UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

GUSTAVO CUNHA DA SILVA NETO

**Projeto de um sensor virtual baseado em modelos ARMAX e filtro
de Kalman para predição das emissões de O_2/CO_2 a partir de
imagens de chamas em um forno industrial**

São Paulo

2020

GUSTAVO CUNHA DA SILVA NETO

Projeto de um sensor virtual baseado em modelos ARMAX e filtro de Kalman para predição das emissões de O_2/CO_2 a partir de imagens de chamas em um forno industrial

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

São Paulo

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 18 de março de 2020

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

Catálogo-na-publicação

Silva Neto, Gustavo Cunha da

Projeto de um sensor virtual baseado em modelos ARMAX e filtro de Kalman para predição das emissões de O₂/CO₂ a partir de imagens de chamas em um forno industrial / G. C. Silva Neto -- versão corr. -- São Paulo, 2020.
114 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Sensor virtual 2.Identificação de sistemas 3.Filtros de Kalman 4.Poluição ambiental (controle) 5.Processamento de imagens I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Nome: Gustavo Cunha da Silva Neto

Título: Projeto de um sensor virtual baseado em modelos ARMAX e filtro de Kalman para predição das emissões de O_2/CO_2 a partir de imagens de chamas em um forno industrial

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Controle e Automação Mecânica.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição _____

Assinatura _____

Prof. Dr. _____

Instituição _____

Assinatura _____

Prof. Dr. _____

Instituição _____

Assinatura _____

Prof. Dr. _____

Instituição _____

Assinatura _____

Prof. Dr. _____

Instituição _____

Assinatura _____

À minha amada esposa, Daniella,
dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por nunca me deixar esmorecer e permitir alcançar mais um passo em minha vida.

À minha esposa Daniella, por ser meu porto seguro e estar sempre ao meu lado, onde quer que eu esteja. Eu não tenho palavras para agradecer pelo apoio, cuidado, carinho e amor que me tens dado. Esta vitória também é sua!

A meus pais, Antonio Augusto (*in memoriam*) e Francisca, por não medirem esforços para propiciar sempre o melhor a seus filhos. Nunca teria chegado até aqui se não fossem vocês!

Ao meu irmão Augusto, por sempre estar a postos quando precisei, sendo meu braço direito em Manaus. Valeu, mano!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Flávio Celso Trigo, pela excelente orientação e confiança depositada em mim para realização deste trabalho. Gostaria de agradecer também por todos os conselhos, paciência e apoio para que esta tese fosse concluída. As inúmeras conversas seja sobre política, seja sobre a atual conjuntura do nosso país também foram deveras engrandecedoras.

Ao meu grande amigo, companheiro nessa árdua batalha, que é o doutorado, e na nobre missão da docência, Prof. Danilo de Santana Chui. Meu muito obrigado por sua amizade, pelo auxílio na parte mais pesada da programação e por todas as conversas tão incentivadoras e enriquecedoras para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Fausto Furnari, por sempre estar à disposição para ajudar a sanar os problemas que surgiram nos testes experimentais, conseguindo reunir paciência, humildade, conhecimento e didática com mestria. Indubitavelmente, um dos engenheiros mais brilhantes que tive o prazer de conhecer.

Aos grandes amigos Éverton Lins, José Mir, Nelson Filho e Nilton Pereira, por suas amizades, trocas de ideias e pelos apoios de suma importância nesta caminhada.

Aos professores Dr. Agenor de Toledo Fleury e Dr. Flavius Portella Ribas Martins, pelas sugestões e comentários oportunos que ajudaram a lapidar este trabalho.

Aos professores Dr. Mario Salvatierra Júnior, Dr. Valtemir Martins Cabral e Dr. Arlindo Pires Lopes, pelo apoio e auxílio nos imprevistos que ocorreram em Manaus enquanto estava por aqui.

Aos vizinhos do 141 (número do local onde fiquei no Butantã grande parte desse período em SP), amigos manauaras, em sua maioria, por propiciar grandes momentos de confraternização. Em especial para os amigos Rubelmar, Glauber, Tati, Jaime e Carla, que contribuíram para que esta longa caminhada fosse mais leve.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, por possibilitar a realização deste curso.

À Universidade Federal do Amazonas (UFAM), pela autorização de afastamento para capacitação em nível de doutorado e aos colegas professores do Departamento de Engenharia Mecânica, pelo apoio para a realização deste curso.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro, via Programa de Bolsas de Pós-Graduação em Instituições fora do Estado do Amazonas, para realização desta pesquisa.

Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT), em especial ao Laboratório de Engenharia Térmica, pela autorização do uso de todo o seu aparato experimental, viabilizando a realização dos experimentos e coleta de dados, tão fundamentais para a execução desta tese.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful.”

(George E.P. Box)

RESUMO

SILVA NETO, Gustavo Cunha da. **Projeto de um sensor virtual baseado em modelos ARMAX e filtro de Kalman para predição das emissões de O_2/CO_2 a partir de imagens de chamas em um forno industrial.** 2020. 100f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

O diagnóstico eficiente das emissões em processos de combustão desempenha um papel fundamental em seu controle, parte essencial do esforço global para atenuar as consequências do efeito estufa. Em fornos industriais é utilizado um conjunto de sensores (CO_x , SO_x , NO_x) no duto de exaustão para monitorar as taxas de poluição, fornecendo as informações necessárias para fins de controle. No caso dos fornos a gás natural, medidas dos teores de O_2 e de CO_2 permitem principalmente verificar as condições do processo de combustão. Neste trabalho, um sensor virtual que utiliza imagens de chamas capturadas por uma câmera CCD (*charge coupled device* - dispositivo de carga acoplada) é projetado para estimar as emissões de O_2 e CO_2 em um forno a gás natural. As imagens são processadas em computador para serem convertidas em vetores característicos que, por sua vez, atuam como dados de entrada na identificação de modelos “caixa preta” com estrutura ARMAX (média movel autorregressivo com entradas exógenas) tendo como variável de saída medidas do teor de CO_2 . Estimativas da emissão de O_2 por um filtro de Kalman a partir de um modelo ARMAX preliminar auxiliam no desempenho do método como um todo, pois os valores propagados possuem significância estatística por até 60 s antes da próxima atualização com a medida do sensor de O_2 . Os resultados apresentados permitem afirmar que a inclusão do sensor virtual proposto em sistemas de controle em malha fechada de processos de combustão semelhantes é promissora.

Palavras-chave: Sensores virtuais, Modelos ARMAX, Filtro de Kalman, Emissões em combustão, Processamento de imagens.

ABSTRACT

SILVA NETO, Gustavo Cunha da. **Design of a soft sensor based on ARMAX models and Kalman filtering to predict O_2/CO_2 emissions from flame images in an industrial furnace. 2020. 100f.** Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

Efficient diagnosis of emissions from combustion processes plays a key role in their control, an essential part of the overall effort to mitigate the increasing greenhouse effect. In industrial furnaces, a set of sensors (CO_x , SO_x , NO_x) at the exhaust is used to monitor pollutant rates, thus providing the necessary information for control purposes. In the case of natural gas furnaces, measurements of O_2 and CO_2 contents are used to check the condition of the combustion process. In this work, we develop a soft sensor to estimate the O_2 and CO_2 contents at the exhaust of a natural gas prototype furnace from images of flames grabbed by a charge-coupled device (CCD) camera. Feature vectors obtained from computer processing of the grabbed images are used as input data to identify autoregressive moving average (ARMAX) “black box” models having CO_2 content as output. Estimates of O_2 content by a Kalman filter running a preliminary ARMAX model helps the overall performance of the soft sensor, since the model is capable of yielding statistically significant estimates of both O_2 and CO_2 composition in the flue gas up to 60 s before the arrival of actual O_2 measurements. Thus, it is possible to assert that the inclusion of the proposed soft sensor in the closed-loop control strategy of similar combustion processes might be advantageous

Keywords: Soft sensors, ARMAX models, Kalman filtering, Combustion emissions, Image processing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Exemplo de um histograma de imagem em tons de cinza de uma chama a óleo.	30
2	Exemplo de limiarização de uma imagem de chama a óleo pelo Método de Otsu.	34
3	Segmentação da região luminosa dada pela Equação 3.12 (direita) a partir da imagem original (esquerda) e a binarizada (centro).	35
4	Linha do tempo com as etapas de propagação e atualização do Filtro de Kalman (estimativas do estado a priori e a posteriori).	62
5	Fornalha horizontal utilizada nos experimentos (centro) com os detalhes do posicionamento do queimador (esquerda) e da câmera CCD (direita).	66
6	Painel de controle das vazões de entrada de gás natural e oxigênio puro na fornalha.	67
7	Câmera CCD utilizada nos ensaios.	67
8	Evolução temporal das emissões de O_2 e CO_2 obtida nos ensaios com a indicação da razão de equivalência correspondente.	68
9	Fluxograma do método proposto para obtenção do sensor virtual para medição das emissões a partir de imagens.	70
10	Exemplo da operação de recorte em uma das imagens de chama. . . .	71
11	Desenho representativo do histograma típico das imagens de chamas a gás capturadas.	72
12	Exemplo da segmentação obtida com diferentes métodos de limiarização.	73
13	Evolução temporal da característica de imagem de chama “Brilho”. . .	75
14	Evolução temporal da característica de imagem de chama “coordenada y do centroide”.	75
15	Detalhamento no fluxograma para o cálculo das ordens iniciais. . . .	77

16	Algoritmo para a obtenção da estrutura e parâmetros dos modelos caixa-preta.	80
17	Análise de resíduos do modelo de erro na saída (OE) com os dados de estimação.	82
18	Análise de resíduos do modelo <i>Box-Jenkins</i> (BJ) com os dados de estimação.	83
19	Simulação livre dos modelos OE e BJ com dos dados de estimação (teor de %CO ₂ em base seca vs. tempo).	84
20	Estrutura do modelo ARMAX multivariável (MIMO) utilizado.	85
21	Análise de resíduos do modelo ARMAX ₂ (Equação 5.5) com os dados de estimação.	86
22	Análise de resíduos do modelo ARMAX ₁ (Equação 5.4) com os dados de estimação.	87
23	Simulação livre do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.	87
24	Predição de 60 passos à frente (1 <i>min</i>) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.	88
25	Predição de 30 passos à frente (30 <i>s</i>) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.	88
26	Predição de 10 passos à frente (10 <i>s</i>) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.	89
27	Estrutura final do sensor virtual proposto indicando o acoplamento do filtro de Kalman (KF) com modelo ARMAX multivariável (MIMO).	90
28	Simulação do sensor virtual proposto com o conjunto de dados de <i>identificação</i> e $k = 60$ (passos de propagação do modelo).	91
29	Validação cruzada dos modelos OE e BJ com o conjunto de dados de validação	93
30	Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 10$ passos.	95
31	Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 20$ passos.	96

32	Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 60$ passos.	96
33	Estatísticas do filtro utilizado para $k = 10$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.	98
34	Estatísticas do filtro utilizado para $k = 20$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.	99
35	Estatísticas do filtro utilizado para $k = 60$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.	99
36	Gráfico Q-Q para $k = 10$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.	100
37	Gráfico Q-Q para $k = 20$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.	101
38	Gráfico Q-Q para $k = 60$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.	101
39	Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 10$ passos de propagação.	102
40	Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 20$ passos de propagação.	103
41	Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 60$ passos de propagação.	103
42	Variação da razão de equivalência imposta nos ensaios	113

LISTA DE TABELAS

1	Composição química e suas respectivas frações molares e mássicas em base úmida do gás natural utilizado nos experimentos.	66
2	Resumo das razões de equivalência utilizadas nos ensaios e suas respectivas durações (em segundos)	68
3	Conceitos qualitativos do coeficiente de correlação de Pearson (ρ). . .	74
4	Atrasos estimados (em segundos) entre o vetor de características de imagem u e o de teor de emissões y	76
5	Resumo dos índices IA do modelo ARMAX com filtro de Kalman conforme duração do intervalo de passos de propagação.	94
6	Resumo dos índices IAR do modelo ARMAX com filtro de Kalman conforme duração do intervalo de passos de propagação.	95
7	Composição química e suas respectivas frações molares e mássicas em base úmida do gás natural utilizado nos experimentos (<i>revisitada</i>). . .	113

LISTA DE SIGLAS

AIC	- <i>Akaike information criterion</i>
ARMA	- <i>autoregressive moving average</i>
ARMAX	- <i>autoregressive moving average with exogenous inputs</i>
ARX	- <i>autoregressive with exogenous inputs</i>
BJ	- <i>Box-Jenkins</i>
bs	- Base seca
bu	- Base úmida
CCD	- <i>coupled charge device</i>
CO_x , NO_x , SO_x	- Óxidos de Carbono, Nitrogênio e Enxofre
CO_2	- Gás carbônico
EEMQ	- Estimador extendido de mínimos quadrados
EMQ	- Estimador de mínimos quadrados
FAC	- Função de autocorrelação
FCC	- Função de correlação cruzada
fps	- <i>frames</i> por segundo
IAR	- Índice de ajuste baseado no NRMSE
IA	- Índice de ajuste baseado no NMSE
KF	- Filtro de Kalman (<i>Kalman Filter</i>)
KPCA	- <i>kernel principal component analysis</i>
MIMO	- <i>multiple inputs, multiple outputs</i>
MISO	- <i>multiple inputs, single output</i>

NMSE	- <i>Normalized mean square error</i>
NRMSE	- <i>Normalized root mean square error</i>
O_2	- Oxigênio (gás)
OE	- <i>output-error</i>
PDI	- Processamento digital de imagens
PEM	- <i>Prediction error methods</i>
PID	- Controlador proporcional integral derivativo
Q-Q	- Quantil - quantil (gráfico)
RGB	- <i>red, green and blue</i>
SISO	- <i>single input, single output</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	REVISÃO DA LITERATURA	22
3	ELEMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS	28
3.1	Algumas definições	28
3.2	Limiarização	31
3.2.1	Método de Otsu	31
3.3	Propriedades geométricas e de iluminação	35
4	ELEMENTOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS E FILTRO DE KALMAN	38
4.1	Identificação de Sistemas	38
4.1.1	Experimentos e coleta de dados	39
4.1.2	Seleção da Representação de Modelos	40
4.1.2.1	Modelos ARX	41
4.1.2.2	Modelos ARMAX	41
4.1.2.3	Modelos de erro na saída (OE)	46
4.1.2.4	Modelos Box-Jenkins (BJ)	47
4.1.3	Seleção da Estrutura de Modelos	49
4.1.4	Estimação de Parâmetros	50
4.1.5	Validação de Modelos	53
4.1.5.1	Validação Cruzada	54
4.1.5.2	Análise de Resíduos	56

4.2	Filtro de Kalman	57
4.2.1	<i>Shaping filter</i> e ajuste do vetor de estados	58
4.2.1.1	Ruído de processo correlacionado	59
4.2.1.2	Ruído de medição correlacionado	60
4.2.2	Algoritmo do Filtro de Kalman	61
4.2.3	Convergência do Filtro	63
5	MATERIAIS E MÉTODOS	65
5.1	Aparato experimental	65
5.2	Ensaaios	67
5.3	Descrição geral do método para obtenção do sensor virtual	69
5.4	Processamento das imagens obtidas	70
5.4.1	Pré processamento: sincronização e recorte	70
5.4.2	Limiarização e Segmentação	71
5.5	Obtenção dos vetores característicos	73
5.6	Identificação de sistemas	76
5.6.1	Modelo MISO (características de imagem vs. teor de CO_2)	80
5.6.2	Modelo MIMO (características de imagem vs. teor de O_2 e CO_2)	84
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	92
6.1	Testes de validação e resultados: modelos MISO (OE e BJ)	92
6.1.1	Validação cruzada	92
6.2	Testes de validação e resultados: modelo MIMO (ARMAX + KF)	94
6.2.1	Validação cruzada	94
6.2.2	Análise de convergência do filtro	97
6.2.3	Testes adicionais	102

7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
7.1	Conclusões	105
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	107
	Referências	108
	Apêndice A	112

1 INTRODUÇÃO

Há uma preocupação cada vez maior, principalmente nos países em desenvolvimento, de se obter processos autossustentáveis visando a minimização do impacto ambiental, seja por razões de desenvolvimento, seja pelo mau uso atual da energia disponível. A poluição do ar já é um dos principais problemas ambientais, causado principalmente pela queima de combustíveis fósseis. Suas consequências para o corpo humano incluem o aumento dos sintomas da asma e infecções das vias aéreas superiores. É importante frisar que crianças e idosos são os mais vulneráveis, sendo frequentemente internados, principalmente com doenças respiratórias (SAÚDE TOTAL, 2016). Um artigo da BBC (2016) afirma que mais de 5,5 milhões de pessoas no mundo todo estão morrendo anualmente de forma prematura como resultado da contaminação do ar, segundo dados que foram reunidos como parte do projeto chamado *Global Burden of Disease* (Ônus Global das Doenças, em tradução livre). Visando mitigar esses efeitos, rigorosas normas ambientais foram estabelecidas, notadamente para o controle do lançamento de poluentes na atmosfera por máquinas térmicas.

Em instalações industriais, como fornalhas a gás e a óleo, os controles de emissões e rendimento térmico geralmente são realizados pelos respectivos operadores com base em informações oriundas de uma rede complexa de sensores, composta por exemplo, por termopares, medidores de vazão e analisadores de gases. Justamente por esta subjetividade ao ajustar manualmente os parâmetros do processo, este procedimento apresenta diversas desvantagens principalmente devido ao alto custo dos sensores envolvidos e a não-otimalidade das variáveis de controle, impossibilitando sua inclusão em um sistema de controle em malha fechada. O excesso de ar, por exemplo, influencia tanto a eficiência térmica quanto o nível de emissão de poluentes (CO_x , SO_x , NO_x) dos fornos. Estes compostos são indesejados, pois contribuem para problemas como o efeito estufa e a chuva ácida, sem contar com as consequências diretas à saúde humana (SILVA NETO, 2011).

Os processos de combustão em câmaras de combustão estão sujeitos a uma variedade de fenômenos físicos, como vibrações acústicas dentro da câmara, transferência de calor entre a chama e o ambiente, interação de fluidos com diferentes velocidades que sofrem reações químicas, emissões, entre outros. Esta complexidade apresenta uma grande dificuldade na modelagem do processo de combustão. Assim, a criação de sistemas de supervisão ou controle que possam prever o estado de combustão ou corrigir possíveis desvios é uma tarefa bastante desafiadora, tornando o trabalho de especialistas técnicos ainda mais relevante para esta aplicação.

Um importante indicador de que o processo de combustão esteja ocorrendo de acordo com as especificações indicadas pelos órgãos regulamentadores está relacionado à quantidade de poluentes expelidos na atmosfera. Por este motivo, seu monitoramento em tempo real é de grande importância, principalmente na tentativa de concepção de um sistema de controle em malha fechada. Neste sentido, várias técnicas para inspeção e caracterização da dinâmica da combustão têm sido propostas. Elas podem ser divididas basicamente em quatro classes: espectroscopia, sondagem, acústica e monitoramento por imagem (BALLESTER; GARCÍA-ARMINGOL, 2010).

Modelos identificados a partir de dados medidos, objeto de estudo da área de identificação de sistemas, têm se mostrado eficientes na predição de variáveis de saída em sistemas dinâmicos de diferentes naturezas, sejam elas físicas, químicas ou até mesmo biológicas. Segundo Gonzalez (1999), modelos como estes podem ser usados na construção dos chamados sensores virtuais. Eles aliam medidas de outras variáveis disponíveis com um modelo estimado ou já conhecido para obter os valores de uma variável de interesse, seja pela indisponibilidade de instrumentação para medição direta, seja porque a referida medição é muito cara e só realizada periodicamente. Aparentemente, a utilização de sensores virtuais utilizando modelos dinâmicos identificados não foi explorada na supervisão das emissões por meio de imagens.

Conforme será exposto no Capítulo 2, a utilização de imagens para supervisionar processos de combustão é ainda um campo aberto à investigação. Os modelos obtidos na literatura para o monitoramento por imagem ou não apresentam informações sobre a dinâmica das emissões (são ditos estáticos), ou não contam com imagens, tendo sua dinâmica válida somente para uma faixa restrita da razão de equivalência¹. Visto

¹A razão de equivalência (Φ) é comumente usada para indicar quantitativamente quando uma mistura de oxidante e combustível é rica, pobre ou estequiométrica. Ela é definida como sendo a razão entre a razão combustível/oxidante e a razão combustível/oxidante estequiométrica (TURNS, 2013).

que os resultados do monitoramento da combustão por imagens são promissores e os modelos via identificação são versáteis, espera-se que estes sejam capazes de estimar dinamicamente as referidas emissões a partir das imagens de chama.

Seguindo este raciocínio, o problema tratado nesta tese é a predição das emissões de oxigênio (O_2) e gás carbônico (CO_2) em um forno industrial a partir de informações obtidas de uma sequência de imagens de chama, captadas por uma câmera CCD². Vale ressaltar que o CO_2 está sendo considerado um poluente, embora possa ser encontrado inerte no meio ambiente. Altas concentrações deste gás incrementam o chamado efeito estufa, sem contar com a possível relação de sua incidência com doenças cardiovasculares (BRUNEKREEF; HOLGATE, 2002). Assim, investiga-se a relação entre a concentração em base seca³ de dois dos produtos da combustão de gás natural e oxigênio puro⁴ em um forno industrial e os parâmetros geométricos e de luminosidade das imagens das respectivas chamas. O objetivo principal da pesquisa é criar um sensor virtual por meio de identificação de modelos *caixa-preta* para estimar o teor das emissões de O_2 / CO_2 a partir de imagens obtidas por uma câmera CCD e validar estes modelos através da confrontação de dados por eles estimados com os dados experimentais coletados. Além disso, pretende-se mostrar que as etapas percorridas até a concretização desse objetivo constituem-se em uma metodologia passível de utilização em sistemas de monitoramento e controle de processos baseados em imagens das respectivas chamas.

De maneira concisa, as contribuições originais deste trabalho consistem em: (i) gerar um método para a fusão de informações de sensores convencionais em combustão com aquelas provenientes do processamento de imagens via modelos dinâmicos; (ii) obter informações sobre a dinâmica que governa as emissões via processamento de imagens, dessa forma auxiliando na futura implementação de um sistema de controle de emissões baseado em imagens; (iii) aplicar as técnicas de processamento de imagens para obtenção de um *único modelo dinâmico* para predição das emissões para diferentes condições de combustão, variando a razão de equivalência.

A tese está organizada da seguinte maneira: após a presente Introdução, o Capí-

²*coupled charge device*, dispositivo de carga acoplada em tradução livre.

³Na medição de espécies químicas em gases de exaustão, a umidade é removida para evitar a condensação no interior dos analisadores de gases. Então, a concentração destas espécies é reportada em “base seca” (TURNS, 2013).

⁴Com este comburente, as concentrações de NO_x e SO_x emitidos são desprezíveis no estudo aqui apresentado, visto que as quantidades de enxofre e nitrogênio na composição do combustível são pequenas.

tulo 2 traz o levantamento bibliográfico das técnicas de monitoramento dos processos de combustão por imagem. O Capítulo 3 trata de alguns elementos de processamento digital de imagens e o Capítulo 4 apresenta tópicos referentes à identificação de sistemas e aos filtros de Kalman. Já o Capítulo 5 versa sobre os materiais e métodos utilizados para a obtenção dos modelos *caixa-preta* para a predição das emissões de O_2 e CO_2 em uma fornalha a gás natural. No Capítulo 6 são apresentados e discutidos os resultados da pesquisa. Por fim, no Capítulo 7, as conclusões são trazidas juntamente com as perspectivas e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A estabilidade da chama deve ser monitorada e mantida continuamente para melhorar o desempenho geral da combustão. Ela depende de vários fatores como, por exemplo, o tipo de combustível, razão de equivalência, estrutura da fornalha e tipo de queimador. Então, várias técnicas para monitoramento e caracterização de chama têm sido propostas. Ballester e García-Armingol (2010) dividem estas técnicas de monitoramento em quatro classes, baseadas em: espectroscopia, sondagem, acústica e monitoramento por imagem.

Neste capítulo serão abordados textos relativos a avanços no monitoramento baseado em imagens, que tem se mostrado muito eficaz para uso em fornos, considerando sua portabilidade, funcionalidade e custo-benefício (SUN et al., 2011).

Em Baldini, Campadelli e Lanzarotti (2000), há um estudo utilizando um tubo de *Rijke* para mostrar a relação entre parâmetros geométricos de imagens de chama (área, perímetro, compactação¹, coordenadas do centróide, excentricidade, comprimento do eixo maior da elipse de melhor ajuste) e o comportamento dinâmico dos sinais de pressão, fluxo de combustível e temperatura ao longo do tubo. Com as medidas obtidas através de sensores e um modelo baseado nas equações de Navier-Stokes, os pesquisadores obtiveram a frequência principal de oscilação da chama em torno de 150 Hz e verificaram que esta frequência principal foi reproduzida no espectro de uma das coordenadas do centróide da imagem da chama segmentada.

Yan, Lu e Colechin (2002) e Lu, Yan e Colechin (2004) utilizam metodologia similar em uma instalação de teste de combustão a carvão de 1 MW. Eles incluem os parâmetros de ponto de ignição (medida da distância da chama para o bocal) e ângulo de espalhamento da chama para fazer o monitoramento da combustão. Lu, Yan e Colechin (2004) calculam os parâmetros citados a partir de amostras compostas por quatro imagens. A primeira é utilizada para obter os parâmetros comentados anteriormente, duas

¹Uma tradução livre de *compactness*

são utilizadas para obter uma estimativa da temperatura da chama, baseada em piro-metria (BALLESTER; GARCÍA-ARMINGOL, 2010; LU; YAN; COLECHIN, 2004), em que se obteve erro máximo de 1% no intervalo de 1280°C e 1690°C, e a última para se obter um parâmetro chamado de frequência de cintilação (*flicker*). Seus resultados demonstraram que o sistema é capaz de fornecer medição instantânea e quantitativa dos parâmetros de chama em base contínua em tempo real. Os parâmetros de chama medidos são sensíveis às condições de combustão e, portanto, podem ser usados como indicadores para monitoramento da chama. Seguindo esta linha, Jiang et al. (2009) apresentaram um sistema de instrumentação para a medição concorrente da distribuição de temperatura (utilizando a mesma técnica que Lu, Yan e Colechin (2004)) e concentração de fuligem em chamas obtidas em um queimador de gás metano a partir de um sistema composto por um endoscópio acoplado a uma câmera CCD.

González-Cencerrado, Peña e Gil (2012) estudaram a influência da razão de ar-combustível na estrutura e estabilidade da chama a partir de imagens obtidas por uma câmera CCD em um queimador semi-industrial de 500 kW estabilizado por turbilhonamento (*swirl-stabilized*) para processamento de biomassa com carvão pulverizado. A partir destas imagens, fez-se uma análise considerando parâmetros estatísticos e espectrais, interpretados como uma “impressão digital” da chama. Foi identificado que os parâmetros mais sensíveis à temperatura e relação ar-combustível são: brilho (valor médio de cinza), amplitude de flutuações (desvio padrão) e cintilação (*flicker* - média ponderada da frequência de oscilação). Foi também verificado que, quando a chama se torna mais simétrica (do ponto de vista estatístico) e as amplitudes de flutuação e média ponderada da frequência aumentam, as respectivas chamas tendem a ser mais estáveis e com combustão mais eficiente. No entanto, no referido trabalho não foram verificadas as emissões de gases resultantes da combustão. Vale ressaltar que a dependência dos parâmetros da chama com a razão de ar-combustível foi analisada não só do ponto de vista global, mas também através do estabelecimento de diferentes regiões de comportamento dinâmico da imagem. A abordagem via essas sub-regiões, segundo González-Cencerrado, Peña e Gil (2012), necessita de novos testes experimentais para validar as dependências detectadas.

Em González-Cencerrado, Gil e Peña (2013) é estudada, para o mesmo queimador, a relação dos parâmetros de imagem com o número de $swirl^2$. Seus resultados mostram

²Adimensional definido como sendo a razão entre o fluxo axial do momento tangencial da mistura (combustível e comburente) e o fluxo de seu momento axial.

que a frequência característica em termos dos parâmetros de *flicker* de chama é sensível a mudanças nas condições do número de *swirl*. Além disso, diferente do trabalho anterior, menciona-se a respeito da análise de emissões. Apesar de não estabelecer uma tendência mais precisa, as medições de NO_x feitas exibem conexões com a presença de velocidade tangencial (condições de redemoinho) e, em consequência, com outros parâmetros relacionados ao turbilhão, como o *flicker*.

Em González-Cencerrado, Peña e Gil (2015), a análise foi feita com o intuito de se verificar a influência da composição do combustível usando dois tipos de biomassa. Nessa mistura, variou-se o percentual de biomassa na mistura com carvão pulverizado. Foi verificado que o aumento da quantidade de biomassa intensifica o brilho da chama e as distribuições de curtose e assimetria do respectivo histograma de tons de cinza identificam certas estruturas com uma taxa de flutuação luminosa específica com um limite bem definido. O parâmetro de cintilação apoia a ideia sugerida nos artigos anteriores de que seu aumento está relacionado a uma combustão mais eficiente. Com relação à variação do percentual da biomassa, não só a cintilação, mas também a curtose e a assimetria se mostraram bons indicadores na identificação de instabilidades do processo de combustão. Os parâmetros de curtose e assimetria mostraram uma resposta interessante quando as emissões de CO aumentam durante o processo, aproximando-se dos valores correspondentes a uma distribuição normal (ou seja, 3 e 0, respectivamente). Este fato foi comprovado em experimentos com e sem adição de biomassa, o que reforça sua relevância e adequação para o monitoramento e controle dos processos de combustão por meio de imagens.

Chen, Chan e Cheng (2013) utilizaram imagens de chamas juntamente com a análise de componentes principais para a modelagem da combustão em um queimador de óleo pesado. A partir de um conjunto de 300 imagens coloridas (padrão RGB), foi montada uma matriz em que cada linha é formada por três blocos de vetores ordenados contendo os tons de vermelho, verde e azul de cada uma destas 300 imagens. Ou seja, para uma imagem RGB de tamanho 658×492 , cada linha terá dimensão de 971.208. Com essa matriz, verificou-se que as duas primeiras componentes apresentam 98,8% da variância total. Após novos testes, foi identificado um modelo não-paramétrico por regressão a partir de um processo gaussiano com os *scores* das duas primeiras componentes principais da amostra de imagens, relacionados com o teor de oxigênio medido correspondente. Esse modelo foi validado com dados juntamente com um outro modelo obtido por redes neurais e se mostrou similar, tendo vantagem na predição

da variância do teor de oxigênio. O modelo obtido, segundo Chen, Chan e Cheng (2013), pode ser inserido no esquema de controle do tipo PID (proporcional-integral-derivativo) discutido em Chen et al. (2012) com o intuito de reduzir as emissões neste processo de combustão.

Uma extensão da análise de componentes principais, o KPCA (*kernel principal component analysis*), foi utilizada no trabalho de Sun et al. (2013), em que é apresentada uma metodologia para o diagnóstico de condições anormais em um processo de combustão através das imagens da chama produzida por um queimador de óleo cru. Nesta metodologia, foram utilizadas características mais triviais como área de chama, brilho, não-uniformidade e frequência de oscilação como variáveis de entrada para o modelo baseado no KPCA. Vale ressaltar que o trabalho procurou apenas identificar as chamas que estavam com condições fora de um limiar de operação, não se interessando em fazer estimativas de medidas físicas.

O KPCA, combinado com características de imagens baseadas na matriz de co-ocorrência (GONZALEZ; WOODS, 2002) e redes neurais, também foi utilizado no trabalho de Wang e Ren (2014) para um forno rotativo utilizado para sinterização. Neste, extrai-se características mais rebuscadas da imagem da chama como energia, entropia e inércia com base na matriz de co-ocorrência a fim de se obter informações qualitativas sobre mudanças na aparência visual da chama. O KPCA é utilizado para extrair as componentes principais que foram utilizadas no treinamento da rede neural. Esta rede então é usada para classificar se o estado da chama representa uma combustão completa ou incompleta.

Em Liu, Fan e Chen (2017) é realizada uma identificação similar a de Chen, Chan e Cheng (2013), porém, em vez da análise de componentes principais, foram utilizadas redes neurais profundas com retropropagação - tradução livre de *deep belief network with backpropagation* - (DATA SCIENCE ACADEMY, 2018). Esta estratégia apresentou indicadores estatísticos relativamente melhores que a baseada em componentes principais.

Tóth, Garami e Csordás (2017) investigaram o uso de redes neurais profundas utilizando parâmetros operacionais rotineiramente medidos e imagens de chama em tempo real para prever a temperatura da água na saída de uma caldeira de biomassa de 3 MW. Descobriu-se que as imagens de chamas aumentam a precisão das previsões em comparação com aquelas obtidas usando apenas dados operacionais. A complexidade

da combustão da biomassa foi bem captada pela rede neural profunda proposta. Além disso, esta arquitetura produziu melhores previsões do que as redes simples.

Sreedhanya et al. (2017) utilizaram o método de inferência de Mamdani e Assilian (1975) para estimar a temperatura da região mais quente (*hotspot*) da chama, baseada nos tons de vermelho, verde e azul de sua imagem em um forno rotativo, típico de processo de fabricação de cimento. A validação do modelo foi feita a partir da avaliação da convergência das medidas F, precisão (*precision*) e revocação (*recall*), calculadas em relação à diferença da área de *hotspot* estimada pelo modelo com a região medida experimentalmente. Foi verificado que os valores destas métricas ficaram próximas de 1, indicando boa confiabilidade das estimativas do *hotspot* geradas pelo algoritmo.

Fleury et al. (2018) propuseram um modelo de inferência que relaciona 33 características de imagem de chama com estados físicos da combustão em uma fornalha a óleo cru, a fim de montar um sistema supervisor para o monitoramento da estabilidade da chama classificando-a em 9 categorias. O mecanismo sugerido, baseado nos conceitos de crença e plausibilidade do método de inferência de Dempster-Shafer (ZADEH, 1986), se mostrou capaz de reconhecer a maioria das mudanças bruscas no processo de combustão de óleo cru e ar atmosférico, resultantes da modificação de parâmetros físicos.

Os resultados de Fleury et al. (2018), que utilizou o método de Dempster-Shafer baseado em 33 características da imagem para fazer inferências sobre sua real condição, são revisitados e estendidos em trabalho que contou com a participação do autor desta tese e colaboradores (SILVA NETO et al., 2019). Em vez do método de Dempster-Shafer, empregou-se o método de inferência de Mamdani com o auxílio de somente 11 características da imagem da chama para, além de classificar a combustão em 5 categorias de estado da chama, inferir valores de 2 variáveis físicas, a saber, vazão mássica de vapor e razão de ar primário/secundário, juntamente com suas respectivas incertezas.

Pela revisão da literatura realizada, percebe-se que os trabalhos citados concordam na indicação de que é possível relacionar parâmetros geométricos e de luminosidade das imagens de chama com variáveis físicas da combustão, como também inferir sobre a condição da chama ou até mesmo valores destas variáveis em tempo real. No entanto, supostamente, as propostas de modelos para sensores virtuais apresentadas não realizam predições, muito menos apresentam informações sobre a dinâmica de parâ-

metros físicos relacionados à combustão a partir de imagens. Este é um campo aberto que a tese visa explorar: a obtenção de um modelo que não somente funcione como uma função estática entre imagem e parâmetro físico (característica) da chama, mas que consiga realizar predições e apresentar a evolução temporal destas características com o intuito de obter um modelo mais tratável do ponto de vista da teoria de controle, permitindo assim sua inclusão em um sistema em malha fechada.

3 ELEMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e conceitos em processamento digital de imagens (PDI) necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

3.1 Algumas definições

Definição 1. *Uma **imagem monocromática digital** I é uma representação do gráfico do mapeamento $f = f(x, y); f : U \subset \mathbb{N}^2 \longrightarrow C_L$, em que as variáveis independentes x e y são em geral coordenadas espaciais, e a imagem (conjunto) de f em $C_L = \{0, 1, \dots, L-1\}$ define o tom da cor (no caso, cinza) da imagem em cada ponto $(x, y) \in U$.*

De maneira geral, por monocromático entende-se que vários tons de uma mesma cor são usados para gerar uma imagem. A imagem policromática, ou colorida, não será tratada neste trabalho, que equivaleria ao caso do contradomínio da função f ser o resultado do produto cartesiano $C_{L_1} \times \dots \times C_{L_n}$, com n representando a quantidade de cores no padrão utilizado (por exemplo, RGB e CMYK). O conjunto C_L representa o conjunto de graduações de tons de cinza possíveis para a imagem. O inteiro positivo L geralmente é dado por uma potência de dois¹, tendo como padrão 255 níveis de cinza para imagens monocromáticas digitais, também chamada de representação de 8 *bits*. Neste caso, o tom 0 é representado pela cor preta e o 255 ($2^8 - 1$) pela cor branca.

A Definição 1 sugere uma representação matricial da imagem I (por exemplo, de tamanho $M \times N$), que é necessária para armazenamento na memória do computador, e

¹ $L = 2^b$, b representando o número de *bits*

nesta matriz, cada elemento $f(i, j)$ é chamado de *pixel* (*picture element*).

$$f = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Justamente pelo fato de se poder representar uma imagem por uma matriz, faz sentido operar imagens algebricamente (tal como soma e subtração). Estas operações são herdadas da álgebra matricial, resultando em operações *pixel a pixel*. É preciso, porém, tomar cuidado nos casos em que os resultados desta operação *pixel a pixel* ultrapassem os limites mínimo e máximo do valor de tom de cinza. Por exemplo, a adição de duas imagens de 256 tons de cinza pode resultar em um número maior que 255 para alguns *pixels*, da mesma maneira que a subtração de duas imagens pode resultar em valores negativos.

Segundo Marques Filho e Vieira Neto (1999), para contornar estes problemas, existem basicamente duas alternativas: (1) manter os resultados intermediários em uma matriz, na qual o espaço em memória alocado para cada pixel permita a representação de números negativos e/ou maiores que $L - 1$ e, em seguida, proceder a uma normalização destes valores intermediários ou (2) saturando os valores maiores que o máximo valor permitido, bem como os valores negativos, em $L - 1$ e 0, respectivamente. Pelo custo computacional envolvido, optar-se-á pela segunda alternativa.

Estas operações serão necessárias na etapa de segmentação, isto é, divisão ou separação, da imagem em suas unidades significativas. Geralmente, esta etapa se resume em separar o objeto (no caso deste trabalho, a chama) do fundo da imagem. Uma ferramenta importante que pode ser usada tanto na etapa do pré-processamento, quanto na extração de características, podendo também ser usada na segmentação, é o histograma. Sua construção é simples, mas esta simplicidade contrasta com a sua versatilidade no processamento digital de imagens.

Definição 2. Histograma. (MARQUES FILHO; VIEIRA NETO, 1999). *O histograma de uma imagem é um conjunto de números indicando o percentual de pixels naquela imagem que apresentam um determinado nível de cinza. Estes valores são normalmente representados por um gráfico de barras que fornece para cada nível de cinza o número (ou o percentual) de pixels correspondentes na imagem. Para uma*

imagem de tamanho $M \times N$, cada elemento deste conjunto é calculado através da seguinte expressão:

$$p_i = \frac{n_i}{MN} \quad (3.2)$$

em que n_i representa a quantidade de pixels da imagem que possuem o tom de cinza $i = 0, 1, \dots, L - 1$ e p_i representa a probabilidade do i -ésimo tom de cinza.

A análise do histograma é importante pois, dentre outras razões, é possível se obter uma indicação da qualidade da imagem quanto ao nível de contraste e brilho médio. O histograma pode ser construído com as quantidades n_i ou com as medidas de probabilidades p_i . A Fig. 1 apresenta um exemplo de histograma obtido de uma imagem de chama em tons de cinza, proveniente da combustão de óleo cru com ar atmosférico.

Figura 1: Exemplo de um histograma de imagem em tons de cinza de uma chama a óleo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o histograma também é possível pré-processar imagens com certo tipo de ruído usando a técnica de equalização (GONZALEZ; WOODS, 2002), com o propósito de acentuar detalhes não visíveis anteriormente e obter melhor contraste na imagem final, facilitando assim a segmentação.

Para a etapa de segmentação, vários métodos foram desenvolvidos; no entanto, dependendo da característica da imagem, esta é uma tarefa complexa, necessitando muitas das vezes da combinação destas técnicas para se adaptar ao problema. Pode-se citar como exemplos os métodos de fusão de região estatística, detecção de bordas, baseado em histograma e limiarização. Uma abordagem aliando estas duas últimas

técnicas, relatada em Chui (2020), foi utilizada nesta tese. Para auxiliar em seu entendimento, a limiarização será sucintamente discutida a seguir.

3.2 Limiarização

Entende-se por limiarização uma técnica que segmenta, isto é, separa, uma ou mais regiões de interesse em uma imagem. Na maioria dos casos, inclusive neste trabalho, a limiarização se restringe à separação entre dois grupos: objeto e fundo (*background*). Para uma imagem em tons de cinza, o limiar (*threshold*) representa o nível de cinza que separa a imagem nesses dois grupos e, a cada um deles, se atribui um valor fixo de tom de cinza. Especificamente neste caso, onde se tem um limiar único, a limiarização também é chamada de binarização.

Definição 3. *Seja uma imagem em tons de cinza representada pelo resultado da aplicação do operador $f = f(x, y)$, $f : U \subset \mathbb{N}^2 \longrightarrow C_L = \{0, 1, \dots, L - 1\}$. Dado um limiar $T \in C_L$, a **limiarização** (global) é definida pelo operador $f_b = g[f(x, y)]$ dado por:*

$$f_b(x, y) = \begin{cases} a, & \text{se } f(x, y) \geq T \\ b, & \text{se } f(x, y) < T \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $a, b \in C_L$.

Segundo Marques Filho e Vieira Neto (1999), a forma mais simples de limiarização consiste na bipartição do histograma, convertendo os *pixels* cujo tom de cinza é maior ou igual a um certo valor de limiar T em brancos e os demais em pretos. Ou seja, $a = 255$ e $b = 0$ na Definição 3. Isto se torna trivial quando o histograma apresenta uma característica bimodal, o que geralmente não acontece. Na verdade, quanto menos salientes forem os dois picos do histograma de tons de cinza da imagem, correspondentes a objeto e fundo, mais difícil se torna a definição de um limiar T . Na busca pela obtenção de limiares de forma automática, alguns métodos de limiarização foram propostos, como por exemplo, métodos que utilizam média móvel, estatística local, suavização de imagem e o método de Otsu (GONZALEZ; WOODS, 2002).

3.2.1 Método de Otsu

Conforme a Definição 3, assume-se que a escolha do valor de limiar é arbitrária e subjetiva. Dependendo da característica da imagem, determinar um limiar T é

uma tarefa bem trabalhosa e computacionalmente cara no caso em que se deve fazer a limiarização em um conjunto de imagens obtidas em tempo real. Para resolver este problema, se faz necessária a utilização de técnicas que viabilizem um valor ótimo de limiar. Como o histograma representa graficamente a distribuição de probabilidades de ocorrência dos tons de cinza em uma dada imagem, Otsu (1979) propôs um método de limiarização global ótimo baseado nas premissas de que, considerando as classes de separação em uma imagem, *os tons de cinza de uma mesma classe devem ser similares e os tons entre as classes devem ser diferentes*. Então, a ideia deste método é a de maximizar a variância entre as classes e minimizar a variância interna dentro de cada classe. Além disto, Otsu mostrou que o valor do limiar que minimiza a variância interna é o mesmo que maximiza a variância entre as classes. O funcionamento do método de Otsu é resumido nos passos do Algoritmo 1.

Algoritmo 1 (Método de Otsu): Considere uma imagem f de dimensões $M \times N$ de L tons de cinza². Definindo $\mu(k) = \sum_{i=0}^k ip_i$ como sendo a média dos *pixels* que tem tons no intervalo de 0 até k ; $\mu_G = \mu(L-1)$ e σ_G^2 a média e a variância total (global) dos tons dos *pixels* de toda a imagem, respectivamente. Procede-se aos seguintes passos:

- a) Obtém-se o histograma da imagem a partir do cálculo das probabilidades de ocorrências de tons de cinza por

$$p_i = \frac{n_i}{MN}, \quad (3.4)$$

em que n_i representa a quantidade de *pixels* da imagem que possuem o tom de cinza i ; $i \in C_L$. Obviamente, $MN = \sum_{i=0}^{L-1} n_i$ e $\sum_{i=0}^{L-1} p_i = 1$.

- b) Escolhe-se um inteiro positivo k em C_L que divide o histograma da imagem em duas classes, chamadas H_1 e H_2 , em que H_1 representa os *pixels* cujos tons estão entre 0 e k e H_2 representa os *pixels* cujos tons estão entre $k+1$ e $L-1$.

- c) Calculam-se as probabilidades de ocorrência de cada classe:

$$P_1(k) = \sum_{i=0}^k p_i, \quad (3.5)$$

$$P_2(k) = \sum_{i=k+1}^{L-1} p_i = 1 - P_1(k).$$

² $f : \{0, 1, \dots, M-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow C_L = \{0, 1, \dots, L-1\}$

d) Calculam-se as médias e variâncias dos tons de cinza de cada classe:

$$\begin{aligned}\mu_1(k) &= \frac{1}{P_1} \sum_{i=0}^k i p_i = \frac{\mu(k)}{P_1(k)}, \\ \sigma_1^2(k) &= \frac{1}{P_1} \sum_{i=0}^k [i - \mu_1(k)]^2 p_i, \\ \mu_2(k) &= \frac{1}{P_2} \sum_{i=k+1}^{L-1} i p_i = \frac{\mu_G - \mu(k)}{1 - P_1(k)}, \\ \sigma_2^2(k) &= \frac{1}{P_2} \sum_{i=0}^k [i - \mu_2(k)]^2 p_i.\end{aligned}\tag{3.6}$$

e) Calcula-se a variância interna da classe (ou intraclass):

$$\sigma_H^2(k) = P_1(k) \sigma_1^2(k) + P_2(k) \sigma_2^2(k).\tag{3.7}$$

f) Incrementa-se k até encontrar T tal que $T = \arg \min_{0 \leq k \leq L-1} \sigma_H^2$ (se T não for único, calcular a média entre os candidatos). Este será o limiar ótimo, segundo Otsu (1979).

g) Avalia-se a imagem resultante desta limiarização.

Para a variância intraclass calculada pela Equação 3.7 é necessário calcular os valores de P_1, σ_1^2, P_2 e σ_2^2 para cada k . Otsu (1979) demonstrou que o limiar ótimo que minimiza a variância intraclass é o mesmo que a maximiza entre as classes. A variância entre as classes H_1 e H_2 (ou interclass) é definida por:

$$\sigma_B^2(k) = P_1(k) [\mu_1(k) - \mu_G]^2 + P_2(k) [\mu_2(k) - \mu_G]^2.\tag{3.8}$$

Utilizando a complementaridade de P_2 (Equação 3.5), o fato de que $\mu_G = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$ e a relação das médias do item d) com as médias total e parcial de 0 a k , apresen-

tadas na Equação 3.6, obtém-se a seguinte expressão para σ_B^2 :

$$\begin{aligned}
 \sigma_B^2(k) &= \sigma_G^2 - \sigma_H^2(k) \\
 &= P_1(k) [\mu_1(k) - \mu_G]^2 + P_2(k) [\mu_2(k) - \mu_G]^2 \\
 &= P_1(k)P_2(k) [\mu_1(k) - \mu_2(k)]^2 \\
 &= \frac{[\mu_G P_1(k) - \mu(k)]^2}{P_1(k) [1 - P_1(k)]} .
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ou seja, utilizando a variância entre as classes, será preciso calcular para todo k somente os valores de P_1 e $\mu(k)$, o que é mais viável computacionalmente. Com isto, os passos e) e f) são substituídos por:

e)* Calcula-se a variância entre as classes:

$$\sigma_B^2(k) = \frac{[\mu_G P_1(k) - \mu(k)]^2}{P_1(k) [1 - P_1(k)]} . \tag{3.10}$$

f)* Incrementa k até encontrar T tal que $T = \arg \max_{0 \leq k \leq L-1} \sigma_B^2$ (se T não for único, calcular a média entre os candidatos). Este será o limiar ótimo, segundo Otsu (1979).

A Fig. 2 ilustra o funcionamento do método de Otsu para uma imagem de chama da queima de óleo.

Figura 2: Exemplo de limiarização de uma imagem de chama a óleo pelo Método de Otsu.

Fonte: Silva Neto et al. (2019).

Nesta ilustração é possível perceber o excelente resultado da limiarização pelo método de Otsu. Isto acontece quando o histograma da imagem tem característica bimodal, isto é, apresenta dois picos (ou regiões de máximos) bem destacados. É o caso da imagem de chama da Fig. 2. Vale notar que esta é a mesma chama da Fig. 1, onde é apresentado seu respectivo histograma.

3.3 Propriedades geométricas e de iluminação

Após as etapas de aquisição, pré-processamento e segmentação, parte-se para a etapa de extração de características (MARQUES FILHO; VIEIRA NETO, 1999). Para tanto, algumas definições são necessárias.

Definição 4. (Região Luminosa). Considere uma imagem de chama mapeada por uma função f (contendo o fundo), a sua imagem binarizada correspondente, mapeada por f_b , e o seguinte mapeamento g_s dado por:

$$g_s(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_b(i, j) = 0 \\ f(i, j), & \text{se } f_b(i, j) = L - 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

A região luminosa A_c é a região clara da imagem obtida com o mapeamento g_s , ou seja:

$$A_c = \{(i, j) \in \{0, \dots, M - 1\} \times \{0, \dots, N - 1\} \mid g_s(i, j) \neq 0\}. \quad (3.12)$$

A região luminosa corresponde aproximadamente à região da chama obtida instantaneamente na imagem, recuperando as informações dos tons de cinza dos *pixels* perdidas na operação de binarização, o que corresponde a uma segmentação da chama com o seu fundo. A Fig. 3 ilustra esta operação.

Figura 3: Segmentação da região luminosa dada pela Equação 3.12 (direita) a partir da imagem original (esquerda) e a binarizada (centro).

Fonte: Silva Neto et al. (2019).

Definição 5. (Área da região luminosa). Dada uma imagem de chama e a sua imagem binarizada correspondente, a área da região luminosa será dada pela quantidade de *pixels* brancos nesta última, ou seja:

$$R_l = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f_b(i, j)}{L - 1}. \quad (3.13)$$

No caso da imagem binarizada, f assume dois valores: $L - 1$, quando o *pixel* for

branco e 0, quando preto.

Definição 6. (Brilho). O brilho é definido como sendo a intensidade média do nível de cinza na região luminosa (onde g_s é diferente de zero). Ou seja:

$$B = \frac{1}{|R_l|} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{g_s(i, j)}{L-1}. \quad (3.14)$$

Definição 7. (Não-uniformidade - (SUN et al., 2013)). A não-uniformidade U de uma região luminosa é dada pelo desvio médio dos tons de cada pixel em relação ao brilho B da chama. Ou seja:

$$U = \frac{1}{|BR_l|} \sum_{i \in A_c} \sum_{j \in A_c} \left| \frac{g_s(i, j)}{L-1} - B \right|. \quad (3.15)$$

Definição 8. (centroide). Considere o sistema de coordenadas xOy . O centroide de uma região luminosa é definido como sendo o ponto $C(x_c, y_c)$ que tem coordenadas dadas por:

$$x_c = \frac{1}{R_l} \sum_{(x_i, y_j) \in A_c} x_i, \quad (3.16)$$

$$y_c = \frac{1}{R_l} \sum_{(x_i, y_j) \in A_c} y_j, \quad (3.17)$$

em que x_i marca a distância da origem até o centro do pixel (i, j) na direção do eixo Ox e y_j , na direção Oy .

Definição 9. (Momento de inércia ou momento de área de segunda ordem). Considere o sistema de coordenadas xOy . O momento de inércia, ou momento de área de segunda ordem (ou ainda, segundo momento de área), da região luminosa em relação ao eixo Ox é dado por:

$$I_x = \sum_{(x_i, y_j) \in A_c} y_j^2. \quad (3.18)$$

Consequentemente, o momento desta região em relação ao eixo Oy será:

$$I_y = \sum_{(x_i, y_j) \in A_c} x_i^2. \quad (3.19)$$

Definição 10. (Vizinhança-4). Dado um pixel P que está na posição (x_i, y_j) , a vizinhança-4 ou vizinhança de Von Neumann ou ainda, conjunto de pixels 4-conectados é dado pelo seguinte conjunto:

$$V_4(P) = \{(x_i - 1, y_j), (x_i + 1, y_j), (x_i, y_j - 1), (x_i, y_j + 1)\}. \quad (3.20)$$

Além disso, o conjunto de pixels d -conectados (ou vizinhança- d), que corresponde aos pixels conectados diagonalmente, é dado por:

$$V_d(P) = \{(x_i - 1, y_j - 1), (x_i + 1, y_j + 1), (x_i + 1, y_j - 1), (x_i - 1, y_j + 1)\}. \quad (3.21)$$

A união entre os conjuntos de pixels 4-conectados e d -conectados forma o conjunto de vizinhança-8. Este conceito facilita, dentre outras, a implementação de uma função que calcule o perímetro de uma figura binarizada.

Proposição 1: (Perímetro). O perímetro de uma figura binarizada pode ser aproximado pela seguinte expressão:

$$p = N_4 + \sqrt{2}N_d, \quad (3.22)$$

em que N_4 representa o número de transições entre pixels vizinhos-4 e N_d o número de vizinhos- d .

Prova. A justificativa para esta expressão pode ser encontrada, dentre outros, em Jahne (1997). $\square$

Definição 11. (Dispersão - Xu et al. (2018)) A dispersão da distribuição da região luminosa da chama é indicada pelo desvio padrão da localização de cada pixel em relação ao seu centroide.

$$Disp = \frac{Disp_x + Disp_y}{2}, \quad (3.23)$$

em que:

$$Disp_x = \frac{1}{A_c} \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} (x_i - x_c)^2}, \quad (3.24)$$

$$Disp_y = \frac{1}{A_c} \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} (y_j - y_c)^2} \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

Quanto maior o valor de $Disp$, maior o espalhamento da chama em relação ao centroide.

4 ELEMENTOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS E FILTRO DE KALMAN

A obtenção de modelos para sistemas dinâmicos é fundamental para vários ramos das ciências e engenharia, principalmente com o crescente aumento da complexidade dos processos industriais. Tais modelos podem ser obtidos através de argumentos fenomenológicos (modelagem *caixa-branca*), a partir de dados experimentais, exclusivamente, (*caixa-preta*) ou a partir de informações *a priori* para auxílio na determinação da sua estrutura, mas ainda utilizando dados (*caixa-cinza*). Para estes dois últimos, a capacidade de obter um modelo preciso é limitada pela presença de flutuações aleatórias, como distúrbios não medidos e erros de medição. No entanto, com a evolução dos sistemas de aquisição, cada vez mais confiáveis, a área de *Identificação de Sistemas*, que tem como objetivo estudar maneiras de modelar e analisar sistemas dinâmicos a partir de observações, tem se mostrado cada vez mais promissora.

O filtro de Kalman consiste em um processo recursivo eficiente de estimação que incorpora todas as informações que podem ser fornecidas a ele, processando todas as medidas disponíveis, que geralmente estão afetadas por ruído, para estimar o valor atual das variáveis de interesse. Graças à sua versatilidade e simplicidade de implementação, o filtro em questão é utilizado em um grande número de aplicações em tecnologia, como por exemplo, em orientação, navegação e controle de veículos.

Neste capítulo serão apresentados alguns tópicos sobre identificação de sistemas e filtro de Kalman, que serão cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 Identificação de Sistemas

Conforme Coelho e Coelho (2004), entende-se por modelagem e identificação a determinação do modelo matemático de um sistema que representa suas características essenciais de forma adequada para uma utilização particular, seja ela de supervisão,

otimização, diagnóstico ou controle. Este modelo é nada mais que uma representação matemática utilizada para auxiliar no entendimento da dinâmica do processo, reduzindo custos e riscos, evitando a necessidade de uma série de experimentos físicos específicos. No entanto, a validade destes resultados das simulações depende fundamentalmente do ajuste da qualidade desta representação. Pensar em um modelo que reproduza exatamente o comportamento do sistema real é utópico. Com isto, ele deve ser ajustado de maneira que seja capaz de reproduzir a dinâmica do sistema da melhor maneira possível. Algumas ferramentas são utilizadas para qualificar o quão boa é a modelagem feita, por exemplo, análise de resíduos, previsões de passos à frente e validação cruzada.

As principais etapas de um problema de identificação, segundo Aguirre (2015) são:

- testes dinâmicos e coleta de dados;
- escolha da representação matemática e determinação da estrutura do modelo;
- estimação de parâmetros;
- validação do modelo obtido.

Estes passos serão discutidos de forma sucinta nas próximas subseções.

4.1.1 Experimentos e coleta de dados

Como a identificação de sistemas basicamente obtém modelos a partir de observações, é necessário realizar a coleta de tais informações. Segundo Oliveira Jr e Garcia (2017), o principal problema associado aos testes em plantas industriais é que, em muitos casos, há um grande custo financeiro para afastar o processo de suas condições normais, gerando produtos fora das especificações técnicas, tendo que ser descartados ou reciclados. Isto sem mencionar os atrasos de tempo significativos de alguns processos comumente encontrados na indústria. Além disso, em muitos casos, não é aconselhável desviar-se das condições normais de operação devido a restrições de segurança. Oliveira Jr e Garcia (2017) afirmam, ainda, que a identificação com dados históricos em operação normal é uma linha de pesquisa recente e relevante visto que, com o advento da indústria 4.0, a tendência de armazenar grandes quantidades de dados de processo sem compressão vem se tornando cada vez maior.

De fato, como a obtenção destas informações depende muito das condições experimentais, a aquisição dos dados deve ser feita de maneira que se minimize o efeito dos distúrbios não medidos e erros de medição. Coelho (2002) comenta que, sempre que possível, é preferível injetar sinais externos ao sistema, diferentes dos de operação normal, para excitar o maior número de modos dinâmicos do sistema durante todo o processo de identificação. Todas as características estáticas e dinâmicas que não forem excitadas não aparecerão nos dados e o modelo não terá como explicá-las. Os sinais que têm potência espectral em n ou mais frequências distintas são chamados de persistentemente excitantes¹ de ordem n .

4.1.2 Seleção da Representação de Modelos

Dentre as várias representações disponíveis, neste trabalho o foco estará nos modelos lineares e discretos. Considere a seguinte representação geral:

$$\begin{aligned} A(q) y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} v(k) \\ y(k) &= \frac{B(q)}{F(q)A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)} v(k) \\ y(k) &= G(q)u(k) + H(q)v(k) , \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que y e u representam os sinais de saída e entrada, respectivamente, v representa um ruído branco², q^{-1} representa o operador de atraso, ou seja, $q^{-1}y(k) = y(k-1)$, e A, B, C, D e F são os polinômios de grau $n_a, n_b - 1, n_c, n_d$, e n_f definidos a seguir:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} , \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b-1} q^{-n_b+1} , \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} , \\ D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d} , \\ F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f} . \end{aligned} \quad (4.2)$$

¹Uma definição equivalente: um sinal estocástico é dito persistentemente excitante de ordem n se sua média e função de autocorrelação existirem e se sua matriz de covariância, de ordem n , for não-singular (AGUIRRE, 2015).

²Um processo estocástico é dito branco se suas realizações no tempo estão descorrelacionadas, isto é, se sua função de autocorrelação, $E[v(t), v(t-\tau)]$ tem valor não nulo somente para $\tau = 0$. (COELHO; COELHO, 2004)

Aguirre (2015) comenta que as funções G e H normalmente são referidas com as funções de transferência do processo e do ruído, respectivamente. Ou seja, G é o resultado de substituir $q = z$ na transformada unilateral Z da resposta ao impulso do processo, $g = g(k)$.

4.1.2.1 Modelos ARX

Uma representação muito útil em identificação é o modelo autorregressivo com entrada exógena (ARX - *autoregressive with exogenous inputs*). Ele pode ser obtido a partir do modelo geral da Equação 4.1, fazendo $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ com A e B arbitrários, tem-se que:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + v(k) . \quad (4.3)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} y(k) = & -a_1y(k-1) - \dots - a_{n_a}y(k-n_a) + b_0u(k) + \dots \\ & + b_{n_b-1}u(k-n_b+1) + v(k) . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vale ressaltar que v representa o erro cometido pelo modelo ao tentar explicar y . Como o termo v entra diretamente na Equação 4.4, Ljung (1999) classifica o modelo ARX como pertencendo à classe de modelos de *erro na equação*. Esta classe corresponde à estrutura dos modelos cujas funções de transferência G e H tem o polinômio A como fator comum nos seus denominadores. Da Equação 4.1, percebe-se que, para o modelo ARX, $H(q) = 1/A(q)$. Isto quer dizer que o ruído adicionado à saída $e(k) = v(k)/A(q)$ não é branco. É comum indicar os modelos ARX como $ARX(n_a, n_b, n_k)$, em que n_k indica o número de intervalos de amostragem relacionados ao atraso de transporte. Consequentemente, $b_0 = b_1 = \dots = b_{n_k} = 0$ e o polinômio B será dado por $B(q) = b_{n_k+1}q^{-1-n_k} + \dots + b_{n_k+n_b-1}q^{-n_b+1-n_k}$.

4.1.2.2 Modelos ARMAX

Ljung (1999) comenta que a principal desvantagem do modelo ARX é a falta de liberdade adequada na descrição das propriedades do termo de perturbação (ruído). Para isso, flexibiliza-se a descrição do erro na equação como uma média móvel de um

ruído branco. Ou seja:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k) + \dots + b_{n_b-1} u(k-n_b+1) \\ + c_1 v(k-1) + \dots + c_{n_v} v(k-n_v) + v(k). \quad (4.5)$$

Isto equivale a tomar $D(q) = F(q) = 1$ na Equação 4.1:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)v(k) \\ y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}v(k) \quad (4.6) \\ y(k) = G(q)u(k) + H(q)v(k).$$

Percebe-se que o ruído adicionado à saída y , $e(k) = H(q)v(k) = C(q)v(k)/A(q)$, não é branco. Ljung (1999) comenta que o modelo do tipo ARMAX tem se tornado uma ferramenta padrão nas áreas de econometria e controle. Um caso particular do ARMAX é o modelo ARMA, que é quando não se tem sinal exógeno, ou seja, $u(k) = 0$. Do mesmo ponto de vista, o modelo ARX também pode ser considerado um caso particular do modelo ARMAX. É comum indicar os modelos ARMAX como $\text{ARMAX}(n_a, n_b, n_c, n_k)$, em que n_k indica o número de intervalos de amostragem relacionados ao atraso de transporte. Consequentemente, $b_0 = b_1 = \dots = b_{n_k} = 0$ e o polinômio B será dado por $B(q) = b_{n_k+1}q^{-1-n_k} + \dots + b_{n_k+n_b-1}q^{-n_b+1-n_k}$.

O teorema a seguir apresenta uma forma equivalente em espaço de estados de um modelo ARMAX. Esta transformação será importante na metodologia implementada nos próximos capítulos.

Teorema 1. *Considere a função de transferência da Equação 4.6, ou seja $z = q$ nesta equação³. Uma representação em espaço de estados desta equação é dada por:*

³Esta substituição se faz necessária uma vez que, a rigor, $G = G(z)$ é uma representação no domínio da frequência, já $G = G(q)$ é uma representação no domínio do tempo. Além disso, q^{-1} é um operador de atraso e z^{-1} é o inverso da variável complexa z (AGUIRRE, 2015).

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_n \\ -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} c_n - a_n \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 \end{bmatrix} v(k) \quad (4.7)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) + v(k), \quad (4.8)$$

em que $n = \max(n_a, n_b - 1, n_c)$, ou seja, o valor da maior ordem entre os polinômios do modelo ARMAX.

Demonstração. Em primeiro lugar, supõe-se, sem perda de generalidade, que $n_a = n_b - 1 = n_c = n$. Fazendo $q = z$ na Equação 4.6, tem-se a funções de transferência G e H do processo e do ruído, respectivamente. Com isto, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})Y(z) &= (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n})U(z) \\ &+ (1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n})N(z). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Isolando $Y(z)$, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
Y(z) = & b_0 U(z) + N(z) + z^{-1}[b_1 U(z) + c_1 N(z) - a_1 Y(z)] \\
& + z^{-2}[b_2 U(z) + c_2 N(z) - a_2 Y(z)] \\
& + \cdots + z^{-n}[b_n U(z) + c_n N(z) - a_n Y(z)] .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Pondo z^{-1} em evidência de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
Y(z) = & b_0 U(z) + N(z) + z^{-1}\{b_1 U(z) + c_1 N(z) - a_1 Y(z) \\
& + z^{-1}[b_2 U(z) + c_2 N(z) - a_2 Y(z)] \\
& + z^{-1}(b_3 U(z) + c_3 N(z) - a_3 Y(z) + \cdots)\} .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Definem-se, então, as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
X_n(z) &= z^{-1}[b_1 U(z) + c_1 N(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z)] \\
&\vdots \\
X_2(z) &= z^{-1}[b_{n-1} U(z) + c_{n-1} N(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z)] \\
X_1(z) &= z^{-1}[b_n U(z) + c_n N(z) - a_n Y(z)] .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Percebe-se que a expressão dentro das chaves da Equação 4.11 vale $X_n(z)$, o que permite reescrevê-la, de forma mais condensada. Ou seja:

$$Y(z) = b_0 U(z) + N(z) + X_n(z) . \tag{4.13}$$

Substituindo a Equação 4.13 nos estados da Equação 4.12 e, após isso, multiplicando cada equação por z , tem-se que:

$$\begin{aligned}
zX_n(z) &= X_{n-1}(z) - a_1 X_n(z) + (b_1 - a_1 b_0)U(z) + (c_1 - a_1)N(z) \\
zX_{n-1}(z) &= X_{n-2}(z) - a_2 X_n(z) + (b_2 - a_2 b_0)U(z) + (c_2 - a_2)N(z) \\
&\vdots \\
zX_2(z) &= X_1(z) - a_{n-1} X_n(z) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)U(z) + (c_{n-1} - a_{n-1})N(z) \\
zX_1(z) &= -a_n X_n(z) + (b_n - a_n b_0)U(z) + (c_n - a_n)N(z) .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aplicando a transformada Z inversa em cada estado e reordenando as equações

dos estados obtidos do menor índice para o maior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= -a_n x_n(k) + (b_n - a_n b_0)u(k) + (c_n - a_n)v(k) \\
 x_2(k+1) &= x_1(k) - a_{n-1} x_n(k) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)u(k) + (c_{n-1} - a_{n-1})v(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(k+1) &= x_{n-2}(k) - a_2 x_n(k) + (b_2 - a_2 b_0)u(k) + (c_2 - a_2)v(k) \\
 x_n(k+1) &= x_{n-1}(k) - a_1 x_n(k) + (b_1 - a_1 b_0)u(k) + (c_1 - a_1)v(k) .
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} c_n - a_n \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ c_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 \end{bmatrix} v(k) .
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Aplicando a transformada Z inversa na Equação 4.13, obtém-se a equação de saída:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) + v(k) . \tag{4.17}$$

obtendo assim o modelo em espaço de estados, completando a demonstração. $\square$

Alguns comentários sobre a Equação 4.16: **(i)** usualmente, $n_b - 1 \leq n_a$ (função de transferência própria), ou seja, a ordem do polinômio B é menor ou igual à do polinômio A . Com isto, $b_i = 0$ para todo $i > n_b - 1$. **(ii)** Se, $n_c > n_a$, a ordem da matriz de estados será $n = n_c$ e então $a_i = 0$ para todo $i > n_a$. **(iii)** Caso contrário,

se $n_a > n_c$, $n = n_a$ e então $c_i = 0$ para todo $i > n_c$. Ljung (1999) comenta que há uma correspondência injetiva entre a estrutura ARMAX da Equação 4.6 e suas equivalentes em espaço de estados, dadas pelas Equações 4.7 e 4.8. Vale ressaltar que a sobrejetividade não se aplica pelo fato de a representação em espaço de estados não ser única. A representação dada pelas Equações 4.7 e 4.8 é chamada de forma canônica observável (OGATA, 1995).

Outro ponto a ser destacado aqui é com relação à presença de atraso de transporte na representação em espaço de estados, ou seja, quando $n_k \neq 0$. Uma abordagem possível para aplicar este tempo morto seria aumentar o número de estados, como pode ser encontrado em Ogata (1995), por exemplo. Este caso não é interessante quando o valor de n_k é grande, acarretando um aumento considerável na quantidade de estados e dificultando tanto o processamento computacional quanto a análise dinâmica do modelo. Portanto, nos modelos tratados aqui, atrasa-se o vetor de entradas u tanto quanto for a ordem n_k respectiva, mantendo o número de estados. Isto equivale a incluir um bloco de atraso antes daquele que representa o modelo em espaço de estados.

4.1.2.3 Modelos de erro na saída (OE)

Apesar de os modelos do tipo ARMAX serem frequentemente utilizados (AGUIRRE, 2015), Ljung (1999) comenta que, sob um ponto de vista físico, soa mais natural parametrizar as funções de transferência G e H da Equação 4.1 de forma independente, sem fatores em comum nos polinômios de seus denominadores, como nos modelos de erro na equação.

Os modelos do tipo erro na saída (ou OE, de *output error*) têm suas funções G e H parametrizadas de forma independente, obtidas a partir do modelo geral da Equação 4.1, com $A(q) = C(q) = D(q) = 1$ e com os polinômios B, F arbitrários. Ou seja:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + v(k) . \quad (4.18)$$

É comum indicar os modelos OE como $OE(n_b, n_f, n_k)$, em que n_k indica o número de intervalos de amostragem relacionados ao atraso de transporte. Consequentemente, $b_0 = b_1 = \dots = b_{n_k} = 0$ e o polinômio B será dado por $B(q) = b_{n_k+1}q^{-1-n_k} + \dots + b_{n_k+n_b-1}q^{-n_b+1-n_k}$.

Aguirre (2015) afirma que o fato do ruído branco v ser diretamente adicionado à

saída, justifica o nome desta classe de modelos e que a saída do modelo da Equação 4.18 pode ser interpretada como a superposição de um ruído branco com um processo ARX sem ruído. É justamente isto que suscita o maior problema deste modelo: a adição de ruído branco em modelos de erro na saída (ruído de medição) acarreta em polarização⁴ das estimativas que o modelo OE gera.

4.1.2.4 Modelos Box-Jenkins (BJ)

Com o intuito de reduzir o efeito da polarização nos modelos OE, uma evolução natural é modelar as propriedades do erro na saída. Para isso, descreve-se este erro com um modelo ARMA, ou seja, impõe-se $A(q) = 1$ na Equação 4.1:

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) . \quad (4.19)$$

Segundo Ljung (1999), esta é a parametrização de ordem finita mais natural, partindo da Equação 4.1: as funções de transferência G e H são parametrizadas de forma independente como funções racionais. Este tipo de modelo foi sugerido em 1970 por Box e Jenkins (BOX et al., 2015) e também é classificado como modelo de erro na saída, em que o ruído e é modelado como um processo ARMA, ou seja: $e(k) = \frac{C(q)}{D(q)}v(k)$. O teorema a seguir apresenta uma forma equivalente em espaço de estados de um modelo BJ.

Teorema 2. *Considere a função de transferência da Equação 4.19, ou seja $z = q$ nesta*

⁴A polarização (ou *viés*) representa um desvio entre o valor esperado de uma determinada variável estimada e seu valor teórico. Na literatura da área de estimação de parâmetros este termo é referido como *enviesamento*.

equação. Uma representação em espaço de estados desta equação é dada por:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-2}(k+1) \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -d_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-2}(k) \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} b_m - f_m b_0 \\ \vdots \\ b_2 - f_2 b_0 \\ b_1 - f_1 b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ c_p - d_p \\ \vdots \\ c_2 - d_2 \\ c_1 - d_1 \end{bmatrix} v(k)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-2}(k) \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) + v(k), \tag{4.21}$$

em que n_b, n_c, n_d, n_f são as ordens dos polinômios do modelo BJ e a ordem da matriz de estados vale $n = m + p$, com $m = \max(n_b, n_f)$ e $p = \max(n_c, n_d)$.

Demonstração. A prova deste teorema é similar à do Teorema 1.

É comum indicar os modelos BJ como $BJ(n_b, n_c, n_d, n_f, n_k)$, em que n_k indica o número de intervalos de amostragem relacionados ao atraso de transporte. Com esse atraso n_k , os coeficientes do polinômio B até a ordem n_k serão nulos, ou seja, $b_0 = b_1 = \dots = b_{n_k} = 0$ tornando-se então $B(q) = b_{n_k+1}q^{-1-n_k} + \dots + b_{n_k+n_b-1}q^{-n_b+1-n_k}$. Vale lembrar que para inserir os tempos mortos neste modelo em espaço de estados, atrasam-se as entradas, conforme justificativa dada no Teorema 1.

4.1.3 Seleção da Estrutura de Modelos

Para o caso de modelos lineares, a escolha das ordens de seus polinômios para definir sua estrutura é um dos pontos mais críticos da identificação de sistemas. Isto se deve ao fato de geralmente envolver dois aspectos conflitantes: a *flexibilidade* do modelo em descrever diferentes situações do mesmo sistema e a *parcimônia* na parametrização do modelo, ou seja, não sobreparametrizar o modelo (optar por modelos mais simples). Segundo Aguirre (2015), a sobreparametrização normalmente gera cancelamento de polos e zeros na função de transferência do sistema e tal fato pode ser utilizado como uma maneira de ajustar a ordem do modelo: verifica-se a posição destas singularidades no diagrama de polos/zeros conforme se modifica a ordem do modelo. Existem várias outras alternativas, todas elas envolvendo algum tipo de parcimônia (matriz de covariância dos dados de identificação, erro final de predição, critério de informação de Bayes, etc).

O critério de informação de Akaike (AIC), por exemplo, fornece um compromisso entre a complexidade do modelo e a adequação dos dados experimentais (AKAIKE, 1974).

Definição 12 (Erro de predição de um passo à frente - (AGUIRRE, 2015)). *A predição de um passo à frente do modelo da Equação 4.1 é denotada por $\hat{y}(k|k-1)$, que indica que o valor da saída estimada $\hat{y}$ no instante k é determinada a partir de informações até o instante $k-1$, inclusive. O erro de predição de um passo à frente, ou inovação, é definido por:*

$$\xi(k|k-1, \hat{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k|k-1), \quad (4.22)$$

em que $\hat{\theta}$ representa o vetor de parâmetros estimados do modelo e $y = y(k)$ é a saída real (medida) do sistema identificado.

Definição 13. (AGUIRRE, 2015). O critério de informação de Akaike (AIC) é definido por:

$$AIC(n_\theta) = N \ln \sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta) + 2n_\theta, \quad (4.23)$$

em que N representa o número de dados, $\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)$ representa a variância do erro de predição de um passo à frente $\xi(k|k-1, \hat{\theta})$ sobre os dados de identificação e $n_\theta = \dim(\theta)$, o número de parâmetros do modelo.

Keesman (2011) comenta que o AIC está fundamentado no conceito de entropia, quantificando uma medida relativa da perda de informações quando se usa um determinado modelo para descrever um conjunto de dados. Vale ressaltar que o AIC não é um teste de modelo no sentido de teste de hipóteses. De fato, fornece um teste entre modelos e, portanto, é uma das ferramentas para sua seleção. Para o uso deste critério, segundo Aguirre (2015), pressupõe-se que exista uma ordem predefinida para incluir os termos candidatos sequencialmente no modelo e se sugere, para modelos lineares, que esta inclusão seja dada da seguinte maneira: (i) fixa-se o número de termos de ruído. (ii) Em seguida, com estes termos de ruído, aumenta-se gradativamente a ordem dos demais termos. (iii) Quando o gráfico de $AIC(n_\theta)$ passar por um mínimo ou evidenciar um “joelho” (queda brusca), o procedimento pode ser encerrado e a ordem resultante será a ordem do modelo.

4.1.4 Estimação de Parâmetros

Concluídos os passos anteriores, parte-se para a estimação dos parâmetros do modelo, de maneira a minimizar um funcional dado. Usualmente, para fins de previsão, utiliza-se como funcional o somatório dos quadrados dos erros na predição de um passo à frente (Equação 4.22), ou seja:

$$J_{Z^N}(\hat{\Theta}) = \sum_{k=1}^N \xi(k|k-1, \hat{\Theta})^2, \quad (4.24)$$

em que J_{Z^N} é calculado ao longo dos elementos de $Z^N = \{u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)\}$, que representa o conjunto dos dados de identificação, coletados no experimento realizado, $\hat{\Theta}$ representa o conjunto de parâmetros do modelo a se estimar. Os métodos que determinam o vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$ a partir da minimização do funcional $J = J(\hat{\Theta})$, com J obedecendo certas propriedades de monotonicidade e positividade (SÖDERS-

TRÖM; STOICA, 1988), são chamados de *métodos de predição de erro* (PEM) e estes formam uma classe de estimadores. O estimador de mínimos quadrados clássico para modelos de erro na equação é um caso particular desta classe. Para facilitar o cálculo da expressão da Equação 4.24, escreve-se o modelo geral da Equação 4.1 da seguinte maneira:

$$y(k) = \underbrace{\psi_{yu}^T(k-1)\hat{\Theta}}_{\hat{y}(k)} + \xi(k), \quad (4.25)$$

em que $\psi_{yu}^T(k-1)$ é um vetor com $n_\theta = \dim(\hat{\Theta})$ variáveis regressoras, compostas dos sinais y e u tomadas até o instante $k-1$ que compõem a matriz de regressores Ψ .

A Equação 4.25 pode ser reescrita como

$$Y = \Psi\hat{\Theta} + \Xi, \quad (4.26)$$

em que $\hat{\Theta}$ representa o vetor de parâmetros,

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_{yu}^T(0) \\ \psi_{yu}^T(1) \\ \vdots \\ \psi_{yu}^T(N-1) \end{bmatrix}$$

e Ξ , o erro que se comete ao se explicar Y pelo Equação 4.26.

É possível mostrar que (LJUNG, 1999; AGUIRRE, 2015) a solução do problema representado pela Equação 4.24 sujeita à restrição da Equação 4.26 é dada pelo estimador de mínimos quadrados clássico, dado por:

$$\hat{\Theta}_{MQ} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y. \quad (4.27)$$

Esta solução não é a mais adequada numericamente e o algoritmo apresentará problemas se a matriz de covariância dos regressores for mal condicionada (COELHO, 2002). Para contornar este problema, utilizam-se métodos de decomposição de matrizes para evitar a inversão direta da matriz Ψ .

Para ilustrar a montagem do vetor de regressores, considera-se inicialmente modelos do tipo ARX (Equação 4.4). Neste caso, o vetor de variáveis regressoras será dado

por:

$$\psi_{yu}(k-1) = [y(k-1) \cdots y(k-n_a) u(k-1) \cdots u(k-n_b)]^T. \quad (4.28)$$

Supondo que os dados atendam à dinâmica dada pela Equação 4.4 (e, consequentemente Equações 4.25 e 4.28), o estimador de mínimos quadrados (EMQ) clássico fornece uma solução para o vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$ sem polarização, desde que: (i) o termo de ruído seja não correlacionado ($E[\psi_{yu}(k)v(k)] = 0$) e (ii) $E[\psi_{yu}(k)\psi_{yu}^T(k)]$ seja não-singular (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988). A hipótese (ii) no geral é atendida, no entanto, a condição (i), segundo Isermann e Münchhof (2011), não é satisfeita na maioria dos casos e isto implicará na polarização do EMQ. Uma importante exceção é quando o ruído se comporta como branco. Neste caso, v é descorrelacionado com os dados passados e em particular com ψ_{yu} . Vale ressaltar que esta polarização pode ser aceitável se a relação sinal-ruído for grande. Por exemplo, se um regulador é projetado com base neste modelo identificado, espera-se que o sistema em malha fechada seja robusto a pequenas variações nos parâmetros em malha aberta (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988).

Se o ruído não for branco, significa que será correlacionado com as saídas passadas, desde que $y(k)$ dependa de $v(k-j)$ para $j \geq 1$. Isto equivale ao sistema se comportar como um modelo do tipo ARMAX (Equação 4.5) ou BJ (Equação 4.19), nos quais o erro é modelado.

Visto que estes modelos não são lineares nos parâmetros⁵, pois algumas variáveis regressoras dependem do vetor de parâmetros, se faz necessário um outro método para o cálculo de uma estimativa para os parâmetros do respectivo modelo. Uma maneira é fazer uma adaptação em ψ_{yu} : inclui-se a parte correlacionada do vetor v , de forma a garantir que a porção que ficar de fora não será correlacionada com os regressores. Ou seja, incorporam-se todos os termos $v(k-j)$, $j \geq 1$ no vetor de regressores e os elementos c_j (e d_j , no caso do modelo BJ) no vetor de parâmetros. Para efeito de ilustração, considere um modelo do tipo ARMAX (Equação 4.5). Neste caso, o vetor de variáveis regressoras se torna:

$$\begin{aligned} \psi_{yuv}(k-1) = [y(k-1) \cdots y(k-n_a) u(k-1) \cdots \\ u(k-n_b) | v(k-1, \hat{\Theta}) \cdots v(k-n_c, \hat{\Theta})]^T, \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que o subscrito de ψ_{yuv} foi alterado pra indicar a inclusão dos termos de v .

⁵Alguns autores denotam tais modelos não lineares nos parâmetros por *pseudolineares nos parâmetros* (AGUIRRE, 2015; LJUNG, 1999).

Sob esta estrutura, é possível aplicar o método dos mínimos quadrados clássico. Por isto, a solução deste problema é chamada de estimador estendido de mínimos quadrados (EEMQ). Outros estimadores pertencentes à classe dos métodos de predição de erro também contornam o problema da polarização do EMQ, como por exemplo, o estimador generalizado de mínimos quadrados, o das variáveis instrumentais e o de correção de tendências (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011).

Segundo Aguirre (2015), a Equação 4.29 deixa claro que a polarização na estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados usual surge como consequência da correlação existente no vetor do erro de predição e da matriz de regressores da saída. Maiores detalhes sobre as propriedades estatísticas dos estimadores para os parâmetros podem ser encontradas em Ljung (1999), Söderström e Stoica (1988), Keesman (2011), Isermann e Münchhof (2011) e Aguirre (2015).

4.1.5 Validação de Modelos

O problema da validação de modelos, segundo Ljung (1999), se resume a responder se o “melhor” modelo de uma determinada estrutura é “bom” o suficiente. No entanto esta questão tem basicamente três aspectos: (i) Este modelo concorda suficientemente bem com os dados observados? (ii) O modelo é bom o bastante para o propósito pretendido? (iii) Ele descreve o sistema verdadeiro?

Estas questões revelam um certo caráter subjetivo da fase de validação de modelos. A resposta para estas indagações depende crucialmente da pretensão que se tem ao optar pelos métodos de identificação de sistemas. Conforme Aguirre (2015), isto se resume a saber qual o intuito do uso do modelo, a fim de avaliar a capacidade dele em incorporar ou não as características requeridas, visto que nenhum modelo representará todos os aspectos de um sistema dinâmico. Das três questões formuladas em Ljung (1999), as duas últimas são puramente subjetivas e dependem da necessidade de quem está fazendo a modelagem. Para a primeira pergunta, existem algumas técnicas que auxiliam na obtenção dessa resposta, por exemplo, a *validação cruzada* e a *análise de resíduos*. Aqui serão apresentadas, de forma sucinta, algumas destas ferramentas, necessárias ao longo da tese. No entanto, maiores detalhes podem ser encontrados em Ljung (1999), Aguirre (2015) e Isermann e Münchhof (2011).

4.1.5.1 Validação Cruzada

Neste ponto deseja-se analisar a capacidade de generalização do modelo, verificando se ele consegue explicar um outro conjunto de dados coletado do mesmo sistema. O ideal seria efetuar pelo menos dois testes independentes do mesmo sistema operando nas mesmas condições. No entanto, isto nem sempre é fácil: por exemplo, em plantas industriais, realizar múltiplos testes nas condições ideais geralmente é indesejável do ponto de vista financeiro, pois há um grande custo para afastar o processo de suas condições normais, resultando em produtos fora das especificações, gerando grande descarte ou retrabalho (OLIVEIRA JR; GARCIA, 2017). O que se faz usualmente é, em um único teste, separar o conjunto de dados em duas partes: uma para identificação e outra para validação. A verificação do modelo neste conjunto de validação é chamada de *validação cruzada* (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011; LJUNG, 1999).

Para realizar a validação cruzada, pode-se usar a *simulação livre*, ou *predição de infinitos passos à frente*, que consiste em reutilizar predições passadas para compor o vetor de regressores e gerar estimativas da saída. (AGUIRRE, 2015). Considere, por exemplo, um modelo que tenha o seguinte vetor de regressores:

$$\psi_{yu}^T(k-1) = \begin{bmatrix} y(k-1) & y(k-2) & y(k-3) & u(k-1) & u(k-2) \end{bmatrix}^T. \quad (4.30)$$

Para realizar esta simulação é necessário impor suas condições iniciais (valores medidos). Chamando de $y(1)$, $y(2)$ e $y(3)$ os três primeiros valores da saída e $u(1)$ e $u(2)$ os da entrada do conjunto de dados de validação, obtem-se $\hat{y}(4)$ (observe que o acento circunflexo denota valor estimado pelo modelo):

$$\hat{y}(4) = \psi_{yu}^T(3) \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} y(3) & y(2) & y(1) & u(3) & u(2) \end{bmatrix} \hat{\Theta}. \quad (4.31)$$

Prosseguindo com a simulação livre, utiliza-se $\hat{y}(4)$ para gerar $\hat{y}(5)$:

$$\hat{y}(5) = \psi_{yu}^T(4) \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{y}(4) & y(3) & y(2) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} \hat{\Theta}. \quad (4.32)$$

Já a estimativa para $\hat{y}(6)$ vale:

$$\hat{y}(6) = \psi_{yu}^T(5) \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{y}(5) & \hat{y}(4) & y(3) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} \hat{\Theta}. \quad (4.33)$$

e assim sucessivamente. Vale ressaltar que o sinal de entrada utilizado na simulação

livre é sempre o medido. Segundo Isermann e Münchhof (2011), esta é uma boa maneira de testar se o modelo consegue explicar as observações feitas.

O chamado *preditor de k passos à frente* consiste em usar o modelo como preditor livre apenas por k intervalos de amostragem, reiniciando-o logo em seguida. Este preditor é muito utilizado em problemas de controle adaptativo (AGUIRRE, 2015) e quando se deseja ter ideia sobre o horizonte de predição do modelo identificado.

Para quantificar estas predições, é comum utilizar os seguintes índices:

Definição 14 (Índice de ajuste baseado no erro quadrático médio normalizado). *O erro quadrático médio normalizado (Normalized mean square error - NMSE) é definido por (LJUNG, 2014):*

$$NMSE(\hat{\Theta}) = \frac{\|y - \hat{y}\|^2}{\|y - \bar{y}\|^2}, \quad (4.34)$$

em que y representa o vetor de saída medido (referência), $\bar{y}$ corresponde ao vetor que tem suas todas as suas coordenadas iguais ao valor médio de y e $\hat{y}$ representa o vetor de saída estimado pelo modelo. Já o índice de ajuste baseado no erro quadrático médio normalizado, IA , é dado por:

$$IA(\hat{\Theta}) = 1 - NMSE(\hat{\Theta}) = 1 - \frac{\|y - \hat{y}\|^2}{\|y - \bar{y}\|^2}. \quad (4.35)$$

O IA tem seus valores entre $-\infty$ (ajuste ruim) e 1 (ajuste perfeito). Este índice é um estimador dos desvios globais entre os valores previstos e medidos.

Definição 15 (Índice de ajuste baseado na raiz do erro quadrático médio normalizado). *A raiz do erro quadrático médio normalizado (Normalized root mean square error - NRMSE) é definida por (LJUNG, 2014):*

$$NRMSE(\hat{\Theta}) = \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - \bar{y}\|}, \quad (4.36)$$

em que y representa o vetor de medidas (referência), $\bar{y}$ corresponde ao vetor que tem suas todas as suas coordenadas iguais ao valor médio de y e $\hat{y}$ representa o vetor de saída estimado pelo modelo. Já o índice de ajuste baseado na raiz do erro quadrático

médio normalizado, IAR , é dado por:

$$IAR(\hat{\Theta}) = 1 - NRMS E(\hat{\Theta}) = 1 - \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - \bar{y}\|}. \quad (4.37)$$

Nas definições de IA e IAR , a norma comumente utilizada é a euclidiana. Da mesma forma que o IA , o IAR tem seus valores entre $-\infty$ (ajuste ruim) e 1 (ajuste perfeito). É comum utilizar o valor de IAR em porcentagem⁶, em que 100% corresponde a um ajuste perfeito e 0% indica que os valores estimados se comportam como uma constante, ou seja, $\hat{y} = \bar{y}$. Com relação à possibilidade desses índices serem negativos, Ljung (2014) comenta que isto pode ocorrer devido a, por exemplo:

- a) o algoritmo de estimação não convergir;
- b) o modelo não ter sido estimado pela minimização de $\|y - \hat{y}\|$. O valor IAR ou IA pode ser negativo quando se minimiza o erro de predição de 1 passo à frente, mas valida-se usando a simulação livre;
- c) o fato de os dados de validação não terem sido pré-processados da mesma maneira que os de identificação (estimação).

4.1.5.2 Análise de Resíduos

A validação cruzada, assim como vários outros métodos de validação, possui como deficiência o fato de não ser capaz de indicar se uma determinada falha do modelo é passível de correção. Caso apareçam erros significativos em uma validação cruzada, por exemplo, não dá para saber se eles ocorreram devido à dinâmica que gerou os dados não poder ser representada de forma satisfatória pelo modelo ou se houve algum problema na estimação dos parâmetros (AGUIRRE, 2015). Neste sentido, a análise de resíduos possui um conjunto de testes que auxiliam na avaliação de quão eficiente é um modelo sob o ponto de vista estatístico.

Conforme citado na Subseção 4.1.4, os resíduos são a parte dos dados que o modelo não conseguiu explicar. Sabendo que o vetor de resíduos depende tanto dos parâmetros do modelo quanto dos regressores, ele é explicitado na seguinte equação:

$$\xi(k) = \xi(k, \hat{\Theta}) = y(k) - \hat{y}(k, \hat{\Theta}) = y(k) - \Psi\hat{\Theta}. \quad (4.38)$$

⁶No *software* MATLAB®, o IAR percentual é denotado em várias funções como índice “*fit*” ou “*best fit*” (LJUNG, 2014)

Aguirre (2015) comenta que, justamente pelo fato de os resíduos dependerem tanto dos parâmetros estimados quanto dos regressores que compõem o modelo, a análise de resíduos deve ser feita utilizando os dados de *identificação*. Um erro muito comum é o de tentar realizar a análise com outros vetores de erro, como por exemplo o erro de simulação ou o de inovação. Analisar a variância dos resíduos não é um indicador adequado pelo fato de o EMQ ser um estimador construído para que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínima.

Ljung (1999) sugere dois testes importantes para a análise dos resíduos:

1. **Teste da autocorrelação dos resíduos:** Se a função de autocorrelação (FAC) dos resíduos $r_{\xi}(k) = 0, \forall k \neq 0$, então o vetor de resíduos ξ é descorrelacionado, *linearmente branco*. Na prática, deseja-se que o gráfico da FAC não saia significativamente da região de confiança próxima de zero. Se isto acontecer, significa que o modelo conseguiu explicar tudo que era explicável nos dados e a parte restante é aleatória sem informação útil. Caso contrário, conforme a Subseção 4.1.4, indica que o modelo está polarizado. Neste caso, Aguirre (2015) sugere contornar o problema escolhendo um novo conjunto de regressores e estimando os parâmetros novamente.
2. **Teste de independência dos resíduos:** Se a função de correlação cruzada (FCC) entre os resíduos e o sinal de entrada $r_{u\xi}(k) = 0, \forall k$ (deseja-se que o gráfico da FCC não saia significativamente da região de confiança próxima de zero), então as previsões de um passo à frente deste modelo terão características semelhantes se calculadas para um outro conjunto de dados (AGUIRRE, 2015). Um eventual aparecimento de correlação indica que o modelo não descreve como parte da saída se relaciona com sua correspondente entrada. Por exemplo, um pico fora da região de confiança da FCC no atraso (*lag*) j significa que a saída $y(k)$ originada pela entrada $u(k-j)$ não está descrita de forma apropriada pelo modelo (LJUNG, 2014).

4.2 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman (KF - *Kalman filter*) é um estimador recursivo ótimo que se assemelha aos estimadores recursivos de mínimos quadrados (estimadores da Subseção 4.1.4 postos de forma recursiva) em diversos aspectos (AGUIRRE, 2015). Maybeck

(1982) afirma que esta otimalidade se dá em relação a praticamente qualquer critério que faça sentido. Geralmente este critério é expresso como a variação mínima do erro de reconstrução de estado condicionada às medições adquiridas.

Um aspecto dessa otimização é que o filtro de Kalman incorpora todas as informações que podem ser fornecidas a ele. Ele processa todas as medidas disponíveis, independentemente de sua precisão para estimar o valor atual das variáveis de interesse, a partir do uso dos seguintes itens: (i) *conhecimento do sistema e da dinâmica do dispositivo de medição*, (ii) *descrição estatística dos ruídos do sistema, erros de medição e incerteza nos modelos dinâmicos* e, por último, (iii) *qualquer informação disponível sobre as condições iniciais das variáveis de interesse*.

O sistema dinâmico linear a ser considerado aqui pode ser descrito pelo seguinte modelo linear discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{y}(k) = C(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (4.40)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^n$, representa o vetor de estados, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$, o vetor de entradas, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$, o vetor de observações (ou medidas), $\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ são variáveis aleatórias brancas e Gaussianas de média nula, que satisfazem $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = Q_k$, $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = R_k$ e $E[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] = 0$, $\forall i, j$. O vetor $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}(k)$, que tem matriz de covariância Q_k , é chamado de *ruído de processo* e o vetor $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(k)$, que tem matriz de covariância R_k , é chamado de *ruído de medição*. Uma hipótese normalmente utilizada é a de independência entre os ruídos de processo e de medição.

O objetivo do filtro em questão é obter estimativas $\hat{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^n$ dado o modelo da Equação 4.39, as condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}_0$ e sua matriz de covariância P_0 , bem como a sequência das observações $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ e as entradas $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$.

4.2.1 *Shaping filter* e ajuste do vetor de estados

Em várias situações a hipótese de considerar $\mathbf{w}_k$ e $\mathbf{v}_k$ como ruídos brancos gaussianos pode não ser adequada. Seria desejável, segundo Maybeck (1982), nesses casos, desenvolver um modelo matemático mais apropriado para estes sinais. É possível obter uma aproximação por um sistema linear, invariante no tempo, chamada *shaping filter*, para fornecer um modelo mais realista e ainda manter a estrutura da Equação 4.39.

4.2.1.1 Ruído de processo correlacionado

Suponha que o sistema a ser modelado seja escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{y}(k) = C(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (4.42)$$

em que $\mathbf{n}_k = \mathbf{n}(k)$ é um ruído colorido (ou correlacionado) gaussiano com matriz de covariância Q_k . Maybeck (1982) sugere que o ruído de processo $\mathbf{n}_k = \mathbf{n}(k)$ possa ser gerado pelo seguinte *shaping filter*:

$$\mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_f(k)\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_f(k)\mathbf{w}(k) \quad (4.43)$$

$$\mathbf{n}(k) = \mathbf{C}_f(k)\mathbf{x}_f(k), \quad (4.44)$$

em que o subscrito “f” denota filtro e $\mathbf{w}$ é um ruído de processo branco e gaussiano. Define-se, então, o seguinte vetor de estados aumentado:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Com isso, pode-se concatenar as Equações 4.41, 4.42, 4.43 e 4.44 para obter o seguinte modelo aumentado em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_f(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & \mathbf{C}_f(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f(k) \end{bmatrix} \mathbf{w}(k), \quad (4.46)$$

com o respectivo modelo de observação:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} C(k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(k). \quad (4.47)$$

Assim, o filtro de Kalman pode ser implementado no sistema formado pelas Equações 4.46 e 4.47, que apresenta ruído de processo branco, desde que se conheça a matriz de covariância do ruído $\mathbf{w}$. Vale ressaltar que há um aumento no custo computacional, decorrente do aumento da dimensão do vetor de estados. No entanto, conforme Simon (2006), o fato de esta abordagem lidar diretamente com o ruído de processo correlacionado justifica tal esforço.

4.2.1.2 Ruído de medição correlacionado

Para o caso em que o sistema é corrompido por um ruído de medição correlacionado, é possível desenvolver um argumento análogo ao da subseção anterior. Para tanto, considere-se um sistema com o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{y}(k) = C(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (4.49)$$

em que $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ são ruídos brancos e $\mathbf{n}$ é colorido. Maybeck (1982) sugere que o ruído de medição $\mathbf{n}_k = \mathbf{n}(k)$ possa ser gerado pelo seguinte *shaping filter*, tendo como entrada o ruído de medição branco e gaussiano $\mathbf{w}_f$:

$$\mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_f(k)\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_f(k)\mathbf{w}_f(k) \quad (4.50)$$

$$\mathbf{n}(k) = \mathbf{C}_f(k)\mathbf{x}_f(k), \quad (4.51)$$

em que o subscrito “f” denota filtro. Utilizando a mesma definição do vetor de estados aumentado da Equação 4.45, é possível escrever, de forma análoga ao caso do ruído de *processo* correlacionado, o seguinte modelo linear aumentado em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_f(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_f(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{w}_f(k) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} C(k) & \mathbf{C}_f(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(k). \quad (4.53)$$

Este sistema aumentado está montado de forma a conter somente ruídos brancos gaussianos⁷ na sua composição e está no formato das Equações 4.39 e 4.40. Vale atentar para o fato de que a representação do modelo Box-Jenkins em espaço de estados, apresentada no Teorema 2, está nos moldes das Equações 4.52 e 4.53, constituindo assim um caso particular do sistema linear aumentado com *shaping filter* para ruído de medição correlacionado.

Para o leitor interessado, Maybeck (1982) apresenta algumas configurações de *shaping filters* para várias configurações de ruídos, bastante comuns em sistemas dinâ-

⁷A inclusão da parcela do ruído branco $\mathbf{v}(k)$ na Equação 4.49 é para evitar possíveis problemas numéricos na implementação do filtro de Kalman no modelo da Equação 4.53, visto que, sem ele, não haveria ruído de medição (ruído de média zero e covariância nula) no sistema aumentado.

micos estocásticos.

4.2.2 Algoritmo do Filtro de Kalman

Como já citado, o objetivo do filtro de Kalman é estimar o estado $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^n$, baseado no conhecimento da dinâmica do sistema, aqui representada pela Equação 4.39, das medidas $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$, das entradas $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$ e das condições iniciais.

Se há disponibilidade de todas as medidas até o tempo k , inclusive, para o uso na estimativa de $\mathbf{x}_k$, é possível obter uma estimativa a posteriori deste estado, que será denotada por $\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}(k|k)$. Na verdade, este estado estimado a posteriori é calculado a partir do *valor esperado* (E) de $\mathbf{x}_k$, condicionado a todas as medidas obtidas até o tempo k , ou seja:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \rightarrow \text{estado a posteriori.} \quad (4.54)$$

Similarmente, se existem as medidas até o instante de tempo anterior a k (não incluindo k), então tem-se uma estimativa a priori, denotada por $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$. De modo análogo:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] \rightarrow \text{estado a priori.} \quad (4.55)$$

Percebe-se que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, coincide com a predição de um passo à frente que aparece na Definição 12. Segundo Simon (2006), é natural que se espere que $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ seja uma estimativa melhor que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, pois naquele usa-se mais informação.

O estado inicial é denotado por $\hat{\mathbf{x}}_0^+$, que representa a estimativa do estado antes de qualquer medição estar disponível. Com isso, assume-se que a primeira medida é tomada no tempo $k = 1$. Por esta razão, é razoável considerar $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0)$ (SIMON, 2006; JAZWINSKI, 1970).

As matrizes de covariância dos erros de estimação dos estados $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e $\hat{\mathbf{x}}_k^+$, são denotadas por P_k^- e P_k^+ , respectivamente. Estas matrizes são calculadas da seguinte maneira:

$$P_k^- = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \cdot (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T], \quad (4.56)$$

$$P_k^+ = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+) \cdot (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T]. \quad (4.57)$$

O algoritmo apresentado a seguir resume os passos da implementação do Filtro de Kalman a partir das definições apresentadas nesta subseção e do modelo composto pelas Equações 4.39 e 4.40. A partir de um dado estado inicial e sua respectiva covariância, o funcionamento do filtro pode ser resumido, basicamente, em duas etapas: a de propagação, em que o estado é estimado (propagado) a partir do modelo do processo (Equação 4.39) e a de atualização, em que o estado estimado é corrigido (atualizado) a partir da chegada de medições da saída.

A Fig. 4 ilustra esquematicamente as etapas de propagação e atualização do estado e sua covariância no Filtro de Kalman.

Uma discussão detalhada sobre a formulação matemática das equações e funcionamento do KF foge ao escopo desta tese e pode ser encontrada em Maybeck (1982) e Jazwinski (1970), por exemplo.

Figura 4: Linha do tempo com as etapas de propagação e atualização do Filtro de Kalman (estimativas do estado a priori e a posteriori).

Fonte: Adaptado de Simon (2006).

Algoritmo 2 (Filtro de Kalman): Considere um sistema dinâmico representado pelo modelo composto pelas Equações 4.39 e 4.40.

a) Inicializa-se o filtro de Kalman ($k = 0$):

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0)$$

$$P_0^+ = E \left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+) \cdot (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T \right] ;$$

b) Executa-se a etapa de propagação do estado e sua covariância:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = A_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + B_k \mathbf{u}_k \quad (4.58)$$

$$P_{k+1}^- = A_k P_k^+ A_k^T + Q_k ; \quad (4.59)$$

c) Calcula-se o ganho de Kalman:

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1}^- C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} ; \quad (4.60)$$

d) Executa-se a etapa de atualização do estado e sua covariância:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - C_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-) \quad (4.61)$$

$$P_{k+1}^+ = (I - K_{k+1} C_{k+1}) P_{k+1}^- (I - K_{k+1} C_{k+1})^T + K_{k+1} R_{k+1} K_{k+1}^T ; \quad (4.62)$$

e) Incrementa-se k , ou seja $k = k + 1$, e retorna-se ao passo b).

4.2.3 Convergência do Filtro

A quantidade $\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - C_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ que aparece na etapa de atualização do Algoritmo 2 é chamada de inovação⁸. Simon (2006) comenta que a inovação é a parte da medição que contém informação nova sobre o estado e é possível provar que as inovações são brancas e têm média nula, com covariância $C_k P_k^- C_k^T + R_k$. Com isso, o filtro de Kalman bem ajustado extrai a quantidade máxima possível de informações da medição e o monitoramento das inovações pode ser utilizado para verificar se o KF está convergindo. Se a média e covariância de r_k não forem as esperadas, significa que há algo de errado com o filtro, podendo indicar problemas no modelo ou nas estatísticas de ruído assumidas.

Uma maneira similar de avaliar a convergência do filtro, ainda a partir das inovações, é a utilizada por Fleury, Trigo e Martins (2013) e consiste em inspecionar o *resíduo normalizado de observação*⁹. Segundo eles, se a sequência gerada pela Equação 4.63, for uma sequência branca, gaussiana e de média nula, cujo desvio padrão se encontre no intervalo de $\pm 3\sigma_v$ (com σ_v representando o desvio padrão do ruído de medição), então o processo é convergente.

A Definição 16, a seguir, apresenta uma expressão para o cálculo deste resíduo, que será utilizado para validar as hipóteses de convergência das estimativas geradas pelos modelos a serem identificados.

⁸Alguns autores denotam esta quantidade por resíduo. Maybeck (1982) comenta a respeito da diferença entre inovação ($y - C\hat{x}^-$) e resíduo ($y - C\hat{x}^+$)

⁹Apesar de o termo mais adequado neste caso ser inovação, optou-se por manter a nomenclatura original usada por Rios Neto e Kuga (1985)

Definição 16 (Resíduo normalizado de observação). *O resíduo normalizado de observação é definido por*

$$r_v(k+1) = \frac{1}{m \cdot \sigma_v} \sum_{j=1}^m r_j(k+1), \quad (4.63)$$

em que m representa a dimensão do vetor de medidas $\mathbf{y}$; σ_v , o desvio padrão do ruído de medição e r_j denota o j -ésimo elemento do vetor $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo trata dos testes realizados em um forno com queimador a gás natural, bem como do aparato experimental utilizado e da metodologia para processamento de imagens de chama. Além disso, identificam-se modelos *caixa-preta* que, juntamente com um *Filtro de Kalman*, serão utilizados para previsão das emissões de CO_2 e O_2 a partir das características destas imagens obtidas por uma câmera CCD.

5.1 Aparato experimental

Os experimentos foram realizados na fornalha horizontal cilíndrica, apresentada na Fig. 5, de aproximadamente 6m de comprimento por 2m de diâmetro, situada no Laboratório de Engenharia Térmica do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Em uma das extremidades da fornalha, no centro da face circular, encontra-se um queimador que injeta *gás natural* com *oxigênio puro*. A composição química do referido gás é apresentada na Tabela 1.

Na outra extremidade, na parte superior, há um duto para saída dos produtos da combustão e no centro da face circular existe uma pequena abertura onde a câmera está posicionada a fim de capturar imagens das chamas. A fornalha está equipada com um painel de comando eletrônico (Fig. 6) onde se tem o controle das vazões de entrada de gás natural e oxigênio.

O painel, por sua vez, está ligado a um sistema supervisório que coleta estas informações de entrada juntamente com a temperatura em vários pontos de troca de calor ao longo da fornalha sincronizado com um analisador de gases Horiba PG-350E, que se encontra no duto de gases de emissão, para capturar as medidas de concentração de CO_2 e O_2 a cada intervalo de tempo de 1 segundo.

Figura 5: Fornalha horizontal utilizada nos experimentos (centro) com os detalhes do posicionamento do queimador (esquerda) e da câmera CCD (direita).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 1: Composição química e suas respectivas frações molares e mássicas em base úmida do gás natural utilizado nos experimentos.

Componente	Nome	%f.molar (bu)	%f.mássica (bu)
CH_4	Metano	89,35	80,94
C_2H_6	Etano	8,03	13,63
C_3H_8	Propano	0,78	1,94
C_4H_{10}	n-Butano	0,07	0,23
C_5H_{12}	n-Pentano	0,01	0,04
CO_2	Gás Carbônico	0,48	1,19
N_2	Nitrogênio	1,28	2,02

Fonte: IPT.

As imagens foram capturadas por uma câmera CCD monocromática da marca Imaging Source (modelo DMK 23G618), conforme mostrado na Fig. 7, com lente objetiva (12 mm, f1.2). O sinal de vídeo gerado é amostrado a uma taxa de 30 fps (a câmera permite chegar até 120 fps) no formato 640×480 e resolução de 0,3 MP.

Figura 6: Painel de controle das vazões de entrada de gás natural e oxigênio puro na fornalha.

(a) Painel de Controle

(b) Detalhe da tela sinótica do painel

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7: Câmera CCD utilizada nos ensaios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Ensaios

Os experimentos foram realizados a partir da variação na razão de equivalência conforme mostrado na Tabela 2, com duração de aproximadamente 25 min. O efeito desta variação é captado pelo analisador de gases gerando as curvas de emissões de O_2 e CO_2 , mostradas na Fig. 8. Indica-se também nesta figura qual razão de equivalência da Tabela 2 que gerou tais emissões.

Tabela 2: Resumo das razões de equivalência utilizadas nos ensaios e suas respectivas durações (em segundos)

Condição	Φ	Duração (s)
1	0,85	296
2	0,70	302
3	0,60	300
4	0,50	301
5	0,42	267
6	1,05	44

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8: Evolução temporal das emissões de O_2 e CO_2 obtida nos ensaios com a indicação da razão de equivalência correspondente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com intuito de evitar danos à câmera, ela foi posicionada fora da fornalha, resfriada por jato de ar comprimido e apontada em direção ao bocal do queimador para capturar as imagens pela abertura existente no final da câmara. Sendo assim, as imagens obtidas da chama são de topo.

Foi necessário reconstruir parte dos dados de emissões de O_2 , pois o fundo de escala do sensor de oxigênio não foi previamente ajustado para as condições mais severas do ensaio. A reconstrução foi efetuada a partir dos dados da vazão de entrada e composição química do gás natural e vazão de entrada de oxigênio¹. As estimativas geradas

¹Este procedimento está detalhado no Apêndice A.

por este procedimento coincidem com as medidas que o sensor obteve em parte do ensaio (enquanto não houve sua saturação); para a estimação desses valores, não foram utilizados os dados das imagens nem as medidas de emissões de CO_2 (inexistência de crime inverso²)

O aparato acessível na realização dos ensaios não dispunha de um digitalizador de vídeo (*frame grabber*), que possibilitaria um monitoramento em tempo real do funcionamento da fornalha. Mesmo assim, ainda é possível a identificação de modelos convertendo o arquivo de vídeo obtido em imagens após a aquisição. Desta maneira, a metodologia a ser aplicada em uma situação em tempo real ainda permanece válida e consiste em um futuro melhoramento desta abordagem.

5.3 Descrição geral do método para obtenção do sensor virtual

Com a definição do aparato experimental, propõe-se um método para obter o modelo dinâmico para o sensor virtual a fim de realizar predições sobre o teor das emissões de O_2 e CO_2 . O fluxograma para este método, apresentado na Fig. 9, é basicamente composto por dois grandes blocos:

- a) *processamento de imagens*: abrange o processo de filtragem das imagens e sincronização com os dados de emissões para compatibilização das taxas de amostragem, segmentação (extração) da chama em relação ao fundo da imagem e cálculo do vetor de suas características geométricas e de luminosidade;
- b) *identificação de sistemas*: compreende o processo de obtenção dos modelos dinâmicos que relacionam o vetor de características resultante da subtração de imagens de chama com o teor das emissões de O_2 e CO_2 .

Estes tópicos do método proposto serão discutidos em detalhes nas próximas seções.

²O crime inverso ocorre quando os mesmos ingredientes teóricos são empregados para sintetizar e inverter dados em um problema inverso (WIRGIN, 2004).

Figura 9: Fluxograma do método proposto para obtenção do sensor virtual para medição das emissões a partir de imagens.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.4 Processamento das imagens obtidas

Nesta seção, os passos para realização do processamento das imagens são apresentados, compreendendo desde a captura da imagem bruta até a conversão em um vetor de parâmetros que traduza de forma mais simples as características importantes da chama em questão. É importante salientar que este procedimento precisa ser calibrado para cada tipo de forno, queimador, insumos e câmera utilizados, bem como o posicionamento desta última em relação à chama. Os parâmetros que são apontados a seguir foram ajustados em relação ao aparato experimental indicado na Seção 5.1.

5.4.1 Pré processamento: sincronização e recorte

Conforme comentado na seção anterior, a identificação do modelo a ser obtido será feita *offline*, devido à falta de aparato adequado para processamento em tempo real. Para a sincronização dos dados das emissões, que estão amostrados a cada segundo, com as imagens, amostradas a 30 fps, submete-se estas últimas a um filtro de média móvel, a fim de compatibilizar as taxas de amostragem e, consequentemente, reduzir o efeito de ruído nas imagens.

Com relação ao pré-processamento das imagens, pelo posicionamento e os devidos ajustes de foco e ganho da câmera CCD, boa parte da região das imagens geradas é composta pelo entorno da vigia da fornalha. Também aparece uma pequena man-

cha branca na região superior direita da vigia, que corresponde ao material refratário localizado na parede interna do forno.

Para contornar este problema e reduzir o esforço computacional demandado nos próximos passos, inicialmente realiza-se um processo de recorte automático, a partir uma máscara, resultante da subtração de um quadrado de lado 320pixels por um círculo inscrito e indicada pelo quadrado vazado de bordas verdes na Fig. 10a. O bari-centro desta máscara é posicionado no ponto $R(288, 192)$ da imagem original³ em relação ao sistema xOy , recortando a parte da imagem que coincide com o interior deste círculo. O resultado desta operação em uma das imagens é apresentada na Fig. 10b.

Figura 10: Exemplo da operação de recorte em uma das imagens de chama.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda com relação à Fig. 10, vale ressaltar que, após a operação de recorte, é gerado um novo sistema de coordenadas na imagem recortada: a nova origem é posicionada no centro do bocal do queimador, correspondente ao ponto $C(268, 177)$ na imagem original, gerando o sistema de coordenadas $x'O'y'$, indicado na Fig. 10b. Todas as características de imagem a serem calculadas na próxima seção serão referidas a este novo sistema.

5.4.2 Limiarização e Segmentação

Após a sincronização e pré-processamento, inicia-se o processo de limiarização das imagens. Percebeu-se que, ao usar o limiar obtido pelo método de Otsu, discutido

³Este ponto está referenciado no sistema xOy que tem origem no canto superior esquerdo da imagem original, eixo Ox apontado para a direita e Oy para baixo.

na Seção 3.2.1, ou se perdiam detalhes representativos da chama ou parte do fundo era considerado como chama. Portanto, foi necessário realizar uma adaptação no passo de limiarização.

Na análise dos histogramas dessas imagens, notou-se que eram, em sua maioria, trimodais e que todos estes gráficos tinham as mesmas características: (i) um pico bem destacado no tom zero, seguido de um vale, (ii) um outro pico cuja altura e largura variavam conforme a condição de combustão e, por último, (iii) um longo vale na região dos tons mais claros, cuja extensão também variava de acordo com a condição, sucedido por um pico menor no tom 255.

A partir desta análise, verificou-se que um limiar ótimo para esta operação encontra-se no ponto médio entre o primeiro ponto de inflexão após o segundo pico do histograma da imagem - ponto I da Fig. 11 - e o limiar segundo Otsu (1979) - ponto O. Este limiar proposto está representado pela letra D na Fig. 11 e não só possibilitou que a limiarização destacasse a chama do fundo da imagem sem perder informação relevante da combustão, como também o não aparecimento do bloco de concreto em que o queimador é posicionado, conforme exemplificado pela Fig. 12. Esta limiarização é discutida com maior profundidade por Chui (2020).

Figura 11: Desenho representativo do histograma típico das imagens de chamas a gás capturadas.

Fonte: Adaptado de Chui (2020).

Com relação à segmentação, a partir da operação de limiarização foi possível determinar a região luminosa da chama em cada imagem capturada (Definição 4). Esta

Figura 12: Exemplo da segmentação obtida com diferentes métodos de limiarização.

Fonte: Elaborado pelo autor.

operação, apresentada na Subseção 3.3, corresponde a uma extração da chama (objeto) do fundo, utilizando a imagem binarizada correspondente como uma máscara, mantendo os tons de cinza originais do interior da chama, de forma similar ao que foi realizado em Silva Neto et al. (2019) com imagens de chamas a óleo.

A partir do resultado destas duas operações (limiarização e segmentação) parte-se para a fase de extração de características.

5.5 Obtenção dos vetores característicos

Nesta etapa, com o intuito de reduzir o esforço computacional requerido e traduzir as imagens em descritores mais tratáveis, foram extraídas características das imagens de chamas binárias e segmentadas que indicassem de alguma forma o estado real da chama. Com esses descritores foi montado um vetor de 9 características, já definidas na Subseção 3.3, que representam parâmetros operacionais de imagens de chamas usualmente medidos, conforme sugestões encontradas em, por exemplo, Baldini, Campadelli e Lanzarotti (2000), Fleury et al. (2018), Xu et al. (2018), Silva Neto et al. (2019). Estas características são as seguintes:

- a) Área da região luminosa (Definição 5);
- b) Coordenadas x e y do centroide (Definição 8);
- c) Momentos de área de segunda ordem I_x e I_y em relação aos eixos coordenados (Definição 9);

- d) Perímetro da chama binarizada (Proposição 1);
- e) Dispersão dos tons de cinza em relação ao centroide (Definição 11);
- f) Brilho médio da chama (Definição 6) e
- g) Não-uniformidade da chama (Definição 7).

Estas 9 características, calculadas ao longo da série temporal das imagens, foram submetidas a uma análise de correlação com as emissões de O_2 e CO_2 coletadas, a fim de descartar aquelas que não têm nenhuma relação com os gases emitidos. Em Evans (1996) é sugerida uma classificação qualitativa do nível de correlação com o valor do módulo do coeficiente de correlação linear de Pearson (PEARSON, 1895), conforme mostrado na Tabela 3. Por exemplo, entre 0,40 e 0,59 indica-se correlação moderada, entre 0,60 e 0,79 indica-se correlação forte e entre 0,80 e 1, correlação muito forte.

Tabela 3: Conceitos qualitativos do coeficiente de correlação de Pearson (ρ).

Intervalo de $\ \rho\ $	Classificação
0,80 - 1,00	Muito forte
0,60 - 0,79	Forte
0,40 - 0,59	Moderado
0,20 - 0,39	Fraco
0,00 - 0,19	Muito Fraco

Fonte: Evans (1996) *apud* Chui (2020).

Um detalhe a ser notado nessa qualificação está relacionado às fronteiras dos intervalos de classificação. Qualitativamente, por exemplo, duas séries com coeficiente de correlação 0,39 são tão menos descorrelacionadas quanto duas com 0,41? Pelo fato de esta classificação ter uma certa componente de subjetividade e com o intuito de flexibilizar a questão da fronteira entre correlação fraca e moderada, adotou-se, no caso aqui estudado, que as características de imagens selecionadas para entrada do modelo caixa-preta são aquelas que apresentarem o coeficiente de correlação linear acima de 0,50 em relação as emissões de O_2 e CO_2 gravadas durante os ensaios. Sendo assim, as características resultantes foram:

- a) Perímetro da chama binarizada (u_1);
- b) Brilho (u_2);
- c) Dispersão (u_3) e
- d) Coordenada y do centroide ou y_c (u_4).

Figura 13: Evolução temporal da característica de imagem de chama “Brilho”.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14: Evolução temporal da característica de imagem de chama “coordenada y do centroide”.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estas formarão, a partir de agora, o vetor de entradas $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ do modelo a ser identificado, que terá como saídas as emissões de O_2 , denotada por y_1 , e CO_2 , denotada por y_2 . As Figs. 13 e 14 mostram a evolução de duas das componentes do vetor u ao longo do tempo de experimento.

5.6 Identificação de sistemas

Com a análise realizada na seção anterior definiram-se as entradas (perímetro, brilho, dispersão e y_c) e saídas para os modelos de predição das emissões de O_2 e CO_2 . Os dados coletados, sincronizados e processados nos passos anteriores resultaram em um conjunto composto por 1510 pontos amostrados com período de 1s. Este conjunto foi separado na proporção de 67% para identificação do modelo e 33% para sua respectiva validação. Com isto, os passos seguintes consistem em: identificar os atrasos de transporte de cada saída em relação às respectivas entradas, selecionar a representação/estrutura do modelo e estimar seus parâmetros.

Para a obtenção dos atrasos do sistema (tempo morto ou atraso de transporte), calculou-se a função de correlação cruzada⁴ (FCC) entre cada entrada do vetor $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k) \ u_4(k)]^T$ e cada saída do vetor $y(k) = [y_1(k) \ y_2(k)]^T$. Segundo Aguirre (2015), uma estimativa⁵ para o tempo morto é o valor no eixo das abscissas (*lag*) equivalente ao máximo da FCC. Na Tabela 4 são apresentados os valores de tempos mortos estimados entre cada entrada e saída a partir dos dados de identificação.

Tabela 4: Atrasos estimados (em segundos) entre o vetor de características de imagem u e o de teor de emissões y .

	Teor de O_2	Teor de CO_2
Perímetro	22	39
Brilho	23	20
Dispersão	40	40
Coordenada y_c	7	40

Fonte: Elaborado pelo autor.

⁴A função de correlação cruzada das séries temporais reais x e y é dada por $r_{xy}(\tau, t) = E[x(t)y(t + \tau)]$, em que E denota o operador esperança.

⁵No *software* MATLAB®, a função *delayest* apresenta uma estimativa do tempo morto entre séries temporais baseada na comparação de modelos ARX com diferentes atrasos.

Os modelos a serem identificados têm a estrutura daqueles discutidos na Subseção 4.1.2. Uma primeira abordagem é na tentativa de um modelo MISO (*multiple inputs, single output*) mais geral - *Box-Jenkins* - para estimar o teor de CO_2 a partir das quatro características de imagem, somente. Na segunda abordagem, inclui-se também um modelo para estimar o teor de O_2 , fazendo com que neste caso, se torne um sistema MIMO (*multiple inputs, multiple outputs*). Com o intuito de obter informações sobre o horizonte de predição do modelo identificado, ainda modelando os efeitos dos ruídos, a representação selecionada para este último caso será a ARMAX (Equação 4.5) adaptada ao caso MIMO.

Antes de partir para a descrição das abordagens, é necessário estimar a ordem inicial dos polinômios que compõem a função de transferência G da Equação 4.1. Para isso, foi gerado um modelo ARX SISO (*single input, single output*) para cada combinação de entrada $u_i, i = 1, \dots, 4$ e $y_j, j = 1, 2$, com base no conjunto de dados de identificação e selecionou-se as ordens que apresentassem o menor valor⁶ de AIC (Equação 4.23). A Fig. 15 resume este procedimento para determinação destes valores.

Figura 15: Detalhamento no fluxograma para o cálculo das ordens iniciais.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a escolha da representação a ser utilizada (se OE, BJ ou ARMAX, por exemplo) e os valores de atrasos, que a partir de agora serão *fixados* com os valores da Tabela

⁶No software MATLAB®, a função *selstruc* busca o modelo SISO com melhor ajuste do critério de Akaike

4, parte-se para o próximo passo, que é a determinação da estrutura e dos parâmetros do modelo.

As ordens iniciais determinadas a partir dos modelos ARX SISO, são utilizadas aqui para determinar um conjunto de diferentes combinações de ordens para o modelo final, de maneira que ele *maximize o valor de IAR na predição de infinitos passos à frente*.

Para isso, determina-se um parâmetro arbitrário positivo p , inicialmente definido como $p = 2$ e gera-se possibilidades de valores para cada ordem. Com estas possibilidades, obtêm-se um conjunto de combinações possíveis para a estrutura do modelo. Por exemplo, supondo que a ordem inicial de um dos polinômios seja “ OI ”, então seus valores poderão variar de $\max\{1, OI - p\}$ a $OI + p$. A operação de máximo no extremo inferior do intervalo é para evitar ordens negativas. O procedimento é repetido para todos os outros polinômios da representação e monta-se uma matriz com todas as combinações possíveis de ordens para uma dada representação.

Para os modelos que tem função de transferência para o ruído (ARMAX e BJ), as ordens de seus polinômios neste passo são tomadas como fixas. O valor da ordem do polinômio do numerador, $C = C(q)$, será igual à maior ordem inicial obtida nos respectivos polinômios $B = B(q)$ das entradas. A ordem inicial do polinômio do denominador segue o mesmo raciocínio. Caso seja necessário, eles serão ajustados posteriormente na análise de resíduos.

O exemplo a seguir ilustra melhor o funcionamento da determinação do conjunto de combinações de ordens para o modelo a ser identificado.

Exemplo 1: Suponha que, para um modelo MISO de 2 entradas, as ordens vindas dos modelos ARX SISO sejam as seguintes:

- para a entrada u_1 , $n_{a_1} = 4$ e $n_{b_1} = 3$ e
- para a entrada u_2 , $n_{a_2} = 3$ e $n_{b_2} = 1$.

O subscrito “ i ” que aparece em n_{a_i} e n_{b_i} indica a qual entrada estas ordens se referem. Considere que os atrasos identificados sejam $n_k = [5 \ 2]$. Se a representação escolhida for *Box-Jenkins*, $BJ(n_b, n_c, n_d, n_f, n_k)$, e o parâmetro p for fixado em 2, serão procurados modelos cujas as ordens estarão dentro das seguintes possibilidades:

- n_b variando entre 1 e 5 para a entrada u_1 e entre 1 e 3 para a entrada u_2 ;
- n_f , que receberá as ordens n_{a_i} , variando entre 2 e 6 para a entrada u_1 e entre 1 e 5 para a entrada u_2 ;
- n_c será definido com o valor 5 (maior valor dentre as ordens n_b);
- n_d será definido com o valor 6 (maior valor dentre as ordens n_f) e
- n_k valerá 5 para a entrada u_1 e 2 para a entrada u_2 .

Se a representação fosse ARMAX, as ordens permaneceriam praticamente as mesmas, exceto para o polinômio $A = A(q)$, que é único para esta representação MISO. O intervalo para ele é definido como sendo o valor mínimo dentre as ordens dos polinômios n_{a_i} para o extremo inferior e o máximo para o superior. Para este caso, o intervalo seria de 1 a 6. $\square$

O fluxograma da Fig. 16 ilustra o funcionamento do algoritmo proposto para a busca do melhor modelo dentre as diferentes estruturas (ordens dos polinômios) geradas no passo anterior.

O passo seguinte é escolher uma dessas estruturas e determinar os parâmetros de modo a minimizar o somatório dos quadrados dos erros na predição de 1 passo à frente (Equação 4.24). Após isto, uma etapa adicional é realizada: o modelo obtido é testado na predição de infinitos passos à frente com os dados de identificação. Se ele apresentar valor do *IAR* maior que 70%, o modelo será o escolhido, caso contrário, outra estrutura é testada. Esse ciclo é realizado até todas as estruturas terem sido verificadas. Se ainda assim nenhum modelo atender à especificação do *IAR*, ou incrementa-se o valor de p , ou flexibiliza-se o valor-alvo do *IAR* ou, ainda, aumenta-se a quantidade de dados do conjunto de identificação e realiza-se todo o procedimento novamente, conforme fluxograma da Fig. 16.

Com o modelo escolhido, parte-se para a análise de resíduos e validação cruzada. Nas próximas subseções, são apresentados e discutidos os modelos obtidos a partir deste algoritmo.

Figura 16: Algoritmo para a obtenção da estrutura e parâmetros dos modelos caixa-preta.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.6.1 Modelo MISO (características de imagem vs. teor de CO_2)

Nesta primeira abordagem, antes de estimar um modelo do tipo BJ, buscou-se um do tipo OE (Equação 4.18). O algoritmo discutido anteriormente forneceu as seguintes ordens: $n_b = [2 \ 2 \ 1 \ 2]$, $n_f = [4 \ 4 \ 2 \ 2]$ e $n_k = [39 \ 20 \ 40 \ 40]$. Os polinômios B e F identificados foram:

$$\begin{aligned}
 B_1(q) &= 1,81 \cdot 10^{-5} q^{-39} - 1,61 \cdot 10^{-5} q^{-40}, \\
 B_2(q) &= 7,01 \cdot 10^{-3} q^{-20} - 6,88 \cdot 10^{-3} q^{-21}, \\
 B_3(q) &= 8,68 \cdot 10^{-5} q^{-40}, \\
 B_4(q) &= 4,78 \cdot 10^{-4} q^{-40} - 6,05 \cdot 10^{-4} q^{-41}, \\
 F_1(q) &= 1 - 0,37q^{-1} - 1,30q^{-2} - 0,30q^{-3} + 0,97q^{-4}, \\
 F_2(q) &= 1 - 0,45q^{-1} - 1,04q^{-2} - 0,11q^{-3} + 0,60q^{-4}, \\
 F_3(q) &= 1 - 1,95q^{-1} + 0,95q^{-2}, \\
 F_4(q) &= 1 - 1,82q^{-1} + 0,82q^{-2}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Com isso, o modelo OE identificado no domínio do tempo então será dado por:

$$\begin{aligned}
 w_1(k) &= 0,37w_1(k-1) + 1,30w_1(k-2) + 0,3w_1(k-3) - 0,97w_1(k-4) \\
 &\quad + 1,81 \cdot 10^{-5}u_1(k-39) - 1,61 \cdot 10^{-5}u_1(k-40), \\
 w_2(k) &= 0,45w_2(k-1) + 1,04w_2(k-2) + 0,11w_2(k-3) - 0,6w_2(k-4) \\
 &\quad + 7,01 \cdot 10^{-3}u_2(k-20) - 6,88 \cdot 10^{-3}u_2(k-21), \\
 w_3(k) &= 1,95w_3(k-1) - 0,95w_3(k-2) + 8,68 \cdot 10^{-5}u_3(k-40), \\
 w_4(k) &= 1,82w_4(k-1) - 0,82w_4(k-2) + 4,78 \cdot 10^{-4}u_4(k-40) \\
 &\quad - 6,05 \cdot 10^{-4}u_4(k-41),
 \end{aligned}$$

$$y_{CO_2,OE}(k) = w_1(k) + w_2(k) + w_3(k) + w_4(k) + v(k), \quad (5.2)$$

em que $w_i, i = 1, \dots, 4$, representam variáveis internas não medidas, $u_i, i = 1, \dots, 4$ são as características de imagem da Tabela 4 e v é um ruído branco. É possível ainda, obter a representação deste modelo em espaço de estados, que facilita a simulação de sua resposta temporal, a partir de uma adaptação do resultado apresentado no Teorema 2, excluindo as partes referentes aos coeficientes c_i e d_j nas matrizes A, B e C das Equações 4.20 e 4.21.

Na análise de resíduos com os dados de identificação, percebeu-se que as funções de correlação cruzada dos resíduos do modelo com as entradas permaneceram dentro das respectivas regiões de confiança, indicando que a estrutura escolhida para o modelo foi condizente com o requerido no teste de independência dos resíduos. As FCC's para este caso são apresentadas nos últimos quatro gráficos da Fig. 17. Ao se analisar a função de autocorrelação dos resíduos, apresentada no primeiro gráfico da Fig. 17, identificou-se que ela tem pontos fora da região de confiança, indicada pela faixa de cor cinza claro na Fig. 17. Como o resultado do teste de independência foi positivo, isto indica que o problema está na forma como os ruídos são tratados.

Figura 17: Análise de resíduos do modelo de erro na saída (OE) com os dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma evolução natural do modelo OE no que diz respeito à modelagem do termo de ruído é o modelo *Box-Jenkins* (Equação 4.19). Utilizando o mesmo algoritmo para determinação da melhor ordem e dos parâmetros, foi identificado o seguinte modelo, com ordens $n_b = [1 \ 1 \ 1 \ 2]$, $n_c = 8$, $n_d = 12$, $n_f = [4 \ 4 \ 4 \ 6]$ e $n_k = [39 \ 20 \ 40 \ 40]$:

$$w_1(k) = 0,23w_1(k-1) + 1,61w_1(k-2) + 0,04w_1(k-3) - 0,88w_1(k-4) - 1,61 \cdot 10^{-6}u_1(k-39),$$

$$w_2(k) = 1,13w_2(k-1) + 0,38w_2(k-2) - 0,18w_2(k-3) - 0,33w_2(k-4) + 2,44 \cdot 10^{-4}u_2(k-20),$$

$$w_3(k) = 1,80w_3(k-1) - 0,32w_3(k-2) - 0,75w_3(k-3) + 0,28w_3(k-4) - 1,99 \cdot 10^{-4}u_3(k-40),$$

$$w_4(k) = 1,00w_4(k-1) - 0,02w_4(k-2) + 0,13w_4(k-3) + 0,30w_4(k-4) + 0,03w_4(k-5) - 0,44w_4(k-6) + 2,87 \cdot 10^{-4}u_4(k-40) - 3,98 \cdot 10^{-4}u_4(k-41),$$

$$y_{CO_2,BJ}(k) = w_1(k) + w_2(k) + w_3(k) + w_4(k) + \Psi_v^T(k-1)\hat{\theta}_v + v(k). \quad (5.3)$$

Novamente, $w_i, i = 1, \dots, 4$, representam variáveis internas não medidas, $u_i, i = 1, \dots, 4$ são as características de imagem da Tabela 4 e, diferentemente da Equação 5.2, o termo $e(k) = \Psi_v^T(k-1)\hat{\theta}_v$, que representa a parte MA (média móvel) da Equação

4.19, é inserido a fim de minimizar o efeito de polarização do estimador.

Na Fig. 18 é apresentada a análise de resíduos considerando 120 intervalos de atrasos do modelo BJ com os dados de identificação. É importante ressaltar que, como os atrasos desse modelo são da ordem de 40, deve-se ter o cuidado de utilizar um número de atrasos suficiente para tornar a análise representativa⁷. Söderström e Stoica (1988) recomendam que o número de atrasos seja superior à maior ordem n_b do modelo e seja escolhido no intervalo entre 5 e $N/4$, N representando o tamanho do vetor de dados medidos, correspondente ao conjunto de dados para identificação. Como o conjunto aqui utilizado tem dimensão $N = 1000$, o valor de 120 atrasos atende à especificação sugerida por estar no intervalo $[5, 250]$. Para o caso em questão, percebe-se que não há o problema encontrado na função de autocorrelação da Fig. 17: tanto a função de autocorrelação quanto as de correlação cruzada dos resíduos do modelo com as entradas estão dentro da região de confiança, atestando o efeito reduzido da polarização.

Figura 18: Análise de resíduos do modelo *Box-Jenkins* (BJ) com os dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Fig. 19 é apresentada a simulação livre com os dados de identificação dos dois modelos obtidos, após suas conversões para espaço de estados via Teorema 2, com o intuito de verificar o quanto os modelos identificados conseguem explicar os dados que geraram cada modelo e ambos apresentaram bons ajustes, que pode ser verificado pelos índices *IAR* indicados nesta figura. Para o modelo OE, o valor de *IAR* percentual obtido foi de 89,15% e para o BJ, de 90,22%. Utilizou-se o índice *IAR*, pois o *IA*

⁷Por exemplo, o padrão *default* do comando *resid* do MATLAB® é de 25 *lags*, valor este que inviabilizaria perceber algo de errado no modelo em um *lag* acima de 25.

obtido para ambos foi de 0,99.

Vale lembrar que, para a simulação livre, utiliza-se somente os valores das entradas e as próprias previsões passadas do próprio modelo (e condições iniciais medidas). Isto, obviamente, não se configura uma condição suficiente para atestar o bom desempenho do modelo. No próximo capítulo, estas duas representações serão testadas com o conjunto de dados de validação e seus resultados serão discutidos.

Figura 19: Simulação livre dos modelos OE e BJ com dos dados de estimação (teor de %CO₂ em base seca vs. tempo).

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.6.2 Modelo MIMO (características de imagem vs. teor de O₂ e CO₂)

Busca-se neste ponto um modelo que tenha capacidade de realizar previsões com base em observações passadas, com o intuito de incorporar uma maior robustez à metodologia. Deseja-se, a partir das características das imagens, realizar previsões do teor das emissões de O₂ e CO₂, efetuando correções periódicas do modelo com medidas coletadas por um sensor de oxigênio.

O modelo autorregressivo escolhido foi um ARMAX (Equação 4.5) multivariável, que será referido aqui por ARMAX MIMO. Inicialmente, optou-se por um modelo formado por duas equações desacopladas (uma para cada saída - teor de O₂ e CO₂). No entanto, percebeu-se que não se garantiria a observabilidade do modelo com a correção de apenas uma medida. A solução para isto foi acoplar estas duas equações, realimentando a saída que representa o teor de O₂ como entrada na equação que tem

como saída o teor de CO_2 . Esta opção foi escolhida pelo fato de os sensores de O_2 terem maior resolução em suas medidas. Este acoplamento está ilustrado na Fig. 20.

Figura 20: Estrutura do modelo ARMAX multivariável (MIMO) utilizado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma como foi feito nos modelos OE e BJ da seção anterior, as ordens e parâmetros para este modelo MIMO foram determinadas de forma a maximizar o índice IAR . A estratégia aqui foi estimar os dois blocos separadamente como modelos MISO, sendo que as medidas coletadas do teor de O_2 foram utilizadas como entrada do bloco $ARMAX_2$. A estrutura resultante é representada pelas Equações 5.4 e 5.5, que correspondem aos blocos “ $ARMAX_1$ ” e “ $ARMAX_2$ ” da Fig. 20.

$$\begin{aligned}
 y_1(k) = & 0,95y_1(k-1) - 0,08y_1(k-2) + 0,14y_1(k-3) + 6,24 \cdot 10^{-5}u_1(k-22) \\
 & + 6,89 \cdot 10^{-4}u_2(k-23) - 3,94 \cdot 10^{-3}u_3(k-40) + 1,9 \cdot 10^{-3}u_4(k-7) \quad (5.4) \\
 & + \Psi_{v_1}(k-1) \hat{\theta}_{v_1} + v_1(k),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k) = & 2,06y_2(k-1) - 0,34y_2(k-2) - 1,49y_2(k-3) + 0,77y_2(k-4) \\
 & + 8,3 \cdot 10^{-4}y_1(k-2) - 2,8 \cdot 10^{-3}y_1(k-3) + 2,0 \cdot 10^{-3}y_1(k-4) \\
 & + 7,5 \cdot 10^{-6}u_1(k-39) - 1,3 \cdot 10^{-5}u_1(k-40) + 5,9 \cdot 10^{-6}u_1(k-41) \quad (5.5) \\
 & + 4,8 \cdot 10^{-4}u_2(k-20) - 9,8 \cdot 10^{-4}u_2(k-21) + 5,0 \cdot 10^{-4}u_2(k-22) \\
 & + \Psi_{v_2}(k-1) \hat{\theta}_{v_2} + v_2(k).
 \end{aligned}$$

O termo $e_i(k) = \Psi_{v_i}^T(k-1)\hat{\theta}_{v_i}$, $i = 1, 2$ representa a parte MA (média móvel) das Equações 5.4 e 5.5, inseridos a fim de minimizar o efeito de polarização do estimador.

Como pode ser notado tanto na Fig. 20 quanto na Equação 5.5, somente as características perímetro (u_1) e brilho (u_2), juntamente com o teor de O_2 estimado pela Equação 5.4, foram utilizadas. Optou-se por esta estrutura pois foi verificado que o modelo estimado tendo, além das citadas, as características dispersão (u_3) e y_c (u_4), apresentou resultados semelhantes aos da Equação 5.5. Com isto, o esforço computacional necessário para obter estimativas do teor de CO_2 foi reduzido.

No que diz respeito à análise de resíduos, para a parte referente à Equação 5.5, tanto o teste de independência quanto o da autocorrelação dos resíduos foram atendidos, conforme pode ser notado na Fig. 21.

Figura 21: Análise de resíduos do modelo ARMAX₂ (Equação 5.5) com os dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação à outra parte do modelo, correspondente à Equação 5.4, percebe-se, pela Fig. 22, que o teste de independência é atendido, pois os gráficos da função de correlação cruzada dos resíduos com cada entrada estão todos dentro da região de confiança. Quanto ao teste de autocorrelação, mesmo com um ponto correspondente ao *lag* 28 levemente fora da região de confiança, pode-se considerar também atendido, visto que ele ainda está bem próximo a esta região. Uma correção do termo de ruído foi realizada para que não haja este problema, mas a ordem do polinômio C do modelo ARMAX aumentou significativamente, sem apresentar grandes melhorias nos resulta-

dos dos outros testes de validação. Portanto, optou-se por continuar com a estrutura da Equação 5.4.

Figura 22: Análise de resíduos do modelo ARMAX₁ (Equação 5.4) com os dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação à capacidade do modelo ARMAX MIMO identificado em explicar os dados utilizados, percebeu-se que, na predição de infinitos passos à frente com os dados de identificação, o modelo não conseguiu descrever bem as transições quando se alterou a razão de equivalência no ensaio. Isto pode ser notado na Fig. 23.

Figura 23: Simulação livre do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao fazer a análise do porquê de o modelo não conseguir capturar a dinâmica das transições mais bruscas no teor de O_2 , chegou-se à conclusão de que, além de o modelo ter característica linear, isto se deve também ao horizonte de previsão finito da Equação 5.4. Como sua saída é realimentada como entrada da Equação 5.5 (Fig. 20), ela afeta também a capacidade de predição do teor de CO_2 . Para verificar o horizonte de predição do modelo, calculou-se a predição de 60, 30 e 10 passos à frente. Elas são apresentadas nas Figs. 24 a 26.

Figura 24: Predição de 60 passos à frente (1 min) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25: Predição de 30 passos à frente (30 s) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26: Predição de 10 passos à frente (10 s) do modelo ARMAX MIMO com dos dados de estimação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se, pelas Figs. 24 a 26, que a predição de 60 passos à frente parece já ser o limite deste modelo, visto que há um atraso significativo entre as curvas do teor de O_2 em torno de 1 *min*. Uma possível explicação para tal resultado é o fato de os dados não serem estacionários. Segundo Aguirre (2015), para este tipo de dados, qualquer modelo que não seja recursivamente atualizado perde a capacidade de explicá-los adequadamente. Portanto, com intuito de melhorar seu desempenho e incorporar algum aspecto fenomenológico a este modelo *caixa-preta*, optou-se por acoplar um filtro de Kalman (KF) na saída de O_2 do ARMAX MIMO e realimentar como entrada da parte que estima o teor de CO_2 . Vale lembrar que esta opção foi adotada pelo fato de os sensores de O_2 terem maior resolução em suas medidas.

O esquema de operação deste acoplamento, composto por modelos ARMAX aliados a um filtro de Kalman, confere a esta abordagem uma estrutura de *soft sensor* ou sensor virtual. Segundo Assis e Filho (2000) *apud* Lotufo e Garcia (2008), o *soft sensor* é a associação de um sensor físico que permite medições *online* de algumas variáveis de um processo juntamente com um algoritmo de estimação a fim de prover estimativas em tempo real de variáveis não medidas, parâmetros do modelo ou até mesmo superar atrasos de medições.

A adaptação proposta para o modelo identificado com o filtro bem como a estrutura do sensor virtual resultante estão indicados na Fig. 27. As equações em espaço de estados para o bloco do filtro de Kalman desta figura são equivalentes à conversão da

Figura 27: Estrutura final do sensor virtual proposto indicando o acoplamento do filtro de Kalman (KF) com modelo ARMAX multivariável (MIMO).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Equação 5.4 para o referido formato por meio do resultado do Teorema 1.

Com relação aos parâmetros do filtro, a matriz de covariância do ruído de processo Q foi definida com o valor da variância (σ^2) do ruído identificado no modelo ARMAX MIMO da seguinte maneira: $Q_0 = q_0 \cdot I_n$, com $q_0 = \max\{\sigma^2(\hat{\theta}_{v_1}), \sigma^2(\hat{\theta}_{v_2})\}$ e I_n representando a matriz de identidade de ordem n . Convém lembrar que $\hat{\theta}_{v_1}$ e $\hat{\theta}_{v_2}$ se referem à parte MA dos modelos ARMAX. O valor utilizado foi $q_0 = 0,68$. Já a variância do ruído de medição foi definida como $R_k = \sigma_{O_2}^2 = 2$.

O princípio de funcionamento do sensor virtual da Fig. 27 é o seguinte: definida uma quantidade de passos k , a parte do modelo ARMAX MIMO dada pela Equação 5.4 é propagada pelo filtro de Kalman juntamente com a parte referente à Equação 5.5 durante k passos. Após cada intervalo de k passos, o filtro é atualizado com uma medida do teor de O₂ capturada pelo sensor. Por exemplo, o filtro propaga as equações por $k = 10$ passos e no décimo passo, o KF recebe uma medida de teor de O₂ para atualizar o modelo. Após isto, o procedimento é repetido.

Na Fig. 28, realiza-se uma simulação da estrutura proposta, ainda com os dados de identificação. Nesta simulação é considerado o caso mais extremo dos mostrados anteriormente: o que o modelo propaga as medidas por 60 passos.

Figura 28: Simulação do sensor virtual proposto com o conjunto de dados de *identificação* e $k = 60$ (passos de propagação do modelo).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Fig. 28, percebe-se a adaptação para o sensor virtual consegue corrigir os problemas que aconteceram na descrição das transições bruscas e também no aparecimento do atraso do modelo em relação às medidas, que aconteceu nas predições de 30 e 60 passos à frente.

No próximo capítulo, a estrutura em questão será confrontada com um outro conjunto de dados, não utilizados até aqui, com a intenção de validar o sensor proposto e atestar a capacidade de generalização do modelo.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta etapa procede-se aos testes com o conjunto de dados de imagens e emissões restantes que não foram utilizadas para a identificação, correspondentes aos 33% do total coletado. As imagens deste conjunto foram processadas e suas características foram utilizadas em cada modelo identificado no Capítulo 5 para verificar o desempenho na predição das emissões correspondentes e atestar a capacidade de generalização dos modelos obtidos.

6.1 Testes de validação e resultados: modelos MISO (OE e BJ)

Os modelos identificados e apresentados na Subseção 5.6.1 são agora confrontados com os dados de validação no intuito de avaliar suas capacidades de generalização.

6.1.1 Validação cruzada

Referente à Fig. 29 e à discussão realizada até aqui, é possível tirar algumas conclusões:

- O modelo OE apresentou índices de ajustes IA de 0,88 e IAR de 65,8%. Apesar de este valor de IAR parecer baixo, ao analisar visualmente o gráfico de sua simulação livre na Fig. 29, percebe-se que este, de maneira geral, seguiu a tendência da dinâmica das emissões. O trecho onde ele apresentou maiores problemas foi justamente na vizinhança da região em que o teor de CO_2 começou a se elevar. Vale lembrar que a série temporal das emissões do conjunto de dados para identificação era decrescente, conforme pode ser notado na Fig. 8, e mesmo assim o modelo OE acompanhou a tendência de subida da emissão do CO_2 . Com isso, pode-se concluir que o causador desta pequena falha é justamente o efeito

da não modelagem do ruído (correlacionado, neste caso) detectado na análise de resíduos da Fig. 17, causando viés na estimativa dos parâmetros. Este ruído é, em parte, causado pela dinâmica da chama e por erros gerados no processamento das imagens.

- Para o modelo BJ, que tem função de transferência para o termo de ruído, o efeito da polarização do estimador que apareceu no modelo OE, como já era de se esperar, não acontece. Isto foi atestado na análise de resíduos, mostrada na Fig. 18. Além disso, na validação cruzada, é possível notar o excelente desempenho deste modelo na Fig. 29, mesmo no trecho de subida na série temporal das emissões. Este desempenho é ratificado pelo alto valor do índice IAR de 91% e IA de 0,99.

Figura 29: Validação cruzada dos modelos OE e BJ com o conjunto de dados de validação

Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante destacar que, na identificação de sistemas, a validação é efetuada com um conjunto de dados em condições similares às apresentadas pelos dados de estimação (AGUIRRE, 2015; OLIVEIRA JR; GARCIA, 2017). Isto não acontece aqui: os dados utilizados para teste foram coletados em condições bem diferentes daqueles

usados no passo anterior. Mesmo assim, os dois modelos se comportaram de maneira equivalente, tendo suas estimativas quase idênticas (no caso BJ) aos dados medidos.

Com estes resultados, pode se afirmar que, através do modelo dinâmico MISO de *Box-Jenkins* é possível, para as condições utilizadas nos ensaios, obter um sensor virtual capaz de relacionar dinamicamente características de imagem de chama com uma medida física, aqui representada pela emissão de gás carbônico, configurando uma contribuição inovadora desta abordagem.

6.2 Testes de validação e resultados: modelo MIMO (ARMAX + KF)

A estrutura do modelo MIMO ARMAX acoplada a um filtro de Kalman, destacada na Fig. 27, é agora submetida aos testes com os dados de validação. Conforme explicado na Subseção 5.6.2, o funcionamento é baseado no número de passos k escolhido para propagar o modelo e a cada intervalo de k passos de propagação, o filtro de Kalman atualizará a medida do teor de O_2 .

6.2.1 Validação cruzada

Inicialmente, analisa-se a série temporal gerada pelo modelo a partir do conjunto de validação, com o intuito de avaliar sua capacidade de predição. Três cenários, basicamente, serão analisados a partir da variação do valor de k : 10, 20 e 60. Estes resultados estão apresentados nas Figs. 30 a 32.

Tabela 5: Resumo dos índices IA do modelo ARMAX com filtro de Kalman conforme duração do intervalo de passos de propagação.

Espécie	$k = 10$	$k = 20$	$k = 60$
O_2	0,98	0,79	0,76
CO_2	0,93	0,81	0,76

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os valores obtidos para os índices IA estão resumidos na Tabela 5 e para o IAR , na Tabela 6. Verifica-se que, nos cenários citados, conforme se aumentou o intervalo em que o modelo MIMO ARMAX propaga suas medidas, o valor de IA variou de 0,98 a 0,76 para a predição do O_2 , enquanto para a predição do CO_2 , variou de 0,93 a 0,76;

Tabela 6: Resumo dos índices *IAR* do modelo ARMAX com filtro de Kalman conforme duração do intervalo de passos de propagação.

Espécie	$k = 10$	$k = 20$	$k = 60$
O_2	85,75%	53,66%	51,44%
CO_2	74,04%	56,97%	51,34%

Fonte: Elaborado pelo autor.

já o *IAR* variou de aproximadamente 86% a 51% para a predição do O_2 , enquanto para a predição do CO_2 , variou de 74% a 51%.

Para compreender melhor os resultados apresentados pelos índices citados, lembra-se que tanto o *IA* quanto o *IAR*, se baseiam na seguinte medida:

$$r = NRMS E = \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - \bar{y}\|} . \quad (6.1)$$

Figura 30: Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 10$ passos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31: Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 20$ passos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32: Validação cruzada do modelo MIMO ARMAX + KF para $k = 60$ passos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelas definições 14 e 15 do Capítulo 4, deseja-se, para os modelos estimados, que $r < 1$. Para estes, o $NMSE = r^2$ terá um valor menor ainda, desde que $r^2 < r$. Com isto, pode-se dizer que o IAR é muito mais rigoroso, penalizando de forma mais contundente os erros cometidos pelo modelo. Por outro lado, o IA é uma medida dos desvios globais entre os valores previstos e medidos que melhor traduziu o ajuste dos dados estimados pelos modelos aqui apresentados. Como o IAR foi utilizado como funcional a ser maximizado na etapa de identificação, optou-se por apresentar os dois para efetuar a análise.

É perceptível que, mesmo no caso em que $k = 60$, onde o IAR para os dois gases resultou em um valor em torno de 51%, as estimativas geradas pelo modelo estão de acordo com o esperado, tendo sido esse valor baixo causado pela pequena defasagem nas transições da Fig. 32. O valor do IA de 0,76 para este caso traduz melhor o que aconteceu nesta simulação.

Como o teor de O_2 é realimentado como entrada na equação de CO_2 , seus índices também serão afetados nas transições bruscas nos dados. Como estes modelos são de natureza linear, é de se esperar que eles tenham dificuldades quando há mudança brusca no meio do intervalo de propagação. Isto só reforça a inclusão do filtro de Kalman na estrutura e abre caminhos para uma futura investigação do comportamento de modelos não-lineares ou multimodelos lineares no lugar do MIMO ARMAX.

É importante notar que o tempo de amostragem utilizado nos ensaios foi de 1 s e com isso, pelos testes realizados, mesmo no caso em que o modelo propaga por 60 s e com as transições bruscas em $t = 1201$ s e $t = 1471$ s, a estrutura proposta conseguiu recuperar a dinâmica das emissões a partir das imagens, inclusive no trecho de queda do teor de O_2 / subida de CO_2 . Novamente, vale lembrar que os dados utilizados para identificação destes modelos tinham características bem diferentes à deste trecho, conforme pode ser notado na Fig. 8.

6.2.2 Análise de convergência do filtro

Até este ponto, a discussão refere-se às métricas de qualidade relativas aos modelos caixa-preta utilizados. Tão relevante quanto a análise da evolução temporal das estimativas geradas pelo filtro de Kalman é a verificação de sua convergência. Uma das maneiras de efetuar essa verificação é por meio da análise dos resíduos normalizados de observação. Para que a convergência das estimativas seja comprovada, é

necessário que tais resíduos possuam estatística consistente com as hipóteses de ruído branco gaussiano de média nula adotados tanto para o modelo do processo quanto para o modelo de observação. Para auxiliar nesta avaliação, em cada uma das figuras, de 33 a 35, há três gráficos: evolução temporal do resíduo normalizado com sua respectiva região de confiança, histograma e função de autocorrelação.

A evolução temporal do resíduo normalizado nos três casos é mostrada na parte (a) das Figs. 33 a 35. Excluindo os valores atípicos (*outliers*) em $t = 1201s$ e $t = 1471s$, causados pelas mudanças repentinas na razão de equivalência (condição 4 para a 5 e condição 5 para a 6 da Tabela 2, respectivamente), que foram imediatamente corrigidos pelo filtro, todos os valores deste resíduo estão dentro do intervalo correspondente a 3 desvios padrão do ruído de medição ($\pm 3\sigma_v$).

Figura 33: Estatísticas do filtro utilizado para $k = 10$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34: Estatísticas do filtro utilizado para $k = 20$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35: Estatísticas do filtro utilizado para $k = 60$ passos de propagação: (a) Resíduo Normalizado de observação, (b) Histograma e (c) Autocorrelação dos resíduos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a parte (b) das Figs. 33 a 35, uma análise mais minuciosa deve ser feita. Os histogramas em questão apresentam uma característica de caudas pesadas devido aos *outliers* correspondentes à mudança brusca de condição, atípicos para os modelos lineares. Com a exclusão desses pontos, os resíduos inicialmente foram submetidos ao teste de normalidade de Shapiro-Wilk e ao teste de Kolmogorov-Smirnov (WILK; GNANADESIKAN, 1968; HOAGLIN; MOSTELLER; TUKEY, 1983). Ambos não rejeitaram a hipótese de normalidade para um nível de significância de 5%.

Os testes em questão são utilizados para verificar a não-normalidade de um con-

junto de dados; portanto, neste caso, é necessária uma ferramenta adicional. O gráfico quantil-quantil (Q-Q) é uma ferramenta muito útil para comparar a distribuição de frequência dos dados com uma distribuição de probabilidade. Ele confronta os quantis dos dados amostrais com os quantis teóricos de uma distribuição normal. Se a distribuição dos dados for normal, então ambos os quantis estarão próximos à reta bissetriz dos quadrantes ímpares (CHAMBERS, 2017). Esta abordagem auxilia na investigação pois é mais fácil para um analista verificar se uma reta se ajusta aos pontos amostrais que se uma curva de densidade se ajusta a um histograma, por exemplo. Além disso, é muito utilizada no caso de pequenas amostras, por não ter características assintóticas como os testes de Shapiro e Kolmogorov.

Nas Figs. 36 e 37 são apresentados os gráficos Q-Q correspondentes ao resíduos apresentados nas Figs. 33a e 34a, excluídos os *outliers* anteriormente comentados, correspondentes à mudança brusca de regime. Todos os pontos restantes (marcados com “+”) podem ser considerados aderentes à reta de referência para uma distribuição normal.

Figura 36: Gráfico Q-Q para $k = 10$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37: Gráfico Q-Q para $k = 20$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso da Fig. 38, por ter um número menor de amostras, o histograma da Fig. 35b dificulta a comparação com uma distribuição normal. O correspondente gráfico Q-Q fornece uma visualização mais adequada que o histograma para este caso, no sentido de verificar a normalidade dos resíduos. É possível supor, pela Fig. 38, que os quantis dos resíduos tem certa aderência à reta de referência para uma distribuição normal.

Figura 38: Gráfico Q-Q para $k = 60$ passos de propagação. Os pontos marcados com “+” representam os pontos do resíduo normalizado, a linha sólida/tracejada marca a referência para uma distribuição normal teórica.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Baseado nos testes de normalidade e na análise dos gráficos Q-Q, é possível considerar a hipótese de distribuição normal para os resíduos normalizados de observação. Pela pronta correção do filtro na evolução temporal, mantendo os resíduos dentro da faixa de tolerância para a validação da referida hipótese, é possível ainda inferir que, com um conjunto maior de pontos amostrais, os histogramas discutidos aqui teriam um comportamento bem mais próximos ao de uma distribuição gaussiana.

Com relação à parte (c) das Figs. 33 a 35, a autocorrelação dos resíduos pode ser considerada branca, pois seus valores se encontram dentro da região de insignificância estatística. Sendo assim, todas as hipóteses pertinentes ao filtro de Kalman são confirmadas, tendo sua convergência atestada.

6.2.3 Testes adicionais

Com intuito de avaliar a robustez do sensor virtual, simula-se para os três casos citados, $k = 10, 20$ e 60 passos de propagação, o comportamento desta estrutura sob a presença de defeitos no sensor de oxigênio. O defeito consiste em replicar uma falha no envio das medidas para o filtro de Kalman em três instantes de tempo, ou seja, o sensor enviará teor zero nos instantes $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$, escolhidos aleatoriamente.

Figura 39: Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 10$ passos de propagação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As Figs. 39, 40 e 41 apresentam o comportamento do sensor virtual proposto na presença das falhas citadas para os casos em que o modelo interno propaga suas

medidas por $k = 10$, 20 e 60 passos, respectivamente.

Figura 40: Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 20$ passos de propagação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41: Simulação de falha no sensor de oxigênio em $t = 1051s$, $t = 1275s$ e $t = 1471s$ para o caso $k = 60$ passos de propagação.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas Figs. 40 e 41, os dois primeiros defeitos inseridos propositalmente aconteceram dentro do intervalo de propagação do modelo interno do filtro; portanto, não afetaram seu funcionamento e ele continuou operando perfeitamente. Já o terceiro defeito, em $1471s$, coincidiu com um passo de atualização do filtro, fazendo com que ele adquirisse uma medida incorreta, visto que não se alterou os parâmetros de incerteza na medição anteriormente definidos. No entanto, nos instantes seguintes, esta incoerência

foi corrigida pela estrutura.

Na Fig. 39, tanto o primeiro defeito quanto o terceiro coincidiram com o passo de atualização do filtro. Para o instante 1471s, o KF corrigiu de forma similar aos outros casos ($k = 20$ e $k = 60$). O segundo defeito simulado aconteceu dentro do intervalo de propagação e, portanto, não houve degradação em seu funcionamento. Por último, o primeiro defeito, em $t = 1051s$, demandou um esforço um pouco maior do sensor virtual, pois a discrepância entre a medida verdadeira e a fornecida incorreta pelo sensor físico de oxigênio foi bem maior que aquela do terceiro defeito e por isso, a estimativa do teor de CO_2 , que não é corrigida pelo KF, demorou um pouco mais para estabilizar (em torno de 100s).

Em todos os casos, o sensor virtual teve um excelente desempenho na convergência das estimativas, mesmo quando o sensor de oxigênio apresentou problemas pontuais.

Com base nos resultados apresentados e discutidos, é possível afirmar que, para o aparato experimental apresentado e condições descritas, há evidência estatística de que a estrutura proposta (MIMO ARMAX + KF) para o sensor virtual é capaz de fornecer estimativas adequadas para o teor de O_2 e CO_2 a partir de características de imagens de chamas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Conclusões

O monitoramento da chama por imagem surgiu inicialmente para detecção de falhas na combustão em fornos industriais. Algumas pesquisas realizadas aliando ao processamento de imagens as técnicas de inteligência artificial, principalmente redes neurais, trouxeram resultados prósperos para esta nova linha de pesquisa. Com isto, abre-se a possibilidade para a busca da implementação de estratégias de controle automático.

Uma das dificuldades para a inclusão desta estratégias em uma malha de controle é a carência de modelos dinâmicos. As abordagens mais recentes continuam a usar ferramentas como lógica *fuzzy* e aprendizado de máquina (*machine learning*); tais modelos são ditos estáticos, isto é, não apresentam uma evolução temporal, requerida para a maioria das técnicas de controle consagradas.

Nesta tese foi projetado um sensor virtual, apresentando a metodologia para obter seu modelo dinâmico, para prever emissões de O_2 e CO_2 a partir de imagens de chama capturadas por uma câmera CCD em um forno industrial a gás natural. As imagens de chama e as medidas destas emissões foram coletadas e sincronizadas em diversas condições de razão de equivalência. Um processamento das imagens foi realizado e se baseou nas operações de (i) recorte, (ii) binarização, que consistiu em obter um novo limiar a partir daquele obtido com o método de Otsu e (iii) segmentação, para que fosse possível retirar características geométricas e de luminosidade das chamas resultantes.

A adaptação ao método de Otsu permitiu separar a parte referente à chama, ainda que a imagem tenha o fundo composto por dois tons de cinza bem marcados (corres-

pondentes à parede do forno e ao bloco de encaixe do queimador), e avaliar se existiam indícios de uma correspondência com as emissões. Com a confirmação desses indícios, partiu-se para a identificação de modelos dinâmicos do tipo *caixa-preta*, em duas abordagens: a primeira, com modelos OE e BJ MISO, que mostrou que é possível relacionar dinamicamente as propriedades de imagem de chama com o teor de CO_2 , e a segunda, mais robusta, aliando um modelo autorregressivo (ARMAX MIMO) em conjunto com um filtro de Kalman para previsão das emissões dos dois gases. Convém ressaltar que a opção pelos modelos autorregressivos para o caso MIMO se deu pelo fato de se desejar ter informações sobre o horizonte de predição dos modelos utilizados. Uma vez que o BJ não apresentou melhoria na simulação livre com os dados de emissão de O_2 em relação ao ARMAX, este último foi escolhido como a representação adequada para o caso MIMO.

Para a abordagem MIMO, a estratégia consistiu em propagar as medidas de emissão durante k segundos com o modelo identificado e atualizá-lo periodicamente com medidas obtidas por um sensor de oxigênio a cada k segundos. Alguns cenários para o valor de k foram analisados com o intuito de avaliar seu horizonte de predição. A convergência do filtro de Kalman foi assegurada pela análise dos resíduos normalizados de observação, cuja estatística foi consistente com as hipóteses do modelo, o que permitiu obter estimativas fidedignas das emissões com um horizonte de predição de até 60 s.

Considerando a argumentação acima, pode-se afirmar que a tese contribuiu no desenvolvimento de uma metodologia para a fusão de informações de sensores convencionais, como o sensor de oxigênio, com aquelas provenientes do processamento de imagens via modelos dinâmicos identificados em conjunto com um filtro de Kalman e na obtenção de um sensor virtual que utiliza um *único modelo dinâmico para predição das emissões* para diferentes condições de razão de equivalência, diferentemente de trabalhos anteriores, que utilizam modelos estáticos com imagens ou modelos dinâmicos sem imagens para condição única.

O estudo aqui realizado mostra que é possível, com o sensor proposto, obter informações sobre a dinâmica que governa as emissões e, assim, colabora, também, para futura implementação de um sistema de controle automático de emissões baseado em imagens.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Com o objetivo de dar continuidade à pesquisa, abordando aspectos não estudados no presente trabalho ou de melhorar as formulações apresentadas, faz-se a seguir algumas sugestões e considerações para trabalhos futuros:

- a) utilizar modelos adaptativos por meio da estimação recursiva de seus parâmetros ou o chaveamento entre modelos pré-determinados através de métodos baseados em inteligência artificial;
- b) investigar a capacidade de modelos não-lineares em relacionar as vazões de entrada de oxigênio e gás natural com as características das imagens de chama;
- c) estender e avaliar a metodologia para chamas de outros tipos de combustíveis;
- d) incorporar à metodologia medidas de pressão acústica do interior da câmara de combustão na busca de um modelo que preveja outras características dinâmicas da chama, como a existência de ciclos-limite para certos valores da razão de equivalência. Isto é impossibilitado pela insuficiente taxa de amostragem das câmeras CCD;
- e) projetar um sistema de controle em malha fechada baseado na metodologia aqui apresentada.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. In: Selected Papers of Hirotugu Akaike. [S.l.]: Springer, 1974. p. 215–222.

ASSIS, A. J. de; FILHO, R. M. Soft sensors development for on-line bioreactor state estimation. Computers & Chemical Engineering, Elsevier, v. 24, n. 2-7, p. 1099–1103, 2000.

BALDINI, G.; CAMPADELLI, P.; LANZAROTTI, R. Combustion analysis by image processing of premixed flames. ICIP, p. 708–711, 2000.

BALLESTER, J.; GARCÍA-ARMINGOL, T. Diagnostic techniques for the monitoring and control of practical flames. Progress in Energy and Combustion Science, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 375–411, 2010.

BBC. Poluição do ar causa 5,5 milhões de mortes por ano. 2016. Disponível em: http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2016/02/160213_poluicao_mortes_fn. Acesso em: 27 de maio de 2016.

BOX, G. E. P. et al. Time series analysis: forecasting and control. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2015.

BRUNEKREEF, B.; HOLGATE, S. T. Air pollution and health. The lancet, Elsevier, v. 360, n. 9341, p. 1233–1242, 2002.

CARVALHO JÚNIOR, J. A. et al. Combustão Aplicada. 1^a. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2018. ISBN 9788532808219.

CHAMBERS, J. M. Graphical methods for data analysis. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2017.

CHEN, J.; CHAN, L. L. T.; CHENG, Y.-C. Gaussian process regression based optimal design of combustion systems using flame images. Applied energy, Elsevier, v. 111, p. 153–160, 2013.

CHEN, J. et al. Design of image-based control loops for industrial combustion processes. Applied energy, Elsevier, v. 94, p. 13–21, 2012.

CHUI, D. S. Identificação de chama de forno industrial através do monitoramento por visão computacional. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. dos S. Identificação de sistemas dinâmicos lineares. Florianópolis: UFSC, 2004.

COELHO, M. C. S. Modelos de Hammerstein e Wiener: conexões com modelos NARX e sua aplicação em identificação de sistemas não-lineares. Dissertação de Mestrado. PPGEE - Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

DATA SCIENCE ACADEMY. As 10 Principais Arquiteturas de Redes Neurais. 2018. Disponível em: <http://deeplearningbook.com.br/as-10-principais-arquiteturas-de-redes-neurais/>. Acesso em: 25 de setembro de 2018.

EVANS, J. D. Straightforward statistics for the behavioral sciences. [S.l.]: Thomson Brooks/Cole Publishing Co, 1996.

FLEURY, A. T.; TRIGO, F. C.; MARTINS, F. P. R. A new approach based on computer vision and non-linear kalman filtering to monitor the nebulization quality of oil flames. Expert Systems with Applications, Elsevier, v. 40, n. 12, p. 4760–4769, 2013.

FLEURY, A. T. et al. An inference model for combustion diagnostics in an experimental oil furnace. Expert Systems, Wiley Online Library, v. 35, n. 2, p. e12245, 2018.

GONZÁLEZ-CENCERRADO, A.; GIL, A.; PEÑA, B. Characterization of pf flames under different swirl conditions based on visualization systems. Fuel, Elsevier, v. 113, p. 798–809, 2013.

GONZÁLEZ-CENCERRADO, A.; PEÑA, B.; GIL, A. Coal flame characterization by means of digital image processing in a semi-industrial scale pf swirl burner. Applied energy, Elsevier, v. 94, p. 375–384, 2012.

_____. Experimental analysis of biomass co-firing flames in a pulverized fuel swirl burner using a CCD based visualization system. Fuel Processing Technology, Elsevier, v. 130, p. 299–310, 2015.

GONZALEZ, G. D. Soft sensors for processing plants. In: IEEE. Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials. IPMM'99 (Cat. No. 99EX296). [S.l.], 1999. v. 1, p. 59–69.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. Digital Image Processing. 2^a. ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 2002.

HOAGLIN, D. C.; MOSTELLER, F.; TUKEY, J. W. Understanding robust and exploratory data analysis. New York: Wiley, 1983. v. 3.

ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. Identification of dynamic systems: an introduction with applications. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011.

JAHNE, B. Digital image processing: concepts, algorithms, and scientific applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, v. 570, 1997.

JAZWINSKI, A. H. Stochastic processes and filtering theory. Nova York: Academic press, 1970.

JIANG, F. et al. Visual flame monitoring system based on two-color method. Journal of Thermal Science, Springer, v. 18, n. 3, p. 284–288, 2009.

KEESMAN, K. J. System identification: an introduction. Londres: Springer Science & Business Media, 2011.

LIU, Y.; FAN, Y.; CHEN, J. Flame images for oxygen content prediction of combustion systems using dbn. Energy & Fuels, ACS Publications, v. 31, n. 8, p. 8776–8783, 2017.

LJUNG, L. System identification: theory for the user. 2^a. ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 1999.

_____. System identification toolbox: User's guide. Natick: The Mathworks, Inc, 2014.

LOTUFO, F. A.; GARCIA, C. Sensores virtuais ou soft sensors: Uma introdução. In: Proceedings of the 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, Presidente Prudente. Presidente Prudente: UNESP, 2008. v. 7, p. 1–9.

LU, G.; YAN, Y.; COLECHIN, M. A digital imaging based multifunctional flame monitoring system. IEEE Transactions on instrumentation and measurement, IEEE, v. 53, n. 4, p. 1152–1158, 2004.

MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. International journal of man-machine studies, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 1–13, 1975.

MARQUES FILHO, O.; VIEIRA NETO, H. Processamento digital de imagens. Rio de Janeiro: Brasport, 1999.

MAYBECK, P. S. Stochastic models, estimation, and control. Nova York: Academic press, 1982. v. 1.

OGATA, K. Discrete-time control systems. 2^a. ed. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1995.

OLIVEIRA JR, J. G.; GARCIA, C. Algorithm-aided identification using historic process data. In: SBA. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. Porto Alegre, 2017.

OTSU, N. A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, IEEE, v. 9, n. 1, p. 62–66, 1979.

PEARSON, K. Notes on Regression and Inheritance in the Case of Two Parents Proceedings of the Royal Society of London, 58, 240-242. 1895.

RIOS NETO, A.; KUGA, H. Kalman filtering state noise adaptive estimation. In: SOUZA, J. A. M. F. de (Ed.). Proceedings of Second IASTED International Conference on Telecommunication and Control, TELECON'85. Rio de Janeiro: INPE, 1985. p. 210–213.

SAÚDE TOTAL. Poluição Atmosférica: Como os principais poluentes provocam doenças. 2016. Disponível em: <http://saudetotal.org.br/artigos/meioambiente/poluicao/spdoencpol.asp>. Acesso em: 27 de maio de 2016.

SILVA NETO, G. C. Um método para solução de problemas de otimização multiobjetivo em ambiente fuzzy. Dissertação de Mestrado. PPGM - Universidade Federal do Amazonas, 2011.

SILVA NETO, G. C. et al. Fuzzy inference of oil furnace combustion state through computer vision information. In: ABCM. XVIII International Conference on Dynamic Problems in Mechanics - DINAME. Armação de Búzios - RJ - Brazil, 2019.

SIMON, D. Optimal state estimation: Kalman, H_∞ and nonlinear approaches. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2006.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. System identification. Cambridge: Prentice-Hall, Inc., 1988.

SREEDHANYA, L. et al. Temperature mapping of a rotary kiln using fuzzy logic. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, IOS Press, v. 32, n. 4, p. 3059–3067, 2017.

SUN, D. et al. Flame stability monitoring and characterization through digital imaging and spectral analysis. Measurement Science and Technology, IOP Publishing, v. 22, n. 11, p. 114007, 2011.

_____. Condition monitoring of combustion processes through flame imaging and kernel principal component analysis. Combustion Science and Technology, Taylor & Francis, v. 185, n. 9, p. 1400–1413, 2013.

TÓTH, P.; GARAMI, A.; CSORDÁS, B. Image-based deep neural network prediction of the heat output of a step-grate biomass boiler. Applied energy, Elsevier, v. 200, p. 155–169, 2017.

TURNES, S. R. Introdução à Combustão: Conceitos e Aplicações. Porto Alegre: AMGH, 2013.

WANG, J. S.; REN, X. D. GLCM based extraction of flame image texture features and KPCA-GLVQ recognition method for rotary kiln combustion working conditions. International Journal of Automation and Computing, Springer, v. 11, n. 1, p. 72–77, 2014.

WILK, M. B.; GNANADESIKAN, R. Probability plotting methods for the analysis for the analysis of data. Biometrika, Oxford University Press, v. 55, n. 1, p. 1–17, 1968.

WIRGIN, A. The inverse crime. arXiv preprint math-ph/0401050, 2004.

XU, L. et al. Dynamic characterization of pulse combustion by image series processing. IEEE Sensors Journal, n. 99, 2018. ISSN 1530-437X.

YAN, Y.; LU, G.; COLECHIN, M. Monitoring and characterisation of pulverised coal flames using digital imaging techniques. Fuel, Elsevier, v. 81, n. 5, p. 647–655, 2002.

ZADEH, L. A. A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination. AI magazine, v. 7, n. 2, p. 85, 1986.

APÊNDICE A

O objetivo aqui é o de reconstruir a parte do sinal do teor de O_2 que não foi coletada pelo analisador de gás a partir da composição química do combustível e das vazões de entrada de combustível (gás natural) e comburente (oxigênio). Para isto, inicialmente, a seguinte reação da combustão de um combustível genérico, de composição química equivalente $C_xH_yO_zN_w$, é considerada (CARVALHO JÚNIOR et al., 2018):

Nesta equação “ e ” representa o excesso de ar. Para uma combustão estequiométrica, $e = 0$ e os valores dos coeficientes a, b, c e d podem ser calculados a partir da composição química equivalente do combustível:

$$\begin{aligned} C : \quad a &= x; \\ H : \quad b &= y/2; \\ N : \quad d &= w/2; \\ O : \quad c &= (2a + b - z)/2 \end{aligned} \quad (A.2)$$

A composição química do gás natural utilizado é apresentada na Tabela 7.

Com as informações da Tabela 1, é possível mostrar que, para 1 *kmol* de combustível, sua composição química equivalente é dada por $C_{1,0856}H_{4,1264}O_{0,0096}N_{0,0256}$ (CARVALHO JÚNIOR et al., 2018). Consequentemente, os valores dos coeficientes da reação serão:

$$\begin{aligned} C : \quad a &= 1,0856; \\ H : \quad b &= 2,0632; \\ N : \quad d &= 0,0128; \\ O : \quad c &= 2,1124 \end{aligned} \quad (A.3)$$

Tabela 7: Composição química e suas respectivas frações molares e mássicas em base úmida do gás natural utilizado nos experimentos (*revisitada*).

Componente	Nome	%f.molar (bu)	%f.mássica (bu)
CH_4	Metano	89,35	80,94
C_2H_6	Etano	8,03	13,63
C_3H_8	Propano	0,78	1,94
C_4H_{10}	n-Butano	0,07	0,23
C_5H_{12}	n-Pentano	0,01	0,04
CO_2	Gás Carbônico	0,48	1,19
N_2	Nitrogênio	1,28	2,02

Fonte: Fornecido pelo IPT.

Importam-se as medidas de vazão de gás natural ($\dot{q}_{gas}$) e oxigênio ($\dot{q}_{O_2}$). Nos experimentos realizados, a vazão de entrada de gás natural foi mantida constante, com a vazão de oxigênio variando de acordo com a variação na razão de equivalência mostrada na Fig. 42. As respectivas massas específicas do combustível e comburente são: $\rho_{gas} = 0,724 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{O_2} = 1,33 \text{ kg/m}^3$. Com isso, é possível obter as vazões mássicas:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{gas} &= \rho_{gas} \cdot \dot{q}_{gas} \\ \dot{m}_{O_2} &= \rho_{O_2} \cdot \dot{q}_{O_2}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Figura 42: Variação da razão de equivalência imposta nos ensaios

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir das seguintes massas moleculares dos elementos carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio dadas por:

$$\begin{aligned} M_C &= 12,0107 \text{ kg/kmol} \\ M_H &= 1,00784 \text{ kg/kmol} \\ M_O &= 15,999 \text{ kg/kmol} \\ M_N &= 14,007 \text{ kg/kmol} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

calculam-se as vazões molares de entrada.

$$\begin{aligned} \dot{n}_{gas} &= \frac{\dot{m}_{gas}}{xM_C + yM_H + zM_O + wM_N} \\ \dot{n}_{O_2} &= \frac{\dot{m}_{O_2}}{M_{O_2}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pela reação A.1, é possível calcular o excesso de ar “ $e = e(t)$ ” em função das vazões molares do gás e do oxigênio:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{O_2} &= \dot{n}_{gas}(1 + e) \cdot c \\ \Rightarrow e(t) &= \frac{\dot{n}_{O_2}}{c \cdot \dot{n}_{gas}} - 1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Considerando as Equações A.4, A.6 e A.7, é possível então utilizar as vazões de combustível e comburente para obter a concentração e O_2 em base seca a partir da seguinte equação:

$$[O_2]_{bs}(t) = \frac{c \cdot e(t)}{a + c \cdot e(t) + d} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, aplica-se um atraso de 114 s ao sinal reconstruído, correspondente ao tempo morto constatado no analisador de gases.