_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes diagonais de funções não lineares, que são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \left(\frac{r_{Vi} + \alpha_{ci}^2}{r_{Vi}} \right) K_{li} g_{li}(p_{li}, \text{sin}(u_{vi})) \right] \quad (4.37)$$

$$\mathbf{F}_l(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \left(\frac{r_{Vi} + \alpha_{ci}^2}{r_{Vi}} \right) A_{ai} \right] \quad (4.38)$$

$$\mathbf{D}_l(\mathbf{q}) = \text{diag} \left[\frac{\beta_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \left(\frac{r_{Vi} + \alpha_{ci}}{r_{Vi}} \right) \right] \quad (4.39)$$

sendo,

$$K_{li} = \frac{\sigma_v K_a}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_{ci}^3}} \quad (4.40)$$

o coeficiente de vazão de comando do i -ésimo cilindro. A derivada do vetor de força hidráulica em relação ao tempo é dada por: $\dot{\mathbf{F}}_h = \dot{\mathbf{p}}_l^T \mathbf{A}_a$, ou ainda:

$$\dot{\mathbf{F}}_h = \mathbf{A}_a \mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) \mathbf{u}_v - \mathbf{A}_a \mathbf{F}_l(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_a \mathbf{D}_l(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_l) \quad (4.41)$$

Logo, as equações (4.36) a (4.41) representam a dinâmica do subsistema hidráulico do manipulador, quando o modelo não linear de 3ª ordem é considerado.

4.3 ACOPLAMENTO DOS MODELOS DOS SUBSISTEMAS

Considerando as dinâmicas dos subsistemas mecânico e hidráulico, representadas pelas equações (4.9) e (4.41) (adotando o modelo generalizado de 3ª ordem do subsistema hidráulico), respectivamente, que são reescritas a seguir:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_h = \mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{D}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.42)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_h = \mathbf{A}_a \mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{signal}(\mathbf{u}_v))\mathbf{u}_v - \mathbf{A}_a \mathbf{F}_l(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_a \mathbf{D}_l(\mathbf{q})\mathbf{C}_{in}\Delta\mathbf{p}(\mathbf{p}_l) \quad (4.43)$$

Em relação ao sistema global do manipulador, este pode ser interpretado como um subsistema mecânico, atuado por uma força hidráulica $\mathbf{F}_h$, que é gerada pelo subsistema hidráulico. Esta força surge devido a diferença de pressão entre as câmaras do cilindro, quando uma tensão $\mathbf{u}_v$ é aplicada no solenoide (SANTOS, 2001a).

Analisando a equação (4.43), que representa a dinâmica do subsistema hidráulico, verifica-se que esta depende dos vetores de deslocamentos e velocidades angulares, $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$, do subsistema mecânico. Portanto, a atual representação transforma o sistema global do manipulador em dois subsistemas interconectados, como mostrado na Figura 52, para os vários modelos do subsistema hidráulico.

4.4 VERIFICAÇÃO DOS MODELOS ACOPLADOS

Nesta seção, a verificação dos modelos acoplados do manipulador é realizada através da comparação com um modelo de referência, criado com as ferramentas SimMechanics™ e SimHydraulics®, para modelagem de sistemas multicorpos e hidráulicos, respectivamente, em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a. As ferramentas que foram utilizadas fazem parte da biblioteca de modelagem do Simscape™, que reúne uma vasta quantidade de modelos matemáticos pré-definidos, que permitem ao usuário uma modelagem fisicamente interpretativa. Este método de verificação foi adotado, devido a capacidade das ferramentas computacionais dedicadas à modela-

gem de sistema dinâmicos, em representar a resposta do sistema real, como é demonstrado em Kiliç (2009). Na Figura 53 é ilustrado o modelo de referência, criado com as ferramentas SimMechanics™ e SimHydraulics® do Simscape™.

Figura 52 - Diagramas de blocos dos modelos acoplados do manipulador. (a): Modelo acoplado com a dinâmica de 6ª ordem para o subsistema hidráulico; (b): Modelo acoplado com a dinâmica de 4ª ordem para o subsistema hidráulico; (c): Modelo acoplado com a dinâmica de 3ª ordem para o subsistema hidráulico.

Fonte: o autor.

Figura 53 - Modelo acoplado de referência criado com o Simscape™.

Fonte: o autor.

4.4.1 Simulação dos modelos acoplados

A comparação foi realizada em malha aberta, sendo que não foi considerado nenhum carregamento sobre o sistema, e nem os vazamentos do subsistema hidráulico. Nas simulações, o sinal considerado para a tensão de comando u_v foi do tipo descontínuo, como ilustrado na Figura 54, onde t_0 é o instante de início de tempo do primeiro degrau, t_i é o instante final do primeiro degrau e o instante inicial do segundo degrau, e t_f é o instante final do segundo degrau; os termos $u_{máx}$ e $u_{mín}$ são os valores máximo e mínimo do segundo e do primeiro degrau, respectivamente. Um sinal semelhante foi utilizado por Jensen e Vad (2013) para a verificação do modelo de uma retroescavadeira hidráulica.

Figura 54 - Gráfico da tensão de comando para verificação dos modelos.

Fonte: adaptado de Jensen e Vad (2013).

Para as simulações foi considerado que o sinal ilustrado pela Figura 54 é aplicado simultaneamente em todos os atuadores do manipulador. Na Tabela 3 são reunidos os parâmetros utilizados para a tensão de comando.

Tabela 3 - Parâmetros da tensão de comando para verificação dos modelos acoplados.

Parâmetros da tensão de comando (u_v)		
Tensão máxima de comando ($u_{máx}$)	+ 0,50	[V]
Tensão mínima de comando ($u_{mín}$)	- 0,50	
Intervalo de tempo ($t_0 = t_i - t_0 = t_f - t_i = t_f - t_0$)	2,50	[s]

Fonte: o autor.

As simulações foram realizadas em ambiente MATLAB/Simulink© R2017a utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de integração no valor de $1 \cdot 10^{-3}$ s.

Os parâmetros do manipulador utilizados nas simulações apresentadas a seguir são reunidos no apêndice B.

As Figuras 55 a 58 mostram os gráficos dos deslocamentos angulares da base, lança, braço e caçamba, ou seja, θ_1 até θ_4 , respectivamente. E nas Figuras 59 a 62 são mostrados, nessa mesma ordem, os gráficos das velocidades angulares dessas mesmas juntas. Os gráficos das forças hidráulicas geradas pelos atuadores 1 a 4 são mostrados, respectivamente, pelas Figuras 63 a 66.

Figura 55 - Deslocamento angular da junta da base.

Fonte: o autor.

Figura 56 - Deslocamento angular da junta da lança.

Fonte: o autor.

Figura 57 - Deslocamento angular da junta do braço.

Fonte: o autor.

Figura 58 - Deslocamento angular da junta da caçamba.

Fonte: o autor.

Figura 59 - Velocidade angular da junta da base.

Fonte: o autor.

Figura 60 - Velocidade angular da junta da lança.

Fonte: o autor.

Figura 61 - Velocidade angular da junta do braço.

Fonte: o autor.

Figura 62 - Velocidade angular da junta da caçamba.

Fonte: o autor.

Figura 63 - Força hidráulica gerada pelo atuador 1.

Fonte: o autor.

Figura 64 - Força hidráulica gerada pelo atuador 2.

Fonte: o autor.

Figura 65 - Força hidráulica gerada pelo atuador 3.

Fonte: o autor.

Figura 66 - Força hidráulica gerada pelo atuador 4.

Fonte: o autor.

Nos gráficos dos deslocamentos e das velocidades angulares, bem como nos das forças hidráulicas, verifica-se uma boa correspondência entre os resultados dos modelos analíticos, com os resultados do modelo de referência. Nota-se boa correspondência mesmo depois do instante de tempo $t_i = 5\text{ s}$, onde ocorre a inversão do sinal da tensão de comando. Outro indício de uma boa representação da dinâmica do manipulador é obtido comparando os resultados deste capítulo com os apresentados em Jensen e Vad (2013) para o manipulador de uma retroescavadeira hidráulica. Isto indica a boa capacidade dos modelos analíticos em representar a dinâmica do manipulador, mediante as hipóteses simplificadoras adotadas na modelagem, que também foram consideradas no modelo de referência. No entanto, nos gráficos das velocidades angulares e das forças hidráulicas, verifica-se que o modelo de referência apresenta um comportamento um pouco mais amortecido na parte oscilatória em relação aos modelos analíticos. Isto ocorre porque no SimHydraulics® é utilizado um modelo semi-empírico para representar a variação do módulo de elasticidade volumétrica nas câmaras dos cilindros. Outro fator relevante para justificar esse comportamento é que o modelo utilizado para representar a válvula direcional no SimHydraulics® considera como parâmetro de modelo a área de vazamento interno da válvula, sendo que o valor desse parâmetro não pode ser considerado como nulo.

Em relação aos modelos analíticos, o modelo de 12ª ordem foi o que apresentou a maior eficiência para a implementação computacional, sem perda significativa da capacidade de representar a dinâmica do sistema. Portanto, esse modelo será utilizado na síntese do controlador do manipulador, bem como nas análises que se seguem neste capítulo.

4.5 MODELO LINEAR DO MANIPULADOR

Nesta seção, o modelo acoplado do manipulador de 12ª ordem será linearizado para que as características dinâmicas do sistema sejam estudadas. Primeiramente, é realizada a transformação do espaço das juntas para o espaço dos cilindros no modelo reduzido do subsistema mecânico, e o modelo obtido é linearizado. Em seguida, as equações do modelo do subsistema hidráulico de 3ª ordem são linearizadas. Posteriormente, os modelos linearizados de cada subsistema são acoplados, formando

assim o modelo acoplado linear do manipulador. Este modelo é colocado na forma de espaço de estados, e as suas funções de transferência são obtidas. Com o modelo linear, obtêm-se os pólos, ganhos, frequências naturais e coeficientes de amortecimento do sistema dinâmico, para o movimento retração dos cilindros, que é definido entre os limites do espaço de trabalho do manipulador.

4.5.1 Modelo do subsistema mecânico no espaço dos atuadores

Para realizar a transformação do espaço das juntas para o espaço dos atuadores no modelo reduzido do subsistema mecânico, reescrevem-se a seguir as equações (4.6), (4.7) e (4.9), que foram apresentadas anteriormente neste capítulo.

$$\dot{\mathbf{y}}_c = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.44)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_c = \dot{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_h = \mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{D}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.46)$$

Isolando-se $\dot{\mathbf{q}}$ da equação (4.44) obtém-se:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c \quad (4.47)$$

onde o sobrescrito $-T$ refere-se à inversa da transposta da matriz $\mathbf{J}$. De forma semelhante, isolando-se $\ddot{\mathbf{q}}$ da equação (4.45) vem que:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-T}(\ddot{\mathbf{y}}_c - \dot{\mathbf{J}}^T\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.48)$$

Substituindo-se a equação (4.47) em (4.48) chega-se em:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}^{-T}(\ddot{\mathbf{y}}_c - \dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c) \\ \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{J}^{-T}\ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c \end{aligned} \quad (4.49)$$

Substituindo-se as equações (4.47) e (4.49) em (4.46), e isolando-se $\mathbf{F}_h$ de (4.46) obtém-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_h &= \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}^*(\mathbf{J}^{-T}\ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{J}}^T\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c) + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{C}^*\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{G}^* + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{D}^* \\ \mathbf{F}_h &= \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}^*\mathbf{J}^{-T}\ddot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}^* - \mathbf{M}^*\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{J}}^T)\mathbf{J}^{-T}\dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{G}^* + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{D}^* \end{aligned} \quad (4.50)$$

Desta forma, o modelo do subsistema mecânico, representado no espaço dos cilindros, é dado por:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{y}_c) \ddot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) \dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{G}_{eq}(\mathbf{y}_c) + \mathbf{D}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.51)$$

onde,

$$\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{y}_c) = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{M}^*(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c)) \mathbf{J}^{-T} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{C}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) = \mathbf{J}^{-T} \left(\mathbf{C}^*(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c), \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{y}}_c)) - \mathbf{M}^*(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c)) \mathbf{J}^{-T} \dot{\mathbf{J}}^T \right) \mathbf{J}^{-T} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{G}_{eq}(\mathbf{y}_c) = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{G}^*(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c)) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{D}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) = \mathbf{F}_{at}(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c), \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{y}}_c)) \quad (4.55)$$

Nas equações (4.51) a (4.54) o argumento das matrizes é reintroduzido para mostrar que $\mathbf{q}$ pode ser escrito em função de $\mathbf{y}_c$, ou seja, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{y}_c)$. Nas matrizes $\mathbf{J}$ e $\dot{\mathbf{J}}$ o argumento não é reintroduzido para simplificar a notação, pois fica claro que $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c))$ e $\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}(\mathbf{y}_c), \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{y}}_c))$. Para escrever $\mathbf{q}$ em função de $\mathbf{y}_c$, utilizam-se as equações referentes à cinemática inversa dos cilindros, derivadas no capítulo 2.

4.5.2 Linearização do subsistema mecânico

O modelo da dinâmica do subsistema mecânico no espaço dos cilindros, e na forma de dinâmica direta, é expresso por:

$$\ddot{\mathbf{y}}_c = \mathbf{M}_{eq}^{-1} (\mathbf{F}_h - \mathbf{C}_{eq} \dot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{G}_{eq} - \mathbf{D}_{eq}) \quad (4.56)$$

Para realizar a linearização do modelo do subsistema mecânico, considera-se que as forças de centrípeta e de Coriolis são desprezíveis frente aos outros termos da equação (4.56), portanto, $\mathbf{C}_{eq} \dot{\mathbf{y}}_c \cong \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Considera-se ainda que no vetor $\mathbf{D}_{eq}$ somente os termos de atrito viscoso são relevantes, ou seja, $\mathbf{D}_{eq} \cong \mathbf{B}_v \dot{\mathbf{y}}_c$.

A partir das hipóteses simplificadoras adotadas, chega-se em:

$$\ddot{\mathbf{y}}_c = \bar{\mathbf{M}}_{eq}^{-1} (\mathbf{F}_h - \mathbf{B}_v \dot{\mathbf{y}}_c - \bar{\mathbf{G}}_{eq}) \quad (4.57)$$

onde os termos $\bar{\mathbf{M}}_{eq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{\mathbf{G}}_{eq} \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, a matriz de inércia e o vetor de força peso, no espaço dos cilindros, e calculados no ponto de operação.

Admitindo que o sistema trabalha em torno de um ponto de operação onde as variações dos estados são muito pequenas, desta forma, tem-se que: $\bar{\mathbf{G}}_{eq} \cong \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o que resulta em:

$$\ddot{\mathbf{y}}_c = \bar{\mathbf{M}}_{eq}^{-1} (\mathbf{F}_h - \mathbf{B}_v \dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.58)$$

A fim de possibilitar a criação de funções de transferência desacopladas, considera-se somente os termos da diagonal principal da matriz $\bar{\mathbf{M}}_{eq}$ na expressão anterior (SCHMIDT, 2014).

Logo, a equação (4.58) representa a dinâmica do subsistema mecânico, no espaço dos cilindros, e em torno de um ponto de operação.

4.5.3 Linearização do subsistema hidráulico

Inicia-se a linearização do modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico com a expansão em série de Taylor, até os termos de 1ª ordem, da equação da vazão de comando Q_l , obtida no capítulo 3. Posteriormente, a equação que representa a dinâmica da pressão de carga p_l é linearizada através da aproximação dos termos não lineares por seus valores calculados no ponto de operação.

4.5.3.1 Linearização da equação da vazão de comando

Expandindo a equação da vazão de comando em série de Taylor, até os termos de primeiro 1ª ordem, obtém-se que (SCHMIDT, 2014):

$$Q_l = Q_a = \alpha_c^{-1} Q_b \approx k_q u_v - k_{qp} p_l \quad (4.59)$$

com k_q e k_{qp} sendo, respectivamente, os coeficientes de vazão e pressão da válvula no ponto de operação, que são dados, respectivamente, por:

$$k_q = \left. \frac{\partial Q_l}{\partial u_v} \right|_{u_v = \bar{u}_v, p_l = \bar{p}_l} = \frac{\sigma_v K_v}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \begin{cases} \sqrt{p_s - \bar{p}_l - \alpha_c p_t} & \text{se } u_v \geq 0 \\ \sqrt{\alpha_c p_s + \bar{p}_l - p_t} & \text{se } u_v < 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

$$k_{qp} = \left. \frac{\partial Q_l}{\partial p_l} \right|_{u_v = \bar{u}_v, p_l = \bar{p}_l} = \frac{\sigma_v K_v \bar{u}_v}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{p_s - \bar{p}_l - \alpha_c p_t}} & \text{se } u_v \geq 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\alpha_c p_s + \bar{p}_l - p_t}} & \text{se } u_v < 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

onde $\bar{u}_v$ e $\bar{p}_l$ são, nessa mesma ordem, a tensão de controle e a pressão de carga no ponto de operação. A pressão de carga no ponto de operação é obtida a partir da força peso experimentada no cilindro, ou seja, $\bar{p}_l = \bar{G}_{eq}/A_a$, onde $\bar{G}_{eq}$ é a força peso no ponto de operação.

4.5.3.2 Linearização da dinâmica da pressão de carga

Reescreve-se a seguir a equação (3.83) referente a dinâmica da pressão de carga para o cilindro hidráulico:

$$\dot{p}_l = \lambda_l (Q_l - A_a \dot{y}_c) - \gamma_l C_{in} \Delta p \quad (4.62)$$

onde,

$$\lambda_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) \quad (4.63)$$

$$\gamma_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) \quad (4.64)$$

Desprezando-se a contribuição da pressão de suprimento e da pressão do tanque em Δp (escrito em função de p_l) ao redor do ponto de operação, obtém-se:

$$\dot{p}_l = \lambda_l (Q_l - A_a \dot{y}_c) - \gamma_l C_l p_l \quad (4.65)$$

onde C_l é o coeficiente de vazamento interno, relacionado à pressão de carga do cilindro. Este coeficiente é dado pela equação (4.66), que é obtida a partir de (3.80), desprezando-se a contribuição das pressões p_s e p_t em $\Delta p(p_l)$.

$$C_l = C_{in} \left(\frac{\sigma_v^2 + \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} \right) \quad (4.66)$$

Considerando-se a equação linearizada da vazão de comando, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= \lambda_l (Q_l - A_a \dot{y}_c) - \gamma_l C_l p_l \\ \dot{p}_l &= \lambda_l (k_q u_v - k_{qp} p_l - A_a \dot{y}_c) - \gamma_l C_l p_l \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ao analisar a equação (4.67), verifica-se que λ_l e γ_l são os únicos termos não lineares nessa expressão. Desta forma, admitindo-se que as variações dos estados são pequenas em torno do ponto de operação, pode-se então substituir os termos λ_l e γ_l pelos seus valores no ponto de operação, que são dados, respectivamente, por:

$$\bar{\lambda}_l = \frac{\beta_e}{\bar{V}_a} \left(\frac{\bar{r}_v + \alpha_c^2}{\bar{r}_v} \right) \quad (4.68)$$

$$\bar{\gamma}_l = \frac{\beta_e}{\bar{V}_a} \left(\frac{\bar{r}_v + \alpha_c}{\bar{r}_v} \right) \quad (4.69)$$

com,

$$\bar{r}_v = \frac{\bar{V}_b}{\bar{V}_a} = \frac{A_a \bar{l}_a + V_{tub}}{A_b \bar{l}_b + V_{tub}} \quad (4.70)$$

onde $\bar{l}_a$ e $\bar{l}_b$ são, respectivamente, os comprimentos, no ponto de operação, das câmaras a e b do cilindro. Assim, a equação linearizada da dinâmica da pressão de carga fica na forma expressa a seguir:

$$\dot{p}_l = \bar{\lambda}_l (k_q u_v - k_{qp} p_l - A_a \dot{y}_c) - \bar{\gamma}_l C_l p_l \quad (4.71)$$

Generalizando-se a equação (4.71) para $i = 1, \dots, n$ atuadores, obtém-se que:

$$\dot{\mathbf{p}}_l = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_l (\mathbf{K}_q \mathbf{u}_v - \mathbf{K}_{qp} \mathbf{p}_l - \mathbf{A}_a \dot{\mathbf{y}}_c) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_l \mathbf{C}_l \mathbf{p}_l \quad (4.72)$$

com $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_l \in \Re^{n \times n}$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_l \in \Re^{n \times n}$, $\mathbf{K}_q \in \Re^{n \times n}$, $\mathbf{K}_{qp} \in \Re^{n \times n}$ e $\mathbf{C}_l \in \Re^{n \times n}$ sendo matrizes diagonais.

4.5.4 Modelo acoplado linear

Com a relação entre força hidráulica e pressão de carga, ou seja, $\mathbf{F}_h = \mathbf{A}_a \mathbf{p}_l$, o modelo acoplado do manipulador, linearizado em torno do ponto de operação, é:

$$\ddot{\mathbf{y}}_c = \bar{\mathbf{M}}_{eq}^{-1} (\mathbf{A}_a \mathbf{p}_l - \mathbf{B}_v \dot{\mathbf{y}}_c) \quad (4.73)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_l = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_l (\mathbf{K}_q \mathbf{u}_v - \mathbf{K}_{qp} \mathbf{p}_l - \mathbf{A}_a \dot{\mathbf{y}}_c) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_l \mathbf{C}_l \mathbf{p}_l \quad (4.74)$$

As equações (4.73) e (4.74) representam, respectivamente, os modelos linearizados do subsistemas mecânico e hidráulico do manipulador.

4.5.4.1 Modelo acoplado linearizado na forma de espaço de estados

O modelo acoplado linearizado pode ser representado na forma de espaço de estados. Para tanto, considera-se que a entrada de controle é dada por: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_v$ com $\mathbf{u}_v \in \Re^n$, e que seu vetor de estados é expresso por: $\mathbf{x} = [\mathbf{y}_c \quad \dot{\mathbf{y}}_c \quad \mathbf{p}_l]^T$, com $\mathbf{y}_c \in \Re^n$, $\dot{\mathbf{y}}_c \in \Re^n$ e $\mathbf{p}_l \in \Re^n$. Desta forma, obtém-se a seguinte representação da dinâmica para o sistema (OGATA, 2010):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.75)$$

onde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são as chamadas matrizes de estado, e $\mathbf{y}$ é o vetor de saídas do sistema (OGATA, 2010).

Isolando-se os estados e a entrada de controle do sistema das equações (4.73) e (4.74) obtém-se, respectivamente, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{M}}_{eq}^{-1}\mathbf{B}_v & \bar{\mathbf{M}}_{eq}^{-1}\mathbf{A}_a \\ \mathbf{0} & -\bar{\lambda}_l\mathbf{A}_a & -\bar{\lambda}_l\mathbf{K}_{qp} - \bar{\gamma}_l\mathbf{C}_l \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\lambda}_l\mathbf{K}_q \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

onde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ e $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

As matrizes $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são expressas, nessa mesma ordem e para efeito de simulação, pelas equações a seguir:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (4.79)$$

sendo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$.

Obtidas as matrizes de estado do sistema pode-se determinar os pólos do modelo linear em qualquer ponto do espaço de trabalho do manipulador.

4.5.4.2 Funções de transferência do modelo linear

As funções de transferência de um modelo dinâmico do tipo linear são obtidas com suas matrizes de estado, através da seguinte expressão (OGATA, 2010):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.80)$$

com s sendo a variável de Laplace.

Substituindo-se as matrizes de estados que foram obtidas anteriormente na equação (4.80), chega-se em:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{y_c}(s) & \mathbf{G}_{\dot{y}_c}(s) & \mathbf{G}_{p_l}(s) \end{bmatrix}^T \quad (4.81)$$

onde $\mathbf{G}_{y_c} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{G}_{\dot{y}_c} \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{G}_{p_l} \in \mathbb{R}^4$ são as funções de transferência, na forma matricial, dos deslocamentos, velocidades e pressões de carga dos cilindros, respectivamente. A fim de simplificar a notação, considera-se o caso escalar para a coleção dos termos da equação (4.81), logo, as equações a seguir são referentes ao i -ésimo cilindro hidráulico.

$$G_{y_c}(s) = \frac{\bar{\lambda}_l A_a K_q}{\bar{M}_{eq} s^3 + (\bar{\lambda}_l \bar{M}_{eq} (K_{qp} + C_l) + B_v) s^2 + \bar{\lambda}_l (A_a^2 + B_v (K_{qp} + C_l)) s} \quad (4.82)$$

$$G_{\dot{y}_c}(s) = \frac{\bar{\lambda}_l A_a K_q}{\bar{M}_{eq} s^2 + (\bar{\lambda}_l \bar{M}_{eq} (K_{qp} + C_l) + B_v) s + \bar{\lambda}_l (A_a^2 + B_v (K_{qp} + C_l))} \quad (4.83)$$

$$G_{p_l}(s) = \frac{\bar{\lambda}_l K_q (\bar{M}_{eq} s + B_v)}{\bar{M}_{eq} s^2 + (\bar{\lambda}_l \bar{M}_{eq} (K_{qp} + C_l) + B_v) s + \bar{\lambda}_l (A_a^2 + B_v (K_{qp} + C_l))} \quad (4.84)$$

com $\bar{M}_{eq}$ sendo o termo da diagonal principal de $\bar{\mathbf{M}}_{eq}$ referente ao i -ésimo cilindro hidráulico. Ressalta-se que para a obtenção das funções de transferência, foi considerado que $\bar{\lambda}_l \cong \bar{\gamma}_l$. Tal simplificação se justifica pois diminui significativamente o tamanho das funções de transferência, e acarreta em um erro relativamente pequeno.

A seguir são determinados o ganho da planta, K , a frequência natural, ω_n , e o coeficiente de amortecimento, ζ , relativos ao i -ésimo cilindro, reescrevendo-se a equação (4.82) na seguinte forma (SCHMIDT, 2014):

$$G_{y_c}(s) = \frac{1}{s} \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.85)$$

onde,

$$K = \frac{A_a k_q}{A_a^2 + B_v (k_{qp} + C_l)} \quad (4.86)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_l (A_a^2 + B_v (k_{qp} + C_l))}{\bar{M}_{eq}}} \quad (4.87)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\bar{\lambda}_l \bar{M}_{eq} (k_{qp} + C_l) + B_v}{\sqrt{\bar{\lambda}_l \bar{M}_{eq} (A_a^2 + B_v (k_{qp} + C_l))}} \quad (4.88)$$

Na próxima seção, as equações do modelo linear do manipulador serão utilizadas para a análise das propriedades dinâmicas do sistema.

4.5.5 Simulação do modelo acoplado linear

Essa seção é dedicada à apresentação dos resultados da análise do modelo linear do manipulador. Para tanto, as equações do modelo linear do manipulador foram implementadas no MATLAB® R2017a. Os parâmetros utilizados nas simulações apresentadas a seguir são reunidos no apêndice B.

Na linearização do modelo, a posição neutra das válvulas foi escolhida, ou seja, $\bar{x}_{vi} = 0$, portanto, $\bar{u}_{vi} = 0$. Em relação aos estados, o ponto de operação foi variado em função do comprimento dos cilindros.

A Figura 67 mostra a resposta do modelo linear do manipulador em torno do ponto de operação. Nessa simulação, um sinal do tipo impulso unitário foi tomado como a tensão de comando aplicada nas válvulas. Nas Figuras 68, 69 e 70 são mostrados, respectivamente, os ganhos em regime, as frequências naturais, e os coeficientes de amortecimento do modelo linear do manipulador. Esses gráficos são obtidos com as equações (4.86), (4.87) e (4.88), respectivamente, para o movimento de retração dos cilindros. Por fim, nas Figuras 71 e 72 são mostrados os pólos do modelo linearizado do manipulador, também para o movimento de retração.

Figura 67 - Resposta do modelo linear ao impulso unitário.

Fonte: o autor.

Figura 68 - Ganhos das funções de transferência do modelo linear.

Fonte: o autor.

Figura 69 - Frequências naturais do modelo linear.

Fonte: o autor.

Figura 70 - Fatores de amortecimento do modelo linear.

Fonte: o autor.

Figura 71 - Pólos da velocidade linear dos cilindros.

Fonte: o autor.

Figura 72 - Pólos da pressão de carga dos cilindros.

Fonte: o autor.

Nos gráficos dos deslocamentos dos cilindros hidráulicos, verifica-se um comportamento tipicamente subamortecido para o sistema. Este comportamento pode ser confirmado nos gráficos dos fatores de amortecimento do sistema.

Os gráficos dos ganhos da planta mostram que a relação entre o deslocamento dos cilindros e a tensão de controle aplicada nas válvulas é pequena. Indicando, assim, que elevadas tensões de comando podem provocar baixos deslocamentos lineares em alguns pontos do espaço de trabalho.

Nos gráficos das frequências naturais, observa-se que o manipulador pode ser excitado com mais facilidade nas posições de extensão completa dos cilindros. Analisando-se a equação (4.87) conclui-se que isso ocorre porque a rigidez hidráulica nessas posições é menor em relação aos outros pontos do espaço de trabalho que foram analisados.

Em relação ao modelo linear, verifica-se que os pólos dos deslocamentos lineares dos cilindros são marginais (localizados na origem do plano complexo), e que os pólos das velocidades lineares e das pressões de carga são complexos conjugados, com parte real negativa. Sendo assim, nos pontos analisados, pode-se afirmar que o sistema é estável. Ainda em relação a esses gráficos, percebe-se que os pólos das

velocidades lineares e das pressões de carga possuem parte imaginária alta, o que acarreta no comportamento oscilatório na resposta do sistema. Nota-se ainda que esses pólos são relativamente próximos no eixo real. Isto indica um forte acoplamento entre a dinâmica dos subsistemas do manipulador. Portanto, no controle, os modelos de ambos os subsistemas do manipulador devem ser considerados.

4.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo, os modelos do subsistema mecânico e do subsistema hidráulico foram colocados na forma matricial e, em seguida, acoplados. Os modelos acoplados foram simulados e os resultados obtidos foram comparados com os de um modelo de referência, criado a partir de um *software* comercial para modelagem de sistemas dinâmicos. Na comparação, todos os modelos analíticos apresentaram bons resultados, o que indica a capacidade dos modelos desenvolvidos em representar a dinâmica do manipulador, mediante as hipóteses simplificadoras adotadas na modelagem. Nas simulações, verificou-se que o modelo acoplado de 12ª ordem foi o mais eficiente para implementação computacional, portanto, esse modelo foi escolhido para a síntese do controlador do manipulador e para as análises que se seguiram no capítulo.

A fim de analisar as características dinâmicas do manipulador, o modelo acoplado de 12ª ordem foi utilizado para a derivação do modelo linear do sistema. A análise do modelo linear revelou que o manipulador apresenta um comportamento subamortecido e, que em algumas posições do espaço de trabalho, este pode ser facilmente excitado, sendo que elevadas tensões de comando são necessárias para controlá-lo. Também foi verificado que o acoplamento entre as dinâmicas dos subsistemas do manipulador é forte e, portanto, não pode ser desprezado na síntese do controlador. Essas verificações indicam preliminarmente que será necessário empregar técnicas de controle avançadas na síntese do controlador do sistema.

5 CONTROLE DO MANIPULADOR

Neste capítulo é apresentado o algoritmo do controle em cascata que será aplicado ao manipulador. Este algoritmo é fundamentado em uma metodologia de redução de ordem, a partir da qual define-se uma estratégia de controle em cascata, que consiste em dividir o sistema global em dois subsistemas, um mecânico e outro hidráulico, de tal forma que seja possível empregar uma lei de controle para cada subsistema. Em seguida, uma revisão das principais técnicas de controle linear e não linear é realizada, como forma de embasamento teórico para o projeto do controlador em cascata. Posteriormente, algumas técnicas avançadas de controle são empregadas para a síntese dos controladores dos subsistemas, como forma de tornar o controlador em cascata mais eficiente.

5.1 TÉCNICA DE CONTROLE EM CASCATA

O controle em cascata é uma técnica de controle que explora propriedades estruturais dos sistemas dinâmicos, principalmente dos não lineares. O diagrama de blocos, mostrado na Figura 73, ilustra o sinal de controle u que entra apenas em uma parcela do sistema, denominado de subsistema ξ . Esta parcela pode agir tanto como o sinal de controle do subsistema z , quanto como uma perturbação externa, sendo que essa diferença depende do tipo de realimentação realizada (realimentação parcial ou total do estados).

Figura 73 - Estrutura de um sistema em cascata.

Fonte: adaptado de Santos (2001a).

Na realimentação parcial de estados, apenas a parcela ξ é utilizada para estabilizar o subsistema 1, não devendo afetar as propriedades de estabilidade do subsistema 2. Neste caso, ξ age como uma perturbação sobre o subsistema 2. Quando

a realimentação de estados é total, ξ é considerado como o sinal de controle do subsistema 2, enquanto que a lei de controle u deve ser projetada para estabilizar ambos os subsistemas (SANTOS, 2001a).

Para projetar a lei de controle u , considera-se um sistema dinâmico descrito pelas seguintes equações diferenciais não lineares:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + B_1 x_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \quad (5.2)$$

onde B_1 é uma matriz constante, $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $u \in \mathbb{R}^{n-m}$. Supondo que seja desejado um seguimento parcial dos estados, ou seja, que o estado x_1 siga uma dada referência x_{1d} .

Definindo os erros de seguimento como:

$$\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1d} \quad (5.3)$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2d} \quad (5.4)$$

e substituindo as equações (5.3) e (5.4) em (5.1) e (5.2) respectivamente, tem-se:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + B_1 x_{2d} + B_1 \tilde{x}_2 \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \quad (5.6)$$

Com base nas equações (5.5) e (5.6), percebe-se que o sistema descrito pelo vetor de estados $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, de dimensão n , pode ser interpretado como dois subsistemas conectados em série, onde o subsistema 1 (representado pela parcela x_1 do estado) tem como entrada de controle a parcela x_{2d} e está sujeito a uma perturbação representada por $\tilde{x}_2$. A técnica de controle em cascata consiste em controlar o subsistema 1 através de x_{2d} , de forma que x_1 siga x_{1d} , e controlar o subsistema 2 através de u , fazendo com que x_2 siga x_{2d} . Por este motivo, o projeto do controlador divide-se em dois passos:

- 1) Estabelecer uma lei de controle x_{2d} tal que forma que x_1 siga x_{1d} na presença de uma perturbação $\tilde{x}_2$;
- 2) Estabelecer uma lei de controle u tal que x_2 siga x_{2d} .

A seção seguinte mostra como esta metodologia pode ser aplicada ao manipulador da escavadeira hidráulica.

5.1.1 Controle em cascata para o manipulador

Como o manipulador é formado por um sistema hidráulico e um sistema mecânico, divide-se o sistema global em dois subsistemas, um mecânico e um hidráulico. Primeiro, projeta-se uma lei de controle que gere um sinal de controle para o subsistema mecânico, que é a força desejada $\mathbf{F}_{hd}$, de modo que os deslocamentos das juntas sigam a trajetória de referência o mais próximo possível. Em seguida, é criada uma lei de controle $\mathbf{u}_v$ para o subsistema hidráulico, que gere a força desejada $\mathbf{F}_{hd}$ para o subsistema mecânico.

Sendo $\mathbf{F}_{hd}$ o vetor de força hidráulica desejada, o vetor do erro de seguimento de força pode ser definido como:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{hd} = \mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{hd} \quad (5.7)$$

Com a equação (5.7), pode-se reescrever (4.42) e (4.43) como:

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_{hd} + \mathbf{d} = \mathbf{M}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{D}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.8)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_h = \mathbf{A}_a \mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{signal}(\mathbf{u}_v))\mathbf{u}_v - \mathbf{A}_a \mathbf{F}_l(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_a \mathbf{D}_l(\mathbf{q})\mathbf{C}_{in}\Delta\mathbf{p}(\mathbf{p}_l) \quad (5.9)$$

Deste modo, o sistema está no formato em cascata como definido nas equações (5.5) e (5.6), onde a equação (5.8) pode ser interpretada como um subsistema mecânico de 2ª ordem que é atuado pela força hidráulica desejada $\mathbf{F}_{hd}$, sujeita ao distúrbio $\mathbf{d} = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{F}}_h$.

Considerando o controle no espaço das juntas, aplicado ao seguimento da trajetória de referência, o projeto do controlador em cascata para o manipulador pode ser descrito em dois passos:

- 1) Definir uma lei de controle $\mathbf{F}_{hd}$ para o subsistema mecânico, para que a sua saída, representada pelo deslocamento das juntas $\mathbf{q}$, sigam uma trajetória de referência $\mathbf{q}_d$, mesmo na presença de incertezas e distúrbios;
- 2) Estabelecer uma lei de controle $\mathbf{u}_v$ para o subsistema hidráulico, de tal forma que $\mathbf{F}_h$ siga $\mathbf{F}_{hd}$ o mais próximo possível.

Na Figura 74 é apresentado o diagrama de blocos do controlado em cascata de um manipulador hidráulico.

Figura 74 - Diagrama de blocos do controle em cascata para um manipulador hidráulico.

Fonte: adaptado de Santos (2001a).

5.2 REVISÃO DAS TÉCNICAS DE CONTROLE

Nesta seção, apresenta-se uma revisão das técnicas de controle que serão utilizadas no projeto dos controladores dos subsistemas mecânico e hidráulico do manipulador. As seguintes técnicas de controle serão apresentadas: 1) controle robusto linear, 2) controle por impedância, 3) linearização por realimentação, e 4) controle não linear por modos deslizantes.

5.2.1 Controle robusto linear

Os métodos de controle clássico são frequentemente aplicados para controlar sistemas do tipo multivariável devido à facilidade no projeto dos controladores. O controle clássico do tipo escalar, baseado na formatação de funções de transferência em malha aberta, embora já tenha mostrado sua eficácia, e sendo muito aplicado na indústria, não garante condições de estabilidade e desempenho robustos para sistemas do tipo multivariável. Caso o sistema apresente incertezas, perturbações e ruídos nas

variáveis observadas, os objetivos de controle podem ser comprometidos. Geralmente, as técnicas de controle robusto são aplicadas para garantir estabilidade e desempenho mesmo na presença de distúrbios, ruídos e de dinâmicas não-modeladas. Essas técnicas de controle consistem na formatação de funções de transferência que são características do sistema em malha fechada.

5.2.1.1 Sistema dinâmico linear

Considerando um sistema não linear que foi linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, este sistema pode ser representado na forma convencional de espaço de estados que é mostrada a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{5.10}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado do sistema, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entradas de controle e $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de saídas ou de estados observados, e os termos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, e $\mathbf{D}$ são as matrizes de estado. Estas já foram definidas previamente no capítulo 4.

As equações anteriores podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}\tag{5.11}$$

Tem-se que a resposta temporal do sistema dinâmico é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{5.12}$$

onde $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados no instante de tempo $t = t_0$.

Para sistemas causais com $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \in \mathfrak{R}^m$, considerando $\forall t_1 \geq t_0$ e $\forall t \geq t_0$, a solução da equação (5.10) fica sendo dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_1)\mathbf{x}(t_1)\tag{5.13}$$

com $\Phi(t, t_1)$ sendo a matriz de transição de estados, que é expressa a seguir:

$$\Phi(t, t_1) = e^{\mathbf{A}(t-t_1)}\tag{5.14}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace ao sistema de equações (5.10) e considerando condições iniciais nulas, desta forma, determina-se a matriz de funções de transferência entre $\mathbf{U}(s)$ e $\mathbf{Y}(s)$ como sendo:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (5.15)$$

ou ainda,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (5.16)$$

Considere-se a transformada inversa de Laplace de $\mathbf{G}(s)$, que é dada por:

$$\mathbf{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{G}(s)\} \quad (5.17)$$

Segundo Donha (2006), esta transformada é obtida introduzindo-se uma matriz de impulsos unitários como entrada de $\mathbf{G}(s)$.

A relação entre a entrada e saída no domínio do tempo pode ser obtida para condições iniciais quiescentes através da integral de convolução:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t) * \mathbf{u}(t) \triangleq \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

A relação expressa pela equação (5.15) poderia ser obtida aplicando-se diretamente a transformada de Laplace à equação (5.18). Se a entrada for um impulso unitário, a saída é a própria função $\mathbf{g}(t)$, ou seja:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } t \leq 0 \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

onde $\delta(t)$ é a função impulso unitário que satisfaz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (5.20)$$

Em controle avançado, é comum a utilização da seguinte notação para representar a matriz de função de transferência $\mathbf{G}(s)$, cuja realização no espaço de estado, segundo Zhou (1999), é dada pela quádrupla ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, e $\mathbf{D}$):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (5.21)$$

Pode-se realizar a distinção entre variáveis de estado controladas $\mathbf{z}(t)$ e variáveis de estado observadas $\mathbf{y}(t)$, pois nem sempre $\mathbf{z} \equiv \mathbf{y}$. O vetor de sinais exógenos e ruídos é $\mathbf{w}(t)$. Desta forma, a notação em espaço de estados fica como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{5.22}$$

ou então,

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(s) & \mathbf{G}_2(s) \\ \mathbf{G}_3(s) & \mathbf{G}_4(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right]\tag{5.23}$$

5.2.1.2 Controlabilidade e observabilidade

Para verificar a controlabilidade de um sistema linear de ordem n , recorre-se a matriz de controlabilidade $\mathbf{M}_C$, construída com o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$. Segundo Zhou, Doyle e Glover (1995), o sistema linear é dito controlável, se e somente se, a sua matriz de controlabilidade tiver posto n , ou seja, possuir n colunas linearmente independentes. Tal matriz é dada por:

$$\mathbf{M}_C = [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}_2]\tag{5.24}$$

A fim de verificar a observabilidade de um sistema linear de ordem n , utiliza-se a matriz de observabilidade $\mathbf{M}_O$, obtida com o par $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$. O sistema é dito observável, se e somente se, a sua matriz de observabilidade possuir posto n , isto é, tiver n colunas linearmente independentes (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995). A matriz de observabilidade é escrita a seguir:

$$\mathbf{M}_O = [\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_2\mathbf{A} \quad \mathbf{C}_2\mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{n-1}]^T\tag{5.25}$$

Pode-se colocar que a controlabilidade indica a possibilidade de trazer os estados do sistema, de uma configuração qualquer, até à origem (vetor estados nulo), num intervalo finito de tempo, através de uma ação de controle adequada. De forma análoga, a observabilidade indica a possibilidade de se determinar os componentes

do vetor de estados através das observações das saídas, entradas e conhecendo-se o modelo do sistema.

Em controle avançado é importante apresentar as seguintes definições que determinam a capacidade de estabilizar (estabilizabilidade) e detectar (detectabilidade) o sistema (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995), pois estas são menos restritivas que as definições de controlabilidade e observabilidade (FRIEDLAND, 1985).

➤ Estabilizabilidade

O sistema, ou o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ é estabilizável se existe um estado realimentado $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ que estabilize o sistema, ou seja, $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}$ é estável.

➤ Detectabilidade

O sistema, ou o par $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ é detectável se $\mathbf{A} + \mathbf{C}_2\mathbf{L}$ é estável para algum $\mathbf{L}$.

5.2.1.3 Tipos de incertezas

As incertezas que são presentes na planta ou modelo são oriundas de diversas fontes (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1998). Entre essas fontes destacam-se:

- 1) Existência de erros nos valores dos parâmetros do modelo ou os valores dos parâmetros são desconhecidos;
- 2) Parâmetros do modelo linear que variaram devido às não linearidades ou devido à variação do ponto de operação;
- 3) Erros associados aos sensores empregados no sistema;
- 4) Falta de conhecimento do modelo em altas frequências, onde as incertezas podem ultrapassar os ganhos da planta.

As fontes de incertezas do modelo linear podem ser divididas em dois tipos, incertezas estruturadas e não estruturadas, sendo que a seguir essas incertezas são descritas detalhadamente:

➤ Incerteza estruturada

Quando a origem e a localização da incerteza são conhecidas, pode-se tratá-la como uma incerteza estruturada. Um exemplo seria no caso em que a estrutura do modelo é completamente conhecida (inclusive em altas frequências), mas alguns de

seus parâmetros são incertos. Segundo Skogestad e Postlethwaite (1998), as incertezas paramétricas podem ser quantificadas assumindo-se que cada parâmetro incerto, a , é limitado por uma região, ou seja, $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$. Desta forma, o conjunto de valores que cada parâmetro incerto a pode assumir é dado por: $a = \bar{a}(1 + r_a \Delta_E)$, onde $\bar{a}$ é o valor médio do parâmetro incerto, $r_a = (a_{\max} + a_{\min}) / (a_{\max} - a_{\min})$ é a incerteza relativa do parâmetro, e Δ_E é um escalar que satisfaz $|\Delta_E| \leq 1$.

Figura 75 - Incertezas estruturadas.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

Na Figura 75 são ilustradas incertezas estruturadas no diagrama de blocos do sistema de controle.

➤ Incerteza não estruturada

Perturbações que dependem da frequência são um exemplo de incertezas não estruturadas. Neste tipo de incertezas, geralmente não há interesse em determinar a sua origem. No entanto, procura-se estabelecer seus limites superiores através de algum tipo de norma. As incertezas não estruturadas mais comuns são:

- Aditivas, modeladas por:

$$\mathbf{G}_\Delta = \mathbf{G} + \Delta_A \mathbf{W}_A, \quad (5.26)$$

- Multiplicativas na saída da planta, modeladas por:

$$\mathbf{G}_\Delta = (\mathbf{I} + \Delta_M \mathbf{W}_M) \mathbf{G} \quad (5.27)$$

Nas expressões anteriores, têm-se que $\mathbf{G}_\Delta$ e $\mathbf{G}$ são a planta real e a planta nominal, respectivamente; Δ_A e Δ_M são, nessa ordem, as incertezas aditivas e multiplicativas; já os termos $\mathbf{W}_A$ e $\mathbf{W}_M$ são, respectivamente, as magnitudes das incertezas

aditivas e multiplicativas. Para o pior caso possível, relativo a incertezas, é considerado que $\|\Delta_A\|_\infty = 1$ e $\|\Delta_M\|_\infty = 1$. Na Figura 76 são ilustradas incertezas aditivas e multiplicativas no diagrama blocos do sistema de controle.

Figura 76 - Incertezas não estruturadas. (a) Incertezas aditivas; (b) Incertezas multiplicativas.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

Existem outros tipos de incertezas que podem ser encontradas em Skogestad e Postlethwaite (1998).

5.2.1.4 Especificações e limitações de desempenho

Outro objetivo importante do controle, além de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, é satisfazer as especificações de desempenho. Para verificar se as especificações foram atendidas, utiliza-se a magnitude de alguns sinais ou funções de transferências envolvidos.

Pode-se verificar o desempenho de um sistema através de certas funções de transferência, sendo que um método alternativo de controle é oriundo da formatação, em malha fechada, de determinadas funções de transferência que envolvem a reali-

mentação negativa, como a função de sensibilidade, e a função de sensibilidade complementar (LUQUE, 2012). O método de formatação de malha fechada utilizado neste trabalho é o de sensibilidade mista.

Em controle avançado é usual a definição de diversas funções de transferência, ligadas à sensibilidade do sistema (DONHA, 2006). Para tanto, considera-se o diagrama de blocos do sistema dinâmico com realimentação negativa ilustrado pela Figura 77.

Figura 77 - Diagrama de blocos do sistema de controle genérico com realimentação negativa.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

onde $\mathbf{K}(s)$ e $\mathbf{G}(s)$ são, respectivamente, as funções de transferência do controlador e da planta do sistema (modelo do processo); $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{u}(s)$ e $\mathbf{y}_v(s)$ são, nessa mesma ordem, os sinais de referência, controle e da saída verdadeira do sistema.

A seguir são definidas as funções de sensibilidade $\mathbf{S}$, de sensibilidade complementar $\mathbf{T}$, e de sensibilidade do controlador $\mathbf{C}$ (DONHA, 2006):

$$\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{GK}(s))^{-1} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}(s) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{KS}(s) \quad (5.30)$$

No caso escalar, a formatação da função de sensibilidade, $\mathbf{S}$, é semelhante à de um filtro passa alta, rejeitando distúrbios de baixa frequência e garantindo um bom acompanhamento do sinal de referência. Já a formatação da função de sensibilidade complementar, $\mathbf{T}$, é parecida à de um filtro passa-baixa, rejeitando os ruídos de alta frequência, provenientes dos sensores e garantindo a estabilidade robusta na presença de incertezas de modelagem. A formatação da função de sensibilidade do controlador, $\mathbf{C}$, assemelha-se à de um filtro passa-alta, limitando a ação de controle na largura de banda do sistema (LUQUE, 2012).

Para o caso multivariável, a formatação das funções de sensibilidade é realizada através dos valores singulares máximos ($\bar{\sigma}$). Sabe-se que a forma das funções de sensibilidade têm um impacto direto sobre o desempenho e podem ser sumarizados como abaixo (DONHA, 2006; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1998):

Para **S** e **T** em baixas frequências:

- 1) $\bar{\sigma}(\mathbf{S})$ pequeno $\Rightarrow$ rejeição de distúrbios;
- 2) $\bar{\sigma}(\mathbf{T}) \approx 1 \Rightarrow$ acompanhamento do sinal de referência.
- 3) Para **S**, **T** e **C** em altas frequências:
- 4) $\bar{\sigma}(\mathbf{T})$ pequeno $\Rightarrow$ atenuação de ruídos;
- 5) $\bar{\sigma}(\mathbf{C})$ pequeno $\Rightarrow$ controle barato;
- 6) $\bar{\sigma}(\mathbf{T})$ pequeno $\Rightarrow$ RE na presença de incerteza multiplicativa e
- 7) $\bar{\sigma}(\mathbf{C})$ pequeno $\Rightarrow$ RE na presença de incerteza aditiva.

Não se utiliza a formatação da função de transferência de malha $\mathbf{L} = \mathbf{KG}$, como estratégia para sintetizar o controlador. No entanto, apresentam-se também os requisitos para esta função, que são bastante úteis na análise o projeto (LUQUE, 2012):

Para **L** em baixas frequências:

- 1) $\bar{\sigma}(\mathbf{L})$ grande $\Rightarrow$ acompanhamento do sinal de referência e
- 2) $\bar{\sigma}(\mathbf{L})$ grande $\Rightarrow$ rejeição de distúrbios.
- 3) Para **L** em altas frequências:
- 4) $\bar{\sigma}(\mathbf{L})$ pequeno $\Rightarrow$ atenuação de ruídos;
- 5) $\bar{\sigma}(\mathbf{K})$ pequeno $\Rightarrow$ rejeição de distúrbios;
- 6) $\bar{\sigma}(\mathbf{L})$ pequeno $\Rightarrow$ RE na presença de incerteza multiplicativa e
- 7) $\bar{\sigma}(\mathbf{K})$ pequeno $\Rightarrow$ RE na presença de incerteza aditiva.

A Figura 78 ilustra os requisitos de formatação para as funções de transferência de malha e para as funções de transferência de malha fechada. Verifica-se que o pior caso em altas frequências está associado com $\bar{\sigma}(\mathbf{L})$, enquanto que o pior caso em baixas frequências está relacionado com $\underline{\sigma}(\mathbf{L})$.

Figura 78 - Barreiras de robustez e especificações para as funções de sensibilidade do sistema.

Fonte: adaptado de Luque (2012).

Outra observação pertinente é que para o acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações e insensibilidade paramétrica, geralmente, estabelecem-se restrições em baixa frequência. A rejeição de ruídos provenientes dos sensores, minimiza a atividade de controle, e incertezas não estruturadas de modelagem impõem restrições em alta frequência. Na região de baixa frequência, acima da linha referente a 0 dB , tem-se:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)) \cong 1 / \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \quad (5.31)$$

e na região de alta frequência, verifica-se:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)) \cong \bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \quad (5.32)$$

5.2.1.5 Normalização

A normalização tem o objetivo de auxiliar na síntese de controladores para sistemas multivariáveis. Esta transformação diminui a diferença entre a magnitude dos estados controlados, tornando o máximo valor das saídas e das entradas unitário, facilitando assim a busca de parâmetros de controle (DONHA, 2006; LUQUE, 2012).

Para um sistema dinâmico linear, as suas matrizes de estado, na forma normalizada, são dadas por (LUQUE, 2012):

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{S}_x \mathbf{A} \mathbf{S}_x^{-1} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{S}_x \mathbf{B} \mathbf{S}_u^{-1} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{S}_y \mathbf{C} \mathbf{S}_x^{-1} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{S}_y \mathbf{D} \mathbf{S}_u^{-1} \quad (5.36)$$

onde $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_u$ e $\mathbf{S}_y$ são as matrizes de normalização dos estados, entradas e saídas, respectivamente. As matrizes são calculadas com os valores de saturação dos atuadores e do erro máximo de seguimento para cada estado do sistema (DONHA, 2006).

Na implementação do controlador, o processo inverso de normalização deve ser realizado para obter o controlador resultante:

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}_u^{-1} \mathbf{K}_n \mathbf{S}_u \quad (5.37)$$

onde $\mathbf{K}$ é o controlador do sistema e $\mathbf{K}_n$ é o controlador $\mathbf{H}_\infty$ normalizado encontrado pelo método da sensibilidade mista (LUQUE, 2012).

5.2.1.6 Estabilidade

A análise de estabilidade de sistemas multivariáveis pode ser realizada com o critério de Nyquist, sendo que para verificar a robustez da estabilidade neste caso, algumas considerações adicionais são necessárias (DONHA, 2006).

➤ Estabilidade robusta

Para ilustrar o problema de estabilidade robusta considera-se uma planta com incerteza multiplicativa $\|\Delta_M(j\omega)\|_\infty \leq 1$, para $\forall \omega$ na saída da planta, como mostrado na Figura 76 (b). Admita-se que em malha fechada o sistema possui estabilidade nominal, ou seja, o sistema é estável quando $\Delta_M(j\omega) = 0$, para $\forall \omega$.

A família de funções de transferência de malha aberta incertas é obtida a partir da função de transferência de malha nominal, e através da álgebra de diagrama de blocos, como mostra a expressão a seguir:

$$L_\Delta = G_\Delta K = (1 + \Delta_M W_M) GK = L + \Delta_M W_M L \text{ com } \|\Delta_M(j\omega)\|_\infty \leq 1, \text{ para } \forall \omega \quad (5.38)$$

Segundo o critério de Nyquist, a estabilidade robusta é alcançada se nenhum elemento de L_Δ contornar o ponto -1, como mostrado na Figura 79.

Na Figura 79 é ilustrado gráfico de Nyquist para um sistema escalar, sem perda de generalidade, com $\|W_M L\|$ sendo o raio de um disco ao redor de um membro nominal $L(j\omega_i)$, isto é, neste disco estão contidas todas as possíveis L_Δ para a frequência ω_i . Pela Figura 79 verifica-se que a distância entre o ponto -1 e o $L(j\omega_i)$ é dada por $|1 + L(j\omega_i)|$. Também é considerado que toda a família de funções de transferência de malha $L_\Delta(j\omega)$ é estável. Desta forma, o ponto -1, da Figura 79, não será envolvido mesmo ocorrendo incerteza da pior espécie ($\Delta_M = 1$), para o caso escalar, quando:

$$\begin{aligned} |W_M L| &< |1 + L| \\ \left| W_M \frac{L}{1 + L} \right| &< 1 \\ |W_M T| &< 1, \text{ para } \forall \omega \end{aligned} \quad (5.39)$$

Figura 79 - Estabilidade robusta para o caso escalar.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

e, de forma análoga, para o caso multivariável, quando:

$$\|\mathbf{W}_M \mathbf{T}\|_\infty < 1$$

$$\|\mathbf{T}\|_{\infty} < \|\mathbf{W}_M\|_{\infty}^{-1}, \text{ para } \forall \omega \quad (5.40)$$

Para alcançar a estabilidade robusta, da equação (5.40) obtém-se o seguinte limite superior para a função de sensibilidade complementar T :

- Caso escalar

$$|T| < |1/W_M| \quad (5.41)$$

- Caso multivariável

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M \mathbf{T}) &< 1 \\ \bar{\sigma}(\mathbf{T}) &< 1 / \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M), \text{ para } \forall \omega \end{aligned} \quad (5.42)$$

A condição acima é suficiente, porém não é necessária, desta forma, uma violação dessa condição não implica, necessariamente, a perda da estabilidade robusta, no entanto, segundo Skogestad e Postlethwaite (1998), se esta ocorrer, a estabilidade robusta estará garantida.

A equação (5.42) leva até à seguinte expressão para o caso multivariável:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}) < 1 / \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M), \text{ para } \omega \text{ em altas frequências} \quad (5.43)$$

De acordo com Luque (2012), uma prática comum é agrupar todos os efeitos de incertezas da planta em um único bloco multiplicativo fictício, desta forma, é possível trabalhar com a equação (5.42).

Em geral, têm-se que:

$$\|\mathbf{S}\|_{\infty} \text{ e } \|\mathbf{T}\|_{\infty} \text{ grandes} \Rightarrow \text{pouca estabilidade robusta} \quad (5.44)$$

$$\|\mathbf{S}\|_{\infty} \text{ e } \|\mathbf{T}\|_{\infty} \text{ pequenas} \not\Rightarrow \text{boa estabilidade robusta} \quad (5.45)$$

5.2.1.7 Desempenho

Normalmente, tem-se a estabilidade da malha fechada como o objetivo principal de controle, no entanto, outro objetivo igualmente relevante é a capacidade de manter um desempenho aceitável para o sistema. Na maioria dos casos, as perturbações determinam erros de regulação e de acompanhamento do sinal de referência, que tendem a crescer com a severidade das perturbações (LUQUE, 2012). Portanto,

o sistema em malha fechada acaba operando com um desempenho considerado inaceitável. Daí vem a necessidade de utilizar um teste de desempenho para o sistema (DONHA, 2003). Este teste tem como objetivo indicar a pior degradação de desempenho possível associada a um tipo de perturbação (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995). A máxima amplitude das funções de sensibilidade fornece bons indicativos de desempenho, sendo que segundo regras práticas, um bom desempenho, tipicamente apresenta (LUQUE, 2012):

$$\|S\|_{\infty} < 6 \text{ dB} \text{ e } \|T\|_{\infty} < 2 \text{ dB} \quad (5.46)$$

De uma forma geral, considera-se que um sistema controlado tem bom desempenho se este apresentar (LUQUE, 2012):

- Capacidade de seguir um sinal de referência com proximidade;
- Boa capacidade de recuperação frente a distúrbios externos;
- Boa resposta, mesmo com incertezas de modelagem;
- Boa rejeição a ruídos de medida na saída e no sinal de controle.

➤ Desempenho robusto

De acordo com Skogestad e Postlethwaite (1998), a condição de desempenho robusto, considerando o caso escalar, é dada por:

$$|W_S S| < 1 \text{ para } \forall S \text{ e } \forall \omega \quad (5.47)$$

$$|W_S| < |1 + L_{\Delta}| \text{ para } \forall L_{\Delta} \text{ e } \forall \omega \quad (5.48)$$

onde W_S é a função de ponderação da função de sensibilidade do sistema, ou seja, S . Para sistemas escalares, a derivação da condição de desempenho robusto pode ser realizada de forma gráfica, como é mostrado na Figura 80.

A fim de alcançar o desempenho robusto, é necessário que nenhum membro da família de funções incertas L_{Δ} cruze o disco de raio W_S com centro em -1. Logo, tem-se a seguinte condição:

$$|W_S| + |W_M L| < |1 + L| \text{ para } \forall \omega \quad (5.49)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (5.49) por $|S|$, obtém-se que:

$$|W_S S| + |W_M L S| < 1, \text{ para } \forall \omega \quad (5.50)$$

$$|W_S S| + |W_M T| < 1, \text{ para } \forall \omega \quad (5.51)$$

portanto,

$$\max_{\omega} (|W_S S| + |W_M T|) < 1 \quad (5.52)$$

Figura 80 - Desempenho robusto para o caso escalar.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

A equação (5.52) expressa a condição de desempenho robusto em termos das funções de sensibilidade. A seguir será apresentado a generalização de desempenho robusto, para o caso multivariável, considerando perturbação na saída, conforme foi exposto por Zhou, Doyle e Glover (1995). Para tanto, considere-se a Figura 76 (b) para o tipo de incertezas multiplicativas na saída, sendo $\mathbf{W}_M$ a função de ponderação que dá informação das incertezas Δ_M , $\mathbf{W}_S$ a função de ponderação da função de sensibilidade, $\mathbf{S}$ a função de sensibilidade, e $\mathbf{T}$ a função de sensibilidade complementar. Para sistemas multivariáveis, considerando o pior caso possível ($\|\Delta\|_{\infty} = 1$), tem-se que:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{W}_S \mathbf{S}) + \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M \mathbf{T}) \leq 1, \text{ para } \forall \omega \quad (5.53)$$

A equação (5.53) referente ao caso multivariável representa a generalização da expressão (5.52) relativa ao caso escalar (DONHA, 2006; LUQUE, 2012).

5.2.1.8 Formatação das funções de sensibilidade

Aqui são apresentados alguns métodos práticos para a formatação das funções de sensibilidade. Para sistemas escalares a aplicação desses métodos é direta, no entanto, para sistemas multivariáveis a dificuldade é maior (DONHA, 2006).

Pela Figura 81 (a) verifica-se que a formatação da função de sensibilidade S , é realizada a partir das especificações de desempenho e, segundo Zhou (1999), procurando-se atingir:

$$\begin{aligned} |S(s)| &\leq \left| \frac{s}{s/M_s + \omega_b} \right|, \quad s = j\omega \Rightarrow \forall \omega \\ |W_s S| &\leq 1, \quad W_s = \frac{s/M_s + \omega_{bs}}{s + \omega_{bs}\varepsilon_s} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Para uma realização prática, tem-se que:

$$W_s = \frac{s/M_s + \omega_{bs}}{s + \omega_{bs}\varepsilon_s} \quad (5.55)$$

onde M_s é limite do sobressinal, normalmente definido como 2 dB de amplitude, ω_{bs} é o limite de largura de banda do sistema, e ε_s facilita a implementação computacional do filtro W_s .

Através da Figura 81 (b), nota-se que a formatação da função de sensibilidade de custo do controlador C , é realizada da mesma maneira que no caso anterior, porém com a seguinte função de ponderação:

$$W_C = \frac{s + \omega_{bc}/M_u}{\varepsilon_c s + \omega_{bc}} \quad (5.56)$$

E pela Figura 81 (c), tem-se que para realizar a formatação da função de sensibilidade complementar T , utiliza-se a seguinte função de ponderação:

$$W_T = \frac{s + \omega_{bt}/M_t}{\varepsilon_t s + \omega_{bt}} \quad (5.57)$$

Para as funções de ponderações anteriores foi admitido que o canal ponderado é escalar. No caso multivariável é possível utilizar uma formatação por canal, no entanto, a busca de parâmetros é mais complexa (LUQUE, 2012).

Figura 81 - Ponderação das funções de sensibilidade. (a): Função de sensibilidade; (b) Função de sensibilidade do controlador; (c): Função de sensibilidade complementar.

Fonte: adaptado de Donha (2006) e Luque (2012).

5.2.1.9 Configuração de dois portos

Para o emprego de técnicas de controle avançado, a estrutura clássica de controle deve ser modificada. Essa nova estrutura é conhecida como configuração de dois portos (DONHA, 2006). Desta forma, após certa manipulação, o sistema adquire a configuração mostrada na Figura 82, onde têm-se:

- $\mathbf{w} = [\tilde{\mathbf{r}} \quad \tilde{\mathbf{d}}_i \quad \tilde{\mathbf{d}}_o \quad \tilde{\mathbf{n}}]^T$ como o vetor de sinais exógenos;
- $\mathbf{z} = [\tilde{\mathbf{e}} \quad \tilde{\mathbf{y}} \quad \tilde{\mathbf{u}}]^T$ como o vetor de sinais de saída controladas, e
- $\mathbf{P}$ como a planta generalizada, que possui cinco entradas ($\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$), e quatro saídas ($\mathbf{z}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$).

Figura 82 - Configuração genérica de dois portos.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

Verifica-se que a planta generalizada (estendida) $P(s)$ é composta pela planta nominal $G(s)$ e pelas funções de ponderação $W(s)$ e $R(s)$, como é ilustrado pela Figura 82. Segundo Skogestad e Postlethwaite (1998), este sistema também pode ser expresso na forma matricial, como é mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

onde $u = K(s)\varepsilon$ é a entrada de controle. Por fim, a realização em espaço de estados de $P(s)$ fica sendo dada pela seguinte expressão (DONHA, 2006):

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \quad (5.59)$$

5.2.1.10 Metodologia de sensibilidade mista

Segundo Skogestad e Postlethwaite (1998), sensibilidade mista é o nome dado ao problema de formatação das funções de sensibilidade S , T e C .

Pela Figura 82, verifica-se que S é a função de transferência entre o erro e o distúrbio externo d , sendo assim, $1/W_s$ terá forma semelhante a de um filtro passa-alta, e $1/W_C$ e $1/W_T$ terão formas semelhantes a de um filtro passa-baixa, como é mostrado pelas equações (5.55) a (5.57).

A função de sensibilidade representa a medida da sensibilidade do sistema a distúrbios. Considerando que os distúrbios do sistema ocorrem em baixas frequências, logo, estes serão minimizados se a norma de S for pequena nessa faixa de frequência. Na prática, também é necessário obter um bom acompanhamento do sinal de referência e mitigar a influência dos ruídos das medidas dos sensores. Geralmente, o sinal de referência é de baixa frequência e os ruídos de medição são sinais de alta frequência. A função de sensibilidade complementar mede a influência do sinal de referência e dos ruídos de medição na saída do sistema. Logo, para atingir os objetivos citados, a norma de T deve ser alta em baixas frequências e pequena em altas frequências. Assim, o objetivo da formatação fica sendo minimizar $W_S S$ e $W_T T$. Para tanto, realiza-se a construção da seguinte pilha (DONHA, 2006):

$$N_{zw} = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (5.60)$$

Se ainda for necessário diminuir a energia de controle e evitar a saturação e a fadiga dos atuadores, além da instabilização do sistema, o ganho de controle deve ser penalizado. Logo, a norma de C deve ser pequena. Portanto, o objetivo da formatação fica sendo minimizar $W_S S$, $W_T T$ e $W_C C$ com a seguinte pilha (DONHA, 2006):

$$N_{zw} = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_C C \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (5.61)$$

5.2.1.11 Controlador

A solução do problema de controle através da norma H_{∞} será exposta de forma sucinta nesta seção.

➤ Formulação do problema de controle

O problema de controle subótimo H_{∞} consiste, basicamente, em determinar um controlador $K(s)$ que estabilize o sistema de tal forma que a matriz de transferência $N(s)$ entre w e z , seja limitada superiormente pela norma H_{∞} . Para tanto, considera-se a configuração de dois portos mostrada na Figura 82, sendo que a equação a seguir representa a expressão formal do problema (LUQUE, 2012):

$$\|N\|_{\infty} \leq \gamma \quad (5.62)$$

com $\gamma \in \mathbb{R}^+$ sendo o valor subótimo obtido.

A seguir, são listadas as hipóteses consideradas para o controlador subótimo $\mathbf{H}_{\infty}$ (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1998):

- 1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2 \text{ e } \mathbf{C}_2)$ é estabilizável e detectável;
- 2) $\mathbf{D}_{12}$ e $\mathbf{D}_{21}$ têm posto completo;
- 3) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$ tem posto completo para $\forall \omega$;
- 4) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$ tem posto completo para $\forall \omega$;
- 5) $\mathbf{D}_{11} = 0$ e $\mathbf{D}_{22} = 0$;
- 6) $\mathbf{D}_{12} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^T$ e $\mathbf{D}_{21} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]$ têm posto completo;
- 7) $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T = \mathbf{0}$, e
- 8) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ é estabilizável e $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_1)$ detectável.

A hipótese 1 garante a existência de um controlador $\mathbf{K}$ que estabiliza o sistema, e 2 é uma condição, suficiente, para que os controladores sejam próprios e realizáveis. 3 e 4 garantem o cancelamento de pólos e zeros no eixo imaginário, que implicariam na instabilidade do sistema em malha fechada. 5 é hipótese convencional em controle $\mathbf{H}_2$ e utilizada em alguns casos de controle $\mathbf{H}_{\infty}$, e será adotada aqui por simplicidade. Nesta, $\mathbf{D}_{11} = 0$ implica que não há alimentação direta entre $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$, de tal forma que a função de transferência entre estas variáveis é estritamente própria, e $\mathbf{D}_{22} = 0$ implica que não há alimentação direta entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$, sendo assim, a função de transferência entre estas variáveis também é estritamente própria. Essa é uma hipótese desnecessária na maioria dos casos de controle $\mathbf{H}_{\infty}$. As igualdades da hipótese 6 são conseguidas geralmente através da normalização de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$, e com uma transformação unitária de $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$, que não tiram a generalidade do problema. E a hipótese 7 é comum em controle $\mathbf{H}_2$. Por fim, pode-se substituir as hipóteses 3 e 4 por 8, se 7 for verdadeira (LUQUE, 2012; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1998).

No geral, os algoritmos $\mathbf{H}_{\infty}$ encontram um controlador subótimo, tal que para um valor γ , encontra-se um controlador $\mathbf{K}$ que estabilize a matriz de transferência na

sua norma infinita ($\|\mathbf{N}\|_\infty \leq \gamma$). Obter um controlador $\mathbf{H}_\infty$ ótimo é complicado numericamente e teoricamente. Isto contrasta com a teoria $\mathbf{H}_2$ onde o controlador ótimo é único e pode ser encontrado através das equações de Riccati (LUQUE, 2012).

➤ Algoritmo geral do controlador

Tomando a configuração genérica de dois portos, a realização (5.22), e as hipóteses mencionadas na seção anterior, desta forma, pode-se afirmar que existe um controlador $\mathbf{K}(s)$ que estabiliza o sistema, de tal forma que $\|\mathbf{N}\|_\infty \leq \gamma$, se e somente se (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1998):

- 1) $\mathbf{X}_\infty$ é solução da equação de Riccati

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty = \mathbf{0} \quad (5.63)$$

tal que $\text{Re } \lambda_i \left[\mathbf{A} + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{X}_\infty \right] < 0, \forall i$ e

- 2) $\mathbf{Y}_\infty \geq \mathbf{0}$ é solução da equação de Riccati

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Y}_\infty = \mathbf{0} \quad (5.64)$$

tal que $\text{Re } \lambda_i \left[\mathbf{A} + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \right] < 0, \forall i$; e

- 3) $\rho(\mathbf{X}_\infty, \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$

Segundo Skogestad e Postlethwaite (1998), os controladores são determinados pela transformação linear fracionária, ou *linear fractional transformation* (LFT):

$$\mathbf{K} = F_l(\mathbf{K}_c, \mathbf{Q}) \quad (5.65)$$

onde,

$$\mathbf{K}_c(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.66)$$

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \quad (5.67)$$

$$\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T \quad (5.68)$$

$$\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1} \quad (5.69)$$

$$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 \quad (5.70)$$

sendo ρ o raio espectral, que corresponde ao maior autovalor do produto das soluções matriciais das equações de Riccati, e $\mathbf{Q}(s)$ é uma função de transferência própria e estável, tal que $\|\mathbf{Q}\|_{\infty} \leq \gamma$. Para $\mathbf{Q}(s) = \mathbf{0}$, tem-se que:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_{c11}(s) = -\mathbf{F}_{\infty}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\infty})^{-1}\mathbf{Z}_{\infty}\mathbf{L}_{\infty} \quad (5.71)$$

O controlador da expressão (5.71) é denominado de controlador central e tem o mesmo número de estados que a planta estendida $\mathbf{P}(s)$. Este controlador utiliza o princípio de separação, que fica explícito na seguinte expressão que separa o estimador de estados (DONHA, 2006):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_{\infty})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{Z}_{\infty}\mathbf{L}_{\infty}(\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (5.72)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\infty}\hat{\mathbf{x}} \quad (5.73)$$

Esta solução também é conhecida como solução DGKF pois foi resolvida por Doyle et al. (1989).

5.2.2 Controle por impedância

No controle por impedância é necessário regular a relação entre o movimento do efetuador e a força de interação com o meio, ao invés do seguimento de posição e força desejadas. Segundo Hogan (1985), o controle por impedância fornece uma abordagem unificada ao controle de movimento. Acredita-se que esse tipo de controle seja mais adequado às tarefas que envolvem o contato com o ambiente, no sentido de que é possível a sua aplicação em movimentos dos tipos livre e restrito, de modo que o mesmo controle seja aplicado durante todo o processo.

Duas abordagens práticas, muito comuns, são os controles por impedância baseados nas relações posição/força e força/posição (SALCUDEAN et al., 1998). O controle por impedância baseado na relação posição/força é formado por uma malha interna, referente à realimentação de posição, e por uma malha externa, relativa à realimentação de força. As informações dos sensores de força são utilizadas para modificar a posição desejada. De forma análoga, o controle por impedância baseado na relação força/posição consiste de uma malha interna, referente à realimentação de força, e uma malha externa, relativa à realimentação de posição. Nesta abordagem,

as informações dos sensores de posição são utilizadas para modificar a força de referência. As propriedades de estabilidade para os dois tipos de abordagem são especificadas em Lawrence et al. (1995).

5.2.2.1 Formulação do problema de controle por impedância

Hogan (1985) define impedância como um sistema que recebe como entrada algum tipo de fluxo (movimento, corrente elétrica, vazão) e tem como saída algum tipo de esforço (força, tensão elétrica, pressão). Analogamente, admitância fica definida como sendo um sistema que recebe como entrada algum tipo de esforço e tem algum tipo de fluxo como saída. Considerando a interação entre dois sistemas, ambos devem sempre se complementar, isto é, se um deles for uma impedância, obrigatoriamente o outro deverá ser uma admitância.

Para sistemas robóticos, o objetivo do controle por impedância é estabelecer uma relação dinâmica desejada entre a posição do efetuador e a força de contato que atua sobre ele, sendo que esta relação é referida como a impedância desejada. Seja x_d a trajetória desejada do efetuador, tipicamente, a impedância desejada é escolhida como um sistema linear de 2ª ordem do tipo massa-mola-amortecedor:

$$M_d \ddot{e}_p + B_d \dot{e}_p + K_d e_p = e_f \quad (5.74)$$

onde M_d , B_d e K_d são, respectivamente, inércia, amortecimento e rigidez desejadas, definidas como constantes positivas. O erro de posição, e_p , e o erro de força, e_f , são definidos, respectivamente, como:

$$e_p \triangleq x - x_d \quad (5.75)$$

$$e_f \triangleq F_e - F_d \quad (5.76)$$

sendo F_d a força desejada e F_e a força de interação com o meio. Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.74) obtém-se que:

$$(M_d s^2 + B_d s + K_d) e_p = e_f \quad (5.77)$$

ou ainda,

$$Z_d(s) e_p = e_f \quad (5.78)$$

onde s é a variável de Laplace, e $Z_d(s) = M_d s^2 + B_d s + K_d$ é a impedância desejada.

Substituindo as equações (5.75) e (5.76) em (5.74) chega-se em:

$$M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + B_d(\dot{x} - \dot{x}_d) + K_d(x - x_d) = F_e - F_d \quad (5.79)$$

e, portanto, a força desejada F_d é dada por:

$$F_d = F_e - M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) - B_d(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_d(x - x_d) \quad (5.80)$$

A Figura 83 ilustra o modelo de impedância de um manipulador, sem perda de generalidade, considerando a ação de uma força de contato resultante da interação do efetuador com o meio. Nesta, os parâmetros M_e , B_e e K_e são, respectivamente, a inércia, amortecimento e rigidez do meio. Estes não são considerados na expressão da força desejada F_d , para o cálculo da força de interação com o meio F_e , pois na abordagem apresentada é admitido que F_e pode ser medida.

Figura 83 - Modelo de impedância do manipulador com o ambiente.

Fonte: adaptado de Tafazoli et al. (2002).

Pode-se colocar que o controle de impedância consiste, basicamente, em direcionar, de forma assintótica, os estados do sistema a fim de implementar a impedância desejada $Z_d(s)$, mesmo na presença de incertezas e distúrbios. Se o erro de posição, e_p , tende a zero, então o erro de força, e_f , também tende a zero e vice-versa, de acordo com a relação dinâmica especificada pelos parâmetros M_d , B_d e K_d . Durante o movimento no espaço onde não há contato com o meio ambiente, tem-se que $F_d = F_e = 0$, então e_p tende a zero desde de que $Z_d(s) = M_d s^2 + B_d s + K_d$ seja estável. Logo, a escolha dos parâmetros M_d , B_d e K_d determinará o comportamento do sis-

tema. Quando o efetuador entra em contato com o ambiente, a interação é caracterizada pela impedância desejada $Z_d(s)$, que resulta no compromisso entre a redução de e_p e e_f . Se a posição do efetuador seguir a trajetória desejada, x_d , então a força de contato segue a força desejada ($F_e \rightarrow F_d$).

5.2.3 Linearização por realimentação

A linearização por realimentação é uma técnica de controle não linear que permite o cancelamento das não linearidades do sistema dinâmico, de tal forma que este passa a se comportar como um sistema linear estável em malha fechada. Para descrever esta técnica, considera-se um sistema não linear de ordem n com uma única entrada, expresso por:

$$\mathbf{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u \quad (5.81)$$

onde n é a ordem do sistema, $\mathbf{x}$ é o vetor de estados do sistema, sendo que $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T$ e x é o estado de interesse, u é o sinal de controle, e os termos $f(\mathbf{x}, t)$ e $b(\mathbf{x}, t)$ são funções não lineares.

A fim de realizar o seguimento de uma referência x_d , pelo estado x , a seguinte lei de controle para o sistema em malha fechada é considerada:

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x}, t)}(v - f(\mathbf{x}, t)) \quad (5.82)$$

onde $b(\mathbf{x}, t) \neq 0$, $v = x_d^{(n)} - k_0\tilde{x} - k_1\dot{\tilde{x}} - \dots - k_{n-1}\tilde{x}^{(n-1)}$, com $\tilde{x} = x - x_d$ sendo o erro de acompanhamento, e os parâmetros k_i são convenientemente escolhidos de tal forma que o polinômio $p^n + k_{n-1}p^{n-1} + \dots + k_0$ possua todas as suas raízes estritamente no semi-plano esquerdo do plano complexo. Para tal, os parâmetros k_i devem ser constantes positivas e definidas.

Substituindo a equação (5.82) em (5.81), obtém-se:

$$x^{(n)} = v$$

$$x^{(n)} = x_d^{(n)} - k_0\tilde{x} - k_1\dot{\tilde{x}} - \dots - k_{n-1}\tilde{x}^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} - x_d^{(n)} = -k_0\tilde{x} - k_1\dot{\tilde{x}} - \dots - k_{n-1}\tilde{x}^{(n-1)}$$

$$\tilde{x}^{(n)} = -k_0\tilde{x} - k_1\dot{\tilde{x}} - \dots - k_{n-1}\tilde{x}^{(n-1)}$$

$$\ddot{\tilde{x}}^{(n)} + k_0 \tilde{x} + k_1 \dot{\tilde{x}} + \dots + k_{n-1} \tilde{x}^{(n-1)} = 0 \quad (5.83)$$

A equação (5.83) representa a dinâmica do erro de acompanhamento do sistema em malha fechada. Verifica-se que o erro de acompanhamento converge exponencialmente para o valor nulo, ou seja, $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$.

Esta técnica só é válida se o modelo matemático do sistema, ou seja, as funções $f(\mathbf{x}, t)$ e $b(\mathbf{x}, t)$, forem conhecidas e livres de incertezas. No caso de sistemas com modelos incertos, a dinâmica em malha fechada dada pela equação (5.83) não será respeitada e essa técnica não é mais aplicável diretamente. Portanto, deve-se recorrer a outras técnicas, como a de controle por modos deslizantes.

5.2.4 Controle não linear por modos deslizantes

O objetivo da técnica de controle por modos deslizantes é reduzir o problema de controle de um sistema genérico de ordem n , descrito por equações diferenciais não lineares, para um sistema de 1ª ordem, com incertezas nos parâmetros e/ou no próprio modelo matemático. Assim, dado um sistema descrito por equações de estado, com a entrada sendo um termo descontínuo através de uma superfície definida no espaço de estado, a metodologia de SMC consiste em projetar uma lei de controle capaz de fazer com que todas as trajetórias desse sistema converjam para essa superfície, chamada de superfície deslizante. Em alguns trabalhos, tal superfície também é denominada de superfície de escorregamento ou superfície de deslizamento. Tal superfície deve ser escolhida pelo projetista de modo que todas as trajetórias, nela contidas, converjam para os valores desejados (*set-points*). Após a trajetória atingir o interior da superfície deslizante, é dito que o sistema está operando em modo deslizante. Quando o sistema está no modo deslizante, este é insensível a variações paramétricas e perturbações externas, sendo que tal propriedade garante robustez ao SMC. O projeto deste tipo de controlador consiste em duas etapas. A primeira etapa é a definição da superfície de escorregamento, que torna o sistema estável quando as trajetórias do sistema estão sobre essa superfície, e a segunda etapa é a definição de uma lei de controle que garanta que todas as trajetórias converjam para a superfície deslizante. A abordagem matemática do projeto a ser seguida neste trabalho baseia-se na versão exposta em Slotine e Li (1991).

5.2.4.1 Superfície de escorregamento

Considerando o sistema não linear expresso pela equação (5.81) e admitindo como condições iniciais $x_d(0) = x(0)$, e seja $\tilde{x} = x - x_d$ o erro de acompanhamento; então o vetor de erro de acompanhamento, relativo aos estados do sistema, fica sendo dado por:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} \tilde{x}, & \dot{\tilde{x}}, & \dots & \tilde{x}^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (5.84)$$

Define-se a superfície de escorregamento $S(t) \in \mathfrak{R}^n$ através da função escalar $s(\mathbf{x}, t) = 0$, onde:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{\mathbf{x}} \quad (5.85)$$

onde λ é uma constante estritamente positiva que deve ser escolhida pelo projetista. Tomando como exemplo um sistema de 2ª ordem, a equação (5.85) resulta em uma reta de escorregamento em $\mathfrak{R}^2$, dada por: $s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$ que é ilustrada pela Figura 84.

Figura 84 - Superfície de escorregamento para $n = 2$.

Fonte: adaptado de Slotine e Li (1991).

Ainda em relação a equação (5.85), verifica-se que $s(\mathbf{x}, t)$ representa uma série de filtros de 1ª ordem em cascata, com o número de filtros definido de acordo com a

ordem n do sistema, e com λ representando a frequência de corte de cada filtro e $p = (d/dt)$ sendo o operador de Laplace, conforme ilustrado na Figura 85.

Figura 85 - Sequência de filtros em cascata.

Fonte: adaptado de Slotine e Li (1991).

O problema de acompanhamento é equivalente à tarefa de manter todas as trajetórias sobre a superfície $S(t)$, já que $s(\mathbf{x}, t) = 0$, para $\forall t > 0$, é uma equação diferencial linear cuja solução é $\tilde{\mathbf{x}} = 0$. Logo, o problema de acompanhamento é reduzido a manter $s(\mathbf{x}, t) = 0$. Uma outra interpretação para a variável $s(\mathbf{x}, t)$ é como uma medida de desempenho, em relação ao acompanhamento da referência pelo sistema. Em Slotine e Li (1991), a relação entre o módulo do valor de s e o erro de acompanhamento $\tilde{\mathbf{x}}$ é definida como:

$$|s(t)| < \Phi \Rightarrow |\tilde{x}^{(i)}(t)| < \frac{2^i}{\lambda^{n-i-1}} \Phi \quad (5.86)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, o termo Φ é a largura da camada limite, que representa a distância entre a resposta do sistema e a superfície de escorregamento $S(t)$. Para um sistema de 2ª ordem e considerando $i = 0$, a relação (5.86) será dada por:

$$|\tilde{x}(t)| < \frac{\Phi}{\lambda} \quad (5.87)$$

Para que as trajetórias afastadas da superfície de escorregamento converjam para ela, uma lei de controle u deve ser sintetizada de modo a satisfazer a condição de escorregamento:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(s^2) < -\eta |s| \quad (5.88)$$

sendo η uma constante estritamente positiva, relacionada com a velocidade de convergência do sistema. A condição expressa pela equação (5.88) impõe que a distância

ao quadrado s^2 , entre uma trajetória fora da superfície de escorregamento e a própria superfície, diminua em relação ao tempo com uma velocidade η . Tomando a condição de escorregamento como candidata à função de Lyapunov, a prova de estabilidade do sistema pode ser realizada, como será demonstrado mais adiante.

O tempo necessário para que a trajetória alcance a superfície de escorregamento, quando $x(0) \neq x_d(0) \Rightarrow s(0) \neq 0$, é dado por:

$$t_{\text{alcance}} \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (5.89)$$

Uma vez atingida a superfície de escorregamento $S(t)$, o erro de acompanhamento $\tilde{x}$, tende exponencialmente a zero com uma constante de tempo $1/\lambda$. A partir deste momento, o sistema passa a respeitar a dinâmica por $s(\mathbf{x}, t) = 0$, como é mostrado na representação gráfica da trajetória na Figura 86 para um sistema de 2ª ordem.

Figura 86 - Trajetória típica de um sistema de 2ª ordem controlado.

Fonte: adaptado de Slotine e Li (1991).

5.2.4.2 Lei de controle

A lei de controle u deve ser projetada de tal forma que $\tilde{x}$ alcance a superfície de escorregamento em um intervalo de tempo finito, sendo que uma vez atingido $s(\mathbf{x}, t) = 0$, permaneça deslizando nela indefinidamente.

O projeto da lei de controle u que satisfaz a condição de escorregamento será detalhado para um sistema de 2ª ordem com uma única entrada:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + b(x, \dot{x}, t)u(t) + d(t) \quad (5.90)$$

onde $d(t)$ é o distúrbio, e os termos $b(x, \dot{x}, t)$ e $f(x, \dot{x}, t)$ são funções não lineares dependentes dos estados e do tempo, que não são conhecidas exatamente.

Define-se a função $\hat{f}(x, \dot{x}, t)$ como a estimativa de $f(x, \dot{x}, t)$, e $F(x, \dot{x}, t)$ como o máximo erro de modelagem, de tal forma que:

$$|\hat{f}(x, \dot{x}, t) - f(x, \dot{x}, t)| < F(x, \dot{x}, t) \quad (5.91)$$

A função $b(x, \dot{x}, t)$ é limitada por $0 < b_{\min} \leq b(x, \dot{x}, t) \leq b_{\max}$ e estimada como:

$$\hat{b}(x, \dot{x}, t) = \sqrt{b_{\min} b_{\max}} \quad (5.92)$$

Em relação ao distúrbio $d(t)$, é admitido que o seu modelo possui limite superior, que é dado por D :

$$|d(t)| < D \quad (5.93)$$

Com o intuito de simplificar a notação, o argumento das funções f , $\hat{f}$, F , b e $\hat{b}$ em relação ao estado e ao tempo será omitido.

Deriva-se a equação (5.85) em relação ao tempo, para se obter a lei de controle do sistema:

$$\dot{s} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \lambda \tilde{x} \Rightarrow \dot{s} = f + bu + d - \ddot{x}_d + \lambda \tilde{x} \quad (5.94)$$

Na ausência de erros de modelagem e distúrbios, a melhor estimativa para a lei de controle é obtida quando $\dot{s} = s = 0$. Deste modo:

$$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \tilde{x} \quad (5.95)$$

com $\hat{u}$ sendo equivalente ao termo de linearização por realimentação da lei de controle u . Para tornar o controle apto a lidar com as incertezas do modelo, é necessária a adição de um termo descontínuo na superfície $S(t)$. Logo, a lei de controle u fica expressa por:

$$u = \hat{b}^{-1} [\hat{u} - k(x, \dot{x}, t) \text{sign}(s)]$$

$$u = \hat{b}^{-1} \left[-\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k(x, \dot{x}, t) \text{sin}al(s) \right] \quad (5.96)$$

na qual k é um parâmetro de projeto que representa o ganho do termo chaveado, relativo a função $\text{sin}al(s)$, sendo que está é definida como:

$$\text{sin}al(s) = \begin{cases} +1 & \text{se } s \geq 0 \\ -1 & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (5.97)$$

O ganho k é obtido através da condição de escorregamento, como mostrado a seguir:

$$\dot{s}s = (f + bu + d - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}})s \quad (5.98)$$

Substituindo a equação (5.96) em (5.98), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(s^2) &= \dot{s}s = \left[f - b\hat{b}^{-1}\hat{f} + b\hat{b}^{-1}(\ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}) - b\hat{b}^{-1}k \text{sin}al(s) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} + d \right] s \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(s^2) &= \dot{s}s = \left[f - b\hat{b}^{-1}\hat{f} + (1 - b\hat{b}^{-1})(-\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}) + d \right] s - b\hat{b}^{-1}k|s| \end{aligned} \quad (5.99)$$

Por fim, conclui-se que a condição de escorregamento será satisfeita para todos os valores admissíveis de f , b e d se e somente se:

$$k|s| \geq \left[\hat{b}b^{-1}f - \hat{f} + (\hat{b}b^{-1} - 1)(-\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}) + \hat{b}b^{-1}d \right] s + \hat{b}b^{-1}\eta|s| \quad (5.100)$$

e como $f = \hat{f} + (f - \hat{f})$, $|\hat{f} - f| < F$ e $|d| < D$, então:

$$\begin{aligned} k &\geq \hat{b}b^{-1}(F + D + \eta) + (\hat{b}b^{-1} - 1)|\hat{f} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}| \\ k &\geq \hat{b}b^{-1}(F + D + \eta) + (\hat{b}b^{-1} - 1)|\hat{u}| \end{aligned} \quad (5.101)$$

Seja β uma relação entre os limites de b , que é expressa por:

$$\beta = \sqrt{\frac{b_{\max}}{b_{\min}}} \quad (5.102)$$

Verifica-se que as seguintes relações serão sempre satisfeitas:

$$\beta^{-1} \leq \frac{b}{\hat{b}} \leq \beta \quad (5.103)$$

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \beta \quad (5.104)$$

Logo, a equação (5.101) fica reescrita como:

$$k \geq \beta(F + D + \eta) + (\beta - 1)|\hat{u}| \quad (5.105)$$

Pela equação (5.105) conclui-se que o ganho k é responsável por compensar as incertezas e distúrbios não considerados no controle, sendo que quanto maior estes forem, maior deverá ser o valor do ganho k .

5.2.4.3 Controle integral

O controle integral é proposto em Slotine e Li (1991) para eliminar possíveis diferenças entre o valor obtido e o desejado, no regime estacionário. No entanto, a adição deste termo leva ao aumento da ordem do sistema. Para um sistema de 2ª ordem a variável $s(\mathbf{x}, t)$ fica expressa por:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \left(\int_0^t \tilde{x} dt \right) = \dot{\tilde{x}} + 2\lambda\tilde{x} + \lambda^2 \int_0^t \tilde{x} dt \quad (5.106)$$

A parcela estimada de controle $\hat{u}$ é obtida de forma similar, igualando-se a derivada da superfície de escorregamento a zero, ou seja, $\dot{s} = 0$, o que resulta em:

$$\hat{u} = \hat{b}^{-1} \left(-\hat{f} + \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\tilde{x}} - \lambda^2\tilde{x} \right) \quad (5.107)$$

Substituindo a equação (5.107) em (5.96) define-se a lei de controle u para uma superfície de escorregamento do tipo integral como sendo:

$$u = \hat{b}^{-1} \left[-\hat{f} + \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\tilde{x}} - \lambda^2\tilde{x} - k(x, \dot{x}, t) \text{ sinal}(s) \right] \quad (5.108)$$

5.2.4.4 Camada limite

O termo descontínuo da lei de controle (5.108) é dependente do valor da variável s , sendo que este pode provocar uma oscilação elevada e de alta frequência na ação de controle, quando o sistema está próximo à superfície $S(t)$. A Figura 87 ilustra este comportamento que é denominado de *chattering*.

Estas oscilações podem excitar modos de altas frequências além causar desgaste nos atuadores. A tendência é que este comportamento seja mais acentuado no caso em que são elevadas as incertezas do sistema.

Figura 87 - Fenômeno de *chattering*.

Fonte: adaptado de Slotine e Li (1991).

Slotine e Li (1991) apresentam um método para atenuar o *chattering*, que consiste na suavização da função $\text{sin}al(s)$ da lei de controle. O método consiste na definição de uma camada limite em torno da superfície $S(t)$, dentro da qual ocorrerá a transição de sinal, conforme mostra a lei de controle da equação (5.109).

$$u = \hat{u} - k \text{sat}(s / \Phi) \quad (5.109)$$

onde o termo $\text{sat}(s / \Phi)$ é expresso por:

$$\text{sat}(\bullet) = \begin{cases} \bullet & \text{se } |\bullet| \leq 1 \\ \text{sin}al(\bullet) & \text{se } |\bullet| > 1 \end{cases} \quad (5.110)$$

Logo, o controle fica compreendido dentro da camada limite quando tem-se $\text{sat}(s / \Phi) = s / \Phi$, conforme ilustrado na Figura 88.

Fora da camada limite o controle u satisfaz a equação (5.88), e as trajetórias convergem para dentro da camada limite, com o erro de acompanhamento $\tilde{x}$ sendo limitado pelo tamanho da camada limite, conforme a equação (5.111):

$$|\tilde{x}(t)| < \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}} \quad (5.111)$$

Segundo Slotine e Li (1991), a suavização da função $\text{sin}al(s)$ da lei de controle é equivalente à adição de um filtro passa baixa na dinâmica da variável s , eliminando assim o *chattering*.

Figura 88 - Camada limite.

Fonte: adaptado de Slotine e Li (1991).

A sintonização dos parâmetros Φ e k é realizada de acordo com o erro de acompanhamento admissível e com o limite admitido para a incertezas do modelo, respectivamente.

Sobre a sintonização do parâmetro λ , este não deve ser aumentado indefinidamente, pois representa a largura de banda do filtro que é aplicado sobre a variável s . Slotine e Li (1991) apresentam alguns critérios que podem ser utilizados para o ajuste do parâmetro λ :

- 1) λ deve ser menor que a frequência do primeiro modo ressonante não modelado do sistema (v_r) conforme a seguinte relação: $\lambda < (2\pi/3)v_r$.
- 2) λ deve ser menor que o inverso do maior tempo de atraso do sistema (T_A) conforme a seguinte relação: $\lambda < 1/(3T_A)$.
- 3) λ deve ser menor que a taxa de amostragem do sistema (v_s) conforme a seguinte relação: $\lambda < (1/5)v_s$.

O λ escolhido é o menor dos valores calculado pelos itens acima.

5.2.4.5 Análise da estabilidade

De acordo com Slotine e Li (1991), a prova de estabilidade de um sistema não-autônomo é comprovada através teoria da estabilidade de Lyapunov em conjunto com o Lema de Barbalat. Este afirma que se uma função escalar $V(s, t)$ satisfizer as seguintes condições:

- 1) $V(s, t)$ é limitada inferiormente;
- 2) $\dot{V}(s, t)$ é negativa semi-definida, e
- 3) $\dot{V}(s, t)$ é uniformemente continua no tempo.

então $\dot{V}(s, t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

A função $V(s, t)$ é denominada candidata a função de Lyapunov, sendo definida em Slotine e Li (1991) como:

$$V(s, t) = \frac{1}{2} s^2 \quad (5.112)$$

A primeira condição é satisfeita automaticamente por esta definição, já a segunda é alcançada considerando que a lei de controle u é projetada de modo a satisfazer a condição de escorregamento, desta forma garantindo que a derivada de $V(s, t)$ seja negativa semi-definida, ou seja, $\dot{V}(s, t) \leq -\eta|s| \Rightarrow \dot{V}(s, t) \leq 0 \therefore \dot{V}(s, t)$ é negativa semi-definida.

Derivando a condição de escorregamento uma única vez, obtém-se:

$$\ddot{V}(s, t) \leq -\eta \frac{d}{dt}|s| \quad (5.113)$$

onde,

$$\frac{d}{dt}|s| = \begin{cases} +1 & \text{se } s \geq 0 \\ -1 & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (5.114)$$

Sendo η uma constante positiva, pode-se assegurar que $\ddot{V}(s, t) \leq \eta$. implica que $\ddot{V}(s, t)$ é limitada, isto implica que $\dot{V}(s, t)$ é uniformemente contínua no tempo. O lema garante que $\dot{V}(s, t) \rightarrow 0$ para todas as trajetórias, desde que as condições acima sejam satisfeitas. Finalmente, como $\ddot{V}(s, t) \leq -\eta|s|$, pode-se inferir que $\dot{V}(s, t) \rightarrow 0$ é equivalente a $s \rightarrow 0$.

5.2.4.6 Generalização para o caso com múltiplas entradas

Considerando o modelo de um sistema não linear, com múltiplas entradas e saídas, que é expresso por:

$$x_i^{(n_i)} = f_i(\mathbf{x}, t) + d_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\mathbf{x}, t) u_j \quad (5.115)$$

onde u_j são as entradas do sistema, $\mathbf{x}$ é o vetor de estados composto pelas componentes controladas x_i e suas primeiras $n_i - 1$ derivadas com respeito ao tempo e d_i são os distúrbios. A restrição de que o sistema seja quadrado é necessária, ou seja, o número de entradas de controle do sistema dever ser igual ao de variáveis controladas ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$).

Aqui são feitas duas hipóteses. Primeiro, é assumido que as incertezas paramétricas estão dentro da faixa do espaço da matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Como $\mathbf{B}$ é uma matriz quadrada, então esta admite inversa em todo o espaço de estados, o que é um pressuposto semelhante ao da controlabilidade. Segundo, é assumido que a matriz estimada $\hat{\mathbf{B}}$ admite inversa e é continuamente dependente das incertezas paramétricas, isto é, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ na ausência de incertezas paramétricas (SLOTINE; LI, 1991).

Os limites dos erros de modelagem da funções f_i e dos distúrbios d_i são expressos, respectivamente, por:

$$|\hat{f}_i - f_i| < F_i \quad (5.116)$$

$$|d_i| < D_i \quad (5.117)$$

As incertezas em $\mathbf{B}$ e os seus limites são representados da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \Delta) \hat{\mathbf{B}} \Rightarrow |\Delta_{ij}| \leq B_{ij} \quad (5.118)$$

A superfície de escorregamento $S(t) \in \mathcal{R}^n$ fica definida pelas variáveis s_i , como mostrado a seguir:

$$s_i = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^{(n_i-1)} \tilde{x}_i \quad (5.119)$$

onde $\tilde{x}_i = x_i - x_{di}$. Para um sistema de 2ª ordem, ou seja, $n_i = 2$ para todo i , a equação (5.119) é dada por: $s_i = \dot{\tilde{x}}_i + \lambda_i \tilde{x}_i$, sendo que a sua derivada primeira em relação ao tempo fica como: $\dot{s}_i = \ddot{\tilde{x}}_i + \lambda_i \dot{\tilde{x}}_i$.

Considerando $\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_m]^T$, $\hat{\mathbf{B}} = [\hat{b}_{ij}]$, $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_1 \ \dots \ \hat{f}_m]^T$, $\mathbf{k} \sin(\mathbf{s})$ como o vetor de componentes $k_i \sin(s_i)$ e $\mathbf{x}_r = [x_{d1} - \lambda_1 \tilde{x}_1 \ \dots \ x_{dm} - \lambda_m \tilde{x}_m]^T$, a lei de controle para o sistema de 2ª ordem fica como:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (-\hat{\mathbf{f}} + \dot{\mathbf{x}}_r - \mathbf{k} \sin(\mathbf{s})) \quad (5.120)$$

Substituindo as equações (5.115) e (5.120) em $\dot{\mathbf{s}}$, sendo este o vetor de componentes $\dot{s}_i = \ddot{x}_i + \lambda_i \dot{\tilde{x}}_i$, chega-se em:

$$\dot{s}_i = \hat{f}_i - f_i + d_i + \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} (x_{ri} - \hat{f}_i) - \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} k_j \sin(s_j) - (1 + \Delta_{ii}) k_i \sin(s_i)$$

Assim, a condição de escorregamento será sempre satisfeita se:

$$(1 - B_{ii}) k_i \geq F_i + D_i + \sum_{j=1}^n B_{ij} |x_{ri} - \hat{f}_i| - \sum_{j \neq i} B_{ij} k_j + \eta_i \quad (5.121)$$

e, em particular, se o vetor $\mathbf{k}$ for escolhido de tal forma que:

$$(1 - B_{ii}) k_i + \sum_{j \neq i} B_{ij} k_j = F_i + D_i + \sum_{j=1}^n B_{ij} |x_{ri} - \hat{f}_i| + \eta_i \quad (5.122)$$

A expressão (5.122) representa um conjunto de m equações para os m ganhos de chaveamento k_i . Slotine e Li (1991) demonstraram que através do teorema de Frobenius-Perron é possível provar que a equação (5.122) admite solução única para os elementos do vetor $\mathbf{k}$, com ganhos $k_i \geq 0$.

5.3 PROJETO DO CONTROLADOR EM CASCATA

Nesta seção, a síntese do controlador em cascata do manipulador será apresentada. Primeiramente, o projeto do controlador do subsistema mecânico será realizado. Para tanto, as técnicas de controle por modos deslizantes, adaptativo e por impedância serão combinadas. Em seguida, a prova de estabilidade desse controlador será apresentada. Posteriormente, será sintetizado o controlador do subsistema hidráulico. Para tal, as técnicas de linearização por realimentação e de controle robusto linear serão combinadas. Por fim, o controlador em cascata resultante para o manipulador será exposto.

5.3.1 Projeto do controlador do subsistema mecânico

O controlador de impedância proposto por Lu e Goldenberg (1995) consiste de duas parcelas, sendo que a primeira é referente a um modelo nominal que compensa parcialmente as não linearidades do subsistema mecânico. Já a segunda parcela é um compensador que expressa o efeito da diferença entre o modelo nominal e o sistema real em relação à impedância desejada. Baseando-se no objetivo do controle de impedância, para implementar uma relação entre posição e força desejadas, os erros do sistema são definidos de tal forma que, quando estes são iguais a zero, a impedância do sistema é igual à desejada.

A fim de alcançar a convergência, uma superfície de escorregamento é definida de tal forma que, quando o sistema está em modo deslizante, as trajetórias dos estados permanecem sobre, ou muito próximas, dessa superfície. O controlador por impedância proposto por Lu e Goldenberg (1995) é formulado para garantir a existência do modo deslizante na presença de incertezas de modelo e distúrbios externos.

O projeto do controle por impedância do subsistema mecânico será realizado no espaço dos cilindros, pois a força de escavação pode ser medida nessas direções através de células de carga instaladas nos cilindros (TFAZOLI et al., 2002). Para tanto, a expressão (4.51), referente ao modelo do subsistema mecânico no espaço dos cilindros, é reescrita a seguir:

$$\mathbf{M}_{eq}\ddot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{C}_{eq}\dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{G}_{eq} + \mathbf{D}_{eq} = \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_e \quad (5.123)$$

onde $\mathbf{F}_e \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de força externa, proveniente da interação com ambiente.

5.3.1.1 Impedância desejada

Para o controle do subsistema mecânico considera-se a seguinte impedância desejada:

$$\mathbf{M}_d\ddot{\tilde{\mathbf{y}}}_c + \mathbf{B}_d\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c + \mathbf{K}_d\tilde{\mathbf{y}}_c = \mathbf{F}_e \quad (5.124)$$

onde $\mathbf{M}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes de inércia, amortecimento e de rigidez desejadas, respectivamente, e com $\tilde{\mathbf{y}}_c \in \mathbb{R}^n$ sendo o vetor de erro de seguimento que é expresso por: $\tilde{\mathbf{y}}_c = \mathbf{y}_c - \mathbf{y}_{cd}$, onde $\mathbf{y}_c \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de comprimentos dos cilindros hidráulicos, e $\mathbf{y}_{cd} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de comprimentos desejados. As matrizes de

inércia, amortecimento e de rigidez desejadas ($\mathbf{M}_d$, $\mathbf{B}_d$ e $\mathbf{K}_d$) são assumidas como diagonais, constantes, e estritamente positivas.

5.3.1.2 Erro de seguimento

Esta seção apresenta a definição de erro de impedância. Este erro é definido como a diferença entre a impedância desejada e a real.

O objetivo do controle por impedância é implementar a impedância desejada que é dada pela equação (5.124). No domínio da frequência, essa expressão fica reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{I}_d(s)(\mathbf{y}_c(s) - \mathbf{y}_{cd}(s)) = \mathbf{F}_e(s) \quad (5.125)$$

$$\mathbf{y}_c(s) - \mathbf{y}_{cd}(s) = \mathbf{I}_d^{-1}(s)\mathbf{F}_e(s) \quad (5.126)$$

onde $\mathbf{I}_d(s) = \mathbf{M}_d s^2 + \mathbf{B}_d s + \mathbf{K}_d$, com s sendo a variável de Laplace. Pelas equações (5.125) e (5.126) chega-se, respectivamente, em:

$$\mathbf{I}_d \mathbf{y}_{cd} = \mathbf{I}_d \mathbf{y}_c - \mathbf{F}_e \quad (5.127)$$

$$\mathbf{y}_{cd} = \mathbf{y}_c - \mathbf{I}_d^{-1} \mathbf{F}_e \quad (5.128)$$

Para definir os erros de acompanhamento do sistema, primeiramente, a partir equação (5.127), define-se a saída de força do sistema como sendo:

$$\mathbf{F}_o \triangleq \mathbf{I}_d \mathbf{y}_c - \mathbf{F}_e \quad (5.129)$$

e a entrada de força, ou a força de referência, fica definida por:

$$\mathbf{F}_r \triangleq \mathbf{I}_d \mathbf{y}_{cd} \quad (5.130)$$

Somente quando a impedância desejada é exatamente implementada, tem-se que $\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_r$. Caso contrário, devido às incertezas de modelagem e aos distúrbios externos, o erro de força do sistema é definido como a diferença entre a entrada e saída de força, ou seja:

$$\mathbf{e}_f \triangleq \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_o = \mathbf{I}_d (\mathbf{y}_{cd} - \mathbf{y}_c) + \mathbf{F}_e \quad (5.131)$$

De maneira similar, define-se a saída de posição do sistema como:

$$\mathbf{y}_{co} \triangleq \mathbf{y}_c - \mathbf{I}_d^{-1} \mathbf{F}_e \quad (5.132)$$

e a sua entrada de posição, ou a posição de referência, fica definida por:

$$\mathbf{y}_{cr} \triangleq \mathbf{y}_{cd} \quad (5.133)$$

Logo, o erro de posição de sistema é dado por:

$$\mathbf{e}_p \triangleq \mathbf{y}_{cr} - \mathbf{y}_{co} = \mathbf{y}_{cd} - \mathbf{y}_c + \mathbf{I}_d^{-1} \mathbf{F}_e \quad (5.134)$$

A relação entre $\mathbf{e}_p$ e $\mathbf{e}_f$ é expressa a seguir:

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{I}_d \mathbf{e}_p \quad (5.135)$$

ou ainda, no domínio do tempo,

$$\mathbf{e}_f(t) = \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{e}}_p(t) + \mathbf{B}_d \dot{\mathbf{e}}_p(t) + \mathbf{K}_d \mathbf{e}_p(t) \quad (5.136)$$

A Figura 89 mostra o diagrama de blocos de um controlador que tem como objetivo minimizar a diferença entre a força de saída $\mathbf{F}_o$ e a força de entrada $\mathbf{F}_r$. No caso ideal, tem-se que $\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_r$. Portanto, a Figura 89 representa, basicamente, um controlador de força. A força de saída $\mathbf{F}_o$ é formada por duas partes, sendo que a primeira é a contribuição da força de contato ($\mathbf{I}_e \mathbf{y}_c$), onde $\mathbf{I}_e$ é a impedância do ambiente, enquanto a segunda é referente a força dissipada durante o movimento do manipulador ($\mathbf{I}_d \mathbf{y}_c$). Se $\mathbf{I}_d$ é pequena, menos força será dissipada no movimento e, portanto, a força de contato $\mathbf{F}_e$ será próxima da força de entrada $\mathbf{F}_r$. Nota-se que se $\mathbf{I}_d$ for definida como zero, tem-se um controlador de força puro. Portanto, a grande diferença entre a implementação mostrada na Figura 89 e um controle de força puro é que a impedância desejada $\mathbf{I}_d$ é intencionalmente imposta ao sistema para regular a resposta de movimento às forças de entrada e de contato.

Figura 89 - Controle de impedância baseado na força.

Fonte: adaptado de Lu e Goldenberg (1995).

Para um controlador de força puro, ou seja, com impedância desejada nula, uma pequena diferença entre a força de entrada e a de contato pode resultar em um movimento de alta amplitude para o manipulador (LU; GOLDENBERG, 1995).

O controlador de impedância que foi formulado por Lu e Goldenberg (1995) é baseado no diagrama de blocos ilustrado pela Figura 89.

5.3.1.3 Superfície de escorregamento do sistema

Considerando o seguinte sistema não linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad (5.137)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estados, e $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, com $m < n$. Para o sistema da equação (5.137), a variável que representa a superfície de escorregamento é definida como:

$$\mathbf{s} \triangleq [s_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad s_m(\mathbf{x})]^T = \mathbf{0} \quad (5.138)$$

onde $s_i(\mathbf{x})$ representa a i -ésima superfície de escorregamento e $\mathbf{0} \in \mathcal{R}^m$.

Considerando que a impedância desejada é dada pela equação (5.124), desta forma, tem-se que o vetor de erros de seguimento de força, baseado em (5.131), é dado por:

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{F}_e - \mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{B}_d \dot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{K}_d \mathbf{y}_c \quad (5.139)$$

Segundo DeCarlo, Zak e Matthews (1988), a equação (5.139) não representa uma superfície de escorregamento no espaço $(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c)$ pois inclui o vetor de aceleração $\ddot{\mathbf{y}}_c$. No entanto, integrando-se $\mathbf{e}_f$, o vetor de superfícies de escorregamento pode ser definido como (LU; GOLDENBERG, 1995):

$$\mathbf{s} \triangleq -\mathbf{M}_d^{-1} \int_{t_0}^t \mathbf{e}_f d\tau \quad (5.140)$$

ou ainda,

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{B}_d \mathbf{y}_c + \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_d \int_{t_0}^t \mathbf{y}_c d\tau - \mathbf{M}_d^{-1} \int_{t_0}^t \mathbf{F}_e d\tau \quad (5.141)$$

Quando o sistema está em modo deslizante, isto é, depois de alcançar a superfície de escorregamento, as trajetórias dos estados continuam na superfície de escorregamento, ou seja, $s = \mathbf{0}$, logo, $\dot{s} = \mathbf{0}$. Neste caso, a partir da equação (5.141), tem-se que: $\mathbf{e}_f = -\mathbf{M}_d \dot{s} = \mathbf{0}$. Esta discussão indica que a tarefa de projetar um controlador de impedância é equivalente à de projetar um controlador por modos deslizantes, que garanta que os estados do sistema atinjam a superfície de escorregamento e que permaneçam sobre ela posteriormente (LU; GOLDENBERG, 1995). O controle de impedância baseado em modos deslizantes que é empregado no subsistema mecânico do manipulador é mostrado na Figura 90.

Figura 90 - Controle de impedância baseado na força para o manipulador.

Fonte: adaptado de Lu e Goldenberg (1995).

5.3.1.4 Modelo do subsistema mecânico com incertezas

Considerando que o modelo da dinâmica de um manipulador, sem perda de generalidade, pode ser escrito como:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (5.142)$$

onde $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de funções não lineares, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de entradas de controle e $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$ é a matriz de ganhos de controle. Os termos $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ são expressos, respectivamente, por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.143)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) + \Delta \mathbf{B}(\mathbf{q}) \quad (5.144)$$

sendo $\hat{\mathbf{f}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ as partes estimadas, e com $\Delta \mathbf{f}$ e $\Delta \mathbf{B}$ sendo as partes desconhecidas de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente. Portanto, na presença de incertezas de modelagem e de

distúrbios externos, a equação (5.142) pode ser reescrita na forma que é mostrada a seguir:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{d}_{ext} \quad (5.145)$$

com $\mathbf{d}_{ext} \in \mathbb{R}^n$ sendo o vetor de distúrbios. Os termos relativos às incertezas e distúrbios da equação (5.145) podem ser agrupados da forma que se segue:

$$\mathbf{F}_{inc} = \Delta\mathbf{f} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}_{ext} \quad (5.146)$$

Substituindo-se a equação (5.146) em (5.145) obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{F}_{inc} \quad (5.147)$$

onde o termo $\mathbf{F}_{inc}$ representa o vetor de incertezas e distúrbios do subsistema mecânico do manipulador. Sobre a equação (5.147) fazem-se as seguintes hipóteses:

➤ Hipótese 1

A matriz estimada dos ganhos de controle $\hat{\mathbf{B}}$, admite inversa, seu sinal é conhecido e é definida sobre todo o espaço de estados, sendo assim, tem-se que:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{B}}^{-1}\ddot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{F}_{inc} \quad (5.148)$$

➤ Hipótese 2

O vetor de incertezas e distúrbios externos e as suas derivadas parciais são contínuas e definidas (uniformemente e localmente), com norma Euclidiana limitada, ou seja:

$$\|\mathbf{F}_{inc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\|_2 \leq \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) < \infty \quad (5.149)$$

onde $\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ é o limite superior da norma do vetor de incertezas e distúrbios. Segundo Zeinali e Notash (2010), essa hipótese garante que $\mathbf{F}_{inc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ tenha uma taxa de variação localmente definida.

Considerando-se a dinâmica do subsistema mecânico do manipulador no espaço dos cilindros, ou seja, $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{y}_c$ e $\dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}_c$, esta pode ser reescrita como é demonstrado a seguir:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{y}_c)\ddot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{h}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) \quad (5.150)$$

onde,

$$\mathbf{h}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) = \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) \dot{\mathbf{y}}_c + \mathbf{D}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) + \mathbf{G}_{eq}(\mathbf{y}_c) \quad (5.151)$$

Devido às incertezas e distúrbios do subsistema mecânico, a equação (5.150) fica reescrita como:

$$\mathbf{F}_h = \hat{\mathbf{M}}_{eq} \ddot{\mathbf{y}}_c + \hat{\mathbf{h}}_{eq} + (\Delta \mathbf{M}_{eq} \ddot{\mathbf{y}}_c + \Delta \mathbf{h}_{eq} + \mathbf{F}_d) \quad (5.152)$$

com $\hat{\mathbf{M}}_{eq}$ e $\hat{\mathbf{h}}_{eq}$ sendo as partes estimadas, e com $\Delta \mathbf{M}_{eq}$ e $\Delta \mathbf{h}_{eq}$ sendo as partes desconhecidas dos termos $\mathbf{M}_{eq}$ e $\mathbf{h}_{eq}$, respectivamente, e $\mathbf{F}_d \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de distúrbios externos. A comparação da equação (5.152) com (5.148) resulta em:

$$\hat{\mathbf{B}}^{-1} = \hat{\mathbf{M}}_{eq} \quad (5.153)$$

$$-\hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{h}}_{eq} = \hat{\mathbf{C}}_{eq} \dot{\mathbf{y}}_c + \hat{\mathbf{G}}_{eq} \quad (5.154)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = -\hat{\mathbf{M}}_{eq}^{-1} \hat{\mathbf{h}}_{eq} \quad (5.155)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_h \quad (5.156)$$

$$-\hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{F}_{inc} = \Delta \mathbf{M}_{eq} \ddot{\mathbf{y}}_c + \Delta \mathbf{h}_{eq} + \mathbf{F}_d \quad (5.157)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_h \quad (5.158)$$

Com a equação (5.157) obtém-se o vetor de incertezas e distúrbios, $\mathbf{F}_{inc}$, que é dado por:

$$\mathbf{F}_{inc} = -\hat{\mathbf{M}}_{eq}^{-1} (\Delta \mathbf{M}_{eq} \ddot{\mathbf{y}}_c + \Delta \mathbf{h}_{eq} + \mathbf{F}_d) \quad (5.159)$$

onde,

$$\Delta \mathbf{M}_{eq} = \mathbf{M}_{eq} - \hat{\mathbf{M}}_{eq} \quad (5.160)$$

$$\Delta \mathbf{h}_{eq} = \mathbf{h}_{eq} - \hat{\mathbf{h}}_{eq} \quad (5.161)$$

são as expressões das partes desconhecidas de $\mathbf{M}_{eq}$ e $\mathbf{h}_{eq}$, respectivamente.

5.3.1.5 Lei de controle do subsistema mecânico

Segundo Slotine e Li (1991), o problema de seguimento pode ser resolvido mantendo a trajetória dos estados do sistema na superfície de escorregamento $s \rightarrow \mathbf{0}$ para $t > 0$, o que resulta em $\tilde{\mathbf{y}}_c \rightarrow \mathbf{0}$ e $\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c \rightarrow \mathbf{0}$. Um controlador por modos deslizantes

ideal pode garantir que se as trajetórias dos estados do sistema, em $t = 0$, não alcançarem a superfície de escorregamento ($s(\tilde{\mathbf{y}}_c(0)) \neq \mathbf{0}$), então estas alcançarão a superfície em um instante finito de tempo ($s(\tilde{\mathbf{y}}_c(t_r)) = \mathbf{0}$ para $t_r < \infty$), e permanecerão nela posteriormente ($s(\tilde{\mathbf{y}}_c(t)) = \mathbf{0}$ para $t_r < t \leq \infty$). Para obter essa performance, um termo descontínuo de controle deve ser utilizado (LU; GOLDENBERG, 1995; SLOTINE; LI, 1991). Porém, como mencionado anteriormente, esse termo gera sinais de alta frequência na ação de controle (*chattering*). No trabalho de Zeinali e Notash (2010), foi proposto uma metodologia de controle denominada de controle adaptativo por modos deslizantes com estimação de incertezas que, basicamente, substitui a ação descontínua de controle por um termo contínuo, e compensa essa diferença com a adição de um termo adaptativo. Essa modificação atenua significativamente o *chattering*, além de acarretar pouca degradação à ação de controle. Portanto, a fim de preservar a vida útil dos acionadores do subsistema hidráulico, essa metodologia será empregada no presente trabalho. Assim, o próximo passo no projeto do controlador do subsistema mecânico é a escolha de uma lei de controle, com parâmetros variáveis, de tal forma, que está faça com que a função de Lyapunov do subsistema seja decrescente no tempo. Para tanto, considera-se a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_{PID} + \mathbf{u}_{ad} \quad (5.162)$$

onde $\mathbf{u}_{eq}$, $\mathbf{u}_{PID}$ e $\mathbf{u}_{ad}$ são os termos do controle proposto por Zeinali e Notash (2010), e que são descritos a seguir.

➤ Termo de controle equivalente

O termo de controle equivalente $\mathbf{u}_{eq}$ é considerado para compensar a dinâmica aproximadamente conhecida do subsistema, sendo que este é dado por: $\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$. Esse termo é obtido a partir da dinâmica equivalente de Fillippov (SLOTINE; LI, 1991), que diz que $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ quando a dinâmica do sistema está em modo deslizante. Logo, o termo de controle equivalente é obtido a partir de $\dot{\mathbf{s}}$, ou seja, realizando a derivada da equação (5.141) em relação ao tempo, como mostrado a seguir:

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{y}}_c - \ddot{\mathbf{y}}_{cd} + \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{B}_d\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c + \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{K}_d\tilde{\mathbf{y}}_c - \mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{F}_e \quad (5.163)$$

A equação (5.163) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{y}}_c - \ddot{\mathbf{y}}_{cr} \quad (5.164)$$

onde $\ddot{\mathbf{y}}_{cr} \in \Re^n$ é o vetor de acelerações de referência, que é dado por:

$$\ddot{\mathbf{y}}_{cr} = \ddot{\mathbf{y}}_{cd} - \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{B}_d \ddot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{y}}_c + \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{F}_e \quad (5.165)$$

Substituindo-se $\ddot{\mathbf{y}}_c = \hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ na equação (5.165) e igualando-se a expressão resultante com o vetor nulo e, posteriormente, resolvendo-se a expressão para $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{eq}$, assim, obtém-se que:

$$\mathbf{u}_{eq} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\ddot{\mathbf{y}}_{cr} - \hat{\mathbf{f}}) \quad (5.166)$$

ou ainda,

$$\mathbf{u}_{eq} = \hat{\mathbf{M}}_{eq} \ddot{\mathbf{y}}_{cr} + \hat{\mathbf{h}}_{eq} \quad (5.167)$$

Desta forma, a equação (5.166) representa a parcela equivalente da lei de controle do subsistema mecânico.

➤ Termo de controle PID

O termo de controle $\mathbf{u}_{PID}$ representa uma ação de controle tipo PID, empregado para aumentar a estabilidade do sistema em malha fechada, além de melhorar a resposta transitória do sistema. Essa parcela da lei de controle realiza a compensação de erros que podem ser resultantes da estimação do vetor de incertezas $\tilde{\mathbf{F}}$. O termo de controle PID é definido como:

$$\mathbf{u}_{PID} = -\hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{s} \quad (5.168)$$

ou ainda,

$$\mathbf{u}_{PID} = -\hat{\mathbf{M}}_{eq} \mathbf{K} \left(\dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c + \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{B}_d \tilde{\mathbf{y}}_c + \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_d \int_{t_0}^t \tilde{\mathbf{y}}_c d\tau - \mathbf{M}_d^{-1} \int_{t_0}^t \mathbf{F}_e d\tau \right) \quad (5.169)$$

com $\mathbf{K} \in \Re^{n \times n}$ sendo uma matriz diagonal, constante, e estritamente positiva, que é utilizada como um parâmetro de controle.

➤ Termo de controle adaptativo

Por fim, o termo $\mathbf{u}_{ad}$ representa a parcela adaptativa da lei de controle, considerada para compensar as incertezas e as perturbações. Esta parcela é definida com base no vetor estimado de incertezas e distúrbios, $\hat{\mathbf{F}}_{inc}$, como é mostrado a seguir:

$$\mathbf{u}_{ad} = -\hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{inc} \quad (5.170)$$

Incorporando-se uma lei de estimação para $\hat{\mathbf{F}}_{inc}$, desta forma, não é necessário conhecer seus limites (ZEINALI; NOTASH, 2010). No entanto, é preciso que uma lei estimação apropriada seja derivada. Para tanto, considera-se o observador de distúrbios adaptado de Nguyen (2000), e expresso pelas equações a seguir:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c = \hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} - \Lambda\tilde{\mathbf{v}}_c + \hat{\mathbf{F}}_{inc}(t) \quad (5.171)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{F}}}_{inc}(t) = -\Gamma\tilde{\mathbf{v}}_c \quad (5.172)$$

com $\tilde{\mathbf{v}}_c = \hat{\mathbf{v}}_c - \dot{\mathbf{y}}_c$ sendo o vetor de erro de estimação de velocidade linear, onde $\hat{\mathbf{v}}_c \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de velocidade estimado pelo observador de distúrbios. E os termos Λ e Γ são matrizes diagonais, estritamente positivas, e constantes, utilizadas como parâmetros do observador de distúrbios. Assim, a expressão resultante, referente à parcela adaptativa de controle, fica sendo dada por:

$$\mathbf{u}_{ad} = -\hat{\mathbf{M}}_{eq}\hat{\mathbf{F}}_{inc}(t) \quad (5.173)$$

Com este termo também é realizada a estimativa do vetor $\mathbf{F}_e$ para o cálculo de $\ddot{\mathbf{y}}_{cr}(\tilde{\mathbf{y}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c, \mathbf{F}_e)$ e $\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{y}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c, \mathbf{F}_e)$, pois durante a escavação $\|\mathbf{F}_e\|_2 \gg \|\Delta\mathbf{M}_{eq}\ddot{\mathbf{y}}_c + \Delta\mathbf{h}_{eq}\|_2$, logo, pode-se considerar que $\hat{\mathbf{F}}_e \cong \hat{\mathbf{M}}_{eq}\hat{\mathbf{F}}_{inc}(t)$ nas expressões anteriores.

➤ Lei de controle resultante

Reunindo-se os termos de controle $\mathbf{u}_{eq}$, $\mathbf{u}_{PID}$ e $\mathbf{u}_{ad}$ especificados anteriormente, obtém-se a seguinte lei de controle para o subsistema mecânico:

$$\mathbf{F}_h = \hat{\mathbf{B}}^{-1}(\ddot{\mathbf{y}}_{cr} - \hat{\mathbf{f}}) - \hat{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{s} - \hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{inc} \quad (5.174)$$

ou ainda,

$$\mathbf{F}_h = \hat{\mathbf{M}}_{eq}(\mathbf{y}_c) \left[\ddot{\mathbf{y}}_{cr}(\tilde{\mathbf{y}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c, \hat{\mathbf{F}}_e) - \mathbf{K}\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{y}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c, \hat{\mathbf{F}}_e) - \hat{\mathbf{F}}_{inc}(t) \right] + \hat{\mathbf{h}}_{eq}(\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c) \quad (5.175)$$

A seguir, a análise da estabilidade, pela teoria de Lyapunov, será realizada para a lei de controle que foi proposta para o subsistema mecânico do manipulador.

5.3.1.6 Análise da estabilidade do controle do subsistema mecânico

A prova de robustez e estabilidade da lei controle proposta é realizada com a seguinte candidata a função de Lyapunov, adaptada de Zeinali e Notash (2010):

$$V = V_1 + V_2 \quad (5.176)$$

onde,

$$V_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (5.177)$$

$$V_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{v}}_c^T \tilde{\mathbf{v}}_c + \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{inc}) \quad (5.178)$$

com $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sendo uma matriz diagonal, estritamente positiva e constante, que é utilizada como um parâmetro de controle, e $\tilde{\mathbf{F}}_{inc} \in \mathfrak{R}^n$ sendo o vetor de erro de estimação do vetor de incertezas e distúrbios, que é dado por:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{inc} = \hat{\mathbf{F}}_{inc} - \mathbf{F}_{inc} \quad (5.179)$$

Pela equação (5.178) obtém-se a derivada da candidata a função de Lyapunov, em relação ao tempo, que é mostrada a seguir:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (5.180)$$

onde,

$$\dot{V}_1(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \quad (5.181)$$

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = \tilde{\mathbf{v}}_c^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c + \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc} \quad (5.182)$$

ou ainda,

$$\dot{V}_1(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{s}^T (\ddot{\mathbf{y}}_c - \ddot{\mathbf{y}}_{cr}) \quad (5.183)$$

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = \tilde{\mathbf{v}}_c^T (\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c - \ddot{\mathbf{y}}_c) + \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} (\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc} - \dot{\mathbf{F}}_{inc}) \quad (5.184)$$

Substituindo-se as expressões (5.123), (5.165) e (5.175) em (5.183), e reorganizando, deste modo, chega-se em:

$$\dot{V}_1(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} \quad (5.185)$$

Introduzindo-se as equações (5.123), (5.165) e (5.175) em (5.184), e reorganizando, desta forma, obtém-se que:

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = -\tilde{\mathbf{v}}_c^T \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{v}}_c + \tilde{\mathbf{v}}_c^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} - \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \tilde{\mathbf{v}}_c - \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc} \quad (5.186)$$

Como $\tilde{\mathbf{v}}_c^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} = \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \tilde{\mathbf{v}}_c$, então, da equação (5.186), vem que:

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = -\tilde{\mathbf{v}}_c^T \Lambda \tilde{\mathbf{v}}_c - \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc} \quad (5.187)$$

Logo, com as equações (5.185) e (5.187), a derivada da candidata à função de Lyapunov, $\dot{V}$, fica expressa por:

$$\dot{V}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} - \tilde{\mathbf{v}}_c^T \Lambda \tilde{\mathbf{v}}_c - \tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc} \quad (5.188)$$

A análise de estabilidade em relação à equação (5.188) será realizada considerando incertezas que variam lentamente e rapidamente, em relação ao tempo. Na primeira situação a convergência assintótica é garantida. Enquanto que na segunda, a convergência para uma pequena vizinhança da origem do espaço de fase $(\tilde{\mathbf{y}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_c)$ é alcançada.

➤ *Incetezas que variam lentamente em relação ao tempo*

Para a primeira hipótese tem-se que o vetor $\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}$ é nulo ou negligenciável, desta forma, $\dot{V}_2$ fica sendo dada por:

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = -\tilde{\mathbf{v}}_c^T \Lambda \tilde{\mathbf{v}}_c \leq 0 \quad (5.189)$$

Como $\dot{V}_2 \leq 0$, ou seja, é negativa definida, então, $\tilde{\mathbf{v}}_c \rightarrow \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, $\tilde{\mathbf{F}}_{inc} \rightarrow \mathbf{0}$, para $t \rightarrow \infty$. E se $\tilde{\mathbf{F}}_{inc} \rightarrow \mathbf{0}$, então, $\dot{V}_1 \leq 0$ é negativa definida, isto é:

$$\dot{V}_1(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} \leq 0 \quad (5.190)$$

Deste modo, tem-se que $\dot{V} \leq 0$ é negativa definida pois:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq 0 \quad (5.191)$$

ou ainda,

$$\dot{V}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{v}}_c, \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c, \tilde{\mathbf{F}}_{inc}, \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{inc}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc} - \tilde{\mathbf{v}}_c^T \Lambda \tilde{\mathbf{v}}_c \leq 0 \quad (5.192)$$

Como $\dot{V} \leq 0$, então, pelo lema Barbalat pode-se inferir que $\dot{\mathbf{s}} \rightarrow \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$, para $t \rightarrow \infty$ (SLOTINE; LI, 1991).

➤ *Incetezas que variam rapidamente em relação ao tempo*

Em relação a segunda hipótese, o caso critico ocorre quando $\delta > 0$ onde δ é um escalar que é dado por:

$$\delta = -\tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\mathbf{F}}_{inc} \quad (5.193)$$

Assumindo que δ seja definido e limitado, isto é, $\|\delta\|_2 \leq \delta_{m\acute{a}x}$, onde $\delta_{m\acute{a}x}$ é o limite superior da norma Euclidiana de δ , desta forma, o erro de seguimento pode ser reduzido arbitrariamente através das matrizes $\mathbf{K}$, $\mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{\Gamma}$, utilizadas como parâmetros de controle, pois sempre pode-se fazer:

$$\|\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{v}}_c^T \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{v}}_c\|_2 \geq \|\tilde{\mathbf{F}}_{inc}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\mathbf{F}}_{inc} + \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{F}}_{inc}\|_2 \quad (5.194)$$

Logo, a condição de que $\dot{V} \leq 0$ sempre pode ser satisfeita através da sintonização dos parâmetros de controle (ZEINALI; NOTASH, 2010). No entanto, na prática, esses parâmetros não podem ser aumentados indefinidamente, pois as medidas dos sensores são contaminadas com ruídos.

Para lidar com este problema, na próxima seção, o controlador do subsistema hidráulico será sintetizado, sendo que este deverá ser capaz de atenuar o efeito dos ruídos das medidas sobre o sinal de controle do sistema.

5.3.2 Projeto do controlador do subsistema hidráulico

A fim de ilustrar de forma mais clara a estrutura do controlador do subsistema hidráulico, e mostrar algumas simplificações que podem ser realizadas para sua síntese, este será sintetizado para o caso escalar, primeiramente. Mais adiante este controlador será generalizado para o caso multivariável.

5.3.2.1 Modelagem das incertezas do subsistema hidráulico para o caso escalar

Para realizar a síntese do controlador do subsistema hidráulico, considera-se a dinâmica da força hidráulica, relativa ao modelo de 3ª ordem, que é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{F}_h &= \dot{p}_l A_a \\ \dot{F}_h &= A_a \lambda_l \left[K_l g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a \dot{y}_c \right] - A_a \gamma_l C_{in} \Delta p \end{aligned} \quad (5.195)$$

A fim de facilitar a manipulação algébrica durante a síntese do controlador, a equação (5.195) é reescrita na forma mostra a seguir:

$$\dot{F}_h = \lambda_l^* \left[K_l g_l(p_l, \text{sin}(\alpha_v)) u_v - A_a \dot{y}_c \right] - \gamma_l^* C_{in} \Delta p \quad (5.196)$$

onde,

$$\lambda_l^* = A_a \lambda_l = \frac{A_a \beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) \quad (5.197)$$

$$\gamma_l^* = A_a \gamma_l = \frac{A_a \beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) \quad (5.198)$$

Considera-se que os coeficientes λ_l^* e γ_l^* podem ser reescritos como:

$$\lambda_l^* = \hat{\lambda}_l^* + \Delta \lambda_l^* \quad (5.199)$$

$$\gamma_l^* = \hat{\gamma}_l^* + \Delta \gamma_l^* \quad (5.200)$$

com $\hat{\lambda}_l^*$ e $\hat{\gamma}_l^*$ sendo as partes estimadas, e com $\Delta \lambda_l^*$ e $\Delta \gamma_l^*$ sendo as partes desconhecidas de λ_l^* e γ_l^* respectivamente. Neste trabalho, será considerado que as partes desconhecidas são devidas à variação do módulo de elasticidade volumétrica efetivo do fluido β_e . De acordo com Fales (2004), a variação deste parâmetro, em torno do valor nominal, pode chegar até 50 %. Portanto, é crucial considerar essa incerteza na síntese do controlador.

5.3.2.2 Lei de controle do subsistema hidráulico para o caso escalar

Com base na equação (5.196), na modelagem das incertezas nos parâmetros do subsistema hidráulico, e na teoria de linearização por realimentação que foi apresentada anteriormente, obtém-se a seguinte lei de controle para o subsistema hidráulico do manipulador:

$$u_v = \frac{v / \hat{\lambda}_l^* + A_a \dot{y}_c}{K_l g_l(p_l, \text{sin}(\hat{u}_v))} \quad (5.201)$$

onde,

$$\hat{\lambda}_l^* = \frac{A_a \hat{\beta}_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c^2}{r_v} \right) \quad (5.202)$$

Substituindo-se a equação (5.201) em (5.196) chega-se em:

$$\dot{F}_h = \lambda_l^* \left[K_l g_l(p_l, \text{sin}(\hat{u}_v)) \frac{v / \hat{\lambda}_l^* + A_a \dot{y}_c}{K_l g_l(p_l, \text{sin}(\hat{u}_v))} - A_a \dot{y}_c \right] - \gamma_l^* C_{in} \Delta p \quad (5.203)$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior obtém-se que:

$$\dot{F}_h = \frac{\lambda_l^*}{\hat{\lambda}_l^*} v - \gamma_l^* C_{in} \Delta p \quad (5.204)$$

Na equação (5.204) o termo $\gamma_l^* C_{in} \Delta p$ pode ser reescrito em função da contribuição das pressões de carga, de suprimento e do tanque, ou seja:

$$\gamma_l^* C_{in} \Delta p = \gamma_l^* C_l p_l + \gamma_l^* C_s p_s + \gamma_l^* C_t p_t \quad (5.205)$$

ou ainda,

$$\gamma_l^* C_{in} \Delta p = \gamma_l^* C_l p_l + \gamma_l^* d_l \quad (5.206)$$

com $d_l = C_s p_s + C_t p_t$ sendo o distúrbio de vazamento. Desta forma, a equação (5.204) fica reescrita como:

$$\dot{F}_h = \frac{\lambda_l^*}{\hat{\lambda}_l^*} v - \gamma_l^* C_l p_l - \gamma_l^* d_l \quad (5.207)$$

Com a relação entre força hidráulica e pressão de carga ($F_h = p_l A_a$) e aplicando-se a transformada de Laplace na equação anterior e considerando condições iniciais nulas, chega-se em:

$$sF_h(s) = \frac{\lambda_l^*}{\hat{\lambda}_l^*} v(s) - \frac{\gamma_l^* C_l}{A_a} F_h(s) - \gamma_l^* d_l(s) \quad (5.208)$$

onde s é variável de Laplace. Os termos da equação (5.208) podem ser reagrupados da forma mostrada a seguir:

$$sF_h(s) = \varphi_l^* v(s) - \psi_l^* F_h(s) - \gamma_l^* d_l(s) \quad (5.209)$$

onde,

$$\varphi_l^* = \frac{\lambda_l^*}{\hat{\lambda}_l^*} = \frac{\beta_e}{\hat{\beta}_e} \quad (5.210)$$

$$\psi_l^* = \frac{\gamma_l^* C_l}{A_a} = \gamma_l^* C_l = \frac{\beta_e}{V_a} \left(\frac{r_v + \alpha_c}{r_v} \right) C_{in} \left(\frac{\sigma_v^2 + \alpha_c^2}{\sigma_v^2 + \alpha_c^3} \right) \quad (5.211)$$

Como a força hidráulica é a saída do subsistema hidráulico, então:

$$F_h(s) = \frac{\varphi_l^*}{s + \psi_l^*} v(s) - \frac{\gamma_l^*}{s + \psi_l^*} d_l(s) \quad (5.212)$$

ou ainda,

$$F_h(s) = \frac{\varphi_l^*}{s + \psi_l^*} v(s) + d_o(s) \quad (5.213)$$

onde,

$$d_o(s) = -\frac{\gamma_l^*}{s + \psi_l^*} d_l(s) \quad (5.214)$$

é considerado com um distúrbio na saída da planta.

A equação (5.212) representa a dinâmica do subsistema hidráulico, após a aplicação da lei de controle dada por (5.201). Nota-se, que após a linearização por realimentação, o subsistema hidráulico foi reduzido a um sistema de 1ª ordem, com parâmetros incertos e perturbações na saída, e com entrada de controle v , como ilustrado no diagrama de blocos da Figura 91.

Figura 91 - Dinâmica do subsistema hidráulico após a aplicação da linearização por realimentação.

Fonte: o autor.

Para lidar com o sistema mostrado na Figura 91, um controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ será sintetizado. Este será responsável por gerar o valor da entrada de controle v , para a realização do seguimento da força hidráulica desejada. Em relação ao modelo do sistema na Figura 91, os termos φ_l^* e ψ_l^* , resultantes da linearização por realimentação, não são conhecidos exatamente. Logo, para realizar a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$, substitui-se esses termos pelos seus valores nominais, como mostrado na expressão a seguir:

$$F_h = \frac{\hat{\varphi}_l^*}{s + \hat{\psi}_l^*} v + d_o \quad (5.215)$$

O diagrama de blocos para a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ é mostrado na Figura 92, onde são considerados distúrbios na entrada de controle (d_i), distúrbios na saída da planta (d_o), ruídos de medição (n), e as variações em torno dos parâmetros estimados $\hat{\phi}_l^*$ e $\hat{\psi}_l^*$, modeladas como incertezas paramétricas (ΔF_h).

Figura 92 - Diagrama de blocos do esquema de controle robusto do subsistema hidráulico.

Fonte: o autor.

5.3.2.3 Síntese do controlador subótimo

Para a síntese do controlador, é necessário, primeiro, que o sistema atenda às propriedades de controlabilidade, observabilidade, estabilizabilidade e de detectabilidade, além das hipóteses consideradas para o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$.

Em relação a dinâmica do subsistema hidráulico, verifica-se que esta é desacoplada em relação as coordenadas generalizadas do subsistema mecânico, e que o número de entradas de controle é igual ao número de saídas controladas, ou seja, $\mathbf{u}_v$ e $\mathbf{F}_h$ têm dimensão $\mathfrak{R}^n$, desta forma, o modelo multivariável do subsistema hidráulico, após a linearização por realimentação parcial, fica representado por uma matriz diagonal de funções de transferência. Esta observação simplifica significativamente o projeto do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$, pois possibilita a abordagem de projeto escalar para o controlador de cada atuador. Nesta abordagem não é necessário normalizar o modelo, e a escolha das funções de ponderação é bem mais simples (LUQUE, 2012).

O projeto do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$, para o caso escalar, e pelo método da sensibilidade mista, é realizado em dois estágios. Primeiramente, os requisitos de desempenho e robustez são capturados com as funções de ponderação, expressas no domínio da frequência. Em seguida, o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ é sintetizado através da formatação das funções de sensibilidade, S , de sensibilidade complementar, T , e sensibilidade do controlador, C , que no caso escalar, são dadas, respectivamente, por:

$$S = \frac{1}{1 + GK} \quad (5.216)$$

$$T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (5.217)$$

$$C = KS \quad (5.218)$$

onde G é o modelo de planta, e K é o controlador inicial. A síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ é realizada tomando-se a Figura 93 como referência, onde P é a planta generalizada que reúne o modelo nominal e as funções de ponderação.

Figura 93 - Configuração geral para a síntese do controlador.

Fonte: adaptado de Donha (2006).

➤ Controlador estruturado

O software MATLAB® oferece a opção de síntese de controle estruturados através de processos de otimização (GAHINET; APKARIAN, 2011). Segundo Srithongchai e Kaitwanidvilai (2010), a estruturação do controlador facilita a implementação prática

do mesmo, pois evita que funções de transferência de ordem elevada sejam geradas pelo algoritmo de otimização.

Para a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ optou-se pela estrutura mostrada no diagrama de blocos da Figura 94. Esta foi baseada em Abroug e Moriniere (2014), onde estrutura semelhante foi utilizada no controle de torque de um motor elétrico.

Figura 94 - Estrutura do controlador robusto do subsistema hidráulico.

Fonte: o autor.

A estrutura especificada para o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ consiste num controlador do tipo PI em série com um compensador de avanço, ou *lead*.

➤ Especificações de projeto do controlador subótimo

Sobre as especificações de projeto do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$, deseja-se que o sistema seja estável em malha fechada. Também é necessário ter um bom seguimento do sinal de referência e insensibilidade a distúrbios, portanto, é necessário que um ganho pequeno seja atribuído à S em baixas frequências. O sistema não deve ser afetado por sinais de alta frequência a partir da entrada de referência, ou a partir das saídas controladas (ruídos de medição), assim, T deve ter um ganho baixo em altas frequências. Por fim, deseja-se atenuar o *chattering* no sinal de controle, logo, um ganho pequeno deve ser atribuído à C em altas frequências. As especificações de projeto mencionadas para o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ são listadas seguir:

- 1) Estabilidade em malha fechada;
- 2) $\bar{\sigma}(W_s) \leq 1$ para $\omega \leq 1 \text{ rad/s}$;
- 3) $\bar{\sigma}(W_T) \leq 1$ para $\omega \geq 2 \text{ rad/s}$, e
- 4) $\bar{\sigma}(W_C) \leq 20$ para $\omega \geq 7 \text{ rad/s}$.

A especificação 1 garante pólos com parte real negativa. 2 garante rejeição de distúrbios em baixa frequência e bom seguimento da referência. 3 é para a resposta em malha fechada do sistema, rejeição de ruídos de alta frequência e estabilidade

robusta. Por fim, a especificação 4 é para evitar a instabilidade, preservar a vida útil dos atuadores e limitar o consumo de energia.

➤ Funções de ponderação escolhidas

As funções de ponderação W_s , W_T e W_C escolhidas para atender os requisitos de projeto especificados na seção anterior, são dadas, respectivamente, por:

$$W_s = 0,80 \cdot \left(\frac{s + 1,25}{s + 1 \cdot 10^{-6}} \right) \quad (5.219)$$

$$W_T = 0,95 \cdot \left(\frac{s + 2,40}{1 \cdot 10^{-6}s + 3} \right) \quad (5.220)$$

$$W_C = 0,35 \cdot \left(\frac{s + 1 \cdot 10^{-6}}{s + 15} \right) \quad (5.221)$$

As funções de ponderação utilizadas aqui foram determinadas com base nas expressões (5.55) a (5.57) e nas especificações de projeto. Funções de 2ª ordem, ou superior, também podem ser utilizadas na síntese do controlador. No entanto, estas funções tendem a aumentar a ordem do controlador resultante, o que dificulta a síntese do controlador estruturado.

A Figura 95 mostra os gráficos dos valores singulares das funções de ponderação escolhidas para a formatação das funções de sensibilidade.

Figura 95 - Funções de ponderação escolhidas.

Fonte: o autor.

➤ Formatação das funções de sensibilidade

Para a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ foi utilizado o *toolbox* de controle robusto do MATLAB® R2017a.

As Figuras 96 a 98 mostram os gráficos dos valores singulares da família de funções de sensibilidade S , T e C , respectivamente, resultantes da formatação.

Figura 96 - Formatação da função de sensibilidade.

Fonte: o autor.

Figura 97 - Formatação da função de sensibilidade complementar.

Fonte: o autor.

Figura 98 - Formatação da função de sensibilidade do controlador.

Fonte: o autor.

A família de funções de sensibilidade utilizada no projeto representa as incertezas nos valores nominais dos parâmetros φ_l^* e ψ_l^* do modelo. Para a modelagem dessas incertezas foram utilizadas as funções do *toolbox* de controle robusto, considerando uma variação de 50 % entorno dos valores nominais desses parâmetros.

Os parâmetros utilizados para a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ são reunidos na Tabela 22 no apêndice F.

Analisando-se as Figuras 96 a 98 verifica-se que a largura de banda obtida é bem próxima da desejada, e que os picos das funções de sensibilidade S , e de sensibilidade complementar T , são baixos. Isto indica boa estabilidade robusta, uma vez que esses valores são menores que 2 dB . No geral, tem-se uma boa formatação para as funções de sensibilidade S , T e C com o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ sintetizado, sendo que ao final do projeto obteve-se um controlador com $\gamma \cong 1,20$.

5.3.2.4 Lei de controle do subsistema hidráulico para o caso multivariável

A fim de garantir o seguimento do vetor de força hidráulica desejada pelo subsistema hidráulico, e com base na equação (4.41) e na técnica de linearização por realimentação, a seguinte lei de controle é proposta para o caso multivariável:

$$\mathbf{u}_v = \left[\mathbf{A}_a \hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{y}_c, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) \right]^{-1} \left(\mathbf{A}_a \hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{y}_c) \dot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{K}_\infty \tilde{\mathbf{F}}_h \right) \quad (5.222)$$

onde $\mathbf{K}_\infty \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz diagonal que reúne o controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ de cada um dos atuadores, e as matrizes $\hat{\mathbf{E}}_l \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\hat{\mathbf{F}}_l \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ são, respectivamente, as partes estimadas das matrizes $\mathbf{E}_l$ e $\mathbf{F}_l$.

As matrizes estimadas $\hat{\mathbf{E}}_l$ e $\hat{\mathbf{F}}_l$ são dadas, nessa ordem, por:

$$\hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{y}_c, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) = \text{diag} \left[\frac{\hat{\beta}_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \left(\frac{r_{vi} + \alpha_{ci}^2}{r_{vi}} \right) K_{li} g_{li}(p_{li}, \text{sin}(u_{vi})) \right] \quad (5.223)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_l(\mathbf{y}_c) = \text{diag} \left[\frac{\hat{\beta}_e}{A_{ai}(\tilde{l}_{ai} + y_{ci}) + V_{tubi}} \left(\frac{r_{vi} + \alpha_{ci}^2}{r_{vi}} \right) A_{ai} \right] \quad (5.224)$$

Ressalta-se que a implementação computacional direta da lei controle referente à equação (5.222) acarreta num *loop* algébrico, devido a necessidade do cálculo prévio da matriz $\hat{\mathbf{E}}_l$. Isto porque as condições especificadas pelas equações (3.23) e (3.24) devem ser verificadas previamente. Para contornar esse problema, admite-se que não ocorre contra fluxo nas linhas hidráulicas e, portanto, $\mathbf{E}_l$ pode ser considerada como uma matriz com elementos estritamente positivos. Logo, a verificação das condições mencionadas fica sendo realizada como mostrado na expressão a seguir:

$$\mathbf{u}_v = \left[\mathbf{A}_a \hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{y}_c, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_p)) \right]^{-1} \mathbf{u}_p \quad (5.225)$$

onde,

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{F}}_l(\mathbf{y}_c) \dot{\mathbf{y}}_c - \mathbf{K}_\infty \tilde{\mathbf{F}}_h \quad (5.226)$$

é o vetor de sinais parciais de controle.

5.3.3 Controlador em cascata do manipulador

Na Figura 99 é ilustrado o diagrama de blocos referente à dinâmica do manipulador com o controlador em cascata. Este diagrama foi construído com as leis de controle dos subsistemas mecânico e hidráulico, que são dadas, respectivamente, pelas equações (5.175) e (5.225). O apêndice G apresenta o simulador do sistema controlado que foi construído em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a tomando como referência a Figura 99.

Figura 99 - Diagrama de blocos do controle em cascata para o manipulador.

Fonte: o autor.

Na sequência do texto será adotada a seguinte nomenclatura para os controladores dos subsistemas do manipulador:

- 1) Controlador do subsistema mecânico - Controle por impedância baseado em modos deslizantes, ou *impedance sliding mode control* (ISMC);
- 2) Controlador do subsistema hidráulico - Linearização por realimentação robusta, ou *robust feedback linearization* (RFL).

Logo, para fazer referência ao controlador em cascata que foi sintetizado neste capítulo a sigla ISMC+RFL será utilizada.

5.4 CONCLUSÃO

Nesse capítulo, primeiramente, foi apresentado a técnica de controle em cascata, empregada para a síntese do controlador do manipulador. Posteriormente, foi apresentado uma revisão das principais técnicas utilizadas na síntese do controlador em cascata. Mais adiante, foi realizado o projeto do controlador para o manipulador, onde as técnicas de controle por modos deslizantes, adaptativo e por impedância foram combinadas para a síntese do controlador do subsistema mecânico. Já as técnicas de linearização por realimentação e de controle robusto linear foram utilizadas para o projeto do controlador do subsistema hidráulico. Ao final, com o controlador de cada subsistema do manipulador, obteve-se o controlador em cascata do sistema.

6 RESULTADOS DO CONTROLE

Neste capítulo, o controlador sintetizado no capítulo 5 será avaliado na execução de um ciclo completo de trabalho pelo manipulador, através de simulação numérica no MATLAB/Simulink® R2017a. Para representar o ciclo de trabalho, uma trajetória de referência é criada, onde o manipulador realiza as operações de escavação e carregamento. Em seguida, a demanda de potência exigida para a execução dessa trajetória é verificada utilizando-se as equações do modelo de 3ª ordem do subsistema hidráulico, que foi derivado no capítulo 3. Por fim, os resultados obtidos nas simulações numéricas com o controlador sintetizado são analisados, e comparados com os de outros de controladores empregados anteriormente na literatura.

6.1 TRAJETÓRIA PARA O CONTROLE DO MANIPULADOR

A trajetória de referência, construída para o teste do controlador, foi obtida a partir da sobreposição de movimentos baseados em equações do tipo cicloidal, definidos em relação ao tempo, como mostra a expressão a seguir (ALMEIDA, 2013):

$$r = r_i + \Delta r \left[\frac{\Delta t}{T_m} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{T_m} \Delta t \right) \right] \quad (6.1)$$

onde r é a posição, r_i é a posição inicial, T_m é o período do movimento, e $\Delta t = t - t_i$ é a diferença entre os instantes de tempo inicial, t_i , e atual, t .

Segundo Almeida (2013), a utilização da equação cicloidal é interessante pois faz com que a trajetória seja suave, isto é, possua derivada segunda contínua. Desta forma, o movimento terá baixas velocidade e aceleração nos instantes iniciais e finais, além de iniciar e terminar o movimento com velocidade e aceleração nulas.

6.1.1 Descrição da trajetória de referência

A trajetória de referência criada para o manipulador pode ser dividida em 9 fases. Essas fases são divididas entre as operações de escavação e carregamento. A seguir, essas operações são discutidas através da descrição de cada fase da trajetória de referência.

6.1.1.1 Operação de escavação

A escavação é a primeira operação realizada pelo manipulador. Esta consiste basicamente em remover material de um terreno. Esta operação é representada por 4 fases da trajetória de referência. Essas fases são descritas a seguir:

➤ Aproximação até o nível do terreno

A primeira fase é a de aproximação, onde a ponta da caçamba é aproximada até o nível do terreno, com uma orientação adequada para iniciar a escavação.

➤ Penetração

Na fase de penetração, o movimento da caçamba é unicamente translacional, sendo necessário determinar o ângulo de inclinação θ_{inc} para um determinado ângulo de aproximação α_{ap} . O ângulo θ_{inc} deve ser maior do que o ângulo de aproximação, ou seja, $\theta_{inc} \geq \alpha_{ap}$. Se esta condição não for satisfeita, o fundo da caçamba pressiona o solo acarretando o desenvolvimento de uma força reativa abaixo da caçamba. Na prática, tem-se que $\theta_{inc} > \alpha_{ap} + \varepsilon_{esc}$, onde ε_{esc} é um ângulo pequeno, que tem a função de garantir que o fundo da caçamba não pressione o solo (SINGH, 1995b).

➤ Arrastamento

Durante a fase de arrastamento, a ponta da caçamba deve seguir uma linha reta enquanto executa o movimento de rotação, a uma baixa velocidade. Segundo Singh (1995b), a rotação nessa fase é essencial, porque a caçamba deve estar em uma posição adequada para iniciar a fase de rotação, isto é, o ângulo θ_{inc} deve ser minimizado, porém, este ainda deve ser elevado o suficiente para evitar que o fundo e a parte de trás da caçamba pressionem o solo, à medida em que a rotação é executada.

➤ Rotação

No início da fase de rotação, o movimento realizado deve fazer com que a máxima quantidade possível de material seja acomodada dentro da caçamba. Para tanto, é necessário que este movimento seja excetuado, de modo que a ponta da caçamba gere o menor raio de rotação possível. Para preservar o perfil escavado e simplificar

a construção da trajetória de referência, a curva da fase de rotação será aproximada por uma reta.

Na Figura 100 são mostradas todas as fases da escavação que foram descritas acima, juntamente com a modificação aplicada no perfil escavado na fase de rotação.

Figura 100 - Fases da operação de escavação.

Fonte: adaptado de Singh (1995b).

6.1.1.2 Operação de movimentação com carga

Após o termino da escavação o manipulador realiza a operação de movimentação com carga. Essa operação tem como objetivo transportar o material escavado até o local desejado. Esta operação é dividida em mais 5 fases da trajetória de referência, que são descritas a seguir:

➤ Levantamento

A fase de levantamento, que é onde a caçamba executa uma translação na direção vertical com sentido para cima, em relação ao nível do terreno, tem como objetivo afastar a caçamba do nível do terreno para que a próxima fase possa ser realizada.

➤ Movimentação fora do plano de escavação

Após o levantamento o manipulador executa a fase de movimentação fora do plano de escavação a partir do movimento de giro da sua base.

➤ Aproximação até o local de despejo

Em seguida, outra aproximação é realizada a fim de alcançar o local de descarregamento do material escavado como, por exemplo, a caçamba de um caminhão.

Durante estas 3 últimas fases, a orientação da caçamba, relativa ao final da fase de rotação, é preservada. Isto é feito com a finalidade de preservar o material que foi escavado no interior da caçamba.

➤ Descarregamento

Em seguida vem a fase de descarregamento, onde a caçamba é rotacionada com o objetivo de transferir o material escavado para o local de descarregamento.

➤ Retorno

A última fase é a de retorno, onde a caçamba é deslocada até à posição inicial para que um novo ciclo de trabalho possa novamente ser realizado.

6.1.1.3 Ciclo completo de trabalho

A Figura 101 mostra a trajetória obtida para a ponta da caçamba do manipulador, juntamente com a indicação de cada fase do movimento. Na Tabela 4 são reunidas as componentes da posição absoluta dos pontos de início e fim de cada fase da trajetória de referência.

Figura 101 - Trajetória de referência para os testes do controlador.

Fonte: o autor.

Tabela 4 - Pontos da trajetória de referência para o teste do controlador.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[m]$	2	3	2,4	1,6	1	1	0,5	0,5	2
$y[m]$	1,5	0,3	0,7	-0,7	-0,3	1	1	0,5	1,5
$z[m]$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Fonte: o autor.

Para o seguimento que conecta o ponto 1 ao 2, correspondente a fase de aproximação, foi utilizado um período de movimento de 10 s , sendo que para os demais foi aplicado um período de 5 s .

Os seguimentos do ângulo de ataque da caçamba, α_a , foram definidos para atender a necessidade de manter um ângulo de escavação pequeno, durante a escavação, e um ângulo de ataque elevado, quando a caçamba estiver cheia. A Tabela 5 reúne os parâmetros da trajetória referentes ao ângulo de ataque, e na Figura 102 os seguimentos definidos para α_a são ilustrados.

Tabela 5 - Ângulo de ataque da caçamba para a trajetória de referência.

	$\alpha_i[rad]$	$\Delta\alpha[rad]$	$t_i[s]$	$T_m[s]$
$t \leq 10$	$-\pi/3$	0	0	10
$10 < t \leq 15$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	10	5
$15 < t \leq 20$	$-\pi/2$	0	15	5
$20 < t \leq 25$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	20	5
$25 < t \leq 40$	$-\pi$	0	25	15
$40 < t \leq 45$	$-\pi$	$4\pi/7$	40	5
$45 < t \leq 50$	$-3\pi/7$	$\pi/10$	45	5

Fonte: o autor.

Utilizando-se o modelo da cinemática inversa do manipulador que foi derivado no capítulo 2, obtêm-se os deslocamentos angulares desejados para as juntas ativas do mesmo, sendo que esses deslocamentos são mostrados pela Figura 103.

Figura 102 - Seguimentos do ângulo de ataque da caçamba.

Fonte: o autor.

Figura 103 - Deslocamentos angulares desejados.

Fonte: o autor.

6.1.2 Demanda de potência para a execução da operação

Neste capítulo, o controlador em cascata será avaliado em relação ao seguimento da trajetória de referência especificada anteriormente. Para tanto, deve-se verificar se essa trajetória é adequada à capacidade da unidade de suprimento. Logo, alguns conceitos relacionados aos requisitos de energia do sistema devem ser introduzidos. Desta forma, tem-se que a potência consumida pelo sistema, tomando-se o caso escalar, é dada por (JENSEN; VAD, 2013):

$$P_{mec} = F_h \dot{y}_c \quad (6.2)$$

sendo que com as relações $F_h = p_l A_a$ e $\dot{y}_c = Q_a / A_a$, que foram devidamente apresentadas no capítulo 3, chega-se em:

$$P_{hid} = p_l A_a \frac{Q_a}{A_a} = -p_l A_a \frac{Q_b}{A_b} = p_l Q_a = -p_l \alpha_c^{-1} Q_b = p_l Q_l \quad (6.3)$$

Logo, para analisar a demanda de potência do sistema, é necessário calcular as vazões e pressões de carga para a execução trajetória de referência e verificar se essas estão dentro dos limites da unidade de suprimento.

6.1.2.1 Pressões e vazões de referência

Determinam-se as pressões de carga para a execução da trajetória de referência através da sua relação com as forças hidráulicas, ou seja, $p_{ld} = F_{hd} / A_a$ sendo F_{hd} a força hidráulica de referência, que é calculada com o modelo do subsistema mecânico do manipulador, na forma de dinâmica inversa (JENSEN; VAD, 2013).

As vazões de carga para a execução da trajetória de referência são calculadas de acordo com a velocidade linear de referência dos cilindros, como é mostrado na expressão a seguir:

$$Q_{ld} = \begin{cases} Q_{ad} = A_a \dot{y}_{cd} & \text{se } x_v \geq 0 \\ Q_{bd} = A_b \dot{y}_{cd} & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

onde $\dot{y}_{cd}$ é a velocidade linear de referência do cilindro hidráulico. As grandezas cinemáticas para o cálculo das vazões e pressões de carga de referências são determinadas com os deslocamentos angulares desejados, mostrados na Figura 103.

6.1.2.2 Capacidade das válvulas de controle

Na análise de potência também deve ser verificado se determinada vazão de carga de referência pode ser suprida pela respectiva válvula. Para realizar essa verificação deve-se construir a curva vazão versus pressão de carga para cada uma das válvulas (JENSEN; VAD, 2013). A seguir, a equação da vazão de carga é reescrita:

$$Q_l = \begin{cases} Q_a = x_v k_a \sqrt{p_s - p_a} & \text{se } x_v \geq 0 \\ -Q_b = x_v \sigma_v k_a \sqrt{p_s - p_b} & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

onde $\sigma_v = k_b / k_a$ é relação entre os coeficientes de vazão k_a e k_b da válvula. Nota-se aqui uma mudança na relação σ_v que foi definida no capítulo 3, sendo que tal mudança tem a finalidade de isolar a dinâmica do acionamento eletromecânico da análise atual. Desta forma, a vazão de carga fica escrita em função do deslocamento x_v , ao invés da tensão u_v . No entanto, verifica-se que a equação (6.5) não é função da pressão de carga. Logo, para escrever a vazão de carga em função da pressão de carga, recorre-se à equação (3.74), que é reescrita a seguir:

$$Q_l = \begin{cases} Q_a = x_v k_l \sqrt{p_s - p_l - \alpha_c p_t} & \text{se } x_v \geq 0 \\ -Q_b = x_v k_l \sqrt{\alpha_c p_s + p_l - p_t} & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

onde,

$$k_l = \frac{\sigma_v k_a}{\sqrt{\sigma_v^2 + \alpha_c^3}} \quad (6.7)$$

é o coeficiente de vazão de carga, considerando-se que a vazão de carga dependente diretamente do deslocamento x_v .

Na análise de potência, a equação (6.6) será utilizada para o cálculo da vazão de carga que poder ser suprida por cada válvula. Para esse cálculo, utilizam-se os limites de pressão de carga que serão definidos na próxima seção.

6.1.2.3 Limites da unidade de suprimento

O limite de vazão fornecida para cada atuador é determinado de acordo com a máxima vazão que pode ser fornecida pela unidade de suprimento. Os limites de pressão de carga devem ser determinados de acordo com os limites das pressões das

câmaras dos cilindros (JENSEN; VAD, 2013). Para tanto, considera-se que $x_v \geq 0$, desta forma, isolando-se p_l da equação (3.64), chega-se em:

$$p_l = \frac{(\sigma_v^2 + \alpha_c^3) p_a - \alpha_c^3 p_s - \sigma_v^2 \alpha_c p_t}{\sigma_v^2} \quad (6.8)$$

Admitindo-se que a pressão p_a varia do seu limite inferior, p_l , até o seu limite superior, p_s , obtêm-se os seguintes limites para p_l , considerando $x_v \geq 0$:

$$p_a = p_t \Rightarrow p_l = \frac{\alpha_c^3 (p_t - p_s)}{\sigma_v^2} + (1 - \alpha_c) p_t \quad (6.9)$$

$$p_a = p_s \Rightarrow p_l = p_s - \alpha_c p_t$$

Considerando-se agora $x_v < 0$, e isolando-se p_l da equação (3.65), vem que:

$$p_l = \frac{\sigma_v^2 p_s - (\sigma_v^2 + \alpha_c^3) p_b + \sigma_v^2 p_t}{\alpha_c^2} \quad (6.10)$$

Substituindo os limites da pressão p_b , que são os mesmos da pressão p_a , na equação (6.10), obtêm-se os seguintes limites para p_l , considerando $x_v < 0$:

$$p_b = p_t \Rightarrow p_l = \frac{\sigma_v^2 p_s}{\alpha_c^2} - \alpha_c p_t \quad (6.11)$$

$$p_b = p_s \Rightarrow p_l = \frac{\sigma_v^2}{\alpha_c^2} p_t - \alpha_c p_s$$

Construindo-se o gráfico da vazão de carga em função da respectiva pressão de carga, para cada atuador, e considerando-se os deslocamentos positivos e negativos do carretel, obtêm-se as curvas de vazão versus pressão do sistema, que serão mostradas na próxima seção.

6.1.2.4 Resultados da análise da demanda de potência

As Figuras 104 a 107 mostram as curvas de vazão versus pressão, para os atuadores 1 a 4, respectivamente, obtidas com a implementação das equações da análise da demanda de potência no MATLAB® R2017a. Nelas, também são mostradas retas verticais e horizontais. As retas verticais indicam os limites de pressão de carga, referentes à $p_l = 2p_s/3$, para $x_v \geq 0$, e à $p_l = -2\alpha_c p_s/3$, para $x_v < 0$. E as retas horizontais indicam o limite de vazão de suprimento, para cada atuador.

Figura 104 - Demanda de vazão e pressão do atuador 1.

Fonte: o autor.

Figura 105 - Demanda de vazão e pressão do atuador 2.

Fonte: o autor.

Figura 106 - Demanda de vazão e pressão do atuador 3.

Fonte: o autor.

Figura 107 - Demanda de vazão e pressão do atuador 4.

Fonte: o autor.

De acordo com Merrit (1967), as intersecções das retas de pressão de carga com as curvas de vazão versus pressão das válvulas determinam os pontos onde ocorre a máxima transferência de potência para os atuadores.

Analisando-se os gráficos das Figuras 104 a 107, verifica-se que o limite de potência da unidade de suprimento é adequado à trajetória de referência que foi especificada, pois as curvas de vazão versus pressão de carga dos atuadores ficaram compreendidas entre os limites de pressão e vazão de carga do sistema. No entanto, ressalta-se que a análise realizada considera o estado estacionário. Portanto, efeitos como compressibilidade do fluido hidráulico e situações onde ocorrem cavitação são negligenciadas (JENSEN; VAD, 2013).

6.2 SIMULAÇÃO DO CONTROLADOR

Esta seção é dedicada a apresentação das simulações do manipulador com o controlador sintetizado. Para tanto, primeiramente, o sensoriamento empregado ao manipulador é exposto. Mais adiante, as condições iniciais e as incertezas consideradas para as simulações são especificadas. Posteriormente, os controladores apontados para a comparação são apresentados, e os resultados das simulações são expostos e discutidos. Por fim, é realizada uma comparação de desempenho entre os controladores testados.

6.2.1.1 Sensoriamento do manipulador

Para possibilitar o controle do manipulador foi considerado que os seguintes sensores são empregados no equipamento:

- 1) *Encoders* de posição angular para a medição do deslocamento angular absoluto das juntas ativas do manipulador. Em cada junta ativa é instalado um *encoder*, sendo que para as simulações foi considerado o modelo AWS360, com precisão de medida de $0,05^\circ$ e resolução de 12 bits do fabricante Novotechnik, ilustrado na Figura 108 (a).
- 2) Unidades de medidas inerciais com girômetros uniaxiais para a medição das velocidades angulares dos elos principais do manipulador. Essas unidades são

fixadas nos elos principais. Para as simulações foi considerado o modelo SMI 540 do fabricante Rexroth, mostrado na Figura 108 (b).

- 3) Células de cargas para a medição das forças hidráulicas exercidas pelos atuadores. Para realizar a medição das forças hidráulicas, as células carga devem ser instaladas no lugar dos pinos das camisas. Nas simulações foi considerado o modelo de célula de carga SPHC com baixa histerese ($< 2\%$) do fabricante Strainert, ilustrado na Figura 108 (c).

Figura 108 - Sensores. (a): *Encoder AWS360*; (b): Sensor inercial SMI540; (c): Célula de carga SPHC.

(a)

(b)

(c)

Fonte: (a): Novotechnik (2017); (b): Bosch (2017); (c): Strainert (2017).

Para realizar a estimação dos estados do sistema com as medidas dos sensores, um filtro de Kalman não linear do tipo *unscented* foi projetado. Este projeto foi

realizado com o mesmo modelo empregado na síntese do controlador em cascata. Na Figura 140 são ilustrados os blocos dos sensores e do filtro de Kalman. No apêndice D são apresentados o algoritmo do filtro, os modelos, e os parâmetros dos sensores utilizados no projeto do filtro.

6.2.1.2 Incertezas e distúrbios considerados nas simulações

Como mencionado anteriormente, o controlador sintetizado deve ser robusto o suficiente para lidar com incertezas de modelagem e distúrbios externos. Essa robustez pode ser verificada pelas simulações. Para tanto, as incertezas e distúrbios considerados nas simulações são especificados a seguir para os subsistemas mecânico e hidráulico do manipulador.

➤ Incetezas e distúrbios do subsistema mecânico

No subsistema mecânico, os seguintes itens são considerados para o vetor de incertezas e distúrbios externos:

- 1) A presença dos cilindros e das barras na dinâmica;
- 2) Os esforços provenientes das operações de escavação e de carregamento;
- 3) O atrito presente nos cilindros hidráulicos.

➤ Incetezas e distúrbios do subsistema hidráulico

Para o subsistema hidráulico são considerados como incertezas e distúrbios os itens listados a seguir:

- 1) Variação de 50 % do módulo de elasticidade volumétrica do fluido hidráulico em relação ao valor nominal;
- 2) O vazamento interno entre as câmaras dos cilindros.

6.2.1.3 Condições iniciais do manipulador

Na Tabela 6 são reunidas as condições iniciais, referentes aos estados iniciais do modelo acoplado de 24ª ordem do manipulador, que foram consideradas para as simulações dos controladores.

Tabela 6 - Estados iniciais do modelo acoplado de 24ª ordem do manipulador.

Estados iniciais do modelo do manipulador		
Deslocamentos angulares	$\mathbf{q}(t_0) = [0,25 \quad 0,97 \quad -2,33 \quad -2,07]^T$	$[rad]$
Velocidades angulares	$\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$	$[rad / s]$
Pressões das câmaras	$\mathbf{p}_a(t_0) = [2,67 \quad 5,49 \quad 2,33 \quad 3,04]^T$ $\mathbf{p}_b(t_0) = [5,46 \quad 5,18 \quad 5,54 \quad 5,37]^T$	$[MPa]$
Deslocamentos lineares	$\mathbf{x}_v(t_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$	$[m]$
Velocidades lineares	$\dot{\mathbf{x}}_v(t_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$	$[m / s]$

Fonte: o autor.

Considera-se nas simulações que estados do manipulador são diferentes dos desejados no instante inicial, ou seja, $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{x}_d(t_0)$.

6.2.1.4 Especificações de projeto do controlador em cascata

A seguir, são reunidas as especificações de projeto do controlador:

- 1) Bom seguimento do sinal de referência;
- 2) Sobressinal menor que 10 % do valor de referência;
- 3) Tempo de acomodação menor que 5 s;
- 4) Insensibilidade a erros de modelagem, distúrbios e ruídos de alta frequência;
- 5) Atenuação do *chattering* nos sinais de controle.

A especificação 5 se faz necessária para preservar a vida útil da válvula direcional, além de diminuir a potência consumida pelos atuadores, logo, essa especificação influencia diretamente nos custos de operação.

6.2.1.5 Controladores para comparação

Para verificar a eficiência do controlador sintetizado, este foi comparado com outros dois controladores em cascata do tipo não linear, sendo eles: 1) controlador com ação corretiva do tipo PID e P para os subsistemas mecânico e hidráulico, respectivamente, e 2) controlador com ação corretiva do tipo SMC e P para os subsistemas mecânico e hidráulico, respectivamente.

Os controladores considerados para comparação foram sintetizados no espaço das juntas do manipulador, sendo que o controlador proposto foi sintetizado no espaço dos cilindros. Esta diferença, no entanto, não afeta a comparação entre os resultados dos controladores, pois os comprimentos e as velocidades lineares dos cilindros são calculados com os deslocamentos e as velocidades angulares das juntas do manipulador. A síntese dos controladores de comparação foi realizada com o modelo acoplado de 12ª ordem. Os controladores considerados para comparação são reunidos no apêndice E.

6.2.2 Resultados das simulações

Nesta seção são apresentados, comparados e discutidos os resultados das simulações dos controladores considerados para o sistema.

O apêndice G apresenta o simulador computacional criado para o sistema controlado em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a. As simulações foram realizadas com um *solver* que utiliza o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração fixo. O valor do passo escolhido foi de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, sendo que as simulações foram realizadas de $t_0 = 0 \text{ s}$ até $t = 50 \text{ s}$.

Os parâmetros utilizados para a representação dos ruídos presentes nas medidas dos sensores são reunidos no apêndice D, na Tabela 20. E os parâmetros de controle que foram utilizados nas simulações são reunidos no apêndice F, nas Tabelas 23 e 24.

As incertezas e distúrbios considerados nas simulações foram especificados anteriormente neste capítulo, para cada subsistema do manipulador.

As Figuras 109 a 111 mostram a comparação entre os deslocamentos angulares desejados e os obtidos nas simulações. Nas Figuras 112 a 114 é mostrada a comparação entre a trajetória de referência no espaço de operação e a obtida nas simulações. Os erros de seguimento em relação aos deslocamentos angulares desejados são mostrados nas Figuras 115 a 117. As Figuras 118 a 120 mostram as forças hidráulicas geradas pelos atuadores. As tensões de comando, referentes aos sinais de controle do sistema, são mostradas nas Figuras 121 a 123. Por fim, as Figuras 124 a 126 mostram o histórico temporal do espaço de fase do erro de seguimento.

Figura 109 - Seguimento dos deslocamentos angulares com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 110 - Seguimento dos deslocamentos angulares com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 111 - Seguimento dos deslocamentos angulares com SMC+P.

Fonte: o autor.

Figura 112 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 113 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 114 - Seguimento da trajetória no espaço de trabalho com SMC+P.

Fonte: o autor.

Figura 115 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 116 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 117 - Erro de seguimento dos deslocamentos angulares com SMC+P.

Fonte: o autor.

Figura 118 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 119 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 120 - Forças hidráulicas geradas pelos atuadores com SMC+P.

Fonte: o autor.

Figura 121 - Tensões de comando com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 122 - Tensões de comando com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 123 - Tensões de comando com SMC+P.

Fonte: o autor.

Figura 124 - Espaço de fase do erro de seguimento com ISMC+RFL.

Fonte: o autor.

Figura 125 - Espaço de fase do erro de seguimento com PID+P.

Fonte: o autor.

Figura 126 - Espaço de fase do erro de seguimento com SMC+P.

Fonte: o autor.

Analisando-se as Figuras 109 a 111 verifica-se um bom seguimento da trajetória de referência, com tempo de acomodação menor que 5 s, e com sobressinal menor que 10 % em todas as simulações. Logo, todos os controladores atendem as especificações de projeto 1, 2 e 3.

Sobre a execução da trajetória de referência no espaço de trabalho mostrada nas Figuras 112 a 114, nota-se que o ISMC+RFL proporciona melhor seguimento do que outros controladores (PID+P e SMC+P), mesmo na presença de incertezas, distúrbios e ruídos, o que é confirmado nos gráficos dos erros seguimento nas Figuras 115 a 117. Nestes, verifica-se que o erro de seguimento dos deslocamentos angulares das juntas que atuam no plano vertical aumenta quando a operação de escavação é iniciada. Isto acontece porque a força de escavação é considerada como um distúrbio severo. Em relação ao erro de seguimento da junta da base, este não aumenta durante a escavação pois esta junta atua no plano horizontal, onde não há transmissão dos torques de escavação. Após o início da fase de penetração, nota-se que os controladores conseguem compensar os esforços de escavação. No entanto, analisando-se os gráficos das Figuras 118 a 120, observa-se um comportamento oscilatório de alta frequência nas forças hidráulicas geradas pelos atuadores quando os controladores PID+P e SMC+P são considerados. Este comportamento também é verificado com o ISMC+RFL, só que em intensidade significativamente menor. Isto indica a presença de *chattering* de alta intensidade nos sinais de controle que são gerados pelos PID+P e SMC+P, o que é confirmado nos gráficos das tensões de comando nas Figuras 121 a 123. Nestes gráficos é mostrado que o conteúdo de alta frequência presente nos sinais de controle gerados pelo ISMC+RFL é consideravelmente menor se comparado com os do PID+P e do SMC+P. Portanto, pode-se afirmar que o ISMC+RFL é capaz de rejeitar a maior parte dos sinais de alta frequência (ruídos de medição) presentes nas forças hidráulicas de referência, além de fornecer um bom seguimento da trajetória de referência. Isto implica que os controladores PID+P e SMC+P são sensíveis aos ruídos de medição, logo, são inaptos a atender as especificações de projeto 4 e 5. Portanto, somente o ISMC+RFL é capaz de atender tais especificações.

Sobre ao histórico temporal do espaço de fase do erro de seguimento mostrado pelas Figuras 124 a 126, verifica-se que todas trajetórias convergem para alguma vi-

zinhança próxima da origem do espaço de fase. No entanto, observa-se que a convergência com o ISMC+RFL é mais suave, devido a parcela de controle por impedância que modifica a superfície de escorregamento de acordo com a estimativa do distúrbio externo, e devido também à rejeição dos ruídos de medição que é gerada pelo controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$. Nota-se ainda que quando o sistema é submetido a distúrbios severos, como durante a operação de escavação, as trajetórias retornam para a vizinhança da origem do espaço de fase. Porém, quando o ISMC+RFL é considerado as trajetórias retornam de forma mais suave. Logo, pode-se inferir que o ISMC+RFL fornece uma convergência mais suave para os estados do sistema, sem acarretar em diminuição de desempenho.

6.2.2.1 Comparação do desempenho dos controladores

A comparação dos resultados das simulações é realizada com ferramentas matemáticas que avaliam a performance dos controladores. Para tanto, alguns dos índices de desempenho utilizados em Barbosa (2017) e em Boisseau et al. (2015) serão empregado aqui, sendo eles:

- 1) Integral do erro absoluto vezes o tempo, conhecido por *integral time-weighted absolute error* (ITAE), que integra o valor absoluto do erro de seguimento multiplicado pelo tempo em relação ao tempo:

$$\text{ITAE} = \int_{t_0}^t t |e| d\tau \quad (6.12)$$

- 2) Integral do erro absoluto, ou *integral absolute error* (IAE), que realiza a integração do erro absoluto em relação ao tempo:

$$\text{IAE} = \int_{t_0}^t |e| d\tau \quad (6.13)$$

- 3) Integral do controle absoluto, ou *integral absolute control* (IAU), que integra o valor absoluto do esforço de controle em relação ao tempo:

$$\text{IAU} = \int_{t_0}^t |u| d\tau \quad (6.14)$$

Os resultados referentes ao cálculo dos índices de desempenho para os controladores testados são reunidos na Tabela 7.

Tabela 7 - Índices de performance dos controladores.

Controlador	Base (θ_1)			Lança (θ_2)		
	ITAE	IAE	IAU	ITAE	IAE	IAU
ISMC+RFL	2,07	0,37	9,72	4,65	0,60	16,38
PID+P	7,87	0,31	9,73	10,52	0,52	60,34
SMC+P	3,80	0,23	9,78	8,08	0,49	65,45
Controlador	Braço (θ_3)			Caçamba (θ_4)		
	ITAE	IAE	IAU	ITAE	IAE	IAU
ISMC+RFL	15,60	1,64	16,50	43,64	2,86	19,31
PID+P	21,33	1,16	82,50	64,01	2,70	29,47
SMC+P	48,34	2,23	55,86	84,35	3,90	33,73

Fonte: o autor.

Nas Figuras 127 a 129 são mostrados os gráficos de barras criados através da normalização dos resultados reunidos na Tabela 7.

Figura 127 - Índices ITAE dos controladores testados.

Fonte: o autor.

Figura 128 - Índices IAE dos controladores testados.

Fonte: o autor.

Figura 129 - Índices IAU dos controladores testados.

Fonte: o autor.

Pela Figura 127 verifica-se que o ISMC+RFL proporciona índices ITAE razoavelmente menores em comparação com os dos outros controladores. Logo, o melhor seguimento da trajetória de referência em regime é obtido com o ISMC+RFL. Analisando a Figura 128 nota-se que os índices IAE obtidos com os controladores PID+P e SMC+P foram menores do que os obtidos com o ISMC+RFL. Isto indica que os controladores PID+P e SMC+P proporcionaram um melhor seguimento da trajetória de referência nos instantes iniciais. Pela Figura 129 verifica-se que o ISMC+RFL proporcionou os menores índices IAU entre os controladores. Portanto, este também gera os menores esforços de controle. Por fim, com base nos gráficos criados com os dados da Tabela 7, e priorizando o seguimento da trajetória de referência em regime, bem como a redução dos esforços de controle, pode-se afirmar que o ISMC+RFL apresentou o melhor desempenho entre os controladores testados.

6.3 CONCLUSÃO

Nesse capítulo, primeiramente, a trajetória de referência para a simulação do controlador em cascata sintetizado foi apresentada. Em seguida, a demanda de potência para execução da trajetória de referência foi analisada. Nesta análise, verificou-se que a demanda de energia pode ser suprida pela unidade de suprimento do subsistema hidráulico. Na sequência, o sensoriamento empregado ao manipulador, as incertezas e distúrbios considerados nas simulações, e os controladores para comparação foram apresentados. Mais adiante, as simulações dos controladores foram realizadas e os resultados dessas simulações foram analisados. Nessa análise, verificou-se que o controlador proposto proporcionou erros de acompanhamento e esforços de controle menores para o seguimento da trajetória de referência, em relação aos controladores considerados para a comparação.

7 CONCLUSÕES

As chamadas máquinas de construção são muito utilizadas na indústria em geral, devido a sua capacidade de trabalho e adequação aos mais variados tipos de tarefas que são exigidas. Máquinas melhores, mais eficientes e que forneçam maior segurança ao operador são uma demanda constante da indústria. Para tanto, a automação desse tipo de equipamento é considerada. Na automação de máquinas de construção, em especial das escavadeiras hidráulicas, o controle do manipulador articulador é visto como uma tarefa central. Entre os diversos tipos de escavadeiras hidráulicas, destacam-se as miniescavadeiras, pois são máquinas menores, que possuem um circuito hidráulico simplificado, e são destinadas a tarefas mais leves e corriqueiras. Logo, as miniescavadeiras podem ser mais facilmente adaptadas para o controle. Portanto, o objetivo deste trabalho é a síntese de um sistema de controle viável para o manipulador de uma miniescavadeira hidráulica.

Na síntese do controlador, a abordagem de controle baseada em modelo foi adotada. Esta consiste basicamente em utilizar o modelo matemático do sistema para a síntese do seu controlador. Dessa forma, a fim de possibilitar a síntese de um controlador que permita a automação do manipulador, primeiramente, foram criados modelos matemáticos dos diversos subsistemas do manipulador. Posteriormente, estes modelos foram acoplados. Todos os modelos criados foram verificados em relação à sua capacidade de representação física do sistema. Essas verificações foram realizadas através da comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por modelos de referências, obtidos a partir de *softwares* comerciais dedicados à modelagem de sistemas dinâmicos. Utilizando os modelos analíticos foi possível estudar as características dinâmicas do sistema. Nesse estudo, constatou-se que o manipulador apresenta um comportamento típico de sistemas rígidos. Esses sistemas são conhecidos pelas dinâmicas rápidas e pelo comportamento subamortecido que, de fato, tornam a simulação e o controle desses sistemas uma tarefa difícil.

Com os modelos analíticos devidamente verificados, passou-se para a fase de síntese do controlador. Para tanto, a técnica de controle em cascata foi adotada, que consiste basicamente em dividir o sistema global em subsistemas, e projetar um controlador para cada subsistema. Para o projeto dos controladores dos subsistemas mecânico e hidráulico, foi necessário combinar técnicas avançadas de controle linear e

não linear. Isto porque os modelos dos subsistemas do manipulador contêm incertezas, e porque em um ambiente de operação altamente dinâmico, o equipamento fica sujeito a distúrbios e ruídos severos.

Para o subsistema mecânico, o controlador projetado é resultado da combinação das técnicas de controle por modos deslizantes, adaptativo, e por impedância. As técnicas de controle por modos deslizantes e adaptativo visam compensar a dinâmica não linear, as incertezas e os distúrbios externos, no subsistema mecânico. E a técnica de controle por impedância foi empregada para lidar com as forças transitórias que ocorrem durante o contato na operação de escavação. No controlador do subsistema hidráulico, as técnicas de linearização por realimentação e de controle robusto linear são combinadas. A linearização por realimentação tem a função de cancelar as principais não linearidades da dinâmica do subsistema hidráulico. E a técnica de controle linear robusto foi empregada para compensar as incertezas do modelo desse subsistema, e atenuar o efeito dos ruídos dos sensores nos sinais de controle.

O controlador sintetizado foi testado e comparado com outros controladores na realização de um ciclo completo de trabalho pelo manipulador, através de simulação computacional em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a. Para possibilitar as simulações uma trajetória de referência foi criada. Nesta, foi considerado que o manipulador escava certa quantidade de solo do terreno e, em seguida, deposita o material escavado no local de despejo. Antes das simulações, a potência exigida pelos atuadores para a execução do ciclo de trabalho foi verificada, onde constatou-se que a capacidade da unidade de suprimento era adequada. Nas simulações, os resultados mostraram que com o controlador proposto foi possível tornar o sistema robusto a incertezas e a distúrbios, atenuar o efeito dos ruídos de medição nos sinais de controle, e realizar um seguimento aceitável da trajetória de referência. Sobre a comparação realizada entre os resultados obtidos com o controlador sintetizado (ISMC+RFL) e os obtidos com outros controladores (PID+P e SMC+P), verificou-se que o controlador proposto apresentou o melhor desempenho em relação ao acompanhamento dos sinais de referências (deslocamentos angulares desejados) e em relação à redução da intensidade dos sinais de controle (tensões de comando) que foram gerados. Isto indica a possível aplicação do controlador desenvolvido para a automação do manipulador de uma miniescavadeira hidráulica.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

Aqui são feitas algumas sugestões em relação aos trabalhos futuros que podem ser realizados com base nessa pesquisa.

Na modelo do subsistema mecânico, o modelo da força de escavação pode ser substituído por outro modelo, baseado, por exemplo, na formulação de elementos discreto. A flexibilidade dos elos do manipulador também pode ser incluída no modelo do subsistema mecânico. Para tanto, o método dos seguimentos finito pode ser empregado. Este consiste em dividir os elos em segmentos que são conectados através de molas torcionais. Essas molas possuem rigidez equivalente à da respectiva seção de corte, que pode ser determinada a partir do método dos elementos finitos.

Em relação à modelagem do subsistema hidráulico, o modelo da unidade de suprimento pode ser adicionado ao modelo do subsistema hidráulico, juntamente com o modelo das tubulações. Para os cilindros hidráulicos, o modelo de atrito considerado foi do tipo estático. No entanto, este pode ser substituído por um modelo do tipo dinâmico, como o de LuGre. Os efeitos da zona morta podem ser incluídos no modelo das válvulas através da modificação das equações das vazões de controle. Pode-se ainda eliminar a hipótese de que o módulo de elasticidade volumétrica efetivo do fluido hidráulico é constante. Para tanto, algum modelo do tipo semi-empírico deve ser introduzido. Esta modificação pode ser facilmente realizada com o modelo apresentado no apêndice C, utilizado pelo SimHydraulics® do Simscape™.

Sobre o controle em cascata, mais especificamente sobre o controlador do subsistema mecânico, neste pode ser adicionado um observador de distúrbios por modos deslizantes para realizar a estimação das incertezas e distúrbios do subsistema. No controlador do subsistema hidráulico, a técnica de controle adaptativo poder ser adicionada na sua lei controle para realizar a estimação de parâmetros incertos como o módulo de elasticidade volumétrica do fluido hidráulico, e para a compensação da zona morta da válvula. Por fim, um controlador para a dinâmica do acionamento eletromecânico, caso essa não seja desprezível, pode ser adicionado à estrutura de controle em cascata.

REFERÊNCIAS

ABROUG, N.; MORINIERE, B. Enhancing motor torque control by implementing H-infinity controller and compensating electronics nonlinearities. **IEEE International Symposium on Industrial Electronics**, p. 111–116, 2014.

ALEKSEEVA, T. V. et al. **Machines for earthmoving work: theory and calculations**. New Delhi: Amerind Publishing Co. Pvt. Ltd., 1986.

ALMEIDA, R. Z. H. **MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE DE ROBÔ MANIPULADOR DE ARQUITETURA PARALELA ASSIMÉTRICA DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**. 2013. 179 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

ALTHOEFER, K. et al. Hybrid Soil Parameter Measurement and Estimation Scheme for Excavation Automation. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 58, n. 10, p. 3633–3641, out. 2009.

ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; DE WIT, C. C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. **Automatica**, v. 30, n. 7, p. 1083–1138, 1994.

BARBOSA, F. D. S. **4DOF QUADCOPTER: DEVELOPMENT, MODELING AND CONTROL**. 2017. 88 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

BARUH, H. **ANALYTICAL DYNAMICS**. Singapore: McGraw-Hill, 1999.

BERNOLD, L. E. Motion and Path Control for Robotic Excavation. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 6, n. 1, p. 1-18, jan. 1993.

BOISSEAU, B. et al. **Attitude control of a gyroscope actuator using event-based discrete-time approach**. 2015 International Conference on Event-based Control, Communication, and Signal Processing (EBCCSP). **Anais...IEEE**, jun. 2015.

BOSCH. **Semiconductors & Sensors - Vehicle dynamics systems**. Disponível em: <http://www.bosch-semiconductors.de/en/automotive_electronics/mems/vehicledynamicssystem/vehicle_dynamics_systems.html>. Acesso em: 14 ago. 2017.

BU, F.; YAO, B. **Nonlinear adaptive robust control of hydraulic actuators regulated by proportional directional control valves with deadband and nonlinear flow gains**. Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334). **Anais...IEEE**, 2000.

CATERPILLAR. **Cat | Construction Equipment | Caterpillar**. Disponível em: <https://www.cat.com/en_US/by-industry/construction.html>. Acesso em: 20 ago. 2017a.

CATERPILLAR. **CAT COMMAND MINE STAR MODULE**. Disponível em: <http://www.cat.com/en_US/by-industry/mining/surface-mining/surface-technology/command.html>. Acesso em: 8 fev. 2017b.

CETTO, J. A.; KOIVO, A. J. **Controller for Excavator During Digging Operations**. IASTED International Conference in Robotics and Manufacturing. **Anais...Cancun**: 1995.

CHACKO, V. et al. **State of the Art in Excavators**. Proceedings of the 2014 International Conference on Advanced Mechatronic Systems. **Anais...IEEE**, ago. 2014.

CHANG, P. H.; LEE, S.-J. A straight-line motion tracking control of hydraulic excavator system. **Mechatronics**, v. 12, n. 1, p. 119–138, fev. 2000.

CHIANG, M. H.; HUANG, C. C. Experimental implementation of complex path tracking control for large robotic hydraulic excavators. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 23, n. 1–2, p. 126–132, 1 jan. 2004.

CHUNG, Y. K. et al. **A Study on Modeling and Simulation of Hydraulic System for a Wheel Loader using AMESim**. ICROS-SICE International Joint Conference. **Anais...2009**.

CONSTRUCTION EQUIPMENT. **Japan's New Rescue Robot | Construction Equipment**. Disponível em: <<https://www.constructionequipment.com/japans-new-rescue-robot>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

CUNHA, M. A. B. **CONTROLE EM CASCATA DE UM ATUADOR HIDRÁULICO: CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS E EXPERIMENTAIS**. 2001. 199 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

DE NEGRI, V. J. **MODELAGEM DE SERVOMECANISMOS HIDRÁULICOS E SIMULAÇÃO DE UM SERVOMECANISMO MECÂNICO-HIDRÁULICO**. 1987. 161 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1987.

DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. **Proceedings of the IEEE**, v. 76, n. 3, p. 212–232, mar. 1988.

DEMASI, D. **MODELAGEM DINÂMICA E DE CONTROLO DE UM MECANISMO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE PARA APLICAÇÃO EM UM ROBÔ HEXÁPODE**. 2012. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e Tecnologia dos Materiais) - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2012.

DONHA, D. C. **Apostila de Projeto de Sistemas de Controle Robustos Multivariáveis**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2006.

DOOSAN. **Doosan Construction Equipment - Hydraulic Breakers in Hammers/Breakers**. Disponível em: <<http://www.forconstructionpros.com/equipment/attachments/hammers-breakers/product/12035918/doosan-infracore-construction-equipment-doosan-hydraulic-breakers>>. Acesso em: 5 out. 2017.

DOYLE, J. C. et al. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.

DRIEMEYER, A. L. **Controle Avançado de Atuadores Hidráulicos: Aspectos Teóricos e Experimentais e Aplicações em Robótica**. 2002. 125 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

E-TECH SIMULATION. **Hydraulic Excavator Premium Simulator | e-Tech Simulation**. Disponível em: <<http://www.etechsimulation.com/index.php/en/industries/premium-construction-simulators/hydraulic-excavator-premium-simulator>>. Acesso em: 20 jun. 2017.

EARTHQUAKE NEWS. **4.2 Magnitude Earthquake Shakes Hualien**. Disponível em: <<http://www.earthquakenewz.com/news/4-2-magnitude-earthquake-shakes-hualien.html>>. Acesso em: 5 out. 2017.

FALES, R. **Robust control design for an electrohydraulic wheel loader system with a human-in-the-loop assessment in a virtual environment**. 2004. 131 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Australian Centre for Field Robotics, Iowa State University, Ames, 2004.

FINNING. **Cutting-edge Technology for Mining**. Disponível em: <http://www.finning.com/en_CA/technology/mining-technologies.html>. Acesso em: 10 set. 2017.

FOR CONSTRUCTION PROS. **Tips to Select Thumbs and Grapples for Handling Demolition and Construction Debris**. Disponível em: <<http://www.forconstructionpros.com/equipment/earthmoving/excavators/article/12248833/tips-to-select-thumbs-and-grapples-for-handling-demolition-and-construction-debris>>. Acesso em: 25 set. 2017.

FORESTER NETWORK. **Construction Telematics Play Part in Equipment Manufacturers Servicing Upgrades**. Disponível em: <<https://forester-network.com/daily/construction/construction-equipment/construction-telematics-play-part-in-equipment-manufacturers-servicing-upgrades-part-5/>>. Acesso em: 15 ago. 2017.

FRANKEL, J. G. **Development of a Haptic Backhoe Testbed**. 2000. 172 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Georgia, 2000.

FRIEDLAND, B. **Control System Design: An Introduction To State-Space Methods**. New York: Dover Publications, 1985.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. Structured H^∞ Synthesis in MATLAB. **IFAC World Congress**, v. 18, n. 1, p. 1435–1440, 2011.

GAO, Y.; YANCHAO, J.; QIN, Z. Motion Planning Based Coordinated Control for Hydraulic Excavators. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, v. 22, n. 1, p. 97–101, 2009.

HA, Q. P. et al. Impedance control of a hydraulically actuated robotic excavator. **Automation in Construction**, v. 9, n. 5–6, p. 421–435, set. 2000.

HA, Q. P. et al. Fuzzy sliding-mode controllers with applications. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 48, n. 1, p. 38–46, 2001.

HAGA, M.; HIROSHI, W.; FUJISHIMA, K. Digging control system for hydraulic excavator. **Mechatronics**, v. 11, n. 6, p. 665–676, set. 2001.

HE, Q. et al. Modeling and control of hydraulic excavator's arm. **Journal of Central South University of Technology**, v. 13, n. 4, p. 422–427, ago. 2006.

HONKAKORPI, J.; VIHONEN, J.; MATTILA, J. **MEMS-based state feedback control of multi-body hydraulic manipulator**. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. **Anais...IEEE**, nov. 2013.

HOGAN, N. Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I, II and III. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 107, n. 1, p. 1–24, 1985.

IMMERSIVE TECHNOLOGIES. **Immersive Technologies - Mining Hydraulic Shovel and Excavator Training Simulators**. Disponível em: <<https://www.immersive-technologies.com/products/Hydraulic-Shovel-Excavator-Training-Simulators.htm>>. Acesso em: 20 jul. 2017.

JANSSEN, B. R. A.; NIEVELSTEIN, M. M. J. Multi-loop Linkage Dynamics via Geometric Methods: A Case Study on a RH200 Hydraulic Excavator. **Mechanical Engineering**, n. October 2003, 2005.

JENSEN, N. H.; VAD, C. **Modeling and control of 4-DOF electro-hydraulic system**. 2013. 148 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica) - Mechatronic Control Engineering, Aalborg University, Aalborg, 2013.

JULIER, S.; UHLMANN, J.; WHYTE, H. F. D. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 3, p. 477–482, mar. 2000.

KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. **Dynamics: Theory and applications**. New York: McGraw-Hill, 1985.

KILIÇ, B. **DYNAMIC MODELLING OF A BACKHOE-LOADER**. 2009. 101 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - The Graduate School Of Natural And Applied Sciences, Middle East Technical University, Ankara, 2009.

KIM, Y. B. et al. Dynamically optimal trajectories for earthmoving excavators. **Automation in Construction**, v. 35, p. 568–578, nov. 2013.

KOIVO, A. J. Kinematics of Excavators (Backhoes) for Transferring Surface Material. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 7, n. 1, p. 17–32, jan. 1994.

KOIVO, A. J. et al. Modeling and Control of Excavator Dynamics during Digging Operation. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 9, n. 1, p. 10–18, 1996.

KRISHNA, M.; BARES, J. **Hydraulic system modeling through memory-based learning**. Proceedings. 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications (Cat. No.98CH36190). **Anais...IEEE**, 1998.

LAWRENCE, P. D. et al. **Coordinated and force-feedback control of hydraulic excavators**. Proceedings of the International Symposium on Experimental Robotics. **Anais...London: Springer-Verlag**, 1995.

LE, Q. H. et al. Development of a Virtual Excavator using SimMechanics and SimHydraulic. **Journal of The Korean Society for Fluid Power & Construction Equipments**, v. 10, n. 1, p. 29–36, 1 mar. 2013.

LEE, H.-H. **Engineering statics labs with SolidWorks motion 2015**. EUA: SDC Publications, 2015.

LEE, S.-U.; CHANG, P. H. Control of a heavy-duty robotic excavator using time delay control with integral sliding surface. **Control Engineering Practice**, v. 10, n. 7, p. 697–711, jul. 2002.

LIEBHERR. **Mining excavators - Liebherr**. Disponível em: <<https://www.liebherr.com/en/rou/products/mining-equipment/mining-excavators/mining-excavators.html>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

LINGARD, H.; COOKE, T.; GHARAIE, E. A case study analysis of fatal incidents involving excavators in the Australian construction industry. **Engineering, Construction and Architectural Management**, v. 20, n. 5, p. 488–504, 2 set. 2013.

LIU, Y.; HASAN, M. S.; YU, H.-N. Modelling and remote control of an excavator. **International Journal of Automation and Computing**, v. 7, n. 3, p. 349–358, 18 ago. 2010.

LU, Z.; GOLDENBERG, A. A. Robust Impedance Control and Force Regulation: Theory and Experiments. **The International Journal of Robotics Research**, v. 14, n. 3, p. 225–254, 2 jun. 1995.

LUQUE, J. C. C. **Identificação e Controle de um Veículo Submersível Autônomo Sub-atuado**. 149 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

MALVEZZI, F.; ORSINO, R. M. M.; HESS-COELHO, T. A. Lagrange's, Maggi's and Kane's equations applied to the dynamic modelling of serial manipulator. **XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME 2017**, 2017.

MATHWORKS. **SimMechanics™ User's Guide**. Natick, Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2002.

MATHWORKS. **SimHydraulics® User's Guide**. Natick, Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2015.

MATHWORKS. **Simscape™ User's Guide**. Natick, Massachusetts: The MathWorks, Inc., 2017.

MCCONVILLE, J. B. **Introduction to Mechanical System Simulation Using Adams**. EUA: SDC Publications, 2015.

MEDIA INDONESIA. **Jakarta tidak Siap Hadapi Gempa | Media Indonesia**. Disponível em: <<http://mediaindonesia.com/news/read/39779/jakarta-tidak-siap-hadapi-gempa/2016-04-12>>. Acesso em: 5 out. 2017.

MEIROVITCH, L. **Methods of Analytical Dynamics**. Nova York: McGraw-Hill, 2003.

MENG NEWS. **Excavator simulator not a game-INSIDE Korea JoongAng Daily**. Disponível em: <<http://mengnews.joins.com/view.aspx?aid=2998133>>. Acesso em: 25 ago. 2017.

MERRIT, H. E. **HYDRAULIC CONTROL SYSTEMS**. New York: John Wiley & Sons, 1967.

MSC SOFTWARE. **Dig the Dirt! – Application Examples using Adams-EDEM Co-Simulation**. Disponível em: <<http://simulatemoore.mscsoftware.com/digthe-dirt/>>. Acesso em: 10 jun. 2017.

NEWBURY MARKET. **Construction Update December 7th 2009**. Disponível em: <http://www.newburymarket.com/community_connection/blog/construction-update-december-7th-2009/>. Acesso em: 15 ago. 2017.

NGUYEN, Q. et al. **Feedback linearisation control for electrohydraulic systems of a robotic excavator**. Processing of Australian Conference on Robotics and Automation. **Anais...**Brisbane: 1999.

NGUYEN, Q. H.; QUANG, N. H. **Robust low level control of robotic excavation**. 2000. 234 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Australian Centre for Field Robotics, The University of Sydney, Sydney, 2000.

NOVOTECHNIK. **Angle Sensors | Rotary Shaft Type**. Disponível em: <<http://www.novotechnik.com/Rotary-Shaft-Type/rotaryshafttype.html#aw360>>. Acesso em: 14 ago. 2017.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

PATEL, B. P. **Design and Structural Optimization of Backhoe Attachment of Mini Hydraulic Excavator for Construction Work**. 2012. 263 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Shri Jagdishprasad Jhabarmal Tibrewala University, Rajasthan Jhunjhunu, 2012.

PATEL, B. P.; PRAJAPATI, J. M. Dynamics of Mini Hydraulic Backhoe Excavator: A Lagrange-Euler (LE) Approach. **International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering Vol:8, No:1**, v. 8, n. 1, p. 202–211, 2014.

PERRIN, X. et al. Brain-coupled interaction for semi-autonomous navigation of an assistive robot. **Robotics and Autonomous Systems**, v. 58, n. 12, p. 1246–1255, dez. 2010.

PREMIER. **Excavator Earth Auger System | Premier Auger**. Disponível em: <<https://www.premierattach.com/products/earth-auger-drive-units/excavator-earth-auger-system>>. Acesso em: 17 ago. 2017.

RAZAVI, B.; DE SILVA, C. W. **CONDITION MONITORING IN A HYDRAULIC SYSTEM OF AN INDUSTRIAL MACHINE USING UNSCENTED KALMAN FILTER**. *International Journal of Information Acquisition*, v. 7, n. 3, p. 177–192, set. 2010.

RHUDY, M.; GU, Y. **Understanding Nonlinear Kalman Filters, Part I and II**. *Interactive Robotics Letters*, West Virginia University, 2013.

RICHARDSON-LITTLE, W.; DAMAREN, C. J. **Position accommodation and compliance control for robotic excavation**. *Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications*, 2005. CCA 2005. **Anais...IEEE**, 2005.

SAKAIDA, Y. et al. **The analysis of excavator operation by skillful operator - extraction of common skills -**. 2008 SICE Annual Conference. **Anais...IEEE**, ago. 2008.

SALCUDEAN, S. E. et al. Evaluation of impedance and teleoperation control of a hydraulic mini-excavator. **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, v. 232, p. 229–240, 1998.

ŠALINIĆ, S.; BOŠKOVIĆ, G.; NIKOLIĆ, M. Dynamic modelling of hydraulic excavator motion using Kane's equations. **Automation in Construction**, v. 44, p. 56–62, 2014.

SANTOS, C. H. F. **MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE EM CASCATA DE UM ROBÔ MANIPULADOR HIDRÁULICO**. 2001a. 124 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001a.

SANTOS, I. F. **DINÂMICA DE SISTEMAS MECÂNICOS**. São Paulo: MAKRON Books, 2001b.

SCHMIDT, D.; PROETZSCH, M.; BERNS, K. **Simulation and control of an autonomous bucket excavator for landscaping tasks**. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. **Anais...IEEE**, maio 2010.

SCHMIDT, L. **Robust Control of Industrial Hydraulic Cylinder Drives-with Special Reference to Sliding Mode & Finite-Time Control**. 2014. 169 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica) - Department of Energy Technology, Aalborg University, Aalborg, 2014.

SEPEHRI, N. et al. Resolved-Mode Teleoperated Control of Heavy-Duty Hydraulic Machines. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 116, n. 2, p. 232–240, 1994.

SHI, X.; WANG, F.-Y.; LEVER, P. J. A. Experimental results of robotic excavation using fuzzy behavior control. **Control Engineering Practice**, v. 4, n. 2, p. 145–152, fev. 1996.

SIEMENS. **LMS Imagine.Lab Amesim**. Disponível em: <https://www.plm.automation.siemens.com/pt_br/products/lms/imagine-lab/amesim/>.

SINGH, S. **Learning to predict resistive forces during robotic excavation**. Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation. **Anais...IEEE**, 1995a.

SINGH, S. **Synthesis of Tactical Plans for Robotic Excavation**. 1995. 234 p. Tese (Doutorado em Robótica) - The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1995.

SINGH, S. State of the Art in Automation of Earthmoving. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 10, n. 4, p. 179–188, out. 1997.

SITE SAFETY MANAGEMENT. **Safety Alert! Compilation of most dangerous and undesirable jobs - Site Safety Management Services**. Disponível em: <<http://www.sitesafetymanagement.com/safety-alert-compilation-of-most-dangerous-and-undesirable-jobs/>>. Acesso em: 15 jul. 2017.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL Analysis and design**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

SLEIMAN, H.; MELIN, C.; VIDOLOV, B. **A Variant of Time Delay Control**. Proceedings of 7th IMACS World Congress Scientific Computation on Applied Mathematics and Simulation. **Anais...**2005.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **APPLIED NONLINEAR CONTROL**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.

SRITHONGCHAI, P.; KAITWANIDVILAI, S. Robust Fixed-Structure Cascade Controller for a Quadratic Boost Converter. v. II, p. 17–20, 2010.

STRAININSERT. **SPHC Force Sensing Actuator Load Pins - Straininsert Company | Straininsert**. Disponível em: <<http://www.straininsert.com/products/force-sensing-clevis-pins/>>. Acesso em: 14 ago. 2017.

TAFAZOLI, S. et al. Impedance control of a teleoperated excavator. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 10, n. 3, p. 355–367, maio 2002.

TAFAZOLI, S.; LAWRENCE, P. D.; SALCUDEAN, S. E. Identification of inertial and friction parameters for excavator arms. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 15, n. 5, p. 966–971, 1999.

TAN, C. P. et al. Online Soil Parameter Estimation Scheme Based on Newton–Raphson Method for Autonomous Excavation. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, v. 10, n. 2, p. 221–229, abr. 2005.

TAO, N. et al. **A Low-Cost Solution For Excavator Simulation With Realistic Visual Effect**. 2008 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics. **Anais...**IEEE, set. 2008.

TRIGO, F. C.; COELHO, T. A. H.; BARBOSA, R. S. **Notas de Aula - Dinâmica de Sistemas Multicorpos e Suas Aplicações em Robótica e Engenharia Veicular**. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

TSAI, L.-W. **Mechanism Design Enumeration - Enumeration of Kinematic Structures According to Function**. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 2001.

VÄHÄ, P. et al. Extending automation of building construction — Survey on potential sensor technologies and robotic applications. **Automation in Construction**, v. 36, p. 168–178, dez. 2013.

VÄHÄ, P. K.; KOIVO, A. J.; SKIBNIEWSKI, M. J. **Excavator dynamics and effect of soil on digging**. Proceedings of the 8th International Symposium on Automation and Robotics in Constructions. **Anais...**Stuttgart: 1991.

VÄHÄ, P. K.; SKIBNIEWSKI, M. J. DYNAMIC MODEL OF EXCAVATOR. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 6, n. 2, p. 148–158, 1993a.

VÄHÄ, P. K.; SKIBNIEWSKI, M. J. Cognitive Force Control of Excavators. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 6, n. 2, p. 159–166, abr. 1993b.

VALDIERO, A. C. **CONTROLE DE ROBÔS HIDRÁULICOS COM COMPENSAÇÃO DE ATRITO**. 2005. 177 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

VĚCHET, S.; KREJSA, J. HYDRAULIC ARM MODELING VIA MATLAB SIMHYDRAULICS. **Engineering MECHANICS**, v. 16, n. 4, p. 287–296, 2009.

VOLVO. **Volvo - CONSTRUCTION EQUIPMENT**. Disponível em: <<https://www.volvoce.com/united-states/en-us/>>. Acesso em: 5 jun. 2017.

WERFEL, J.; PETERSEN, K.; NAGPAL, R. Designing Collective Behavior in a Termite-Inspired Robot Construction Team. **Science**, v. 343, n. 6172, p. 754–758, 14 fev. 2014.

XU, J.; YOON, H.-S. A Review on Mechanical and Hydraulic System Modeling of Excavator Manipulator System. **Journal of Construction Engineering**, p. 1–11, 2016.

YU, H.; LIU, Y.; HASAN, M. S. Review of modelling and remote control for excavators. **International Journal of Advanced Mechatronic Systems**, v. 2, n. 1/2, p. 68–80, 2010.

ZEINALI, M.; NOTASH, L. Adaptive sliding mode control with uncertainty estimator for robot manipulators. **Mechanism and Machine Theory**, v. 45, n. 1, p. 80–90, jan. 2010.

ZHANG, D. et al. **Adaptive control of hydraulic excavator manipulator**. 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. **Anais...IEEE**, ago. 2012.

ZHOU, K. **Essentials of ROBUST CONTROL**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1999.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1995.

APÊNDICE A - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Aqui são apresentadas as principais equações do modelo subsistema mecânico do manipulador. Considerando o modelo reduzido do subsistema mecânico, tem-se a seguinte representação na forma matricial:

$$\mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_h = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\tau}_e(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\tau}_s(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.1})$$

onde $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de deslocamentos angulares, $\dot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de velocidades angulares, e $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de acelerações angulares, sendo ambos os termos relacionados as juntas ativas do manipulador.

Os termos da matriz de inércia $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = [M_{ij}]$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$ onde n é o número de coordenadas generalizas, são dados por:

$$M_{12} = M_{21} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$M_{13} = M_{31} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$M_{14} = M_{41} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$M_{22} = M_{33} + I_{zz3} + m_2 l_{1_CG2}^2 + m_3 l_{1_2}^2 + 2m_3 l_{1_2} l_{2_CG3} \cos(\alpha_{CG3} + \theta_3) + \dots \\ m_4 l_{1_2}^2 + 2m_4 l_{1_2} l_{2_3} \cos(\theta_3) + 2m_4 l_{1_2} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_{34}) \quad (\text{A.5})$$

$$M_{23} = M_{32} = M_{24} = I_{zz3} + m_3 l_{2_CG3}^2 + m_4 l_{2_3}^2 + m_3 l_{1_2} l_{2_CG3} \cos(\alpha_{CG3} + \theta_3) + \dots \\ m_4 l_{2_3} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_4) + m_4 l_{1_2} l_{2_3} \cos(\theta_3) \quad (\text{A.6})$$

$$M_{24} = M_{42} = I_{zz4} + m_4 l_{3_CG4}^2 + m_4 l_{2_3} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_4) + \dots \\ m_4 l_{1_2} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_{34}) \quad (\text{A.7})$$

$$M_{33} = M_{44} + I_{zz3} + m_3 l_{2_CG3}^2 + m_4 l_{2_3}^2 + 2m_4 l_{2_3} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_4) \quad (\text{A.8})$$

$$M_{34} = M_{43} = M_{44} + m_4 l_{2_3} l_{3_CG4} \cos(\alpha_{CG4} + \theta_4) \quad (\text{A.9})$$

$$M_{44} = I_{zz4} + m_4 l_{3_CG4}^2 \quad (\text{A.10})$$

A matriz de esforços centrípetos e de coriolis $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = [C_{ij}]$ pode ser obtida a partir de $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = [M_{ij}]$ utilizando-se os símbolos de Christoffel, como mostrado pelas equações a seguir (PATEL; PRAJAPATI, 2014):

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{\theta}_k \quad (\text{A.11})$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_i} \right] \quad (\text{A.12})$$

com $k = 1, \dots, n$ onde n é o número de coordenadas generalizas.

Os termos do vetor de torques gravitacionais $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = [G_{ii}]$ são dados por:

$$G_{11} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$G_{21} = G_{31} + (m_3 + m_4)gl_{1-2}\cos(\theta_2) + m_2gl_{1-CG2}\cos(\alpha_{CG2} + \theta_2) \quad (\text{A.14})$$

$$G_{31} = G_{41} + m_4gl_{2-3}\cos(\theta_{23}) + m_3gl_{2-CG3}\cos(\alpha_{CG3} + \theta_{23}) \quad (\text{A.15})$$

$$G_{41} = m_4gl_{3-CG4}\cos(\alpha_{CG4} + \theta_{234}) \quad (\text{A.16})$$

Os termos do vetor de torques de escavação $\boldsymbol{\tau}_e(\boldsymbol{\theta}) = [\tau_{eii}]$ são dados por:

$$\tau_{e11} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\tau_{e21} = \tau_{e31} - F_el_{1-2}\sin(\delta_e + \delta_{C6} - \theta_{34}) \quad (\text{A.18})$$

$$\tau_{e31} = \tau_{e41} - F_el_{2-3}\sin(\delta_e + \delta_{C6} - \theta_4) \quad (\text{A.19})$$

$$\tau_{e41} = -F_el_{3-4}\sin(\delta_e + \delta_{C6}) \quad (\text{A.20})$$

Os termos do vetor de torques de carregamento $\boldsymbol{\tau}_s(\boldsymbol{\theta}) = [\tau_{sii}]$ são dados por:

$$\tau_{s11} = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\tau_{s21} = \tau_{s31} + m_sgl_{1-2}\cos(\theta_2) \quad (\text{A.22})$$

$$\tau_{s31} = \tau_{s41} + m_sgl_{2-3}\cos(\theta_{23}) \quad (\text{A.23})$$

$$\tau_{s41} = m_sgl_{3-CG4}\cos(\alpha_{CG4} + \theta_{234}) \quad (\text{A.24})$$

Por fim, os termos da matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [J_{ii}]$ são expressos por:

$$J_{11} = \frac{l_{0-C1}l_{0-H1}\sin(\delta_{BA1} + \theta_1)}{(l_{0-C1}^2 - 2\cos(\delta_{BA1} + \theta_1)l_{0-C1}l_{0-H1} + l_{0-H1}^2)^{1/2}} \quad (\text{A.25})$$

$$J_{22} = \frac{l_{1-C2}l_{1-H2}\cos(\delta_{L1} - \delta_{L2} - \theta_2)}{(l_{1-C2}^2 - 2\sin(\delta_{L1} - \delta_{L2} - \theta_2)l_{1-C2}l_{1-H2} + l_{1-H2}^2)^{1/2}} \quad (\text{A.26})$$

$$J_{33} = \frac{-(l_{2-C3}l_{2-H3}\sin(\delta_{BR1} + \delta_{BR2} + \theta_3))}{(l_{2-C3}^2 + 2\cos(\delta_{BR1} + \delta_{BR2} + \theta_3)l_{2-C3}l_{2-H3} + l_{2-H3}^2)^{1/2}} \quad (\text{A.27})$$

$$J_{41} = l_{B1_H4} l_{C4_B1} \text{sen}(a_1) \left(\frac{l_{3_B2} (l_{3_B1}^2 a_5 + l_{3_B1} l_{3_B2} a_5^2 + l_{3_B1} l_{3_B2} + l_{3_B2}^2 a_5)}{a_2^{3/2} \left(\frac{(l_{3_B1} + l_{3_B2} a_5)^2}{a_2} \right)^{1/2}} + \dots \right. \\ \left. \frac{l_{3_B1} l_{3_B2} a_4 (l_{3_B1}^2 + 2a_5 l_{3_B1} l_{3_B2} + l_{3_B2}^2 - l_{B1_H4}^2 + l_{B2_H4}^2)}{2l_{B1_H4} a_2^{3/2} \left(1 - \frac{a_3^2}{4l_{B1_H4}^2 a_2} \right)^{1/2}} \right) / a_6^{1/2} \quad (\text{A.28})$$

onde,

$$a_1 = \delta_{C3} + a \cos \left(\frac{a_3}{2l_{B1_H4} a_2^{1/2}} \right) + a \text{sen} \left(\frac{l_{3_B2} a_4}{a_2^{1/2}} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$a_2 = l_{3_B1}^2 + 2a_5 l_{3_B1} l_{3_B2} + l_{3_B2}^2 \quad (\text{A.30})$$

$$a_3 = a_2 + l_{B1_H4}^2 - l_{B2_H4}^2 \quad (\text{A.31})$$

$$a_4 = \text{sen}(\delta_{C1} + \delta_{C2} + \theta_4) \quad (\text{A.32})$$

$$a_5 = \cos(\delta_{C1} + \delta_{C2} + \theta_4) \quad (\text{A.33})$$

$$a_6 = l_{B1_H4} + l_{C4_B1} + 2l_{B1_H4} l_{C4_B1} \cos(a_1) \quad (\text{A.34})$$

APÊNDICE B - PARÂMETROS DO MANIPULADOR

Este apêndice reúne os dados do manipulador utilizados nas simulações.

B.1 PARÂMETROS DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Nesta seção são reunidos os parâmetros dos elos do subsistema mecânico do manipulador e os parâmetros dos esforços generalizados de operação.

B.1.1 Propriedades dos elos do subsistema mecânico

Na tabela 6 são reunidas as dimensões lineares e angulares, que são características do manipulador.

Tabela 8 - Dimensões lineares e angulares do manipulador.

Dimensões características do manipulador		
Dimensões angulares ($\alpha_{CGP}, \alpha_{CGB}, \delta_{BA}, \delta_L, \delta_{BR}, \delta_C$)		
$[\alpha_{CGP1}, \alpha_{CGP2}, \alpha_{CGP3}, \alpha_{CGP4}, \alpha_{CGB1}]$	$[0,60, 0,25, 0,17, 0,49, 0,20]$	$[rad]$
$[\delta_{BA1}, \delta_{BA2}, \delta_{BA3}]$	$[1,71, 0,40, 1,28]$	
$[\delta_{L1}, \delta_{L2}, \delta_{L3}, \delta_{L4}]$	$[0,64, 0,29, 0,94, 0,58]$	
$[\delta_{BR1}, \delta_{BR2}, \delta_{BR3}]$	$[0,60, 2,54, 1,63]$	
$[\delta_{C1}, \delta_{C2}, \delta_{C3}, \delta_{C4}, \delta_{C5}, \delta_{C6}]$	$[0,05, 1,70, 0,22, 0,27, 0,01, 0,62]$	
Dimensões lineares (l_{p1_p2})		
$[l_{0_1}, l_{1_2}, l_{2_3}, l_{3_4}]$	$[0,25, 2,07, 1,05, 0,71]$	$[m]$
$[l_{0_CG1}, l_{1_CG2}, l_{2_CG3}, l_{3_CG4}]$	$[0,12, 1,04, 0,37, 0,29]$	
$[l_{0_C1}, l_{0_C2}, l_{1_C2}, l_{1_C3}, l_{2_C3}, l_{2_C4}]$	$[0,86, 0,25, 0,30, 1,27, 1,22, 0,26]$	
$[l_{0_H1}, l_{1_H2}, l_{2_H3}, l_{B1_H4}, l_{B2_H4}]$	$[0,27, 0,93, 0,28, 0,30, 0,30]$	
$[l_{C4_B1}, l_{2_B1}, l_{3_B1}, l_{3_B2}]$	$[0,95, 0,90, 0,16, 0,15]$	
$[l_{C1_CGC1}, l_{C2_CGC2}, l_{C3_CGC3}, l_{C4_CGC4}]$	$[0,27, 0,32, 0,36, 0,28]$	
$[l_{CGH1_H1}, l_{CGH2_H2}, l_{CGH3_H3}, l_{CGH4_H4}]$	$[0,28, 0,31, 0,36, 0,26]$	
$[l_{B1_CGB1}, l_{B2_CGB2}]$	$[0,15, 0,13]$	

Fonte: o autor.

A Tabela 9 reúne as propriedades de massa e inércia dos elos do manipulador.

Tabela 9 - Propriedades de massa dos elos do manipulador.

Propriedades de massa e inércia dos elos do manipulador		
Massa dos elos principais, camisas, hastes e barras ($m_{p_i}, m_{c_i}, m_{h_i}, m_{b_i}$)		
$[m_{p_1}, m_{p_2}, m_{p_3}, m_{p_4}]$	$[32,49,180,23,67,30,52,96]$	$[kg]$
$[m_{c_1}, m_{c_2}, m_{c_3}, m_{c_4}]$	$[8,78,15,08,10,95,8,86]$	
$[m_{h_1}, m_{h_2}, m_{h_3}, m_{h_4}]$	$[8,49,13,66,10,49,8,87]$	
$[m_{b_1}, m_{b_2}]$	$[8,81,14,16]$	
Termos dos tensores de inércia dos elos principais ($^{P_i} \mathbf{I}_{P_i}$)		
$[I_{xx/P1}, I_{xy/P1}, I_{xz/P1}, I_{yy/P1}, I_{yz/P1}, I_{zz/P1}]$	$[0,67, -0,05, 0,02, 0,48, -0,04, 0,69]$	$[kg \cdot m^2]$
$[I_{xx/P2}, I_{xy/P2}, I_{xz/P2}, I_{yy/P2}, I_{yz/P2}, I_{zz/P2}]$	$[7,01, -1,19, 0,79, 27,0,84,88]$	
$[I_{xx/P3}, I_{xy/P3}, I_{xz/P3}, I_{yy/P3}, I_{yz/P3}, I_{zz/P3}]$	$[0,67, -1,36, 0,10, 76,0,11,19]$	
$[I_{xx/P4}, I_{xy/P4}, I_{xz/P4}, I_{yy/P4}, I_{yz/P4}, I_{zz/P4}]$	$[1,50, -0,04, 0,3,12,0,2,49]$	
Termos dos tensores de inércia das camisas dos cilindros ($^{C_i} \mathbf{I}_{C_i}$)		
$[I_{xx/C1}, I_{xy/C1}, I_{xz/C1}, I_{yy/C1}, I_{yz/C1}, I_{zz/C1}]$	$[0,01, 0,0,0,31,0,0,31]$	$[kg \cdot m^2]$
$[I_{xx/C2}, I_{xy/C2}, I_{xz/C2}, I_{yy/C2}, I_{yz/C2}, I_{zz/C2}]$	$[0,03, 0,0,0,58,0,0,58]$	
$[I_{xx/C3}, I_{xy/C3}, I_{xz/C3}, I_{yy/C3}, I_{yz/C3}, I_{zz/C3}]$	$[0,01, 0,0,0,61,0,0,61]$	
$[I_{xx/C4}, I_{xy/C4}, I_{xz/C4}, I_{yy/C4}, I_{yz/C4}, I_{zz/C4}]$	$[0,01, 0,0,0,32,0,0,32]$	
Termos dos tensores de inércia das hastes dos cilindros ($^{H_i} \mathbf{I}_{H_i}$)		
$[I_{xx/H1}, I_{xy/H1}, I_{xz/H1}, I_{yy/H1}, I_{yz/H1}, I_{zz/H1}]$	$[0,0,0,0,32,0,0,32]$	$[kg \cdot m^2]$
$[I_{xx/H2}, I_{xy/H2}, I_{xz/H2}, I_{yy/H2}, I_{yz/H2}, I_{zz/H2}]$	$[0,01, 0,0,0,56,0,0,56]$	
$[I_{xx/H3}, I_{xy/H3}, I_{xz/H3}, I_{yy/H3}, I_{yz/H3}, I_{zz/H3}]$	$[0,0,0,0,60,0,0,60]$	
$[I_{xx/H4}, I_{xy/H4}, I_{xz/H4}, I_{yy/H4}, I_{yz/H4}, I_{zz/H4}]$	$[0,0,0,0,35,0,0,35]$	
Termos dos tensores de inércia das barras ($^{B_i} \mathbf{I}_{B_i}$)		
$[I_{xx/B1}, I_{xy/B1}, I_{xz/B1}, I_{yy/B1}, I_{yz/B1}, I_{zz/B1}]$	$[0,08, 0,0,0,19,0,0,14]$	$[kg \cdot m^2]$
$[I_{xx/B2}, I_{xy/B2}, I_{xz/B2}, I_{yy/B2}, I_{yz/B2}, I_{zz/B2}]$	$[0,04, 0,0,0,22,0,0,20]$	

Fonte: o autor.

Para facilitar a interpretação dos parâmetros da Tabela 9, na Figura 130 são ilustradas algumas das dimensões características do manipulador.

Figura 130 - Dimensões características do manipulador. (a): Dimensões angulares relacionadas com o centro de massa dos elos principais; (b): Dimensões lineares dos elos principais.

Fonte: o autor.

B.1.2 Parâmetros dos esforços generalizados de operação

Aqui são reunidos os parâmetros dos esforços das operações de escavação e de movimentação com carga utilizados nas simulações.

A Tabela 10 reúne os parâmetros para o cálculo da força de escavação, considerando um solo do tipo argiloso.

Tabela 10 - Parâmetros do modelo da força de escavação.

Parâmetros da força de escavação		
Ângulo da força de escavação (δ_e)	0,10	[rad]
Ângulo da caçamba (δ_{c6})	0,62	[rad]
Resistência específica ao corte do solo (k_s)	25	[kPa]
Coeficiente de fricção da caçamba com o solo (μ)	0,46	[]
Força de pressão da caçamba contra o solo (F_p)	0,20	[kN]
Largura da fatia de solo (b)	0,41	[m]
Altura máxima da fatia de solo ($h_{máx}$)	0,30	[m]

Fonte: adaptado de Koivo et al. (1996) e Nguyen (2000).

Na Tabela 11 são reunidos os parâmetros para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba, sendo que estes também são referentes a um solo do tipo argiloso.

Tabela 11 - Parâmetros para o cálculo da máxima capacidade volumétrica da caçamba.

Parâmetros da máxima capacidade volumétrica da caçamba		
Área de seção transversal da caçamba ($P_{área}$)	0,11	[m ²]
Largura externa (W_s)	0,47	[m]
Largura intermediária (W_f)	0,46	
Comprimento útil (L_b)	0,54	
Largura interna (W_r)	0,46	
Densidade do solo (ρ_s)	1200	[kg/m ³]

Fonte: adaptado de Nguyen (2000).

Aplicando-se o procedimento de cálculo descrito no capítulo 2, com os parâmetros da Tabela 11, obtém-se: $(m_s)_{SAE J296} = 95,93 \text{ kg}$ e $(m_s)_{CECE} = 73,65 \text{ kg}$. Nas simulações, a massa calculada pela norma SAE J296 foi a utilizada pois é a maior.

B.2 PARÂMETROS DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Nesta seção são reunidos os dados do subsistema hidráulico do manipulador.

A Tabela 12 reúne os parâmetros referentes à unidade de suprimento do subsistema hidráulico.

Tabela 12 - Parâmetros da unidade de suprimento.

Parâmetros da unidade de suprimento		
Pressão de suprimento (p_s)	25	[MPa]
Pressão do tanque (p_t)	0	[MPa]
Vazão máxima de suprimento por atuador (Q_s)	$5 \cdot 10^{-4}$	[m ³ / s]

Fonte: o autor.

Os parâmetros das válvulas direcionais constam na Tabela 13. Nesta, o coeficiente de vazão do modelo 3ª ordem que é apresentado foi utilizado para verificação dos modelos do subsistema hidráulico.

Tabela 13 - Parâmetros das válvulas direcionais.

Parâmetros das válvulas direcionais		
Tensão máxima aplicada ($u_{m\acute{a}x}$)	10	[V]
Deslocamento máximo ($x_{m\acute{a}x}$)	$5 \cdot 10^{-3}$	[m]
Frequência natural (ω_v)	400	[rad / s]
Coeficiente de amortecimento (ζ_v)	1	[]
Constante eletromecânica (k_{em})	$5 \cdot 10^{-4}$	[N / V]
Coeficiente de vazão do modelo de 6ª ordem ($k_{a,b}$)	$1,47 \cdot 10^{-4}$	[m ² s ⁻¹ N ^{-1/2}]
Coeficiente de vazão do modelo de 4ª ordem ($K_{a,b}$)	$7,37 \cdot 10^{-8}$	[m ⁴ V ⁻¹ s ⁻¹ N ^{-1/2}]
Coeficiente de vazão do modelo de 3ª ordem (K_l)	$5,21 \cdot 10^{-8}$	[m ⁴ V ⁻¹ s ⁻¹ N ^{-1/2}]

Fonte: o autor.

Para o modelo acoplado do manipulador de 12ª ordem, os coeficientes de vazão de carga são calculados com os dados das Tabelas 13 e 17.

Na Tabela 14 são reunidos os parâmetros do cilindro hidráulico que foram considerados para a verificação dos modelos do subsistema hidráulico.

Tabela 14 - Parâmetros do cilindro hidráulico de verificação.

Parâmetros do cilindro hidráulico		
Área de seção transversal ($A_{a,b}$)	$3,10 \cdot 10^{-3}$	$[m^2]$
Comprimento inicial da câmara ($l_{a,b}$)	0,25	$[m]$

Fonte: o autor.

Os parâmetros do subsistema mecânico (sistema massa-mola-amortecedor) que foram utilizados para verificação dos modelos do subsistema hidráulico constam na Tabela 15.

Tabela 15 - Parâmetros do subsistema mecânico de verificação.

Parâmetros do sistema massa-mola-amortecedor		
Massa (m_c)	100	$[kg]$
Constante elástica da mola (K_e)	100	$[N / m]$
Coeficiente de amortecimento viscoso (B_v)	100	$[Ns / m]$

Fonte: o autor.

A Tabela 16 reúne os parâmetros do fluido hidráulico (ISO VG 46) que foi considerado nas simulações.

Tabela 16 - Parâmetros do fluido hidráulico.

Parâmetros do fluido hidráulico (ISO VG 46)		
Módulo de elasticidade volumétrica efetivo (β_e)	1,30	$[GPa]$
Massa específica do fluido hidráulico (ρ)	855,70	$[kg / m^3]$

Fonte: o autor.

Os parâmetros dos cilindros hidráulicos utilizados nas simulações dos modelos acoplados e do controlador em cascata são reunidos na Tabela 17.

Tabela 17 - Parâmetros dos cilindros hidráulicos.

Parâmetros dos cilindros hidráulicos		
Áreas de seção transversal das câmaras dos cilindros ($A_{a,b}$)		
$[A_{a1}, A_{a2}, A_{a3}, A_{a4}]$	$[3,10, 5,03, 3,10, 3,10] \cdot 10^{-3}$	$[m^2]$
$[A_{b1}, A_{b2}, A_{b3}, A_{b4}]$	$[1.50, 2.60, 1.50, 1.50] \cdot 10^{-3}$	
Comprimentos iniciais das câmaras dos cilindros ($\tilde{l}_a, \tilde{l}_b$)		
$[\tilde{l}_{a1}, \tilde{l}_{a2}, \tilde{l}_{a3}, \tilde{l}_{a4}]$	$[0,31, 0,40, 0,58, 0,43]$	$[m]$
$[\tilde{l}_{b1}, \tilde{l}_{b2}, \tilde{l}_{b3}, \tilde{l}_{b4}]$	$[0,20, 0,15, 0,09, 0,08]$	
Volumes das tubulações (V_{tub})		
$[V_{tub1}, V_{tub2}, V_{tub3}, V_{tub4}]$	$[3,93, 5,89, 7,85, 9,82] \cdot 10^{-5}$	$[m^3]$
Coeficientes de vazamento interno (C_{in})		
$[C_{in1}, C_{in2}, C_{in3}, C_{in4}]$	$[0,25, 0,32, 0,25, 0,25] \cdot 10^{-11}$	$[m^3 / Pas]$

Fonte: o autor.

Por fim, na Tabela 18 constam os parâmetros do modelo de atrito dos cilindros hidráulicos utilizados nas simulações dos modelos acoplados e do controlador em cascata.

Tabela 18 - Parâmetros do modelo de atrito dos cilindros hidráulicos.

Parâmetros do modelo de atrito dos cilindros		
Coeficientes de atrito viscoso (B_v)		
$[B_{v1}, B_{v2}, B_{v3}, B_{v4}]$	$[5,53, 7,02, 5,53, 5,53] \cdot 10^4$	$[Ns / m]$
Forças de atrito de Coulomb (F_c)		
$[F_{c1}, F_{c2}, F_{c3}, F_{c4}]$	$[1,13, 1,43, 1,13, 1,13] \cdot 10^3$	$[N]$
Força de pré-carga (F_{pr})	100	$[N]$
Coeficiente de atrito estático (K_{est})	1,25	$[]$
Velocidade de transição (c_v)	10	$[s / m]$
Camada limite (v_{tr})	$1 \cdot 10^{-4}$	$[m / s]$

Fonte: o autor.

Ressalta-se que os parâmetros apresentados na Tabela 18 foram estimados com base na força hidráulica máxima de cada um dos cilindros, conforme o método apresentado em Kiliç (2009).

APÊNDICE C - MODELAGEM DO MANIPULADOR COM O SIMSCAPE™

Neste apêndice será apresentado a modelagem matemática do manipulador com o Simscape™ do MATLAB/Simulink® R2017a. Primeiramente, a modelagem do subsistema mecânico com o SimMechanics™ é abordada. Posteriormente, a modelagem do subsistema hidráulico com o SimMechanics™ e o SimHydraulics® é apresentada. Por fim, o método utilizado para realizar o acoplamento entre os modelos dos subsistemas com o Simscape™ é especificado.

C.1 MODELO DO SUBSISTEMA MECÂNICO

O SimMechanics™ é um ambiente de modelagem baseado em diagramas de blocos, dedicado à modelagem de sistemas mecânicos do tipo multicorpos, onde são utilizados elementos da mecânica Newtoniana (equações de equilíbrio dinâmico de força e torque) para representar a dinâmica desses sistemas (MATHWORKS, 2002).

O processo de modelagem no SimMechanics™ baseia-se na atribuição de conexões (juntas) entre os elos (corpos) do modelo. Os elos podem ser criados no próprio SimMechanics™, porém, esta é uma tarefa muito dispendiosa nesse ambiente, além do fato de que só geometrias relativamente simples podem ser criadas pelo SimMechanics™. Geralmente, os elos do modelo são inseridos no SimMechanics™ através da importação de algum *software* CAD. Também é possível importar diretamente uma montagem construída em ambiente CAD para o SimMechanics™, sendo que essa opção oferece a vantagem da conversão dos posicionamentos da montagem, ou *mates*, em juntas cinemáticas válidas para o modelo no SimMechanics™. Em ambos os casos de importação as propriedades de massa e inércia dos corpos podem ser inseridas posteriormente no SimMechanics™ de forma manual, ou podem ser importadas com os elos ou com a montagem do modelo. Para tanto, as propriedades dos materiais das peças do mecanismo devem ser corretamente atribuídas no respectivo *software* CAD (MATHWORKS, 2002).

Neste trabalho, o modelo do subsistema mecânico do manipulador criado com o SimMechanics™ foi obtido através da importação da montagem do manipulador do *software* SOLIDWORKS® 2017. Na Tabela 19 são especificadas as juntas que realizam as conexões entre os elos do manipulador. Para que não ocorra problemas nas

simulações é importante verificar se as juntas foram geradas corretamente na importação da montagem para o SimMechanics™. Se alguma junta estiver errada o usuário pode realizar uma correção manual (MATHWORKS, 2002).

Tabela 19 - Juntas entre os elos do manipulador.

Juntas entre os elos do manipulador		
Elo 1	Elo 2	Junta entre os elos 1 e 2
Chão	Base	Revolução
Base	Lança	Revolução
Lança	Braço	Revolução
Braço	Caçamba	Revolução
Chão	Camisa 1	Revolução
Camisa 1	Haste 1	Cilíndrica
Haste 1	Base	Revolução
Base	Camisa 2	Revolução
Camisa 2	Haste 2	Cilíndrica
Haste 2	Lança	Revolução
Lança	Camisa 3	Revolução
Camisa 3	Haste 3	Cilíndrica
Haste 3	Braço	Revolução
Braço	Camisa 4	Revolução
Camisa 4	Haste 4	Cilíndrica
Haste 4	Barras 1 e 2	Revolução
Barra 1	Braço	Revolução
Barra 2	Caçamba	Revolução

Fonte: o autor.

Na Figura 131 é mostrado o diagrama de blocos do modelo resultante da importação da montagem do manipulador. Nota-se que as juntas geradas correspondem

as mencionadas na Tabela 19. Isto indica a correta interpretação da cinemática do mecanismo pelo SimMechanics™.

Figura 131 - Diagrama de blocos do modelo do subsistema mecânico no SimMechanics™.

Fonte: o autor.

As propriedades de massa e inércia dos elos do manipulador foram importadas junto com a montagem para o SimMechanics™. No final, o MATLAB® R2017a gera um *script* que contém as propriedades de massa e inércia, além das dimensões características dos elos do manipulador. Este *script* deve ser executado antes das simulações do modelo.

O SimMechanics™ gera a representação gráfica do mecanismo, como ilustrado na Figura 132 para o subsistema mecânico do manipulador. Essa representação mostra o movimento do mecanismo durante a simulação, além de auxiliar na verificação do modelo criado. Como pode ser visto na Figura 132, todos os elos do subsistema mecânico do manipulador foram corretamente importados do SOLIDWORKS® 2017 para o SimMechanics™.

Figura 132 - Representação gráfica do modelo do subsistema mecânico no Simscape™.

Fonte: o autor.

A seguir são apresentadas a modelagem do subsistema hidráulico e o acoplamento dos modelos dos subsistemas do manipulador com o Simscape™.

C.2 MODELO DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Aqui são apresentados os modelos do SimMechanics™ e do SimHydraulics® utilizados para a construção do modelo do subsistema hidráulico do manipulador. Primeiramente, o modelo do acionamento eletromecânico da válvula é apresentado. Em seguida, o modelo da válvula direcional é exposto. Posteriormente, o modelo do cilindro hidráulico é tratado. Por fim, o modelo resultante obtido para o atuador do subsistema hidráulico é apresentado.

C.2.1 Modelo do acionamento da válvula direcional

A Figura 133 mostrada o diagrama de blocos do modelo do acionamento eletromecânico da válvula direcional no Simscape™.

Figura 133 - Diagrama de blocos do modelo do acionamento da válvula no Simscape™.

Fonte: adaptado de Mathworks (2017).

Na Figura 133 o ganho do bloco *PS Gain 1* estabelece a relação entre o estado estacionário e os sinais de entrada e saída do diagrama. O bloco *PS Saturation* mantém o sinal de saída dentro da faixa de curso útil do carretel da válvula. O ganho do bloco *PS Gain 2* é o inverso da constante de tempo e o ganho do bloco *PS Gain 3* é unitário. Combinando os blocos *PS Gain 2*, *PS Subtract* e *PS Integrator* é possível reproduzir um atraso de 1ª ordem (MATHWORKS, 2015). Sendo assim, a dinâmica do acionamento eletromecânico fica expressa pela seguinte função de transferência de 1ª ordem:

$$H(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (\text{C.1})$$

onde T é a constante de tempo da função de transferência.

C.2.2 Modelo da válvula direcional

Na Figura 134 é ilustrado a diagrama de blocos do modelo da válvula direcional de 4 vias e 3 posições, fornecido pelo SimHydraulics®.

As vazões através dos orifícios da válvula são calculadas de acordo com a posição do carretel e com a diferença de pressão entre as portas dos orifícios. Essas

vazões podem ser expressas nos seguintes sentidos (MATHWORKS, 2015): 1) suprimento de P para A ($P \rightarrow A$), 2) retorno de B para T ($B \rightarrow T$), 3) suprimento de P para B ($P \rightarrow B$), e 4) retorno de A para T ($A \rightarrow T$).

Figura 134 - Diagrama de blocos do modelo da válvula no SimHydraulics®.

Fonte: adaptado de MathWorks (2015).

No SimHydraulics® a vazão que passa por um orifício de área variável é fornecida pela seguinte expressão:

$$q = C_D A_o \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p}{(p^2 + p_{cr})^{1/4}}} \quad (\text{C.2})$$

onde C_D é o coeficiente de descarga, ρ é a massa específica do fluido hidráulico, e A_o é a área de passagem pelo orifício que é dada por:

$$A_o(x_v) = \begin{cases} \frac{x_v (A_o)_{máx}}{(x_v)_{máx}} & \text{se } x_v \geq 0 \\ 0 & \text{se } x_v < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

com x_v sendo o deslocamento do carretel da válvula.

Ainda na equação (C.2) tem-se p como a diferença de pressão entre a entrada e a saída do orifício, e p_{cr} como a pressão crítica referente ao limite de transição entre

os regimes de escoamento laminar e turbulento através do orifício da válvula. A diferença de pressão p no orifício é expressa a seguir:

$$p = p_A - p_B \quad (\text{C.4})$$

onde p_A e p_B são, respectivamente, as pressões na entrada e na saída do orifício.

A pressão crítica p_{cr} é dada por:

$$p_{cr} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Re_{cr} v}{C_D D_H} \right)^2 \quad (\text{C.5})$$

onde Re_{cr} é o número de Reynolds crítico que também é associado ao limite de transição entre os regimes de escoamento no orifício, v é a velocidade de escoamento do fluido, e D_H é o diâmetro hidráulico do orifício, que é expresso por:

$$D_H = \sqrt{\frac{4A_o}{\pi}} \quad (\text{C.6})$$

C.2.3 Modelo do cilindro hidráulico

O modelo do cilindro hidráulico do SimHydraulics® que é ilustrado pela Figura 135 é formado por dois conversores translacionais hidromecânicos e por um batente translacional.

Figura 135 - Diagrama de blocos do modelo do cilindro diferencial no SimHydraulics®.

Fonte: adaptado de MathWorks (2015).

A seguir serão apresentados os modelos do conversor translacional hidromecânico e do batente translacional.

C.2.3.1 Modelo do conversor translacional hidromecânico

O bloco do conversor translacional hidromecânico é formado pelo bloco da câmara hidráulica (responsável por modelar a compressibilidade do fluido hidráulico) e pelo bloco do conversor hidromecânico translacional (responsável por modelar a variação do volume da câmara devido ao movimento translacional). No bloco da câmara hidráulica, o fluido é considerado como uma mistura de líquido e uma pequena quantidade de ar, sendo que este bloco leva em conta apenas a vazão causada pela compressibilidade do fluido (MATHWORKS, 2015). Já no bloco do conversor hidromecânico translacional é considerada a velocidade da parte móvel, que é gerada pela variação do volume de fluido nas câmaras do cilindro (MATHWORKS, 2015).

A simulação da dinâmica das pressões nas câmaras do cilindro é realizada no bloco da câmara hidráulica, com a seguinte equação:

$$q = \frac{V_0 + A(x_0 + x)}{\beta} \dot{p} \quad (\text{C.7})$$

onde q é a vazão devido a compressibilidade do fluido hidráulico, V_0 é o volume inicial da câmara, A é a área de seção transversal efetiva da câmara; x_0 e x , são, respectivamente, o deslocamento inicial e relativo da parte móvel do cilindro, e β é o modelo de elasticidade volumétrica do fluido hidráulico, que é dado por:

$$\beta = \beta_l \frac{1 + R_{ar} \left(\frac{p_{atm}}{p_{atm} + p} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{1 + R_{ar} \frac{p_{atm}^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma (p_{atm} + p)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \beta_l} \quad (\text{C.8})$$

sendo β_l o módulo de elasticidade volumétrica do fluido puro, sem ar, R_{ar} é relação entre o volume de fluido e o volume de ar na câmara, p_{atm} é pressão atmosférica, p é a pressão efetiva da câmara, e γ é a constante universal dos gases.

A vazão responsável pela mudança nos volumes das câmaras e a força hidráulica gerada são calculadas no bloco do conversor hidromecânico translacional, para cada uma das câmaras, com as respectivas equações:

$$Q = A(\dot{x}_R - \dot{x}_C) \quad (\text{C.9})$$

$$F_h = \varepsilon p A \quad (\text{C.10})$$

onde ε é a orientação do conversor em relação à direção positiva globalmente atribuída. Se a pressão aplicada na porta A exercer força na direção positiva, então ε é igual a 1, e se caso a pressão aplicada na porta A exercer força na direção negativa, então ε será igual a -1.

C.2.3.2 Modelo do batente translacional

Na Figura 135, o bloco denominado de batente translacional, ou *translacional hard stop*, representa um batente de translação de dupla ação que restringe o movimento de um corpo deslizando entre os seus limites (MATHWORKS, 2002).

Figura 136 - Diagrama de blocos do batente translacional no SimMechanics™.

Fonte: adaptado de MathWorks (2002).

A dinâmica do impacto entre o corpo deslizando e o batente é descrita por um modelo elástico. Isso significa que o batente é representado por uma mola que entra em contato com o corpo deslizando quando o curso útil de movimento é ultrapassado

pelo corpo. Para expressar a dissipação de energia e os efeitos não elásticos presentes no contato um coeficiente de amortecimento, do tipo viscoso, é introduzido no modelo (MATHEWORKS, 2002). O diagrama de blocos mostrado na Figura 136 ilustra o modelo do batente translacional no Simscape™.

A força resultante quando ocorre o contato entre o batente e o corpo deslizante é expressa por:

$$F_{hs} = \begin{cases} K_p \delta + D_p (\dot{x}_R - \dot{x}_C) & \text{se } \delta \geq g_p \\ 0 & \text{se } g_n < \delta < g_p \\ K_n \delta + D_n (\dot{x}_R - \dot{x}_C) & \text{se } \delta \leq g_n \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

onde $K_{p,n}$ é rigidez do contato, δ é a deformação do batente, $D_{p,n}$ é o coeficiente de amortecimento viscoso; $\dot{x}_R$ e $\dot{x}_C$, são, respectivamente, as velocidades absolutas das portas R e C , e g_p e g_n representam, nessa mesma ordem, o curso útil na direção positiva e negativa de movimento. A deformação do batente é dada por:

$$\delta = x_R - x_C \quad (\text{C.12})$$

sendo x_R e x_C , respectivamente, os deslocamentos absolutos das portas R e C .

C.2.4 Modelo do atuador hidráulico

A Figura 137 (a) mostra o diagrama de blocos do modelo do atuador hidráulico obtido com o Simscape™ para verificação dos modelos do subsistema hidráulico derivados no capítulo 3. E a Figura 137 (b) ilustra o modelo que foi obtido para um atuador hidráulico com o SimMechanics™ e o SimHydraulics®, e utilizado para verificação dos modelos acoplados derivados no capítulo 4. Esses modelos são construídos através da conexão dos blocos que representam os componentes do circuito hidráulico especificados anteriormente.

O modelo do subsistema hidráulico no SimHydraulics® é formado por 4 atuadores iguais ao da Figura 137 (b), sendo que cada um atua em uma junta ativa do subsistema mecânico. No SimMechanics™, o modelo de atrito utilizando para os cilindros é o mesmo que foi apresentado no capítulo 3, portanto, não há necessidade de expô-lo novamente.

Figura 137 - Diagrama de blocos do modelo do subsistema hidráulico no Simscape™. (a): Verificação dos modelos analíticos do subsistema hidráulico; (b): Verificação dos modelos analíticos do sistema acoplado.

Fonte: o autor.

Para o modelo do subsistema hidráulico criado com o SimHydraulics®, a hipótese de fornecimento contínuo e constante de pressão e vazão também é considerada. Logo, a dinâmica da unidade de suprimento é considerada desprezível. No entanto, o SimHydraulics® fornece modelos dos mais variados componentes de um circuito hidráulico (bombas, acumuladores e válvulas) que, caso seja necessário, podem ser utilizados para a construção do modelo da unidade de suprimento.

C.3 ACOPLAMENTO DOS MODELOS DOS SUBSISTEMAS

O acoplamento entre os modelos que foram obtidos com o SimMechanics™ e o SimHydraulics® é realizado através da modelagem de interfaces translacionais ideais. Na Figura 138 é mostrado o diagrama de blocos de uma interface transnacional ideal criada com o Simscape™.

A interface translacional ideal tem a função de enviar as posições e velocidades do subsistema mecânico para o subsistema hidráulico. E, de forma análoga, enviar as forças hidráulicas do subsistema hidráulico para o subsistema mecânico.

Figura 138 - Diagrama de blocos de uma interface translacional ideal criada com o Simscape™.

Fonte: adaptado de Mathworks (2017).

C.3.1 Co-simulação do modelo acoplado

Nesta seção é descrito o processo de simulação do modelo acoplado do manipulador criado com o Simscape™ em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a. Primeiramente, o modelo do subsistema hidráulico calcula as pressões dos cilindros mantendo as posições e velocidades do subsistema mecânico constantes. Em seguida, as pressões são convertidas em forças hidráulicas e enviadas para o modelo do subsistema mecânico. Este, por sua vez, utiliza as equações da dinâmica direta e as forças hidráulicas para determinar as novas posições e velocidades dos elos. Por fim, as novas posições e velocidades são enviadas ao modelo do subsistema hidráulico. Em

cada passo da solução repete-se o ciclo descrito anteriormente e, por conseguinte, obtém-se uma co-simulação dos modelos dos subsistemas mecânico e hidráulico criados com o Simscape™, como ilustrado na Figura 139.

Figura 139 - Ciclo de solução do modelo criado com o Simscape™.

Fonte: adaptado de Kiliç (2009).

APÊNDICE D - ESTIMAÇÃO DE ESTADOS

Neste apêndice é apresentado o projeto de um filtro Kalman do tipo não linear para possibilitar o emprego do controlador sintetizado no capítulo 5, através da estimação dos estados do sistema.

D.1 FILTRO DE KALMAN UNSCENTED

O filtro de Kalman *unscented*, ou *unscented Kalman filter* (UKF), utiliza a transformação *unscented* para gerar um conjunto de pontos sigma em torno da média da estimativa. Esses pontos são então propagados através de funções não lineares, das quais a média e a covariância da estimativa são recuperadas. O resultado é um filtro que captura com mais precisão os verdadeiros valores da média e da covariância dessa estimativa (RAZAVI; DE SILVA, 2010). Além disso, esta técnica não requer o cálculo de matrizes jacobianas que, para funções complexas, pode ser difícil e muito dispendioso. Segundo Julier, Uhlmann e Whyte (2000), a transformação *unscented* baseia-se na ideia de que é mais fácil aproximar uma distribuição não linear (gaussiana) por uma linear, do que a aproximar uma função não linear por uma linear.

D.1.1 Algoritmo do UKF

Nas equações a seguir, o índice k refere-se ao instante de tempo atual, e o índice $k-1$ refere-se ao instante de tempo passado. Desta forma, para a aplicação do UKF considera-se um sistema dinâmico (autônomo no caso) não linear, discreto, que é dado por:

$$\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (\text{D.2})$$

onde $\mathbf{x}_{k-1} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u}_{k-1} \in \mathcal{R}^l$ e $\mathbf{y}_k \in \mathcal{R}^m$ são os vetores de estados, de entradas de controle e de medidas, respectivamente, $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de funções não lineares do modelo, $\mathbf{h} \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de medidas, e os termos $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathcal{R}^n$ e $\mathbf{v}_k \in \mathcal{R}^m$ representam os ruídos do processo e das medidas, respectivamente. Estes dois últimos são considerados como ruídos brancos (não correlacionados, com média nula e distribuição normal) do

tipo aditivo, ou seja, $\mathbf{w}_k \equiv N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ e $\mathbf{v}_k \equiv N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$, onde $\mathbf{Q}_k \in \Re^{n \times n}$ e $\mathbf{R}_k \in \Re^{m \times m}$ são, respectivamente, as matrizes de covariância do processo e das medidas.

As seguintes equações resumem o algoritmo do UKF (RHODY; GU, 2013):

➤ Inicialização

- 1) Inicializa-se o UKF com as condições iniciais para os estados estimados e para a matriz de covariância dos estados, respectivamente:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}\left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\right] \quad (\text{D.4})$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \Re^n$ é a estimativa inicial do vetor de estados.

Nesta fase, os ganhos da transformação *unscented* são calculados por:

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \quad (\text{D.5})$$

$$\eta_0^m = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (\text{D.6})$$

$$\eta_0^m = \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \quad (\text{D.7})$$

$$\eta_i^m = \eta_i^c = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (\text{D.8})$$

Nas equações dos ganhos, tem-se que α é o parâmetro que determina a dispersão dos pontos sigma. Este pode variar entre 10^{-4} a 1, sendo que menores valores de α levam a uma seleção mais estreita dos pontos sigma (próxima da média), enquanto que valores maiores de α proporcionam uma distribuição mais esparsa dos pontos sigma (afastada da média). β é o parâmetro que fornece informações sobre a distribuição (para distribuições Gaussianas, tem-se que $\beta = 2$ é o valor ótimo). E o parâmetro κ é considerado, geralmente, como nulo, ou seja, $\kappa = 0$. Mais informações sobre esses parâmetros podem ser encontradas em Julier, Uhlmann e Whyte (2000).

➤ Predição

- 1) Calcula-se a matriz $\chi_{k-1} \in \Re^{n \times 2n+1}$ que representa o conjunto de pontos sigma:

$$\chi_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} & \mathbf{x}_{k-1} + \sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1}} & \mathbf{x}_{k-1} - \sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

sendo $\mathbf{P}_{k-1} \in \Re^{n \times n}$ a matriz de covariância dos estados no instante de tempo $k - 1$.

2) Propaga-se os pontos sigma pelo modelo do processo:

$$\chi_{k/k-1}^i = \mathbf{f}(\chi_{k/k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}), \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (\text{D.10})$$

3) Calcula-se as predições da média $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \in \Re^n$ e da matriz de covariância dos estados $\hat{\mathbf{P}}_{k/k-1} \in \Re^{n \times n}$ para o vetor de estados atual do sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \boldsymbol{\eta}_i^m \chi_{k/k-1}^i \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \boldsymbol{\eta}_i^c (\chi_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\chi_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T + \mathbf{Q}_k \quad (\text{D.12})$$

Nota-se que a matriz $\mathbf{Q}_k$ é somada na equação (D.12) devido a hipótese de ruído aditivo.

➤ Atualização

4) Propaga-se as colunas da matriz de predição dos estados com os pontos sigma através do modelo das medidas:

$$\boldsymbol{\psi}_{k/k-1}^i = \mathbf{h}(\chi_{k/k-1}^i, \mathbf{u}_k), \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (\text{D.13})$$

5) Computa-se a média $\hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} \in \Re^m$ juntamente com a matriz de covariância das medidas $\mathbf{P}_k^{yy} \in \Re^{m \times m}$, e com a matriz de covariância cruzada $\mathbf{P}_k^{xy} \in \Re^{n \times m}$:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \boldsymbol{\eta}_i^m \boldsymbol{\psi}_{k/k-1}^i \quad (\text{D.14})$$

$$\mathbf{P}_k^{yy} = \sum_{i=0}^{2n} \boldsymbol{\eta}_i^c (\boldsymbol{\psi}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\psi}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1})^T + \mathbf{R}_k \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{P}_k^{xy} = \sum_{i=0}^{2n} \boldsymbol{\eta}_i^c (\chi_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\psi}_{k/k-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1})^T \quad (\text{D.16})$$

Também é verificado a hipótese de ruído aditivo na equação (D.15) com a soma da matriz $\mathbf{R}_k$.

6) Calcula-se, no instante k , o ganho $\mathbf{K}_k \in \Re^{n \times m}$, a média dos estados $\hat{\mathbf{x}}_k \in \Re^n$, e a matriz de covariância dos estados $\mathbf{P}_k \in \Re^{n \times n}$:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{xy} (\mathbf{P}_k^{yy})^{-1} \quad (\text{D.17})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1}) \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{k/k-1}^y \mathbf{K}_k^T \quad (\text{D.19})$$

D.1.2 Modelo do processo

O modelo do processo para o UKF é obtido a partir das parcelas estimadas dos modelos dos subsistemas do manipulador. A seguir, são reescritas as equações dos modelos dos subsistemas mecânico e hidráulico com as suas parcelas estimadas:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{p}_l^T \mathbf{A}_a - \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \right) \quad (\text{D.20})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_l = \mathbf{E}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{signal}(\mathbf{u}_v)) \mathbf{u}_v - \mathbf{F}_l(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}_l(\mathbf{q}) \mathbf{C}_{in} \Delta \mathbf{p}(\mathbf{p}_l) \quad (\text{D.21})$$

Reescrevendo-se as equações (4.42) e (4.43) na forma de espaço de estados, através da atribuição de variáveis de estados, obtém-se o modelo do processo como demonstrado a seguir:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{x}_1) \left(\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_3^T \mathbf{A}_a - \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_1) \right) \\ \hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \text{signal}(\mathbf{u})) \mathbf{u} - \hat{\mathbf{F}}_l(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

onde $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]^T$ é vetor de estados, com $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$ e $\mathbf{x}_3 = \mathbf{p}_l \in \mathfrak{R}^n$, e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_v \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entradas de controle.

Para a implementação do UKF, ao invés de realizar a discretização do modelo do processo, optou-se por trabalhar com o modelo contínuo. Para tanto, a integração do modelo do processo foi realizada com passo fixo, referente a frequência de amostragem considerada para as medidas. Assim, obtém-se um UKF com modelo contínuo do processo, e com modelo discreto das medidas.

D.1.3 Modelo das medidas

Como especificado no capítulo 6, para o sensoriamento do sistema considera-se que os seguintes sensores são empregados:

- 1) *Encoders* de deslocamento angular do tipo absoluto, instalados nas juntas ativas do manipulador;

- 2) Girômetros uniaxiais do tipo sistemas micro eletromecânicos (MEMS), ou *micro electromechanically systems*, montados nos elos principais;
- 3) Células de cargas instaladas nos olhais dos cilindros hidráulicos.

As medidas dos sensores de posição angular são expressas por:

$$\tilde{\Theta}_i = \theta_i + \mu_{\Theta} \quad (\text{D.23})$$

onde θ_i é o deslocamento angular da i -ésima junta ativa e μ_{Θ} é o ruído aditivo de medida.

Segundo Honkakorpi, Vihonen e Mattila (2013), o modelo de medida dos sensores MEMS é expresso pela equação a seguir:

$$\tilde{\Omega}_i = (1 + S_i)\Omega_i + b_i + \mu_{\Omega} \quad (\text{D.24})$$

onde Ω_i é a taxa angular, S_i é o fator de escala (expresso como porcentagem da taxa angular), b_i é a distorção da medida do giroscópio (admitida como constante ou lentamente variável), e μ_{Ω} é o ruído aditivo de medida. A taxa angular Ω_i é expressa como:

$$\Omega_i = \begin{cases} \dot{\theta}_i & \text{se } i = 1, 2 \\ \Omega_{i-1} + \dot{\theta}_i & \text{se } i = 3, 4 \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Por fim, para as células de carga o modelo de medida é dado por:

$$\tilde{\Gamma}_i = F_{hi} + \mu_{F_h} \quad (\text{D.26})$$

com $F_{hi} = p_{li}A_{ai}$ sendo a i -ésima força hidráulica, e μ_{F_h} o ruído aditivo de medida.

Reunindo-se os modelos das medidas dos sensores empregados no sistema, obtém-se o seguinte vetor de medidas:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [\tilde{\Theta}(\mathbf{x}_1) \quad \tilde{\Omega}(\mathbf{x}_2) \quad \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_3)]^T \quad (\text{D.27})$$

onde $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^n$ são os vetores de medidas construídos com os modelos das medidas dos sensores.

D.1.4 Parâmetros do UKF

Na Tabela 20 são reunidos os parâmetros utilizados para a representação dos ruídos dos sensores nas simulações dos controladores.

Tabela 20 - Parâmetros dos sensores para a representação dos ruídos.

Parâmetros dos sensores		
Desvio padrão dos sensores (σ)		
$\sigma_{\tilde{\theta}}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$[rad]$
$\sigma_{\tilde{\Omega}}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$[rad / s]$
$\sigma_{\tilde{F}_h}$	$1 \cdot 10^2$	$[N]$
Frequência de amostragem (f_s)		
f_s	1	$[kHz]$

Fonte: adaptado de Novotechnik (2017), Bosch (2017) e Strainert (2017).

Os parâmetros da Tabela 20 foram obtidos a partir dos dados fornecidos pelos catálogos dos fabricantes dos sensores especificados no capítulo 6.

Por fim, na Tabela 21 são reunidos os parâmetros que foram utilizados no projeto do UKF para o manipulador.

Tabela 21 - Parâmetros utilizados no projeto do UKF.

Parâmetros de projeto do UKF	
Matriz de covariância do processo ($\mathbf{Q}$)	
$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \cdot 10^{-4} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \cdot 10^{10} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ onde } \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ e } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	
Matriz de covariância das medidas ($\mathbf{R}$)	
$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{\theta}}^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{\tilde{\Omega}}^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_{\tilde{F}_h}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-6} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1,2 \cdot 10^{-5} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \cdot 10^4 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ e } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	
Matriz inicial de covariância dos estados ($\mathbf{P}_0$)	
$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-6} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1,2 \cdot 10^{-5} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \cdot 10^6 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \text{ onde } t_0 = 0 \text{ s}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \text{ e } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$	
Vetor de estados iniciais do UKF ($\hat{\mathbf{x}}_0$)	
$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \text{vetor randômico, com } t_0 = 0 \text{ s}$	

Fonte: o autor.

APÊNDICE E - CONTROLADORES DE COMPARAÇÃO

Neste apêndice são especificados os controladores do manipulador que foram considerados para efeito de comparação. Primeiramente, os controladores considerados para o subsistema mecânico são apresentados. Em seguida, o controlador empregado no subsistema hidráulico é especificado.

E.1 CONTROLADORES DO SUBSISTEMA MECÂNICO

Aqui são apresentados os controladores de comparação considerados para o subsistema mecânico do manipulador.

E.1.1 PID

O primeiro controlador de comparação considerado para o subsistema mecânico é do tipo não linear, com ação corretiva do tipo PID. A lei de controle para subsistema mecânico considerando este controlador é dada por:

$$\mathbf{F}_{hd} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \left(\ddot{\mathbf{q}}_d - \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{K}_{P,mec} \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_{I,mec} \int_{t_0}^t \tilde{\mathbf{q}} d\tau - \mathbf{K}_{D,mec} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \quad (\text{E.1})$$

onde,

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \quad (\text{E.2})$$

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}) \left[\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \right] \quad (\text{E.3})$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (\text{E.4})$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \quad (\text{E.5})$$

e com $\mathbf{K}_{P,mec} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_{I,mec} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{K}_{D,mec} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sendo matrizes diagonais, positivas, dos ganhos de controle proporcionais, integrais e derivativos, respectivamente.

E.1.2 SMC

O segundo controlador de comparação para o subsistema mecânico também é do tipo não linear, com ação corretiva por modos deslizantes. A lei de controle para o subsistema mecânico considerando esse controlador é expressa a seguir:

$$\mathbf{F}_{hd} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \left(\ddot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{f}} - \mathbf{K}_{SMC} \text{sin}(\mathbf{s}) \right) \quad (\text{E.6})$$

onde,

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\mathbf{e}}_q \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}}_q + \lambda \mathbf{e}_q \quad (\text{E.8})$$

com $\mathbf{K}_{SMC} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo matrizes diagonais, estritamente positivas e constantes, que são utilizadas como parâmetros de controle do subsistema mecânico.

Para a implementação da lei de controle dada pela equação (E.6), os termos $\text{sin}(s_i)$ são substituídos por $\tanh(s_i / \gamma_s)$, onde $0 < \gamma_s \leq 1$ é uma constante estritamente positiva, que tem a função de regular a aproximação da função sinal pela tangente hiperbólica (NGUYEN, 2000). A aproximação $\text{sin}(s_i) \cong \tanh(s_i / \gamma_s)$ tem a função de atenuar o *chattering* no sinal de controle, sendo que para esse fim, a função de saturação, apresentada no capítulo 5, também poderia ser utilizada. No entanto, a função tangente hiperbólica proporciona uma melhor suavização do que a saturação, além de apresentar a vantagem de ser uma função contínua.

E.2 CONTROLADOR DO SUBSISTEMA HIDRÁULICO

Para o subsistema hidráulico é considerado um controlador de comparação do tipo não linear, com ação corretiva proporcional em relação ao erro de seguimento de força hidráulica. A lei de controle para o subsistema hidráulico, considerando este controlador, é dada por:

$$\mathbf{u}_v = \left[\mathbf{A}_a \hat{\mathbf{E}}_l(\mathbf{q}, \mathbf{p}_l, \text{sin}(\mathbf{u}_v)) \right]^{-1} \left(\dot{\mathbf{F}}_{hd} + \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{F}}_l(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_{P,hid} \tilde{\mathbf{F}}_h \right) \quad (\text{E.9})$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{F}}_h = \mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{hd} \quad (\text{E.10})$$

e sendo $\mathbf{K}_{P,hid} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonal, positiva, relativa aos ganhos de controle proporcionais do controlador de comparação do subsistema hidráulico.

Verifica-se na equação (E.9) a derivada do vetor de força hidráulica desejada, ou seja, $\dot{\mathbf{F}}_{hd} \in \mathbb{R}^n$. Este termo é necessário pois a lei de controle considerada é base-

ada na linearização por realimentação da dinâmica do subsistema hidráulico. Nas simulações $\dot{\mathbf{F}}_{hd}$ é obtido a partir de um filtro derivativo. Isto porque é necessário evitar a amplificação dos ruídos de medição que ocorreria com a derivação direta de $\mathbf{F}_{hd}$, que, por sua vez, aumentariam o *chattering* no sinal de controle.

APÊNDICE F - PARÂMETROS DOS CONTROLADORES

Este apêndice reúne os parâmetros utilizados no projeto e na sintonização dos controladores do manipulador.

F.1 PARÂMETROS DE PROJETO DO CONTROLADOR SUBÓTIMO

Na Tabela 22 são reunidos os parâmetros do subsistema hidráulico que foram utilizados na síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$.

Tabela 22 - Parâmetros utilizados no projeto do controlador subótimo.

Parâmetros de projeto do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$		
Módulo de elasticidade volumétrica efetivo (β_e)	1,30	[GPa]
Área de seção transversal da câmara a (A_a)	$4,10 \cdot 10^{-3}$	[m ²]
Volume da câmara a (V_a)	$8 \cdot 10^{-4}$	[m ³]
Relação entre os volumes das câmaras a e b (r_v)	2,5	[]
Coeficiente de vazamento interno (C_{in})	$2 \cdot 10^{-12}$	[m ³ / Pas]
Ganho estimado do modelo ($\hat{\phi}_l^*$)	1	[]
Pólo estimado do modelo ($\hat{\psi}_l^*$)	2,5	[]

Fonte: o autor.

Ressalta-se que os valores dos parâmetros reunidos na Tabela 22 são nominais. Portanto, para realizar a síntese do controlador subótimo $\mathbf{H}_\infty$ foi criada uma família de funções de transferência para representar a variação desses valores, como mostrado nos gráficos de formatação no capítulo 5.

F.2 PARÂMETROS DO CONTROLADOR PROPOSTO

Na Tabela 23 são apresentados os parâmetros de controle dos subsistemas mecânico e hidráulico, relativos ao controlador em cascata que foi projetado no capítulo 5. Estes parâmetros foram utilizados nas simulações do controlador ISMC+RFL apresentadas no capítulo 6.

Tabela 23 - Parâmetros do controlador ISMC+RFL.

Parâmetros de controle do subsistema mecânico	
$\mathbf{K}$	$1,5 \cdot 10^3 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{\Gamma}$	$1 \cdot 10^3 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{\Lambda}$	$1,5 \cdot 10^3 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{M}_d$	$1 \cdot 10^4 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{K}_d$	$\mathbf{0} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{B}_d$	$1 \cdot 10^4 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
Parâmetros de controle do subsistema hidráulico	
$\mathbf{K}_{\infty} = \mathbf{K}_{PI} \mathbf{K}_{LEAD}$	$\underbrace{\left(\frac{20,46s + 29,11}{s} \right)}_{G_{PI}} \cdot \underbrace{\left(\frac{0,28s + 4,30}{s + 12,52} \right)}_{G_{LEAD}} \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$

Fonte: o autor.

F.3 PARÂMETROS DOS CONTROLADORES DE COMPARAÇÃO

A Tabela 24 reúne os parâmetros dos controladores de comparação (PID+P e SMC+P) que foram utilizados nas simulações apresentadas no capítulo 6.

Tabela 24 - Parâmetros dos controladores PID+P e SMC+P.

Parâmetros de controle do subsistema mecânico	
$\mathbf{K}_{P,mec}$	$1 \cdot 10^3 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{K}_{I,mec}$	$1 \cdot 10^2 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{K}_{D,mec}$	$5 \cdot 10^2 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
$\mathbf{K}_{SMC}$	$1 \cdot 10^3 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$
γ_s	1
Parâmetros de controle do subsistema hidráulico	
$\mathbf{K}_{P,hid}$	$1 \cdot 10^2 \mathbf{I} \in \Re^{4 \times 4}$

Fonte: o autor.

APÊNDICE G - SIMULADOR COMPUTACIONAL

A Figura 140 mostra o diagrama de blocos do simulador do manipulador controlado que foi criado em ambiente MATLAB/Simulink® R2017a.

Figura 140 - Simulador do sistema controlado no Simulink®.

Fonte: o autor.

A Figura 140 (a) ilustrada o diagrama de blocos do modelo do manipulador com os sensores especificados anteriormente, e a Figura 140 (b) mostra o diagrama de blocos do controlador em cascata com o filtro de Kalman.

A Figura 143 mostra o diagrama de blocos do modelo do UKF que é ilustrado pela Figura 140 (b) e construído com as equações (D.1) a (D.27).

Figura 143 - UKF no Simulink®.

Fonte: o autor.

O diagrama de blocos da trajetória desejada mostrado na Figura 140 (b) é ilustrado pela Figura 144, e construído com as equações (2.138) a (2.145), com a expressão (6.1) e com os seguimentos definidos no capítulo 6.

Figura 144 - Gerador da trajetória desejada no Simulink®.

Fonte: o autor.

A Figura 145 ilustra o diagrama de blocos do controlador em cascata do manipulador mostrado pela Figura 140 (b).

Figura 145 - Controlador em cascata no Simulink®.

Fonte: o autor.

O diagrama de blocos do controlador do subsistema mecânico da Figura 145 é ilustrado na Figura 146, e construído com as equações (5.162) a (5.175).

Figura 146 - Controlador do subsistema mecânico no Simulink®.

Fonte: o autor.