DANIEL VERGA BOERI

**CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS
COMPOSTOS POR ULTRA-SOM**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

**São Paulo
2006**

DANIEL VERGA BOERI

**CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS
COMPOSTOS POR ULTRA-SOM**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecatrônica

Orientador:
Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski

**São Paulo
2006**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 12 de junho de 2006.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Boeri, Daniel Verga
Caracterização de materiais compostos por ultra-som / D.V.
Boeri. -- São Paulo, 2006.
117 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Ultra-som 2.Ensaio não-destrutivo 3.Fibra de vidro 4.Materiais anisotrópicos 5.Caracterização de materiais compostos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

*Dedico este trabalho aos meus
pais, que sempre me apoiaram
incondicionalmente.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski, pelo acompanhamento, compromisso, apoio, incentivo e paciência dados a esse trabalho.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro deste trabalho, através de bolsa de mestrado.

A TECSIS – Tecnologia e Sistemas Avançados, principalmente ao Eng. Caio, pelo fornecimento das fibras e amostras.

Ao Prof. Dr. Flávio Buiochi, pelas conversas e conselhos.

Aos meus amigos Fábio V. Boas, Daniel L. Martins e João B. da Silva pela companhia e incentivo.

Aos funcionários da oficina, em especial os técnicos Gilberto e Adilson, pela usinagem dos dispositivos experimentais e ajuda na montagem.

E por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta duas técnicas de ensaios não-destrutivos por ultra-som realizados em um tanque com água para determinar as constantes elásticas de materiais compostos de fibra de vidro/epóxi. A primeira técnica é a transmissão direta utilizando um par de transdutores. A segunda é a técnica de pulso-eco, utilizando um único transdutor. A água do tanque atua como um acoplante para transferir a energia mecânica do transdutor para a amostra. Como o transdutor não fica em contato direto com a amostra, pode-se garantir um acoplamento constante. O sistema de medição dota de um dispositivo que permite medir a velocidade da onda elástica sob diferentes ângulos de incidência, através da rotação manual da amostra. Devido ao fenômeno de conversão de modos com incidência oblíqua na interface amostra-água, ensaios por ultra-som em tanques com água fornecem as informações necessárias para o cálculo das constantes elásticas em amostras de materiais anisotrópicos, numa dada direção, a partir das medições das velocidades longitudinal e de cisalhamento. Numa dada direção de propagação em um meio anisotrópico, existem três ondas elásticas distintas: uma longitudinal e duas de cisalhamento. Se as constantes elásticas do material são conhecidas, é possível obter as três velocidades em uma dada direção bastando resolver a equação de Christoffel. Invertendo a equação de Christoffel, obtém-se as constantes elásticas a partir das velocidades medidas em uma dada direção. Os experimentos são realizados com amostras de fibra de vidro/epóxi unidirecionais e bidirecionais, utilizando transdutores com frequências de 0,5 MHz, 1 MHz e 2,25 MHz. Os resultados experimentais obtidos utilizando ambas as técnicas são comparados com um modelo denominado “Regra das Misturas” e com resultados da literatura.

ABSTRACT

In this work, two ultrasonic non destructive techniques were implemented in a water tank and used to determine the elastic constants of glass-epoxy composites samples. The first is the through-transmission technique implemented with a pair of ultrasonic transducers. The second is the back-reflection technique that uses a single transducer in pulse-eco mode. The water acts as a couplant and transfers the mechanical energy from the transducer to the sample. As the transducer is not in direct contact with the sample, we can guarantee a good coupling with the immersion technique. With the system device, it is possible to measure the velocities of the elastic waves in different angles by manually rotating the sample. Due to wave mode conversion phenomenon at the sample-water interface with oblique incidence, ultrasonic immersion testing provides information to calculate the elastic constants of the specimen by measuring longitudinal and shear wave speeds. There are three different modes of waves, one longitudinal and two shear waves, for any given direction of propagation in an anisotropic medium. If the elastic constants of a medium are known, it is possible to obtain the three wave speeds in particular propagations directions by solving the Christoffel equation. Inverting the Christoffel equation, it is possible to obtain the elastic constants from the measured wave speed in several specific directions of the anisotropic material. Measurements were carried out on unidirectional and bidirectional glass-epoxy composite samples, using transducers with central frequency of 0.5 MHz, 1 MHz, and 2.25 MHz. The experimental results obtained with both techniques are compared with a model denominated “Rule of Mixture” estimation and with the literature.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	1
1.1 Velocidade de fase e velocidade de grupo	4
1.2 Princípio das técnicas de imersão	7
1.3 Objetivos	8
1.4 Justificativa	9
1.5 Organização do trabalho	9
 CAPÍTULO 2: MATERIAIS COMPOSTOS.....	11
2.1 Materiais Compostos Laminados	13
2.2 Comportamento elástico de materiais anisotrópicos	14
2.2.1 Materiais Ortotrópicos	17
2.2.2 Materiais Transversalmente Isotrópicos	19
2.2.3 Materiais Isotrópicos	22
2.3 Comportamento mecânico de placas laminadas	22
2.3.1 Relações tensão/deformação para uma lâmina sob orientação arbitrária	23
2.3.2 Comportamento em Membrana.....	25
 CAPÍTULO 3: PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS SÓLIDOS	28
3.1 Propagação de Ondas Mecânicas em um Sólido Isotrópico	29
3.1.1 Ondas Longitudinais	33
3.1.2 Ondas de cisalhamento.....	35
3.2 Impedância Acústica	35
3.3 Fenômenos de Transmissão	36

3.3.1	Incidência Normal.....	37
3.3.2	Incidência Oblíqua	39
3.3.3	Conversão de modos	40
3.4	Propagação de ondas em materiais anisotrópicos	41
3.4.1	Equação de Christoffel.....	43
3.4.2	Modelo Inverso	46

CAPÍTULO 4: CÁLCULO DA VELOCIDADE DE FASE A PARTIR DOS DADOS EXPERIMENTAIS..... 47

4.1	Cálculo da velocidade de fase utilizando-se pulso-eco.....	55
4.1.1	Método da Auto-Referência.....	55
4.2	Correção de fase para a velocidade de fase.....	57
4.2.1	Mudança de fase na interface fluído-sólido	58
4.2.2	Distorção no sinal devido à mudança de fase	62
4.2.3	Correção de fase: simulação	63

CAPÍTULO 5: VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS..... 66

5.1	Processamento de sinais.....	68
5.2	Efeito da temperatura nos experimentos	71
5.3	Descrição das amostras	73
5.4	Reconstrução das constantes elásticas	74
5.5	Estabilidade do algoritmo	76
5.5.1	Efeitos do erro aleatório e do vetor de partida nos resultados	77

CAPÍTULO 6: RESULTADOS..... 82

6.1	Cálculo da velocidade.	82
6.2	Ângulo de propagação na amostra	86
6.3	Estimativa das constastes elásticas.....	90
6.3.1	Regra das misturas	90
6.4	Resultados das propriedades mecânicas.....	92
6.4.1	Resultados da Amostra 01.....	92
6.4.2	Resultados da Amostra 02.....	93

6.4.3	Resultados da Amostra 03.....	94
6.4.4	Resultados da Amostra 04.....	97
6.4.5	Resultados da Amostra 05.....	98
6.5	Análise dos erros	99
 CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES.....		104
7.1	Propostas de trabalhos futuros.	106
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		107
 ANEXO A		114
 ANEXO B.....		117
 ANEXO C		119

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1: Modulação da amplitude da onda de grupo.....	5
Fig. 1.2: Ilustração da vel. e âng. de fase e da vel. e âng. de grupo.....	7
Fig. 1.3: Esquema de montagem da técnica de transmissão direta.....	8
Fig. 1.4: Esquema de montagem da técnica de pulso-eco.....	8
Fig. 2.1: Tecido unidirecional.....	12
Fig. 2.2: Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal.....	15
Fig. 2.3: Material Ortotrópico com isotropia transversal.....	20
Fig. 3.1: Reflexão e transmissão de uma onda acústica numa interface entre dois meios.....	37
Fig. 3.2: Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface líquido-sólido.....	39
Fig. 3.3: Desvio entre as velocidades de fase e de grupo quando o plano de incidência da onda coincide com um plano de simetria do material.....	42
Fig. 4.1: Velocidade em meios anisotrópicos. O transdutor receptor deve ser posicionado no centro do feixe refratado para obter amplitude máxima.....	48
Fig. 4.2: Ilustração do desvio entre as velocidades de grupo e de fase para um plano de incidência rotacionado por um ângulo θ a partir do eixo 3.....	49
Fig. 4.3: Ilustração da dif. de caminho acústico para as velocidades V_p e V_g ; ψ indica o desvio entre os vetores das velocidades.....	50
Fig. 4.4: Esquema do posicionamento dos transdutores.....	53
Fig. 4.5: Efeito das propriedades do material na mudança de fase numa interface água-sólido.....	61
Fig. 4.6: Simulação da distorção do sinal no domínio do tempo devido a mudança de fase.....	63

Fig. 4.7: Comparação do tempo de propagação calculado com e sem correção de fase para alumínio.	64
Fig. 4.8: Comparação do tempo de propagação calculado com e sem correção de fase para um composto de fibra de carbono/epóxi.....	65
Fig. 5.1: Diagrama do sistema de aquisição.....	67
Fig. 5.2: Tanque de ensaios. (a) Montagem pulso-eco. (b) Montagem transmissão direta.....	67
Fig. 5.3: técnica de correlação cruzada. (a) sinal de referência (água). (b) sinal com a amostra. (c) correlação cruzada de (a) e (b).....	70
Fig. 5.4: Velocidade de Fase versus ângulo de refração para o composto SiC/Si ₃ N ₄ com ruído aleatório de 2%. (a) Para o plano 1-3 e (b) para o plano 1-2.....	78
Fig. 6.1: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 01 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.	83
Fig. 6.2: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 04 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.	84
Fig. 6.3: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 05 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.	85
Fig. 6.4: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 01 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.....	86
Fig. 6.5: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 04 utilizando a técnica de pulso-eco. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3	88
Fig. 6.6: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 05 utilizando a técnica de pulso-eco. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3	89

Fig. 6.7: Comparação entre as velocidades experimentais e as calculadas pelo método de otimização por mínimos quadrados nas amostras unidirecionais. (a) Amostra 01. (b) Amostra 02. (c) Amostra 03	101
Fig. 6.8: Comparação entre as velocidades experimentais e as calculadas pelo método de otimização por mínimos quadrados. (a) Amostra 04 [0/90°]. (b) Amostra 05 [±45°].....	103
Fig. A.1: Sistema de coordenadas para materiais compostos unidirecionais.....	115
Fig. C.1: Amostra 01	119
Fig. C.2: Amostra 02.....	120
Fig. C.3: Amostra 03.....	120
Fig. C.4: Amostra 04.....	121
Fig. C.5: Amostra 05.....	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Tensor versus Notação Reduzida para tensões e deformações	16
Tabela 5.1: Erro experimental na velocidade de fase devido à variações no tempo de propagação causado por flutuações na temperatura para (a) velocidade longitudinal e (b) velocidade transversal	72
Tabela 5.2: Propriedades das amostras	73
Tabela 5.3: Resultados das constantes elásticas usando velocidades simuladas em um plano de simetria do material com e sem erros randômicos	77
Tabela 5.4: Resultados das constantes elásticas usando velocidades simuladas em um plano de simetria do material com e sem erros aleatórios	79
Tabela 6.1: Propriedades dos materiais.....	91
Tabela 6.2: Resultados da amostra 01.....	93
Tabela 6.3: Propriedades mecânicas da amostra 01 comparadas com a regra das misturas	93
Tabela 6.4: Resultados da amostra 02.....	94
Tabela 6.5: Propriedades mecânicas da amostra 02 comparadas com a regra das misturas	94
Tabela 6.6: Resultados da amostra 03.....	95
Tabela 6.7: Comparação dos resultados da Tabela 6.6 com o modelo de correção de fase	95
Tabela 6.8: Propriedades mecânicas da amostra 03 comparadas com a regra das misturas	96
Tabela 6.9: Comparação dos resultados da Tabela 6.8 com o modelo de correção de fase	96
Tabela 6.10: Resultados da amostra 04.....	97
Tabela 6.11: Propriedades mecânicas da amostra 04 comparadas com trabalhos da literatura	98

Tabela 6.12: Resultados da amostra 05.....	99
Tabela 6.13: Propriedades mecânicas da amostra 05 comparadas com trabalhos da literatura e com o modelo denominado comportamento em membrana.....	99
Tabela 6.14: Comparação entre a média e o desvio padrão das velocidades obtidas no plano 1-2 das amostras unidirecionais	100

LISTA DE ABREVIATURAS

eq.	Equação
Fig.	Figura
GPa	Giga Pascal
mm	milímetros
μs	micro segundo
ns	nano segundo
SRM	<i>Self-reference method</i>
AFZ	Ângulo de fase zero
°C	Graus Celsius

LISTA DE SÍMBOLOS

u	Deslocamento da partícula
A	Amplitude da onda
k	Número de onda
x	Distância a partir da origem
ω	Frequência angular
t	tempo
λ	Comprimento de onda
f	Frequência sonora
V_p	Velocidade de fase
V_g	Velocidade de grupo
ϕ	Ângulo de grupo ou de Ray
φ	Ângulo de fase
ψ	diferença entre o ângulo de grupo e de fase
θ_i	Ângulo de incidência
θ_r	Ângulo de refração
ρ	Densidade
σ_{ij}	Tensor de tensão
C_{ijkl}	Tensor de rigidez elástica do material
s_{ijkl}	Tensor de flexibilidade do material
S_{kl}	Tensor de deformação
E_i	Módulo de elasticidade
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
G_{ij}	Módulo de cisalhamento
Q_{ij}	Matriz de rigidez para o estado plano de tensão
λ e μ	Constantes de Lamé

Δ	Variação no volume do material
δ_{ik}	Delta de Kronecker
∇^2	Operador escalar
ϕ_p	Potencial escalar
ψ_p	Vetor potencial
ϵ_{ijk}	Matriz de permutação
∇	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergente
w_{ij}	Rotação infinitesimal
V_l	Velocidade longitudinal da onda
V_s	Velocidade de cisalhamento da onda
Z	Impedância acústica
c	Velocidade de propagação no meio
T	Coeficiente de Transmissão
R	Coeficiente de Reflexão
P_t	Amplitude da onda transmitida
P_i	Amplitude da onda incidente
P_r	Amplitude da onda refletida
p_i	Onda acústica incidente
p_t	Onda transmitida
p_r	Onda refletida
v_i	Velocidade das partículas da onda incidente
v_r	Velocidade das partículas da onda refletida
v_t	Velocidade das partículas da onda transmitida
θ_{cr}	Ângulo crítico
A	Amplitude de deslocamento
Γ_{il}	Tensor de Christoffel
n_i	Co-senos diretores
V_{qs}	Velocidade de cisalhamento com polarização vertical
V_{sh}	Velocidade de cisalhamento com polarização horizontal
ψ	Diferença entre os vetores da velocidade de fase e de grupo

t_p	Tempo de propagação da velocidade de fase
t_g	Tempo de propagação da velocidade de grupo
h	Espessura da amostra
V_0	Velocidade de propagação no fluído
$(\delta t)_s$	Diferença de tempo entre as velocidades de grupo e de fase
Δt_0	Diferença de tempo no fluído
Δt	Diferença de tempo
V_n	Velocidade de propagação na amostra sob incidência normal
Δt_{θ_i}	Diferença de tempo para a técnica pulso-eco SRM
θ_{cr}^{II}	Ângulo crítico da onda de cisalhamento
ρ_0	Densidade do fluído
ζ	Mudança de fase no sólido
θ_i	Ângulo de refração da onda de cisalhamento
ζ^{II}	Mudança de fase no sólido para o segundo ângulo crítico
f_0	Frequência central do transdutor
B_w	Largura de banda do transdutor
$\Delta t_{\theta_i}^P$	Atraso no sinal correspondente a mudança de fase do sinal
k_I	Número de interfaces fluído-sólido, sólido-fluído que o sinal atravessa
Δt_{corr}	Diferença de tempo corrigida pela mudança de fase do sinal
$r_{xy}(\Delta t)$	Correlação cruzada de dois sinais
ζ_t	Variação no tempo devido a flutuações na temperatura da água
l	Número de constantes elásticas e serem obtidas
m	Número de velocidades obtidas experimentalmente
E_{3f}	Módulo de elasticidade longitudinal da fibra de vidro
E_m	Módulo de elasticidade da resina epóxi
V_f	Fração volumétrica de fibra no composto
V_m	Fração volumétrica de resina no composto

ν_{23f}	Coeficiente de Poisson longitudinal da fibra de vidro
ν_m	Coeficiente de Poisson da resina epóxi
E_{2f}	Módulo de elasticidade transversal da fibra de vidro
G_{23f}	Módulo de elasticidade transversal da fibra de vidro

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a tecnologia de materiais compostos sofreu um grande desenvolvimento, embora seu conceito seja antigo. Por se tratarem de materiais anisotrópicos, como compostos de fibra e resina por exemplo, a determinação das propriedades mecânicas tem-se mostrado um ponto crítico para garantir o desempenho desses materiais. Isto porque o conhecimento da matriz de rigidez elástica é essencial para modelar e garantir o comportamento mecânico desses materiais sob condições elásticas. Entre as técnicas convencionais usadas para a obtenção das propriedades elásticas desses materiais, os mais utilizados são os ensaios mecânicos (BUNKER, 2001). Mas estes apresentam desvantagens, tais como: (a) algumas constantes dos materiais anisotrópicos são de difícil obtenção, (b) são destrutivos em sua natureza, (c) custos altos envolvidos na produção e preparação de amostras, entre outros. Utilizando-se técnicas de ensaios não-destrutivos por ultra-som em materiais compostos (HU, 1997); (MOURITZ et al., 2000); (HUANG et al., 2001); (CILIBERTO et al., 2002); (OKABE; TAKEDA, 2002), determinam-se as constantes elásticas do material através das velocidades de propagação das ondas elásticas que se propagam no material.

Um material anisotrópico é descrito por 21 constantes elásticas independentes. Com considerações de simetria, o número de constantes elásticas no material é reduzido para nove (material ortotrópico) ou até mesmo cinco (material transversalmente isotrópico). A determinação das constantes elásticas da matriz de rigidez de materiais compostos é feita a partir da medição das velocidades de propagação das ondas elásticas em diferentes orientações de propagação, pois estas estão matematicamente relacionadas com as constantes elásticas e a densidade do material através da equação de Christoffel (ROSENBAUM, 1988); (AULD, 1990). Portanto, se as constantes elásticas são conhecidas, basta resolver a equação de Christoffel para se obter as velocidades das ondas elásticas numa direção qualquer. O inverso também é válido: conhecendo-se as velocidades das ondas elásticas, obtêm-se as constantes elásticas com a solução do problema inverso. Geralmente, o problema inverso em propagação de ondas é não-linear, dificultando a obtenção dos

resultados. Além disso, limitações práticas na obtenção dos dados experimentais devido às técnicas usadas aumentam o grau de dificuldade no problema inverso.

Métodos não-destrutivos para determinar as constantes elásticas de materiais compostos por ultra-som datam da década de setenta, embora seu uso ainda seja limitado na indústria. Alguns pesquisadores indicam procedimentos para determinar estas propriedades medindo-se as velocidades de propagação da onda nos modos longitudinal e transversal no composto utilizando técnicas de imersão (MARKHAM, 1970); (ZIMMER; COST, 1970); (SMITH, 1972). Zimmer e Cost (1970), por exemplo, realizaram um dos primeiros estudos na área, medindo as velocidades de propagação usando técnicas de transmissão direta para obter dinamicamente as constantes elásticas de compostos unidirecionais de fibra de carbono. Esses autores demonstraram a validade das técnicas de medição das velocidades das ondas elásticas para se obter a rigidez mecânica em compostos de fibras unidirecionais.

Rokhlin e Wang (1989) apresentam um estudo bem elaborado na aplicação do ângulo crítico para determinar as constantes elásticas de materiais compostos de fibra de carbono. Utilizando um goniômetro com técnicas de ensaios por imersão em água, mostraram como é possível utilizar um transdutor de ondas longitudinais para excitar ondas de cisalhamento no material. Com isso, dada uma direção de propagação relativa ao plano de incidência do material, existem três ângulos críticos, um para a onda longitudinal e os outros dois para as ondas transversais polarizadas horizontalmente e verticalmente. Wooh e Daniel (1991) mediram as constantes elásticas de materiais de fibra de carbono utilizando o método de transmissão direta. Descrevem também um método baseado na frequência de ressonância para medir a velocidade de fase a partir da velocidade de grupo.

Para obter as constantes elásticas de materiais anisotrópicos, a equação de Christoffel está relacionada com a velocidade de fase e a densidade do material. Porém, em ensaios não-destrutivos o que se mede é a velocidade de grupo. Baseando-se neste fato, Rokhlin e Wang (1992) descrevem um método em que é possível obter a velocidade de fase diretamente utilizando-se relações trigonométricas entre as velocidades, melhorando assim os resultados. Mostram ainda como extrair as constantes elásticas a partir das velocidades de fase obtidas experimentalmente utilizando um procedimento de otimização não-linear baseado

em mínimos quadrados, minimizando assim os desvios entre os valores experimentais e a equação de Christoffel. No mesmo período, Chu e Rokhlin (1992) desenvolveram uma alternativa para o método de Rokhlin e Wang (1989), que se mostra mais precisa para obter as velocidades de fase em amostras que não possuem superfícies perfeitamente planas. Alguns erros provenientes dos ensaios experimentais, como temperatura da água e paralelismo das superfícies das amostras, foram mais bem estudados por Chu e Rokhlin (1994b). Outro erro experimental em materiais compostos, porém pouco abordado na literatura, é o efeito de difração dos transdutores (HOLLMAN; FORTUNKO, 1998); (RUIZ; NAGY, 2002); (WANG et al., 2003).

A determinação das constantes elásticas a partir das velocidades das ondas elásticas em planos de simetria foi também estudada por Chu e Rokhlin (1994a). Aplicando um conceito intitulado de fator de polarização, os autores definem o grau de anisotropia do material e realizam análises de sensibilidade das constantes elásticas em relação às velocidades de propagação. Dessa forma, concluem que utilizando as velocidades longitudinais e transversais em dois planos acessíveis de simetria, podem-se obter cinco constantes elásticas independentes de materiais transversalmente isotrópicos e sete das nove constantes elásticas de materiais ortotrópicos. Outros autores realizaram trabalhos similares (EVERY; SACHSE, 1991); (DITRI, 1994); (SEINER; LANDA, 2004).

Chu et al. (1994) relatam a análise da reconstrução das constantes elásticas a partir de dados experimentais em planos não simétricos de materiais compostos unidirecionais. Os autores identificaram que, quando as nove constantes elásticas de materiais ortotrópicos são reconstruídas a partir de planos não simétricos, a inversão da equação de Christoffel é muito dependente do vetor de partida e muito suscetível a ruídos aleatórios. Quando sete constantes elásticas são obtidas a partir de dois planos de simetria (NEWELL et al., 1997), as duas constantes remanescentes podem ser encontradas nos planos não simétricos, independentemente do vetor de partida e menos suscetível a ruídos. Chu e Rokhlin (1994c), apresentam uma boa descrição de como obter as constantes elásticas de materiais compostos em planos não simétricos.

Balasubramaniam e Whitney (1996) utilizam um sistema de imersão convencional para obter experimentalmente o módulo de elasticidade de amostras

com espessura de 10 mm consideradas transversalmente isotrópicas. Mediram experimentalmente a velocidade de grupo em função do ângulo de grupo, para assim obter as velocidades e ângulos de fase e finalmente extrair as constantes elásticas do material. Este método, além de muito trabalhoso, tem ainda a desvantagem de ser menos preciso que outros métodos (ROKHLIN; WANG, 1989); (ROKHLIN; WANG, 1992); (REDDY et al., 2005). Reddy et al. (2005), fazem uma comparação entre duas técnicas de imersão para medir as constantes elásticas de materiais de fibras de vidro e de carbono. Estas técnicas (transmissão direta e pulso-eco), foram comparadas a partir de dados experimentais e dados fornecidos pelos fabricantes das amostras, verificando assim a precisão de cada método e suas respectivas vantagens e desvantagens.

1.1 Velocidades de fase e de grupo

Qualquer movimento harmônico que se repita a intervalos regulares, como exemplo o deslocamento de uma partícula u , pode ser representado por (HALLIDAY et al., 1996)

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (1.1)$$

onde A representa a amplitude deslocamento, $k = 2\pi / \lambda$ é chamado número de onda ao longo da direção x , ω a frequência angular, t o intervalo de tempo e λ o comprimento de onda.

A partir da Eq. (1.1), obtém-se a velocidade de fase da onda. Supondo um ponto que viaje em fase constante com a mesma, têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(kx - \omega t) &= \text{constante} \\ \therefore \frac{dx}{dt} &= \frac{\omega}{k} = V_p \end{aligned} \quad (1.2)$$

A velocidade de propagação $V_p = \omega / k$, de uma onda harmônica de número de onda k e frequência $f = \omega / 2\pi$, é chamada velocidade de fase. Para discutir o que se entende por velocidade de grupo, considere o exemplo da onda constituída pela superposição de duas ondas harmônicas de mesma amplitude A , mas com frequências angulares $\omega' \rightarrow \omega$:

$$u(x,t) = A[\sin(k'x - \omega't) + \sin(kx - \omega t)] \quad (1.3)$$

que, por identidade trigonométrica,

$$u(x,t) = 2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \frac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t] \quad (1.4)$$

Como $\omega' \rightarrow \omega$, pode-se aproximar $\omega' + \omega = 2\omega$ e $k' + k = 2k$, então:

$$u(x,t) = 2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin(kx - \omega t) \quad (1.5)$$

Esta expressão representa um movimento ondulatório dado pela Eq. (1.5) (Fig. 1.1, linha contínua) com amplitude modulada dada por $2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]$ (Fig. 1.1, linha tracejada). O movimento ondulatório descrito por $u(x,t)$ é como uma seqüência de pulsos.

Fig. 1.1: Modulação da amplitude da onda de grupo.

A amplitude modulada corresponde a um movimento ondulatório que se propaga com a assim chamada velocidade de grupo:

$$V_g = (\omega' - \omega) / (k' - k) \quad (1.6)$$

Se a velocidade de propagação for independente da frequência, dizemos que o meio pelo qual se propagam as ondas é não dispersivo. Então, todas as ondas que compõem o pulso se deslocam com a mesma velocidade e a velocidade do pulso, chamada de velocidade de grupo, é a mesma que a velocidade de cada onda componente, chamada de velocidade de fase. Num meio dispersivo, cada onda que compõe o pulso se desloca com uma velocidade diferente e a velocidade do pulso não é igual à velocidade de fase, podendo ser maior ou menor que ela. Dessa forma, o pulso viaja na velocidade de grupo.

Em meios anisotrópicos, de acordo com Kangan (1998), frentes de ondas propagando-se a partir de um ponto não são esféricas, devido à dependência da velocidade em relação à direção de propagação. A Fig. 1.2 mostra duas frentes de onda no espaço separadas por uma unidade de tempo. A velocidade de grupo, V_g , é a velocidade com a qual a energia se propaga a partir da fonte, enquanto que a velocidade de fase, V_p , é a velocidade com a qual a frente de onda se propaga a partir de um ponto local. Na Fig. 1.2, ϕ é o ângulo de grupo, e especifica a direção do feixe a partir da fonte. φ é o ângulo de fase e especifica a direção do vetor normal à frente de onda. Como a frente de onda não é esférica, o ângulo de fase, em geral, é diferente do ângulo de grupo em qualquer ponto.

Fig. 1.2: Ilustração da velocidade V_p e ângulo de fase φ e da velocidade V_g e ângulo de grupo ϕ (KANGAN, 1998).

1.2 Princípio das técnicas de imersão

No presente trabalho, as velocidades de propagação são medidas em diferentes ângulos de propagação na amostra para determinar as constantes elásticas do material. Em técnicas de imersão, a amostra é imersa em água durante o teste. A água atua como um acoplante para transferir a energia mecânica do transdutor para a amostra e vice-versa. Como o transdutor não fica em contato direto com a amostra, pode-se garantir um acoplamento constante e a possibilidade de se medir as velocidades em diferentes ângulos, simplesmente rotacionando a amostra.

A montagem do experimento foi feita de modo que a amostra é presa a um dispositivo de goniômetro manual que permite girá-la em diferentes ângulos. As duas técnicas utilizadas são: transmissão direta e pulso-eco. Na transmissão direta, um transdutor é o emissor e o outro é o receptor. A amostra é fixa entre eles, tendo somente um grau de liberdade de rotação, permitindo assim diferentes orientações para a propagação de ondas, como mostrado na Fig. 1.3. Na pulso-eco, há somente um transdutor, que atua como emissor e receptor (Fig. 1.4).

Fig. 1.3: Esquema de montagem da técnica de transmissão direta.

Fig. 1.4: Esquema de montagem da técnica de pulso-eco.

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo determinar as constantes elásticas de materiais compostos de fibra de vidro/epóxi através de técnicas de ensaios não-destrutivos por ultra-som. Para tal, utilizaram-se técnicas de ensaios por imersão em água, a fim de obter as velocidades de propagação das ondas elásticas em determinadas direções. Tendo-se as velocidades e utilizando-se uma técnica de otimização por mínimos quadrados, calculam-se as constantes elásticas de materiais compostos de fibra utilizando a equação de Christoffel. Os ensaios são realizados em materiais ortotrópicos e transversalmente isotrópicos.

1.4 Justificativa

Os materiais compostos têm sido cada vez mais utilizados em projetos avançados de Engenharia devido ao domínio das técnicas de fabricação e inspeção. Nas duas últimas décadas houve um grande avanço na aplicação de compostos de fibra de vidro, carbono e aramida, e em resinas, principalmente epóxi e poliéster.

Um ponto fundamental na aplicação desses materiais está na obtenção das propriedades elásticas, que estão muito relacionadas ao processo de fabricação. Utilizam-se testes mecânicos para a obtenção dessas propriedades. A grande desvantagem desses métodos está seu caráter destrutivo, pois as amostras necessitam ser cortadas em diferentes direções, dificultando assim algumas medidas nas direções de cisalhamento e em direções fora dos eixos principais.

A mais promissora técnica de ensaios não-destrutivos para se obter as constantes elásticas dos materiais compostos consiste em medir as velocidades de propagação das ondas elásticas diferentes direções do material composto, utilizando técnicas de ultra-som e calcular as propriedades elásticas a partir dos valores dessas velocidades de propagação.

1.5 Organização do trabalho

A dissertação está dividida em sete capítulos, como mostrado abaixo, com os seus respectivos conteúdos de forma resumida.

No **capítulo 1 (Introdução)** é dada uma introdução sobre as técnicas utilizadas e apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos publicados na literatura.

O **capítulo 2 (Materiais Compostos)** descreve de forma generalizada os materiais compostos e suas designações. Apresentam-se também, seus respectivos comportamentos elásticos e uma introdução a materiais laminados.

O **capítulo 3 (Propagação de Ondas em Meios Sólidos)** trata da propagação de ondas mecânicas em meios sólidos. É apresentada uma revisão da propagação de ondas em meios isotrópicos para introduzir fenômenos de transmissão. Em seguida descreve a propagação de ondas em meios anisotrópicos, utilizando a equação de

Christoffel. Além disso, mostra como obter a matriz de rigidez através da densidade e da velocidade de propagação no material.

O **capítulo 4 (Cálculo da Velocidade de Fase a Partir dos Dados Experimentais)** descreve como obter a velocidade de fase a partir dos experimentos utilizando as técnicas de transmissão direta e pulso-eco. Para tal, é mostrada a dedução da equação utilizada para cada método. Apresenta ainda um método para corrigir os efeitos da mudança de fase que ocorre quando o sinal muda de uma interface líquida para uma sólida ou vice-versa.

O **capítulo 5 (Verificações Experimentais)** descreve os equipamentos utilizados, a técnica de processamento de sinais utilizada, o efeito da variação da temperatura da água nos resultados e a descrição das amostras. Além disso, descreve como obter as constantes elásticas do material a partir das velocidades de fase experimentais e em seguida faz um estudo da estabilidade do algoritmo utilizado.

O **capítulo 6 (Resultados)** mostra como a velocidade de propagação da onda varia conforme o ângulo de incidência nas amostras. Descreve o modelo da Regra das Misturas utilizada para comparar os resultados de algumas amostras e apresenta os resultados experimentais obtidos.

O **capítulo 7 (Conclusões e Observações)** apresenta as conclusões finais, incluindo uma discussão sobre os resultados obtidos, bem como, das técnicas utilizadas. Discutem-se também novas propostas de continuação desta pesquisa, utilizando-se um novo dispositivo experimental.

CAPÍTULO 2: MATERIAIS COMPOSTOS

Os materiais compostos podem ser considerados como um grande avanço tecnológico. O interesse nesses materiais está ligado a dois fatores: econômico e desempenho. O fator econômico vem do fato do material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica numa estrutura mais leve. O fator desempenho está ligado à busca de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito às características mecânicas, tais como resistência à ruptura, resistência à ambientes agressivos, etc. O caráter anisotrópico dos materiais compostos é o fator primordial para a obtenção das propriedades mecânicas requeridas pelo componente. O princípio do desempenho estrutural superior dos materiais compostos enquadra-se na alta resistência específica, razão entre resistência e densidade e na alta rigidez específica, razão entre rigidez e densidade, e em características anisotrópicas e heterogêneas do material. Estas últimas fornecem ao material composto a possibilidade de configuração ótima do material, através do direcionamento controlado das fibras, por exemplo.

Segundo Daniel e Ishai (1994) um material composto é um sistema constituído de duas ou mais fases em escala macroscópica, em que as propriedades mecânicas são projetadas para serem superiores aos materiais constituintes agindo de forma independente. Uma dessas fases é usualmente descontínua, resistente e rígida, chamada de reforço, enquanto que a fase contínua, menos rígida e mais fraca, é chamada de matriz. Neste trabalho, o reforço utilizado é fibra de vidro e a matriz, uma resina epóxi.

A fibra é o elemento constituinte que confere ao material composto suas características mecânicas: rigidez, resistência à ruptura, etc. As fibras podem ser curtas (alguns centímetros), que são injetadas no momento da moldagem da peça, ou longas, que são cortadas após a fabricação da peça.

As fibras podem ser definidas como sendo unidirecionais, quando orientadas segundo uma mesma direção, Fig. 2.1; bidimensionais, com as fibras orientadas segundo duas direções ortogonais (tecidos), ou com as fibras orientadas aleatoriamente (esteiras); e tridimensionais, quando as fibras são orientadas no

espaço tridimensional (tecidos multidimensionais). Uma pequena quantidade de fibra ou outro material pode correr em outra direção para manter as fibras primárias juntas, como mostra a Fig. 2.1. A geometria e a composição física de uma fibra são muito importantes na avaliação de sua resistência e devem ser consideradas em aplicações estruturais. De forma geral, uma fibra tem propriedades mecânicas melhores que a do material na forma bruta, devido à estrutura mais perfeita da fibra. Nas fibras, os cristais são alinhados ao longo do eixo central. Além disso, há menos defeitos internos nas fibras do que no material bruto.

Fig. 2.1: Tecido unidirecional.

Naturalmente, as fibras são de pouco uso a menos que sejam ligadas para tomar forma de um elemento estrutural que possa suportar cargas. O material de união é chamado geralmente de matriz mecânica. A finalidade da matriz é múltipla: sustentação das fibras, proteção das fibras, transferência de tensões entre fibras quebradas, etc. Tipicamente, a matriz tem densidade, rigidez, e resistência mais baixas do que as fibras. Como exemplo, a matriz de epóxi utilizada neste trabalho tem uma densidade de 1.200 Kg/m^3 , módulo de elasticidade de $4,8 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson de $0,35$. Entretanto, a combinação das fibras e uma matriz podem ter a resistência e a rigidez muito elevada, mantendo ainda a densidade baixa.

As propriedades de um material composto dependem das propriedades dos constituintes, da geometria e distribuição das fases. Um dos parâmetros mais importantes é a fração de volume ou massa do reforço. A distribuição do reforço determina a homogeneidade ou uniformidade do material. Quanto menos uniforme é

a distribuição do reforço, maior será a heterogeneidade e maior será a probabilidade de falha nas áreas mais fracas do material. A geometria e orientação do reforço afetam a anisotropia do sistema.

As fases do sistema têm diferentes funções que dependem do tipo e aplicação do material composto. No caso de baixo a médio desempenho dos materiais compostos, o reforço, usualmente na forma de manta ou partículas, fornece pouca rigidez e somente resistência local no material. A matriz, por outro lado, é o principal agente que governa as propriedades mecânicas do material. No caso de materiais compostos de alto desempenho, o reforço é a espinha dorsal do material que determina sua rigidez e resistência na direção das fibras. A matriz nesse caso fornece proteção e suporte para as fibras e transferência de carga entre uma fibra e outra.

2.1 Materiais Compostos Laminados

Materiais compostos laminados consistem em camadas de pelo menos dois materiais diferentes que são conectados. A laminação é usada para combinar os melhores aspectos das camadas constituintes e do material de ligação a fim de se conseguir um material mais leve, mais resistente e de fácil manipulação.

Um laminado é uma pilha de fibras com várias orientações aleatórias ou não do material principal. As camadas de um laminado são geralmente ligadas pelo mesmo material da matriz que é usada na lâmina. Isto é, uma parte da matriz é impregnada na lâmina e a outra parte é usada para ligar a lâmina com as lâminas adjacentes. Laminados podem ser compostos de placas de materiais ou, no contexto atual, de camadas de fibras.

Uma lâmina é um arranjo plano de fibras ou tecidos unidirecionais em uma matriz. Assume-se geralmente uma lamina como sendo ortotrópica, e sua espessura depende do material de que é feita. Por exemplo, uma lamina de fibra de vidro/epóxi possui 0,5 mm de espessura. As fibras agem como o agente reforçador e são resistentes e rígidas. A função da matriz está na sustentação e proteção das fibras e para fornecer meios de distribuição da carga entre as fibras.

A finalidade principal da laminação é fazer sob medida a dependência direcional da resistência e rigidez de um material composto para adequar o

carregamento ao elemento estrutural (CHAWLA, 1987). Nos laminados, a direção principal de cada camada pode ser orientada de acordo com a necessidade.

Laminados são designados de modo a indicar o número, tipo, orientação e seqüência de empilhamento das camadas. Além disso, indicam a exata localização ou seqüência das várias camadas de empilhamento. A seguir têm-se alguns exemplos de designação (DANIEL; ISHAI, 1994):

- Unidirecional 6 camadas: $[0/0/0/0/0/0] = [0_6]$
- Bidirecional simétrico: $[0/90/90/0] = [0/90]_s$
- Simetria angular: $[45/-45/-45/45] = [\pm 45]_s$
- Assimetria angular: $[30/-30/30/-30/30/-30] = [\pm 30]_3$
- Multi direcional: $[0/45/-45/-45/45/0] = [0/\pm 45]_s$

2.2 Comportamento elástico de materiais anisotrópicos

O estado de tensão em um elemento infinitesimal pode ser representado por nove componentes de tensão σ_{ij} (grandeza tensorial de segunda ordem) atuando nas faces de um elemento de volume infinitesimal com os lados paralelos ao eixos 1, 2, 3 de um sistema de coordenadas. A tensão σ_{ij} pode ser definida com auxílio da Fig. 2.2.

Fig. 2.2: Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal.

Na Fig. 2.2, as tensões σ_{11} , σ_{22} , e σ_{33} são aplicadas na direção normal à face do elemento, sendo assim chamadas de tensões longitudinais, enquanto que as demais tensões são chamadas de tensão de cisalhamento. O tensor das tensões pode ser representado na forma matricial (CHUNG, 1996):

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O elemento de volume da Fig. 2.2, por estar em equilíbrio, implica que a soma dos momentos que agem sobre o corpo precisam ser igual a zero, ou seja:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}; \sigma_{31} = \sigma_{13}; \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (2.2)$$

Para pequenos deslocamentos, a relação entre a deformação e a tensão é dada pela lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

ou

$$S_{ij} = s_{ijkl} S_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

onde C_{ijkl} são as constantes elásticas de rigidez do material, s_{ijkl} as constantes de flexibilidade e S_{kl} as deformações. Na eqs. (2.3) e (2.4) há 6 constantes independentes no tensor de tensão, e mais 6 no tensor de deformação. No tensor de rigidez elástica há $3^4 = 81$ constantes, entretanto, o tensor de rigidez elástica é simétrico. A simetria dos tensores de tensão e deformação

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$S_{ij} = S_{ji}$$

reduz o número de constantes elásticas para 36.

Utilizando-se uma notação reduzida para os tensores de tensão e deformação, de acordo com a Tabela 2.1, tem-se:

$$\sigma_i = C_{ij} S_j \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 6) \quad (2.5)$$

ou

$$S_i = s_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 6) \quad (2.6)$$

Tabela 2.1: Tensor versus Notação Reduzida para tensões e deformações (JONES, 1999)

Tensões		Deformações	
<i>Notação Tensorial</i>	<i>Notação Reduzida</i>	<i>Notação Tensorial</i>	<i>Notação Reduzida</i>
σ_{11}	σ_1	S_{11}	S_1
σ_{22}	σ_2	S_{22}	S_2
σ_{33}	σ_3	S_{33}	S_3
σ_{23}	σ_4	S_{23}	S_4
σ_{31}	σ_5	S_{31}	S_5
σ_{12}	σ_6	S_{12}	S_6

Mas $C_{ij} = C_{ji}$ e $s_{ij} = s_{ji}$, i.e., a matriz de rigidez é simétrica. Portanto o estado de tensão ou deformação em um elemento infinitesimal poder ser descrito por seis componentes de tensão ou deslocamento, onde a relação tensão-deformação pode ser expressa em termos de 21 constantes de rigidez:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2.1 Materiais Ortotrópicos

No caso de um material ortotrópico, há três planos de simetria mutuamente perpendiculares o que reduz o número de constantes elásticas para nove, pois vários termos de rigidez estão relacionados. Isto é visto quando o sistema de referência das coordenadas é paralelo ao plano principal de simetria do material, i.e., no caso de um material ortotrópico. Logo as relações tensão-deformação para um material ortotrópico reduzem-se a (NYE, 1993):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Três importantes observações podem ser feitas com respeito à relação tensão-deformação na Eq. (2.8):

1. Não existe interação entre as tensões normais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e as deformações cisalhantes S_{23}, S_{31}, S_{12} ; i.e., tensões cisalhantes atuando ao longo da direção principal do material produzem somente deformações normais as faces.
2. Não há interação entre as tensões cisalhantes S_{23}, S_{31}, S_{12} e as deformações normais S_1, S_2, S_3 ; i.e., uma tensão cisalhante atuando no plano principal do material produz somente deformações cisalhantes.
3. Não há interação entre tensões cisalhantes e deformações cisalhantes em planos diferentes; i.e., uma tensão cisalhante atuando no plano principal produz uma deformação cisalhante somente neste plano.

A lei de comportamento que relaciona tensão/deformação em materiais ortotrópicos pela matriz de flexibilidade s_{ijkl} , dentro do sistema de eixos de ortotropia (1, 2, 3), contém nove constantes elásticas independentes, e é expressa da seguinte maneira (PEREIRA, 2002):

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -v_{21}/E_2 & -v_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_1 & 1/E_2 & -v_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_1 & -v_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde:

E_i = módulo de elasticidade na direção i

v_{ij} = coeficiente de Poisson

G_{ij} = módulo de cisalhamento no plano ij

Como a matriz de comportamento é simétrica, tem-se que:

$$\frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1} \quad (2.10)$$

A matriz de rigidez C_{ijkl} , para um material ortotrópico em termos das propriedades elásticas é obtida pela inversão da matriz de flexibilidade s_{ijkl} na eq. (2.9), onde os termos não nulos são:

$$\begin{aligned} C_{33} &= (1 - \nu_{21}\nu_{12})CE_3 & C_{12} &= (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})CE_2 & C_{66} &= G_{12} \\ C_{22} &= (1 - \nu_{13}\nu_{31})CE_2 & C_{13} &= (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})CE_1 & C_{55} &= G_{13} \\ C_{11} &= (1 - \nu_{23}\nu_{32})CE_1 & C_{21} &= (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})CE_1 & C_{44} &= G_{32} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{com } C = \frac{1}{1 - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{23}\nu_{12}\nu_{31}}.$$

2.2.2 Materiais Transversalmente Isotrópicos

Um material é chamado transversalmente isotrópico quando um de seus planos principais é um plano de isotropia, i. e., a cada elemento infinitesimal há um plano em que as propriedades mecânicas são idênticas em todas as direções. Muitos materiais compostos unidirecionais podem ser considerados transversalmente isotrópicos, com o plano 1-2 (normal às fibras) sendo o plano de isotropia (Fig. 2.3). Este é o caso de materiais compostos unidirecionais de fibra de vidro/epóxi com frações volumétricas relativamente altas.

Fig. 2.3: Material Ortotrópico com isotropia transversal (REDDY et al., 2005).

As relações tensão-deformação para um material transversalmente isotrópico são simplificadas notando que os índices 1 e 2 (para 1-2 o plano de isotropia) nas constantes do material são intercambiáveis na eq. (2.8), i.e.,

$$C_{22} = C_{11}$$

$$C_{23} = C_{13}$$

$$C_{55} = C_{44}$$

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$$

Portanto as relações tensão-deformação para um material transversalmente isotrópico reduzem-se a (NYE, 1993)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

As relações acima mostram que um material ortotrópico com isotropia transversal é caracterizado por cinco constantes elásticas independentes.

No caso de materiais transversalmente isotrópicos, é possível considerar que as propriedades mecânicas nas direções 1 e 2 são idênticas, já que, como mostrado na Fig. 2.3, estas direções são direções perpendiculares a direção 3. Nestes casos, a matriz de rigidez ou flexibilidade se simplifica, e conseqüentemente (PEREIRA, 2002):

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{23}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_1 & -\nu_{23}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{32}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A matriz de rigidez C_{ijkl} , para um material transversalmente isotrópico em termos das propriedades mecânicas, é obtida pela inversão da matriz de flexibilidade s_{ijkl} na eq. (2.13), onde os termos não nulos são (TSAI, 1992):

$$\begin{aligned} C_{33} &= (1 - \nu_{12}^2) CE_3 \\ C_{11} &= (1 - \nu_{32} \nu_{23}) CE_1 \\ C_{13} &= \nu_{32} (1 + \nu_{12}) CE_3 \\ C_{12} &= CE_1 (\nu_{12} + \nu_{23} \nu_{32}) \\ C_{66} &= \frac{(1 - \nu_{12} - 2\nu_{32} \nu_{23}) CE_1}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{onde } C = \frac{1}{(1 + \nu_{12})(1 - \nu_{12} - 2\nu_{32} \nu_{23})}, \quad \nu_{32} = \frac{\nu_{23} E_1}{E_3} \text{ e } \nu_{23} = 0,5.$$

2.2.3 Materiais Isotrópicos

Um material isotrópico é caracterizado por um número infinito de planos simétricos no material dado um elemento infinitesimal. Para cada material, os índices 1, 2 e 3 das constantes do material são intercambiáveis. Portanto a relação tensão-deformação na Eq. (2.8) reduz-se à (NYE, 1993)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Podemos concluir então que um material isotrópico é completamente caracterizado por duas constantes elásticas independentes, i.e, C_{11} e C_{12} .

2.3 Comportamento mecânico de placas laminadas

Os materiais compostos são na maioria dos casos utilizados na forma de laminados, onde as lâminas são coladas umas sobre as outras com orientações e espessura das fibras podendo ser diferentes uma das outras. No caso de lâminas, uma dimensão é muito pequena com relação às outras duas. Em consequência disto, a tensão normal na direção da espessura da placa (direção 1 da Fig. 2.3) é considerada desprezível, fazendo com que a lâmina possa ser considerada sob estado plano de tensão, sendo todas as componentes de tensão fora do plano 2-3 igual a zero, i.e., $\sigma_1 = 0$, $\sigma_5 = 0$ e $\sigma_6 = 0$. A matriz de rigidez para uma lâmina ortotrópica sob estado plano de tensão é expressa da seguinte maneira (JONES, 1999):

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde Q_{ij} representa a matriz de rigidez reduzida para o estado plano de tensão no plano 2-3 da Fig. 2.3. As componentes de Q_{ij} podem ser obtidas a partir de C_{ij} aplicando-se a condição $\sigma_1 = 0$ nas relações tensão/deformação para obter uma expressão para S_1 e simplificando os resultados para se ter:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i1}C_{j1}}{C_{11}} \quad (i, j = 2, 3, 4) \quad (2.17)$$

Para a matriz de flexibilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \frac{s_{33}}{s_{33}s_{22} - s_{32}^2} & Q_{33} &= \frac{s_{22}}{s_{33}s_{22} - s_{32}^2} \\ Q_{32} &= \frac{s_{32}}{s_{33}s_{22} - s_{32}^2} & Q_{44} &= \frac{1}{s_{44}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ou em termos das propriedades mecânicas,

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{32}\nu_{23})} \\ Q_{33} &= \frac{E_3}{(1 - \nu_{32}\nu_{23})} \\ Q_{32} &= \frac{\nu_{23}E_3}{(1 - \nu_{32}\nu_{23})} \\ Q_{44} &= G_{32} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Note que na eq. (2.19) há quatro propriedades independentes, E_2 , E_3 , ν_{32} e G_{32} , já que, pela eq. (2.10), $\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$.

2.3.1 Relações tensão/deformação para uma lâmina sob orientação arbitrária

Normalmente, as direções principais (2-3) da lâmina não coincidem com os eixos de referência (x, y). Portanto, as componentes de tensão e deformação

referentes aos eixos principais do material podem ser expressas em termos dos eixos de referência através da seguinte relação de transformação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde $\sigma_s = \sigma_{xy}$. A matriz de transformação $[T]$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

sendo $c = \cos \theta$ e $s = \sin \theta$.

Pela inversão da eq. (2.20), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = [T^{-1}] \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A eq. (2.16) mostra que quando a lâmina é solicitada por tensão ou compressão na direção principal do material, não há deformação cisalhante. Similarmente, quando a lâmina é solicitada sob cisalhamento puro, somente uma deformação cisalhante é produzida ao longo destes eixos. Portanto não há acoplamento entre as tensões normais e a deformação cisalhante e entre as tensões cisalhantes e as deformações normais. Este não é o caso quando a lâmina é solicitada ao longo dos eixos de referência x e y . Então, as relações tensão/deformação são expressas na forma (DANIEL; ISHAI, 1994)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_s \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Substituindo a eq. (2.16) na eq. (2.22) e substituindo na eq. (2.24), tem-se a seguinte relação de transformação para a matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} = [T^{-1}] \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{44} \end{bmatrix} [T] \quad (2.25)$$

Da relação acima, obtém-se a rigidez reduzida transformada em função da rigidez principal da lâmina:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= s^4 Q_{22} + c^4 Q_{33} + 2c^2 s^2 Q_{23} + 4c^2 s^2 Q_{44} \\ Q_{yy} &= c^4 Q_{22} + s^4 Q_{33} + 2c^2 s^2 Q_{23} + 4c^2 s^2 Q_{44} \\ Q_{xy} &= c^2 s^2 Q_{22} + c^2 s^2 Q_{33} + (c^4 + s^4) Q_{23} - 4c^2 s^2 Q_{44} \\ Q_{xs} &= -cs^3 Q_{22} + c^3 s Q_{33} + (cs^3 - c^3 s) Q_{23} + 2(cs^3 - c^3 s) Q_{44} \\ Q_{ys} &= -c^3 s Q_{22} + cs^3 Q_{33} + (c^3 s - cs^3) Q_{23} + 2(c^3 s - cs^3) Q_{44} \\ Q_{ss} &= c^2 s^2 Q_{22} + c^2 s^2 Q_{33} - 2c^2 s^2 Q_{23} + (c^2 - s^2)^2 Q_{44} \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.2 Comportamento em membrana

No estudo do comportamento em membrana dos materiais compostos, é considerado um laminado de espessura total h com n camadas (ou lâminas) de espessura e_k cada uma. As solicitações no plano do laminado são denotadas por N_x , N_y (forças normais por unidade de comprimento transversal); T_{xy} e T_{yx} (forças cortantes por unidade de comprimento transversal). Os eixos x e y são eixos de referência.

Os esforços N_x , N_y , T_{xy} e T_{yx} são determinados da seguinte maneira (PEREIRA, 2002):

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^n (\sigma_x)_k e_k \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \sum_{k=1}^n (\sigma_y)_k e_k \\ T_{yx} = T_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \sum_{k=1}^n (\sigma_{xy})_k e_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

As tensões σ_x , σ_y e σ_{xy} são obtidas no sistema de eixos de referência x e y , e estão relacionadas com as deformações pela matriz de rigidez, eq. (2.24). Considerando somente os esforços de membrana, os esforços N_x , N_y , e T_{xy} são determinados em função das constantes elásticas de cada camada:

$$N_x = \sum_{k=1}^n \{ Q_{xx}^k S_x + Q_{xy}^k S_y + Q_{yz}^k S_{xy} \} \quad (2.28)$$

que de maneira mais compacta pode ser escrito:

$$N_x = A_{11} S_{xx} + A_{12} S_{yy} + A_{16} S_{xy} \quad (2.29)$$

E de maneira análoga:

$$N_y = A_{21} S_{xx} + A_{22} S_{yy} + A_{26} S_{xy} \quad (2.30)$$

Exprimindo os esforços N_x , N_y e T_{xy} em forma matricial, têm-se:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

com:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k e_k \quad (2.32)$$

Sendo que a expressão acima é independente da ordem de empilhamento das camadas e os termos A_{16} , A_{26} , A_{61} e A_{62} se anulam quando o laminado é simétrico.

A lei de comportamento em membrana do laminado é da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Da inversão da matriz de comportamento acima e considerando-se o laminado simétrico, obtêm-se as constantes elásticas do laminado sob estado plano de tensão:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

CAPÍTULO 3: PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS SÓLIDOS

Como mostrado no capítulo anterior, o tensor de rigidez elástica para um material isotrópico (2.9) depende apenas de duas constantes independentes: C_{11} e C_{12} . Podemos reescrever a eq. (2.9) utilizando as constantes de Lamé (KINO, 1987). As constantes de Lamé λ e μ se relacionam com C_{11} , C_{12} e C_{44} através de:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \lambda + 2\mu \\ C_{12} &= \lambda \\ C_{44} &= \mu \end{aligned} \quad (3.1)$$

O tensor de rigidez escrito em função das constantes de Lamé para um material isotrópico é mostrado abaixo:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (i, j=1,2,\dots,6) \quad (3.2)$$

As constantes de Lamé se relacionam com o módulo de elasticidade E e com o coeficiente de Poisson ν através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nas eq. (3.3), a constante de Lamé μ representa o módulo de cisalhamento do material, representado pela letra G .

3.1 Propagação de Ondas Mecânicas em um Sólido Isotrópico

Num sólido isotrópico, podem existir basicamente dois tipos de ondas acústicas, as ondas *longitudinais* e as de *cisalhamento*. Numa onda longitudinal, as partículas se deslocam na direção de propagação da onda, enquanto que para uma onda de cisalhamento, as partículas se deslocam perpendicularmente à direção de propagação da onda. A equação que descreve o comportamento de ondas acústicas em sólidos será obtida a partir das equações constitutivas dos materiais e da segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton é dada por (RISTIC, 1983):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.4)$$

onde ρ é a densidade do meio, e t é o tempo.

A deformação S_{ij} de um corpo é função dos deslocamentos u_i , e é dada por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

Na forma matricial, a deformação é escrita como:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Na eq. (3.6) temos:

$$S_{21} = S_{12}; S_{31} = S_{13}; S_{32} = S_{23} \quad (3.7)$$

Substituindo o tensor de rigidez elástica de um material isotrópico (eq. (3.2)) na eq. (2.3), e usando por convenção que $S_4 = 2S_{23}$, $S_5 = 2S_{13}$ e $S_6 = 2S_{12}$, obtém-se (LOWE, 1995):

$$\begin{array}{ll} \sigma_{11} = \lambda\Delta + 2\mu S_{11} & \sigma_1 = \lambda\Delta + 2\mu S_1 \\ \sigma_{22} = \lambda\Delta + 2\mu S_{22} & \sigma_2 = \lambda\Delta + 2\mu S_2 \\ \sigma_{33} = \lambda\Delta + 2\mu S_{33} & \sigma_3 = \lambda\Delta + 2\mu S_3 \\ \sigma_{23} = 2\mu S_{23} & \sigma_4 = \mu S_4 \\ \sigma_{13} = 2\mu S_{13} & \sigma_5 = \mu S_5 \\ \sigma_{12} = 2\mu S_{12} & \sigma_6 = \mu S_6 \end{array} \quad \text{ou} \quad (3.8)$$

onde $\Delta = S_{11} + S_{22} + S_{33}$ é a dilatação do corpo, ou variação do seu volume. A eq. (3.8) pode ser reescrita de uma forma mais compacta:

$$\sigma_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (3.9)$$

Substituindo a eq. (3.5) na eq. (3.8), e em seguida substituindo a equação resultante na eq. (3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_1 \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_2 \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \nabla^2 u_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

As eqs. (3.10) podem ser escrita da seguinte maneira:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i \quad (3.11)$$

onde ∇^2 é o operador escalar $(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2)$.

Um artifício para resolver a eq. do movimento (3.11) consiste em utilizar o fato de que qualquer vetor pode ser escrito em termos de um potencial escalar ϕ_p e de um potencial vetor ψ_p (KINO, 1987). Portanto, podemos escrever o vetor deslocamento u_i como:

$$u_i = \frac{\partial \phi_p}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_p}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

onde ϵ_{ijk} é chamado de permutação, e é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231 \text{ ou } 312 \\ -1 & \text{se } ijk = 132, 213 \text{ ou } 321 \\ 0 & \text{se } ijk \text{ tiver pelo menos dois índices repetidos (112, 111, etc.)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Podemos representar a permutação através de um determinante de *deltas de Kronecker* (CHUNG, 1996):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Para facilitar a visualização da eq. (3.12), será utilizada a notação vetorial:

$$u = \nabla \phi_p + \nabla \times \psi_p \quad (3.15)$$

Da mesma maneira, a eq. (3.11) é escrita utilizando a notação vetorial:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u \quad (3.16)$$

onde ∇ é o operador gradiente $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ e $\nabla \cdot$ o operador divergente $(\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3)$.

As identidades vetoriais a seguir serão utilizadas para obter equações que descrevem o comportamento de ondas mecânicas em sólidos.

$$\nabla^2 u = \nabla (\nabla \cdot u) - \nabla \times \nabla \times u \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times w) = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \nabla \Delta = 0 \quad (3.19)$$

onde Δ é uma grandeza escalar. Substituindo a identidade vetorial (3.17) na eq. (3.16) obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot u) - \mu \nabla \times \nabla \times u \quad (3.20)$$

A rotação infinitesimal w_{ij} de um corpo rígido é definida como (KINO, 1987):

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.21)$$

ou escrevendo a equação acima utilizando notação vetorial:

$$w = \frac{1}{2} \nabla \times u \quad (3.22)$$

A dilatação Δ de um corpo pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Delta = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \nabla \cdot u \quad (3.23)$$

Substituindo as eqs. (3.23) e (3.22) na eq. (3.20) obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \Delta - 2\mu \nabla \times w \quad (3.24)$$

Aplicando o operador $\nabla \cdot$ nos dois lados da eq. (3.24) e utilizando a identidade vetorial (3.18) obtém-se:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

Aplicando o operador $\nabla \times$ nos dois lados da eq. (3.24) e utilizando a identidade vetorial (3.19) obtém-se:

$$\mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

3.1.1 Ondas Longitudinais

Substituindo a eq. (3.15) na eq. (3.23) e substituindo a equação resultante na eq. (3.25), obtém-se:

$$\nabla^2 \left[\rho \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi_p \right] = 0 \quad (3.27)$$

A solução da eq. (3.27) corresponde a ondas longitudinais se o termo dentro dos colchetes for igual a zero. Portanto, a equação que descreve o comportamento de ondas longitudinais em sólidos é dada por:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi_p = 0 \quad (3.28)$$

Substituindo-se ϕ_p por

$$\phi_p = \exp[j(\omega t - kx)] \quad (3.29)$$

onde ω é a frequência angular e k é o vetor de propagação, a solução da eq. (3.28) é:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{\omega^2}{V_l^2} \quad (3.30)$$

Portanto a velocidade longitudinal V_L é dada pela relação:

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (3.31)$$

3.1.2 Ondas de cisalhamento

Substituindo a eq. (3.22) na eq. (3.15) e substituindo a equação resultante na eq. (3.26), obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \left(\mu \nabla^2 w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3.32)$$

Assumindo que o termo dentro dos parênteses é zero, a equação que descreve o comportamento de ondas de cisalhamento em sólidos é dada por:

$$\mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.33)$$

Admitindo-se w na forma $\exp[j(\omega t - kx)]$ e substituindo na eq. (3.33), tem-se a solução para ondas de cisalhamento em meios isotrópicos:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (3.34)$$

3.2 Impedância Acústica

A impedância acústica de um meio é definida como (KINSLER, 1982):

$$Z = \rho c \quad (3.35)$$

onde ρ é a densidade do material e c é a velocidade de propagação no meio. O produto ρc é chamado de impedância acústica característica do meio. Como exemplo, temos que na água a impedância acústica Z é $1,5 \times 10^6 \text{ kg/m}^2\text{s}$ e no aço, Z é $45 \times 10^6 \text{ kg/m}^2\text{s}$.

3.3 Fenômenos de Transmissão

Quando uma onda acústica que se propaga em um meio encontra uma interface com um outro meio, uma parte da onda acústica é transmitida e a outra refletida (BREKHOVSKIKH, 1980). Para simplificar o problema de determinar a razão entre a pressão acústica das ondas refletidas e transmitidas com relação à amplitude da onda incidente, será considerado que as ondas acústicas são planas e que incidem perpendicularmente a interface entre dois fluidos. Para o caso de uma onda plana atingindo obliquamente a interface entre os dois meios é feito um estudo apenas da direção em que as ondas são refletidas e transmitidas, sem se importar com as amplitudes das ondas.

A relação entre as amplitudes da onda transmitida pela onda incidente é dada pelo coeficiente de transmissão T , definido como (KINSLER, 1982):

$$T = \frac{P_t}{P_i} \quad (3.36)$$

E a relação entre as amplitudes da onda refletida pela incidente é dada pelo coeficiente de reflexão R :

$$R = \frac{P_r}{P_i} \quad (3.37)$$

onde P_i é a amplitude da onda incidente, P_r é a amplitude da onda refletida, e P_t é a amplitude da onda transmitida.

3.3.1 Incidência Normal

Para estudar a incidência normal vamos considerar uma onda plana que se propaga na direção x , e atinge a interface entre dois fluidos em $x = 0$, como mostra a Fig. 3.1. A onda acústica incidente é representada por p_i , a onda transmitida por p_t e a refletida por p_r .

Fig. 3.1: Reflexão e transmissão de uma onda acústica numa interface entre dois meios (KINSLER, 1982).

A Fig. 3.1 mostra uma onda plana p_i que se propaga em um meio de impedância acústica Z_1 atingindo a interface com um outro meio com impedância acústica Z_2 . Uma onda plana p_i é dada por (BREKHOVSKIKH, 1980):

$$p_i = P_i \exp[j(\omega t - k_1 x)] \quad (3.38)$$

onde k_1 é o número de onda da onda incidente e vale ω/c_1 . A onda transmitida p_t e a onda refletida p_r são dadas por:

$$p_t = P_t \exp[j(\omega t - k_2 x)] \quad (3.39)$$

$$p_r = P_r \exp[j(\omega t + k_1 x)] \quad (3.40)$$

onde k_2 é o número de onda da onda transmitida e vale ω/c_2 . Na interface $x = 0$, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$p_i + p_r = p_t \quad (3.41)$$

$$v_i + v_r = v_t \quad (3.42)$$

onde v_i é a velocidade das partículas da onda incidente, v_r é a velocidade das partículas da onda refletida e v_t é a velocidade das partículas da onda transmitida. Dividindo a eq. (3.41) pela eq. (3.42), tem-se:

$$\frac{p_i + p_r}{v_i + v_r} = \frac{p_t}{v_t} \quad (3.43)$$

que nada mais é do que a impedância acústica do meio.

Para uma onda plana $p/v = Z$, e a eq. (3.43) fica (KINSLER, 1982)

$$Z_1 \frac{p_i + p_r}{p_i - p_r} = Z_2 \quad (3.44)$$

o que nos leva diretamente aos coeficientes de reflexão e transmissão

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.45)$$

$$T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3.46)$$

As equações (3.45) e (3.46) mostram que quanto maior a diferença de impedâncias acústicas entre os dois meios, maior será a porcentagem da onda que será

refletida. Quando a impedância do meio da onda incidente for igual à impedância do meio em que a onda é transmitida, não ocorre reflexão da onda, ou seja, toda a onda é transmitida.

3.3.2 Incidência Oblíqua

Para calcular os coeficientes de reflexão e transmissão entre dois meios sob incidência normal, foi considerado que cada um dos meios eram fluidos. Isto foi feito para facilitar os cálculos, entretanto, para a maioria dos casos de interesse prático ocorrem interfaces ou entre dois sólidos, ou entre sólidos e líquidos. Vamos considerar a interface entre um líquido e um sólido mostrada na Fig. 3.2. Quando uma onda plana longitudinal que se propaga em um meio líquido atinge obliquamente a interface com um sólido, ocorre uma conversão de modo, que faz com que sejam geradas no sólido uma onda longitudinal e uma de cisalhamento, e ao mesmo tempo, ocorre uma reflexão da onda longitudinal.

Fig. 3.2: Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface líquido-sólido (KINSLER, 1982).

Na Fig. 3.2, o primeiro sub-índice dos ângulos θ diz se a onda é incidente (*i*), refletida (*r*), ou transmitida (*t*). O segundo sub-índice está relacionado ao tipo de onda que se propaga: longitudinal (*l*), ou cisalhamento (*s*). Os ângulos θ_{rl} , θ_{il} , θ_{ts} são dados pela lei de Snell (ADAMOWSKI, 2004):

$$\frac{\sin \theta_{il}}{c_{il}} = \frac{\sin \theta_{tl}}{c_{tl}} = \frac{\sin \theta_{ts}}{c_{ts}} \quad (3.47)$$

Na Fig. 3.2 como $c_{rl} = c_{il}$, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. O caso de uma onda longitudinal incidindo a partir de um sólido numa interface com outro sólido é análogo ao problema da incidência de onda acústica numa interface líquido-sólido. No caso de uma interface sólido-sólido, além de termos uma onda longitudinal refletida, há também uma onda de cisalhamento refletida. Isto não acontecia na interface líquido-sólido, pois os líquidos não viscosos não suportam ondas de cisalhamento.

3.3.3 Conversão de modos

Quando uma onda longitudinal passa de um meio com velocidade de propagação mais baixa (meio líquido) para outro com velocidade de propagação mais alta (meio sólido), parte da onda é refletida e parte é transmitida. Conforme o ângulo de incidência aumenta, o ângulo de transmissão também aumenta. Isto ocorre até que o ângulo de transmissão chegue a 90° . A partir daí, não haverá mais uma onda longitudinal, mas sim uma onda de cisalhamento no sólido. Nesta condição, há uma conversão completa da onda longitudinal para a de cisalhamento. Isto é um fenômeno importante pois permite a conversão total da onda longitudinal para a de cisalhamento ou vice-versa sem perda de energia (KINO, 1987). Como transdutores de ondas longitudinais são mais simples de serem construídos, tem-se um conveniente método para obter ondas de cisalhamento.

Quando o ângulo de transmissão atinge 90° , o ângulo da onda incidente é chamado de ângulo crítico (HENNEKE; JONES, 1976). Para um sólido, há um ângulo crítico para a onda longitudinal, e outro para a onda de cisalhamento. O ângulo crítico θ_{cr} pode ser encontrado utilizando a lei de Snell e considerando que o ângulo de transmissão é igual a 90° (WOOH; DANIEL, 1991):

$$\theta_{cr} = \arcsen\left(\frac{v_i}{v_t}\right) \quad (3.48)$$

Para sólidos, a velocidade de propagação de uma onda longitudinal é maior que a velocidade de cisalhamento, e conseqüentemente, o ângulo crítico para uma onda longitudinal é menor que para uma onda de cisalhamento.

3.4 Propagação de ondas em materiais anisotrópicos

Em um material anisotrópico, três ondas elásticas podem propagar-se para uma dada direção: uma longitudinal e duas de cisalhamento. Se o plano de incidência da onda na amostra é orientado arbitrariamente relativo aos planos de simetria do material, as três ondas elásticas serão excitadas na amostra e todas terão uma componente normal de deslocamento na superfície da amostra que, por conversão de modos, propagam-se num meio líquido. Se o plano de incidência coincidir com um plano da simetria da amostra, somente duas ondas elásticas serão excitadas no sólido, pois uma das ondas de cisalhamento neste plano será uma onda com o deslocamento paralelo à superfície da amostra e não será transmitida ao líquido. Portanto, podem-se esperar dois ângulos críticos para o plano de simetria e três ângulos críticos para um plano arbitrário de incidência.

A definição do ângulo crítico para um material anisotrópico é diferente do caso isotrópico, devido ao fato de que o sentido das velocidades de fase e de grupo não coincidirem no caso anisotrópico. Esta questão foi primeiramente levantada por Henneke (1972), que define o ângulo crítico como aquele em que fluxo da energia (velocidade de grupo) na onda refratada é paralelo em relação à interface que separa os dois meios. Conseqüentemente, em um material anisotrópico no ângulo crítico, tanto o ângulo de refração quanto a velocidade da onda são desconhecidos e não podem ser calculados pela lei de Snell.

Quando o plano de incidência da onda coincidir com um plano de simetria da amostra, tanto o vetor V_g quanto V_p no ângulo crítico encontram-se no mesmo plano, como mostrado na Fig. 3.3. Isto significa que, no ângulo crítico, o vetor V_p estará paralelo à superfície da amostra e encontrar-se-á no plano de incidência. O vetor V_g também estará paralelo à superfície da amostra mas não se encontra no plano de incidência, sofrendo um desvio deste plano por um ângulo ψ . De acordo com Rokhlin e Wang (1989), a conclusão prática que se tira é que a lei de Snell pode ser usada no ângulo crítico para o cálculo da velocidade de fase nos planos de simetria da amostra.

Esta conclusão pode ser utilizada para materiais compostos se o plano de incidência coincidir com um plano de simetria e não será satisfeita se um dos sentidos da fibra não for paralela ou não-ortogonal à superfície da amostra. Neste último caso, o ângulo de desvio entre V_g e V_p pode ter uma componente fora do plano de incidência e o vetor V_p desviará da interface no ângulo crítico.

Fig. 3.3: Desvio entre as velocidades de fase V_p e de grupo V_g quando o plano de incidência da onda coincide com um plano de simetria do material (ROKHLIN; WANG, 1989).

3.4.1 Equação de Christoffel

A equação que descreve o comportamento de ondas elásticas em um material anisotrópico será obtida a partir das equações constitutivas dos materiais e da segunda lei de Newton, dada pela eq. (3.4). Para um meio elástico sob pequenos deslocamentos, a relação entre os tensores de tensão (σ_{ij}) e deformação (S_{ij}) é dada pela eq. (2.3). Combinando as equações (3.4) e (2.3), tem-se

$$\rho \ddot{u}_i = C_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial x_j}, \quad (3.49)$$

Pela definição de deformação, eq. (3.5), e substituindo na (3.49), obtém-se (CARRASCO; JÚNIOR, 2003):

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] \therefore \\ \rho \ddot{u}_i &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Uma vez que o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação a k e l , pode-se permutar estes índices no segundo termo dentro dos parênteses da equação anterior:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \therefore \\ \rho \ddot{u}_i &= C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Assumindo que ondas harmônicas planas estejam se propagando no corpo, os deslocamentos são dados por:

$$u_i = A_i \exp[j(k_i x_i - \omega t)], \quad (3.52)$$

em que A_i representa as amplitudes das componentes do vetor deslocamento, k_i o vetor de onda ao longo da direção x_i e ω a frequência angular. O valor A_i pode também ser escrito como An_i , em que A representa a amplitude do deslocamento e n_i os co-senos diretores do vetor deslocamento da partícula. Substituindo a eq. (3.52) na eq. (3.51), obtém-se:

$$\rho \omega^2 u_i = C_{ijkl} k_j k_k u_l \quad (3.53)$$

Esta equação pode ser escrita de forma mais homogênea fazendo-se $u_i = u_l \delta_{il}$, ou seja,

$$(C_{ijkl} k_j k_k - \delta_{il} \rho \omega^2) u_l = 0 \quad (3.54)$$

A eq. (3.54) é chamada de equação de Christoffel. Ela representa um conjunto de três equações homogêneas de primeiro grau em u_1, u_2, u_3 . Estas equações tem soluções não triviais, se, somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, ou seja:

$$\left| C_{ijkl} k_j k_k - \delta_{il} \rho \omega^2 \right| = 0 \quad (3.55)$$

O desenvolvimento da eq. (3.55) fornece uma equação cúbica em ω^2 . Para um material anisotrópico, as três raízes desta equação são diferentes, gerando assim três diferentes valores de velocidade de propagação.

A eq. (3.54) pode ser escrita na forma (ROKHLIN et al., 1986)

$$(\Gamma_{il} - \rho v^2 \delta_{il}) u_l = 0 \quad (3.56)$$

ou ainda, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho v^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho v^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho v^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.57)$$

onde o tensor Γ_{il} é conhecido como tensor de Christoffel, definido como

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k \quad (3.58)$$

Na eq. (3.56), v representa a velocidade de fase das ondas e n_i , implícito em Γ_{il} , denota os co-senos diretores da normal as frentes de onda. Portanto, o novo determinante será:

$$|\Gamma_{il} - \rho v^2 \delta_{il}| = 0, \quad (3.59)$$

O tensor Γ_{il} depende da simetria estrutural do corpo e da orientação das ondas neste corpo. A eq. (3.59) pode ser reescrita, sob forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho v^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho v^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho v^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

No **Anexo A** tem-se um exemplo de como obter a matriz Γ_{il} de um material transversalmente isotrópico expandido-se a eq. (3.60).

3.4.2 Modelo Inverso

Se as constantes elásticas do meio são conhecidas, é possível resolver a eq. (3.59) e obter as velocidades de propagação no material em direções particulares. O problema inverso é também válido: dada uma direção qualquer de propagação em um meio anisotrópico, há três modos distintos de ondas, a longitudinal (V_L) e a de cisalhamento, esta com duas polarizações, vertical (V_{qs}) e horizontal (V_{sh}) que, devidamente obtidas, podem ser usadas na obtenção das constantes elásticas do material. O procedimento inverso para determinar as constantes elásticas de um material transversalmente isotrópico envolve a determinação das cinco constantes elásticas a partir das velocidades obtidas experimentalmente (REDDY, 2005); (BALASUBRAMANIAM; WHITNEY, 1996); (WOOH, 1991). Resolvendo-se a eq. (3.56) para o plano 1-2 de um material transversalmente isotrópico, com incidência normal, tem-se (ANEXO A):

$$C_{11} = \rho V_L^2 \quad (3.61)$$

$$C_{66} = \rho V_{qs}^2 \quad (3.62)$$

CAPÍTULO 4: CÁLCULO DA VELOCIDADE DE FASE A PARTIR DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Num material isotrópico, para determinar a velocidade de propagação da onda basta o sinal de tempo e o comprimento do trajeto da onda. A velocidade determinada desta maneira é a velocidade de grupo, que, num material isotrópico, é igual à velocidade de fase (AULD, 1990). Porém, em um material anisotrópico, elas não coincidem (SACHSE; PAO, 1978). Isto é um problema pois para o cálculo das constantes elásticas de materiais anisotrópicos o que interessa é a velocidade de fase. Rokhlin e Wang (1992) mostram como é possível através de algumas relações obter a velocidade de fase a partir dos dados experimentais.

Considerando uma incidência oblíqua num material anisotrópico orientado arbitrariamente relativo ao plano de incidência da onda, três ondas elásticas são excitadas com velocidades diferentes, uma longitudinal e duas de cisalhamento. As velocidades de grupo destas três ondas divergem dos sentidos da velocidade de fase. Uma ilustração das três ondas refletidas para a incidência oblíqua utilizando-se a técnica de transmissão direta é mostrada na Fig. 4.1, onde os sentidos dos vetores V_p são designados por linhas tracejadas e as projeções dos vetores V_g neste plano de incidência são designadas por linhas contínuas. Os três vetores da velocidade de fase encontram-se no plano de incidência, isto é, no plano da figura. Os vetores da velocidade de grupo não se encontram necessariamente no plano de incidência, ao menos que esse plano seja um plano de simetria do material.

Fig. 4.1: Velocidade em meios anisotrópicos. O transdutor receptor deve ser posicionado no centro do feixe refratado para obter amplitude máxima (ROKHLIN; WANG, 1992).

Para ilustrar o desvio entre as velocidades de grupo e de fase, tem-se um desenho esquemático mostrado na Fig. 4.2. Há dois tipos de sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas principal, baseado no plano de incidência e o sistema não-principal, baseado no sistema de coordenadas da amostra, i.e., eixo 3 para a direção das fibras, eixo 2 para a direção transversal das fibras e eixo 1 normal ao plano 2-3. Para o desenho esquemático mostrado na Fig. 4.2, o sistema principal está rotacionado por um ângulo θ qualquer a partir do sistema não-principal, sendo o eixo 1 o eixo de rotação. Ou seja, o plano de incidência 1-3' sofre um desvio da direção da fibra (eixo 3). Para uma onda refratada com vetor de onda V_p , o vetor V_g sofre um desvio ψ de V_p . Este ângulo tem tanto uma componente α no plano (1-3') quanto uma componente β fora do plano. Este três ângulos estão relacionados por:

$$\cos \psi = \cos \alpha \cos \beta \quad (4.1)$$

Fig. 4.2: Ilustração do desvio entre as velocidades de grupo e de fase para um plano de incidência rotacionado por um ângulo θ a partir do eixo 3 (ROKHLIN; WANG, 1992).

Considerando uma onda elástica propagando-se em um meio líquido e incidindo num material anisotrópico sob um ângulo arbitrário, como mostrado na Fig. 4.3, a onda incidente atinge amostra no ponto **O** sob um ângulo θ_i . Para uma onda refratada dentro do material, o vetor V_p ($\overline{OB}$) da velocidade de fase encontra-se no plano de incidência, mas o vetor V_g ($\overline{OA}$) encontra-se fora do plano de incidência. O desvio de V_g em relação a V_p é dado pelo ângulo ψ da Fig. 4.3.

O trajeto do vetor V_p atinge a superfície traseira da amostra no ponto B e o vetor V_g no ponto A. A componente normal à frente de onda é o vetor da velocidade de fase e tempo de propagação a partir do ponto **O** até o ponto B é

$$t_p = \overline{OB} / V_p. \quad (4.2)$$

Para a velocidade de grupo tem-se que

$$t_g = \overline{OA} / V_g, \quad (4.3)$$

Fig. 4.3: Ilustração da diferença de caminho acústico para as velocidades de fase (V_p) e de grupo (V_g); ψ indica o desvio entre os vetores da velocidade de fase e de grupo. Durante os experimentos, a amostra é rotacionada no eixo Z. h é a espessura da amostra (ROKHLIN; WANG, 1992).

Nos ensaios experimentais, o tempo de propagação da onda medido é dado por t_g . Mas sendo as constantes elásticas relacionadas pelas velocidades de fases através da eq. de Christoffel, são as velocidades de fase que devem ser obtidas para determinar as constantes elásticas do material. Portanto, devem ser encontradas relações entre as variáveis t_p e t_g descritas pelas eqs. (4.2) e (4.3).

Sabendo-se que os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ encontra-se no plano de incidência e que $\overline{OD} \perp \overline{DA}$, verifica-se que as distâncias $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$ são dadas por:

$$\overline{OB} = h / \cos \theta_r, \quad (4.4)$$

$$\overline{OA} = h / (\cos(\alpha + \theta_r) \cos \beta), \quad (4.5)$$

onde h é a espessura da amostra e θ_r é o ângulo de refração. Substituindo as eqs. (4.4) e (4.5) nas eqs. (4.2) e (4.3) tem-se

$$t_p = h / V_p \cos \theta_r, \quad (4.6)$$

$$t_g = h / V_g \cos(\alpha + \theta_r) \cos \beta. \quad (4.7)$$

Observa-se que há uma diferença de tempo entre o tempo de propagação t_g e o tempo de propagação t_p , dada por:

$$\begin{aligned} (\delta t)_s &= t_g - t_p \\ &= \frac{1}{V_g} \left(\frac{h}{\cos \beta \cos(\alpha + \theta_r)} - \frac{h}{\cos \psi \cos \theta_r} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

A eq. (4.8) pode ser simplificada levando-se em consideração a relação entre as velocidades de grupo e de fase, Fig. 4.3,

$$V_p = V_g \cos \psi = V_g \cos \alpha \cos \beta \quad (4.9)$$

e pela lei de Snell

$$\sin \theta_r / V_p = \sin \theta_i / V_0, \quad (4.10)$$

Onde V_0 é a velocidade de propagação na água, que é conhecida. Substituindo as eqs. (4.9) e (4.10) na eq. (4.8) tem-se:

$$(\delta t)_s = \frac{h \sin \theta_i \sin \alpha}{V_0 \cos(\theta_r + \alpha) \cos \theta_r}. \quad (4.11)$$

Da eq. (4.11), observa-se que a diferença entre o tempo de propagação t_g e o tempo de propagação t_p é função do ângulo α no plano de incidência. Quando esta componente desaparece, i.e., quando o plano definido pelo vetor de onda refratado e a normal ao plano de incidência coincidem com um plano de simetria do material, $(\delta t)_s = 0$.

Para materiais isotrópicos, a condição $(\delta t)_s = 0$ é sempre satisfeita. O mesmo resultado, i.e., $(\delta t)_s = 0$, é válido também para incidência normal na amostra, pois neste caso $\theta_i = 0$. Salvo exceções, $(\delta t)_s$ é sempre diferente de zero. É importante notar que $(\delta t)_s$ pode ser tanto positivo quanto negativo. $(\delta t)_s$ positivo corresponde a α positivo, como ilustrado na Fig. 4.3. $(\delta t)_s$ negativo ocorre quando o ângulo entre a normal da amostra e a projeção da velocidade de grupo no plano de incidência é menor que o ângulo de refração calculado pela lei de Snell.

Após a onda refratada passar pela amostra, esta se converte por conversão de modos em uma onda longitudinal no meio de acoplamento. A onda continua a propagar-se como ilustrado na Fig. 4.4, onde a amostra junto com os transdutores de transmissão e recepção são mostradas no lado esquerdo da figura. O trajeto da referência no meio de acoplamento é mostrado na Fig. 4.4 na direita. A seção transversal da amostra, vista da superfície frontal da amostra, coincide com o plano de incidência. Devido à diferença na direção entre as velocidades de grupo e de fase, o feixe ultra-sônico de cada onda emerge da amostra em posições diferentes (pontos A e B). O ponto D na Fig. 4.4 representa a projeção do ponto A no plano de incidência. Visto que a superfície da amostra é perpendicular ao plano de incidência, os pontos A e D estão na mesma distância do plano do receptor. Para a velocidade de fase, a onda se propaga em uma distância adicional $\overline{BC}$ no meio líquido (note que $\overline{BC}$ está paralelo à onda do vetor de incidência $\mathbf{A}_i$) para coincidir com a frente de onda da velocidade de grupo. Para propagar-se através da distância adicional $\overline{BC}$, um intervalo de tempo adicional

$$\Delta t_0 = \overline{BC} / V_0 \quad (4.12)$$

é necessário. Da geometria da Fig. 4.4, pode-se afirmar a partir dos triângulos OqB e OZ_1B e dos triângulos OqD e OZ_2D que:

$$(\delta t)_s = \Delta t_0, \quad (4.15)$$

onde se pode concluir que:

$$t_g = t_p + \Delta t_0. \quad (4.16)$$

Pode-se então tirar uma conclusão importante: se o tempo de propagação t_g for medido colocando um receptor ultra-sônico na superfície traseira da amostra no ponto A da Fig. 4.4, o tempo de propagação medido será equivalente à t_p medido no ponto C , o que mostra que adotando-se um trajeto de referência apropriado obtém-se resultados corretos.

Subtraindo-se o tempo de propagação t_0 , sem a amostra, do t_g com a amostra para cada ângulo de incidência, tem-se (ROKHLIN; WANG, 1992)

$$\Delta t = t_0 - t_g = \left(\frac{h \cos(\theta_r - \theta_i)}{V_0 \cos \theta_r} - \frac{h}{V_p \cos \theta_r} \right). \quad (4.17)$$

o qual é obtido experimentalmente. Assim, para um ângulo de incidência θ_i , há somente duas incógnitas na eq. (4.17): V_p e θ_r . Essas duas incógnitas estão relacionadas pela lei de Snell, eq. (4.10); conseqüentemente substituindo $\sin \theta_r$ e $\cos \theta_r$ na eq. (4.17) e usando a eq. (4.10), tem-se uma expressão analítica para a velocidade da fase V_p :

$$V_p = \left(\frac{1}{V_0^2} - \frac{2\Delta t \cos \theta_i}{hV_0} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.18)$$

Na eq. (4.18), o ângulo θ_i , a espessura h da amostra e velocidade de propagação V_0 na água são parâmetros conhecidos. O intervalo de tempo Δt é medido

experimentalmente para cada ângulo de incidência. Sendo V_0 , θ_i , e V_p conhecidos, o ângulo θ_r pode ser obtido através da lei de Snell, eq. (4.10).

4.1 Cálculo da velocidade de fase utilizando-se pulso-eco

A eq. (4.18) descreve como obter a velocidade de fase utilizando-se a técnica de transmissão direta. Porém na técnica de pulso-eco, ao invés do transdutor receptor, um grande refletor é usado, orientado paralelamente ao transmissor. A onda refletida propaga-se pelo mesmo caminho que a onda incidente só que com sentido oposto e retorna ao transdutor que opera em modo pulso-eco. Quando o ângulo da amostra é mudado, a posição do feixe de incidência no refletor muda; mas isto não afeta a posição do feixe que chega ao receptor, eliminando portanto a necessidade de mover o refletor ou o transmissor/receptor.

Para calcular o intervalo de tempo basta utilizar um fator 2 no denominador do lado direito da eq. (4.17). A eq. (4.18) neste caso assume a forma (REDDY et al., 2005)

$$V_p = \left(\frac{1}{V_0^2} - \frac{\Delta t \cos \theta_i}{h V_0} + \frac{(\Delta t)^2}{4h^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.19)$$

4.1.1 Método da Auto-Referência

Como descrito por Chu e Rokhlin (1994), o paralelismo entre as duas superfícies da amostra é um fator crucial para se obter o caminho acústico desejado. Mesmo pequenos não-paralelismos ou curvaturas na superfície da amostra provocam uma pequena mudança no ângulo de refração, mudando o caminho acústico no fluido quando comparado com o caminho de referência. Segundo, se a amostra possui alta atenuação, os sinais transmitidos têm sua forma mudada se comparados com o sinal de referência, dificultando assim a medida Δt do sinal. Este efeito dificulta os ensaios e introduz erros.

O método da auto-referência, conhecido como *self-reference method* (SRM) e desenvolvido por Chu e Rokhlin (1994), melhora os resultados experimentais levando em consideração a velocidade de referência V_n na amostra medida em incidência normal. A velocidade de referência é medida com precisão pela sobreposição dos múltiplos sinais refletidos da superfície frontal e traseira da amostra. Para se obter a equação para o cálculo da velocidade de fase a partir dos ensaios, calcula-se a diferença

$$\left(\frac{1}{V_p^2} - \frac{1}{V_n^2} \right) \quad (4.20)$$

para os ângulos 0° e θ_r . Levando-se em consideração que Δt na eq. (4.18) é

$$\Delta t = t_0 - t_{\theta_i} = t_0 - t_n + t_n - t_{\theta_i} = \Delta t_0 - \Delta t_{\theta_i}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta t_0 = t_0 - t_n = (1/V_0 - 1/V_n) \quad (4.22)$$

é a diferença de tempo de propagação entre a amostra e o fluido com distância igual ao dobro da espessura da amostra. $\Delta t_{\theta_i} = t_n - t_{\theta_i}$ é a diferença de tempo entre a incidência normal t_n e incidências oblíquas arbitrárias t_{θ_i} . Para calcular Δt_0 , utilizam-se as velocidades do fluido V_0 e da amostra V_n sob incidência normal.

A grandeza Δt_{θ_i} para um ângulo de incidência θ_i arbitrário pode ser obtida através de considerações geométricas (WANG et al, 2003):

$$\Delta t_{\theta_i} = \frac{2h \cos(\theta_r - \theta_i)}{V_0 \cos \theta_r} - 2h(1/V_0 - 1/V_n) - \frac{2h}{V_p \cos \theta_r} \quad (4.23)$$

onde o ângulo de refração θ_r pode ser calculado pela lei de Snell.

A velocidade de fase medida com pulso-eco sob um ângulo de refração θ_r no material é dada por:

$$V_p = \left(\frac{1}{V_n^2} + \frac{\Delta t_0 - (\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i}) \cos \theta_i}{h V_0} + \frac{\Delta t_{\theta_i} (2\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i})}{4h^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.24)$$

As velocidades de fase sob incidência oblíqua são calculadas pela eq. (4.24) utilizando o valor de V_n . Próximo da incidência normal, tanto θ_i quanto Δt_{θ_i} são muito pequenos e o segundo e o terceiro termo da eq. (4.24) desaparecem, que conduz à $V_p \rightarrow V_n$ e $\theta_r \rightarrow 0$.

A técnica SRM tem algumas vantagens em relação a outras técnicas. Primeiramente, somente variações no tempo de propagação devido à rotação da amostra e conseqüentemente variações no caminho acústico são medidos, o que é muito mais preciso do que o tempo absoluto de propagação ao longo do caminho acústico. Segundo, a velocidade de fase em incidência normal é medida com mais precisão, eliminando erros acumulativos. Terceiro, como todas as medidas são feitas em relação ao caminho acústico na presença da amostra, esta técnica é menos sensível a pequenas curvaturas na superfície da amostra, pois o efeito de imperfeições geométricas na amostra é minimizado durante o alinhamento da amostra sob incidência normal. Finalmente, a diferença de atenuação entre o sinal de referência e o medido é reduzida.

4.2 Correção de fase para a velocidade de fase

A precisão na obtenção das constantes elásticas depende da precisão das velocidades obtidas experimentalmente. Um método alternativo para medir a velocidade de fase com precisão baseia-se na técnica de pulso-eco SRM (CHU, ROKHLIN, 1992), (CHU, ROKHLIN, 1994b), (CHU, ROKHLIN, 1994c), mostrada anteriormente. Se implementado corretamente este método fornece uma precisão de 0,3% nas velocidades obtidas experimentalmente, de acordo com Hollman e Fortunko (1998). Neste método, a amostra é imersa em água e os sinais são transmitidos sob diferentes ângulos de incidência na amostra, refletidos pelo refletor e retornando ao transdutor. A velocidade

na amostra é primeiramente medida sob incidência normal enquanto que as velocidades oblíquas são obtidas a partir da diferença de tempo $\Delta t_{\theta_i} = t_n - t_{\theta_i}$. Porém, esta técnica despreza dois efeitos: um é o efeito de difração devido ao tamanho limitado do transdutor e o outro é a distorção no sinal devido à mudança de fase entre duas interfaces dissimilares (água-amostra, por exemplo). A correção de fase para a técnica de pulso-eco SRM foi primeiramente tratada por Hollman e Fortunko (1998), que demonstram um método para obter com boa precisão as velocidades das ondas elásticas sob incidência oblíqua. A correção por difração já foi bastante estudada na literatura (PAPADAKIS, 1966), (PAPADAKIS, MARGETAN, 1990), (BUIOCHI, 1994), (KUSHIBIKI, ARAKAWA, 2000), (RUIZ, NAGY, 2002). O efeito da difração nas velocidades obtidas experimentalmente é pequeno, da ordem de 0,1% de acordo com Ruiz e Nagy (2002). Entretanto a maior parte dos estudos sobre correção da difração foram realizados em meios isotrópicos sob incidência normal.

4.2.1 Mudança de fase na interface fluído-sólido

Fenômenos de transmissão entre uma interface fluído-sólido isotrópico ou anisotrópico já foram bem estudadas (AULD, 1990); (BREKHOVSKIKH, 1980). Os coeficientes de reflexão e transmissão de uma interface fluído-sólido tornam-se complexos quando o ângulo de incidência é maior que o primeiro ângulo crítico e conseqüentemente a fase do sinal sofre alterações. Essa mudança de fase é independente da frequência e causa distorções na forma do sinal, o que introduz erros nas medições do tempo.

Como descrito por Wang et al. (2003), a mudança de fase para os materiais compostos de fibras muda de 0° para 90° no ângulo crítico θ_{cr} da onda longitudinal, mas diminui para 0° em um determinado ângulo de incidência, chamado de AFZ (ângulo de fase zero). Após este ângulo, a fase aumenta gradativamente conforme o ângulo de incidência aumenta até que se atinja o ângulo crítico θ_{cr}'' da onda de cisalhamento.

Considerando um material ortotrópico no plano de simetria, a mudança de fase pode ser calculada através da seguinte relação (WANG et al., 2003):

$$\tan \zeta = \frac{T_t^x T_l^{z'} \cos \theta_i}{\rho_0 V_0 (W_l T_t^x - W_t T_l^x) - T_l^z T_t^z \cos \theta_i}, \quad (4.25)$$

onde V_0 é a velocidade e ρ_0 a densidade do fluido; $W_{l,t}$ são as componentes normal do deslocamento no sólido para a onda longitudinal (l) e cisalhamento (t), respectivamente, $T_{l,t}^z$ e $T_{l,t}^x$ as componentes das tensões normais e laterais (ANEXO B) e $T_l^{z'}$ a parte imaginária de T_l^z . Para um material isotrópico, a eq. (4.25) torna-se:

$$\tan \zeta = \frac{V_{l0} \cos^2(2\theta_t) \cos \theta_i}{(V_{L0}^2 \sin^2 \theta_i - 1)^{1/2} (V_{t0}^2 \sin(2\theta_t) \sin 2\theta_i + \rho_0 / \rho)}, \quad (4.26)$$

onde $V_{L0} = V_L/V_0$ e $V_{t0} = V_t/V_0$; V_L , V_t são as velocidades longitudinais e de cisalhamento no sólido, respectivamente; θ_t é o ângulo de refração da onda de cisalhamento.

No ângulo crítico θ_{cr} , observa-se que o lado direito da equações (4.25) e (4.26) tende a infinito [$V_{l0} \sin \theta_i = 1$ na eq. (4.26)], portanto a fase é de 90° . Sob determinado ângulo de incidência acima de θ_{cr} , a componente de tensão cisalhante T_t^x da onda de cisalhamento no sólido é zero e o lado direito da eq. (4.26) torna-se zero e portanto a fase é zero. Fisicamente isto ocorre no ângulo incidente AFZ para satisfazer a condição de contorno de tensão de cisalhamento zero e portanto o desaparecimento da componente de tensão de cisalhamento da onda transversal no sólido requer que a tensão cisalhante produzida na interface pela onda longitudinal refratada seja zero. Esta condição é satisfeita somente quando a amplitude da onda longitudinal refratada é zero, i. e., somente quando uma onda de cisalhamento é excitada no sólido. Como a onda longitudinal não é formada no sólido no ângulo de incidência AFZ, o coeficiente de transmissão é real e com fase zero. Para um sólido isotrópico, essa condição é satisfeita

quando $\theta_i = 45^\circ$ ($\cos(2\theta_i) = 0$). Para um material anisotrópico essa condição não é universal e o ângulo refratado no AFZ não necessariamente é 45° . Como θ_i aumenta continuamente após AFZ, a fase já não é mais zero e no ângulo θ_{cr}^{II} , a fase é dada por

$$\tan \zeta^{II} = \frac{\rho \cot(\theta_{cr}^{II})}{\rho_0 K^{1/2}}, \quad (4.27)$$

onde $K = \left((C_{11} - C_{55})C_{33} - (C_{13} + C_{55})^2 \right) / (C_{33}C_{55})$. Para materiais isotrópicos,

$$K = 1 - \frac{V_t^2}{V_L^2} = \frac{1}{2(1-\nu)}.$$

O AFZ separa a fase em duas regiões. A primeira corresponde ao decréscimo de 90° para 0° e na segunda, o aumento de 0° a θ_{cr}^{II} . Na Fig. 4.5, tem-se a mudança de fase para um sólido isotrópico com diferentes coeficientes de Poisson ν . O ângulo de incidência está normalizado pelo ângulo crítico da onda longitudinal. Como mostrado na Fig. 4.5, a posição AFZ normalizada é determinada pelo coeficiente de Poisson; quanto maior, maior será a primeira região. A mudança de fase na segunda região é determinada pelo valor de θ_{cr}^{II} que é função do coeficiente de Poisson, Módulo de Elasticidade e densidade. Baixo Módulo de Elasticidade e densidade, e alto coeficiente de Poisson, implica em baixos θ_{cr}^{II} . Para a maioria dos materiais, ν próximo de 0,3, a faixa angular da primeira região será quase a metade da faixa total entre os dois ângulos críticos. A mudança de fase no segundo ângulo crítico é usualmente maior para metais com alta densidade e Módulo de Elasticidade. Para materiais compostos, o AFZ ocorre muito próximo ao primeiro ângulo crítico e a mudança na fase é pequena. θ_{cr}^{II} é pequeno em materiais compostos com baixa densidade.

Fig. 4.5: Efeito das propriedades do material na mudança de fase numa interface água-sólido. O ângulo de incidência está normalizado pelo ângulo crítico ($\rho = 3.000 \text{ Kg/m}^3$ e $E = 40 \text{ GPa}$) (WANG et al., 2003).

A mudança de fase de um sólido para um líquido ocorre exatamente igual como na interface líquido-sólido e portanto as equações (4.25) e (4.26) são válidas neste caso. Na técnica de transmissão direta, ocorre uma mudança de fase na interface líquido-sólido e outra na interface sólido-líquido. Portanto, basta multiplicar as equações (4.25) ou (4.26) por dois. Já na técnica de pulso-eco, basta multiplicar por as equações (4.25) ou (4.26) por quatro.

4.2.2 Distorção no sinal devido à mudança de fase

A mudança de fase em interfaces planas é independente da frequência (HOLLMAN, FORTUNKO, 1998). Para um sinal harmônico $\text{sen}(\omega t)$, introduzir uma mudança de fase ζ significa deslocar o sinal no domínio do tempo por $\Delta t = \zeta / \omega$, i.e., $\text{sen}(\omega t + \zeta) = \text{sen}(\omega(t + \Delta t))$. Para um sinal banda larga, uma mudança de fase constante para todas harmônicas pode significar uma mudança significativa na forma do sinal.

Em ensaios não-destrutivos por ultra-som, o espectro do transdutor $F(\omega)$ pode ser aproximado por uma função gaussiana (WANG et al., 2003):

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_w}} e^{-(f-f_0)^2 / 2B_w^2}, \quad (4.28)$$

onde f_0 é a frequência central do transdutor e B_w a largura de banda do transdutor. Introduzindo-se uma mudança de fase ζ constante, o correspondente sinal no domínio do tempo será:

$$f(t) = e^{-2\pi^2 t^2 B_w^2 + 2\pi j f_0 (t - \zeta / (2\pi f_0))} \quad (4.29)$$

A partir da eq. (4.29), nota-se que para um sinal na forma gaussiana, o efeito da mudança de fase é similar a um sinal harmônico. A Fig. 4.6 ilustra um sinal gaussiano sob diferentes mudanças de fase. 0° indica o sinal de referência.

Fig. 4.6: Simulação da distorção do sinal no domínio do tempo devido a mudança de fase. A largura de banda B_w utilizada é de 2 MHz em -3 dB e a frequência central f_0 5 MHz (WANG et al., 2003).

4.2.3 Correção de fase: simulação

Como mostrado na Fig. 4.6, uma mudança de fase no sinal corresponde a um atraso no sinal. Este atraso para um sinal harmônico ou gaussiano pode se calculado por:

$$\Delta t_{\theta_i}^P = k_I \frac{\zeta}{360f} \quad (4.30)$$

o fator k_I é o número de interfaces fluído-sólido, sólido-fluído que o sinal atravessa. Para a técnica de pulso-eco, $k_I=4$. Para transmissão direta, $k_I=2$. A partir da eq. (4.30), pode-se calcular o tempo de propagação corrigido para a técnica de pulso-eco SRM:

$$\Delta t_{corr} = \Delta t_{\theta_i} + \Delta t_{\theta_i}^P \quad (4.31)$$

Para ilustrar o efeito da mudança de fase, Wang et al. (2003) simulam os tempos Δt_{θ_i} através da eq. (4.23) para uma amostra de alumínio com espessura de 2,5 mm. A Fig. 4.7 compara os resultados obtidos com e sem correção de fase. De acordo com os resultados das simulações, a correção de fase só é necessária para o primeiro ângulo crítico, cujo ponto está mostrado na Fig. 4.7, pois há uma diferença de tempo na ordem de 40 ns, que representa um erro de 1% na velocidade de fase neste ângulo. A Fig. 4.8 faz a mesma comparação, só que para um laminado unidirecional com plano de incidência no plano 1-2 do material. Como nota-se, neste plano a correção de fase não é necessária. Wang et al. (2003) concluem que para laminados unidirecionais a correção de fase é necessária somente para uma onda incidente nos planos de simetria 1-3 e 2-3.

Fig. 4.7: Comparação do tempo de propagação calculado com e sem correção de fase para alumínio.

Fig. 4.8: Comparação do tempo de propagação calculado com e sem correção de fase para um composto de fibra de carbono/epóxi.

CAPÍTULO 5: VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS

No presente trabalho, as velocidades das ondas elásticas nas amostras são medidas em um tanque de imersão sob diferentes ângulos de propagação, com frequências de 0,5, 1,0 e 2,25 MHz, para calcular as constantes elásticas do material. No tanque de imersão, a água atua como um acoplante para transferir a energia mecânica do transdutor para a amostra e vice-versa. Como o transdutor não fica em contato direto com a amostra, garante-se um acoplamento constante com a amostra. Além disso, é possível medir as velocidades em diferentes ângulos, rotacionando-se a amostra. As montagens dos experimentos são feitas de modo que as amostras são fixadas a um sistema de goniômetro manual que permite girá-las em diferentes ângulos. As duas técnicas utilizadas são: transmissão direta e pulso-eco. O sistema eletrônico de excitação do transdutor e a aquisição dos sinais produzidos pelas ondas elásticas consistem de um pulsador/receptor PANAMETRICS 5072PR, uma placa de aquisição com conversor A/D de 12bits e taxa de aquisição de 62,5 MHz e um microcomputador tipo PC. Utilizam-se os seguintes transdutores de ultra-som:

- Um transdutor de 0,5 MHz com diâmetro 25 mm (modelo PANAMETRICS V301);
- Dois transdutores de 1,0 MHz com diâmetro 19 mm (modelo PANAMETRICS V314);
- Dois transdutores de 2,25 MHz com diâmetro 19 mm (modelo PANAMETRICS V305);

A Fig. 5.1 ilustra o esquema do sistema eletrônico. Os experimentos são realizados no tanque mostrado na Fig. 5.2.

Antes de realizar cada ensaio, a temperatura da água é controlada por um circulador de água e estabilizada à temperatura de $25,0^\circ \pm 0,1^\circ\text{C}$. O conjunto é então alinhado mecanicamente. Os sinais são adquiridos com 2048 pontos para a técnica de

transmissão direta e 3072 pontos para a técnica de pulso-eco. Para cada experimento, o sinal sem a amostra (somente através da água), é adquirido como sinal de referência. As amostras são giradas de um em um grau, numa faixa de zero a cinquenta graus. A cada ângulo de incidência, o sinal é adquirido com a média de 64 amostras para diminuir ruídos eletrônicos aleatórios. Em todos os ensaios, os sinais de ultra-som são armazenados para cada ângulo de incidência.

Fig. 5.1: Diagrama do sistema de aquisição.

(a)

Fig. 5.2: Tanque de ensaios. A amostra é fixada junto ao goniômetro. (a) Montagem pulso-eco. (b) Montagem transmissão direta.

5.1 Processamento de sinais

Para calcular a velocidade de propagação no meio, é necessário calcular com precisão a diferença de tempo de propagação da onda elástica com e sem a amostra para todos os ângulos de incidência. A técnica utilizada para tal é a de correlação cruzada (ADAMOWSKI, 1995). De acordo com Smith (1999), correlação cruzada é a operação matemática para medir a similaridade de duas formas de onda, sendo muito utilizada para determinar o intervalo de tempo entre dois sinais. Seu uso é de suma importância em radares, comunicações digitais e em outras áreas da Engenharia.

Assumindo-se dois sinais no domínio do tempo, $x(n)$ e $y(n)$, discretizados por um intervalo de tempo n_t , a correlação cruzada entre esses dois sinais é definida por (SUN, 2002):

$$r_{xy}(\Delta t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n_t) y(n_t - \Delta t) \quad (5.1)$$

E o produto interno de dois vetores em um domínio finito dimensional é

$$\langle x(n_t), y(n_t) \rangle = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} x(n_t) y(n_t) \quad (5.2)$$

onde $0 \leq n_t \leq N_t - 1$ é o domínio de interesse.

Sendo $x(n_t) = x(n_t - \Delta t)$ na eq. (5.2), quando $\Delta t = 0$, os sinais $x(n_t)$ e $x(n_t - \Delta t)$ são idênticos e o produto interno da eq. (5.2) é máximo. O parâmetro Δt entre os dois sinais sempre ocorre no máximo valor da correlação cruzada. Comparada com a eq. (5.2), a correlação cruzada, eq. (5.1), é o produto interno de $x(n)$ e $y(n)$, que é função do intervalo Δt . Portanto, a correlação cruzada, assim como outros produtos internos, mede o grau de similaridade entre dois sinais.

O sinal com a amostra, é comparado com o sinal de referência, sem a amostra. O intervalo Δt é então determinado no ponto de máximo da função de correlação cruzada r_{xy} entre os dois sinais. Este é o ponto de maior similaridade entre os dois sinais. O processamento digital dos sinais é feito utilizando-se o *software* Matlab (MATLAB, 2002). A Fig. 5.3 mostra dois sinais e sua respectiva correlação cruzada.

Após o cálculo preciso da diferença de tempo entre os sinais com e sem a amostra, aplica-se a equação para o cálculo da velocidade de fase.

Fig. 5.3: Técnica de correlação cruzada. (a) sinal de referência (água). (b) sinal com a amostra a 0°. (c) correlação cruzada de (a) e (b).

5.2 Efeito da temperatura nos experimentos

A temperatura do tanque é controlada por um circulador de água e estabilizada sob a temperatura de $25,0 \pm 0,1^\circ\text{C}$. A velocidade de propagação na água nesta temperatura é de 1.497 m/s (GROSSO; MADER, 1972). O controle de temperatura utilizado em técnicas de imersão é crucial pois pequenas diferenças de temperatura causam significativas variações no tempo de propagação da onda. Como exemplo, a diferença de propagação Δt_{θ_i} para o método pulso-eco SRM é usualmente menor que 1 μs , enquanto que uma queda de alguns graus Celsius na temperatura da água pode resultar em uma variação de décimos de μs em Δt_{θ_i} . Tal fato é causado pela variação na velocidade de propagação da água devido à mudança de temperatura. A velocidade de propagação na água aumenta aproximadamente 2,4 m/s para cada 1°C de aumento na temperatura (CHU; ROKHLIN, 1994b). Portanto, mudanças na temperatura da água a partir do instante do sinal de referência (somente através da água) até o instante do sinal com a amostra, introduzirão erros significativos na determinação da velocidade de fase.

Em adição às variações de temperatura, flutuações também podem introduzir erros, uma vez que o sinal de referência e o sinal sobre a amostra foram adquiridos sob pequenas diferenças de temperatura. De acordo com Chu e Rokhlin (1994b), um erro ΔT na ordem de $0,1^\circ\text{C}$ na temperatura da água resulta em um erro de ± 16 ns na diferença de tempo entre os sinais, o que resulta num erro experimental $\Delta V_p/V_p$ máximo de 0,44% nas velocidades de fase. A Tabela 5.1 mostra o erro experimental devido à variações no tempo na ordem de ± 16 ns para as ondas longitudinal V_L e transversal V_{qs} para uma amostra de fibra de vidro/epóxi. Como pode-se notar, a temperatura da água é crucial nos resultados, principalmente para as ondas longitudinais V_L .

Tabela 5.1: Erro simulado na velocidade de fase devido à variações no tempo de propagação na ordem de ± 16 ns causado por flutuações na temperatura para (a) velocidade longitudinal e (b) velocidade transversal em um material de fibra de vidro/epóxi.

Ângulo de refração (graus)	Velocidade (km/s)	Erro simulado (%)
Onda Longitudinal V_L		
2,08	3,11	0,34
10,4	3,11	0,34
19,1	3,13	0,35
21,5	3,16	0,36
23,9	3,18	0,37
26,6	3,22	0,38
29,5	3,28	0,40
32,9	3,36	0,44
Onda transversal V_{qs}		
29,2	2,13	0,08
41,2	2,17	0,08
45,4	2,13	0,07
47,9	2,10	0,06
51,5	2,04	0,04
55,0	1,99	0,03
60,5	1,91	0,01
61,6	1,89	0,01

Para entender melhor o efeito das variações de tempo ζ_t nos sinais devido a pequenas flutuações de temperatura, basta substituir Δt_{θ_i} na eq. (4.26) por $\Delta t_{\theta_i} + \zeta_t$ (ζ_t pode ser negativo ou positivo). A velocidade de fase resultante V_p' é dada por (CHU; ROKHLIN, 1994b):

$$V_p' = \left(\frac{1}{V_p^2} + \frac{V_0(\Delta t_0 + \Delta t_{\theta_i}) - 2h \cos \theta_i}{2h^2 V_0} \zeta_t + \frac{\zeta_t^2}{4h^2} \right)^{-1/2} \quad (5.3)$$

e tirando uma aproximação de primeira ordem de ζ_t , tem-se:

$$V_p' = V_p \left(1 - \frac{V_0(\Delta t_0 - \Delta t_{\theta_i}) - 2h \cos \theta_i}{4h^2 V_0} V_p^2 \zeta_t \right) \quad (5.4)$$

Como se pode observar pela equação acima, o erro causado pelas variações de tempo ζ_t são proporcionais a velocidade de fase ao quadrado. Isto explica os resultados mostrados na Tabela 5.1. Para uma onda longitudinal V_L , a velocidade aumenta conforme o ângulo de refração aumenta, portanto aumentando o erro. A velocidade de cisalhamento V_{qs} possui um erro menor pois sua magnitude também é menor.

5.3 Descrição das amostras

Duas amostras unidirecionais de fibra de vidro/epóxi foram laminadas manualmente (Amostra 01 e 02) representando um material transversalmente isotrópico. Ambas foram laminadas utilizando tecido UD 600 g/m³. A amostra 03, 04 e 05 foram produzidas pela empresa TECSIS, sendo a amostra 03 laminada com tecido unidirecional, a amostra 04 laminada com tecido biaxial 0/90° e a amostra 05 laminada com tecido biaxial ±45°. As densidades das amostras foram obtidas através da relação $\rho = m/V$. A Tabela 5.2 mostra em resumo algumas propriedades das amostras. No ANEXO C encontra-se uma ilustração de cada amostra.

Tabela 5.2: Propriedades das amostras.

Propriedades	Amostra 01	Amostra 02	Amostra 03	Amostra 04	Amostra 05
Composição ^a	[0] ₁₉	[0] ₁₄	[0] ₁₆	[0/90] ₁₀	[±45] ₁₀
Fração Vol. de fibra (%)	35	45	55	55	55
Densidade (kg/m ³)	1.636	1.785	1.893	1.875	1.876
Comprimento (mm)	82,3	73,3	73,9	81,0	79,9
Largura (mm)	80,7	70,6	69,2	76,7	79,5
Espessura (mm)	9,65	6,95	7,32	4,84	4,84
Paralelismo entre as superfícies (mm/mm)	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001

^aO índice indica o número de lâminas. Cada lâmina inclui uma camada de tecido de fibra de vidro impregnada com resina epóxi.

5.4 Reconstrução das constantes elásticas

As constantes elásticas podem ser calculadas a partir das velocidades de fase em algumas direções específicas do material anisotrópico. Enquanto que essa aproximação é válida, esta é muito sensível a erros quando se deseja a reconstrução completa da matriz das constantes elásticas do material. Por essa razão, Rokhlin e Wang (1992) utilizam uma técnica de otimização por mínimos quadrados. Esta técnica minimiza os desvios entre as velocidades medidas e calculadas sob diferentes ângulos de propagação determinando assim as constantes elásticas. O algoritmo é válido para materiais de anisotropia arbitrária e de direções arbitrárias.

As velocidades de fase das ondas elásticas devem satisfazer a equação de Christoffel (AULD, 1990), eq. 3.55. A eq. 3.55 é um polinômio cúbico da velocidade de fase V_p . Se as propriedades do material são conhecidas, a eq. 3.55 define três velocidades independentes dada uma direção de propagação da onda. Por outro lado, se as velocidades de fase da onda são conhecidas, obtêm-se as constantes elásticas do material invertendo a eq. 3.55.

Para extrair as constantes elásticas das amostras a partir das velocidades de fase obtidas experimentalmente utilizando-se a técnica de otimização não linear por mínimos quadrados, é conveniente usar a solução analítica da equação de Christoffel, implementada no ambiente do *software* Matlab (MATLAB, 2002), que relaciona a direção de propagação, as velocidades de fase e as constantes elásticas. Isso é feito manipulando a solução da equação cúbica (ROKHLIN; WANG, 1992):

$$\rho V_k^2 = X_k - a/3; \quad (5.5)$$

onde

$$X_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{-q}{2(p/e)^{3/2}}\right);$$

$$p = a^2 / 3 - b;$$

$$q = d - ab / 3 + 2(a / 3)^3;$$

$$a = -\Gamma_{ii};$$

$$b = -(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}\Gamma_{33});$$

$$d = -(\Gamma_{11}\Gamma_{22}\Gamma_{33} + 2\Gamma_{12}\Gamma_{13}\Gamma_{23} - \Gamma_{11}\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{22}\Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}\Gamma_{12}^2);$$

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl}n_jn_k;$$

V_k são as velocidades de fase e ρ a densidade. Esta solução é aplicável para qualquer grau de anisotropia e direção de propagação no material.

As propriedades desconhecidas do material podem ser encontradas minimizando a soma quadrática dos desvios entre as velocidades experimentais e calculadas considerando as constantes elásticas, e, se necessário, a densidade, como variáveis no espaço multidimensional l :

$$\min_{C_{ijkl} \in \mathbb{R}^l} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (V_i^e - V_i^c)^2, \quad (5.6)$$

onde l é o número de parâmetros independentes a ser extraído (constantes elásticas) e m é o número de velocidades medidas em diferentes direções; V^e e V^c são as velocidades de fase experimental e calculada, respectivamente. Para materiais ortotrópicos, o número de constantes elásticas independentes l deve ser nove. O método tem a vantagem de minimizar o efeito de desvios aleatórios dos experimentos na reconstrução.

As restrições do problema são colocadas de modo que $C_{ijkl} > 0$, sendo a matriz C_{ijkl} considerada ortotrópica. Para as amostras unidirecionais, a matriz de rigidez é simplificada adotando-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
C_{22} &= C_{11}, \\
C_{23} &= C_{13}, \\
C_{55} &= C_{44}, \\
C_{66} &= (C_{11} - C_{12})/2.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

o que reduz o número de constantes elásticas l a serem extraídas para cinco.

O maior problema em utilizar este método está em encontrar um vetor de partida ideal para as constantes elásticas, já que valores muito discrepantes não produzem resultados coerentes. A seguir é feita uma análise sobre a influência do vetor de partida e como erros experimentais alteram os resultados.

5.5 Estabilidade do algoritmo

Para verificar a estabilidade do algoritmo sob diferentes vetores de partida e possíveis erros experimentais, um conjunto de constantes elásticas é selecionado como sendo os valores originais e usados para gerar as velocidades sintéticas V_L e V_{qs} a partir da equação de Christoffel. A partir daí, diferentes níveis de ruídos aleatórios são adicionados às velocidades de fases sob diferentes ângulos de refração. Esses erros aleatórios simulam possíveis erros experimentais como, por exemplo, uma variação na temperatura da água durante o experimento. Tem-se então um conjunto de velocidades sintéticas que são utilizadas na eq. (5.6) para determinar as constantes elásticas pelo método de mínimos quadrados. As constantes elásticas obtidas não são necessariamente iguais aos valores originais. Esses resultados são comparados aos valores originais para estudar os efeitos de erros aleatórios e do vetor de partida.

Para simular as velocidades das ondas elásticas, dois conjuntos de constantes elásticas e densidades são utilizados. O primeiro é um material composto cerâmico (SiC/Si₃N₄) unidirecional com isotropia transversal e o segundo um composto unidirecional de fibra de carbono/epóxi. A densidade do composto cerâmico é 2.500 kg/m³ e a do composto de fibra de carbono 1.610 kg/m³. Os valores das constantes elásticas utilizadas foram obtidos do artigo de Chu e Rokhlin (1994a). Ambas simulações são realizadas no ambiente do *software* Matlab (MATLAB, 2002), utilizando-se o algoritmo de otimização de Gauss-Newton.

5.5.1 Efeitos do erro aleatório e do vetor de partida nos resultados

Para estudar a estabilidade do procedimento de otimização com respeito a erros aleatórios nos dados experimentais, utilizou-se um conjunto de velocidades de fase com diferentes níveis de ruídos, 0, 0,5, 2,0 e 5,0% respectivamente. O vetor de partida utilizado foi inicialmente escolhido para ser 10% maior que as constantes elásticas originais. As constantes elásticas resultantes para o composto cerâmico SiC/Si₃N₄ são mostradas na Tabela 5.3, onde o número entre parênteses indica o erro percentual para cada nível de ruído quando comparados com as constantes originais usadas para a geração das velocidades. Utilizando-se estes resultados, pode-se calcular teoricamente as velocidades de fase e compará-las com os dados simulados. Como exemplo, na Fig. 5.4, tem-se uma comparação das velocidades com e sem ruído aleatório de 2% em dois planos de simetria, onde a velocidade simulada é mostrada por pontos discretos e as linhas sólidas representam as velocidades a partir das constantes elásticas originais.

Tabela 5.3: Resultados das constantes elásticas obtidas usando velocidades simuladas em um plano de simetria do material com e sem erros randômicos. As constantes C_{ij} estão em GPa.

Tipo de Dado		C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Original		100	32,0	150	36,0	32,0
Vetor de Partida	±10%	110	35,2	165	39,6	35,2
		90,0	28,8	135	32,4	28,8
	±30%	130	41,6	195	46,8	41,6
		70	22,4	105	25,2	22,4
<i>Ruído aleatório</i>						
0%		100	32,0	150	36,0	32,0
Erro		(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)
0,5%		99,8	32,5	151	36,0	32,1
Erro		(0,2%)	(1,6%)	(0,7%)	(0%)	(0,3%)
2%		101	28,1	141	35,9	31,5
Erro		(1,0%)	(12%)	(6,0%)	(0,3%)	(1,6%)
5%		103	27,2	133	35,5	32,3
Erro		(3,0%)	(15%)	(11%)	(1,4%)	(0,9%)

Fig. 5.4: Velocidade de Fase versus ângulo de refração para o composto SiC/Si₃N₄ com ruído aleatório de 2%. (a) Para o plano 1-3 e (b) para o plano 1-2.

Pode-se notar pela Tabela 5.3 que o erro na constante C_{33} aumenta conforme o nível de ruído aumenta. O resultado para a constante C_{11} , por outro lado, é menos afetado pelo ruído, sendo mais sensível à medição sob incidência normal. Nota-se então que a melhor forma para obter C_{11} é através da velocidade da onda sob incidência normal. Portanto, a constante C_{11} pode ser considerada como conhecida, reduzindo o número de constantes elásticas C_{ij} desconhecidas. Para as constantes C_{44} e C_{66} , os ângulos de refração ideais são 0° ou 90° para as ondas de cisalhamento, mas que não são obtidas por incidência normal, portanto mais suscetíveis a erros do que em C_{11} . Para C_{13} , o ângulo de refração ideal é 45° (CHU; ROKHLIN, 1994a), que está incluído nos dados simulados. O erro na constante C_{13} é maior que o erro da constante C_{33} , o que indica alta sensibilidade. Para um material composto de fibra de carbono/epóxi, os resultados são mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Resultados das constantes elásticas obtidas usando velocidades simuladas em um plano de simetria do material com e sem erros aleatórios. As constantes C_{ij} estão em GPa.

Tipo de Dado		C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Original		17,0	11,8	162	8,00	4,40
Vetor de Partida	$\pm 10\%$	18,7	13,0	178	8,80	4,84
		15,3	10,6	146	7,20	3,96
	$\pm 30\%$	22,1	15,3	211	10,4	5,72
		11,9	8,26	113,4	5,60	3,08
0%		17,0	11,8	162	8,00	4,40
Erro		(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)	(0,0%)
0,5%		17,0	12,0	161	8,04	4,32
Erro		(0,0%)	(1,7%)	(0,6%)	(0,5%)	(1,8%)
2%		17,2	12,4	157	8,15	4,36
Erro		(1,2%)	(5,1%)	(3,1%)	(1,9%)	(0,9%)
5%		17,5	13,1	150	8,40	4,27
Erro		(3,0%)	(11%)	(7,4%)	(5,0%)	(3,0%)

De acordo com a Tabela 5.3 e a Tabela 5.4, pode-se concluir que o processo de otimização é relativamente estável para níveis de erros aleatórios menores que 2%. Resultados indesejáveis para as constantes elásticas podem ser obtidos para níveis de ruídos entre 2% e 5%.

Para realizar a inversão, deve-se selecionar um vetor de partida para as constantes elásticas. É desejável que estes valores sejam os mais próximos possíveis das constantes elásticas do material em estudo. Quando as propriedades do material são desconhecidas, selecionar um vetor de partida inicial torna-se uma tarefa difícil. Portanto, espera-se que o processo de otimização seja independente do vetor de partida. Para investigar o efeito do vetor de partida no procedimento de otimização não-linear por mínimos quadrados, utilizou-se um conjunto de velocidades de fase sintéticas com diferentes níveis de ruído e vetores de partida. Os vetores de partida foram selecionados para ser $\pm 10\%$ e $\pm 30\%$ dos valores originais das constantes elásticas, como mostrado na Tabela 5.3 e na Tabela 5.4.

Em planos de simetria, de acordo com a Tabela 5.3 e Tabela 5.4, as constantes elásticas obtidas para ambos os materiais não são afetadas pelo vetor de partida. Para vetores de partida com margem em torno $\pm 10\%$ do valor original, os resultados da inversão são idênticos aos originais. Além disso, os resultados não sofrem alterações mesmo que a margem vetor de partida seja em torno de $\pm 30\%$. Isto significa que o método de otimização não-linear por mínimos quadrados não é significativamente afetado pelo vetor de partida, desde que as velocidades não apresentem erros aleatórios em suas magnitudes maiores que 2%. Para erros aleatórios na ordem de 5%, o que é um valor muito alto para erros nos dados experimentais, o vetor de partida com valores $\pm 30\%$ dos originais não apresenta bons resultados. Nesses casos o vetor de partida precisa necessariamente estar mais próximo da solução.

O método de otimização utilizado pelo *software* Matlab (MATLAB, 2002) baseia-se no algoritmo de Gauss-Newton. Este algoritmo requer um vetor de partida próximo à solução do problema quando as velocidades das ondas elásticas são obtidas experimentalmente, de acordo com Mouchtachi et al. (2004). Além do mais, se o processo de inicialização não está próximo da solução exata, o algoritmo muitas vezes converge próximo ao um mínimo relativo que não corresponde à realidade física do material (EVERY; SACHSE, 1992); (SEINER; LANDA, 2005).

A fim de melhorar ainda mais os resultados finais, utilizou-se como comparação nos resultados experimentais um outro algoritmo de otimização por mínimos quadrados, baseado no algoritmo de Levenberg-Marquardt (MADSEN et

al., 2004), que, de acordo com Mouchtachi et al. (2004), permite uma melhor convergência para a solução única. Como qualquer outro método iterativo, o processo de minimização deve ser inicializado introduzindo algumas constantes elásticas. Antes de inicializar o processo de otimização, o vetor de partida é escolhido a partir da regra das misturas, descrita no próximo capítulo.

CAPÍTULO 6: RESULTADOS

Os ensaios são realizados nas cinco amostras utilizando-se as técnicas de transmissão direta e pulso-eco. Baseando-se nas velocidades obtidas para cada ângulo, as constantes elásticas são obtidas usando o modelo inverso.

6.1 Cálculo da velocidade

A partir dos sinais de ultra-som obtidos experimentalmente, foi utilizado o ambiente do *software* Matlab (MATLAB, 2002) para o processamento digital de sinais. A velocidade de fase usando a técnica de pulso-eco SRM é calculada pela eq. (4.24) e a velocidade de fase usando transmissão direta é calculada pela eq. (4.18).

O gráfico da velocidade para a amostra 01 (unidirecional, laminada manualmente) é mostrada na Fig. 6.1. A onda longitudinal (V_L) propagando-se no plano 1-2 mostra um pequeno grau de anisotropia no material, diminuindo muito pouco conforme se aumenta o ângulo de incidência. A velocidade de cisalhamento (V_{qs}) no plano 1-2 é praticamente constante após o ângulo crítico θ_{cr} da onda longitudinal, que pode ser calculado através da eq. (3.48), exibindo assim a isotropia transversal do material. Devido à anisotropia do meio no plano 1-3, tanto a velocidade longitudinal quanto à de cisalhamento mudam conforme o ângulo. A velocidade longitudinal aumenta conforme o ângulo enquanto que a velocidade de cisalhamento diminui com o ângulo. Os mesmos gráficos para as amostras unidirecionais 02 e 03 são qualitativamente similares.

No caso de um material com tecido biaxial, onde não há um plano isotrópico no material, as considerações acima não são válidas. Por se tratar de um material ortotrópico, a velocidade de propagação da onda varia conforme o ângulo de incidência. A Fig. 6.2 mostra os gráficos da velocidade para a amostra 04 e a Fig. 6.3 mostra os gráficos para a amostra 05.

(a)

(b)

Fig. 6.1: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 01 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2 (plano isotrópico). (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3 (plano anisotrópico).

(a)

(b)

Fig. 6.2: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 04 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.

(a)

(b)

Fig. 6.3: Velocidade vs. ângulo de incidência para a amostra 05 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.

6.2 Ângulo de propagação na amostra

As velocidades calculadas são usadas na eq. (3.47) para determinar o ângulo de refração na amostra, a fim de verificar a direção de propagação da velocidade de fase dentro no material em função do ângulo de incidência. A Fig. 6.4 mostra o ângulo de refração na amostra em função do ângulo de incidência nos planos 1-2 e 1-3 para a amostra 01. A Fig. 6.5 e a Fig. 6.6, mostram, respectivamente, o ângulo de refração nas amostras 04 e 05.

(a)

(b)

Fig. 6.4: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 01 utilizando a técnica de transmissão direta. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2 (plano isotrópico). (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3 (plano anisotrópico).

(a)

(b)

Fig. 6.5: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 04 utilizando a técnica de pulso-eco. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.

(a)

(b)

Fig. 6.6: Ângulo de refração vs. ângulo de incidência para a amostra 05 utilizando a técnica de pulso-eco. (a) Para uma onda propagando-se no plano 1-2. (b) Para uma onda propagando-se no plano 1-3.

6.3 Estimativa das constantes elásticas

As constantes elásticas nas amostras de fibra de vidro/epóxi são obtidas utilizando as duas técnicas de imersão. Para as amostras unidirecionais, a constante elástica C_{11} foi calculada usando a velocidade longitudinal com incidência normal na Eq. (A.4). A constante elástica C_{66} foi calculada usando a média da velocidade de cisalhamento V_{qs} medida no plano 1-2 (transversalmente isotrópico) usando a Eq. (A.5). As outras três constantes elásticas são calculadas através das velocidades medidas no plano 1-3 (plano anisotrópico), utilizando-se o método de otimização por mínimos quadrados.

Para as amostras bidirecionais, as constantes elásticas C_{11} , C_{12} , C_{22} e C_{66} são calculadas através das velocidades medidas no plano 1-2. As constantes C_{13} , C_{33} e C_{55} são calculadas através das velocidades medidas no plano 1-3. As duas constantes restantes, C_{12} e C_{23} , são obtidas da seguinte relação (ZHENG et al., 2005):

$$C_{12} = C_{23} \text{ e } C_{44} = C_{55}, \text{ para a amostra 04}$$

e

$$C_{12} = C_{23} \text{ e } C_{44} = C_{66}, \text{ para a amostra 05}$$

6.3.1 Regra das misturas

Para comparar os resultados obtidos experimentalmente para as amostras unidirecionais, utilizou-se um modelo denominado Regra das Misturas. Se a fração de volume da fibra V_f e da matriz V_m e as constantes elásticas da fibra E_f e da matriz E_m são conhecidas, o módulo de Elasticidade longitudinal E_3 da amostra pode ser calculado pela regra das misturas dada por (DANIEL; ISHAI, 1999):

$$E_3 = V_f E_{3f} + V_m E_m \quad (6.1)$$

onde as propriedades da resina e da fibra são mostradas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades dos materiais.

Material	E_1 (GPa)	E_3 (GPa)	ν_{32} (GPa)	G_{23} (GPa)	Densidade (kg/m ³)
Fibra de vidro ^a	30,0	72,5	0,23	30,0	2.540
Resina epóxi ^b	4,80	4,80	0,35	1,80	1.158

^aextraído de Zheng et al. (2005).^bvalores obtidos experimentalmente.

Na eq. (6.1), assume-se que a fibra é anisotrópica com diferentes propriedades nas direções axial e transversal e que a matriz é isotrópica. A estimativa para o coeficiente de Poisson longitudinal do composto é dada por uma relação similar:

$$\nu_{32} = V_f \nu_{32f} + V_m \nu_m \quad (6.2)$$

Para o módulo de elasticidade E_2 do composto, transversal a fibra, tem-se (DANIEL; ISHAI, 1999):

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2} &= \frac{V_f}{E_{2f}} + \frac{V_m}{E_m} \\ \text{ou} \\ E_2 &= \frac{E_{2f} E_m}{V_f E_m + V_m E_{2f}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

E para o módulo de elasticidade transversal G_{23} do composto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_{23}} &= \frac{V_f}{G_{23f}} + \frac{V_m}{G_m} \\ \text{ou} \\ G_{23} &= \frac{G_{23f} G_m}{V_f G_m + V_m G_{23f}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Utilizando-se os resultados obtidos nas equações acima, é possível obter os valores das constantes elásticas do material, bastando utilizar a eq. (2.14).

6.4 Resultados das propriedades mecânicas

Baseando-se nas velocidades de fases obtidas experimentalmente para cada ângulo de incidência, utilizando-se as técnicas de transmissão direta e pulso-eco, as constantes elásticas são obtidas usando um algoritmo de otimização não-linear por mínimos quadrados.

Para calcular as propriedades mecânicas das amostras unidirecionais, basta aplicar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} E_3 &= C / (C_{11}^2 - C_{12}^2) \\ E_1 &= C / (C_{33}C_{11} - C_{13}^2) \\ v_{32} &= (C_{33}C_{12} - C_{13}^2) / (C_{33}C_{11} - C_{13}^2) \\ G_{23} &= C_{66} \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde $C = (C_{11} - C_{12}(C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2(C_{13}^2)))$.

Para calcular as propriedades mecânicas das amostras bidirecionais, dada sua matriz de flexibilidade s_{ijkl} , utilizar-se e eq. (2.9).

Os resultados para cada amostra utilizando as técnicas de imersão são mostrados a seguir.

6.4.1 Resultados da Amostra 01

A Tabela 6.2 e a Tabela 6.3 mostram os resultados obtidos na amostra 01 utilizando as frequências de 0,5 e 1 MHz. Para cada técnica de imersão e para cada frequência, utilizaram-se dois algoritmos, o de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. Calculou-se o vetor de partida a partir da Regra das Misturas e em seguida aplicou-se a eq. (2.14). Na Tabela 6.3, a diferença dos resultados é calculada em relação à Regra das Misturas para cada algoritmo.

Tabela 6.2: Resultados da amostra 01. As constantes elásticas estão em GPa.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Vetor Partida	--	--	11,2	5,26	31,4	2,66	--
Ref. Balasubramaniam (1996)	1 MHz	--	15,5	7,18	38,5	2,54	4,77
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	12,5	9,11	36,7	2,86	3,50
		Levenberg	12,4	9,73	39,9	2,64	3,50
Pulso-eco SRM		Gauss	11,8	10,2	32,7	2,46	3,54
		Levenberg	12,4	10,2	39,2	2,00	3,54
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	12,2	9,51	31,7	2,99	3,51
		Levenberg	12,2	11,0	38,4	2,20	3,51

Tabela 6.3: Propriedades mecânicas da amostra 01 comparadas com a regra das misturas.

	Frequência	Algoritmo	E_1	E_3	ν_{32}	G_{12}
Regra das misturas	--	--	9,26	28,2	0,30	--
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	9,21	27,1	0,31	3,50
		Diferença (%)	0,54	3,78	2,98	--
		Levenberg	9,13	29,3	0,30	3,50
		Diferença (%)	1,45	3,76	0,95	--
Pulso-eco SRM		Gauss	8,32	20,1	0,18	3,54
		Diferença (%)	10,2	28,8	42,4	--
		Levenberg	9,03	27,5	0,28	3,54
		Diferença (%)	2,48	2,37	9,34	--
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	8,81	21,3	0,25	3,51
		Diferença (%)	4,84	24,3	16,7	3,59
		Levenberg	8,61	24,5	0,23	3,51
		Diferença (%)	7,01	13,2	26,0	3,59

6.4.2 Resultados da Amostra 02

A Tabela 6.4 e a Tabela 6.5 mostram os resultados obtidos na amostra 02 utilizando as frequências de 0,5 e 1 MHz. Para cada técnica de imersão e para cada frequência, utilizaram-se dois algoritmos, o de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. Calculou-se o vetor de partida a partir da Regra das Misturas e em

seguida aplicou-se a eq. (2.14). Na Tabela 6.5, a diferença dos resultados é calculada em relação à Regra das Misturas para cada algoritmo.

Tabela 6.4: Resultados da amostra 02. As constantes elásticas estão em GPa.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Vetor Partida	--	--	16,4	7,36	39,8	3,54	--
Ref. Reddy et al. (2005)	3,5 MHz	--	15,0	11,7	49,6	3,90	4,63
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	16,6	9,97	40,9	3,75	5,25
		Levenberg	15,13	10,5	36,4	3,98	5,25
Pulso-eco SRM		Gauss	16,7	10,8	44,5	3,99	5,24
		Levenberg	17,8	11,8	42,8	3,82	5,24
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	16,4	9,70	39,2	3,49	5,14
		Levenberg	17,1	11,0	42,0	3,03	5,14

Tabela 6.5: Propriedades mecânicas da amostra 02 comparadas com a regra das misturas.

	Frequência	Algoritmo	E_1	E_3	ν_{12}	G_{12}
Regra das misturas	--	--	11,3	35,5	0,29	--
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	13,2	32,2	0,26	5,25
		Diferença (%)	17,5	9,38	11,3	--
		Levenberg	11,9	25,3	0,23	5,25
		Diferença (%)	5,57	28,7	20,7	--
Pulso-eco SRM		Gauss	13,1	34,3	0,25	5,24
		Diferença (%)	16,5	3,39	13,3	--
		Levenberg	13,5	31,8	0,28	5,24
		Diferença (%)	19,3	10,5	3,00	--
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	13,0	30,9	0,26	5,14
		Diferença (%)	15,3	13,1	9,34	--
		Levenberg	13,1	31,9	0,28	5,14
		Diferença (%)	16,6	10,1	4,40	--

6.4.3 Resultados da Amostra 03

A Tabela 6.6 e a Tabela 6.8 mostram os resultados obtidos na amostra 03 para as constantes elásticas e propriedades mecânicas, utilizando as frequências de 0,5 e 1

MHZ. Para cada técnica de imersão e para cada frequência, utilizaram-se dois algoritmos, o de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. Calculou-se o vetor de partida a partir da Regra das Misturas e em seguida aplicou-se a eq. (2.14). Na Tabela 6.8, a diferença dos resultados é calculada em relação à Regra das Misturas para cada algoritmo. Para a amostra 03, têm-se ainda os resultados obtidos através de ensaios mecânicos.

Tabela 6.6: Resultados da amostra 03. As constantes elásticas estão em GPa.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Vetor Partida	--	--	18,8	8,14	45,4	3,60	--
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	18,1	12,9	50,1	3,62	5,68
		Levenberg	18,1	12,1	52,1	3,09	5,68
Pulso-eco SRM		Gauss	18,1	12,1	48,4	3,64	5,59
		Levenberg	18,4	12,2	52,2	3,34	5,59
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	17,8	12,3	46,4	3,6	5,65
		Levenberg	18,3	12,4	52,4	3,4	5,65

A Tabela 6.7 faz uma comparação direta do resultado obtido na Tabela 6.6 para as constantes elásticas utilizando-se a técnica de pulso-eco SRM, 1MHz e o algoritmo de Levenberg com o modelo de correção de fase descrito no Capítulo 5.

Tabela 6.7: Comparação dos resultados da Tabela 6.6 com o modelo de correção de fase.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
Pulso-eco SRM	1 MHz	Levenberg	18,4	12,2	52,2	3,34	5,59
Pulso-eco SRM com correção de fase			18,3	12,3	52,3	3,32	5,59
Variação (%)			0,55	0,81	0,19	0,60	0,00

Tabela 6.8: Propriedades mecânicas da amostra 03 comparadas com a regra das misturas.

	Frequência	Algoritmo	E_1	E_3	ν_{12}	G_{12}
Regra das misturas	--	--	13,0	40,8	0,28	--
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	14,0	37,4	0,23	5,68
		Diferença (%)	7,55	8,42	16,4	--
		Levenberg	14,3	40,3	0,26	5,68
		Diferença (%)	9,45	1,24	8,69	--
Pulso-eco SRM		Gauss	13,9	36,8	0,25	5,59
		Diferença (%)	6,95	9,80	12,0	--
		Levenberg	14,3	40,1	0,28	5,59
		Diferença (%)	9,90	1,82	0,21	--
Pulso-eco SRM	0,5 MHz	Gauss	13,8	33,9	0,23	5,65
		Diferença (%)	5,92	16,8	20,7	--
		Levenberg	14,3	40,0	0,27	5,65
		Diferença (%)	9,84	1,89	4,63	--
Ensaio Mecânicos (TECSIS)	--	--	14,0	40,0	0,28	5,47

A Tabela 6.9 faz uma comparação direta do resultado obtido na Tabela 6.8 para as constantes elásticas utilizando-se a técnica de pulso-eco SRM, 1MHz e o algoritmo de Levenberg com o modelo de correção de fase descrito no Capítulo 5. Como pode-se notar, embora para as constantes elásticas há um erro percentual, para as propriedades mecânicas o modelo de correção não apresenta diferenças significativas.

Tabela 6.9: Comparação dos resultados da Tabela 6.8 com o modelo de correção de fase.

	Frequência	E_1	E_3	ν_{12}	G_{12}
Pulso-eco SRM	1 MHz	14,3	40,1	0,28	5,59
Pulso-eco SRM com correção de fase		14,2	40,4	0,28	5,59
Variação (%)		0,7	0,7	0,5	0,0

6.4.4 Resultados da Amostra 04

A Tabela 6.10 e a Tabela 6.11 mostram os resultados obtidos na amostra 04 para as constantes elásticas e propriedades mecânicas, utilizando as frequências de 1 e 2,25 MHz. Para cada técnica de imersão e para cada frequência, utilizaram-se dois algoritmos, o de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. Por não ser possível calcular o vetor de partida de amostras bidirecionais a partir da Regra das Misturas, optou-se por utilizar os resultados obtidos por Balasubramaniam e Whitney (1996) em amostras bidirecionais. Na Tabela 6.11, apresentam-se também os resultados de trabalhos publicados na literatura.

Tabela 6.10: Resultados da amostra 04. As constantes elásticas estão em GPa.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{55}	C_{66}	C_{22}	C_{12}
Vetor Partida ^a	--	--	16,3	8,02	32,0	4,38	4,39	16,3	8,04
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	16,4	15,0	51,8	2,80	9,18	18,8	6,27
		Levenberg	16,7	14,1	45,9	2,72	9,48	21,2	7,34
Pulso-eco SRM		Gauss	16,7	16,1	54,7	2,85	8,86	17,8	4,84
		Levenberg	16,9	14,0	51,9	3,03	8,65	19,3	5,95
Trans. Direta	2,25 MHz	Gauss	17,3	16,1	50,7	3,70	9,99	19,6	5,99
		Levenberg	16,3	13,5	51,0	3,21	9,31	20,4	6,97
Pulso-eco SRM		Gauss	17,3	16,9	55,2	3,21	10,8	16,9	5,12
		Levenberg	16,3	13,6	51,4	2,80	6,33	17,3	5,33

^aObs.: Vetor de partida extraído de Balasubramaniam e Whitney (1996).

Tabela 6.11: Propriedades mecânicas da amostra 04 comparadas com trabalhos da literatura.

	Frequência	Algoritmo	E_3	E_2	E_1	ν_{32}	G_{32}
Literatura ^a	--	--	16,0	16,0	51,1	0,31	5,77
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	11,0	16,4	38,2	0,25	2,80
		Levenberg	11,1	17,9	34,0	0,25	2,72
Pulso-eco SRM		Gauss	11,6	12,3	39,2	0,22	2,85
		Levenberg	12,1	17,2	40,3	0,24	3,03
Trans. Direta	2,25 MHz	Gauss	11,3	17,5	35,7	0,22	3,70
		Levenberg	11,3	17,3	39,6	0,26	3,21
Pulso-eco SRM		Gauss	11,3	15,4	38,7	0,22	3,21
		Levenberg	11,8	15,6	39,9	0,23	2,80

^aExtraído de Sheng e Hoa (2001).

6.4.5 Resultados da Amostra 05

A Tabela 6.12 e a Tabela 6.13 mostram os resultados obtidos na amostra 05 para as constantes elásticas e propriedades mecânicas, utilizando as frequências de 1 e 2,25 MHz. Para cada técnica de imersão e para cada frequência, utilizaram-se dois algoritmos, o de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. Por não ser possível calcular o vetor de partida de amostras bidirecionais a partir da Regra das Misturas, optou-se por utilizar os resultados obtidos por Balasubramaniam e Whitney (1996) em amostras bidirecionais. Na Tabela 6.13, apresentam-se também os resultados obtidos através do modelo teórico denominado comportamento em membrana descrito no Capítulo 2 e de trabalhos publicados na literatura.

Tabela 6.12: Resultados da amostra 05. As constantes elásticas estão em GPa.

	Frequência	Algoritmo	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{55}	C_{66}	C_{22}	C_{12}
Vetor Partida ^a	--	--	16,3	8,02	32,0	4,38	4,39	16,3	8,04
Trans. Direta	1 MHz	Gauss	16,4	15,0	51,8	2,80	9,18	15,8	4,27
		Levenberg	16,6	18,8	57,8	2,86	9,82	10,7	2,43
Pulso-eco SRM		Gauss	16,1	15,1	56,3	3,23	10,5	13,5	3,06
		Levenberg	16,1	15,3	51,3	3,33	9,18	11,5	2,73
Trans. Direta	2,25 MHz	Gauss	17,0	17,0	59,6	4,23	9,73	14,8	4,86
		Levenberg	17,2	18,2	52,3	4,20	9,43	12,4	2,55
Pulso-eco SRM		Gauss	16,5	16,6	60,7	3,61	10,9	15,0	4,42
		Levenberg	16,5	14,7	49,1	4,68	11,0	13,0	3,96

^aObs.: Vetor de partida extraído de Balasubramaniam e Whitney (1996).

Tabela 6.13: Propriedades mecânicas da amostra 05 comparadas com trabalhos da literatura e com o modelo denominado comportamento em membrana.

	Frequência	E_3	E_2	E_1	ν_{32}	G_{32}
Sheng e Hoa (2001)	--	14,4	14,4	--	0,38	2,95
Trans. Direta	1 MHz	11,8	10,6	44,5	0,37	9,18
		12,1	11,5	39,0	0,41	9,82
Pulso-eco SRM		11,7	13,0	42,1	0,41	10,5
		11,4	11,3	36,7	0,40	9,18
Trans. Direta	2,25 MHz	11,4	13,4	42,5	0,34	9,73
		10,7	12,0	33,0	0,40	9,43
Pulso-eco SRM		11,3	13,8	44,0	0,30	10,9
		11,5	12,0	36,0	0,31	11,0
Teórico	--	12,8	12,8	--	0,52	11,1

^aExtraído de Sheng e Hoa (2001).

6.5 Análise dos erros

A principal fonte de erros nos experimentos provém de erros sistemáticos, da temperatura da água e do paralelismo das amostras. Em relação aos erros sistemáticos, a influência das não-linearidades do sistema (osciloscópio, amplificadores, etc.) foi considerada como 1% (ADAMOWSKI et al., 1995). O

efeito da temperatura da água nos experimentos foi tratado no capítulo anterior. O paralelismo entre as superfícies das amostras foi considerado como 0,001 mm/mm, o que resulta em um erro experimental de 1% nas velocidades obtidas, de acordo com Chu e Rokhlin (1994b).

Para uma onda propagando-se no plano 1-2 das amostras unidirecionais, a Tabela 6.14 mostra a média e o desvio padrão das velocidades longitudinal e de cisalhamento para cada técnica de ensaio, utilizando-se 1 MHz.

Tabela 6.14: Comparação entre a média e o desvio padrão das velocidades longitudinal e de cisalhamento obtidas no plano 1-2 das amostras unidirecionais.

Amostras	Técnica de ensaio	Frequência	Velocidade	Média (m/s)	Desvio padrão (m/s)
Amostra 01	Trans. Direta	1 MHz	V_L	2.744,0	7,3
			Vqs	1.461,8	3,3
	Pulso-eco SRM		V_L	2.775,3	6,9
			Vqs	1.468,9	3,4
Amostra 02	Trans. Direta	1 MHz	V_L	3.090,3	6,2
			Vqs	1.715,2	5,2
	Pulso-eco SRM		V_L	3.074,6	5,6
			Vqs	1.684,9	6,6
Amostra 03	Trans. Direta	1 MHz	V_L	3.089,0	4,6
			Vqs	1.710,0	3,2
	Pulso-eco SRM		V_L	3.061,9	4,0
			Vqs	1.712,7	3,2

Para uma onda propagando-se no plano 1-3 das amostras, a velocidade de propagação varia conforme o ângulo de incidência, portanto os cálculos da média e do desvio padrão, do ponto de vista estatístico, não se aplicam. Utilizou-se para tal a abordagem descrita por Rokhlin e Wang (1989), que consiste em comparar as velocidades obtidas experimentalmente com as velocidades calculadas através das constantes elásticas obtidas pelo método de otimização por mínimos quadrados. Dessa forma, quando as curvas estão coerentes, pode-se dizer que o método numérico convergiu e que os resultados experimentais estão satisfatórios. Quando não há coerência nos resultados, deve-se alterar o vetor de partida do algoritmo para

encontrar a solução de mínimo global do sistema ou realizar novamente os ensaios experimentais.

Através dessa metodologia, pode-se estimar o erro, já que quando não há discrepância entre os resultados pode-se dizer que a solução é exata, de acordo com as Tabelas 5.3 e 5.4. Para as amostras unidirecionais 01, 02 e 03, os gráficos das velocidades são mostrados na Fig. 6.7. Para as amostras bidirecionais 04 e 05, a Fig. 6.8 mostra os resultados obtidos.

(a)

(b)

(c)

Fig. 6.7: Comparação entre as velocidades experimentais e as calculadas pelo método de otimização por mínimos quadrados nas amostras unidirecionais. (a) Amostra 01. (b) Amostra 02. (c) Amostra 03.

(a)

(b)

Fig. 6.8: Comparação entre as velocidades experimentais e as calculadas pelo método de otimização por mínimos quadrados. (a) Amostra 04 [0/90°]. (b) Amostra 05 [±45°].

CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Tratando-se de ensaios não-destrutivos por ultra-som, as técnicas apresentadas nesse trabalho mostraram-se válidas para obter as constantes elásticas de materiais compostos de fibra de vidro/epóxi. Utilizando-se as técnicas descritas em um tanque com água, as velocidades de propagação da onda longitudinal e transversal no material podem ser obtidas e, com a equação de Christoffel e um algoritmo não-linear por mínimos quadrados, obter o tensor de rigidez elástico de materiais compostos.

Na técnica de transmissão direta, é necessário ajustar o receptor a fim de encontrar a amplitude máxima do sinal para cada ângulo de incidência. Isso dificulta significativamente o processo, mas aumenta a precisão, porém o dispositivo experimental utilizado não permite este grau de liberdade. Na técnica de pulso-eco, não há necessidade de deslocar o refletor, o que proporciona uma melhor repetibilidade nos experimentos, porém a atenuação do sinal é bem maior. De todos os ensaios, em suma, observou-se que utilizando a técnica de pulso-eco SRM a 1MHz com o algoritmo de Levenberg-Marquardt, obtém-se resultados satisfatórios para todas as amostras. Em ambas as técnicas, contudo, a lei de Snell mostrou-se válida para o cálculo da direção do vetor velocidade de fase.

Para uma amostra unidirecional composta de fibra de vidro/epóxi, pode-se concluir através dos resultados experimentais que o plano 1-2 de simetria assemelha-se muito com um material isotrópico, pois as velocidades das ondas elásticas praticamente não variam com o ângulo de incidência, podendo assim ser considerado um material transversalmente ortotrópico.

Os resultados obtidos da amostra 03 (Unidirecional) quando comparados com os ensaios mecânicos mostraram bons resultados, o que mostra a validade do método, com a vantagem ainda de permitir a obtenção do Módulo de Cisalhamento. Já os resultados obtidos das amostras bidirecionais foram comparados com trabalhos na literatura apenas

para mostrar a tendência destes materiais, visto que se trata de amostras com diferentes densidades.

Os resultados das velocidades de propagação obtidas experimentalmente são muito dependentes do ângulo de incidência. Portanto, erros no posicionamento da amostra alteram significativamente as velocidades obtidas e, conseqüentemente, os resultados das constantes elásticas obtidas pela inversão da equação de Christoffel. O dispositivo experimental utilizado dota de um goniômetro de baixa resolução, o que diminui a precisão dos resultados devido a erros de posicionamento. Outra fonte de erros nos resultados obtidos são as instabilidades na temperatura da água. Pequenas variações na temperatura podem causar grandes erros. Para amenizar esse problema, durante os experimentos, procurou-se manter a temperatura da água em 25°C.

O maior erro, contudo, provém do método numérico empregado para resolver a equação de Christoffel. Diferentes resultados foram obtidos usando o algoritmo de Gauss-Newton e o de Levenberg-Marquardt. A escolha pelo vetor de partida mostrou-se um ponto crucial, já que valores arbitrários iniciais para as constantes elásticas provocaram resultados errôneos. O vetor de partida escolhido através da Regra das Misturas mostrou-se uma boa opção.

O modelo de mudança de fase proposto por Wang et al. (2003), propõem que a fase do sinal no domínio do tempo deve ser corrigida para ângulos de incidência maior que o ângulo crítico. Este efeito diminui com a frequência e espessura da amostra. O modelo foi implementado teoricamente e experimentalmente, mas sem resultados expressivos. Isso se deve ao fato da taxa de aquisição de sinais utilizada neste trabalho, na ordem de 62,5 MHz, o que dá uma resolução de 16 ns no domínio do tempo, um valor muito alto para este modelo.

7.1 Propostas de trabalhos futuros

Como tópicos para trabalhos futuros, propõem-se:

- Construir um novo dispositivo experimental, dotado de motores de passos com alta resolução, para controlar o ângulo de incidência na amostra com elevada precisão;
- Considerar as propriedades viscoelásticas das amostras;
- Explorar outros algoritmos de otimização, como por exemplo algoritmos genéticos;
- Utilizar um processamento de sinais adequado, para assim obter com mais precisão a velocidade de fase nas amostras e conseqüentemente melhorar os resultados;
- Realizar os experimentos com amostras de menor espessura, para diminuir efeitos de atenuação quando se utilizam frequências altas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMOWSKI, J. C., Buiochi, F., Furukawa, C. M., Higuti, R. T. “Cap. 4 - Caracterização de Líquidos por Ultra-som”, Sensores: Tecnologia e Aplicações, v. 1, São Paulo, 2004, CD-ROM.

ADAMOWSKI, J. C., Buiochi, F., Simon, C., Silva, E. C. N., Sigelmann, R. A., “*Ultrasonic measurement of density of liquids*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 97, n. 1, pp. 354-361, 1995.

ARISTÉGUI, D., BASTE, S., “*Optimal determination of the material symmetry axes and associated elasticity tensor from ultrasonic velocity data*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 102, n. 3, pp. 1503-1521, 1997.

AULD, B. A., “*Acoustics Fields and Waves in Solids*”, n. 1, EUA, John Wiley & Sons, 2^a ed., 1990.

BALASUBRAMANIAM, K., Whitney, S.C., “*Ultrasonic through-transmission characterization of thick fibre-reinforced composites*”, NDT&International, v. 29, n. 4, pp. 225-236, 1996.

BREKHOVSKIKH, L. M., “*Waves in Layered Media*”, 2^a ed., San Diego – EUA, Academic Press, 1980.

BUIOCHI, F., 1994, “*Análise dos métodos de medição de densidade de líquidos por ultra-som*”, dissertação de mestrado, São Paulo – Brasil, Universidade de São Paulo.

BUIOCHI, F., Guzmán, E. E. F., Silva, E. C. N., Adamowski, J. C., “*Análise dos fenômenos de transmissão acústica com conversão de modo*”, In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, Ouro Preto, 2005.

BUNKER, S. P., 2001, “*Evaluation of dynamic properties of a carbon – carbon composite at elevated temperatures*”, dissertação de mestrado, Orono – UK, University of Maine.

CARRASCO, E.V.M., Júnior, A. P. A., “*Avaliação não destrutiva de propriedades mecânicas de madeiras através de ultra-som – fundamentos físicos e resultados experimentais*”, In: Cerne, Lavras, v. 9, n. 2, p. 178-191, 2003.

CHAWLA, Krishan K., “*Composite Materials – Science and Engineering*”, New York – USA, Springer-Verlag, 1987.

CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Determination of macro-and micromechanical and interfacial elastic properties of composites from ultrasonic data*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 92, n. 2, pp. 920-931, 1992.

CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Stability of determination of composite moduli from velocity data in planes of symmetry for weak and strong anisotropies*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 95, n. 1, pp. 213-225, 1994a.

CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*Comparative analysis of through-transmission ultrasonic bulk wave methods for phase velocity measurements in anisotropic materials*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 95, n. 6, pp. 3204-3212, 1994b.

CHU, Y. C., Rokhlin, S. I., “*A method for determination of elastic constants of a unidirectional lamina from ultrasonic bulk velocity measurements on [0/90] cross-ply composites*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 96, n. 1, pp. 342-352, 1994c.

CHU, Y. C., Degtyar, A. D., Rokhlin, S. I., “*On determination of orthotropic material moduli from ultrasonic velocity data in nonsymmetry planes*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 95, n. 6, pp. 3191-3203, 1994.

CHUNG, T. J., “*Applied Continuum Mechanics*”, New York - EUA, Cambridge University Press, 1996.

CILIBERTO, A., Cavaccini, G., Salvetti, O., Chimenti, M., Azzarelli, L., *“Porosity detection in composite aeronautical structures”*, Infrared Physics & Technology, v. 43, pp. 139-143, 2002.

CONRY, M., *“Notes on Wave Propagation in Anisotropic Elastic Solids”*, Relatório Técnico, IST 2002.

DANIEL, I. M., Ishai, O., *“Engineering Mechanics of Composite Materials”*, New York – EUA, Oxford University Press, 1994.

DITRI, J. J., “On the determination of the elastic moduli of anisotropic media from limited acoustical data”, Journal of Acoustical Society of America, v. 95, n. 4, pp. 1761-1767, 1994.

EVERY, A. G., Sachse, W., *“Sensitivity of inversion algorithms for recovering elastic constants of anisotropic solids form longitudinal wavespeed data”*, Ultrasonics, v. 30, pp. 43-48, 1992.

GROSSO, V. A., Mader, C. W., *“Speed of sound in pure water”*, Journal of Acoustical Society of America, v. 52, n. 5, pp. 1442-1446, 1972.

HALLIDAY, D., Resnick, R., Walker, J., *“Fundamentos de FÍSICA 2”*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 4^a ed., 1996.

HENNEKE, E. G., Jones, G. L., *“Critical angle for reflection at a liquid-solid interface in single crystals”*, Journal of Acoustical Society of America, v. 59, pp. 204-205, 1976.

HENNEKE, E. G., *“Reflection-refraction of stress wave at a plane between anisotropic media”*, Journal of Acoustical Society of America, v. 51, pp. 906-918, 1972.

HOLLMAN, K. W., Fortunko, C. M., *“An accurate method for measurement of transverse elastic-wave velocities”*, Measurement science & technology, v. 9, pp. 1721-1727, 1998.

HU, S., “*The Recent Development of an Ultrasonic Nondestructive Evaluation Technique for Metal Matrix Composites*”, Journal of Composite Technology & Research, v. 19, n. 1, pp. 41-44, 1997.

HUANG, Y. D., Froyen, L., Wevers, M., “*Quality Control and Nondestructive Tests in Metal Matrix Composites*”, Journal of Nondestructive Evaluation, n. 20(3), 2001.

JONES, R. M., “*Mechanics of Composite Materials*”, EUA, TAYLOR & FRANCIS, 2nd ed., 1999.

KANGAN, F., 1998, “*Pseudo-Spectral Modelling of Cracked Anisotropic Media and Rotation of Multicomponent Shear-Wave Data*”, dissertação de mestrado, Alberta – CA, University of Calgary.

KINO, G. S., “*Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*”, New Jersey - EUA, Prentice Hall, 1987.

KINSLER, L. E., Frey, A. R., Coppers, A. B., Sanders, J. V. “*Fundamentals of Acoustics*”, New York - EUA, John Wiley & Sons, 3^a ed., 1982.

KUSHIBIKI, J., Arakawa, M., “*Diffraction effects on bulk-wave ultrasonic velocity and attenuation measurements*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 108, n. 2, pp. 564-573, 2000.

LOWE, M. J. S., “*Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 42, n. 4, pp. 525-542, 1995.

MADSEN K., Nielsen, H. B., Tingleff, O., “*Methods for non-linear least squares problems*”, Relatório técnico, University of Denmark, 2004.

MARKHAM, M. F., “*Measurement of the Elastic Constants of Fiber Composites by Ultrasonics*”, Composites, v. 1, pp. 145, 1970.

MATLAB version 6.5 Release 6.5, The Math Works, Inc. South Natick, MA, USA, 2002.

MOUCHTACHI, A., Guerjouma R., Baboux J. C., Santini P., Merle P., Bouami D., “*Ultrasonic study of elastic anisotropy of material composite*”, Applied Composite Materials , v. 11, pp.341-351, 2004.

MOURITZ, A. P., Townsend, C., Shah, M. Z., “*Non-destructive detection of fatigue damage in thick composites by pulse-echo ultrasonics*”, Composites Science and Technology, v. 60, pp. 23-32, 2000.

NEWELL, K. J., Sinclair, A. N., Fan, Y., Georgescu, C., “*Ultrasonic determination of stiffness properties of an orthotropic viscoelastic material*”, Research in Nondestructive Evaluation, v. 9, pp. 25-39, 1997.

NYE, J. F., “*Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*”, New York - EUA, Oxford University Press, 1993.

OKABE, Y., Takeda, N., “*Quantitative Evaluation of Interlaminar-Toughened CFRP Composite by Ultrasonic Wave Propagation Characteristics*”, Journal of Composite Materials, v. 36, n. 6, pp. 757-769, 2002.

PAPADAKIS, E. P., “*Ultrasonic velocity by the pulse-echo-overlap method incorporating diffraction phase corrections*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 40, pp. 863-876, 1966.

PAPADAKIS, E. P., Margetan, F., “*Diffraction loss in the [110] direction in cubic crystals*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 88 ,n. 2, pp. 945-950, 1990.

PEREIRA, J. C., “*Curso de projeto estrutural com materiais compostos*”, Relatório Técnico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

REDDY, S., Balasubramaniam, K., Krishnamurthy, S., “*Ultrasonic goniometry immersion techniques for the measurement of elastic moduli*”, Composite Structures, v. 67, pp. 3-17, 2005.

RISTIC, V. M., “*Principle of Acoustics Devices*”, New York - USA, John Wiley & Sons, 1983.

ROKHLIN, S. I., Bolland, T. K., Adler, L., “*Reflection and Refraction of Elastic Waves on a Plane Interface between Two Generally Anisotropic Media*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 79, pp. 906, 1986.

ROKHLIN, S. I., Wang, W., “*Critical angle measurement of elastic constants in composite material*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 86, n. 5, pp. 1876-1882, 1989.

ROKHLIN, S. I., Wang, W., “*Double through-transmission bulk wave method for ultrasonic phase velocity measurement and determination of elastic constants of composite materials*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 91, n. 6, pp. 3303-3312, 1992.

RUIZ, A. M., Nagy P. B., “*Diffraction correction for precision surface acoustic wave velocity measurements*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 112, n. 3, pp. 835-842, 2002.

ROSENBAUM, J. F., “*Bulk Acoustic Wave Theory and Devices*”, London – UK, Artech House, 1988.

SACHSE, W., Pao, Y. H., “*On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids*”, Journal of Applied Physics, v. 49, pp. 4320-4327, 1978.

SEINER, H., Landa, M., “*Sensitivity analysis of an inverse procedure for determination of elastic coefficients for strong anisotropy*”, Ultrasonics, v. 43, n. 4, pp. 253-263, 2005.

SENAN, A. S., 2003, “*Determination of the Viscoelastic Properties of General Anisotropic Materials*”, dissertação de mestrado, Orono – UK, University of Maine.

SHENG, S. Z., Hoa, S. V., “*Three Dimensional Micro-Mechanical Modeling of Woven Fabric Composites*”, Journal of Composite Materials, v. 35, n. 19, pp. 1701-1729, 2001.

SMITH, R. E., “*Ultrasonic Elastic Constants of Carbon Fibers and Their Composites*”, Journal of Applied Physics, v. 43, pp. 2555, 1972.

SMITH, S. W., “Digital signal processing”, San Diego – EUA, California Technical Publishing, 2^a ed., 1999.

SUN, M., 2002, “*Optimal recovery of elastic properties for anisotropic materials through ultrasonic measurements*”, dissertação de mestrado, Orono – UK, University of Maine.

TSAI, S. W., “*Theory of Composites Design*”, EUA, Think Composites, 1992.

WANG, L., Lavrentyev, A. I., Rokhlin, S. I., “*Beam and phase effects in angle-beam-through-transmission method of ultrasonic velocity measurement*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 113, n. 3, p. 1551-1559, 2003.

WOOH, S. C., Daniel, I. M., “*Mechanical Characterization of a Unidirectional Composite by Ultrasonic Methods*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 90, n. 6, p. 3248-3253, 1991.

ZENG, T., Linzhi, W., Licheng, G., Ma, L., “*A Mechanical Model of 3D Braided Composites with Internal Transverse Crack*”, Journal of Composite Materials, v. 39, n. 4, pp. 301-321, 2005.

ZIMMER, J. E., Cost, J. R., “*Determination of the Elastic Constants of a Unidirectional Fiber Composite Using Ultrasonic Velocity Measurements*”, Journal of Acoustical Society of America, v. 47, pp. 795, 1970.

ANEXO A

A.1 Resolvendo a equação de Christoffel para materiais transversalmente isotrópicos

Dada a matriz de rigidez para materiais transversalmente isotrópicos

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}$$

e substituindo no tensor de Christoffel $\Gamma_{ij} = C_{ijkl}n_k n_l$, temos:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{44}n_3^2 & n_1n_2(C_{12} + C_{66}) & n_1n_3(C_{13} + C_{44}) \\ n_1n_2(C_{12} + C_{66}) & C_{11}n_2^2 + C_{66}n_1^2 + C_{44}n_3^2 & n_2n_3(C_{13} + C_{44}) \\ n_1n_3(C_{13} + C_{44}) & n_2n_3(C_{13} + C_{44}) & C_{33}n_3^2 + C_{66}(n_2^2 + n_1^2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Para uma onda propagando-se no plano 1-2 da Fig. A.1, as direções de propagação da onda são dadas por $n_1 = \cos \theta$, $n_2 = \sin \theta$ e $n_3 = 0$.

Substituindo na equação de Christoffel $|\Gamma_{ij} - \rho v^2 \delta_{ij}| = 0$ temos

$$\begin{vmatrix} C_{11} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta - \rho v^2 & -(C_{12} + C_{66}) \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 \\ -(C_{12} + C_{66}) \frac{\sin 2\theta}{2} & C_{11} \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta - \rho v^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho v^2 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Fig. A.1: Sistema de coordenadas para materiais compostos unidirecionais (REDDY et al., 2005).

e expandindo o determinante,

$$\left[\begin{array}{l} (C_{11} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta - \rho v^2)(C_{11} \sin^2 \theta + \\ C_{66} \cos^2 \theta - \rho v^2) + (C_{12} + C_{66})^2 \frac{\sin^2 2\theta}{4} \end{array} \right] (C_{44} - \rho v^2) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo a Eq. (A.3), temos as seguintes soluções para as três velocidades sob incidência normal:

Velocidade longitudinal: $V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ (A.4)

Velocidade de cisalhamento vertical: $V_{qs} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$ (A.5)

Velocidade de cisalhamento horizontal: $V_{sh} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ (A.6)

Para uma onda propagando-se no plano 1-3 da Fig. A.1, as direções são dadas por $n_1 = \cos \theta$, $n_2 = 0$ e $n_3 = \sin \theta$. Substituindo os valores de n na Eq. (A.1) e resolvendo a equação de Christoffel $|\Gamma_{ij} - \rho v^2 \delta_{ij}| = 0$ para este plano, temos:

Velocidade longitudinal: $V_L = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2\rho}}$ (A.7)

Velocidade de cisalhamento vertical: $V_{qs} = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2\rho}}$ (A.8)

Velocidade de cisalhamento horizontal: $V_{sh} = \sqrt{\frac{1}{\rho} (C_{44} \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta)}$ (A.9)

Onde:

$$b = -(C_{11} \cos^2 \theta + C_{33} \sin^2 \theta + C_{44})$$

$$c = C_{11} C_{44} \cos^4 \theta + C_{33} \sin^4 \theta + \frac{\sin^2 2\theta}{4} (C_{11} C_{33} + C_{44}^2 - (C_{13} + C_{44})^2)$$

Sendo as constantes elásticas C_{11} e C_{66} obtidas no plano 1-2, as constantes restantes C_{13} , C_{33} e C_{44} são obtidas resolvendo-se as Eqs. (A.7) e (A.8) utilizando-se um algoritmo de otimização por mínimos quadrados.

ANEXO B

B.1 Mudança de fase numa interface fluído-sólido

Para um ângulo de incidência θ_i maior que θ_{cr} , o número de onda k_z^l da onda longitudinal é complexo e k_z^t (onda de cisalhamento) é real. Os números de ondas normalizados são dados por (WANG et al., 2003)

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \sqrt{\left[-B - (B^2 - 4AC)^{1/2}\right] / 2A}, \\ \text{e} \\ \alpha_t &= \sqrt{\left[-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}\right] / 2A},\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= C_{11}C_{66}, \\ B &= (C_{11} \sin^2 \theta_i - \rho V_w^2)C_{33} + (C_{55} \sin^2 \theta_i - \rho V_w^2)C_{55} \\ &\quad - (C_{13} + C_{55})^2 \sin^2 \theta_i, \\ C &= (C_{11} \sin^2 \theta_i - \rho V_w^2)(C_{55} \sin^2 \theta_i - \rho V_w^2).\end{aligned}$$

As componentes de deslocamento normal $W_{l,t}$ e lateral $U_{l,t}$ que correspondem às ondas planas longitudinal (l) e de cisalhamento (t) no sólido são dadas por

$$\begin{aligned}W_{l,t} &= C_{11} \sin^2 \theta_i + C_{55} (\alpha_{l,t})^2 - \rho V_w^2, \\ U_{l,t} &= (C_{13} + C_{55}) \alpha_{l,t} \sin^2 \theta_i.\end{aligned}\tag{B.2}$$

As tensões normal $T_{l,t}^z$ e de cisalhamento $T_{l,t}^x$, são dadas por

$$\begin{aligned}
T_{l,t}^z &= (C_{13}U_{l,t} \sin \theta_i + C_{33}\alpha_{l,t}W_{l,t}), \\
T_{l,t}^x &= C_{55}(\alpha_{l,t}U_{l,t} + W_{l,t} \sin \theta_i).
\end{aligned}
\tag{B.3}$$

ANEXO C

C.1 Amostras utilizadas

Abaixo pode-se visualizar uma imagem de cada amostra utilizada neste trabalho.

Fig. C.1: Amostra 01 (Unidirecional).

Fig. C.2: Amostra 02 (Unidirecional).

Fig. C.3: Amostra 03 (Unidirecional).

Fig. C.4: Amostra 04 (0/90°).

Fig. C.5: Amostra 05 ($\pm 45^\circ$).