RUBEN ANDRES SALAS VARELA

**Projeto de Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM) Utilizando o
Método de Otimização Topológica (MOT) Considerando a Resposta
Térmica Transiente**

São Paulo

2012

RUBEN ANDRES SALAS VARELA

**Projeto de Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM) Utilizando o
Método de Otimização Topológica (MOT) Considerando a Resposta
Térmica Transiente**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Controle e Automação Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo
2012

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 03 de fevereiro de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Salas Varela, Ruben Andres

Projeto de microsistemas eletrotermomecânicos (ETM) utilizando o método de otimização topológica (MOT) considerando a resposta térmica transiente / R.A. Salas Varela. – ed.rev. -- São Paulo, 2012.

251 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

**1. Método dos elementos finitos 2. Topologia (Otimização)
3. Sistemas microeletromecânicos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.**

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pela saúde, pelos favores recebidos e pela maravilhosa oportunidade de seguir crescendo.

Ao orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, a quem expresso minha admiração e reconhecimento como exemplo de dedicação acadêmica, pela confiança depositada, por sua paciência e empenho para a realização desse trabalho,

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro através da bolsa de mestrado outorgada (processo nº 2010/02263-0).

Ao Dr. Luís Augusto Motta Mello pelos comentários, orientações, discussões, dicas e sugestões que contribuíram ao aprimoramento desse trabalho.

Aos meus pais, que na distância sempre estiveram comigo de mente e coração e que sempre me brindaram o seu amor e apoio incondicional. Aos meus irmãos que sempre tem acreditado em mim e à minha avó Lucia pelas suas orações e todos os seus bons desejos.

Aos amigos do grupo de pesquisa André, Flávio e Ricardo pelas discussões, colaboração e aperfeiçoamento do idioma Português. Aos colegas Bruno Barazani, Bruno Chaves, Lucas e novamente ao Dr. Luís, André, Flávio e Ricardo, com quem compartilhei excelentes momentos dentro e fora da faculdade e sempre considerarei meus amigos.

Ao Dr. José Isidro García e o Dr. Juan Carlos Burbano que foram como meus pais no Brasil, pelos seus conselhos e toda a sua ajuda. Especialmente agradeço ao Dr. José que tornou possível o início do meu mestrado no Brasil e por depositar a sua confiança em mim para que eu seguisse esse caminho. Igualmente à senhora Amparo Sánchez na Colômbia que possibilitou minha viagem.

À Sonia, que embora longe, sempre esteve em bons e maus momentos brindando-me todo o seu apoio e sua colaboração desinteressada. Na Colômbia: Ao Breyner, Laura, Rita e Susana pela sua cooperação quando foi preciso, pelas conversas, mesmo que virtualmente, e pelas suas palavras de ânimo. Aos que compartilharam comigo gratos momentos no Brasil: Alex, Ana Lucia, Ana Maria, Erika, Glauco, Jhan Pierre, Lenin, Lina, Lorena, Sara, Victor e Wislenny. Em especial a Alex, Ana Lucia, Lenin, Lina e Lorena pela amizade incondicional. Ao Mario, Luis Bernardo e Jimmy pela boa convivência que me fez sentir sempre em casa.

E finalmente, a todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Microsistemas eletrotermomecânicos (ETM) são sistemas em escalas micrométricas que operam baseados na deformação por efeito termoelástico, induzida pelo aquecimento da sua estrutura devido a uma corrente elétrica. Já que é desejável que a sua resposta transiente seja rápida, amortecida e estável ao alcançar equilíbrio e, além disso, conhecendo o fato de que o fenômeno térmico é o mais lento entre os diferentes domínios físicos envolvidos nos microsistemas ETM, faz-se necessário minimizar o tempo de resposta nesse domínio com o fim de melhorar o desempenho do sistema. Isso pode ser obtido pela mudança da sua topologia estrutural. Assim, neste trabalho de mestrado, o Método de Otimização Topológica (MOT) é aplicado no projeto de microsistemas ETM levando em conta a resposta térmica transiente de forma a reduzir o seu tempo de resposta e maximizar o seu deslocamento de saída. O MOT combina técnicas de otimização com o Método de Elementos Finitos (MEF) para distribuir material em um domínio de projeto fixo com o objetivo de extremizar uma função de custo sujeita às restrições inerentes do problema. A modelagem dos microsistemas ETM é obtida resolvendo-se as equações de equilíbrio utilizando o MEF linear com base em elementos de quatro nós isoparamétricos sem considerar dependência das propriedades do material com a temperatura. O problema elétrico é resolvido com uma análise de correntes estacionárias, já no problema transiente térmico, a distribuição de temperatura é uma função variável no tempo. No domínio elástico, a massa e os efeitos de amortecimento são negligenciados, assim, o problema torna-se quase-estático. Na formulação da Otimização Topológica o modelo de material é baseado no método das densidades ou "Solid Isotropic Microstructure with Penalization" (SIMP) combinado com um filtro de sensibilidade e duas funções de penalização como técnicas de controle da solução para reduzir os problemas de instabilidades numéricas intrínsecas ao MOT. Os fatores de penalização do SIMP são obtidos mediante um enfoque analítico. A Programação Linear Seqüencial (PLS) e o Método das Assíntotas Móveis ou "Method of Moving Asymptotes" (MMA) são usados para resolver o problema de otimização não-linear. Resultados bidimensionais são apresentados com o intuito de ilustrar o método. Além disso, as topologias finais são obtidas mediante um algoritmo de interpretação de forma e os resultados da otimização dinâmica são confrontados com os obtidos por um enfoque estático, que foi implementado somente para fins comparativos.

ABSTRACT

Electrothermomechanical (ETM) microsystems are systems in micrometric scale which operate based on thermoelastic effect deformation induced by heating the structure by means of an electrical current. Since a fast, damped and stable (at steady state) transient response is desirable with the aim of improving ETM efficiency, it is necessary to minimize the response time of the thermal effect which is the slowest phenomena among different physics involved in the ETM microsystems. This can be achieved by changing the ETM structural topology. Thus, in this work, the Topology Optimization Method (TOM) is applied to ETM microsystems design, taking into account transient thermal response in order to reduce their response time and to maximize their output displacement. The TOM combines optimization techniques with the finite element method (FEM) to distribute material in a fixed design domain in order to extremize a cost function subjected to some inherent constraints of the problem. The modeling of ETM microsystems is obtained by solving the governing equations using the linear FEM based on four-node isoparametric elements. Non-temperature dependent material properties are considered in the finite element models. The electrical problem is solved by considering a steady current static analysis; the transient state thermal problem considers a temperature distribution that varies over time. In the elastic domain, the mass and the damping effects are neglected, thus, resulting in a quasi-static problem. In the Topology Optimization formulation the material model is based on the Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP) model combined with a sensitivity filter and two penalty functions as solution control techniques to reduce mesh dependence and checkerboard problems intrinsic to the TOM. The penalty factors in SIMP are obtained through an analytical approach. Sequential Linear Programming (SLP) and Method of Moving Asymptotes (MMA) are used for solving the non-linear optimization problem. Two-dimensional results are presented to illustrate the method. Moreover, the final topologies are obtained by a shape interpretation algorithm and the dynamic optimization result is compared with steady-state optimization, which is implemented for comparative purposes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Funcionamento típico de um microsistema ETM: (a) Domínio discretizado em elementos finitos; (b) Distribuição de tensão elétrica; (c) Distribuição de temperatura; (d) Estrutura deformada com a distribuição das tensões de von Mises (RUBIO et al., 2009).....	36
Figura 2 –	Microsistema ETM em "U"	37
Figura 3 –	Variação da resposta de um microsistema ETM pela variação da geometria	38
Figura 4 –	Variação da resposta de um microsistema ETM pela modificação das condições de contorno elétricas.....	38
Figura 5 –	Variação da resposta de um microsistema ETM pela alteração das propriedades de material	38
Figura 6 –	Variação da resposta de um microsistema ETM pela mudança nas condições de contorno térmicas (Adaptado de: MANKAME; ANANTHASURESH, 2001): (a) Sem considerar a convecção; (b) Considerando convecção	39
Figura 7 –	Condições de contorno e de carregamento nos microsistemas ETM	44
Figura 8 –	Modelo de correntes estacionárias em materiais condutivos.....	45
Figura 9 –	Condição de contorno natural no problema elétrico	46
Figura 10 –	Condição de contorno mista no problema térmico transiente.....	49
Figura 11 –	Condição de contorno natural no problema estrutural quase-estático	52
Figura 12 –	Solução de um problema de otimização estrutural utilizando diferentes enfoques	57
Figura 13 –	Procedimento típico de projeto de um microsistema ETM utilizando o MOT (Adaptado de: RUBIO et al., 2009).....	58
Figura 14 –	Distribuições de material no MOT: (a) Discreta; (b) Contínua	59
Figura 15 –	Comportamento da penalização no MOT	62
Figura 16 –	Existência de múltiplos mínimos locais originados na implementação do MOT	63
Figura 17 –	Exemplo da presença de escalas de cinza no MOT.....	64
Figura 18 –	Exemplo da presença da instabilidade de tabuleiro no MOT	65

Figura 19 – Problema no projeto de microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente	67
Figura 20 – Resposta característica de um sistema de primeira ordem com o deslocamento como a variável de saída.....	69
Figura 21 – Fluxograma para a resolução do problema de elementos finitos	78
Figura 22 – Descrição do comportamento do fluxo de calor em cada nó no problema de condução de calor no estado transiente	81
Figura 23 – Influência do tamanho de passo de integração na profundidade de penetração.....	84
Figura 24 – Aproximação linear da função objetivo e definição de limites móveis	86
Figura 25 – Aproximação da função objetivo pelo MMA e definição das assíntotas móveis.....	88
Figura 26 – Implementação da variável de projeto por elemento (Q_4/U).....	89
Figura 27 – Mapeamento dos elementos vizinhos no problema térmico com condição de convecção no contorno do elemento	92
Figura 28 – Imposição de simetria no problema de otimização de microsistemas ETM..	99
Figura 29 – Região definida pelo raio de filtro r_{min}	102
Figura 30 – Efeito do refinamento da malha sobre o conjunto N_e definido para a utilização do filtro de sensibilidades.....	103
Figura 31 – Comportamento da função de penalização das variáveis de projeto intermediárias	105
Figura 32 – Mapeamento das variáveis de projeto em torno de um nó interior para a avaliação da função de penalização da instabilidade de tabuleiro	106
Figura 33 – Valores possíveis da função H_i	107
Figura 34 – Diagrama de fluxo para a implementação numérica.....	111
Figura 35 – Valores de pseudo-densidade média nodal nas fronteiras do domínio para o processo de interpretação de forma	113
Figura 36 – Valores de pseudo-densidade média nodal no interior do domínio para o processo de interpretação de forma	114
Figura 37 – Geração de pontos de contorno adicionais para o processo de interpretação de forma	114
Figura 38 – Interpretação de forma de uma topologia obtida pelo MOT.....	115

Figura 39 –	Obtenção da topologia final a partir de resultados do MOT utilizando um algoritmo de interpretação de forma	116
Figura 40 –	Domínio de projeto e condições de contorno para o microsistema tipo pistão	121
Figura 41 –	Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI	123
Figura 42 –	Topologias filtradas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI.....	123
Figura 43 –	Topologias interpretadas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI.....	124
Figura 44 –	Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI	125
Figura 45 –	Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI	126
Figura 46 –	Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI.....	128
Figura 47 –	Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI	129
Figura 48 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes	130

Figura 49 – Tensão mecânica de von Mises máxima para a solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	131
Figura 50 – Variação do deslocamento de saída vs raio de arredondamento no ponto crítico da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	132
Figura 51 – Variação da tensão mecânica de von Mises máxima vs raio de arredondamento no ponto crítico da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	133
Figura 52 – Tensão mecânica de von Mises máxima no modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes para dois diferentes raios de arredondamento: (a) 50 μm; (b) 135 μm	133
Figura 53 – Deslocamento de saída vs tempo para o modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes com raios de arredondamento de 50 μm e 135 μm... ..	134
Figura 54 – Dimensões da “cabeça” presente na solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	135
Figura 55 – Variação do deslocamento de saída vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	136
Figura 56 – Variação da temperatura de saída vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	136
Figura 57 – Variação do volume total vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes	137
Figura 58 – Deslocamento de saída vs tempo para o modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes com larguras da “cabeça” de 0,2 mm e 1,4 mm.....	138

Figura 59 –	Topologias PLS-PTI resultantes do MOT do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume.....	139
Figura 60 –	Topologias PLS-PTI filtradas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume	139
Figura 61 –	Topologias PLS-PTI interpretadas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume	139
Figura 62 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados para o problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes e diferentes restrições de volume.....	141
Figura 63 –	Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI	143
Figura 64 –	Topologias filtradas problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	143
Figura 65 –	Topologias interpretadas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	143
Figura 66 –	Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	145
Figura 67 –	Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	146
Figura 68 –	Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	147
Figura 69 –	Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	147

Figura 70 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico.....	148
Figura 71 –	Problema de microgarra ETM	149
Figura 72 –	Domínio de projeto e condições de contorno para a microgarra ETM	150
Figura 73 –	Topologias resultantes do MOT do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	151
Figura 74 –	Topologias filtradas do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI	151
Figura 75 –	Topologias interpretadas do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	151
Figura 76 –	Curvas de convergência para a função objetivo do problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	152
Figura 77 –	Curvas de convergência para a restrição de volume do problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	153
Figura 78 –	Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	154
Figura 79 –	Distribuição final do campo de deslocamentos na direção Y mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	154
Figura 80 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes....	156
Figura 81 –	Topologias resultantes do MOT obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI....	158

Figura 82 –	Topologias filtradas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	158
Figura 83 –	Topologias Interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI....	158
Figura 84 –	Curvas de convergência para a função objetivo do problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	159
Figura 85 –	Curvas de convergência para a restrição de volume do problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	160
Figura 86 –	Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	161
Figura 87 –	Distribuição final do campo de deslocamentos na componente Y mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	161
Figura 88 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico.....	162
Figura 89 –	Domínio de projeto e condições de contorno para o microsistema tipo inversor	163
Figura 90 –	Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	165
Figura 91 –	Topologias filtradas do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	165
Figura 92 –	Topologias iterpretadas do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	166

Figura 93 –	Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	166
Figura 94 –	Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	167
Figura 95 –	Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	169
Figura 96 –	Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI.....	169
Figura 97 –	Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes	170
Figura 98 –	Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 25%.....	173
Figura 99 –	Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 50%.....	173
Figura 100 –	Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 75%.....	173
Figura 101 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 25% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT	174
Figura 102 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 50% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT	174
Figura 103 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 75% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT	175
Figura 104 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 25% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI	176
Figura 105 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 50% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI	176
Figura 106 –	Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 75% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI	177

Figura 107 – Mapeamento entre as coordenadas naturais (elemento mestre) e as coordenadas globais (elemento físico) em um elemento isoparamétrico de quatro nós	198
Figura 108 – Superfícies laterais e os seus vetores normais unitários em um elemento isoparamétrico de quatro nós	204
Figura 109 – Deslocamentos elementares no sistema natural de coordenadas.....	210
Figura 110 – Comparação da distribuição de tensão elétrica: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	226
Figura 111 – Comparação da distribuição de temperatura: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	227
Figura 112 – Comparação da distribuição da magnitude dos deslocamentos: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	227
Figura 113 – Comparação da distribuição da magnitude da densidade de corrente: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	228
Figura 114 – Comparação da distribuição da magnitude do fluxo de calor: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	229
Figura 115 – Comparação da distribuição da tensão de von Mises: (a) ETMDinT; (b) COMSOL.....	230
Figura 116 – Discretização do domínio utilizado para a verificação das sensibilidades.....	234
Figura 117 – Custo computacional no processo de verificação das sensibilidades da função objetivo para diferentes passos de integração no tempo (m).....	237
Figura 118 – Problema unidimensional para a determinação analítica dos fatores de penalização.....	238

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Propriedades do Níquel.....	118
Tabela 2 –	Condições de contorno.....	119
Tabela 3 –	Características do microcomputador utilizado nas simulações	119
Tabela 4 –	Dados adicionais exigidos no MOT para o problema do microsistema tipo pistão	121
Tabela 5 –	Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes	122
Tabela 6 –	Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes	125
Tabela 7 –	Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes	127
Tabela 8 –	Resultados finais para as topologias interpretadas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes.....	130
Tabela 9 –	Comparação dos resultados de deslocamento para a opção PLS-PTI do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes nas diferentes etapas da implementação numérica considerando diferentes restrições de volume.....	140
Tabela 10 –	Resultados finais para as topologias interpretadas PLS-PTI do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes considerando diferentes restrições de volume.....	142
Tabela 11 –	Comparação dos pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão.....	144
Tabela 12 –	Comparação dos valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão.....	144

Tabela 13 –	Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão.....	146
Tabela 14 –	Comparação dos resultados finais das topologias interpretadas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão	148
Tabela 15 –	Dados adicionais requeridos no MOT para o problema da microgarra	150
Tabela 16 –	Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes	151
Tabela 17 –	Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes	153
Tabela 18 –	Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes	154
Tabela 19 –	Resultados finais para as topologias interpretadas da microgarra ETM obtidas utilizando fatores de penalização uniformes.....	155
Tabela 20 –	Comparação dos pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra.....	157
Tabela 21 –	Comparação dos valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra.....	158
Tabela 22 –	Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra.....	159
Tabela 23 –	Comparação dos resultados finais das topologias interpretadas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra	162
Tabela 24 –	Dados adicionais exigidos no MOT para o problema do microsistema tipo inversor	164

Tabela 25 –	Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes	165
Tabela 26 –	Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes	168
Tabela 27 –	Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes	168
Tabela 28 –	Resultados finais para as topologias interpretadas do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes.....	171
Tabela 29 –	Fatores de penalização utilizados para a obtenção de resultados preliminares.....	171
Tabela 30 –	Conjunto de fatores de penalização testados no modelo numérico realizado no <i>ETMDinT</i>	172
Tabela 31 –	Fatores de penalização determinados para o software <i>ETMDinT</i>	177
Tabela 32 –	Comparação das variáveis primárias para validação do MEF	228
Tabela 33 –	Comparação das variáveis secundárias no domínio elétrico para validação do MEF	229
Tabela 34 –	Comparação das variáveis secundárias no domínio térmico para validação do MEF	230
Tabela 35 –	Comparação das variáveis secundárias no domínio termoelástico para validação do MEF	231
Tabela 36 –	Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 10 passos de integração no tempo	233
Tabela 37 –	Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 20 passos de integração no tempo	234
Tabela 38 –	Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 50 passos de integração no tempo	235
Tabela 39 –	Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 100 passos de integração no tempo	236
Tabela 40 –	Dados de tempo por iteração para diferentes passos de integração e diferente número de elementos finitos na discretização	237

Tabela 41 –	Dados adicionais para a determinação analítica dos fatores de penalização	239
Tabela 42 –	Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema estacionário sem considerar convecção no contorno da barra.....	249
Tabela 43 –	Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema estacionário considerando a convecção no contorno da barra.....	250
Tabela 44 –	Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema transiente considerando a convecção no contorno da barra.....	250
Tabela 45 –	Condições lógicas para os fatores de penalização conforme os resultados dos estudos analíticos realizados.....	251

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	Computer Aided-Design
CMOS	Complementary Metal-Oxide-Semiconductor
COMSOL	Software de elementos finitos
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
ETM	Eletrotermomecânico (a)
ETMDinT	Software do MOT considerando a resposta térmica transiente para microsistemas ETM desenvolvido neste trabalho
FGM	Functionally Graded Materials
GDL	Grau de Liberdade
HHT	Hilber-Hughes-Taylor
MATLAB	Matrix Laboratory (Linguagem de computação técnica)
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método de Elementos Finitos
MVF	Método de Volumes Finitos
MEMS	Microelectromechanical Systems
MMA	Method of Moving Asymptotes
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
PLS	Programação Linear Seqüencial
PQS	Programação Quadrática Seqüencial
PTI	Precise Time Integration
Q4/U	Implementação do MOT com variável de projeto por elemento
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
SLP	Sequential Linear Programming
SMA	Shape Memory Alloy
TOM	Topology Optimization Method

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Operador de montagem de elementos finitos
A	Área transversal
A_{ji}	Matriz exponencial calculada mediante série de potências
A_n	Coefficientes da solução em série de senos de uma EDP
B_{2pr}	Matriz do gradiente das funções de forma para o problema termoelástico
$B_{pi}, \mathbf{B}$	Matriz do gradiente das funções de forma para o problema elétrico e térmico
b_e	Largura do elemento finito e
C	Função que define o filtro de sensibilidades
C_i	Constante derivada de uma condição de contorno
C^o	Propriedade do material base qualquer
$C(x)$	Função representando uma propriedade do material qualquer no ponto x
C_{1ij}	Matriz global de capacidade calórica
$\hat{C}_{1ji}$	Matriz de capacidade térmica fictícia
C_{1ij}^e	Matriz elementar de capacidade calórica
c_1	Calor específico
D_{2ijkl}	Tensor de módulo elástico
$D_{2mp}, [D_2]$	Matriz de módulo elástico
D_{2pi}^o	Matriz de módulo elástico para o estado plano de tensão do material base
$\frac{dF_{ETM}}{dp_e}$	Sensibilidades da função objetivo em relação às variáveis de projeto calculadas pelo método adjunto
$\widehat{\frac{dF_{ETM}}{dp_e}}$	Sensibilidades da função objetivo em relação às variáveis de projeto modificadas pelo filtro de sensibilidades
$d_i, \{d\}$	Campo interpolado de deslocamentos no modelo de elementos finitos
dL_e	Diferencial da fronteira do elemento finito

du_{out}/dp_e	Sensibilidade do deslocamento de saída u_{out} em relação ao vetor de variáveis de projeto p_e
E_2	Módulo de Young
E_2^0	Módulo de Young do material base
E_i	Campo elétrico
e	Elemento e -ésimo da discretização de elementos finitos
F	Função objetivo de um problema de otimização
$F(x_o)$	Função objetivo avaliada em x_o
F_{oj}	Vetor global de corrente elétrica
F_{oi}^e	Vetor elementar de corrente elétrica
F_{1i}	Vetor global de fluxo de calor
$\hat{F}_{1i}$	Vetor de fluxo de calor fictício, vetor de excitação fictícia no método PTI
F_{1i}^e	Vetor elementar de fluxo de calor
F_{2r}	Vetor global de força
F_{2r}^e	Vetor elementar de força
$F_{adj_{2re}}$	Força adjunta estrutural
$F_{adj_{1ie}}$	Força adjunta térmica
$F_{adj_{oie}}$	Força adjunta elétrica
F_{CCF}	Função de penalização da instabilidade de tabuleiro
F_{ETM}	Função objetivo no problema de otimização de microsistemas ETM
F_{ETM}^{lin}	Função objetivo linearizada no problema de otimização de microsistemas ETM
F_{ETM}^{MO}	Função multi-objetivo para o problema de otimização de microsistemas ETM
$F_{gc_i}^e$	Contribuição ao vetor elementar de fluxo de calor devida à potência dissipada pelo efeito Joule no elemento
$F_{hc_i}^e$	Contribuição ao vetor elementar de fluxo de calor devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento
F_{hsi}^e	Contribuição ao vetor elementar de fluxo de calor devida à transferência de calor por convecção nas superfícies superior e inferior do elemento
$F_{lin}(x)$	Função objetivo linearizada
F_{qr}^p	Contribuição ao vetor elementar de força devida às forças distribuídas superficiais no contorno do elemento

F_r^p	Vetor elementar de forças pontuais prescritas
$F_{T_r}^e$	Contribuição ao vetor elementar de força devida à mudança de temperatura no material do elemento
F_{VPI}	Função de penalização das variáveis de projeto intermediárias
f_{b_i}	Vetor de forças de corpo
g_i	Restrição de desigualdade i de um problema de otimização
g_j^{lin}	Restrições de projeto de desigualdade linearizadas
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev de primeira ordem, cujos elementos são funções contínuas com primeira derivada quadrado integrável no domínio Ω
H_{ei}	Fator de peso no filtro de sensibilidades
H_i	Função de detecção das instabilidades de tabuleiro
H_{ji}	Matriz constante para a aproximação da solução no método PTI
h_1	Coefficiente de convecção
h_1^o	Coefficiente de convecção do material base
h_e	Altura do elemento finito e
h_j	Restrição de igualdade j em um problema de otimização
I	Corrente elétrica
I_i^p	Vetor elementar de corrente elétrica pontual prescrita
$[J]$	Matriz Jacobiana
J	Jacobiano
J_i	Densidade de corrente elétrica
J^p	Densidade de corrente elétrica prescrita
J_{ij}^p	Matriz elementar 4x4 de densidade de corrente prescrita
J_ξ	Jacobiano para uma fronteira, de um elemento finito no sistema de coordenadas locais, paralela ao eixo ξ
J_η	Jacobiano para uma fronteira, de um elemento finito no sistema de coordenadas locais, paralela ao eixo η
K	Rigidez da peça de trabalho ou peça atuada
K_{oij}	Matriz global de condutividade elétrica
K_{oij}^e	Matriz elementar de condutividade elétrica
K_{1ij}	Matriz global de condutividade térmica
K_{1ij}^e	Matriz elementar de condutividade térmica

K_{2rs}	Matriz global de rigidez estrutural
K_{2rs}^e	Matriz elementar de rigidez estrutural
K_{ctij}^e	Contribuição à matriz de rigidez elementar térmica devida à transferência de calor por condução no elemento
K_{hcij}^e	Contribuição à matriz de rigidez elementar térmica devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento
K_{hsij}^e	Contribuição à matriz de rigidez elementar térmica devida à transferência de calor por convecção nas superfícies superior e inferior do elemento
L	Comprimento
L_{oi}	Assíntota inferior do MMA na iteração imediatamente anterior
L_{2r}	Vetor que contém zeros exceto na posição correspondente ao grau de liberdade (GDL) na direção de saída no problema estrutural, cujo valor é 1.
L_i	Assíntota inferior do MMA
L_j	Vetor contendo os comprimentos das fronteiras do elemento e .
l_{ij}	Fronteira do elemento finito delimitada pelos nós i e j
$ l_{ij} $	Notação para indicar a avaliação sobre a fronteira l_{ij}
m	Número de passos de integração no tempo para o problema de otimização de microsistemas ETM
m_i	Função para o mapeamento das instabilidades de tabuleiro
N	Número total de elementos da discretização de elementos finitos
N_{2ir}	Matriz de funções de forma para o problema termoelástico
N_e	Conjunto definido para cada variável de projeto p_e composto por i elementos, cujo centróide encontra-se localizado a uma distância do e -ésimo elemento, menor do que o raio de filtro r_{min}
$\bar{N}_{im}, [\bar{N}]$	Matriz auxiliar de funções de forma para o cálculo de sensibilidades dos termos relacionados com a convecção pelo contorno do elemento no vetor elementar de fluxo de calor
N_j, N	Vetor de funções de forma
n	Número total de nós da discretização de elementos finitos
n_g	Número de restrições de desigualdade em um problema de otimização
n_h	Número de restrições de igualdade em um problema de otimização
$\hat{n}_i$	Vetor normal unitário

P	Fator de penalização da pseudo-densidade ou variável do projeto
P	Perímetro
P_0	Fator de penalização para a condutividade elétrica
P_1	Fator de penalização para a capacidade térmica
P_2	Fator de penalização para a condutividade térmica
P_3	Fator de penalização para o coeficiente de convecção
P_4	Fator de penalização para o módulo de Young
P_v	Função que depende unicamente da posição na solução de estado transiente para uma EDP
p_i	Termo de aproximação no MMA que leva em conta as primeiras derivadas com sinal positivo
$\dot{Q}_i^p$	Vetor elementar de fluxo de calor concentrado prescrito
$q_{e_j}^p$	Vetor elementar das componentes das forças distribuídas superficiais prescritas
$\dot{q}_g$	Geração de calor por unidade de volume
$\dot{q}_h^p$	Fluxo de calor por convecção na fronteira
q_i	Termo de aproximação no MMA que leva em conta as primeiras derivadas com sinal negativo
$\dot{q}_i$	Fluxo de calor
$\dot{q}^P$	Fluxo de calor prescrito por unidade de área
R	Solução particular da equação diferencial ordinária no domínio térmico
$R0_j, R1_j$	Termos para a aproximação linear do vetor de excitação no método PTI
R_{1ie}	Termo auxiliar no cálculo de sensibilidades pelo método adjunto
R_j	Vetor de excitação para a aproximação da solução no método PTI
R_{sua}	Raio máximo para arredondamento
r_{ei}	Distância entre os centróides dos elementos i -ésimo e e -ésimo.
r_{min}	Raio de abrangência do filtro
S_e	Área superficial do elemento finito
S_i	Parâmetro para o cálculo das assíntotas móveis do MMA que depende do histórico dos valores das variáveis de projeto
S_{ij}	Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchoff
$S_m, \{S\}$	Vetor tensão mecânica
$S_{Tm}, \{S_T\}$	Vetor de tensão térmica

T	Temperatura
$\dot{T}$	Variação da temperatura no tempo
$\bar{T}$	Campo de temperaturas virtual arbitrário
T_o	Temperatura ambiente
T_j	Vetor global de temperatura
$\dot{T}_j$	Vetor global de variação do vetor de temperatura no tempo
T_j^e	Vetor elementar de temperatura
$\dot{T}_j^e$	Vetor elementar de variação do vetor de temperatura no tempo
T^p	Temperatura prescrita
T_v	Função que depende unicamente do tempo na solução de estado transiente para uma EDP
t	Tempo ou instante de tempo pertencente ao estado transiente
t_f	Tempo de duração do estado transiente
t_i^p	Componentes prescritas de força superficial por unidade de área
t_n	Instante de tempo n .
t_{rj}^p	Matriz elementar 8x4 de forças superficiais prescritas
U_{o_i}	Assíntota superior do MMA na iteração imediatamente anterior
U_i	Assíntota superior do MMA
U_s	Vetor global de deslocamento
u	Deslocamento
u	Componente de deslocamento na direção x interpolado dentro de um elemento finito
u_i	Componentes nodais de deslocamento na direção x no elemento finito
u_e	Solução estacionária para o deslocamento no problema unidimensional
u_f	Deslocamento final esperado
u_i	Vetor deslocamento (no contínuo), vetor elementar de deslocamento contendo os valores das componentes nodais (no MEF)
$\ddot{u}_i$	Vetor aceleração
$\bar{u}_i$	Campo de deslocamentos virtual arbitrário
u_i^p	Componentes de deslocamento prescritas
u_{out}	Deslocamento de saída
u_s^e	Vetor elementar de deslocamento

u_t	Função da solução transiente para o deslocamento no problema unidimensional que depende unicamente da posição
u_x	Deslocamento na direção x
u_y	Deslocamento na direção y
V	Tensão elétrica ou voltagem
$\bar{V}$	Campo de voltagens virtual arbitrário
V^*	Restrição de volume no problema discreto de otimização
V_e	Volume do elemento finito
V_e^{PRI}	Vetor de volumes elementares correspondente às variáveis de projeto primárias
V_e^{NSIM}	Vetor de volumes elementares correspondente às variáveis de projeto não-simétricas
V_e^{SIM}	Vetor de volumes elementares correspondente às variáveis de projeto simétricas
V^p	Voltagem prescrita
V_j	Vetor global de voltagem
V_j^e	Vetor elementar de voltagem
v	Componente de deslocamento na direção y interpolado dentro de um elemento finito
v_i	Componentes nodais de deslocamento na direção y no elemento finito
w_1	Peso da função de penalização das variáveis de projeto intermediárias
w_2	Peso da função de penalização da instabilidade de tabuleiro
x	Abcissa do sistema de coordenadas globais
x_e, y_e	Coordenadas nodais do elemento e
x_i	Vetor de posição
$x_{,i}$	Variável x diferenciada na direção da coordenada i
$\dot{x}_i$	Variável x diferenciada em relação ao tempo
x_k^l	Limite móvel inferior para a variável de projeto k
x_k^u	Limite móvel superior para a variável de projeto k
y	Ordenada do sistema de coordenadas globais

Símbolos Gregos

α	Parâmetro que governa a estabilidade no método HHT- α
α_1	Capacidade térmica específica
α_1^0	Capacidade térmica do material base
α_2	Coefficiente de expansão térmica
$\alpha_{T2m}, \{\alpha_{T2}\}$	Vetor de expansão térmica
α_{T2p}^0	Vetor de expansão térmica do material base
β	Inverso da constante de tempo (τ) no problema unidimensional
Γ	Região onde é aplicada uma condição de contorno
Γ_J	Região onde é imposta uma densidade de corrente
Γ_q	Região onde é imposto um fluxo de calor
Γ_T	Região onde é imposta uma temperatura
Γ_t	Região onde é imposta uma força superficial
Γ_u	Região onde é imposto um deslocamento
Γ_V	Região onde é imposta uma voltagem
γ	Parâmetro que governa a estabilidade no método HHT- α , termo que avalia a existência do fenômeno da convecção entre elementos finitos
γ_{ij}	Deformações de cisalhamento
$\frac{\Delta F_{ETM}}{\Delta \rho_e}$	Sensibilidades da função objetivo em relação às variáveis de projeto calculadas pelo MDF
Δt	Intervalo de tempo por passo de integração
Δx	Dimensão máxima do elemento finito
$\Delta \rho_e$	Excitação da e -ésima variável de projeto no MDF
$\delta(\Delta t)$	Profundidade de penetração
δ_{ij}	Delta de Kronecker
∂	Operador diferencial parcial
ε_{ii}	Deformações normais
ε_{ij}	Tensor de deformação Green-Lagrange
ε_{Tkl}	Tensor de expansão térmica
$\varepsilon_p, \{\varepsilon\}$	Vetor deformação
$\varepsilon_{Tp}, \{\varepsilon_T\}$	Vetor de deformação térmica

ϵ	Número próximo de zero
η	Ordenada do sistema de coordenadas locais
θ	Variável que representa a diferença de temperatura em relação ao ambiente
Λ_{o_i}	Vetor adjunto elétrico
Λ_{1_i}	Vetor adjunto térmico
Λ_{2_r}	Vetor adjunto estrutural
$\Lambda_{t_{ir}}$	Variável adjunta para o cálculo de sensibilidades
$\bar{\Lambda}_{t_{jr}}$	Variável adjunta no espaço do tempo adjunto
λ	Constante de separação de variáveis para a solução de uma EDP
λ_1	Multiplicador de Lagrange associado à restrição de volume no problema de otimização unidimensional
λ_n	Solução particular para a constante de separação de variáveis de uma EDP
ν_2	Coefficiente de Poisson
ξ	Abscissa do sistema de coordenadas locais
(ξ_i, η_i)	Coordenadas do nodo i no sistema natural
ρ	Variável de projeto ou pseudo-densidade
ρ^*	Variável de projeto ou pseudo-densidade ótima no problema unidimensional
ρ_1	Densidade de massa
ρ_e	Vetor de variáveis de projeto por elemento
ρ_e^{PRI}	Vetor de variáveis de projeto primárias quando imposta a simetria
ρ_e^{NSIM}	Vetor de variáveis de projeto não-simétricas quando imposta a simetria
ρ_e^{SIM}	Vetor de variáveis de projeto simétricas quando imposta a simetria
ρ_m	m -ésima pseudo-densidade ou variável de projeto vizinha ao e -ésimo elemento
$\bar{\rho}_m, \{\bar{\rho}\}$	Vetor de variáveis de projeto dos elementos vizinhos ao elemento e
$\rho_{\min}$	Vetor contendo o valor mínimo que podem assumir as variáveis de projeto
$\rho_{\min}^{\text{mov}}$	Vetor contendo o limite móvel inferior das variáveis de projeto
$\rho_{\max}^{\text{mov}}$	Vetor contendo o limite móvel superior das variáveis de projeto
$\rho(x)$	Função de distribuição contínua de pseudo-densidade
Σ	Símbolo de somatória
σ_o	Condutividade elétrica
σ_o^0	Condutividade elétrica do material base
σ_1	Condutividade térmica

σ_1^o	Condutividade térmica do material base
σ_{ii}	Tensões mecânicas normais
τ	Constante de tempo para um sistema de primeira ordem, tempo adjunto para o cálculo de sensibilidades
τ_{ij}	Tensões mecânicas de cisalhamento
u	Solução de estado transiente para uma EDP
ψ	Solução de estado estacionário para uma EDP
Ω	Domínio do microsistema ETM
Ω_f	Domínio de projeto fixo
Ω_s	Volume final desejado no problema de otimização contínuo

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	7
LISTA DE TABELAS.....	16
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	20
LISTA DE SÍMBOLOS.....	21
1 INTRODUÇÃO.....	34
1.1 Sistemas Microeletromecânicos.....	34
1.2 Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM)	35
1.3 Objetivos.....	41
1.4 Justificativa	41
1.5 Organização do texto.....	42
2 MODELAGEM DOS MICROSISTEMAS	
ELETROTERMOMECÂNICOS (ETM) CONSIDERANDO A	
RESPOSTA TÉRMICA TRANSIENTE.....	43
2.1 Equações Governantes	43
2.1.1 Modelo Elétrico de Correntes Estacionárias.....	45
2.1.2 Condução de Calor em Estado Transiente.....	47
2.1.3 Modelo Termoelástico em Regime Quase-estático	50
3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA (OT)	54
3.1 Estado da Arte.....	54
3.2 Métodos de Otimização	56
3.3 Método de Otimização Topológica (MOT)	57
3.4 Modelo de Material	58
3.4.1 Modelo de Material SIMP.....	59
3.4.2 Fatores de Penalização	61
3.5 Problemas Numéricos no MOT.....	62
3.5.1 Dependência da Malha	63
3.5.2 Não-Unicidade da Solução	63
3.5.3 Escalas de Cinza.....	64

3.5.4	Instabilidade de Tabuleiro	65
3.5.5	Técnicas de Solução Para as Instabilidades Numéricas	66
3.6	Formulação do Problema de OT para Microsistemas ETM Considerando a Resposta Térmica Transiente	66
3.7	Determinação do Tempo Transiente.....	68
4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	70
4.1	Formulação em Elementos Finitos.....	70
4.1.1	Elementos Finitos no Domínio Elétrico em Regime Estacionário.....	71
4.1.2	Elementos Finitos no Domínio Térmico em Regime Transiente	71
4.1.3	Elementos Finitos no Domínio Termoeelástico em Regime Quase-Estático	75
4.1.4	Resolução dos Problemas de Elementos Finitos	77
4.1.5	Resolução do Problema de Elementos Finitos Térmico Transiente por um Método de Integração no Tempo.....	79
4.1.6	Considerações Adicionais.....	83
4.2	Programação Linear Seqüencial (PLS)	84
4.3	Método das Assíntotas Móveis (MMA)	87
4.4	Problema de Otimização Topológica na Forma Discreta	89
4.4.1	Formulação do Problema de Otimização na Forma Discreta	90
4.4.2	Avaliação da Convecção em Contornos Variáveis no Problema de OT	91
4.5	Análise de Sensibilidade	93
4.5.1	Sensibilidade de problemas de condução de calor	93
4.5.2	Método Adjunto	94
4.6	Imposição de Simetria	99
4.7	Filtro de Sensibilidades	101
4.8	Funções de Penalização Para Instabilidades Numéricas	103
4.8.1	Função de Penalização Para Reduzir as Escalas de Cinza	104
4.8.2	Função de Penalização Para Evitar a Formação da Instabilidade de Tabuleiro	106
4.9	Implementação Computacional do MOT.....	109
4.9.1	Módulo de Análise	109
4.9.2	Módulo de Otimização	109
4.9.3	Módulo de Pós-processamento	112

4.10 Interpretação de Resultados de OT Mediante Geração de Contornos	112
4.10.1 Geração da Topologia 0-1	113
4.10.2 Geração de contornos	113
4.10.3 Suavização de contornos	116
4.10.4 Verificação pelo MEF	117
5 RESULTADOS.....	118
5.1 Parâmetros Considerados	118
5.2 Microsistema Tipo Pistão.....	120
5.2.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes	121
5.2.2 Sensibilidade da solução ótima em relação ao raio de arredondamento	131
5.2.3 Sensibilidade da solução ótima em relação ao tamanho da “cabeça” na região passiva do microsistema	134
5.2.4 Sensibilidade da solução ótima em relação ao valor especificado da restrição de volume	138
5.2.5 Resultados com Fatores de Penalização Derivados do Estudo Analítico	142
5.3 Projeto de Microgarra.....	149
5.3.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes	150
5.3.2 Resultados com Fatores de Penalização Derivados do Estudo Analítico	156
5.4 Microsistema Inversor	163
5.4.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes	164
5.5 Estimativa dos Fatores de Penalização	171
6 CONCLUSÕES	178
6.1 Trabalhos Futuros	180
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	181
APÊNDICE A – ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE QUATRO NÓS..	
.....	197
APÊNDICE B – FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ELÉTRICO EM REGIME ESTACIONÁRIO	203
APÊNDICE C – DETALHAMENTO DA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS TÉRMICO.....	206

APÊNDICE D – FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS TERMOELÁSTICO EM REGIME QUASE-ESTÁTICO	208
APÊNDICE E – CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO.....	214
APÊNDICE F – CÁLCULO DE SENSIBILIDADES UTILIZANDO O MÉTODO DIRETO	217
APÊNDICE G – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA E CÁLCULO DE SENSIBILIDADES ASSOCIADO	224
APÊNDICE H – VALIDAÇÃO DO MEF UTILIZADO NO MOT	226
APÊNDICE I – VERIFICAÇÃO DAS SENSIBILIDADES MEDIANTE O MDF	232
APÊNDICE J – DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DOS FATORES DE PENALIZAÇÃO UTILIZADOS NO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO.....	238

1 INTRODUÇÃO

1.1 Sistemas Microeletromecânicos

Sistemas microeletromecânicos ou MEMS (“Microelectromechanical Systems”, em inglês) são sistemas integrados de microcomponentes mecânicos e circuitos eletrônicos (SIGMUND, 2001b), cujas dimensões estão no intervalo de centenas de micrômetros a poucos milímetros, sendo sensores ou atuadores. Entre as áreas de aplicação encontram-se a medicina, a bioengenharia, a indústria eletrônica, óptica, química e de serviços com aplicações práticas em sensores de pressão, de vazão, acelerômetros, micromotores, microgarras, válvulas, cabeçotes de impressoras, cabeçotes de leitura de HD, ferramentas de microcirurgia, sensores em “airbags”, giroscópios, ressonadores em celulares, microposicionadores e sensores do controle de altura de voo (LIU et al., 2010; ANDERSEN et al., 2009; MARINIS, 2009; RUBIO et al., 2009; ISHIHARA; ARAI; FUKUDA, 1996). Na atualidade, a área de MEMS representa um mercado mundial com previsões de crescimento da ordem US\$ 40 bilhões em 2015 e US\$ 200 bilhões em 2025 (MARINIS, 2009).

A manufatura dos sistemas microeletromecânicos está relativamente consolidada com o uso de processos de moldagem em moldes microfabricados ou da tecnologia do silício (MADOU, 1998). Porém, a fase de projeto apresenta ausência de desenvolvimento de métodos sistemáticos (SIGMUND, 1998). Geralmente, devido ao complexo comportamento eletromecânico dos materiais utilizados nesses sistemas é necessário o desenvolvimento de métodos sistemáticos com resultados confiáveis que se aproximem cada vez mais do comportamento real, com o fim de melhorar o desempenho do microsistema.

Os sistemas microeletromecânicos podem ser atuados sob diferentes princípios tais como: eletrostático (VOLLAND; HEERLEIN; RANGELOW, 2002), piezelétrico (PEREZ, 2005), liga de materiais com memória de forma (“Shape Memory Alloy” - SMA), (ROCH, 2003) e eletrotermomecânico (ETM), (RUBIO et al., 2009; ZEMAN; BORDATCHEV; KNOFF, 2006). Os atuadores eletrostáticos precisam de voltagens de excitação da ordem de 50-100 V, incompatíveis com os circuitos modernos de CMOS (Complementary Metal-Oxide-Semiconductor); além disso, os deslocamentos de saída são pequenos. Similarmente, a

atuação piezelétrica demanda altas voltagens de excitação, porém gera altas forças na saída; a principal desvantagem é a dificuldade tecnológica de se depositar o material piezelétrico em escala micrométrica. As atuações ETM e baseada em SMA apresentam maior eficiência em termos de deslocamento gerado com menores forças de atuação, em comparação com a atuação piezelétrica. Com relação à atuação ETM, destacam-se: linearidade entre a voltagem aplicada e o deslocamento gerado, facilidade de fabricação (ANANTHASURESH, 2003), voltagens de excitação baixas (5-10 V) (YAN; KHAJEPOUR; MANSOUR, 2003; MANKAME; ANANTHASURESH, 2001); tempo de resposta maior do que as anteriores formas de atuação, e operação a altas temperaturas (300-1500 K) (RUBIO ET AL., 2009; MANKAME; ANANTHASURESH, 2001).

1.2 Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM)

Os microsistemas ETM operam baseados na deformação por efeito termoelástico, induzida pelo aquecimento seletivo e não uniforme da sua estrutura produzido pelo efeito Joule quando uma corrente elétrica percorre o sistema (ZEMAN; BORDATCHEV; KNOFF, 2006; MOULTON; ANANTHASURESH, 2001). Os microsistemas ETM podem ser considerados “inteligentes” pelo seu projeto, já que se procura determinar a forma do dispositivo com a finalidade de originar um comportamento específico. Esses microsistemas geram altas forças ou deslocamentos, porém seu consumo de potência é elevado. Entre as desvantagens podem ser destacadas, o calor produzido, que deve ser retirado da peça de trabalho¹, e o tempo de resposta maior em relação a outras formas de atuação (RUBIO et al., 2009; ANANTHASURESH, 2003; MANKAME; ANANTHASURESH, 2001).

Um exemplo típico de uma estrutura atuada de forma eletrotermomecânica é mostrado na Figura 1. Nesta figura podem ser diferenciados dois tipos de regiões, uma ativa com alta temperatura, maior deformação e próxima dos apoios; e uma passiva com baixa temperatura, menores deslocamentos e afastada dos suportes (RUBIO et al., 2009).

¹ Considera-se peça de trabalho todo objeto sobre o qual um microsistema ETM, como resultado da sua atuação, exerce uma força ou deslocamento.

Para conhecer a resposta de uma estrutura ETM, deve-se fazer uma análise sequencial resolvendo um conjunto de equações diferenciais de três domínios físicos: elétrico, térmico e elástico. Na análise elétrica e térmica determinam-se a distribuição de potenciais e de temperatura pelo efeito Joule, respectivamente, enquanto que na análise estrutural quantificam-se as deformações no domínio elástico sob cargas térmicas (MANKAME; ANANTHASURESH, 2001). A análise do comportamento de um microsistema ETM pode ser feita mediante o Método de Elementos Finitos (MEF), utilizando elementos bidimensionais, porque a maioria das estruturas é plana. A modelagem térmica é importante, já que os fenômenos de transferência de calor mudam de relevância na medida em que a temperatura aumenta. Em temperaturas baixas (menores a 500°K) o calor gerado pelo efeito Joule é conduzido majoritariamente por condução, em temperaturas maiores os fenômenos de convecção e radiação tornam-se mais relevantes. Contudo, a transferência de calor por convecção adquire importância na escala micrométrica, pois os fenômenos envolvendo superfícies (forças eletrostáticas, por exemplo) têm maior efeito do que os semelhantes volumétricos (forças de corpo, por exemplo) sendo até uma ordem de grandeza maior. Além disso, dados precisos sobre o coeficiente de transferência de calor por convecção são difíceis de obter (ANANTHASURESH, 2003; MOULTON; ANANTHASURESH, 2001).

Figura 1 – Funcionamento típico de um microsistema ETM: (a) Domínio discretizado em elementos finitos; (b) Distribuição de tensão elétrica; (c) Distribuição de temperatura; (d) Estrutura deformada com a distribuição das tensões de von Mises (RUBIO et al., 2009)

Os processos de fabricação comumente utilizados são micro-usinagem e corrosão; podendo utilizar-se qualquer material condutor com adequada flexibilidade e resistência mecânica como material estrutural. É usual que estes dispositivos sejam construídos de uma camada simples, sem restrição mecânica e eletricamente isolada (ANANTHASURESH, 2003; SIGMUND, 2001b, 2001c; MOULTON; ANANTHASURESH, 2001; COMTOIS; MICHALICEK; BARRON, 1998). Entre as suas aplicações potenciais podem-se mencionar a manipulação de nanotubos (SARDAN et al., 2008), instrumentação médica, microbombas, microposicionamento (de microespelhos em “data shows”, por exemplo), micromontagem (JONSMANN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1999b), micromotores, mecanismos de ajuste por pressão (“snap-fit”), (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004), entre outros.

Entre os atuadores ETM básicos encontra-se o microsistema em "U" (ver Figura 2), denominado na literatura “heatuator” ou "U-shaped actuator" que converte pequenas deformações térmicas axiais em grandes deflexões laterais, devido à forma da estrutura. Fundamentalmente, o braço mais estreito possui uma maior densidade de corrente e sua deformação é maior por causa de maior calor de Joule por unidade de volume (ANANTHASURESH, 2003; COMTOIS; BRIGHT, 1997).

Figura 2 – Microsistema ETM em "U"

O comportamento de um microsistema ETM é influenciado principalmente por quatro fatores:

- **Geometria:** Mudando dimensões específicas mantendo inalteráveis as condições de contorno podem-se obter variações na resposta (LEE; HSU, 2003; HUANG; LEE, 1999; PAN; HSU, 1997), (ver Figura 3).

Figura 3 – Variação da resposta de um microsistema ETM pela variação da geometria

• **Condições de contorno elétricas:** Alterando os pontos de aplicação da voltagem. Um exemplo nesse caso é o microsistema em "U", o qual gera uma resposta diferente se a tensão elétrica é aplicada em série (ver Figura 2) ou em paralelo (ver Figura 4), (ANANTHASURESH, 2003).

Figura 4 – Variação da resposta de um microsistema ETM pela modificação das condições de contorno elétricas

• **Propriedades de material:** Quando utilizados materiais semicondutores como o Silício, que permitem realizar processos de dopagem seletiva com a finalidade de modificar a condutividade de regiões específicas do microsistema (MOULTON; ANANTHASURESH, 2001), (ver Figura 5).

Figura 5 – Variação da resposta de um microsistema ETM pela alteração das propriedades de material

• **Condições de contorno térmicas:** O calor de Joule gerado pode ser dissipado por condução, convecção ou radiação dependendo da geometria, propriedades de material e condições ambientais (ver Figura 6). A condução de calor pelo substrato, que serve de suporte

ao microsistema, pode ser importante, já que a junção com os apoios do dispositivo pode precisar de isolamento térmico e, além disso, o substrato pode possuir uma massa maior comparado com o microsistema (LIN; CHIAO, 1996). Essa condição de contorno pode ser modelada como uma temperatura constante nos apoios (condição de contorno de Dirichlet² ou essencial). Se a massa do substrato não for representativa, deve-se impor uma condição de contorno de fluxo de calor (condição de contorno de Neumann³ ou natural). A radiação é importante quando aplicadas grandes voltagens com o objetivo de gerar grandes forças ou deslocamentos. Igualmente, podem alcançar-se temperaturas de incandescência (MOULTON; ANANTHASURESH, 2001; MANKAME; ANANTHASURESH, 2001, 2000; COMTOIS; BRIGHT, 1997).

Figura 6 – Variação da resposta de um microsistema ETM pela mudança nas condições de contorno térmicas (Adaptado de: MANKAME; ANANTHASURESH, 2001): (a) Sem considerar a convecção; (b) Considerando convecção

Na literatura, tem sido reconhecido o fato de que o fenômeno térmico é o mais lento entre os diferentes domínios físicos para sistemas com dimensões da ordem de milímetros (RUBIO et al., 2009) ou ainda maiores (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004). O tempo transiente foi introduzido como um parâmetro de entrada no projeto de dispositivos atuados termicamente por Li, Saitou e Kikuchi (2004), com a finalidade de maximizar o deslocamento de saída. O projeto destas estruturas é apresentado como um problema de otimização, no qual a função objetivo é maximizar um deslocamento na direção e ponto desejados, conhecendo a

2 Na condição de contorno de Dirichlet são especificados valores da solução na fronteira do domínio (BATHE, 1996).

3 Na condição de contorno de Neumann são especificados valores da derivada da solução na fronteira do domínio (BATHE, 1996).

excitação térmica aplicada, além de minimizar o volume total de material utilizado na produção do mecanismo.

No projeto de microsistemas ETM têm sido utilizados enfoques intuitivos (ANDERSEN et al., 2009; ELBUKEN et al., 2008; DUC et al., 2008; TSAI; LEI; SUDIN, 2005; YAN; KHAJEPOUR; MANSOUR, 2003; PARK et al., 2001; QUE; PARK; GIANCHANDANI, 2001), baseados em aproximações genéricas e sistemáticas, como o Método de Otimização Topológica (MOT), (RUBIO et al., 2009; SIGMUND, 2001b, 2001c) ou utilizando outros enfoques de otimização (KARBASI et al., 2010; CHEN; KUNG; LEE, 2002). O MOT já foi utilizado com sucesso na solução de diversos problemas como os projetos de mecanismos flexíveis (KIKUCHI, 1998; NISHIWAKI et al., 1998; SIGMUND, 1997), atuadores piezelétricos (BUEHLER, BETTIG, PARKER, 2004; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000) e microsistemas ETM (YIN; ANANTHASURESH, 2002; SIGMUND, 2001b, 2001c). Na caracterização de microsistemas ETM projetados pelo MOT, os resultados nos valores de deslocamento numéricos e experimentais apresentam diferenças que variam entre 20% e 100% (RUBIO et al., 2009). No Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP, tem-se trabalhado com sistemas ETM aplicando o MOT nas áreas de: projeto (RUBIO, 2005); fabricação e caracterização experimental (RUBIO et al., 2009).

A operação dos microsistemas ETM implica no armazenamento de energia e, portanto a resposta não ocorre imediatamente após a excitação, exibindo uma resposta transiente antes de alcançar o estado estacionário. Como todo sistema físico, eles não podem seguir excitações súbitas de maneira instantânea. A resposta transiente depende das restrições do projeto, no entanto, é desejável que seja rápida, amortecida e estável quando o sistema alcança o estado estacionário. Os tempos de resposta, elétrico e mecânico são da ordem de milissegundos até poucos segundos, enquanto o tempo de resposta no domínio térmico pode alcançar até centenas de segundos como é descrito em Li, Saitou e Kikuchi (2004). Desse modo, em estruturas ETM a resposta mais lenta ocorre no estado transiente térmico, sendo assim necessário reduzir esse tempo de resposta para melhorar a sua eficiência. Neste trabalho, será desenvolvido o projeto de microsistemas ETM com o MOT, minimizando o tempo de resposta e maximizando o deslocamento de saída no regime linear. Em trabalhos anteriores (RUBIO et al., 2009; RUBIO, 2005; YIN; ANANTHASURESH, 2002; SIGMUND, 2001b, 2001c) a maximização do deslocamento somente era considerada na situação estática ignorando o tempo transiente. Portanto, a alteração da topologia deve fazer com que a

variação da temperatura em relação ao tempo seja a máxima possível, já que isso é um fator determinante na minimização do tempo de resposta. O resultado gerado através do MOT deve ser uma topologia que forneça o maior deslocamento com um menor tempo de resposta, dados o domínio de projeto, carregamentos e condições de contorno.

1.3 Objetivos

- Desenvolver o projeto de Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM) utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT) considerando a resposta térmica transiente.
- Projetar Microsistemas Eletrotermomecânicos (ETM) para aplicações potenciais, como atuadores e microgarras, considerando a resposta térmica transiente, analisando diferentes domínios e condições de contorno.

1.4 Justificativa

O ciclo de desenvolvimento dos sistemas microeletromecânicos compreende as etapas de projeto, simulação, fabricação e caracterização experimental. A modelagem e especialmente a criação de métodos sistemáticos para o projeto, estão em etapas de desenvolvimento, fazendo com que muitos dispositivos sejam projetados baseados na intuição, experiência e abordagens de tentativa e erro. Assim, métodos de projeto sistemáticos como a Otimização Topológica (OT) contribuem para a melhora dos projetos existentes e também para obter novos e mais eficientes dispositivos para diferentes aplicações. Dado que para os microsistemas ETM a atuação depende da geração de uma distribuição de temperatura não-uniforme, o tempo de resposta geralmente é muito alto, comparado com o tempo de atuação por cerâmicas piezelétricas, por exemplo. As características da resposta transiente determinam o comportamento dinâmico do microsistema, o que faz com que seja desejável uma resposta rápida, amortecida e estável quando o sistema alcança o equilíbrio. O projeto dos microsistemas ETM envolve três domínios (elétrico, térmico e elástico) com tempos de resposta de diferentes ordens de grandeza, assim é necessário reduzir o tempo de resposta dos fenômenos mais lentos, que são os processos térmicos, para melhorar a sua eficiência.

Portanto, neste trabalho será desenvolvido o projeto de microsistemas ETM com o MOT, tendo como objetivos a minimização do tempo de resposta do domínio térmico e a maximização do deslocamento de saída no regime linear.

1.5 Organização do texto

Neste capítulo foi realizada uma introdução e uma revisão bibliográfica correspondente a sistemas microeletromecânicos e microsistemas ETM. No capítulo 2 é apresentada a modelagem dos microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente a partir de um enfoque contínuo. No capítulo 3 é realizada uma revisão bibliográfica sobre MOT e apresentada a formulação do problema de otimização para microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente. Em seguida, no capítulo 4 é descrita a implementação numérica do MOT, incluindo a modelagem térmica transiente com MEF e o cálculo de sensibilidades. No capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos com a implementação numérica descrita no capítulo anterior. As conclusões e trabalhos futuros são mostrados no capítulo 6. Os detalhes da formulação do MEF e do MOT, os conceitos fundamentais de OT, a validação do MEF utilizando um software comercial, o método direto para o cálculo de sensibilidades, a verificação de sensibilidades mediante o Método das Diferenças Finitas (MDF) e um estudo analítico para a determinação dos fatores de penalização são expostos nos apêndices do texto.

2 MODELAGEM DOS MICROSISTEMAS ELETROTERMOMECÂNICOS (ETM) CONSIDERANDO A RESPOSTA TÉRMICA TRANSIENTE

Para a modelagem de um atuador ETM deve-se considerar a interação de três domínios físicos, um elétrico (representado por uma distribuição de potencial gerada pela aplicação de uma corrente elétrica), um térmico (constituído pela distribuição de temperatura derivada do efeito Joule) e um mecânico (determinado pelos deslocamentos devidos a carregamento térmico). Neste capítulo são apresentadas as equações governantes de um atuador ETM segundo um enfoque contínuo.

2.1 Equações Governantes

Na modelagem assume-se que as deformações são pequenas e que os campos elétrico, térmico e estrutural podem ser modelados utilizando um enfoque linear e, além disso, que as estruturas são bidimensionais (dada sua reduzida espessura) proporcionando deste modo uma significativa simplificação do problema. Assim, o sistema é considerado fracamente acoplado já que as equações que descrevem o problema são independentes entre domínios (ANANTHASURESH, 2003; MANKAME; ANANTHASURESH, 2001; SIGMUND, 2001b). No domínio térmico é incluída a resposta transiente, por essa ser a mais lenta quando comparada com as outras respostas dos domínios envolvidos nos microsistemas ETM. É desejável que a resposta transiente seja rápida, amortecida e estável no estado estacionário, com o intuito de melhorar o desempenho daqueles microsistemas. A distribuição de temperatura é uma função do tempo, abordando o problema como linear (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004). Para a dedução das equações governantes, considera-se o sólido Ω contido no domínio de projeto fixo⁴ Ω_f , mostrado na Figura 7. A estrutura analisada é um subdomínio do domínio Ω_f (logo $\Omega \subseteq \Omega_f$), que contém um material linear termoeletroelástico (região escura) e que pode ter ou não regiões vazias (regiões brancas). As fronteiras, do sistema

4 Refere-se ao espaço geométrico fixo que contém a estrutura, compreendido pelos pontos de apoio e os pontos de aplicação dos carregamentos. Deve-se levar em conta que alguns carregamentos, como os térmicos, podem ser dependentes do projeto e não situar-se exatamente na fronteira do domínio.

analisado, são compostas de seis pares de regiões não-conectadas $\Gamma = \overline{\Gamma_V} \cup \overline{\Gamma_J} = \overline{\Gamma_T} \cup \overline{\Gamma_q} = \overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma_t}$, onde os subíndices fazem referência às condições de contorno elétrica (V e J), térmica (T e $\dot{q}$) e estrutural (u e t). Igualmente, os subíndices V, T e u referem-se às condições de fronteira essenciais (ou de Dirichlet) e as restantes (J, $\dot{q}$ e t) indicam as condições de fronteira naturais (ou de Neumann), (BATHE, 1996). As regiões Γ_V , Γ_T , e Γ_u podem ser sobrepostas ou completamente separadas, sendo também aplicável para as regiões Γ_J , Γ_q , e Γ_t .

Figura 7 – Condições de contorno e de carregamento nos microsistemas ETM

A estrutura é excitada por uma tensão elétrica V , sendo distribuída nos pontos destinados como apoios para conformar um circuito elétrico tendo assim voltagens impostas (V^P) em lugares especificados. Os apoios agem como engastamentos ($u^P = 0$, em todas as direções) e considera-se que a temperatura neles permanece constante (T^P). Além disso, existem outras condições de contorno do tipo elétrico (densidade de corrente por unidade de área imposta, J^P), térmico (fluxo de calor por unidade de área imposto, $\dot{q}^P$) e mecânico (forças superficiais por unidade de área, t_i^P , e deslocamentos impostos, u_i^P). As equações governantes de cada um dos domínios são apresentadas a seguir. Cabe esclarecer, que as notações x_i e $\dot{x}_i$ apresentadas abaixo significam diferenciação na direção da coordenada i e diferenciação em relação ao tempo da variável x respectivamente. Igualmente, os subíndices que acompanham as propriedades de material referem-se aos problemas elétrico (0), térmico (1) e estrutural (2).

2.1.1 Modelo Elétrico de Correntes Estacionárias

No domínio elétrico considera-se que as correntes que entram no sistema são iguais às correntes que saem. Por essa razão, o modelo é denominado de correntes estacionárias em materiais condutores (ver Figura 8). O campo de tensão V é a incógnita a ser determinada e a propriedade característica do material é a condutividade elétrica σ_o .

Figura 8 – Modelo de correntes estacionárias em materiais condutivos.

A equação descrevendo o fenômeno é (BASTOS, 2003):

$$J_{i,i} = 0 \text{ em } \Omega \quad (1)$$

Denominada equação de continuidade elétrica. Dado que a densidade de corrente J_i está dada por:

$$J_i = \sigma_o \delta_{ij} E_j = \sigma_o E_i \quad (2)$$

e o campo elétrico E_i está relacionado com a voltagem V por:

$$E_i = -V_{,i} \quad (3)$$

logo:

$$J_i = -\sigma_o V_{,i} \quad (4)$$

substituindo a eq. (1) na eq.(4):

$$-\sigma_o V_{,ii} = 0 \quad (5)$$

e assim, obtém-se:

$$\sigma_o V_{,ii} = 0 \text{ em } \Omega \quad (6)$$

Agora, sob suposição de um domínio sólido com material linear e isotrópico (σ_o igual em todas as direções), multiplicando ambos os lados da eq.(6) por um campo de voltagens virtual, arbitrário, admissível que satisfaz a condição de contorno de Dirichlet homogênea e integrando sobre o domínio Ω , tem-se (CHOI; KIM, 2005):

$$\int_{\Omega} \bar{V} \sigma_o V_{,ii} d\Omega = 0 \quad (7)$$

integrando por partes

$$\int_{\Omega} (\bar{V} \sigma_o V_{,i})_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{V}_{,i} \sigma_o V_{,i} d\Omega = 0 \quad (8)$$

aplicando o teorema da divergência (THOMAS; FINNEY, 1996):

$$\int_{\Gamma} \bar{V} \sigma_o V_{,i} \hat{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{V}_{,i} \sigma_o V_{,i} d\Omega = 0 \quad (9)$$

sendo $\hat{n}_i$ um vetor unitário normal à superfície Γ que envolve o volume Ω , e $\bar{V}_{,i} = V_{,i}(\bar{V})$. Tendo que:

$$\sigma_o V_{,i} \hat{n}_i = \sigma_o \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{n}_i = -J_i \hat{n}_i = -J^p \quad (10)$$

Figura 9 – Condição de contorno natural no problema elétrico

e substituindo a equação anterior na eq.(9):

$$\int_{\Omega} \bar{V}_i \sigma_o V_i d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{V} (-J_i \hat{n}_i) d\Gamma = - \int_{\Gamma_J} \bar{V} J^p d\Gamma_J, \quad \forall \bar{V} \in \bar{v} = \left\{ V \in H^1(\Omega) : V \Big|_{\Gamma_V} = 0 \right\} \quad (11)$$

Para o problema considerado, as condições de contorno são:

- Condição de contorno essencial: Voltagem imposta.

$$V = V^p \text{ sobre } \Gamma_V, \quad \forall V \in v = \left\{ V \in H^1(\Omega) : V \Big|_{\Gamma_V} = V^p \right\} \quad (12)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 9): Densidade de corrente imposta.

$$-\sigma_o V_{,i} \hat{n}_i = J_i \hat{n}_i = J^p \text{ sobre } \Gamma_J \quad (13)$$

onde:

V : Variável de estado que representa a voltagem.

V^p : Voltagem prescrita.

σ_o : Condutividade elétrica.

J^p : Densidade de corrente prescrita

$\hat{n}_i$: Vetor normal unitário para a superfície Γ_J .

Assim, aplicando as condições de contorno, a equação governante na sua forma integral é dada por:

$$\int_{\Omega} \bar{V}_i \sigma_o V_i d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{V} (\sigma_o V_{,i} \hat{n}_i) d\Gamma = - \int_{\Gamma_J} \bar{V} J^p d\Gamma_J, \quad \forall \bar{V} \in \bar{v} \quad (14)$$

2.1.2 Condução de Calor em Estado Transiente

No caso do domínio térmico transiente o campo de temperatura T e a variação da temperatura no tempo $\dot{T}$ são as incógnitas do sistema e as propriedades características do

material são a capacidade térmica específica α_1 e a condutividade térmica σ_1 . A capacidade térmica específica é definida como o produto da densidade de massa ρ_1 vezes o calor específico c_1 . Fazendo um balanço de energia térmica no sistema da Figura 7 obtém-se (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004):

$$\rho_1 c_1 \dot{T} - \sigma_1 T_{,ii} - \dot{q}_g = 0 \text{ em } \Omega \quad (15)$$

Sendo o termo $\dot{q}_g$ a geração de calor por unidade de volume que neste caso equivale à potência dissipada pelo efeito joule por unidade de volume. A potência dissipada, levando em conta a relação dada pela eq.(2), pode ser expressa como:

$$\dot{q}_g = \frac{J_i J_i}{\sigma_o} = \sigma_o E_i E_i = \sigma_o V_{,i} V_{,i} \quad (16)$$

A eq.(15) é então:

$$\alpha_1 \dot{T} - \sigma_1 T_{,ii} - \sigma_o V_{,i} V_{,i} = 0 \text{ em } \Omega \quad (17)$$

Com a suposição de um domínio sólido com material linear, homogêneo e isotrópico (σ_o, σ_1 iguais em todas as direções e ρ_1 constante em todo o domínio), com as fronteiras do domínio invariáveis no tempo; multiplicando ambos os lados da eq.(17) por um campo de temperaturas virtual, arbitrário, admissível que satisfaz a condição de contorno de Dirichlet homogênea e integrando sobre o domínio Ω tem-se (CHOI; KIM, 2005):

$$\int_{\Omega} \bar{T} (\alpha_1 \dot{T} - \sigma_1 T_{,ii} - \sigma_o V_{,i} V_{,i}) d\Omega = 0 \quad (18)$$

integrando por partes o segundo termo:

$$\int_{\Omega} \bar{T} \alpha_1 \dot{T} d\Omega - \left[\int_{\Omega} (\bar{T} \sigma_1 T_{,i})_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{T}_{,i} \sigma_1 T_{,i} d\Omega \right] - \int_{\Omega} \bar{T} \sigma_o V_{,i} V_{,i} d\Omega = 0 \quad (19)$$

aplicando o teorema da divergência na segunda integral:

$$\int_{\Omega} \bar{T} \alpha_1 \dot{T} d\Omega - \left[\int_{\Gamma} \bar{T} \sigma_1 T_{,i} \hat{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{T}_{,i} \sigma_1 T_{,i} d\Omega \right] - \int_{\Omega} \bar{T} \sigma_o V_{,i} V_{,i} d\Omega = 0 \quad (20)$$

sendo $\hat{n}_i$ um vetor unitário normal à superfície Γ que envolve o volume Ω , e $\bar{T}_i = T_i(\bar{T})$. Tendo que:

$$\sigma_1 T_i \hat{n}_i = \sigma_1 \frac{\partial T}{\partial x_i} \hat{n}_i = -\dot{q}_i \hat{n}_i = -\dot{q}_h^p = -h_1(T - T^p) \quad (21)$$

Figura 10 – Condição de contorno mista no problema térmico transiente

substituindo a equação anterior na eq.(20) e organizando os termos:

$$\int_{\Omega} \bar{T} \alpha_1 \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{T}_i \sigma_1 T_i d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{T} h_1 (T^p - T) d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{T} \sigma_o V_i V_i d\Omega = \int_{\Gamma_q} \bar{T} h_1 (T^p - T) d\Gamma_q + \int_{\Omega} \bar{T} \sigma_o V_i V_i d\Omega, \quad \forall \bar{T} \in \bar{\tau} = \left\{ T \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : T|_{(\Gamma_T, t)} = 0 \right\} \quad (22)$$

Para o problema considerado, as condições de contorno são:

- Condição de contorno essencial: Temperatura imposta.

$$T = T^p \text{ sobre } \Gamma_T, \quad \forall T \in \tau = \left\{ T \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : T|_{(\Gamma_T, t)} = T^p \right\} \quad (23)$$

- Condição de contorno mista (ou de Robin⁵, ver Figura 10): Fluxo de calor por convecção na fronteira, embora possa ser um fluxo de calor por condução prescrito se houver.

$$-\sigma_1 T_i \hat{n}_i = h_1 (T^p - T) = \dot{q}_h^p \text{ sobre } \Gamma_q \quad (24)$$

⁵ Na condição de contorno de Robin é especificada uma combinação lineal dos valores da solução e da sua derivada na fronteira do domínio. Desde outro ponto de vista é uma combinação ponderada das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann (BATHE, 1996).

onde:

T : Variável de estado que representa a temperatura.

T^P : Temperatura prescrita.

σ_1 : Condutividade térmica.

h_1 : Coeficiente de convecção.

$\dot{q}_h^P$: Fluxo de calor por convecção na fronteira.

$\hat{n}_i$: Vetor normal unitário para a superfície Γ_q .

Sendo o problema transiente, a condição inicial está dada por:

$$T = T_o \text{ em } \Omega, \forall T \in \tau = \left\{ T \in H^1(\Omega) : T \Big|_{(\Omega, 0)} = T_o \right\} \quad (25)$$

Assim, a equação governante aplicando as condições de contorno e iniciais na sua forma integral é:

$$\int_{\Omega} \bar{T} \alpha_1 \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{T}_i \sigma_1 T_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{T} h_1 T d\Gamma_q = \int_{\Gamma_q} \bar{T} h_1 T^P d\Gamma_q + \int_{\Omega} \bar{T} \sigma_o V_{,i} V_{,i} d\Omega, \forall \bar{T} \in \bar{\tau} \quad (26)$$

Analisando a eq.(26), observa-se que a geração de calor interno é uma função do campo de tensão elétrica V .

2.1.3 Modelo Termoelástico em Regime Quase-estático

No domínio estrutural procura-se o campo vetorial u_i que satisfaz a equação de Euler-Lagrange (REDDY, 2002):

$$S_{ij,j} + f_{b_i} = \rho_1 \ddot{u}_i \text{ em } \Omega \quad (27)$$

Como os efeitos das forças de corpo f_{b_i} e as acelerações $\ddot{u}_i$ do sistema são desprezíveis e, além disso, as suas frequências de operação são baixas, o problema pode ser abordado em regime quase-estático. A eq.(27) converte-se em:

$$S_{ij,j} = 0 \text{ em } \Omega \quad (28)$$

onde S_{ij} é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchoff. De novo, sob suposição de um domínio sólido com material linear, homogêneo e isotrópico (propriedades elásticas iguais em todas as direções), com as fronteiras do domínio invariáveis no tempo e aplicando o princípio do trabalho virtual na eq.(28) chega-se a (CHOI; KIM, 2005):

$$\int_{\Omega} \bar{u}_i S_{ij} d\Omega = 0 \quad (29)$$

com $\bar{u}_i$ como um campo de deslocamentos virtual, arbitrário, admissível que satisfaz a condição de contorno de Dirichlet homogênea. Integrando por partes a expressão anterior:

$$\int_{\Omega} (\bar{u}_i S_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{u}_{j,i} S_{ij} d\Omega = 0 \quad (30)$$

aplicando o teorema da divergência na primeira integral e reorganizando os termos:

$$\int_{\Omega} \bar{u}_{j,i} S_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{u}_i S_{ij} \hat{n}_j d\Gamma \quad (31)$$

sendo $\hat{n}_j$ um vetor unitário que sai da superfície Γ que envolve o volume Ω . Lembrando que o tensor de deformação Green-Lagrange linearizado $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$ é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (32)$$

logo $\bar{u}_{j,i} = \bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{u}_i)$. O tensor de tensões de Piola-Kirchoff, incluídos os efeitos térmicos, pode ser expresso como:

$$S_{ij} = D_{2ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{Tkl}) \quad (33)$$

sendo D_{2ijkl} o tensor de módulo elástico de ordem 4 e ε_{Tkl} o tensor de expansão térmica. Assim, o tensor de expansão térmica é:

$$\varepsilon_{Tij} = \alpha_2(T - T^p)\delta_{ij} \quad (34)$$

onde:

α_2 : Coeficiente de expansão térmica

T : Variável de estado que representa a temperatura.

T^p : Temperatura prescrita.

δ_{ij} : Delta de Kronecker

Tendo que:

$$S_{ij}\hat{n}_j = D_{2ijkl}\varepsilon_{jk}\hat{n}_l = D_{2ijkl}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\hat{n}_l = t_i \quad (35)$$

Figura 11 – Condição de contorno natural no problema estrutural quase-estático

Para este caso as condições de contorno são:

- Condição de contorno essencial: Deslocamento imposto.

$$u_i = u_i^p \text{ sobre } \Gamma_u, \quad \forall u_i \in U = \left\{ U \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = u_i^p \right\} \quad (36)$$

- Condição de contorno natural (ver Figura 11): Componentes de força superficial prescritas.

$$S_{ij}\hat{n}_j = t_i^p \text{ sobre } \Gamma_t \quad (37)$$

Já que o tensor de tensão S_{ij} é uma função do campo de temperatura T , que por sua vez depende do tempo, o campo de deslocamentos é uma função do tempo, ou seja:

$$u_i = u_i(x_i, t) \quad (38)$$

da mesma forma, o tensor de deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_i(x_i, t)) \quad (39)$$

Deste modo, embora o problema seja considerado em regime quase-estático, existe uma condição inicial dada por:

$$u_i = u_{i_0} \text{ em } \Omega, \quad \forall u_i \in U = \left\{ u_i \in H^1(\Omega) : u_i \Big|_{(\Omega, 0)} = u_{i_0} \right\} \quad (40)$$

substituindo as relações anteriores na eq.(31) e reordenando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{u}_i) D_{2ijkl} \varepsilon_{kl}(t) d\Omega &= \int_{\Gamma} \bar{u}_i S_{ij} \hat{n}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{u}_i) D_{2ijkl} \alpha_2(T(t) - T^p) \delta_{kl} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{u}_i t_i^p d\Gamma_t + \\ \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{u}_i) D_{2ijkl} \alpha_2(T(t) - T^p) \delta_{kl} d\Omega, \quad \forall \bar{u}_i \in \bar{U} &= \left\{ u_i \in H^1(\Omega) \times [0, \infty) : u_i \Big|_{(\Gamma_u, t)} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

sendo $\bar{u}_i$ invariável no tempo.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA (OT)

Neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica e a fundamentação teórica para o problema de otimização no projeto de microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente. Os conceitos básicos de otimização utilizados neste trabalho são resumidos no APÊNDICE E.

3.1 Estado da Arte

A origem da OT remonta ao trabalho de Michell (1904), surgindo como método computacional, destinado a projetar estruturas ótimas seguindo critérios de custo, com Bendsøe e Kikuchi (1988). No início, trabalhou-se com o problema da maximização da rigidez com restrição de volume de material. O trabalho de Michell (1904) é considerado o primeiro em OT de estruturas, e foi retomado por Nagtegaal e Prager (1973), Prager (1974, 1978), Strang e Kohn (1983), entre outros. A introdução do conceito de materiais compostos, com a finalidade de relaxar o problema de otimização discreto, impulsionou o desenvolvimento de otimização em meios contínuos com trabalhos como Kohn e Strang (1986a, 1986b, 1986c), Cheng e Olhoff (1982), Lurie et al. (1982a, 1982b) e Cheng (1981). Cheng e Olhoff (1982) concluíram que, no problema de maximização da rigidez com restrição de volume em placas finas, a distribuição ótima de espessura compõe-se de infinitos reforços infinitesimais que se comportam como infinitas microestruturas num material composto. Rozvany e Zhou (1991) aplicaram o critério de optimalidade em problemas de otimização paramétrica estrutural sob um enfoque contínuo.

Dado que o problema de otimização na forma discreta não apresenta solução, têm sido utilizados enfoques de relaxação como no trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988), onde é introduzido o método da homogeneização, técnica na qual o material adotado é um tipo de microestrutura parametrizada. Para uma revisão detalhada da teoria e implementação do método da homogeneização recomenda-se Hassani e Hinton (1998a, 1998b, 1998c). Bendsøe (1989) introduz o modelo de material “Solid Isotropic Microstructure with Penalization” (SIMP), denominado assim em Rozvany, Zhou e Birker (1992) ou método das densidades,

que também permite a relaxação do problema de otimização mediante a parametrização das propriedades do material com relação à densidade. Uma revisão sobre o SIMP e a sua comparação com outros esquemas de interpolação de material é encontrada em Rozvany (2001). Suzuki e Kikuchi (1991) comprovaram a base matemática do MOT reproduzindo o resultado analítico obtido por Michell (1904) e implementaram alguns exemplos de otimização estrutural de maximização da rigidez com restrição de volume. Bendsøe e Rodrigues (1991) e Olhoff, Bendsøe e Rasmussen (1991) estudaram a integração do MOT com sistemas que envolvem desenho assistido por computador (CAD), Díaz e Bendsøe (1992) formularam o problema de maximização da rigidez em estruturas elásticas submetidas a cargas múltiplas não simultâneas e Thomsen (1992) ampliou o método para estruturas fabricadas com mais de um material. Outros problemas tratados aplicando o MOT, na área estrutural, são: Vibração em estruturas contínuas e restrições na frequência (MA; KIKUCHI; CHENG, 1995; XIE; STEVEN, 1996; ACHTZIGER; KOCVARA, 2008), estruturas com cargas de flambagem (NEVES; RODRIGUES; GUEDES, 1995), projeto por impacto (MAYER; KIKUCHI; SCOTT, 1996; HAJELA; LEE, 1994), placas e discos submetidos à carga estática ou em vibração livre (KROG; OLHOFF, 1999), estruturas sob cargas dinâmicas (NISHIWAKI et al., 2000), estruturas sujeitas a cargas dependentes do projeto (ZHENG; CHANG; GEA, 2009; DU; OLHOFF, 2004a, 2004b; CHEN; KIKUCHI, 2001; HAMMER; OLHOFF, 2000), estruturas com restrições de tensão mecânica (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010; DUYSINX; BENDSØE, 1998)

O MOT tem sido aplicado em outras áreas do conhecimento, além dos problemas estruturais, entre os quais se têm: Projeto de mecanismos flexíveis (NISHIWAKI et al., 1998; SIGMUND, 1997; LARSEN, SIGMUND, BOUWSTRA, 1997), projeto de reatores nucleares (ALLAIRE; CASTRO, 2001), projeto de sistemas e dispositivos eletromagnéticos (BYUN; LEE; PARK, 2004; BYUN et al., 2000; YOO; KIKUCHI, 2000), projeto de motores de indução (WANG; KANG; NOH, 2004), microsistemas atuados eletrostaticamente (RAULLI, MAUTE, 2005), projeto de dispositivos ópticos (JENSEN; SIGMUND, 2005, 2004), projeto de atuadores flexensionais (KOGISO et al., 2008; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000), materiais com gradação funcional (FGM), (CARBONARI; SILVA; PAULINO, 2009; PAULINO; SILVA; LE, 2009; PAULINO; SILVA, 2005), projeto de células de carga (TAKEZAWA et al., 2010), materiais, sensores e atuadores piezelétricos (NAKASONE; SILVA, 2010; SILVA et al., 1999; SIGMUND; TORQUATO; AKSAY, 1998; SILVA; FONSECA; KIKUCHI, 1998).

Em problemas multifísicos envolvendo o domínio térmico, encontram-se trabalhos em: Materiais com microestruturas apresentando propriedades termoelásticas extremas (SIGMUND; TORQUATO, 1997, 1996), microsistemas ETM (YIN; ANANTHASURESH, 2002; SIGMUND, 2001b; SIGMUND, 2001c; MOULTON; ANANTHASURESH, 2001; JONSMANN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1999a, 1999b), transferência de calor em estado estacionário com predominância do fenômeno da convecção (BRUNS, 2007), problemas de condução de calor com carregamentos térmicos dependentes do projeto (IGA et al., 2009; GAO et al., 2008), microgarras com atuação ETM (RUBIO et al., 2009; SARDAN et al., 2008) e sistemas termoelásticos com tensões térmicas (GAO; ZANGH, 2010). Na literatura, são encontrados poucos trabalhos utilizando o MOT em problemas de estado transiente, entre os quais se citam: Construção de imagens de objetos sob influência de campos elétricos (CHUNG; CHEON; HAHN, 2000), otimização de propriedades de material em problemas termoelásticos (TURTELTAUB; 2001), otimização de estruturas projetadas para impacto (PEDERSEN; 2004); projeto de atuadores térmicos e mecanismos de ajuste por pressão (“snap-fit”), (LI, SAITOU, KIKUCHI, 2004), projeto de materiais compostos destinados a suportar cargas dinâmicas (TURTELTAUB; 2005).

3.2 Métodos de Otimização

As três abordagens fundamentais em otimização são: otimização paramétrica (“size optimization”), otimização de forma (“shape optimization”), e OT (“Topology Optimization”), (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009; CHOI; KIM, 2005; HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Na otimização paramétrica, as variáveis de projeto são dimensões ou razões entre dimensões da peça, definindo previamente uma forma para a peça, o que representa uma desvantagem. A otimização de forma admite alterações nos contornos da estrutura durante o processo de otimização, buscando uma solução ótima. Neste tipo de otimização utiliza-se geralmente o MEF já que podem ser obtidas formas complexas. Apresenta a desvantagem do remalhamento do domínio durante a otimização para que os resultados produzidos sejam adequados. Por último, a OT procura encontrar uma distribuição de material ótima em um domínio discretizado fixo, variando durante um processo iterativo os valores das variáveis de projeto em cada um dos elementos da malha. Desta forma, aumenta-se o desempenho e se reduz a massa, já que se obtêm vazios e furos na topologia da peça.

Além disso, não apresenta o problema do remalhamento pelo fato da malha ser definida previamente. Na Figura 12 são representadas as três abordagens de otimização mencionadas.

Figura 12 – Solução de um problema de otimização estrutural utilizando diferentes enfoques

3.3 Método de Otimização Topológica (MOT)

O MOT nasce como método sistemático com Bendsøe e Kikuchi (1988), sendo definido como um método iterativo baseado na distribuição de material em um domínio de projeto fixo com o objetivo de extremizar uma função custo sujeita às restrições inerentes do problema. O MOT compõe-se basicamente de três etapas: Uma primeira etapa de análise, onde é calculada a variável de estado ou resposta da estrutura, uma segunda, em que são computadas as variações dessa resposta em relação às variáveis de projeto (cálculo de sensibilidades) e uma última etapa, denominada de otimização, onde são calculadas as variáveis de projeto que extremizam a função objetivo, com bases nas sensibilidades (SIGMUND, 2000). No módulo de análise, são utilizadas diferentes técnicas numéricas como o MEF, Método dos Elementos de Contorno (MEC) ou Método de Volumes Finitos (MVF), já que permitem tratar com estruturas complexas e irregulares. No módulo de otimização, são empregadas técnicas de programação matemática como Programação Linear Sequencial (PLS), (DANTZIG; ORDEN; WOLFE, 1955); Programação Quadrática Sequencial (PQS),

(WOLFE, 1959) ou o Método das Assíntotas Móveis (“Method of Moving Asymptotes” - MMA), (SVANBERG, 1987).

Figura 13 – Procedimento típico de projeto de um microsistema ETM utilizando o MOT

(Adaptado de: RUBIO et al., 2009)

Na Figura 13 é mostrado o procedimento para um projeto de um microsistema ETM empregando o MOT (RUBIO et al., 2009). Inicialmente é definido o objetivo do projeto, que neste caso é a maximização do percurso de fechamento de uma microgarra que age sobre uma peça de trabalho de rigidez K , representada por uma mola. Igualmente são definidos o domínio fixo de projeto, as condições de contorno, as restrições do problema e as regiões com material fixo. O domínio de projeto é discretizado com elementos finitos e inicia-se o processo iterativo de otimização, onde é adicionado e removido material de acordo com a informação das sensibilidades. Esse processo termina quando é atingido certo critério de convergência. Após a convergência, é realizada uma interpretação da topologia obtida, com a finalidade de gerar uma geometria que possa ser fabricada posteriormente.

3.4 Modelo de Material

O modelo de material é uma função que define a “mistura” entre os materiais envolvidos no processo de otimização. Fundamentalmente, em cada ponto do domínio, o material (representado pelas pseudo-densidades) pode variar entre sólido e vazio mediante a função discreta (BENDSØE; SIGMUND, 2003):

$$\rho(\Omega) \begin{cases} 1, & \text{Material Sólido} \\ 0, & \text{Vazio} \end{cases} \quad (42)$$

Contudo, o problema da distribuição de material sendo governado por uma função degrau (distribuição discreta), é mal-posto e com múltiplos mínimos locais. A função dada na eq.(42) requer que seja aproximada por funções contínuas durante o processo de otimização (distribuição contínua), de modo que o problema de otimização permita ser relaxado e possa obter-se uma solução. Assim, valores intermediários nas pseudo-densidades são aceitos (YIN; ANANTHASURESH, 2001). A Figura 14 dá uma idéia sobre o comportamento das distribuições de material, antes mencionadas.

Figura 14 – Distribuições de material no MOT: (a) Discreta; (b) Contínua

3.4.1 Modelo de Material SIMP

Entre os modelos de material utilizados no MOT, destaca-se o SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization), também denominado modelo de material "fictício" ou "artificial" e igualmente método das densidades (MLEJNEK, 1992; ZHOU; ROZVANY, 1991; BENDSØE, 1989). O modelo SIMP consiste em uma expressão matemática, que estabelece o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio, a partir da pseudo-densidade e a propriedade do material base. Este método tem preferência nos problemas multifísicos devido a sua reduzida complexidade na implementação e a utilização da densidade relativa do material como uma única variável de projeto (BENDSØE; SIGMUND, 1999). Para uma discussão detalhada do modelo de material SIMP recomenda-se Rozvany (2009). Alguns dos trabalhos encontrados na literatura, implementando esse modelo de material são: Rubio et al. (2009), Saxena e Saxena (2009), Cho e Choi, (2005), Bruyneel e Duysinx (2005), Sigmund (2001b, 2001c), Pedersen (2001), Hammer e Olhoff (2000), entre outros. O modelo pode ser expresso como:

$$C(x) = \rho(x)^P C^0 \quad (43)$$

onde:

$C(x)$: Propriedade no ponto x do domínio.

C^0 : Propriedade do material base.

$\rho(x)$: Função de distribuição contínua de pseudo-densidade ou variável do projeto, definida no intervalo $[0, 1]$.

P : Fator de penalização da pseudo-densidade ou variável do projeto, que permite transformar o problema de otimização de natureza contínua ($\rho \in [0, 1]$), em um problema de natureza discreta ($\rho \in \{0, 1\}$).

A finalidade da OT, utilizando o modelo de material SIMP é encontrar uma distribuição do material ótima mediante o controle da densidade em cada elemento finito, portanto, as propriedades do material dependem da densidade relativa ou pseudo-densidade em cada elemento da discretização. As propriedades alteradas nesse trabalho com o SIMP são: o coeficiente de condutividade elétrica e térmica, a capacidade térmica, o coeficiente de convecção e o módulo de Young (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004; YIN; ANANTHASURESH, 2002; SIGMUND, 2001b). O vetor que contém as variáveis de projeto é denominado $\mathbf{p}$ (ρ_e na forma indicial), sendo ele a função de pseudo-densidade do material que pode variar de vazio ($\rho_e = 0$) a sólido ($\rho_e = 1$). No problema elétrico, o modelo de material para a condutividade elétrica σ_0 é:

$$\sigma_0 = \rho_e^{P_0} \sigma_0^0 \quad (44)$$

onde ρ_e é o valor da variável de projeto do elemento e , P_0 é o fator de penalização e σ_0^0 é a condutividade elétrica do material base. No problema térmico, o modelo de material para a capacidade térmica α_1 , a condutividade térmica σ_1 e o coeficiente de convecção h_1 respectivamente são:

$$\alpha_1 = \rho_e^{P_1} \alpha_1^0 \quad (45)$$

$$\sigma_1 = \rho_e^{P_2} \sigma_1^0 \quad (46)$$

$$h_1 = \rho_e^{P_3} h_1^0 \quad (47)$$

onde ρ_e é o valor da variável de projeto do elemento e , P_1, P_2 e P_3 são os fatores de penalização e α_1^0 , σ_1^0 são as propriedades do material base e h_1^0 o coeficiente de convecção, determinado a partir dos parâmetros originais dos quais depende (tipo de convecção, regime do fluxo do ar, velocidade, temperatura, condutividade térmica, densidade e viscosidade do ar, geometria entre outros). Finalmente, no problema termoelástico, considerando o modelo de material para o módulo de Young E_2 , tem-se:

$$E_2 = \rho_e^{P_4} E_2^0 \quad (48)$$

onde ρ_e é o valor da variável de projeto do elemento e , P_4 é o fator de penalização e E_2^0 é o módulo de Young do material base.

3.4.2 Fatores de Penalização

Os valores dos fatores de penalização (P_i) ou penalizadores devem ser estabelecidos de modo que conduzam à redução das densidades intermediárias e, além disso, evitem que as soluções finais resultem em mínimos locais (BENDSØE; SIGMUND, 2003, 1999; ROZVANY; ZHOU; BIRKER, 1992; BENDSØE, 1989). A sua magnitude deve ser apropriada, já que se for utilizado um valor pequeno (aproximação do problema à natureza contínua) aparece o problema das escalas de cinza, que geram problemas técnicos na fabricação e dificultam a adequada interpretação dos resultados. Porém ao trabalhar com valores altos, como 10, surgem instabilidades numéricas⁶, problemas de convergência e o problema tende retornar ao problema discreto (limitação dos valores de ρ somente a 0 ou 1), (ver Figura 15). Sigmund (2001b) utiliza um critério de seleção dos penalizadores baseado no trabalho de Bendsøe e Sigmund (1999) fundamentado por sua vez nos limites de Hashin-Shtrikman (HASHIN, SHTRIKMAN, 1963). Esses limites determinam que o penalizador das condutividades elétrica e térmica deve ser maior do que 2, enquanto que para o módulo de Young deve ser maior do que 3 (2001b). No entanto, no trabalho de Amstutz (2011), o

⁶ Para os problemas numéricos do MOT, incluindo as escalas de cinza, veja a seção 3.5.

cálculo dos fatores de penalização, para alguns casos particulares, é feito de forma exata via derivada topológica.

Figura 15 – Comportamento da penalização no MOT

No entanto, Rubio et al. (2009) e Rubio (2005) estabelecem esses valores como máximos para a penalização. Dessa forma, o método da continuação, utilizado nesses trabalhos, inicia-se com todos os penalizadores iguais a 1, incrementando 0,1 em cada iteração até que os penalizadores alcancem o seu valor máximo. Contudo, na literatura não se tem encontrado um estudo sobre os valores para os fatores de penalização da capacidade térmica e do coeficiente de convecção, quando utilizado o modelo de material SIMP. Por esta razão, optou-se por um estudo analítico desses penalizadores, cujos resultados são apresentados na seção 5.5 e a sua formulação é descrita no APÊNDICE J.

3.5 Problemas Numéricos no MOT

A seguir, são descritos alguns dos problemas numéricos derivados da implementação do MOT. Para um melhor detalhamento deste tema, recomenda-se Bendsøe e Sigmund (2003) e Sigmund e Petersson (1998).

3.5.1 Dependência da Malha

A dependência da malha consiste na complexidade crescente da solução do problema de otimização com o aumento do número de elementos finitos, quando resolvido o problema discreto zero - um. A não-convergência para uma solução é uma consequência desse fato (BENDSØE; SIGMUND, 2003; STOLPE; SVANBERG, 2001). O refinamento da malha origina diferentes soluções devido à presença de múltiplos mínimos locais na trajetória da solução ótima, dependendo assim, do valor inicial das pseudo-densidades (ver Figura 16).

Figura 16 – Existência de múltiplos mínimos locais originados na implementação do MOT

3.5.2 Não-Unicidade da Solução

Geralmente, o problema de otimização é altamente não-convexo quando utilizadas implementações como o MOT com modelo de material SIMP (ver seção 3.4.1). Os fatores de penalização introduzidos no SIMP afetam as pseudo-densidades intermediárias, retornando à natureza discreta do problema e gerando múltiplos mínimos locais ao invés de uma solução global ótima (ver Figura 16). Dada a existência de múltiplos mínimos locais na trajetória da solução ótima, a solução final do problema de otimização dependerá do valor inicial das pseudo-densidades e de outros parâmetros envolvidos no MOT como raio do filtro (ver seção 4.7) e fatores de penalização. Com a finalidade de evitar um salto rápido do chute inicial para a solução e a convergência para mínimos locais, deve ser implementado o método da continuação. Stolpe e Svanberg (2001) provaram que o método da continuação não garante

sempre soluções zero - um, no entanto esse método fornece soluções factíveis quando combinado com filtros de sensibilidades (BENDSØE; SIGMUND, 2003), (ver seção 4.7). No método da continuação inicia-se com um fator de penalização igual a 1, que é incrementado ao longo das iterações até que possa ser obtido um projeto final (BENDSØE; SIGMUND, 2003; HASSANI; HINTON, 1999). Em outras palavras, o MOT consegue atingir uma solução muito próxima do ótimo global evitando os mínimos locais. Entre os trabalhos utilizando o método da continuação, têm-se: Rubio et al. (2009), Gersborg-Hansen, Bendsøe e Sigmund (2006), Rubio (2005), Carbonari, Silva e Nishiwaki (2005), Guest, Prevost e Belytschko (2004), Pedersen (2001), Petersson e Sigmund (1998) e Swan e Kosaka (1997). Além disso, Peterson (1999) provou que as técnicas de penalização convergem para soluções ótimas, enquanto Rietz (1999) demonstrou que em problemas de otimização com restrição, uma penalização finita é suficiente quando utilizado o modelo de material SIMP.

3.5.3 Escalas de Cinza

Nos modelos de material com enfoque de penalização, devem ser seleccionados adequadamente os fatores de penalização com o intuito de prevenir o surgimento de valores intermediários nas pseudo-densidades.

Figura 17 – Exemplo da presença de escalas de cinza no MOT

Esses valores intermediários dificultam a interpretação final dos resultados e, portanto, processos futuros de fabricação (ver Figura 17). Deve ser levado em conta que aumentando excessivamente os fatores de penalização, o problema de otimização pode tornar-se discreto, gerando os problemas inerentes à capacidade de obter uma solução (LAU; DU; LIM, 2001b).

3.5.4 Instabilidade de Tabuleiro

A instabilidade de “tabuleiro” (ou checkerboard em inglês) é a alternância entre regiões com material sólido (elementos com cor preta) e vazio (elementos com cor branca), (STOLPE; SVANBERG, 2001). Este fenômeno ocorre principalmente na otimização estrutural em problemas de maximização da rigidez, pelo fato de que as soluções dispostas em forma de tabuleiro comportam-se matematicamente mais rígidas ao cisalhamento do que arranjos de materiais distribuídos uniformemente para um mesmo volume de material (DÍAZ; SIGMUND, 1995). Esse resultado se produz pela aproximação linear introduzida com a interpolação de funções de forma no problema de elementos finitos (ZHOU; SHYY; THOMAS, 2001; SIGMUND; PETERSON, 1998; JOG; HABER, 1996).

Figura 18 – Exemplo da presença da instabilidade de tabuleiro no MOT

No entanto, Long, Loveday e Groenwold (2009) demonstraram que a rigidez desses arranjos de material é menor quando utilizados esquemas de integração reduzida. Fisicamente essas soluções não são factíveis e devem ser eliminadas pelas técnicas descritas a seguir (ver Figura 18).

3.5.5 Técnicas de Solução Para as Instabilidades Numéricas

A dependência da malha e o problema da instabilidade de tabuleiro, podem ser eliminados mediante restrições como: o controle do perímetro do domínio de projeto (HABER; JOG; BENDSØE, 1996; AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993), a introdução de um gradiente local nas pseudo-densidades (ZHOU; SHYY; THOMAS, 2001; PETERSSON; SIGMUND, 1998), a adição de restrições locais (POULSEN, 2003, 2002a) ou a modificação da função objetivo com termos penalizadores (POMEZANSKI; QUERIN; ROZVANY, 2005) com a finalidade de controlar diretamente o contato entre cantos dos elementos finitos.

Outros enfoques utilizam uma função agindo como filtro que pode ser dada em termos de coeficientes de comprimento de onda (POULSEN, 2002b), pela restrição da variação dos limites móveis da PLS (CARDOSO; FONSECA, 2003) ou por uma convolução atuando diretamente nas sensibilidades (ANDREASSEN ET al., 2011; SIGMUND, 2001a). Finalmente, as escalas de cinza podem ser suprimidas pela adequada seleção dos fatores de penalização como foi mencionado anteriormente na seção 3.5.3.

3.6 Formulação do Problema de OT para Microsistemas ETM Considerando a Resposta Térmica Transiente

O MOT proporciona um enfoque sistemático para o problema de distribuição de material num determinado domínio fixo com a finalidade de obter uma estrutura que extremize uma determinada função objetivo, atendendo às restrições de projeto. No projeto de microsistemas ETM devem ser considerados requisitos cinemáticos e estruturais.

Os cinemáticos consistem em maximizar a saída do mecanismo (o deslocamento de um ponto específico ao longo de certa direção), quando uma tensão elétrica é aplicada. Os requisitos estruturais consistem em maximizar a rigidez da estrutura já que o objeto manipulado (peça de trabalho ou peça atuada) exerce uma reação que afeta todo o sistema. Com base nos argumentos anteriores, o problema de projeto consiste em distribuir uma quantidade dada de material num domínio fixo de modo que seja maximizado o deslocamento, u_{out} , gerado sobre uma “peça atuada”, de rigidez conhecida.

Os requisitos antes explicados são atingidos com a utilização de uma mola de rigidez K que representa a rigidez da peça atuada (SIGMUND, 2001b), de forma que, a topologia ótima do atuador dependerá dessa rigidez. Além disso, devem-se levar em conta as restrições de algumas áreas do domínio de projeto que podem ser vazias (áreas brancas) ou de material sólido (áreas pretas), sendo, portanto, regiões não otimizáveis (ver Figura 19). Já considerando uma distribuição de temperatura não-uniforme variável no tempo, o tempo de duração do transiente é um parâmetro de entrada.

Figura 19 – Problema no projeto de microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente

Incluindo o estado transiente no projeto de microsistemas ETM, a otimização é realizada desde o instante da excitação até o momento que a resposta se estabilize, ou seja, é empregado todo o tempo transiente para maximizar o deslocamento. Assim, o problema de otimização para o projeto de microsistemas ETM é definido como (DAHL; JENSEN; SIGMUND, 2008; LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004; SIGMUND, 2001b):

$$\max_{\rho} F_{ETM} = \int_0^{t_f} u_{out}(\rho, t, T(\rho, t)) dt \quad \begin{array}{l} \text{(Maximizar a integral no tempo} \\ \text{do deslocamento de saída)} \end{array} \quad (49)$$

$$\text{tal que} \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \rho d\Omega - \Omega_s \leq 0 & \begin{array}{l} \text{(Restrição de volume)} \\ \text{(Restrição de} \\ \text{caixa para as} \\ \text{variáveis de projeto)} \end{array} \\ 0 \leq \rho \leq 1 & \\ \text{Equações de equilíbrio elétrico} & \text{(eq.(1), eq.(12) e eq.(13))} \\ \text{Equações de equilíbrio térmico} & \text{(eq.(15), eq.(23) e eq.(24))} \\ \text{Equações de equilíbrio estrutural} & \text{(eq.(28), eq.(36) e eq.(37))} \end{array} \right. \quad (50)$$

No problema de otimização anterior, a restrição de volume atua como limitante da quantidade de material no sistema ETM, sendo Ω_s o volume final desejado. O outro componente $\int_{\Omega} \rho d\Omega$ é o valor do volume de material obtido depois da otimização e depende dos valores das variáveis de projeto (ρ). A restrição de volume é imposta de modo a produzir estruturas formadas por barras finas e membros estreitos que conduzam a soluções zero – um e igualmente facilitem a interpretação para posteriores processos de fabricação (SIGMUND, 2001b). A variável de projeto é a função pseudo-densidade do material, a qual pode variar de vazio ($\rho = 0$) a sólido ($\rho = 1$). O tempo t_f é o tempo de duração do estado transiente no qual se alcança a estabilidade da resposta. O valor de t_f deve ser maior do que o tempo mínimo para produzir a mínima diferença de temperatura para que o sistema comece a se deformar, e deve ser menor do que o tempo máximo de aquecimento para que o sistema não deforme plasticamente (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004). A inclusão de restrições nos valores de corrente elétrica e tensão mecânica está fora do escopo desse trabalho, já que esse tipo de restrições apresenta dificuldades matemáticas e numéricas, pelo grande número de restrições altamente não-lineares que devem ser introduzidas na formulação do problema (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010). No entanto, o emprego desse tipo de restrições pode ser sugerido como trabalho futuro.

3.7 Determinação do Tempo Transiente

O comportamento dos microsistemas ETM possui uma resposta transiente particular para um sistema de controle de primeira ordem, semelhante à apresentada na Figura 20, fato

observado nos resultados experimentais de Rubio et al. (2009). Esse sistema é caracterizado por uma constante de tempo (τ), que representa a velocidade do sistema. A constante τ é definida como o tempo decorrido para que um sistema de primeira ordem alcance 63,2% do valor final da resposta.

Figura 20 – Resposta característica de um sistema de primeira ordem com o deslocamento como a variável de saída

Essa resposta final é obtida a partir do tempo de estabilização ou "settling time", que representa o tempo para que a resposta do sistema alcance e permaneça num intervalo de 5% do valor final da resposta esperada (u_f), (OGATA, 1998). O tempo transiente (t_f), utilizado na integração da eq.(49), é considerado como sendo igual ao tempo de estabilização para realizar o processo de otimização.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas as implementações numéricas do problema de MEF e do problema de MOT para o projeto de microsistemas ETM, considerando a resposta térmica transiente. Além disso, é mostrado o cálculo da sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto, o filtro de sensibilidades utilizado e uma descrição da implementação computacional do MOT.

4.1 Formulação em Elementos Finitos

As eq.(1), eq.(15) e eq.(28) são equações diferenciais (formulação forte do problema) de difícil solução analítica, mas utilizando a forma variacional (formulação fraca do problema) e a tecnologia computacional pode-se obter uma solução factível em termos de tempo, esforço e precisão. Uma das técnicas de solução numérica aproximada é o MEF, que permite analisar e resolver diversos tipos de problemas físicos com ou sem acoplamento, decompondo o domínio do problema em vários subdomínios de geometria simples que recebem o nome de elemento finito. Assim, as condições de equilíbrio são estabelecidas para cada elemento finito que logo por combinação deles formam um sistema de equações matricial (CHOI; KIM, 2005; BATHE, 1996; HUGHES, 1987).

A OT utiliza o MEF, já que é um método de análise robusto, confiável e genérico que permite tratar com estruturas complexas resultantes do processo de otimização. Deste modo, faz-se necessário expressar as equações governantes dos sistemas ETM na forma discreta utilizando os conceitos de elementos finitos. Será utilizado um domínio bidimensional discretizado com elementos isoparamétricos de quatro nós (ver APÊNDICE A). O número total de elementos da discretização é diferenciado pela letra N , enquanto que o número total de nós pela letra n . A letra e representa o e -ésimo elemento da discretização.

4.1.1 Elementos Finitos no Domínio Elétrico em Regime Estacionário

No problema elétrico, o grau de liberdade por nó corresponde à voltagem. Para o domínio de projeto considerado, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(189), (ver APÊNDICE A), e o modelo de material da eq.(44), o modelo de elementos finitos no domínio elétrico tem a forma (ver APÊNDICE B):

$$K_{oij}(\rho_e)V_j(\rho_e) = F_{oi} \quad (51)$$

onde:

K_{oij} : Matriz de condutividade global elétrica de tamanho $n \times n$ (um GDL elétrico por nó).

V_j : Vetor de voltagem de dimensão n .

F_{oi} : Vetor de corrente elétrica de dimensão n .

ρ_e : Vetor de variáveis de projeto de dimensão N .

i e j : GDL globais do modelo de MEF.

Dado que o controle por corrente elétrica é instável (RUBIO, 2005; JONSMANN, 1999), a excitação no problema elétrico é feita com voltagens prescritas ao invés de correntes elétricas externas prescritas.

4.1.2 Elementos Finitos no Domínio Térmico em Regime Transiente

No problema térmico, o grau de liberdade por nó corresponde à temperatura. De forma análoga ao problema elétrico é introduzida a interpolação da variável de estado T na eq.(26), mas para o gradiente de T é utilizado:

$$T_p = B_{pi}T_i \quad (52)$$

com i indo de 1 até 4 e p de 1 até 2. Para um elemento e da discretização, o problema térmico transiente tem a forma:

$$\int_{V_e} N_i \bar{T}_i \alpha_1 \frac{d}{dt} (N_j T_j) dV_e + \int_{V_e} \bar{T}_i B_{ip}^T \sigma_1 B_{pj} T_j dV_e + \int_{S_e} N_i \bar{T}_i h_1 N_j T_j dS_e + \oint_{L_e} N_i \bar{T}_i h_1 N_j T_j t_e dL_e = \int_{S_e} N_i \bar{T}_i h_1 T^P dS_e + \oint_{L_e} N_i \bar{T}_i h_1 T^P t_e dL_e + \int_{V_e} N_i \bar{T}_i \sigma_o V_k B_{kp}^T B_{pj} V_j dV_e \quad (53)$$

com p indo de 1 até 2 e, i e j indo de 1 até 4. Os limites de integração V_e e S_e correspondem ao volume do elemento e a superfície envolvendo esse volume respectivamente. Sendo $\bar{T}_i$ um vetor de constantes arbitrário pode ser cancelado e, portanto:

$$\left[\int_{V_e} N_i \alpha_1 N_j dV_e \right] \dot{T}_j^e + \left[\left[\int_{V_e} B_{ip}^T \sigma_1 B_{pj} dV_e \right] + \left[\int_{S_e} N_i h_1 N_j dS_e \right] + \left[\oint_{L_e} N_i h_1 N_j t_e dL_e \right] \right] T_j^e = \left\{ \int_{S_e} N_i h_1 T^P dS_e \right\} + \left\{ \oint_{L_e} N_i h_1 T^P t_e dL_e \right\} + \left\{ \int_{V_e} N_i \sigma_o V_k B_{kp}^T B_{pj} V_j dV_e \right\} \quad (54)$$

com T^P como a temperatura prescrita, que neste caso é a temperatura ambiente. Na forma matricial, levando em conta que o superíndice e faz referência ao e -ésimo elemento da discretização:

$$C_{1ij}^e \dot{T}_j^e + K_{1ij}^e T_j^e = F_{1i}^e \quad (55)$$

onde i e j são os GDL do elemento e . Para o domínio de projeto considerado, aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(189), (ver APÊNDICE A), e o modelo de material das equações eq.(44), eq.(45), eq.(46) e eq.(47), o modelo de elementos finitos no domínio térmico é dado por:

$$C_{1ij}(\rho_e) \dot{T}_j(\rho_e, t) + K_{1ij}(\rho_e) T_j(\rho_e, t) = F_{1i}(V_i(\rho_e), \rho_e) \quad (56)$$

onde:

C_{1ij} : Matriz de capacidade calórica global de tamanho $n \times n$ (um GDL térmico por nó).

$\dot{T}_j$: Variação do vetor de temperatura no tempo de dimensão n .

K_{1ij} : Matriz de condutividade global térmica de tamanho $n \times n$ (um GDL térmico por nó).

T_j : Vetor de temperatura de dimensão n .

F_{1i} : Vetor de fluxo de calor que depende do vetor de voltagem, de dimensão n .

t : Instante de tempo pertencente ao estado transiente.

ρ_e : Vetor de variáveis de projeto de dimensão N .

i e j : GDL globais do modelo de MEF.

A matriz de capacidade calórica global C_{1ij} define-se como:

$$C_{1ij} = \sum_{e=1}^N C_{1ij}^e = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_e} N_i \rho_e^{P_1} \alpha_1^o N_j dV_e \right]_e = \sum_{e=1}^N \left[\rho_e^{P_1} \alpha_1^o t_e \int_{V_e} N_i N_j dx dy \right]_e \quad (57)$$

A matriz de rigidez térmica global K_{1ij} tem varias contribuições:

$$K_{1ij} = \sum_{e=1}^N K_{1ij}^e = \sum_{e=1}^N \left[K_{ctij}^e + K_{hsij}^e + K_{hcij}^e \right]_e \quad (58)$$

onde:

K_{ctij}^e : Contribuição à matriz de rigidez térmica devida à transferência de calor por condução no elemento.

K_{hsij}^e : Contribuição à matriz de rigidez térmica devida à transferência de calor por convecção nas superfícies superior e inferior do elemento.

K_{hcij}^e : Contribuição à matriz de rigidez térmica devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento.

A contribuição pela condução de calor no elemento está dada por:

$$K_{ctij}^e = \left[\int_{V_e} B_{ip}^T \rho_e^{P_2} \sigma_1^o B_{pj} dV_e \right]_e = \left[\rho_e^{P_2} \sigma_1^o t_e \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dx dy \right]_e \quad (59)$$

A contribuição pela convecção nas superfícies superior e inferior do elemento é:

$$K_{hsij}^e = \left[\int_{S_e} 2 N_i \rho_e^{P_3} h_1^o N_j dS_e \right]_e = \left[2 \rho_e^{P_3} h_1^o \int_{S_e} N_i N_j dx dy \right]_e \quad (60)$$

onde o domínio de integração é $dS_e = dx dy$, uma vez que o fenômeno ocorre fora do plano do elemento (na direção z) e o número 2 leva em conta as duas superfícies. Essa é uma aproximação factível apesar do elemento ser bidimensional. A contribuição pela convecção no contorno do elemento é:

$$K_{hcij}^e = \left[\oint_{L_e} N_i h_1 N_j t_e dL_e \right]_e \quad (61)$$

A integral sobre o contorno do elemento precisa que as funções de forma sejam avaliadas na fronteira correspondente e que a área diferencial $t_e dL_e$ seja expressa nas coordenadas naturais (ξ, η) . Assim, o diferencial de linha expressado em termos das coordenadas naturais para as fronteiras l_{12} e l_{34} é da forma (ver APÊNDICE C):

$$dl_{ij} = J_\xi d\xi \quad (62)$$

e para as fronteiras l_{23} e l_{41} :

$$dl_{ij} = J_\eta d\eta \quad (63)$$

De acordo com o exposto anteriormente, utilizando a relação da eq.(200) e aplicando o modelo de material para o coeficiente de convecção da eq.(47), a eq.(61) é calculada como (ver APÊNDICE C):

$$K_{hcij}^e = \left[\oint_{L_e} N_i h_1 N_j t_e dL_e \right]_e = \left[\rho_e^{P_3} h_1^o t_e \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right]_e \quad (64)$$

O termo F_{1i} final, levando em conta a avaliação da convecção no contorno variável havendo presente fluxo de calor concentrado prescrito $(\dot{Q}_i^p)$ nos nós, pode ser expresso como:

$$F_{1i} = \sum_{e=1}^N A F_{1i}^e = \sum_{e=1}^N A \left\{ F_{hs_i}^e + F_{hc_i}^e + F_{gc_i}^e + \dot{Q}_i^p \right\}_e \quad (65)$$

onde:

$F_{hs_i}^e$: Contribuição ao vetor de fluxo de calor devida à transferência de calor por convecção nas superfícies superior e inferior do elemento.

$F_{hc_i}^e$: Contribuição ao vetor de fluxo de calor devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento.

$F_{gc_i}^e$: Contribuição ao vetor de fluxo de calor devida à potência dissipada pelo efeito Joule no elemento.

A contribuição elementar pela convecção nas superfícies superior e inferior é:

$$F_{hs_i}^e = \left\{ \int_{S_e} 2N_i h_1 T^P dS_e \right\}_e = \left\{ 2\rho_e^{P_3} h_1^o T^P \int_{S_e} N_i dx dy \right\}_e \quad (66)$$

Novamente, o domínio de integração é dado por $dS_e = dx dy$ e o número 2 inclui as duas superfícies, como explicado anteriormente. A contribuição elementar pela convecção no contorno do elemento toma a forma (ver APÊNDICE C):

$$F_{hc_i}^e = \left\{ \oint_{L_e} N_i h_1 T^P t_e dL_e \right\}_e = \left\{ \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \oint_{L_e} N_i dL_e \right\}_e \quad (67)$$

Igualmente, a integral de linha sobre o domínio dL_e deve ser resolvida considerando os diferenciais dados pelas eq.(62) e eq.(63) segundo correspondente à fronteira do elemento. Por fim, a potência dissipada pelo efeito Joule que se transforma em calor é igual a (ANANTHASURESH, 2003; BATHE, 1996):

$$F_{gc_i}^e = \left\{ \int_{V_e} N_i \sigma_o V_k B_{kp}^T B_{pj} V_j dV_e \right\}_e = \left\{ \rho_e^{P_o} \sigma_o^o t_e \int_{V_e} N_i V_k B_{kp}^T B_{pj} V_j dx dy \right\}_e \quad (68)$$

4.1.3 Elementos Finitos no Domínio Termoelástico em Regime Quase-Estático

A eq.(41) representa a Lei de Hooke de elasticidade para materiais isotrópicos, envolvendo um tensor de quarta ordem. Já que essa notação torna difícil o cálculo das operações respectivas, prefere-se transformá-la na forma vetorial, sendo neste caso a relação tensão-deformação dada por (CHOI; KIM, 2005; G. T. MASE; G. E. MASE, 1999), (ver APÊNDICE D):

$$S_m = D_{2mp} (\varepsilon_p - \varepsilon_{Tp}) \quad (69)$$

onde são inclusos os efeitos térmicos através do termo ε_T e com m e p variando entre 1 e 6. Dado que os microsistemas ETM, na sua modelagem, são considerados bidimensionais pela sua reduzida espessura e que os carregamentos no domínio termoelástico estão no plano, formula-se a hipótese de que a estrutura permanece em estado plano de tensão. Desse modo, os esforços e deformações fora do plano são nulos, com exceção da deformação normal fora do plano ε_3 (ε_{33} na forma matricial), que pode não ser zero apesar do esforço normal nessa direção não existir (TIMOSHENKO; GERE, 1997). Com as considerações anteriores a relação esforço-deformação na forma indicial fica igual à eq.(69), porém m e p variam de 1 até 3 (ver APÊNDICE D). A partir da eq.(69), define-se o vetor de tensão térmica como:

$$S_{Tm} = D_{2mp} \varepsilon_{Tp} = \alpha_{T2m} (T - T^p) \quad (70)$$

Deve-se lembrar que a matriz do módulo elástico D_{2pi} para estado plano de tensão e o vetor de expansão térmica α_{T2p} dependem do módulo de Young (ver eq.(217) e eq.(218), APÊNDICE D), deste modo, esses termos também se encontram afetados pela penalização, por conseguinte:

$$D_{2pi} = \frac{\rho_e^{P_4} E_2^o}{1-\nu_2^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} = \rho_e^{P_4} D_{2pi}^o \quad (71)$$

$$\alpha_{T2p} = \frac{\rho_e^{P_4} E_2^o \alpha_2}{(1-\nu_2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \rho_e^{P_4} \alpha_{T2p}^o \quad (72)$$

onde D_{2pi}^o e α_{T2p}^o são a matriz de módulo elástico para o estado plano de tensão e o vetor de expansão térmica do material base, respectivamente.

Aplicando o operador de montagem de MEF definido na eq.(189), (ver APÊNDICE A), e o modelo de material da eq.(71) e eq.(72), o modelo de elementos finitos no domínio termoelástico tem a forma:

$$K_{2rs}(\rho_e)U_s(\rho_e, t) = F_{2r}(T_q(\rho_e, t), \rho_e, t) \quad (73)$$

onde:

K_{2rs} : Matriz de rigidez global de tamanho $2n \times 2n$ (dois GDL de deslocamento por nó).

U_s : Vetor de deslocamento de dimensão $2n$.

F_{2r} : Vetor de força que depende do vetor de temperatura, de dimensão $2n$.

t : Instante de tempo pertencente ao estado transiente.

ρ_e : Vetor de variáveis de projeto de dimensão N .

r e s : GDL globais do modelo de MEF.

4.1.4 Resolução dos Problemas de Elementos Finitos

As equações finais para serem resolvidas pelo MEF são:

$$K_{oij}V_j = F_{oi} \quad (74)$$

$$C_{1ij}\dot{T}_j + K_{1ij}T_j = F_{1i} \quad (75)$$

$$K_{2rs}U_s = F_{2r} \quad (76)$$

Esses problemas de MEF devem ser solucionados na ordem (ver Figura 21):

- **Modelo elétrico de correntes estacionárias.** Análise estática resolvendo o sistema da eq.(74) para o vetor de voltagens V_j , de modo que:

$$V_j = K_{o\ ji}^{-1}F_{oi} \quad (77)$$

- **Modelo de condução de calor em estado transiente.** Análise transiente utilizando um método de integração no tempo (ver seção 4.1.5), com o fim de encontrar para cada instante o campo de temperatura T_j .

Figura 21 – Fluxograma para a resolução do problema de elementos finitos

• **Modelo termoelástico em regime quase-estático.** Devido às simplificações descritas anteriormente, a incógnita do problema é o campo dos deslocamentos no tempo. Portanto, o sistema linear que deve ser resolvido é:

$$U_{s_n}(t) = K_2^{-1}{}_{sr_n} F_{2r_n}(T_j(t)) \quad (78)$$

com $n \in [0, 1, \dots, N - 1]$, sendo N o número de passos de integração. Cabe esclarecer que a eq.(78) é calculada depois de obter a distribuição de temperatura para cada passo de integração.

4.1.5 Resolução do Problema de Elementos Finitos Térmico Transiente por um Método de Integração no Tempo

Revisões detalhadas de métodos de integração no tempo para problemas de condução de calor podem ser encontradas em Zienkiewicz e Taylor (2000), Bathe (1996) e Hughes (1987). Chen et al. (2001), e Chen et al. (2004), utilizaram o método "Precise Time Integration" (PTI) proposto por Zhong e Williams (1994) e aplicaram-no em problemas de condução de calor linear e não-linear e transferência de calor em materiais gradados funcionalmente (FGM), respectivamente. Contudo, Cook (1995) recomenda utilizar o método modificado de Hilber-Hughes-Taylor (HHT- α) desenvolvido por Cornwell e Malkus (1992) com a finalidade de evitar oscilações fictícias na resposta no tempo. Neste trabalho, foram implementados ambos os algoritmos, sendo brevemente descritos abaixo.

- **Método HHT- α :** Resolve o problema para o sistema (CORNWELL; MALKUS, 1992):

$$C_{1ij}\dot{T}_j + K_{1ij}T_j = F_{1i} \quad (79)$$

encontrando uma função $T_j = T_j(t)$ que satisfaz a condição inicial:

$$T_j = T_{oj} \quad (80)$$

que, no caso de estudo, é $T_o = T^P$ ou temperatura ambiente prescrita. A variação da temperatura no tempo $\dot{T}_j$ no início do transiente (subíndice o) é dada por:

$$\dot{T}_{jo} = C_{1ji}^{-1} [F_{1io} - K_{1iq}T_{qo}] \quad (81)$$

Para resolver numericamente a eq.(79), deve-se discretizar o problema, de modo que:

$$T_{j_{n+1}} = T_{j_n} + \Delta t \left\{ (1 - \gamma)\dot{T}_{j_n} + \gamma\dot{T}_{j_{n+1}} \right\} \quad (82)$$

$$\dot{T}_{j_{n+1}} = C_{1ji}^{-1} \left\{ (1 + \alpha)F_{1i_{n+1}} - \alpha F_{1i_n} - (1 + \alpha)K_{1iq}T_{q_{n+1}} + \alpha K_{1iq}T_{q_n} \right\} \quad (83)$$

onde $n \in [0, 1, \dots, N - 1]$, sendo N o número de passos de integração, Δt o intervalo de tempo por passo e α e γ os parâmetros que governam a estabilidade. Se $\alpha = 0$ obtém-se o método de Crank-Nicolson ou também denominado regra trapezoidal, para o qual o algoritmo é incondicionalmente estável para problemas lineares se $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$ (COOK, 1995). No método HHT- α , a condição de convergência, para alcançar a precisão de segunda ordem, vem dada por:

$$\gamma = \frac{1}{2}(1 - 2\alpha) \quad (84)$$

onde a estabilidade incondicional é governada pelos requisitos que $\gamma \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. Cornwell e Malkus (1992) concluem que os parâmetros adequados para máxima dissipação, sem perda da precisão de segunda ordem, são $\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{3}{4}$. Resolvendo o sistema de equações dado por eq.(82) e eq.(83), para $T_{j_{n+1}}$ e $\dot{T}_{j_{n+1}}$, obtém-se:

$$\dot{T}_{j_{n+1}} = \hat{C}_{1ji}^{-1} \hat{F}_{1i_{n+1}} \quad (85)$$

$$T_{j_{n+1}} = T_{j_n} + \Delta t \left[(1 - \gamma) \dot{T}_{j_n} + \gamma \dot{T}_{j_{n+1}} \right] \quad (86)$$

onde a matriz de capacidade térmica fictícia $\hat{C}_{1ji}$ é dada por:

$$\hat{C}_{1ji} = C_{1ji} + (1 + \alpha)\gamma \Delta t K_{1ji} \quad (87)$$

e o vetor de fluxo de calor fictício $\hat{F}_{1i}$ é dado por:

$$\hat{F}_{1i_{n+1}} = \left\{ (1 + \alpha)F_{1i_{n+1}} - \alpha F_{1i_n} - K_{1iq} \left[T_{q_n} + (1 + \alpha)(1 - \gamma)\Delta t \dot{T}_{q_n} \right] \right\} \quad (88)$$

Nos microsistemas ETM, o vetor de fluxo de calor é constante, dado que o campo de tensão elétrica não varia no tempo. O comportamento do vetor de fluxo de calor para cada nó no tempo é semelhante a um degrau descendente, como descrito na Figura 22, que satisfaz:

$$F_{1i} = F_{1i}(t) = \begin{cases} F_{1i}(V_i, t) & \forall 0 \leq t \leq t_f \\ 0 & \forall t > t_f \end{cases} \quad (89)$$

logo $F_{1i_{n+1}} = F_{1i_n} = F_{1i}$ e a eq.(88), reduz-se a:

$$\hat{F}_{1i_{n+1}} = \left\{ F_{1i_{n+1}} - K_{1ij} \left[T_{jn} + (1 + \alpha)(1 - \gamma)\Delta t \dot{T}_{jn} \right] \right\} \quad (90)$$

Figura 22 – Descrição do comportamento do fluxo de calor em cada nó no problema de condução de calor no estado transiente

• **Método PTI:** Resolve o problema do sistema da eq.(79), transformando-a numa expressão com a forma (ZHONG, 2004; CHEN; TONG, 2004; CHEN et al., 2004; GU et al., 2002):

$$\dot{T}_j = H_{ji}T_i + R_j \quad (91)$$

cujas condições iniciais são dadas pelas eq.(80) e eq.(81), sendo H_{ji} uma matriz constante de dimensão $n \times n$ e R_j um vetor de excitação de dimensão n . Integrando a eq.(91) no tempo, desde zero até um instante do tempo pertencente ao estado transiente, obtém-se uma função $T_j = T_j(t)$, de modo que:

$$T_j(t) = A_{ji}T_i + \int_0^t e^{H_{ji}(t-s)} \cdot R_i(s) ds \quad (92)$$

onde $A_{ji} = e^{H_{ji}t}$, ou seja, a exponencial da matriz de $H_{ji}t$, dada pela série de potencias

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(H_{ji}t)^k}{k!}$. Considerando uma variação linear do vetor de excitação R_j , como:

$$R_j(t) = R0_j + R1_j(t - t_{n+1}) \therefore t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (93)$$

onde:

$$R0_j = R_j(t_n) \quad (94)$$

$$R1_j = \frac{R_j(t_{n+1}) - R_j(t_n)}{\Delta t} \quad (95)$$

e a discretização da eq.(92), chega-se a uma expressão numérica para a resolução do problema, dada por (CHEN; TONG, 2004; GU et al., 2002):

$$T_{j_{n+1}} = A_{ji} [T_{i_n} + H_{iq}^{-1} (R0_q + H_{qs}^{-1} R1_s)] - H_{ji}^{-1} (R0_i + H_{iq}^{-1} R1_q + R1_q \Delta t) \quad (96)$$

Transformando a eq.(79) original na forma da eq.(91), tem-se que:

$$H_{ji} = -C_{jq}^{-1} K_{qi} \quad (97)$$

$$A_{ji} = e^{(H_{ji} \Delta t)} \quad (98)$$

$$R_j = C_{jq}^{-1} F_{1q} \quad (99)$$

Como visto na eq.(89), $F_{1_{i_{n+1}}} = F_{1_{i_n}} = F_{1_i}$, logo $R0_j = C_{jq}^{-1} F_{1q}$ e $R1_j = 0$. Assim, a eq.(96), reduz-se a:

$$T_{j_{n+1}} = A_{ji} (T_{i_n} + H_{iq}^{-1} R0_q) - H_{ji}^{-1} R0_i \quad (100)$$

que considerando algumas simplificações e aplicando as relações anteriores fica como:

$$T_{j_{n+1}} = A_{ji} (T_{i_n} - \hat{F}_{1_i}) + \hat{F}_{1_i} \quad (101)$$

cujo termo de excitação fictícia $\hat{F}_{1_i}$ é definido como:

$$\hat{F}_{1i} = K_{ij}^{-1} F_{1j} \quad (102)$$

Dado que o equilíbrio dinâmico (eq.(91)) deve ser respeitado para cada instante de tempo $n + 1$, o vetor de variação de temperatura no tempo $\dot{T}_j$ é:

$$\dot{T}_{j_{n+1}} = H_{ji} A_{iq} (T_{qn} - \hat{F}_{1q}) \quad (103)$$

4.1.6 Considerações Adicionais

Owen e Damjanic (1983) advertem que a resposta transiente é dominada nos primeiros instantes por contribuições de altas frequências, tendendo logo para as condições de estado estacionário governadas progressivamente por baixas frequências. Dadas as condições anteriores, eles sugerem utilizar métodos de integração numérica reduzida depois do terceiro passo do transiente, com o objetivo de diminuir o custo computacional da solução sem detrimento da sua precisão. Além disso, estabelecem que para elementos isoparamétricos lineares bidimensionais (como é o caso deste estudo), as dimensões do elemento devem ser escolhidas de acordo com:

$$(\Delta x)^4 \leq \frac{\delta(\Delta t)}{2} \quad (104)$$

O termo $\delta(\Delta t)$ é denominado profundidade de penetração e refere-se ao tempo de mudança da reposta numérica desde sua condição inicial até quando alcança a resposta estacionária pela primeira vez. Nos problemas de condução de calor com condição de contorno de convecção, a profundidade de penetração é definida como:

$$\delta(\Delta t) = 3 \frac{h_1}{\rho_1 c_1} \Delta t \quad (105)$$

onde:

h_1 : Coeficiente de convecção

ρ_1 : Densidade de massa do material.

c_1 : Calor específico do material.

Δt : Tamanho do passo para a avaliação da resposta transiente.

Figura 23 – Influência do tamanho de passo de integração na profundidade de penetração

4.2 Programação Linear Sequencial (PLS)

No projeto de microsistemas ETM e em geral nos problemas de Engenharia, o problema de otimização é não-linear, portanto algoritmos capazes de manejar grande número de restrições e variáveis de projeto de maneira eficiente são necessários para resolver este tipo de problema. A PLS é um método de programação matemática que pode ser aplicado a problemas de otimização não-linear em geral, já que utiliza aproximações lineares sequencialmente com a finalidade de, se for possível, encontrar a solução exata ou gerar uma solução mediante um critério de convergência que possa ser atingido. Além disso, a PLS é um método simples de programar que requer o cálculo das primeiras derivadas da função objetivo e as restrições, reduzindo o custo computacional.

As aproximações lineares são baseadas em séries de Taylor de primeiro grau, nas quais são utilizadas as derivadas de primeira ordem da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto (ou sensibilidades). Assim, a aproximação é válida unicamente em torno das vizinhanças (aproximação local) do espaço de dimensão n formado pelas variáveis de projeto. Portanto, é necessário impor limites nessa vizinhança para não incorrer

em erros (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Esses limites são denominados limites móveis e serão explicados posteriormente.

A aproximação local baseada em séries de Taylor para uma função de várias variáveis é (HAFTKA; GÜRDAL, 1992):

$$F_{lin}(\mathbf{x}) \cong F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \quad (106)$$

Pelo fato de que o termo $F(\mathbf{x}_0)$ é uma constante, ele não influencia o processo de otimização e pode ser removido da aproximação (HAFTKA; GÜRDAL, 1992), deste modo tem-se:

$$F_{lin}(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \quad (107)$$

Um problema de otimização formulado com a PLS é dado por:

$$\max_{\rho} \quad F^{lin}(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \quad (108)$$

$$\text{tal que} \begin{cases} g_j^{lin}(\mathbf{x}) \cong g_j(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \leq k_j, \quad j = 1, \dots, n_g \\ x_i^l \leq (x_i - x_{0i}) \leq x_i^u, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

onde k_j são constantes, n_g o número de restrições de desigualdade e x_k^l e x_k^u são os limites móveis para cada variável de projeto. Como mencionado anteriormente, os limites móveis correspondem aos valores extremos que devem respeitar as variáveis de projeto em cada aproximação linear, com o intuito de reduzir o erro na aproximação realizada. Eles são determinados de acordo com um critério de validade da aproximação linear em torno do ponto

da iteração atual na PLS, por essa razão são considerados móveis. Os valores dos limites móveis são reduzidos se a variável de projeto não apresenta variação alguma ou se a função objetivo oscila, caso contrário, são incrementados.

Figura 24 – Aproximação linear da função objetivo e definição de limites móveis

Com o intuito de ilustrar melhor a idéia dos limites móveis, considere-se a função de uma variável da Figura 24. Pode-se observar que nas vizinhanças de x_0 e x_i a aproximação linear (reta vermelha) é válida. Contudo, o valor do limite móvel deve ser modificado de acordo com a curvatura da função $F(x)$, pois com valores grandes vê-se afetada a precisão, enquanto com valores pequenos o custo computacional é incrementado. Em regiões com curvatura pequena (em torno de x_0 , com raio de curvatura tendendo ao infinito) os limites móveis podem assumir valores grandes, e ao contrário em regiões com curvatura grande (em torno de x_i , com raio de curvatura tendendo para zero) os valores devem ser reduzidos. Rubio (2005) recomenda utilizar valores entre 5% e 15% do valor atual das variáveis de projeto para determinar os limites móveis, dependendo do caso. Entre os algoritmos de PLS mais comuns podem-se citar o método SIMPLEX (DANTZIG; ORDEN; WOLFE, 1955) e o algoritmo KARMARKAR (KARMARKAR, 1984). No software MATLAB encontra-se implementada, além do SIMPLEX, a rotina LIPSOL ou "Linear-programming Interior-Point SOLvers" (ZHANG, 1998) que é o algoritmo predefinido na função "linprog", a qual foi utilizada neste

trabalho. Alguns dos trabalhos encontrados na literatura empregando a PLS são: Rubio et al. (2009), Iga et al. (2009), Carbonari, Silva e Nishiwaki (2005), Li, Saitou e Kikuchi (2004), Cardoso e Fonseca (2003), Nishiwaki et al. (2001), Silva, Nishiwaki e Kikuchi (2000), Silva et al. (1999), Krog e Olhoff (1999), Sigmund, Torquato e Aksay (1998), Silva, Fonseca e Kikuchi (1998), Petersson e Sigmund (1998), Nishiwaki et al. (1998), Sigmund e Torquato (1997), Swan e Kosaka (1997), Yang e Chuang (1994) e Tenek e Hagiwara (1993).

4.3 Método das Assíntotas Móveis (MMA)

O MMA é um método de programação matemática desenvolvido originalmente por Svanberg (1987), no qual se constroem aproximações convexas sequenciais controladas por assíntotas móveis para que o problema de otimização seja resolvido. A aproximação local baseada no MMA é (SVANBERG, 1987):

$$F_{lin}(\mathbf{x}) \cong F(\mathbf{x}_o) + \sum_{+,i}^n p_i \left(\frac{1}{U_i - x_i} - \frac{1}{U_i - x_{o_i}} \right) + \sum_{-,i}^n q_i \left(\frac{1}{x_i - L_i} - \frac{1}{x_{o_i} - U_i} \right) \quad (109)$$

onde os símbolos $\sum_{+,i}^n$ e $\sum_{-,i}^n$ referem-se à somatória correspondente aos termos que possuem as suas primeiras derivadas positivas e negativas, respectivamente. Os termos p_i e q_i são calculados como (SVANBERG, 1987):

$$p_i = \begin{cases} (U_i - x_{o_i})^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} > 0 \\ 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (110)$$

$$q_i = \begin{cases} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_{o_i} - L_i)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (111)$$

Os termos L_i e U_i se denominam assíntota inferior (“lower”) e superior (“upper”), nessa ordem, e ajustam a convexidade da aproximação do problema de otimização. Esses termos são determinados pelas expressões (BRUYNEEL; DUYSINX; FLEURY, 2002):

$$L_i = x_i - S_i(x_{oi} - L_{oi}) \quad (112)$$

$$U_i = x_i - S_i(U_{oi} - x_{oi}) \quad (113)$$

onde L_{oi} e U_{oi} são os valores das assíntotas definidas na iteração imediatamente anterior e S_i é um parâmetro que depende do histórico dos valores das variáveis de projeto. O método tem tido algumas variações com o objetivo de melhorar a aproximação e convergência, tais como GMMA (ZHANG et al., 1996), CCSA (SVANBERG, 2001), GBMMA e GCMMA (BRUYNEEL; DUYSINX; FLEURY, 2002). Aproximações como GCMMA consideram ambas as assíntotas não nulas (BRUYNEEL; DUYSINX; FLEURY, 2002), (ver Figura 25). Cabe ressaltar que a PLS é um caso especial do MMA quando $L_i \rightarrow -\infty \wedge U_i \rightarrow +\infty$.

Figura 25 – Aproximação da função objetivo pelo MMA e definição das assíntotas móveis

Alguns dos trabalhos encontrados na literatura empregando o MMA são: Sutradhar et al. (2010), Takezawa et al. (2010), Paulino, Silva e Le, (2009), Dahl, Jensen e Sigmund (2008), Bruns (2007), Gersborg-Hansen, Bendsøe e Sigmund (2006), Zhu, Wang e Jiang (2006), Bruyneel e Duysinx (2005), Rauli e Maute (2005), Jensen e Sigmund (2005, 2004), Donoso e Sigmund (2004), Sigmund (2001b, 2001c), Pedersen (2001), Bruns e Tortorelli (2001), Lau, Du e Lim (2001a).

4.4 Problema de Otimização Topológica na Forma Discreta

O problema de otimização proposto é não-linear, mas com a PLS ele é aproximado mediante sucessivos subproblemas de otimização linear para chegar a uma solução ótima. Assim, o método exige que a função objetivo e as restrições sejam funções lineares em relação às variáveis de projeto (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Já com o MMA a aproximação sucessiva dos subproblemas de otimização é de caráter quadrático. Como o domínio de projeto do microsistema ETM, Ω , deve ser discretizado em elementos finitos para se obter uma solução numérica do problema de otimização, deve-se adotar um modelo para o campo de pseudo-densidades que determina a topologia da estrutura, ou seja, deve-se definir a variável de projeto. Neste trabalho foi utilizada a implementação de variável de projeto por elemento (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE, 1989), também denominada implementação Q4/U (ver Figura 26).

Figura 26 – Implementação da variável de projeto por elemento (Q4/U)

Nesta implementação, os graus de liberdade do elemento estão interpolados por funções de forma bilineares, enquanto a variável de projeto é uniforme dentro do elemento. Esta implementação não garante a continuidade do campo da variável de projeto e apresenta problema de instabilidade de tabuleiro ou "checkerboard" e dependência da malha (RAHMATALLA; SWAN, 2004). Essas desvantagens têm sido contornadas com a aplicação de filtros e restrições de perímetro como descritas nas revisões feitas por Eschenauer e Olhoff (2001) e Sigmund e Petersson (1998). O elemento utilizado para discretizar o domínio é o elemento isoparamétrico de quatro nós (ver APÊNDICE A).

4.4.1 Formulação do Problema de Otimização na Forma Discreta

Para o problema na forma discreta, a função objetivo é linearizada e o problema baseado na formulação Q4/U é solucionado com a PLS. Adotando a formulação anterior, considera-se a pseudo-densidade de cada elemento ρ_e como a variável de projeto do problema. Assim, o volume total de material na estrutura pode ser representado pela somatória do produto entre o volume de cada elemento V_e e sua densidade ρ_e . O problema de otimização na forma discreta tem a forma:

$$\max_{\rho} F_{ETM}^{lin} \cong \sum_{k=1}^{m-1} [(u_{out})_k + (u_{out})_{k+1}] \frac{\Delta t}{2} \therefore u_{out} = \left(\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} \bigg|_{\rho_e=\rho_{e0}} \right) (\rho_e) \wedge \Delta t = \frac{t_f}{m} \quad (114)$$

$$\text{tal que} \begin{cases} \rho_e V_e \leq V^* & \text{(Restrição de volume)} \\ 0 \leq \rho_{min} \leq \rho_{min}^{mov} \leq \rho \leq \rho_{max}^{mov} \leq 1 & \text{(Restrição de caixa para as variáveis de projeto)} \\ K_{oij} V_j = F_{oi} & \text{(Eq. de equilíbrio elétrica)} \\ C_{1ij} \dot{T}_j + K_{1ij} T_j = F_{1i} & \text{(Eq. de equilíbrio térmica)} \\ K_{2rs} U_s = F_{2r} & \text{(Eq. de equilíbrio estrutural termoelástica)} \end{cases} \quad (115)$$

A integral da eq.(49) é resolvida utilizando a regra trapezoidal, enquanto a função objetivo e a restrição de volume são linearizadas em torno de $\rho_e = \rho_{e0}$ utilizando uma série de Taylor de primeiro grau. Das eq.(114) e eq.(115), observa-se que a função a ser maximizada e as restrições são lineares em relação às variáveis de projeto. Os coeficientes das pseudo-densidades na eq.(114) são as derivadas (ou sensibilidades) da função objetivo (função F_{ETM}) em relação a cada variável de projeto. Essa derivada é apresentada na seção 4.5. ρ_{min}^{mov} e ρ_{max}^{mov} são os vetores que contém os limites móveis inferior e superior para cada variável de projeto, respectivamente. ρ_{min} é o vetor que contém o valor mínimo que podem assumir as pseudo-densidades de cada elemento finito para evitar singularidades nos subproblemas de MEF. V^* é a restrição de volume ou volume máximo desejado e m é o número de passos de integração. Uma primeira estimativa do tempo t_f é feita através da análise dinâmica de uma topologia obtida por um enfoque de otimização estática (ver

APÊNDICE G), empregando para isso o MEF e o procedimento descrito na seção 3.7. No caso do MMA, a única mudança é a aproximação da função objetivo (eq.(114)), a qual é feita com a expressão da eq.(109). Como mencionado na seção 3.6, o problema de otimização, não inclui restrições nos valores de corrente elétrica e tensão mecânica, já que esse problema envolve quantidades de natureza local, com valores máximos deslocando-se através do domínio durante o processo de otimização. Contudo, existem enfoques alternativos para abordar o problema, como as restrições integrais, que aumentam excessivamente o custo computacional, pelo fato de que esse tipo de restrições tem que ser avaliadas em cada elemento finito do domínio.

4.4.2 Avaliação da Convecção em Contornos Variáveis no Problema de OT

Nos problemas de otimização envolvendo sistemas térmicos, as condições de contorno de convecção são muito importantes, pelo fato de que podem conduzir a imprecisões nos resultados ou distribuições de temperaturas irreais quando não são incluídas (MANKAME; ANANTHASURESH, 2000, 2001). A condição de contorno de convecção na modelagem do problema térmico tem sido considerada tanto na face superior do microsistema (já que o dispositivo está apoiado no substrato quando fabricado), (MANKAME; ANANTHASURESH, 2001) quanto no seu contorno (YIN; ANANTHASURESH, 2002), porém, neste trabalho, o fenômeno da convecção foi considerado em ambas as faces (superior e inferior) e igualmente no contorno do microsistema. Por conseguinte, como no processo de otimização é removido material do domínio de projeto, as superfícies sujeitas à convecção modificam-se em cada iteração. Assim, para se realizar uma modelagem mais precisa é necessário controlar essa variação com um mapeamento das vizinhanças de cada elemento finito da discretização. A transferência de calor por convecção no contorno do elemento é o único fenômeno afetado pelo mapeamento, já que as componentes de fluxo de calor por convecção nas superfícies superior e inferior estão dominadas pela penalização introduzida com o modelo de material do coeficiente de convecção (ver eq.(47)).

O mapeamento das fronteiras do elemento finito, para determinar se existe ou não convecção, é definido como:

$$\gamma = \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \quad (116)$$

onde o subíndice m varia de 1 até o número de elementos v que compartilham fronteira com elemento e . Se a discretização do domínio é regular e possui mais do que 1 elemento, pode-se ver na Figura 27 que um elemento e da malha tem no mínimo 1 elemento vizinho (para garantir conectividade no modelo) e no máximo 4 elementos. O mapeamento dessa figura foi utilizado neste trabalho com a finalidade de facilitar a tarefa de reconhecimento dos contornos para avaliar a convecção em cada um dos elementos finitos do domínio considerado. Assim, se a variável do elemento vizinho ρ_m assumir um valor 0 a convecção será avaliada, mas se for 1 a convecção não é levada em conta. O termo γ dever ser incluso nas parcelas da matriz de rigidez térmica (eq.(61)) e o vetor de fluxo de calor (eq.(67)), elementares.

Figura 27 – Mapeamento dos elementos vizinhos no problema térmico com condição de convecção no contorno do elemento

A modificação que deve ser realizada na contribuição elementar da matriz de rigidez térmica, levando em conta que o contorno é variável durante o processo de otimização é (YIN; ANANTHASURESH, 2002):

$$K_{hcij}^e = \left[\rho_e^{P_3} h_1^o t_e \gamma \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right]_e = \rho_e^{P_3} h_1^o t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} [N_i N_j dL_e]_e \quad (117)$$

igualmente, a contribuição elementar no vetor de fluxo de calor levando em conta a sua variação durante o processo de otimização toma a forma (YIN; ANANTHASURESH, 2002):

$$F_{hci}^e = \left\{ \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \gamma \oint_{L_e} N_i dL_e \right\}_e = \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} \{N_i dL_e\}_e \quad (118)$$

Em ambos os casos, o mapeamento dos elementos vizinhos para avaliar a convecção é realizado como indica a Figura 27.

4.5 Análise de Sensibilidade

O objetivo da análise de sensibilidade é avaliar o comportamento de uma função objetivo com respeito às variações das variáveis de projeto. A função objetivo é dada em função das variáveis de projeto definidas explicitamente e variáveis de campo de resposta determinadas implicitamente, portanto deseja-se que sejam eliminadas as variáveis implícitas para que a expressão da sensibilidade seja totalmente explícita (TORTORELLI; HABER, 1989). Neste caso a análise de sensibilidades proporciona os gradientes da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto, necessários para a linearização do problema de otimização definido nas eq.(114) e eq.(115). Com fins de comparação, serão apresentados o método direto (ver APÊNDICE F) e o método adjunto, porém neste trabalho foi utilizado o método adjunto.

4.5.1 Sensibilidade de problemas de condução de calor

Na literatura, encontram-se diversos trabalhos no cálculo de sensibilidades para os problemas de condução de calor. Dems e Mroz (1983, 1984) aplicaram esforços e deformações iniciais adjuntas utilizando enfoques variacionais. Dems (1986) derivou de

forma explícita, a formulação básica para as sensibilidades de primeira e segunda ordem para os problemas lineares térmicos estacionários e transientes, utilizando métodos de carregamento adjunto e diferenciação direta, nos quais foram incluídas posteriormente as variações de forma (DEMS, 1987; DEMS; KORYCKI; ROUSSELET, 1997) e o tratamento com condições de contorno mistas (DEMS; ROUSSELET, 1999a, 1999b). Meric (1988b), Park e Yoo (1988) utilizaram o método adjunto, baseado nos multiplicadores de Lagrange para derivar sensibilidades de primeira ordem nos problemas de estado estacionário. Sob o mesmo enfoque, Tortorelli, Haber e Lu (1989) trataram com a análise de sensibilidade para sistemas térmicos não-lineares e Cho e Choi (2005) para sistemas termoelásticos lineares fracamente acoplados. Meric (1988b, 1996) abordou o problema de sensibilidade para sistemas não-lineares e corpos sujeitos à equação de Helmholtz⁷ com a utilização do Método dos Elementos de Contorno (MEC), enquanto Tortorelli e Haber (1989) estudaram o problema transiente empregando o Método de Elementos Finitos (MEF), todos os trabalhos seguindo o enfoque adjunto. Outros trabalhos que tem tratado com as análises de sensibilidade para problemas térmicos transientes são Meric (1988a) em sistemas termoelásticos carregados dinamicamente, Tortorelli et al. (1991) em sistemas termoelásticos acoplados e Kwak e Hahn (2000) em sistemas eletrotérmicos com distribuição de temperatura específica. O cálculo de sensibilidade nas análises transientes de condução de calor requer a utilização de métodos numéricos de integração no tempo, que por sua vez, demandam que não sejam afetados por oscilações nos resultados. Neste tópico Gu et al. (2002) e Chen e Tong (2004), utilizaram o método "Precise Time Integration" (PTI) proposto por Zhong e Williams (1994) para o cálculo de sensibilidades em problemas de condução linear e não-linear e transferência de calor em materiais gradados funcionalmente (FGM), respectivamente.

4.5.2 Método Adjunto

O método adjunto é denominado como o método da carga fictícia ou carga virtual. Neste método as sensibilidades são avaliadas diretamente pela formulação de um problema adjunto que elimina as sensibilidades implícitas, reduzindo assim o custo computacional quando o número de variáveis de projeto é maior do que o número de restrições (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). O método adjunto foi o método implementado neste trabalho pelo fato

⁷ A equação de Helmholtz descreve o comportamento de variáveis de campo escalar (temperatura, voltagem, pressão, etc.).

explicado anteriormente, porém utiliza alguns resultados do método direto para resolver o problema de sensibilidades (ver APÊNDICE F). No problema transiente térmico de microsistemas ETM, a sensibilidade implícita que deve ser calculada é $\frac{\partial U_r}{\partial T_i}$. Deste modo, é introduzida uma variável adjunta $\Lambda_{t_{ri}}^T = \frac{\partial U_r}{\partial T_i}$ na eq.(239), (ver APÊNDICE F) e a sensibilidade em relação às variáveis de projeto pode ser expressa como (CHEN; TONG, 2004):

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \int_0^{t_f} L_{2r}^T \left(\frac{\partial U_r}{\partial \rho_e} + \frac{\partial U_r}{\partial T_i} \frac{dT_i}{d\rho_e} \right) dt = \int_0^{t_f} L_{2r}^T \left(\frac{\partial U_r}{\partial \rho_e} + \Lambda_{t_{ri}}^T R_{1ie} \right) dt \quad (119)$$

onde L_{2r}^T é um vetor de tamanho n , que contém zeros exceto na posição correspondente ao grau de liberdade (GDL) na direção do deslocamento de saída no problema estrutural, cujo valor é unitário. Na equação anterior, o termo desconhecido é o produto $\Lambda_{t_{ri}}^T R_{1ie}$, que pode ser encontrado manipulando-se a expressão (ver eq.(246), APÊNDICE F):

$$C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} + K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} = \frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (120)$$

Assim, multiplicando ambos os lados dessa equação pela variável $\Lambda_{t_{ri}}^T$ e integrando no tempo desde o instante inicial até o tempo final de duração do transiente térmico t_f , obtém-se:

$$\int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T \left(C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} + K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} \right) dt = \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T \left(\frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \right) dt \quad (121)$$

separando os integrandos do lado esquerdo:

$$\int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} dt + \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} dt = \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T \left(\frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \right) dt \quad (122)$$

agora integrando o primeiro termo por partes:

$$\left[\Lambda_{t_{ri}}^T C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} \right]_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \dot{\Lambda}_{t_{ri}}^T C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} dt + \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} dt = \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T \left(\frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \right) dt \quad (123)$$

Como foi visto antes, no instante inicial T_j é constante no domínio e $\left. \frac{dT_j}{d\rho_e} \right|_{t=0} = 0$ (KWAK; HAHN, 2000). Logo com o fim de eliminar os termos presentes no tempo final deve-se impor uma condição descrita por (CHEN; TONG, 2004):

$$\Lambda_{t_{ir}}(t_f)=0 \quad (124)$$

Essa condição é homogênea, pelo fato de que a função objetivo não depende do termo da variação do vetor de temperatura no tempo ($\dot{T}_j$). Com as condições impostas, o primeiro termo da eq.(123) é nulo, deste modo:

$$\int_0^{t_f} \left(-\dot{\Lambda}_{t_{ri}}^T C_{1ij} + \Lambda_{t_{ri}}^T K_{1ij} \right) \frac{dT_j}{d\rho_e} dt = \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T \left(\frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \right) dt \quad (125)$$

Da eq.(119) pela introdução da variável adjunta tem-se a seguinte identidade:

$$\int_0^{t_f} \left(\frac{\partial U_r}{\partial T_i} \right) \frac{dT_i}{d\rho_e} dt = \int_0^{t_f} \Lambda_{t_{ri}}^T R_{1ie} dt \quad (126)$$

Fazendo uma comparação direta termo a termo entre as eq.(125) e eq.(126), determina-se que a variável adjunta deve satisfazer:

$$-C_{1ij} \dot{\Lambda}_{t_{jr}} + K_{1ij} \Lambda_{t_{jr}} = \frac{\partial U_i}{\partial T_r} \quad (127)$$

e R_{1ie} é definido como:

$$R_{1ie} = \frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (128)$$

A eq.(127) é a expressão do problema adjunto de valor final, já que $\Lambda_{t_{ir}}(t_f)=0$. Deste modo, para torná-lo um problema de valor inicial e resolvê-lo por um método de integração no tempo, deve-se fazer uma substituição de variável dada por (DAHL; JENSEN; SIGMUND, 2008):

$$\tau = t_f - t \quad (129)$$

logo:

$$\bar{\Lambda}_{t_{ir}}(\tau) = \Lambda_{t_{ir}}(t_f - t) \quad (130)$$

$$\dot{\bar{\Lambda}}_{t_{ir}} = \frac{d\Lambda_{t_{ir}}}{d\tau} \quad (131)$$

no instante t_f :

$$\bar{\Lambda}_{t_{ir}} = \Lambda_{t_{ir}}(t_f) \quad (132)$$

Com a mudança de variável, o problema adjunto fica modificado como:

$$C_{1ij} \dot{\bar{\Lambda}}_{t_{jr}} + K_{1ij} \bar{\Lambda}_{t_{jr}} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial T_r} \right)^T \bigg|_{t_f - \tau} \quad (133)$$

Para resolver o problema da eq.(144), foi adaptado o método HHT- α (CORNWELL; MALKUS, 1992) e o método PTI (CHEN; TONG, 2004; CHEN et al., 2004; GU et al., 2002) neste trabalho. O termo do lado direito é calculado utilizando a expressão (ver eq.(244), APÊNDICE F):

$$\frac{\partial U_r}{\partial T_i} = K_{2rs}^{-1} \left(\frac{\partial F_{2s}}{\partial T_i} \right) \quad (134)$$

levando em conta que deve ser avaliado no tempo $t = t_f - \tau$. A expressão final da sensibilidade utilizando o método adjunto tem a forma:

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \int_0^{t_f} L_{2r}^T \left(\frac{\partial U_r}{\partial \rho_e} + \frac{\partial U_r}{\partial T_i} \frac{dT_i}{d\rho_e} \right) dt = \int_0^{t_f} \left(\Lambda_{2r}^T F_{adj_{2re}} + \Lambda_{1i}^T F_{adj_{1ie}} + \Lambda_{oi}^T F_{adj_{oie}} \right) dt \quad (135)$$

onde Λ_x^T e F_{adj_x} são o vetor adjunto e a força adjunta, respectivamente. Esses termos são determinados pelo subíndice x que faz referência aos domínios envolvidos nos microsistemas

ETM. Assim, os vetores adjunto estrutural (de tamanho $2n$), térmico e elétrico (ambos de tamanho n) nessa ordem, são dados por:

$$\Lambda_{2r}^T = L_{2s}^T K_{2sr}^{-1} \quad (136)$$

$$\Lambda_{1i}^T = L_{2s}^T \Lambda_{tsi}^T \quad (137)$$

$$\Lambda_{oi}^T = L_{2s}^T \Lambda_{tsq}^T \frac{\partial F_{1q}}{\partial V_j} K_{oj}^{-1} \quad (138)$$

e a força adjunta estrutural, térmica e elétrica são calculadas respectivamente, como:

$$F_{adj_{2re}} = \frac{\partial F_{2r}}{\partial \rho_e} - \frac{dK_{2rs}}{d\rho_e} U_s \quad (139)$$

$$F_{adj_{1ie}} = \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (140)$$

$$F_{adj_{oie}} = \frac{dF_{oi}}{d\rho_e} - \frac{dK_{oij}}{d\rho_e} V_j \quad (141)$$

Observe que $F_{adj_{1ie}} \neq R_{1ie}$ pelo fato de que $F_{adj_{1ie}}$ contém somente a derivada parcial da força térmica em relação à variável de projeto, diferente de R_{1ie} que inclui a derivada total desse mesmo termo. A integral envolvida na eq.(135) é resolvida utilizando a regra trapezoidal:

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\left(\frac{du_{out}}{d\rho_e} \right)_k + \left(\frac{du_{out}}{d\rho_e} \right)_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} \therefore \Delta t = \frac{t_f}{m} \quad (142)$$

onde m é o número de passos de integração e Δt o intervalo de tempo por passo. A verificação na implementação da sensibilidade calculada na eq.(142) é feita por o MDF mediante a expressão (ver APÊNDICE I):

$$\frac{\Delta F_{ETM}}{\Delta \rho_e} = \sum_{e=1}^N \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{u_{out}(\rho_e + \Delta \rho_e)_k - u_{out}(\rho_e)_k}{\Delta \rho_e} + \frac{u_{out}(\rho_e + \Delta \rho_e)_{k+1} - u_{out}(\rho_e)_{k+1}}{\Delta \rho_e} \right] \frac{\Delta t}{2} \right]_e = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta F_{ETM}}{\Delta \rho_1} \\ \frac{\Delta F_{ETM}}{\Delta \rho_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta F_{ETM}}{\Delta \rho_N} \end{Bmatrix}^T \quad (143)$$

onde N é o número de elementos finitos no domínio equivalente ao número de variáveis de projeto, $\Delta \rho_e$ é a excitação da e -ésima variável de projeto e novamente a integração no tempo é feita aplicando-se a regra trapezoidal.

4.6 Imposição de Simetria

Em alguns casos de projeto de microsistemas ETM pode ser necessário obter uma topologia simétrica em relação a algum eixo de simetria do domínio de projeto. Além disso, a imposição de simetria na topologia possibilita tanto a redução do custo computacional quanto a obtenção de estruturas com menor complexidade que facilitem os processos de fabricação com que os microsistemas são manufaturados.

Figura 28 – Imposição de simetria no problema de otimização de microsistemas ETM

Para ilustrar o procedimento, considere o projeto do microsistema ETM da Figura 28 que pretende maximizar o deslocamento no ponto onde se encontra a mola e minimizar o tempo de resposta do microsistema. A linha de simetria horizontal vermelha divide a topologia resultante em duas metades exatamente iguais e, portanto, precisa-se de um mapeamento que garanta que as variáveis do projeto dos elementos finitos simétricos possuam o mesmo valor durante todo o processo de otimização. O mapeamento consiste inicialmente em calcular a distância perpendicular desde o centróide de cada elemento até o eixo de simetria. Logo, são comparadas as distâncias obtidas entre os elementos que possuem a mesma coordenada paralela ao eixo de simetria (neste caso a coordenada x), estabelecendo que, dois elementos são simétricos se tiverem a mesma distância perpendicular calculada anteriormente. Se a linha de simetria cruzar o centróide do elemento, tal entidade não tem simetria com nenhum outro elemento do domínio. Realizado o mapeamento, são modificadas a função objetivo e as restrições do problema de otimização com a finalidade de reduzir o custo computacional do processo de otimização.

A função objetivo é redefinida a partir de um vetor de variáveis de projeto primárias ρ_e^{PRI} (variáveis de projeto em preto correspondentes à metade inferior e que no caso da Figura 28 tem dimensão 8). Se a linha de simetria passa pelo centróide de alguns elementos deve considerar-se um vetor de variáveis de projeto não-simétricas ρ_e^{NSIM} (que no caso do exemplo não existe). Considerando o problema anterior, o termo u_{out} da eq.(114) fica como:

$$u_{\text{out}} = \left(\left(\frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{PRI}}} + \frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{SIM}}} \right) \bigg|_{\rho_e = \rho_{e_0}} \right) (\rho_e^{\text{PRI}}) + \left(\frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{NSIM}}} \bigg|_{\rho_e = \rho_{e_0}} \right) (\rho_e^{\text{NSIM}}) \quad (144)$$

onde $\frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{PRI}}}$ e $\frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{SIM}}}$ são os vetores de sensibilidades em relação as variáveis de projeto primárias e simétricas (variáveis de projeto em vermelho correspondentes à metade superior da Figura 28), respectivamente e $\frac{dF_{\text{ETM}}}{d\rho_e^{\text{NSIM}}}$ é o vetor de sensibilidades em relação as variáveis de projeto não-simétricas (variáveis de projeto correspondentes com elementos cujo centróide

passa pela linha de simetria). A notação $\left| \right|_{\rho_e = \rho_{e_0}}$ nos vetores anteriores significa que devem ser avaliados no projeto $\rho_e = \rho_{e_0}$. Para o exemplo, a eq.(144) tem a forma:

$$u_{out} = \left(\left(\frac{dF_{ETM}}{d\rho_1} + \frac{dF_{ETM}}{d\rho_{13}} \right) \right)_{\rho_e = \rho_{e_0}} (\rho_1) + \dots + \left(\left(\frac{dF_{ETM}}{d\rho_8} + \frac{dF_{ETM}}{d\rho_{12}} \right) \right)_{\rho_e = \rho_{e_0}} (\rho_8) \quad (145)$$

Do mesmo modo, a restrição de volume é expressa como:

$$(\rho_e^{PRI})(\forall_e^{PRI} + \forall_e^{SIM}) + (\rho_e^{NSIM})(\forall_e^{NSIM}) \leq V^* \quad (146)$$

onde $\forall_e^{PRI}$, $\forall_e^{SIM}$ e $\forall_e^{NSIM}$ são os vetores com os valores dos volumes elementares correspondentes com as variáveis de projeto primárias, simétricas e não-simétricas, respectivamente. Para o exemplo tem-se que:

$$(\rho_1)(\forall_1 + \forall_{13}) + (\rho_2)(\forall_2 + \forall_{14}) + \dots + (\rho_8)(\forall_8 + \forall_{12}) \leq V^* \quad (147)$$

Assim, o algoritmo de otimização somente calculará o conjunto de variáveis de projeto base (e não-simétricas quando houver) e atualizará o conjunto das variáveis de projeto simétricas de acordo com o mapeamento originado pela linha de simetria.

4.7 Filtro de Sensibilidades

O filtro tem a finalidade de assegurar que uma solução factível para o problema de otimização seja obtida, evitar a formação de instabilidades conhecidas como instabilidades de tabuleiro e contornar o problema de dependência da malha. O filtro utilizado (ANDREASSEN et al., 2011) é baseado em sensibilidades, ou seja, depois do cálculo das sensibilidades de cada elemento, elas são modificadas com base nas médias ponderadas das sensibilidades em relação às variáveis de projeto das vizinhanças (SIGMUND, 2007). A vizinhança de cada elemento é determinada por uma dimensão característica ou raio de abrangência (r_{min}). A função que define o filtro é dada por:

$$C = \frac{1}{\rho_e \left(\sum_{i \in N_e} H_{ei} \right)} \sum_{i \in N_e} H_{ei} \rho_i \quad (148)$$

onde N_e é um conjunto definido para cada variável de projeto ρ_e . N_e está composto por i elementos, cujo centróide encontra-se localizado a uma distância do e -ésimo elemento, menor do que o raio do filtro r_{min} , este último definido segundo o projeto (ver Figura 29). H_{ei} é um fator de peso determinado por:

$$H_{ei} = \begin{cases} r_{min} - r_{ei}, & \text{se } r_{ei} < r_{min} \\ 0, & \text{se } r_{ei} \geq r_{min} \end{cases} \quad (149)$$

com $r_{ei} = \Delta(i, e)$, ou distância entre os centróides dos elementos i -ésimo e e -ésimo.

Figura 29 – Região definida pelo raio de filtro r_{min}

Os pesos estabelecidos por H_{ei} são independentes da malha, já que se a malha for refinada, somente se produziria um incremento no número de lugares em que H_{ei} seria avaliada (ver Figura 30), (GUEST; PREVOST; BELYTSCHKO, 2004). Assim, as sensibilidades modificadas pelo filtro têm a forma:

$$\frac{\widehat{dF_{ETM}}}{d\rho_e} = \frac{1}{\rho_e \left(\sum_{i \in N_e} H_{ei} \right)} \sum_{i \in N_e} H_{ei} \rho_i \frac{dF_{ETM}}{d\rho_i} \quad (150)$$

Figura 30 – Efeito do refinamento da malha sobre o conjunto N_e definido para a utilização do filtro de sensibilidades

4.8 Funções de Penalização Para Instabilidades Numéricas

As instabilidades numéricas de escalas de cinza (ver seção 3.5.3) e de tabuleiro (ver seção 3.5.4) podem ser contornadas mediante funções de penalização, as quais afetam diretamente a eq.(114) do problema de otimização (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Assim, é gerada uma função multi-objetivo, combinando como objetivos na otimização:

- Maximização da função F_{ETM}^{lin} para maximizar o deslocamento de saída e reduzir a constante de tempo τ do microsistema ETM.
- Minimização da função F_{VPI} para eliminar as variáveis de projeto intermediárias.
- Minimização da função F_{CCF} para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro.

A nova função multi-objetivo do problema de otimização na forma discreta, tem a forma:

$$F_{ETM}^{MO} = F_{ETM}^{lin} - w_1 F_{VPI} - w_2 F_{CCF} \quad (151)$$

onde as restrições do problema seguem sendo regidas pela eq.(115), w_1 e w_2 são pesos no intervalo entre 0 e 1, que ponderam a relevância de cada objetivo no processo de otimização e que devem ser determinados em forma iterativa. À função objetivo original F_{ETM}^{lin} é atribuído um peso de 1 pelo fato de ser o objetivo mais importante e a motivação desse trabalho. Já que a aproximação da função objetivo pelos métodos de programação matemática mencionados anteriormente, (ver seções 4.2 e 4.3) dependem das sensibilidades em relação as variáveis de projeto, a sensibilidade da função multi-objetivo será:

$$\frac{dF_{ETM}^{MO}}{d\rho_e} = \frac{dF_{ETM}^{lin}}{d\rho_e} - w_1 \frac{dF_{VPI}}{d\rho_e} - w_2 \frac{dF_{CCF}}{d\rho_e} \quad (152)$$

Em seguida, serão apresentadas as funções consideradas para o tratamento das instabilidades numéricas e as suas sensibilidades.

4.8.1 Função de Penalização Para Reduzir as Escalas de Cinza

Nas últimas iterações do processo de otimização, perseguem-se soluções do tipo 0-1, portanto, é desligado o filtro de sensibilidades e, além disso, é aumentado na função objetivo o termo $w_1 F_{VPI}$ com a finalidade de levar as variáveis de projeto intermediárias para valores próximos de 0 ou 1. Cabe ressaltar que a penalização das variáveis de projeto intermediárias é levada em conta na função objetivo original quando $w_1 \neq 0$. A função F_{VPI} é dada por (ANANTHASURESH, 2003; YIN; ANANTHASURESH, 2002):

$$F_{VPI} = \sum_{e=1}^N \rho_e (1 - \rho_e) \quad (153)$$

e a sua sensibilidade:

$$\frac{dF_{VPI}}{d\rho_e} = (1 - 2\rho_e) \quad (154)$$

onde deve ser lembrado que o vetor de variáveis de projeto tem dimensão N .

Figura 31 – Comportamento da função de penalização das variáveis de projeto intermediárias

Na Figura 31, observa-se o comportamento da função F_{VPI} para uma variável de projeto qualquer. O valor máximo da função penalizadora para N variáveis de projeto é $\frac{N}{4}$, valor que é obtido quando todas as variáveis de projeto tomam um valor de 0,5. Assim, o objetivo da otimização é minimizar o valor dessa função, fazendo com que as variáveis de projeto mudem para valores próximos de 0 e 1 com o intuito de obter topologias bem definidas.

De outro lado, o peso w_1 que acompanha a função F_{VPI} deve ser obtido por tentativa e erro para cada projeto, observando sempre o comportamento da função objetivo, uma vez que valores excessivos podem gerar alterações abruptas e comportamentos inesperados. Portanto, não existe um valor máximo recomendado para w_1 , porém o valor mínimo para iniciar o seu processo de estimação neste trabalho será de 1×10^{-11} . Embora, Yin e Ananthasuresh (2002) e Ananthasuresh (2003) consideraram para suas simulações um valor para w_1 de 2×10^{-3} . Outros esquemas de penalização para redução das variáveis de projeto intermediárias podem ser encontrados em Borrvall (2001), Borrvall e Petersson (2001) e Lau, Du e Lim (2001b).

4.8.2 Função de Penalização Para Evitar a Formação da Instabilidade de Tabuleiro

O termo $w_2 F_{CCF}$ é acrescentado na função objetivo, em todo o processo de otimização, quando o peso $w_2 \neq 0$, com a finalidade de prevenir a aparição da instabilidade de tabuleiro. A função para evitar essa instabilidade numérica é (POULSEN, 2002a):

$$F_{CCF} = \sum_{i=1}^n H_i \quad (155)$$

sendo n o número de nós interiores⁸ presentes no domínio de projeto e H_i uma função da forma (POULSEN, 2002a):

$$H_i(\rho_3, \rho_1, \rho_4, \rho_2) = m_1(\rho_3, \rho_1, \rho_4) m_2(\rho_3, \rho_4, \rho_2) m_3(\rho_1, \rho_3, \rho_4) m_4(\rho_1, \rho_2, \rho_4) \quad (156)$$

onde $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ são as variáveis de projeto em torno do nó considerado (ver Figura 32), sendo que nos nós pertencentes às fronteiras do domínio de projeto, H_i não é avaliada.

Figura 32 – Mapeamento das variáveis de projeto em torno de um nó interior para a avaliação da função de penalização da instabilidade de tabuleiro

A função m_i é definida como:

$$m_i(a, b, c) = |b - a| + |c - b| - |c - a| \quad (157)$$

⁸ Um nó interior é aquele que não pertence à fronteira do domínio de projeto

onde a , b e c representam um conjunto de variáveis de projeto qualquer, em torno de um nó interior n , conforme o mapeamento da Figura 32.

Figura 33 – Valores possíveis da função H_i

A função H_i detecta a presença da instabilidade de tabuleiro ao redor de um nó quando alcança um valor máximo como é observado na Figura 33 (retângulo vermelho). O valor máximo da função penalizadora para N variáveis de projeto é $16(N - 1)^2$, valor obtido quando existe uma alternância entre elementos sólidos e vazios em todo o domínio (como se fosse um tabuleiro de xadrez). Portanto, o objetivo da otimização é minimizar o valor dessa função de modo que o arranjo de material em torno do nó considerado evite a formação da instabilidade. Por sua vez, o peso w_2 acompanhando a função F_{CCF} é calculado por tentativa e erro para cada projeto, de modo a evitar comportamentos abruptos ou inesperados na função objetivo pelo seu excessivo incremento. Para determinar w_2 neste trabalho foi utilizado um valor inicial de 1×10^{-11} .

A sensibilidade da função F_{CCF} , tem um tratamento especial pelo fato de que a derivada da função valor absoluto ($|x|$) não é contínua em zero⁹, tendo-se então que utilizar

⁹ A derivada da função valor absoluto $|x|$ é: $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, que não é contínua em zero.

um artifício numérico com a finalidade de trocar essa função por uma diferenciável em zero. Poulsen (2002a) recomenda a substituição pela função:

$$|x| \cong \sqrt{x^2 + \epsilon^2} - \epsilon \quad (158)$$

com $\epsilon \rightarrow 0$, sendo recomendado $\epsilon = 0,1$. Neste trabalho adotou-se um valor de $\epsilon = 0,001$. Assim, a sensibilidade da função F_{CCF} , é dada por:

$$\frac{dF_{CCF}}{d\rho_e} = \frac{d}{d\rho_e} \left(\sum_{i=1}^n H_i \right) = \frac{dH_1}{d\rho_e} + \frac{dH_2}{d\rho_e} + \frac{dH_3}{d\rho_e} + \dots + \frac{dH_n}{d\rho_e} \quad (159)$$

sendo essa sensibilidade um vetor de dimensão N . A sensibilidade da função H_i em relação às variáveis de projeto é (POULSEN, 2002a):

$$\frac{dH_i}{d\rho_e} = \frac{dm_1}{d\rho_e} m_2 m_3 m_4 + \frac{dm_2}{d\rho_e} m_1 m_3 m_4 + \frac{dm_3}{d\rho_e} m_1 m_2 m_4 + \frac{dm_4}{d\rho_e} m_1 m_2 m_3 \quad (160)$$

e as sensibilidades da função m_i , segundo o argumento dessa função, vêm expressas por:

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{da} = -\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \epsilon^2}} + \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_3^2 + \epsilon^2}} \quad (161)$$

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{db} = \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \epsilon^2}} - \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_2^2 + \epsilon^2}} \quad (162)$$

$$\frac{dm_i(a,b,c)}{dc} = \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_2^2 + \epsilon^2}} - \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_3^2 + \epsilon^2}} \quad (163)$$

onde $\Delta_1 = b - a$, $\Delta_2 = c - b$ e $\Delta_3 = c - a$. Outros esquemas de penalização para evitar a formação da instabilidade de tabuleiro podem ser encontrados em Pomezanski, Querin e Rozvany (2005), Poulsen (2003) e Zhou, Shyy e Thomas (2001).

4.9 Implementação Computacional do MOT

Para a implementação computacional deste trabalho, foi desenvolvido um software na linguagem MATLAB, denominado *ETMDinT* (fazendo alusão à consideração do tempo transiente no domínio térmico), que resolve o problema de otimização para microsistemas ETM considerando a resposta térmica transiente. Cabe esclarecer que foram implementadas duas análises: Uma dinâmica sendo a motivação desse trabalho e uma estática realizada com fins comparativos, baseada no trabalho de Rubio (2005). As diferenças estão no MEF (ver APÊNDICE C), a formulação do problema de otimização e o cálculo de sensibilidades associado (ver APÊNDICE G). O diagrama de fluxo desse software é mostrado na Figura 34, onde são distinguidos três módulos: um módulo de análise, um módulo de otimização e um módulo de pós-processamento.

4.9.1 Módulo de Análise

O módulo de análise é o responsável pelo cálculo da resposta do sistema. No início são determinadas a geometria do domínio de projeto, a sua discretização, as condições de contorno e de carga, as propriedades de material, a rigidez da peça atuada, o valor da restrição de volume máximo e o "chute" inicial para gerar um vetor de variáveis de projeto com valores uniformes. Além disso, é fornecido o tempo transiente, quantidade de passos nos quais o mesmo será discretizado e o algoritmo de integração no tempo (ver seção 4.1.5). Outros dados, para serem estabelecidos pelo usuário, são os pesos w_1 e w_2 das funções de penalização de instabilidades numéricas (ver seção 4.8), o algoritmo para resolver o problema de otimização (ver seções 4.2 e 4.3) e o tamanho do raio do filtro. Se for imposta a simetria na topologia é realizado um mapeamento com a finalidade de modificar adiante o problema de otimização e diminuir o custo computacional. Realizado o mapeamento ou se não houver imposição de simetria o algoritmo continua para o cálculo da resposta do sistema pelo MEF.

4.9.2 Módulo de Otimização

Assim que a resposta do sistema é obtida, a função objetivo e restrições são calculadas levando em conta o termo que penaliza a instabilidade de tabuleiro. O passo seguinte consiste

na análise de sensibilidades e a sua filtragem, sendo esse procedimento útil, tanto para prevenir a instabilidade de tabuleiro quanto para diminuir o efeito da dependência da discretização.

Adicionalmente, no caso da PLS, são calculados os limites móveis que serão aplicados às variáveis de projeto no problema de otimização linearizado. Esses limites móveis representam os valores máximos e mínimos que cada variável de projeto pode assumir e cujos valores oscilam entre o 5% e o 15% (RUBIO, 2005) dos valores atuais das variáveis de projeto. Para o MMA, as assíntotas são calculadas por uma subrotina desenvolvida por Svanberg (1987). Como visto na eq.(115) é definido um limite mínimo para as variáveis de projeto $\rho_{\min}$, para evitar instabilidades numéricas ou singularidades. No caso que a otimização seja feita com fatores de penalização uniformes (ver Tabela 29) o valor de $\rho_{\min}$ é 5×10^{-2} quando utilizado o método HHT e 5×10^{-3} quando utilizado o método PTI. O valor de $\rho_{\min}$ desce para 1×10^{-15} quando é utilizada uma combinação de fatores de penalização derivada de um estudo analítico (ver Tabela 31 na seção 5.5 e APÊNDICE J). Portanto, regiões do domínio de projeto com $\rho_e = \rho_{\min}$ podem ser consideradas sem material (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Posteriormente é realizada a otimização do problema não-linear com a PLS ou MMA, conforme selecionado no início pelo usuário. O algoritmo de otimização prevê uma nova distribuição de material que é atualizada no modelo de MEF, gerando desse modo, uma nova iteração até alcançar a convergência e logo depois gerar os resultados finais no módulo de pós-processamento.

As topologias finais são obtidas utilizando um esquema de continuação (BENDSØE; SIGMUND, 2003), pelo fato de que o problema de otimização é altamente não-convexo. Esse esquema de continuação minimiza o problema de múltiplos máximos locais, permitindo encontrar uma solução mais próxima do máximo global. Neste esquema os valores dos penalizadores (P_i) são incrementados a cada iteração em um valor de 0,1 começando desde 1,0 até um valor máximo. Nas últimas iterações do método, é desligado o filtro e ativado o termo penalizador das variáveis de projeto intermediárias, com o intuito de diminuir as regiões com escalas de cinza.

Figura 34 – Diagrama de fluxo para a implementação numérica

4.9.3 Módulo de Pós-processamento

Após o algoritmo alcançar a convergência, é realizado um pós-processamento da topologia gerada, filtrando-se as variáveis de projeto com valores maiores ou iguais a 0,6 (0,5 no caso de um mecanismo inversor¹⁰). Em seguida ao processo de pós-processamento, procede-se com o cálculo e plotagem dos resultados finais. Além disso, o algoritmo gera um código para ser lido no software COMSOL Multiphysics, com o objetivo de validar o MEF da topologia final (topologia filtrada ou topologia 0-1). Posteriormente à geração de resultados, o usuário pode prosseguir com a execução de um algoritmo de interpretação de forma (explicado na seção 4.10), e assim obter uma topologia com contornos suavizados (topologia interpretada) que facilite sua fabricação. Igualmente, é gerado um arquivo para ser executado no COMSOL Multiphysics, que permite comparar a resposta das topologias filtrada e interpretada. Se o resultado não for satisfatório (grandes diferenças entre as respostas) é possível criar uma nova topologia 0-1 sem repetir o processo de otimização, já que os valores finais das variáveis de projeto são armazenadas em arquivos **.txt*. Com um novo resultado é modificado o arquivo destinado para a verificação das respostas.

4.10 Interpretação de Resultados de OT Mediante Geração de Contornos

As topologias finais obtidas na etapa de pós-processamento do MOT possuem cantos vivos, dado que são compostas por elementos isoparamétricos retangulares de 4 nós (ver APÊNDICE A). Devido a esse fato, as topologias resultantes podem ser complexas para fabricar e, além disso, apresentar concentradores geométricos de tensões mecânicas indesejáveis. Assim, uma solução é a implementação de um algoritmo de interpretação de forma que gere contornos suaves a partir da solução 0-1 obtida no processo de interpretação da etapa de pós-processamento. Ma et al. (2006) desenvolveram um método de interpretação com a finalidade de construir protótipos a partir de resultados de otimização multi-etapa, algoritmo que foi adaptado para esse trabalho e que consta dos seguintes passos explicados adiante: Geração da topologia 0-1, geração de contornos, suavização de contornos, verificação pelo MEF (ver Figura 39).

¹⁰ Mecanismo inversor refere-se ao microsistema ETM projetado pelo MOT, onde se procura maximizar o deslocamento na direção negativa do eixo coordenado selecionado como saída para o microsistema.

4.10.1 Geração da Topologia 0-1

O primeiro passo do algoritmo é converter o resultado do processo de otimização em uma solução do tipo 0-1, mediante um procedimento de filtragem das variáveis de projeto como descrito na seção 4.9.

4.10.2 Geração de contornos

Posterior ao passo anterior, é calculado para cada nó, um valor médio de pseudo-densidade conforme ao valor das variáveis de projeto dos elementos que compartilham o nó considerado. Para determinar esses valores médios são seguidas as seguintes regras:

- Os nós pertencentes à fronteira do domínio de projeto podem somente adquirir valores de 0 (pontos azuis) ou 0,5 (pontos vermelhos) segundo os casos da Figura 35. Se o nó considerado está ligado a um elemento sólido, o valor da pseudo-densidade é 0,5; senão, o valor é nulo.

Figura 35 – Valores de pseudo-densidade média nodal nas fronteiras do domínio para o processo de interpretação de forma

- Os nós interiores do domínio de projeto podem somente adquirir valores de 0; 0,25; 0,5; 0,75 ou 1 (pontos azuis exceto para o valor 0,5 o qual é representado por pontos vermelhos) segundo os casos da Figura 36. Em qualquer caso, a pseudo-densidade média nodal é calculada como a média das variáveis de projeto dos elementos em torno do nó interior considerado.

Figura 36 – Valores de pseudo-densidade média nodal no interior do domínio para o processo de interpretação de forma

Figura 37 – Geração de pontos de contorno adicionais para o processo de interpretação de forma

- Será gerado um ponto de contorno adicional, na metade de uma aresta de um elemento, quando os valores de pseudo-densidade média dos seus nós forem 0,25 e 0,75. Qualquer outra combinação de valores não gerará um ponto de contorno adicional. Do mesmo modo, os pontos de contorno adicionais terão um valor imposto de 0,5. Na Figura 37 podem observar-se os pontos laranja adicionados conforme o descrito anteriormente.

Logo após gerar os valores de pseudo-densidade nodal e os pontos adicionais, são delineados os contornos da topologia, unindo os pontos de valor 0,5 (linha verde) como observado na Figura 38.

Figura 38 – Interpretação de forma de uma topologia obtida pelo MOT

4.10.3 Suavização de contornos

Os contornos obtidos na etapa anterior ainda têm cantos vivos, deste modo, as esquinas são arredondadas com um raio de suavização equivalente a:

$$R_{\text{sua}} = \frac{\min(b_e, h_e)}{2} \quad (164)$$

onde $\min(b_e, h_e)$ é a menor dimensão do elemento finito isoparamétrico. O valor de R_{sua} garante que membros da topologia com um elemento de largura possam ser arredondados.

Figura 39 – Obtenção da topologia final a partir de resultados do MOT utilizando um algoritmo de interpretação de forma

4.10.4 Verificação pelo MEF

Já com os contornos suavizados, procede-se a verificar a topologia obtida utilizando um software comercial de MEF e comparar as respostas da topologia filtrada (resultante do processo de filtragem) e interpretada (resultante da interpretação de forma). Neste trabalho foi utilizado o software COMSOL Multiphysics, o qual possui uma integração com o software MATLAB, que possibilita ler arquivos **.m*, os quais compilam a informação da geometria interpretada, propriedades de material, condições iniciais e de contorno e demais dados de entrada necessários para executar modelo MEF. Para uma melhor compreensão da integração do software COMSOL Multiphysics com o software MATLAB, recomenda-se a leitura de COMSOL (2011a). As topologias resultantes do processo de interpretação de forma explicado anteriormente podem ser fabricadas com processos como micro-usinagem ou corrosão. Outros esquemas de interpretação de resultados de OT podem ser encontrados em Hsu, M. H. e Hsu, Y. (2005) e Hsu, Y., Hsu, M. S. e Chen (2001).

5 RESULTADOS.

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos com o software *ETMDinT*, cuja implementação foi explicada no capítulo 4. A otimização é realizada na forma dinâmica, porém o resultado é comparado com o obtido na forma estática (ver APÊNDICE G), ambas aplicadas em domínios de projeto regulares. A implementação estática é baseada no trabalho desenvolvido por Rubio (2005) e Rubio et al. (2009). A validação do MEF utilizado no software do MOT é apresentada no APÊNDICE H. Para confrontar de maneira quantitativa os resultados da otimização estática e dinâmica, os microsistemas obtidos são caracterizados com o intuito de efetuar uma comparação de parâmetros tais como: constante de tempo (τ), temperatura máxima, deslocamento de saída no ponto de interesse e volume.

5.1 Parâmetros Considerados

Para o projeto de microsistemas ETM é considerado o níquel como material (SIGMUND, 2001b), cujas propriedades são apresentadas na Tabela 1. Para uma discussão detalhada sobre materiais utilizados em microsistemas ETM recomenda-se Jonsmann (1999).

Tabela 1 – Propriedades do Níquel

Propriedade (Unidade SI)	Valor
Condutividade elétrica (S/m)	$6,4 \times 10^6$
Condutividade térmica (W/m K)	90,7
Calor específico (J/kg K)	456
Densidade (kg/m ³)	8890
Módulo de Young (Pa)	2×10^{11}
Módulo de Poisson	0,31
Coefficiente de expansão térmica (1/K)	15×10^{-6}

Fonte: Sigmund (2001b), ASM International Handbook Committee (1990).

Além das propriedades de material, são exigidos outros parâmetros relacionados com as condições de contorno e com o MOT, listados na Tabela 2. Cabe esclarecer que a voltagem

de excitação é selecionada para ser baixa com a finalidade de evitar tanto correntes elevadas quanto não-linearidades no comportamento do microsistema considerado.

Tabela 2 – Condições de contorno

Descrição (Unidade)	Valor
Voltagem de excitação (V)	0,2
Temperatura ambiente (K)	300
Coefficiente de convecção (W/m ² K)	18,7 x 10 ³

Fonte: Rubio (2005); Jonsmann, Sigmund e Bouwstra (1999a).

Alguns dos parâmetros, como por exemplo, o raio do filtro, pesos das funções de penalização e o tempo do estado transiente, variam de acordo com o tipo de problema analisado e são especificados no próprio enunciado do exemplo apresentado. Além disso, para outros parâmetros, como fatores de penalização (ou simplesmente penalizadores, ver seção 5.5 para a discussão relacionada com os valores utilizados) e a rigidez K da peça atuada, consideram-se inicialmente os valores recomendados por Rubio (2005) sendo posteriormente ajustados a partir dos resultados obtidos neste trabalho, com a finalidade de remover os problemas de instabilidades inerentes ao problema do MOT. A estimativa do tempo transiente é feita através da análise dinâmica do resultado obtido na otimização estática. Para isso é utilizado o software COMSOL Multiphysics e é aplicado o procedimento descrito na seção 3.7. As características do microcomputador utilizado nas simulações são exibidas na Tabela 3. O custo computacional de cada simulação foi avaliado empregando os comandos *tic* e *toc* de MATLAB.

Tabela 3 – Características do microcomputador utilizado nas simulações

Descrição	Valor (Unidade)
Processador	Intel Core i7 950 @ 3.07GHz
Sistema operacional	Windows 7 Professional @ 64 bits
Unidade de disco rígida	ST31000528AS ATA 1TB
Memória RAM	12 GB
Placa de vídeo	NVIDIA GeForce GTS 450 1GB

Os resultados apresentados nos projetos considerados nesse trabalho foram codificados de modo que o leitor possa identificá-los facilmente. Os modelos são

identificados por seis letras no formato XXX-YYY, onde os três primeiros caracteres correspondem ao algoritmo de otimização (PLS ou MMA) e os três seguintes definem o tipo de otimização (estática ou dinâmica), sendo que, para o caso dinâmico o modelo é identificado pelo algoritmo de otimização no tempo (HHT ou PTI). Os casos possíveis para a codificação são:

- PLS-EST: Projeto realizado com a PLS seguindo um enfoque de otimização estática.
- PLS-HHT: Projeto realizado com a PLS seguindo um enfoque de otimização dinâmica com HHT- α como algoritmo de integração no tempo.
- PLS-PTI: Projeto realizado com a PLS seguindo um enfoque de otimização dinâmica com PTI como algoritmo de integração no tempo.
- MMA-EST: Projeto realizado com o MMA seguindo um enfoque de otimização estática.
- MMA-HHT: Projeto realizado com o MMA seguindo um enfoque de otimização dinâmica com HHT- α como algoritmo de integração no tempo.
- MMA-PTI: Projeto realizado com o MMA seguindo um enfoque de otimização dinâmica com PTI como algoritmo de integração no tempo.

5.2 Microsistema Tipo Pistão

Considere o projeto de um microposicionador no domínio fixo de projeto mostrado na Figura 40. Procura-se a topologia ótima que maximize o deslocamento na direção indicada e cujo tempo de resposta seja o mínimo possível, cujo movimento em operação seja semelhante a um pistão. Na figura mencionada anteriormente, são definidas as dimensões do domínio de projeto e as condições de contorno para o problema. Os dados adicionais requeridos para a otimização, diferentes dos indicados nas tabelas da seção 5.1, são mostrados na Tabela 4.

Figura 40 – Domínio de projeto e condições de contorno para o microsistema tipo pistão

Tabela 4 – Dados adicionais exigidos no MOT para o problema do microsistema tipo pistão

Descrição (Unidade)	Valor
Rigidez da peça atuada K (kN/m)	100
Número de elementos	1600
Duração do estado transiente (ms)	40
Número de passos de integração no tempo	20
Espessura (μm)	150
Volume do domínio de projeto (mm^3)	2,4
Restrição de volume (%)	30
Valor inicial das variáveis de projeto	0,3
Raio do filtro (Equivalente em número de elementos vizinhos)	2
Imposição de simetria	Sim

5.2.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes

Os resultados mostrados nesta seção foram obtidos com o conjunto de fatores de penalização mostrados na Tabela 29. Na Tabela 5, são expostos os valores dos pesos (ver eq.(151)) utilizados para as funções de penalização das instabilidades numéricas. Na Figura 41 são mostradas as topologias finais resultantes do processo de otimização, onde é notado

que cada solução possui uma quantidade pequena de variáveis de projeto intermediárias e nenhuma região com instabilidade de tabuleiro, levando à conclusão de que as soluções para contornar as instabilidades numéricas foram bastante efetivas, uma vez que o processo de geração de uma topologia 0-1 é facilitado.

Tabela 5 – Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição	PLS			MMA		
	EST	HHT	PTI	EST	HHT	PTI
Peso para a função de penalização das variáveis de projeto intermediárias w_1	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-8}	1×10^{-9}	1×10^{-9}
Peso para a função de penalização da instabilidade de tabuleiro w_2	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-6}	1×10^{-6}	1×10^{-6}

*Observação: O peso para a função F_{ETM}^{lin} na eq.(151) é igual à unidade.

Na Figura 42, são observadas as topologias 0-1 ou topologias filtradas, sendo o primeiro passo do pós-processamento. Um fato para ressaltar nessa figura é que as topologias obtidas com PLS (figuras *a*, *b* e *c*) apresentam um tipo de “cabeça” no seu extremo direito, que cresce uma vez que os membros perto dos apoios diminuem em largura. Com os modelos feitos pelo MMA (figuras *d*, *e* e *f*), a “cabeça” é mais uniforme, observando mudanças basicamente nas proximidades dos apoios. As topologias obtidas depois da etapa de pós-processamento são mostradas na Figura 43.

Na Figura 44 e na Figura 45, são exibidas as curvas de convergência para a função objetivo e a restrição de volume. Nas curvas para a função objetivo, é observado que no problema dinâmico a convergência é mais lenta do que no seu semelhante estático, situação que pode ser causada por um pobre ajuste (pela aproximação linear) das sensibilidades calculadas no enfoque dinâmico devido à discretização da dimensão tempo (ver APÊNDICE I). Além disso, a convergência do MMA, embora possa oferecer melhores resultados do que a PLS, é também lenta, uma vez que a aproximação do problema para ser resolvido é convexa, percebendo, então, que o problema é altamente não-convexo, e em alguns casos, instável numericamente, devido à inclusão de fenômenos como a transferência de calor por convecção, situação reportada por Bruns (2007).

Figura 41 – Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Figura 42 – Topologias filtradas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Figura 43 – Topologias interpretadas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Na Figura 45, nota-se que a restrição de volume está ativa no caso PLS-EST, situação ressaltada por Sigmund (2001b) considerando uma análise estática, já que, para maximizar a função objetivo, é exigida a maior quantidade de material quando a restrição de volume é de desigualdade com um limite máximo fixo arbitrário. Esse fato também pode ser atribuído ao problema dinâmico PLS-PTI, quando considerado como uma soma ponderada de problemas estáticos. Nos casos restantes, a restrição não está ativa considerando assim, o que pode ser atribuído à imposição de simetria na solução, alterando a sua trajetória e levando-a para um mínimo local. Sigmund (2001b) também adverte que a restrição de volume produz estruturas formadas por barras finas e membros estreitos, resultado que pôde ser comprovado nos casos estudados. Na Tabela 6 são mostrados os valores mínimos das variáveis de projeto e o custo computacional em horas das simulações correspondentes aos casos considerados de otimização. Nessa tabela, é observado que as simulações dinâmicas requerem um considerável número de horas para chegar a um resultado, incrementando o custo em relação aos resultados estáticos em 120 vezes e mais. Porém, a discretização do modelo e do tempo transiente foi feita seguindo as recomendações do APÊNDICE I com o objetivo de obter uma solução de compromisso em termos de precisão e custo computacional.

Tabela 6 – Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS			MMA		
	EST	HHT	PTI	EST	HHT	PTI
Valores mínimos das variáveis de projeto	2×10^{-3}	3×10^{-2}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	3×10^{-2}	5×10^{-3}
Custo computacional (h)	0,024	16,64	26,08	0,14	16,94	21,45

Figura 44 – Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Os valores mínimos das variáveis de projeto foram configurados de acordo com testes prévios às simulações, com a finalidade de evitar instabilidades numéricas pela formação de matrizes singulares do MEF. Quando utilizado o método de integração HHT, o valor mínimo das variáveis de projeto deve ser incrementado em quase uma ordem de grandeza, podendo induzir erros numéricos consideráveis quando existir um importante desvio entre o modelo real e o ajustado com o método por aproximações lineares. Já com o PTI, a aproximação

exponencial reduz a probabilidade de obter erros numéricos excessivos por ajustar-se de melhor maneira ao modelo real, uma vez que seja selecionado um número adequado de passos de integração.

Figura 45 – Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Na Tabela 7, são registrados os valores do deslocamento para as diferentes etapas da implementação numérica, com o objetivo de observar a variação da resposta quando gerada a topologia 0-1 ou topologia filtrada a partir do resultado direto do MOT. Assim mesmo, quando utilizada a topologia filtrada para definir a topologia interpretada mediante o algoritmo de interpretação de forma. Quando utilizada a PLS, os valores de deslocamento da topologia filtrada estão em torno de 0,9 a 0,95 vezes o valor do deslocamento da topologia resultante do MOT, enquanto que para o MMA, o intervalo diminui de 0,85 a 0,9 vezes em relação ao valor antes mencionado. O fato anterior pode ser atribuído à lenta convergência do MMA que oferece resultados finais com valores de variáveis de projeto menores do que as topologias resultantes da PLS. Quando são geradas as topologias interpretadas, os valores de

deslocamento apresentam diferenças menores do que 16% para a otimização estática e utilizando o método HHT, enquanto que para o modelo empregando o método PTI, a diferença aumenta para mais do que 20% em relação à resposta direta do MOT. As diferenças observadas são devidas aos critérios de geração de pontos de contorno descritas na seção 4.10.2 e que variam de acordo à forma da topologia. Não obstante, as considerações finais de seleção do microsistema dependerão das características conjuntas de deslocamento e velocidade resposta, porém os melhores resultados do processo de otimização foram alcançados empregando o método de integração PTI. Dessa forma é reiterado que a aproximação exponencial do problema transiente térmico é adequada para a modelagem e cálculo de sensibilidades no problema de otimização de microsistemas ETM considerando um enfoque dinâmico.

Tabela 7 – Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes

Topologia	Deslocamento de Saída em μm											
	PLS						MMA					
	EST	$\Delta\%$ MOT	HHT	$\Delta\%$ MOT	PTI	$\Delta\%$ MOT	EST	$\Delta\%$ MOT	HHT	$\Delta\%$ MOT	PTI	$\Delta\%$ MOT
MOT	2,63	0	2,67	0	3,27	0	3,45	0	3,23	0	4,04	0
Filtrada	2,47	-6,1	2,46	-7,7	2,98	-8,9	2,99	-13,4	2,79	-13,5	3,57	-11,6
Interpretada	2,43	-7,6	2,62	-1,8	2,59	-20,9	2,93	-15,2	2,74	-15,2	2,75	-31,9

Além dos resultados mostrados, foram comparadas as distribuições de temperatura e da componente de deslocamento na direção x das topologias interpretadas e que são vistas na Figura 46 e na Figura 47. Note que as regiões próximas dos apoios são regiões ativas, enquanto as regiões afastadas dos apoios agem como passivas. O termo ativo e passivo refere-se à presença de altas ou baixas temperaturas, respectivamente, que se refletem na magnitude dos deslocamentos. Esses comportamentos também foram detectados por Rubio et al. (2009). Um fato que pode ser percebido na Figura 47 é que os microsistemas com os maiores deslocamentos possuem membros mais estreitos que vão aquecer muito mais rápido do que aqueles com membros mais largos. Portanto, um aumento na velocidade de resposta pode ser atribuído a esse fato.

Figura 46 – Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

As curvas da Figura 48 apoiam o mencionado anteriormente, uma vez que a topologia PLS-PTI, apresenta uma região ativa com membros mais estreitos comparados com a topologia PLS-EST, sendo a sua constante de tempo a menor entre todos os casos analisados. Todos os resultados correspondentes às topologias interpretadas do microsistema tipo pistão são resumidos nas curvas de resposta da Figura 48 e nas características mostradas na Tabela 8. O modelo MMA-EST embora possua o maior deslocamento de saída entre os casos analisados, a sua velocidade de resposta é superada pelo caso PLS-PTI. Além, disso ambos os casos dinâmicos rodados com MMA, somente são mais rápidos que o modelo PLS-HHT.

Assim, o algoritmo de otimização MMA pondera com maior relevância a maximização do deslocamento ao invés da minimização do tempo de resposta, toda vez que o problema dinâmico de otimização é visto como a maximização da área sob a curva do deslocamento no tempo. O resultado do problema de maximização dessa área deveria atingir os dois objetivos simultaneamente, porém, em alguns casos não é possível já que os microsistemas devem estar sujeitos imperativamente às equações de equilíbrio. Sob esse critério as melhores respostas obtidas obedecem àquelas geradas com a PLS, por poderem ser

ajustadas com maior precisão ao modelo não-linear de microsistemas ETM. No entanto, um ajuste na combinação dos penalizadores empregados no MMA, poderia aprimorar os resultados obtidos com esse algoritmo de otimização.

Figura 47 – Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI; (d) MMA-EST; (e) MMA-HHT; (f) MMA-PTI

Na Tabela 8, verifica-se que a otimização dinâmica empregando a combinação PLS-PTI apresenta melhores resultados do que a otimização estática PLS-EST, fato refletido num incremento do deslocamento de saída u_{out} (ver Figura 48) de 6,5%, e num decremento da constante de tempo de 25,5%, embora o volume final aumentasse 5,9%. A opção PLS-HHT, embora, ultrapasse em 0,03 μm a opção PLS-PTI, possui uma constante de tempo 4,5% maior em relação a essa mesma solução. A alternativa PLS-PTI ponderando a maior velocidade de resposta poderia ser implementada para o problema do microposicionador. Sendo selecionada a opção PLS-PTI como solução do problema é importante fazer um estudo de sensibilidade da solução para observar o comportamento do microsistema com mais detalhamento.

Tabela 8 – Resultados finais para as topologias interpretadas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS			MMA		
	EST	HHT	PTI	EST	HHT	PTI
Volume final (mm ³)	0,658	0,582	0,698	0,513	0,564	0,576
Porc. do volume inicial (%)	27,43	24,24	29,06	21,37	23,49	23,99
Constante de tempo τ (ms)	10,52	8,19	7,84	8,18	8,70	8,60
Deslocamento de saída (μm)	2,43	2,62	2,59	2,93	2,74	2,75

Figura 48 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes

5.2.2 Sensibilidade da solução ótima em relação ao raio de arredondamento

A distribuição de tensão mecânica de von Mises é mostrada na Figura 49, onde pode ser identificado um ponto crítico com um valor de tensão de 663,8 MPa, ultrapassando o valor do limite de escoamento que para o material considerado é de 450 MPa (FRITZ et al., 2002). O algoritmo desenvolvido neste trabalho pode conduzir para soluções com valores de tensão mecânica elevada, dado que pode ser obtido um maior deslocamento em detrimento da tensão mecânica quando os membros chegam a ser cada vez mais finos.

Figura 49 – Tensão mecânica de von Mises máxima para a solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Além disso, o problema de otimização não apresenta restrições nos valores de tensão mecânica, pelo fato de que esse problema está ainda em aberto em OT e o custo computacional é incrementado quando são incluídas esse tipo de restrições que envolvem variáveis secundárias (ou quantidades de natureza local: densidade de corrente, fluxo de calor ou tensão mecânica). Adicionalmente, os valores máximos dessas variáveis deslocam-se através do domínio cada vez que é alterada a topologia durante o processo de otimização. Cabe ressaltar que essas variáveis somente são contínuas dentro de cada elemento finito podendo ser calculadas no centro do elemento, nos pontos da quadratura gaussiana ou serem ponderadas nos nós (BATHE, 1996).

As topologias interpretadas são arredondadas com raios correspondentes à metade da menor dimensão do elemento finito (ver 4.10.3), sendo neste caso 50 μm . Assim, foi realizado um estudo utilizando o MEF, variando o raio de arredondamento R_{ad} no ponto crítico e registrando tanto o valor do deslocamento de saída quanto o valor da tensão mecânica de Von Mises. Para o estudo, o raio R_{ad} foi incrementado em 12,5 μm , em um intervalo entre 10 μm e 200 μm . Os valores de deslocamento e tensão mecânica de von Mises resultantes da análise são mostrados na Figura 50 e Figura 51, respectivamente .

Figura 50 – Variação do deslocamento de saída vs raio de arredondamento no ponto crítico da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Como é esperado, a tensão mecânica de von Mises diminui na medida em que o raio de arredondamento é incrementado, chegando a um valor seguro acima de 135 μm (412.8 MPa, equivalente a uma redução de 37,81%, ver Figura 52), porém ao modificar a topologia, ela deixa de ser ótima. Assim, o deslocamento cai para um valor 2,581 μm , no entanto, a variação do deslocamento em todo o intervalo é de aproximadamente 0.7%. A velocidade de resposta apresenta um leve aprimoramento, passando de 7,84 ms para 7,16 ms representando uma diminuição de 8,67%. As curvas de resposta dos modelos considerados são mostrados na Figura 53.

Figura 51 – Variação da tensão mecânica de von Mises máxima vs raio de arredondamento no ponto crítico da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Figura 52 – Tensão mecânica de von Mises máxima no modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes para dois diferentes raios de arredondamento: (a) 50 μm ; (b) 135 μm

Figura 53 – Deslocamento de saída vs tempo para o modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes com raios de arredondamento de 50 μm e 135 μm

5.2.3 Sensibilidade da solução ótima em relação ao tamanho da “cabeça” na região passiva do microsistema

De outro lado, é interessante observar o comportamento do material acumulado na região passiva do microsistema, cuja forma é similar a uma “cabeça”. Assim, procura-se determinar se tal quantidade de material, que intuitivamente parece excessiva, é necessária e se for retirada como afetaria as características da topologia. Para esse fim, optou-se por reduzir a largura dessa região progressivamente e calcular o deslocamento de saída pelo MEF. As dimensões máximas e mínimas consideradas para a região do estudo estão na Figura 54. Cabe notar que a largura foi variada desde 0,05 mm até 0,1 mm, incrementando em cada análise 0,01 mm, e depois de 0,1 mm até 1,4 mm, aumentando-se de 0,1 mm. O resultado desse estudo é mostrado na Figura 55, onde é advertido que o deslocamento não varia de

forma considerável quando a largura da “cabeça” está no intervalo entre 0,2 mm e 1,4 mm. No entanto, quando há presença do degrau (linhas verdes na Figura 54, quando a largura é menor do que 0,2 mm) o deslocamento começa a diminuir rapidamente. Além de observar o deslocamento de saída, considerou-se prudente observar o comportamento da temperatura no ponto onde ele é estimado com a finalidade de conhecer se é afetado pela distribuição de temperatura em torno desse ponto.

Figura 54 – Dimensões da “cabeça” presente na solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Deste modo, foi observado que a temperatura varia próximo de 0,03% no intervalo da análise considerada (ver Figura 56), o que significa que essa região do microsistema tem uma geração de calor por unidade de volume quase nula e, portanto, não contribui de forma relevante ao deslocamento de saída. Levando em conta o enunciado anteriormente, pode sugerir-se que o deslocamento acima da largura de 0,2 mm oscila em torno de 2,6 μm e que a forma da resposta pode indicar instabilidade numérica do modelo pela convergência.

Consequentemente, se o critério for utilizar a menor quantidade de material possível no microsistema, poderia dizer-se que existe um volume mínimo que garante que a resposta esteja próxima de 2,59 μm como a resposta original, porém, novamente, deve ser avaliada a velocidade de resposta com o volume selecionado. Para determinar esse volume mínimo, foram utilizadas a Figura 55 e a Figura 57, determinando a largura mínima do membro dianteiro do microsistema como 0,2 mm e o volume associado a esse parâmetro, sendo que o volume final do microsistema resultante é 0,1433.

Figura 55 – Variação do deslocamento de saída vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Figura 56 – Variação da temperatura de saída vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Figura 57 – Variação do volume total vs largura da “cabeça” da solução PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes

Estabelecida a topologia com o volume mínimo, procede-se à caracterização numérica, encontrando que o deslocamento de saída é 2,58 μm (0,39% menor do que a topologia original) e a constante de tempo é igual a 7,56 ms (3,57% menor do que a topologia original). Na Figura 58, foram plotados os resultados de deslocamento para a análise transiente das topologias original e modificada para um volume mínimo de material, onde é notada uma melhora na constante de tempo do microsistema, sem variação significativa do deslocamento de saída e por sua vez, reduzindo 50,69% do material em relação à topologia original. Afinal, pode afirmar-se que o material em excesso no microsistema contribui somente na sua rigidez, pelo fato de que o deslocamento quase não muda, quando a largura é mantida acima de 0,2 mm. Além disso, a variação da temperatura é muito baixa para incidir decisivamente no deslocamento final da estrutura. Assim, o algoritmo de otimização considera que esse material, que não pode ser removido devido à restrição de volume, deve ser localizado na região passiva do microsistema para tentar aumentar a rigidez, mas como a excitação não muda, o deslocamento imposto à peça de trabalho permanece quase constante. Se a rigidez daquela parte decresce para formar um degrau (quando a largura da região estudada encontra-se abaixo de 0,2 mm) o deslocamento diminui, já que a rigidez também decresce e o microsistema desloca a peça de trabalho uma quantidade menor do que alcançado com a

topologia original. Afinal, a "cabeça" não é necessária, podendo ter-se uma topologia com menor volume do que a resposta do processo de otimização.

Figura 58 – Deslocamento de saída vs tempo para o modelo interpretado PLS-PTI do problema do microsistema tipo pistão obtido utilizando fatores de penalização uniformes com larguras da “cabeça” de 0,2 mm e 1,4 mm

5.2.4 Sensibilidade da solução ótima em relação ao valor especificado da restrição de volume

Foi analisada a influência da variação da restrição de volume nas respostas das topologias. As restrições de volume consideradas foram 10%, 14,33%, 20%, 30% e 40%. A restrição de 14,33% é introduzida para observar o comportamento da topologia resultante do processo de otimização, e assim compará-lo ao comportamento da topologia obtida por subtração arbitrária de material como foi considerado na seção 5.2.3. Na Figura 59, são mostradas as topologias finais resultantes do processo de otimização na análise dinâmica

empregando o algoritmo de integração no tempo PTI. Na Figura 60, são observadas as topologias 0-1 ou topologias filtradas, enquanto que as topologias obtidas depois da etapa de pós-processamento são mostradas na Figura 61. As topologias conseguidas com o MOT apresentam poucas escalas de cinza facilitando a obtenção de topologias 0-1.

Figura 59 – Topologias PLS-PTI resultantes do MOT do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume

Figura 60 – Topologias PLS-PTI filtradas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume

Figura 61 – Topologias PLS-PTI interpretadas do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes para diferentes restrições de volume

Na Tabela 9, são registrados os valores do deslocamento para as diferentes etapas da implementação numérica. Os valores de resposta das topologias filtradas variam no intervalo entre 0,89 e 0,99 vezes o valor do deslocamento da topologia resultante do MOT. Quando são geradas as topologias interpretadas os valores de deslocamento apresentam diferenças até de 25% em relação à resposta direta do MOT. De novo, essas diferenças são devidas aos critérios

de geração de pontos de contorno descritas na seção 4.10.2. A aparição da "cabeça" foi observada quando a restrição de volume é maior ou igual do que 20%, no entanto para restrições menores foram observados arranjos de material diferentes à formação daquela "cabeça". No caso da restrição de volume de 10% a topologia possui um membro semelhante a uma coluna esbelta agindo como região passiva.

Tabela 9 – Comparação dos resultados de deslocamento para a opção PLS-PTI do microsistema tipo pistão obtida utilizando fatores de penalização uniformes nas diferentes etapas da implementação numérica considerando diferentes restrições de volume

Topologia	Deslocamento de Saída em μm									
	10%	$\Delta\%$ MOT	14,33%	$\Delta\%$ MOT	20%	$\Delta\%$ MOT	30%	$\Delta\%$ MOT	40%	$\Delta\%$ MOT
MOT	3,24	0	2,82	0	3,61	0	3,27	0	3,22	0
Filtrada	3,21	-1,0	2,53	-10,2	3,18	-11,7	2,98	-8,9	2,86	-11,2
Interpretada	2,65	-18,3	2,54	-9,8	2,68	-25,7	2,59	-20,9	2,55	-20,7

Já para o caso com valor de 14,33%, a topologia tem uma estrutura mais complexa que divide a rigidez da parte passiva em dois membros, gerados pelo algoritmo de otimização de modo que possa seguir maximizando a função objetivo. Para a restrição de volume de 20%, o contorno não muda circunstancialmente e a restrição de volume é atingida preenchendo de material os espaços gerados quando a restrição é de 14,33% do volume inicial. Para as restrições de volume maiores começa a crescer o tamanho da "cabeça" sendo que o volume no caso da restrição de 40% converge para 30% do volume inicial.

Os deslocamentos das topologias finais estão num intervalo entre 2,54 μm e 2,68 μm , sendo que o valor máximo é alcançado quando a restrição de volume é 20%, enquanto que o valor mínimo foi produzido com a restrição de volume de 14,33%. Portanto, poderia ser dito que o volume máximo ótimo (V^*) converge para 20% do volume inicial. Sugere-se, para verificar o valor do volume ótimo antes indicado, formular o problema de otimização retirando a restrição de volume, com a finalidade de comparar o volume final alcançado nesse problema e o determinado nesta análise.

Figura 62 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados para o problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização uniformes e diferentes restrições de volume

Na Figura 62 foram plotadas as curvas de deslocamento no tempo das topologias obtidas quando variada a restrição de volume, onde pode ser observado que o melhor desempenho foi alcançado com uma restrição de volume de 20%. O pior comportamento foi apresentado pela opção com restrição de volume de 14,33%. Os resultados de todas as alternativas consideradas foram registrados na Tabela 10. Quando comparado o desempenho da topologia encontrada com o algoritmo de otimização para uma restrição de volume de 14,33% e aquela obtida arbitrariamente por subtração de material (ver Figura 58), os resultados de deslocamento e da velocidade de resposta foram menores para a topologia encontrada com o algoritmo de otimização, cabendo a possibilidade de que a solução seja um mínimo local.

Tabela 10 – Resultados finais para as topologias interpretadas PLS-PTI do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização uniformes considerando diferentes restrições de volume

Descrição (Unidade)	10%	14,33%	20%	30%	40%
Volume final (mm ³)	0,234	0,361	0,462	0,698	0,715
Porc. do volume inicial (%)	9,74	15,06	19,24	29,06	29,81
Constante de tempo τ (ms)	7,81	9,20	7,56	7,84	7,79
Deslocamento de saída (μ m)	2,65	2,54	2,68	2,59	2,55

5.2.5 Resultados com Fatores de Penalização Derivados do Estudo Analítico

Os fatores de penalização utilizados para a obtenção dos resultados desta seção são os apresentados na Tabela 31. Na Tabela 11, são comparados os pesos empregados nas funções de penalização das instabilidades numéricas para os diferentes casos de penalização.

O peso w_1 correspondente à função de penalização das variáveis de projeto intermediárias foi maior em uma ordem de grandeza, quando utilizados os fatores de penalização encontrados no estudo analítico. No entanto, para o peso w_2 que pondera à função de penalização da instabilidade de tabuleiro, foi sempre menor na mesma proporção para o mesmo conjunto de penalizadores mencionados anteriormente. Isso quer dizer que uma seleção adequada dos fatores de penalização pondera fortemente a função objetivo original (eq.(114)), sendo assim desnecessárias as funções de penalização na medida em que os pesos tendem para zero.

Além disso, sendo a função utilizada no processo de otimização multi-objetivo, o conjunto infinito de soluções ótimas ou ótimo Pareto conterà imperativamente soluções que melhoram um objetivo, porém simultaneamente piorará qualquer outro (RAO, 2009; HAFTKA; GÜRDAL, 1992). Portanto, a função objetivo recebe uma melhor ponderação conduzindo para soluções com menor quantidade de instabilidades numéricas, fato verificado na Figura 63.

Figura 63 – Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 64 – Topologias filtradas problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 65 – Topologias interpretadas do problema do microsistema tipo pistão obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Tabela 11 – Comparação dos pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão

Descrição	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização		
	Uniformes			Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Peso para a função de penalização das variáveis de projeto intermediárias w_1	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}	8×10^{-8}	8×10^{-8}	8×10^{-8}
Peso para a função de penalização da instabilidade de tabuleiro w_2	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-10}	1×10^{-10}	1×10^{-10}

*Observação: O peso para a função F_{ETM}^{lin} na eq.(151) é igual à unidade.

Na Figura 64 são mostradas as topologias filtradas enquanto que na Figura 65 são apresentadas as topologias resultantes da aplicação do algoritmo de interpretação de forma. Na Tabela 12, são comparados os valores mínimos das variáveis de projeto e o custo computacional em horas das simulações correspondentes aos diferentes casos de penalização considerados. Pode ser notado que o ajuste dos fatores de penalização contribuiu a uma velocidade de convergência maior da função objetivo, fato refletido na diminuição do custo computacional nos casos dinâmicos em mais de 27% em relação ao enfoque utilizando penalizadores com valores uniformes. Adicionalmente, as variáveis de projeto mínimas foram diminuídas entre 12 e 13 vezes ordens de grandeza, assim, o material vazio ($\rho_e = 0$) é modelado com uma maior precisão.

Tabela 12 – Comparação dos valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão

Descrição (Unidade)	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização		
	Uniformes			Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Valores mínimos das variáveis de projeto	2×10^{-3}	3×10^{-2}	5×10^{-3}	1×10^{-15}	1×10^{-15}	1×10^{-15}
Custo computacional (h)	0,024	16,64	26,08	0,024	12,03	18,84

Em relação às curvas de restrição de volume, é visto que as curvas são mais suaves que aquelas obtidas com penalizadores uniformes. Além disso, a restrição não está ativa, podendo novamente dizer que a solução foi levada para um mínimo local quando imposta uma condição de simetria na topologia. Igualmente, foram evidenciadas a presença de barras finas e membros estreitos, especialmente nos casos dinâmicos. Comparando os resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica, é visto que os resultados são menores quando utilizados os fatores de penalização resultantes do estudo analítico, já que também foram obtidas temperaturas menores (ver Figura 68 e Figura 69). Contudo, as respostas após pós-processamento melhoram nos casos dinâmicos, sendo que o processo de interpretação nos casos PLS-HHT forneceu as respostas com as menores diferenças (ver Tabela 7 e Tabela 13). As respostas das topologias filtradas em alguns casos coincidiram, sendo atribuído à redução das instabilidades numéricas por conta do ajuste dos fatores de penalização.

Figura 66 – Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 67 – Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Tabela 13 – Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão

Topologia	Deslocamento de Saída em μm obtido com a PLS								
	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização Derivados do Estudo					
	Uniformes			Analítico					
	EST	HHT	PTI	EST	$\Delta\%$ MOT	HHT	$\Delta\%$ MOT	PTI	$\Delta\%$ MOT
MOT	2,63	2,67	3,27	2,24	0	2,47	0	3,10	0
Filtrada	2,47	2,46	2,98	2,03	-9,3	2,47	0	3,10	0
Interpretada	2,43	2,62	2,59	2,11	-6,0	2,51	1,6	2,55	-17,9

Figura 68 – Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 69 – Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Outro fato relevante nas respostas foi que as topologias com a combinação de penalizadores derivada do estudo analítico, possuem membros mais largos do que aquelas obtidas com fatores de penalização uniformes. Assim, as constantes de tempo podem alcançar diferenças de até 26% como no caso PLS-PTI (ver Tabela 14). No entanto, essa opção considerando a combinação de penalizadores resultante do estudo analítico, seria a mais conveniente para implementar como solução do problema do microsistema tipo pistão, dado que o deslocamento de saída u_{out} é 20,9% maior e a constante de tempo 16,6% menor do que o seu semelhante obtido pelo enfoque de otimização estático (ver Figura 70).

Tabela 14 – Comparação dos resultados finais das topologias interpretadas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema do microsistema tipo pistão

Descrição (Unidade)	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização		
	Uniformes			Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Volume final (mm ³)	0,658	0,582	0,698	0,642	0,633	0,621
Porc. do volume inicial (%)	27,43	24,24	29,06	26,77	26,37	25,87
Constante de tempo τ (ms)	10,52	8,19	7,84	11,92	10,09	9,94
Deslocamento de saída (μm)	2,43	2,62	2,59	2,11	2,51	2,55

Figura 70 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo pistão utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico

5.3 Projeto de Microgarra

As microgarras são aplicações potenciais dos microsistemas ETM, já que podem ser utilizadas em micromontagem, microposicionamento e micromanipulação em aplicações médicas e biológicas (ANDERSEN et al., 2009; SARDAN et al., 2008a; ZEMAN; BORDATCHEV; KNOPF, 2006; TSAI; LEI; SUDIN, 2005). O objetivo da microgarra é poder segurar um objeto em um ponto dado da estrutura quando aplicada uma tensão elétrica nos apoios da estrutura. O problema tratado neste caso é a obtenção da topologia ótima com o menor tempo de resposta possível que segure uma partícula de diâmetro X (ver Figura 71), dadas as dimensões do domínio de projeto e condições de contorno (ver Figura 72).

Figura 71 – Problema de microgarra ETM

Para facilitar a análise é considerado que a microgarra será composta por dois atuadores ETM espelhados (Atuador 1 e 2), separados uma distância Y_{ajust} variável, de modo que, se é mudado o tamanho do objeto que se procura segurar, o atuador pode ser utilizado novamente. Esse paradigma de projeto foi encontrado em Sardan et al. (2008a, 2008b) e Andersen et al. (2009). Os dados adicionais requeridos para a otimização, diferentes dos indicados nas tabelas da seção 5.1, são mostrados na Tabela 15. Os valores dos pesos (ver eq.(151)) utilizados para as funções de penalização das instabilidades numéricas são registrados na Tabela 16. O algoritmo de otimização utilizado é a PLS, uma vez que o MMA apresenta uma lenta convergência.

Figura 72 – Domínio de projeto e condições de contorno para a microgarra ETM

Tabela 15 – Dados adicionais requeridos no MOT para o problema da microgarra

Descrição (Unidade)	Valor
Rigidez da peça atuada K (kN/m)	10
Número de elementos	1000
Duração do estado transiente (ms)	1
Número de passos de integração no tempo	20
Espessura (μm)	30
Volume do domínio de projeto (mm^3)	$1,92 \times 10^{-4}$
Restrição de volume (%)	30
Valor inicial das variáveis de projeto	0,3
Raio do filtro (Equivalente em número de elementos vizinhos)	3
Imposição de simetria	Não

5.3.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes

Os resultados mostrados nessa seção foram obtidos com o conjunto de fatores de penalização mostrados na Tabela 29. Na Tabela 16 são mostrados os valores dos pesos (ver eq.(151)) utilizados para as funções de penalização das instabilidades numéricas. As topologias finais resultantes do processo de otimização são mostradas na Figura 73, onde é observado que as variáveis de projeto intermediárias aparecem em pequenas porções e que as instabilidades de tabuleiro não foram totalmente eliminadas, apesar de terem sido procurados pesos para as funções de penalização que não afetassem drasticamente a função objetivo, dificultando desse modo a geração de topologias 0-1.

Tabela 16 – Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Peso para a função de penalização das variáveis de projeto intermediárias w_1	$3,8 \times 10^{-8}$	5×10^{-11}	5×10^{-11}
Peso para a função de penalização da instabilidade de tabuleiro w_2	$7,8 \times 10^{-8}$	2×10^{-9}	2×10^{-9}

*Observação: O peso para a função F_{ETM}^{lin} na eq.(151) é igual à unidade.

Na Figura 74, são mostradas as topologias filtradas, revelando que os resultados são muito próximos, porém uma visão detalhada mostra que a região próxima dos apoios as diferencia totalmente. Na Figura 75, são exibidas as topologias obtidas depois da etapa de pós-processamento.

Figura 73 – Topologias resultantes do MOT do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 74 – Topologias filtradas do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 75 – Topologias interpretadas do problema da microgarra obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

As curvas de convergência para a função objetivo e a restrição de volume são encontradas na Figura 76 e na Figura 77, respectivamente. O comportamento das curvas da função objetivo é bastante instável, fato refletido na quantidade de instabilidades de tabuleiro presentes nas topologias resultantes do processo de otimização. Isso pode ser devido às restrições que se tornaram muito fortes para serem respeitadas pela PLS. Contudo, é observado que a convergência é rápida para os três casos considerados. De novo, como reportado por Sigmund (2001b), a restrição de volume produziu estruturas formadas por barras finas e membros estreitos. Os valores das variáveis de projeto mínimas e o custo computacional em horas das simulações dos casos considerados são mostrados na Tabela 17. Neste caso, pelo número de elementos, o incremento no custo computacional entre a otimização estática e dinâmica está entre 250 e 400 vezes aproximadamente, em relação ao tempo do caso estático. De outro lado, testes prévios determinaram o valor mínimo das variáveis de projeto, já que se observou que não apareceram problemas de singularidades numéricas.

Figura 76 – Curvas de convergência para a função objetivo do problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 77 – Curvas de convergência para a restrição de volume do problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Tabela 17 – Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Valores mínimos das variáveis de projeto	5×10^{-3}	5×10^{-2}	5×10^{-3}
Custo computacional (h)	0,017	4,37	6,81

Os valores do deslocamento para as diferentes etapas da implementação numérica são registrados na Tabela 18. Nessa tabela pode ser visto como o algoritmo de interpretação incide na resposta das topologias obtidas, uma vez que elas possuíam uma quantidade razoável de instabilidades numéricas. Assim, no processo de interpretação de forma é possível ter sido adicionado uma quantidade de material que afetou a resposta resultante da otimização, afastando-a do ponto ótimo calculado. O caso crítico é o modelo PLS-PTI cuja

interpretação piora de forma importante, exibindo uma resposta 68,4% menor do que o resultado direto do MOT. Contudo, os outros casos considerados apresentam diferenças de 26,2% (PLS-EST) e 4,6% (PLS-HHT).

Tabela 18 – Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes

Topologia	Deslocamento de Saída em μm					
	PLS-EST	$\Delta\%$ MOT	PLS-HHT	$\Delta\%$ MOT	PLS-PTI	$\Delta\%$ MOT
MOT	-1,14	0	-1,14	0	-2,28	0
Filtrada	-0,92	-19,4	-1,12	-2,4	-2,18	-4,6
Interpretada	-0,84	-26,2	-1,20	4,6	-0,72	-68,4

Figura 78 – Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 79 – Distribuição final do campo de deslocamentos na direção Y mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

De novo, as considerações finais de seleção do microsistema dependerão das características conjuntas de deslocamento e velocidade de resposta, no entanto, os melhores

resultados do processo de otimização foram alcançados empregando o método de integração PTI, confirmando que a aproximação exponencial do problema transiente térmico é apropriada para o problema de projeto de microsistemas ETM considerando uma análise dinâmica.

As distribuições de temperatura, da componente de deslocamento na direção y das topologias interpretadas, e as curvas de resposta no tempo são vistas na Figura 78, na Figura 79 e na Figura 80, respectivamente. Vendo as figuras anteriormente mencionadas, pode ser evidenciado que os membros estreitos contribuem com o aprimoramento das características do microsistema. O modelo PLS-HHT possui membros estreitos quase uniformes em toda a topologia, ao contrário do que acontece com os modelos restantes, onde a região central possui junções de membros finos e grossos. Na região ativa, os microsistemas apresentam os membros com a maior largura, porém a sua localização e a sua forma diferencia a sua resposta. Aqueles com membros mais uniformes e dispostos de modo que facilitem a passagem da corrente elétrica e aquecimento da estrutura terão a maior velocidade de resposta. No caso PLS-HHT, os membros quase-uniformes facilitam a passagem rápida da corrente e, além disso, expandem a região ativa, tendo assim maior material para deslocar e contribuir na resposta final. O caso PLS-PTI apresenta membros muito grossos e, portanto mais rígidos que por sua vez impedem que a região ativa seja maior, reduzindo desse modo o deslocamento gerado pelo microsistema.

Tabela 19 – Resultados finais para as topologias interpretadas da microgarra ETM obtidas utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Volume final (mm^3)	$6,02 \times 10^{-4}$	$5,55 \times 10^{-4}$	$5,97 \times 10^{-4}$
Porcentagem do volume inicial (%)	31,36	28,90	31,11
Constante de tempo τ (ms)	0,15	0,13	0,10
Deslocamento de saída (μm)	-0,84	-1,12	-0,72

Na Tabela 19, pode ser notado que o melhor modelo para implementar é a combinação PLS-HHT, já que o deslocamento de saída u_{out} (ver Figura 72) é incrementado um 41,8%, e a constante de tempo é diminuída um 13,3% em relação ao resultado da otimização estática (PLS-EST). Além disso, o volume final reduz-se em 7,8%. A alternativa PLS-PTI parece não

ser atrativa se é exigido um alto deslocamento das garrinhas, porém, numa aplicação onde a velocidade de resposta seja preponderante, poderia ser implementada como solução do problema. Contudo, poderia ser explorado um aprimoramento do algoritmo de interpretação de forma com a finalidade de explorar os melhores resultados da otimização alcançados com o algoritmo de integração no tempo PTI.

Figura 80 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização uniformes

5.3.2 Resultados com Fatores de Penalização Derivados do Estudo Analítico

Os resultados desta seção foram obtidos com os fatores de penalização resultantes do estudo analítico, apresentados na Tabela 31. Na Tabela 20 podem ser observados os valores dos pesos (ver eq.(151)) empregados nas funções de penalização das instabilidades numéricas. Nesse caso os pesos foram menores com exceção de w_2 correspondente à função de penalização da instabilidade de tabuleiro no caso estático. Isso quer dizer que a combinação

de fatores de penalização provoca que a função objetivo seja mais sensível e, por sua vez, ela caminhe na trajetória do ponto ótimo por ser ponderada com maior peso; chegando a soluções com menos instabilidades numéricas, fato que pode ser notado comparando as topologias da Figura 73 e a Figura 81. Consequentemente, o processo de geração das topologias 0-1 não foi dificultado. Como no caso da otimização utilizando fatores de penalização uniformes, as topologias filtradas (ver Figura 82) apresentam formas muito próximas mostrando diferenças especialmente na região próxima aos apoios. As topologias obtidas depois da etapa de pós-processamento podem ser encontradas na Figura 83.

Tabela 20 – Comparação dos pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra

Descrição	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização		
	Uniformes			Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Peso para a função de penalização das variáveis de projeto intermediárias w_1	$3,8 \times 10^{-8}$	5×10^{-11}	5×10^{-11}	1×10^{-8}	2×10^{-11}	2×10^{-11}
Peso para a função de penalização da instabilidade de tabuleiro w_2	$7,8 \times 10^{-8}$	2×10^{-9}	2×10^{-9}	3×10^{-6}	2×10^{-11}	3×10^{-11}

*Observação: O peso para a função F_{ETM}^{lin} na eq.(151) é igual à unidade

As curvas de convergência para a função objetivo e a restrição de volume são encontradas na Figura 84 e na Figura 85, respectivamente. O comportamento das curvas da função objetivo melhorou em relação às anteriores obtidas com fatores de penalização uniformes, em especial a alternativa de solução PLS-PTI, que tinha apresentado oscilações consideráveis. Assim, é percebida uma redução na quantidade de instabilidades de tabuleiro presentes nas topologias resultantes do processo de otimização, enquanto que a velocidade de convergência da função objetivo não é afetada significativamente. Do mesmo modo, como reportado por Sigmund (2001b), a restrição de volume produziu estruturas formadas por barras finas e membros estreitos. O valor mínimo das variáveis de projeto foi de 1×10^{-15} para todos os casos.

Figura 81 – Topologias resultantes do MOT obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 82 – Topologias filtradas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 83 – Topologias Interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

O incremento no custo computacional (ver Tabela 21) entre a otimização estática e dinâmica está entre 100 e 140 vezes aproximadamente, em relação ao tempo do caso estático, mostrando dessa forma o efeito da combinação adequada dos fatores de penalização e dessa forma, reduzindo em mais de 60% o custo computacional em relação ao enfoque utilizando penalizadores com valores uniformes.

Tabela 21 – Comparação dos valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra

Descrição (Unidade)	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização		
	Uniformes			Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Valores mínimos das variáveis de projeto	5×10^{-3}	5×10^{-2}	5×10^{-3}	1×10^{-15}	1×10^{-15}	1×10^{-15}
Custo computacional (h)	0,017	4,37	6,81	0,036	3,73	5,01

Figura 84 – Curvas de convergência para a função objetivo do problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Tabela 22 – Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra

Topologia	Deslocamento de Saída em μm obtido com a PLS								
	Fatores de Penalização			Fatores de Penalização Derivados do Estudo					
	Uniformes			Analítico					
	EST	HHT	PTI	EST	$\Delta\%$ MOT	HHT	$\Delta\%$ MOT	PTI	$\Delta\%$ MOT
MOT	-1,14	-1,14	-2,28	-2,02	0	-0,99	0	-2,81	0
Filtrada	-0,92	-1,12	-2,18	-0,94	-53,4	-1,01	1,8	-2,66	-5,5
Interpretada	-0,84	-1,20	-0,72	-0,91	-55,2	-1,05	6,1	-0,97	-65,4

Os valores do deslocamento para as diferentes etapas da implementação numérica são registrados na Tabela 22. Pode ser notado que o algoritmo de interpretação de forma influencia drasticamente na resposta da solução PLS-PTI, reduzindo-a em 65,4%, fato que

também foi percebido quando foram utilizados fatores de penalização uniformes. Portanto, os resultados sugerem que o algoritmo de pós-processamento dever ser ajustado para esse método, com a finalidade de obter respostas mais próximas das fornecidas pelas topologias resultantes do processo de otimização.

Figura 85 – Curvas de convergência para a restrição de volume do problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

As distribuições de temperatura, da componente de deslocamento na direção y das topologias interpretadas e as curvas de resposta no tempo são exibidas na Figura 86, na Figura 87 e na Figura 88, respectivamente. Comparando os resultados anteriores com as apresentados na seção 5.3.1, pode ser observado que utilizando um enfoque de penalização diferente, as respostas finais das topologias interpretadas não apresentaram diferenças consideráveis, porém na otimização nos casos PLS-EST e PLS-PTI as respostas de deslocamento aumentaram 77,0% e 22,9% respectivamente, não sendo assim para o caso PLS-HHT onde a resposta caiu um 13%. Além disso, o processo para obter as topologias filtradas foi facilitado graças à menor quantidade de instabilidades numéricas presentes nas topologias resultantes do processo de otimização.

Figura 86 – Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 87 – Distribuição final do campo de deslocamentos na componente Y mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Os resultados de deslocamento favoreceram ao modelo PLS-HHT sendo a alternativa PLS-EST a que forneceu a menor resposta. No entanto, essa última alternativa foi a mais rápida que os seus semelhantes obtidos pelo enfoque dinâmico de otimização. Isso pode acontecer toda vez que a função objetivo formulada para esse caso, não garanta que os requisitos de deslocamento e velocidade de resposta sejam atingidos simultaneamente pelo fato de que o problema de otimização dinâmico é enxergado como a maximização da área sob a curva de deslocamento no tempo. Deste modo, às vezes pode ser maximizado o deslocamento sem melhorar significativamente a constante de tempo. Contudo, para o caso da microgarra com os enfoques de penalização utilizados sempre foi obtido maior deslocamento com a opção PLS-HHT nas topologias interpretadas (ver Tabela 23).

Tabela 23 – Comparação dos resultados finais das topologias interpretadas para os diferentes conjuntos de fatores de penalização utilizados no problema da microgarra

Descrição (Unidade)	Fatores de Penalização Uniformes			Fatores de Penalização Derivados do Estudo Analítico		
	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Volume final (mm ³)	$6,02 \times 10^{-4}$	$5,55 \times 10^{-4}$	$5,97 \times 10^{-4}$	$6,06 \times 10^{-4}$	$5,86 \times 10^{-4}$	$5,90 \times 10^{-4}$
Porc. do volume inicial (%)	31,36	28,90	31,11	31,58	30,50	30,71
Constante de tempo τ (ms)	0,15	0,13	0,10	0,11	0,13	0,14
Deslocamento de saída (μm)	-0,84	-1,12	-0,72	-0,91	-1,05	-0,97

Figura 88 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema da microgarra utilizando fatores de penalização derivados do estudo analítico

5.4 Microsistema Inversor

Considere o projeto do atuador mostrado na Figura 89, o qual deve, por restrições de espaço, produzir um deslocamento não-intuitivo quando aplicada a tensão de excitação nos apoios. Com a tensão elétrica aplicada, é esperado que o microsistema se expanda, no entanto, é requerido que o microsistema desloque no sentido contrário à expansão produto da excitação térmica gerada pelo calor de Joule. Procura-se, então, a topologia ótima que maximize o deslocamento na direção indicada na figura mencionada anteriormente, cujo tempo de resposta seja o mínimo possível. Na figura antes mencionada, são definidas as dimensões do domínio de projeto e as condições de contorno para o problema.

Figura 89 – Domínio de projeto e condições de contorno para o microsistema tipo inversor

Os dados adicionais requeridos para a otimização, diferentes dos indicados nas tabelas da seção 5.1, são mostrados na Tabela 24. Do mesmo modo, na Tabela 25 são registrados os valores dos pesos (ver eq.(151)) utilizados para as funções de penalização das instabilidades numéricas. Para o processo de otimização é utilizado a PLS, já que o MMA apresenta uma convergência lenta.

Tabela 24 – Dados adicionais exigidos no MOT para o problema do microsistema tipo inversor

Descrição (Unidade)	Valor
Rigidez da peça atuada K (kN/m)	10
Número de elementos	2500
Duração do estado transiente (ms)	3,2
Número de passos de integração no tempo	20
Espessura (μm)	15
Volume do domínio de projeto (mm^3)	$3,75 \times 10^{-3}$
Restrição de volume (%)	25
Valor inicial das variáveis de projeto	0,25 (Na otimização estática)
	Topologia PLS-EST (Nas otimizações dinâmicas)
Raio do filtro (Equivalente em número de elementos vizinhos)	3
Imposição de simetria	Sim

5.4.1 Resultados com Fatores de Penalização Uniformes

Os fatores de penalização empregados para a obtenção dos resultados desta seção são mostrados na Tabela 29. Os pesos (ver eq.(151)) utilizados para as funções de penalização das instabilidades numéricas podem ser vistos na Tabela 25. Os pesos são valores próximos de zero, assim, a função objetivo recebe uma maior ponderação quando efetuada a otimização.

Nas topologias finais resultantes do processo de otimização (ver Figura 90), são observadas algumas regiões com variáveis de projeto intermediárias e, além disso, foram encontradas instabilidades de tabuleiro, principalmente nas junções dos “braços” que nascem na região central e terminam no ponto onde é exigido maximizar o deslocamento u_{out} . As junções antes mencionadas são semelhantes a uma articulação, como pode ser apreciado nas topologias deformadas da Figura 96. As topologias filtradas são exibidas na Figura 91, onde pode ser advertido que as topologias são compostas por uma região próxima dos apoios com forma de “C” invertida, duas “treliças” nos extremos da “C” invertida ocupando a região central e dois “braços” que com a região central dão lugar à formação de um pentágono. Esse

pentágono é o fundamento da movimentação do microsistema. As topologias obtidas depois da etapa de pós-processamento são mostradas na Figura 92.

Tabela 25 – Pesos das funções de penalização de instabilidades numéricas para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Peso para a função de penalização das variáveis de projeto intermediárias w_1	7×10^{-10}	1×10^{-10}	1×10^{-10}
Peso para a função de penalização da instabilidade de tabuleiro w_2	4×10^{-10}	1×10^{-10}	1×10^{-10}

*Observação: O peso para a função F_{ETM}^{lin} na eq.(151) é igual à unidade.

Figura 90 – Topologias resultantes do MOT do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 91 – Topologias filtradas do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 92 – Topologias interpretadas do problema do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 93 – Curvas de convergência para a função objetivo do problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

As curvas de convergência para a função objetivo e a restrição de volume são encontradas na Figura 93 e na Figura 94, respectivamente. Em relação à função objetivo, cabe

ressaltar a presença de um patamar no caso estático, pois, inicialmente, o microsistema tende a se expandir e, por conseguinte, a direção do deslocamento é contrária da desejada. No entanto, o algoritmo começa a reduzir o deslocamento chegando a valores próximos de zero entre as iterações 10 e 20 aproximadamente.

Figura 94 – Curvas de convergência para a restrição de volume do problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

A partir desse ponto, o algoritmo consegue distribuir material de modo que o deslocamento é invertido, até alcançar o valor de convergência. Observado esse comportamento e levando em conta o custo computacional elevado das otimizações dinâmicas, optou-se por dar como “chute” inicial das otimizações dinâmicas (PLS-HHT e PLS-PTI), os valores das variáveis de projeto obtidos na iteração final da topologia PLS-EST. Assim, o custo computacional pode ser reduzido como mínimo em 9 horas aproximadamente. A restrição de volume ficou ativa no caso estático, enquanto que para os casos dinâmicos, o

volume tende para o volume máximo permitido nas últimas iterações. Não obstante, as topologias apresentam barras finas e membros estreitos. Na Tabela 26, são registrados os valores das variáveis de projeto mínimas e o custo computacional em horas das simulações dos casos considerados. Apesar de que foi utilizado um “chute” inicial de uma topologia finalizada, o custo computacional é elevado, já que o incremento do tempo consumido nas simulações é mais de 340 vezes e mais de 500 vezes o tempo da otimização estática, no caso PLS-HHT e PLS-PTI respectivamente. Por outra parte, o valor mínimo das variáveis de projeto foi determinado com testes prévios, tomando como base, resultados em que não aparecem problemas de singularidades numéricas.

Tabela 26 – Valores mínimos das variáveis de projeto e custo computacional para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Valores mínimos das variáveis de projeto	1×10^{-2}	5×10^{-2}	1×10^{-2}
Custo computacional (h)	0,055	18,73	27,57

Na Tabela 27, são mostrados os valores do deslocamento para as diferentes etapas da implementação numérica. Novamente, é observado que embora alcançados melhores respostas com o método PTI na otimização, quando geradas as topologias interpretadas é apresentada uma diminuição da resposta final em até 42,5%. Entretanto, nos outros casos considerados é reduzida a resposta em 34,5% (PLS-EST) e 33,2% (PLS-HHT) por causa do emprego do algoritmo de interpretação de forma.

Tabela 27 – Comparação dos resultados de deslocamento nas diferentes etapas da implementação numérica para os diferentes casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes

Topologia	Deslocamento de Saída em μm					
	PLS-EST	$\Delta\%$ MOT	PLS-HHT	$\Delta\%$ MOT	PLS-PTI	$\Delta\%$ MOT
MOT	-0,55	0	-0,59	0	-0,79	0
Filtrada	-0,40	-26,8	-0,53	-10,4	-0,60	-24,5
Interpretada	-0,36	-34,5	-0,39	-33,1	-0,46	-42,5

As distribuições de temperatura, da componente de deslocamento na direção x das topologias interpretadas e as curvas de resposta no tempo são vistas na Figura 95, na Figura 96 e na Figura 97, respectivamente. Das figuras mencionadas anteriormente pode ser notado que embora as topologias apresentem temperaturas máximas muito próximas, a distribuição de material no domínio faz diferença nas características finais. Pode ser visto que o microsistemas PLS-EST teve uma tendência a acumular material no ponto de maximização do deslocamento, aumentando a rigidez da junção entre “braços”. Assim, o deslocamento de saída é afetado, registrando desse modo o menor valor entre todas as opções consideradas (ver Figura 97).

Figura 95 – Distribuição final de temperatura nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

Figura 96 – Distribuição final do campo de deslocamentos na direção X mostrando a estrutura deformada nas topologias interpretadas obtidas utilizando fatores de penalização uniformes: (a) PLS-EST; (b) PLS-HHT; (c) PLS-PTI

De outro lado, foi visto que, na medida em que as junções entre membros possuam menos material, o microsistema deslocará uma quantidade maior toda vez que a junção tende

à forma de uma articulação móvel, sendo o seu limite o contato pontual (que fisicamente não é factível). Em relação, à velocidade de resposta, é notado que a opção PLS-HHT apresentou membros estreitos quase uniformes, fato que foi refletido na sua menor constante de tempo. Outro fato interessante foi o valor coincidente das constantes de tempo das opções PLS-EST e PLS-PTI, que apesar de apresentarem a mesma velocidade de resposta, os seus deslocamentos são diferentes. Da Tabela 28, é concluído que o melhor modelo como solução para o problema do microsistema inversor ponderando o melhor deslocamento é a combinação PLS-PTI, pelo fato de que o deslocamento de saída u_{out} é incrementado em 26,4%, com uma redução do volume de 2,45% e mantendo igual velocidade de resposta, em relação ao resultado da otimização estática (PLS-EST). A alternativa PLS-HHT apresenta uma redução da constante de tempo de 3,92%, porém o seu deslocamento é 13,4% menor do que a alternativa PLS-PTI. Essa alternativa poderia ser implementada no caso em que o fator preponderante seja uma maior velocidade de resposta.

Figura 97 – Deslocamento de saída vs tempo para os casos de otimização considerados no problema do microsistema tipo inversor utilizando fatores de penalização uniformes

Tabela 28 – Resultados finais para as topologias interpretadas do microsistema tipo inversor obtidas utilizando fatores de penalização uniformes

Descrição (Unidade)	PLS-EST	PLS-HHT	PLS-PTI
Volume final (mm ³)	$9,50 \times 10^{-4}$	$8,69 \times 10^{-4}$	$9,27 \times 10^{-4}$
Porcentagem do volume inicial (%)	25,34	23,16	24,72
Constante de tempo τ (ms)	0,51	0,49	0,51
Deslocamento de saída (μm)	-0,36	-0,39	-0,46

5.5 Estimativa dos Fatores de Penalização

Com o objetivo de obter resultados preliminares, os fatores de penalização foram ajustados mediante um enfoque empírico, utilizando inicialmente os valores recomendados por Rubio (2005) e alcançando por tentativa e erro os valores mostrados na Tabela 29. Cabe ressaltar que não foram encontrados na literatura valores para os penalizadores da capacidade térmica e do coeficiente de convecção quando utilizado o SIMP. Os penalizadores no caso do MMA foram maiores do que os utilizados na PLS, pelo fato de que foi observado que esse algoritmo de otimização é mais propenso à aparição de escalas de cinza.

Tabela 29 – Fatores de penalização utilizados para a obtenção de resultados preliminares

Descrição	Valor
Fator de penalização mínimo para todas as propriedades afetadas pelo modelo de material SIMP (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)	1
Fator de penalização máximo para o modelo de material da condutividade elétrica (P_0), da condutividade térmica (P_2), do coeficiente de convecção (P_3) e do módulo de Young (P_4)	3 (PLS) 4 (MMA)
Fator de penalização máximo para o modelo de material da capacidade térmica (P_1) na otimização dinâmica	5

Para determinar finalmente os fatores de penalização foi realizado um estudo analítico fundamentado no trabalho de Kim et al. (2010), (ver APÊNDICE J). Nesse estudo, os fatores de penalização foram variados em um intervalo de 1 até 5, observando quais combinações de penalizadores satisfazem as condições intrínseca e dependente do objetivo, as quais são explicadas e derivadas analiticamente no estudo mencionado acima. Em seguida, foram

testados vários conjuntos de fatores de penalização no software *ETMDinT*, com o intuito de validar o modelo analítico.

Tabela 30 – Conjunto de fatores de penalização testados no modelo numérico realizado no *ETMDinT*

Caso	Fatores de Penalização					Observações das Combinações
	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	
ECC	1		3	1	5	Satisfazem a condição intrínseca e a condição dependente do objetivo
	1		5	4	5	
	2		4	3	5	
	3		4	3	5	
	3		3	3	3	Originam um menor valor da função objetivo
	5		1	5	5	
	1		5	5	5	Originam um valor negativo da primeira derivada da função objetivo em relação à variável de projeto
	4		3	5	5	
TCC	2	1	1	2	5	Satisfazem a condição intrínseca e a condição dependente do objetivo
	3	2	2	3	5	
	3	3	1	3	5	
	4	5	1	4	5	
	5	1	3	5	5	
	1	1	3	1	5	Originam um menor valor da função objetivo
	3	5	3	3	3	
	4	5	4	3	1	
	1	4	5	5	5	Originam um valor negativo da primeira derivada da função objetivo em relação à variável de projeto
	5	5	5	5	4	
	3	3	1	2	5	Originam um valor positivo da segunda derivada da função objetivo em relação à variável de projeto
	5	4	1	3	5	

ECC: Estacionário considerando convecção no contorno

TCC: Transiente considerando convecção no contorno

O modelo numérico consiste na maximização do deslocamento de uma barra de 1m de comprimento e seção retangular constante de 0,5 m de altura e 1/3 m de largura, que respeita a relação $P/A=10$ do modelo analítico. As condições de contorno e iniciais tomam os valores mostrados na Figura 118 e na Tabela 41 (ver APÊNDICE J), além disso, foram consideradas restrições de volume de 25%, 50% e 75%. A discretização é escolhida para ser a menor possível, assim que o algoritmo possa chegar a uma solução viável do problema de otimização dado na eq.(333). Para a restrição de 25%, foi utilizada uma discretização de 160 elementos enquanto que para os casos restantes, foram utilizados 80 elementos. O tempo transiente foi discretizado em 20 passos de integração e as funções para contornar as instabilidades numéricas foram desativadas (filtro de sensibilidades e funções de penalização, ver seção 4.7 e seção 4.8). O problema transiente é resolvido com ambos os algoritmos de integração no tempo implementados nesse trabalho (HHT e PTI, ver seção 4.1.5). O algoritmo de

otimização utilizado foi a PLS, desconsiderando o MMA, dada sua lenta convergência (ver resultados da seção 5.2). Dado que o estudo está composto de $5^4 = 625$ combinações para o caso estático e $5^5 = 3125$ combinações para o caso transiente, serão mostrados somente alguns resultados, selecionados de modo que possam ser comparados em todos os modelos realizados. As combinações testadas são mostradas na Tabela 30, indicando o seu resultado no modelo analítico na coluna "*Observações das Combinações*".

Figura 98 – Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 25%

Figura 99 – Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 50%

Figura 100 – Validação do modelo analítico estacionário com restrição de volume de 75%

Na Figura 98, Figura 99 e Figura 100, são mostrados os resultados da validação do estudo estacionário. Os resultados da validação do estudo transiente utilizando o método HHT são exibidos na Figura 101, Figura 102 e Figura 103, enquanto que, os resultados empregando o método PTI aparecem na Figura 104, Figura 105 e Figura 106.

Figura 101 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 25% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT

Figura 102 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 50% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT

Figura 103 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 75% utilizando o algoritmo de integração no tempo HHT

É observado nesses resultados que a penalização pode ser crítica em problemas de otimização com restrição de volume baixa, fato refletido na descontinuidade das topologias resultantes quando a restrição de volume é de 25% e nas oscilações e/ou mudanças bruscas experimentadas pela função objetivo associada, excetuando a combinação $P_0 = 1, P_2 = 3, P_3 = 1, P_4 = 5$ no caso estacionário e $P_0 = 2, P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 5$ no caso transiente empregando o método PTI. Essa última combinação no método HHT, apresenta instabilidades de tabuleiro apesar do comportamento da função objetivo ser suave, podendo ser atribuído à influência da aproximação linear própria do método e o número de passos de integração escolhido. Igualmente, para esse valor de restrição, tanto no caso estacionário quanto no transiente, os conjuntos de penalizadores que não satisfazem as condições dependentes do objetivo (ver APÊNDICE J) conduzem a topologias desconexas ou com instabilidades de tabuleiro. Contudo, para as restrições de volume de 50% e 75%, no caso estacionário, o algoritmo consegue preencher com material o domínio, independentemente da combinação de fatores de penalização empregada, sendo os resultados diferenciados pela quantidade de elementos com valores de variáveis de projeto intermediárias, sendo o comportamento da função objetivo suave e com ausência de oscilações. Para os casos transientes nessas restrições de volume, as combinações que não atingem as condições dependentes do objetivo experimentam comportamentos bruscos na função objetivo e as topologias resultantes apresentam ilhas de material, instabilidades de tabuleiro e escalas de cinza. As combinações que respeitam as condições mencionadas acima também apresentam

instabilidades numéricas excetuando $P_0 = 2, P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 5$ e $P_0 = 5, P_1 = 1, P_2 = 3, P_3 = 5, P_4 = 5$.

Figura 104 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 25% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI

Figura 105 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 50% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI

Figura 106 – Validação do modelo analítico transiente com restrição de volume de 75% utilizando o algoritmo de integração no tempo PTI

O estudo sugere assim, que as condições para os fatores de penalização são suficientes, porém não necessárias, pelo fato de que algumas combinações consideradas possíveis conduzem a topologias com problemas de instabilidades numéricas (ver seção 3.5), embora maximizem a função objetivo. Não obstante, observando os resultados anteriores, levando em conta a qualidade da topologia final e comportamento da função objetivo, foram determinados os fatores de penalização para serem utilizados no software *ETMDinT*, sendo denominados fatores de penalização "ótimos", os quais são resumidos na Tabela 31.

Tabela 31 – Fatores de penalização determinados para o software *ETMDinT*

Caso	Fatores de Penalização				
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
PLS-EST	1		3	1	5
PLS-HHT	2	1	1	2	5
PLS-PTI	2	1	1	2	5

6 CONCLUSÕES

O MOT foi aplicado com sucesso na otimização de sistemas ETM considerando a resposta térmica transiente. Os exemplos mostraram que a velocidade de resposta e o deslocamento de saída foram maximizados, apresentando, em alguns casos, melhores resultados que a otimização estática. A melhora nas características dinâmicas dos microsistemas estudados é atribuída ao fato de que a otimização dinâmica utiliza todo o tempo transiente para maximizar a resposta progressivamente. Cabe destacar que a formulação adotada para a resolução do problema de MOT considerando os fenômenos de geração de calor por efeito Joule, convecção no contorno e nas faces superior e inferior dos microsistemas e estado plano de tensão, foi adequada. No entanto, a alta dependência dos resultados com o intervalo de tempo por passo de integração na solução do problema transiente, aumentou o custo computacional e o algoritmo apresentou uma menor velocidade de convergência com relação ao seu semelhante estático implementado para fins comparativos.

O problema dinâmico apresenta uma taxa de convergência menor do que seu similar estático, cuja causa pode ser atribuída à precisão das sensibilidades, pelo fato de que elas dependem da discretização da dimensão tempo, sendo que o custo computacional é incrementado exponencialmente quando o número de passos de integração no tempo é aumentado. Dos algoritmos empregados para resolver o problema de otimização (PLS e MMA), foram observadas melhores respostas com a abordagem linear da PLS do que com o enfoque de problema convexo do MMA. Esse fato pode ser explicado pela forma do problema original de otimização dos microsistemas ETM que é altamente não-linear, uma vez que inclui fenômenos complexos na sua modelagem como a transferência de calor por convecção. Do mesmo modo, com o método de integração no tempo PTI, que utiliza uma aproximação exponencial decrescente para resolver o problema transiente, obtiveram-se melhores respostas no processo de otimização do que com o método HHT- α , que emprega uma aproximação linear.

Não obstante, as topologias HHT obtidas na etapa de pós-processamento mostraram melhores desempenhos, pelo fato de que em alguns casos o algoritmo adicionou material o

que reduz o desempenho alcançado nos resultados diretos dados pelo MOT. Apesar de que a etapa de pós-processamento afeta decisivamente as respostas das topologias finais, os resultados representam as tendências para topologias ótimas, levando em conta que, o usuário tem que lidar com a interpretação de instabilidades numéricas inerentes. Além disso, as topologias mostraram serem sensíveis ao raio de arredondamento imposto para a interpretação e à restrição de volume arbitrária definida pelo usuário.

A redução no tempo de resposta nos microsistemas foi percebida quando os membros da topologia tornam-se estreitos, portanto, esses membros aquecem mais rapidamente. Contudo, como não foram impostas restrições de tensão elétrica e mecânica, os resultados podem ultrapassar os limites do material considerado, dado que se obtêm maiores deslocamentos (e assim, maiores valores da função objetivo) em detrimento da tensão mecânica quando os membros chegam a ser cada vez mais finos. A função objetivo utilizada no problema de otimização dinâmica não garante que a maximização do deslocamento e a minimização da constante de tempo sejam atingidas simultaneamente devido a que o problema de otimização dinâmico procura a maximização da área sob a curva de deslocamento no tempo sendo sujeito imperativamente a satisfazer as equações de equilíbrio. Deste modo, alguns problemas de otimização mostraram que a solução estática apresentou uma menor velocidade de resposta embora o seu deslocamento de saída fosse menor do que os obtidos pelos seus semelhantes dinâmicos.

O estudo da estimação dos fatores de penalização permitiu verificar que as combinações denominadas "ótimas" obtidas cumprem condições suficientes, porém não necessárias para garantir uma topologia com uma resposta ótima global. Adicionalmente, a combinação "ótima" estabelecida pelos testes antes mencionados tolerou trabalhar com valores das variáveis de projeto muito próximas de zero, sem ter problemas de condicionamento numérico. De igual forma, esse conjunto de penalizadores melhorou a convergência da função objetivo e reduziu tanto as instabilidades numéricas quanto o valor dos pesos associados às funções de penalização que fazem parte da mesma. Com a diminuição dos pesos, foi notado que, na medida em que seja encontrada uma combinação "ótima" dos penalizadores, as funções que penalizam as instabilidades numéricas tornam-se desnecessárias. Além do mencionado anteriormente, foi advertido que o problema de otimização com restrições de volume baixas é crítico toda vez que são utilizados conjuntos de

penalizadores "não-ótimos", que levam para soluções com frequentes descontinuidades e comportamentos altamente oscilatórios da função objetivo.

Finalmente, cabe destacar que este trabalho gerou duas publicações: Salas, Mello e Silva (2011) e Mello, Salas e Silva (2012).

6.1 Trabalhos Futuros

A contribuição geral do trabalho consiste no desenvolvimento de um algoritmo baseado no MOT que permite a obtenção de microsistemas ETM para diferentes aplicações a partir de uma abordagem dinâmica, constituindo uma ferramenta genérica que pode ser utilizada por pesquisadores com interesse na área. Não obstante, são sugeridos alguns tópicos futuros que conduzam ao aprimoramento deste trabalho, entre os que são destacados: modelagem não-linear do ponto de vista de dependência das propriedades de material com a temperatura, modelagem transiente incluindo os efeitos de massa e amortecimento no domínio termoelástico, formulação de funções objetivo ou restrições que levem em conta níveis admissíveis de corrente elétrica e tensão mecânica e a estimativa do coeficiente de convecção. Adicionalmente, é sugerido um estudo que estabeleça a influência dos fatores de penalização na interpretação dos resultados e o aprimoramento do algoritmo de interpretação de forma baseado em curvas de nível, com a finalidade de fornecer várias alternativas de solução que possam ser avaliadas numericamente, e assim, evitar utilizar enfoques de otimização de forma para determinar as topologias finais. Além disso, recomenda-se fabricar as topologias resultantes e caracterizá-las como estratégia de realimentação da modelagem considerada, visando aproximar os resultados analíticos daqueles obtidos experimentalmente. Esse tópico já está sendo considerado no Laboratório de Sensores e Atuadores em parceria com o Laboratório de Microeletrônica (LME) da Escola Politécnica da USP.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achtziger, W.; Kocvara, M. Structural topology optimization with eigenvalues. **Siam Journal on Optimization**, v.18, n.4, p.1129-1164. 2008.
- Allaire, G.; Castro, C. A new approach for the optimal distribution of assemblies in a nuclear reactor. **Numerische Mathematik**, v.89, n.1, p.1-29. 2001.
- Ambrosio, L.; Buttazzo, G. An optimal-design problem with perimeter penalization. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v.1, n.1, p.55-69. 1993.
- Amstutz, S. Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.43, n.6, Jun, p.755-765. 2011.
- Amstutz, S.; Novotny, A. A. Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.41, n.3, p.407-420. 2010.
- Ananthasuresh, G. K. Synthesis methods for electrothermal actuation. In: **Optimal Synthesis Methods for MEMS**. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2003. Synthesis methods for electrothermal actuation, p.79-119. (Microsystems (Series))
- Andersen, K. N.; Petersen, D. H.; Carlson, K.; Molhave, K.; Sardan, O.; Horsewell, A.; Eichhorn, V.; Fatikow, S.; Boggild, P. Multimodal Electrothermal Silicon Microgrippers for Nanotube Manipulation. **IEEE Transactions on Nanotechnology**, v.8, n.1, p.76-85. 2009.
- Andreassen, E.; Clausen, A.; Schevenels, M.; Lazarov, B. S.; Sigmund, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.43, n.1, p.1-16. 2011.
- ASM International Handbook Committee. **ASM Handbook v. 2. Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials**. Russell Township: ASM International, v.2. 1990. 1328 p.
- Bastos, J. P. A.; Sadowski, N. **Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods**. New York: CRC Press. 2003. 510 p. (Electrical and Computer Engineering (Series))
- Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Upper Saddle River, N. J.: Prentice-Hall. 1996. 1037 p.
- Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.1, n.4, Dec, p.193-202. 1989.
- Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.71, n.2, p.197-224. 1988.

Bendsøe, M. P.; Rodrigues, H. C. Integrated topology and boundary shape optimization of 2-d solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.87, n.1, p.15-34. 1991.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v.69, n.9-10, p.635-654. 1999.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin: Springer. 2003. 370 p.

Borrvall, T. Topology optimization of elastic continua using restriction. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v.8, n.4, p.351-385. 2001.

Borrvall, T.; Petersson J. Topology optimization using regularized intermediate density control. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.37-38, 2001, p.4911-4928. 2001.

Bruns, T. E. Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.50, n.15-16, p.2859-2873. 2007.

Bruns, T. E.; Tortorelli, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.26-27, p.3443-3459. 2001.

Bruyneel, M.; Duysinx, P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.29, n.4, p.245-256. 2005.

Bruyneel, M.; Duysinx P.; Fleury, C. A family of MMA approximations for structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.24, n.4, Oct, p.263-276. 2002.

Buehler, M. J.; Bettig, B.; Parker, G. G. Topology optimization of smart structures using a homogenization approach. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.15, n.8, p.655-667. 2004.

Byun, J. K., Lee, J. H.; Park, I. H. Node-based distribution of material properties for topology optimization of electromagnetic devices. **IEEE Transactions on Magnetics**, v.40, n.2, p.1212-1215. 2004.

Byun, J. K.; Lee, J. H.; Park, I. H.; Lee, H. B.; Choi, K.; Hahn, S. Y. Inverse problem application of topology optimization method with mutual energy concept and design sensitivity. **IEEE Transactions on Magnetics**, v.36, n.4, p.1144-1147. 2000.

Carbonari, R. C., Silva, E. C. N.; Nishiwaki, S. Design of piezoelectric multi-actuated microtools using topology optimization. **Smart Materials & Structures**, v.14, n.6, p.1431-1447. 2005.

Carbonari, R. C.; Silva, E. C. N.; Paulino, G. H. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design: A multiphysics topology optimization approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.77, n.3, p.301-336. 2009.

Cardoso, E. L.; Fonseca, J. S. O. Complexity control in the topology optimization of continuum structures **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering** v.25 n.3, p.293-301 2003.

Chen, B. C.; Kikuchi, N. Topology optimization with design-dependent loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.37, n.1, p.57-70. 2001.

Chen, B. S.; Gu, Y. X.; Guan, Z. Q.; Zhang, H. W. Nonlinear transient heat conduction analysis with precise time integration method. **Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals**, v.40, n.4, p.325-341. 2001.

Chen, B. S.; Tong, L. Y. Sensitivity analysis of heat conduction for functionally graded materials. **Materials & Design**, v.25, n.8, Dec, p.663-672. 2004.

Chen, B. S.; Tong, L. Y.; Gu, Y. X.; Zhang, H. W.; Ochoa, O. Transient heat transfer analysis of functionally graded materials using adaptive precise time integration and graded finite elements. **Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals**, v.45, n.2, p.181-200. 2004.

Chen, R. S.; Kung, C.; Lee, G. B. Analysis of the optimal dimension on the electrothermal microactuator. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.12, n.3, p.291-296. 2002.

Cheng, K. T. On non-smoothness in optimal-design of solid, elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, v.17, n.8, p.795-810. 1981.

Cheng, K. T.; Olhoff, N. Regularized formulation for optimal-design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, v.18, n.2, p.153-169. 1982.

Cho, S. H.; Choi, J. Y. Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field adjoint sensitivity analysis method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.41, n.15, p.1481-1495. 2005.

Choi, K. K.; Kim, N. H. **Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1: Linear Systems**. Berlin: Springer Science+Business Media, Inc. 2005. 446 p. (Mechanical Engineering Series)

Christensen, P. W.; Klarbring, A. **An Introduction to Structural Optimization**: Springer. 2009. 214 p. (Solid Mechanics and Its Applications)

Chung, Y. S.; Cheon, C.; Hahn, S. Y. Reconstruction of dielectric cylinders using FDTD and topology optimization technique. **IEEE Transactions on Magnetics**, v.36, n.4, p.956-959. 2000.

COMSOL. COMSOL Multiphysics Documentation V.4.2. **LiveLink for MATLAB User's Guide**. Comsol: COMSOL 2011a.

_____. COMSOL Multiphysics Documentation V.4.2. **Structural Mechanisc Module User's Guide**. Comsol: COMSOL 2011b.

Comtois, J. H.; Bright V. M. Applications for surface-micromachined polysilicon thermal actuators and arrays. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.58, n.1, p.19-25. 1997.

Comtois, J. H.; Michalicek, M. A.; Barron, C. C. Electrothermal actuators fabricated in four-level planarized surface micromachined polycrystalline silicon. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.70, n.1-2, p.23-31. 1998.

Cook, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. New York: John Wiley & Sons Inc. 1995. 336 p.

Cornwell, R. E.; Malkus, D. S. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in conduction heat-transfer. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.97, n.2, p.149-156. 1992.

Dahl, J., Jensen, J. S.; Sigmund, O. Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension Design of filters and pulse modulators. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.36, n.6, p.585-595. 2008.

Dantzig, G. B.; Orden, A.; Wolfe, P. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. **Pacific Journal of Mathematics**, v.5, n.2, p.183-195. 1955.

Dems, K. Sensitivity analysis in thermal problems .1. Variation of material parameters within a fixed domain. **Journal of Thermal Stresses**, v.9, n.4, p.303-324. 1986.

_____. Sensitivity analysis in thermal problems .2. Structure shape variation. **Journal of Thermal Stresses**, v.10, n.1, p.1-16. 1987.

Dems, K.; Korycki, R.; Rousselet, B. Application of first- and second-order sensitivities in domain optimization for steady conduction problem. **Journal of Thermal Stresses**, v.20, n.7, p.697-728. 1997.

Dems, K.; Mroz, Z. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis .1. Variation of material parameters within fixed domain. **International Journal of Solids and Structures**, v.19, n.8, p.677-692. 1983.

_____. Variation approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis .2. Structure shape variation. **International Journal of Solids and Structures**, v.20, n.6, p.527-552. 1984.

Dems, K.; Rousselet, B. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body - Part I: External boundary modification. **Structural Optimization**, v.17, n.1, p.36-45. 1999a.

_____. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body - Part II: Interface modification. **Structural Optimization**, v.17, n.1, p.46-54. 1999b.

Diaz, A.; Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, v.10, n.1, Aug, p.40-45. 1995.

Diaz, A. R.; Bendsøe, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. **Structural Optimization**, v.4, n.1, p.17-22. 1992.

Donoso, A.; Sigmund O. Topology optimization of multiple physics problems modelled by Poisson's equation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v.1, n.2, p.169-184. 2004.

Du, J.; Olhoff, N. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - Part I: new computational approach for 2D problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.27, n.3, p.151-165. 2004a.

_____. Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading - Part II: algorithm and examples for 3D problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.27, n.3, p.166-177. 2004b.

Duc, T. C.; Lau, G. K.; Creemer, J. F.; Sarro, P. M. Electrothermal Microgripper With Large Jaw Displacement and Integrated Force Sensors. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v.17, n.6, Dec, p.1546-1555. 2008.

Duysinx, P.; Bendsøe, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.43, n.8, p.1453-1478. 1998.

Elbuken, C.; Gui, L.; Ren, C. L.; Yavuz, M.; Kharnesee, M. B. Design and analysis of a polymeric photo-thermal microactuator. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.147, n.1, p.292-299. 2008.

Eschenauer, H. A.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures: A review. **Applied Mechanics Reviews**, v.54, n.4, p.331-390. 2001.

Fritz, T.; Cho, H. S.; Hemker, K. J.; Mokwa, W.; Schnakenberg, U. Characterization of electroplated nickel. **Microsystem Technologies**, v.9, n.1-2, Nov, p.87-91. 2002.

Gao, T.; Zhang, W. H. Topology optimization involving thermo-elastic stress loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.42, n.5, p.725-738. 2010.

Gao, T.; Zhang, W. H.; Zhu, J. H.; Xu, Y. J.; Bassir, D. H. Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.44, n.14, p.805-813. 2008.

Gersborg-Hansen, A., Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.31, n.4, p.251-259. 2006.

Gu, Y. X.; Chen, B. S.; Zhang, H. W.; Grandhi, R. A sensitivity analysis method for linear and nonlinear transient heat conduction with precise time integration. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.24, n.1, p.23-37. 2002.

Gu, Y. X.; Chen, B. S.; Zhang, H. W.; Liu, S. Structural optimization for transient response constraints with software JIFEX. Tamkang **Journal of Science and Engineering**, v.3, n.3, p.173-186. 2000.

Guest, J. K.; Prevost, J. H.; Belytschko, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.61, n.2, p.238-254. 2004.

Haber, R. B.; Jog, C. S.; Bendsøe, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. **Structural Optimization**, v.11, n.1, p.1-12. 1996.

Haftka, R. T.; Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1992. 500 p. (Solid Mechanics and its Applications)

Hajela, P.; Lee, E. Topological optimization of rotorcraft subfloor structures for crashworthiness considerations. **Advances in Structural Optimization**, p.131-142. 1994.

Hammer, V. B.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.19, n.2, p.85-92. 2000.

Hashin, Z.; Shtrikman, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.11, n.2, p.127-140. 1963.

Hassani, B.; Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure. **Computers & Structures**, v.69, n.6, p.707-717. 1998a.

_____. A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization equations. **Computers & Structures**, v.69, n.6, p.719-738. 1998b.

_____. A review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria. **Computers & Structures**, v.69, n.6, p.739-756. 1998c.

_____. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software**. Londres: Springer. 1999. 268 p.

Hsu, M. H.; Hsu, Y. L. Interpreting three-dimensional structural topology optimization results. **Computers & Structures**, v.83, n.4-5, Jan, p.327-337. 2005.

Hsu, Y. L.; Hsu, M. S.; Chen, C. T. Interpreting results from topology optimization using density contours. **Computers & Structures**, v.79, n.10, Apr, p.1049-1058. 2001.

Huang, Q. A.; Lee, N. K. S. Analytical modeling and optimization for a laterally-driven polysilicon thermal actuator. **Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems**, v.5, n.3, p.133-137. 1999.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method**. Englewood Cliffs, N. Y.: Prentice-Hall. 1987. 803 p.

Iga, A.; Nishiwaki, S.; Izui, K.; Yoshimura, M. Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.52, n.11-12, p.2721-2732. 2009.

Ishihara, H.; Arai, F.; Fukuda, T. Micro mechatronics and micro actuators. **IEEE-ASME Transactions on Mechatronics**, v.1, n.1, p.68-79. 1996.

Jensen, J. S.; Sigmund, O. Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization: Low-loss waveguide bends. **Applied Physics Letters**, v.84, n.12, p.2022-2024. 2004.

_____. Topology optimization of photonic crystal structures: a high-bandwidth low-loss T-junction waveguide. **Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics**, v.22, n.6, p.1191-1198. 2005.

Jog, C. S.; Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.130, n.3-4, p.203-226. 1996.

Jonsmann, J. **Technology Development for Topology Optimised Thermal Microactuators**. (Ph. D. Thesis). Microelectronics Center, Technical University of Denmark, Copenhagen, 1999. 116 p.

Jonsmann, J.; Sigmund, O.; Bouwstra, S. Compliant electro-thermal microactuators. **Mems '99: Twelfth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, Technical Digest**, p.588-593. 1999a.

_____. Compliant thermal microactuators. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.76, n.1-3, p.463-469. 1999b.

Karbasi, S. M.; Shamshirsaz, M.; Naraghi, M.; Maroufi, M. Optimal design analysis of electrothermally driven microactuators. **Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems**, v.16, n.7, p.1065-1071. 2010.

Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear-programming. **Combinatorica**, v.4, n.4, p.373-395. 1984.

Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J. S. O.; Silva, E. C. N. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.151, n.3-4, p.401-417. 1998.

Kim, J. E.; Kim, D. S.; Ma, P. S.; Kim, Y. Y. Multi-physics interpolation for the topology optimization of piezoelectric systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.199, n.49-52, p.3153-3168. 2010.

Kogiso, N.; Ahn, W.; Nishiwaki, S.; Izui, K.; Yoshimura, M. Robust Topology Optimization for Compliant Mechanisms Considering Uncertainty of Applied Loads. **Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing**, v.2, n.1, p.96-107. 2008.

Kohn, R. V.; Strang, G. Optimal-design and relaxation of variational-problems .1. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.39, n.1, p.113-137. 1986a.

_____. Optimal-design and relaxation of variational-problems .2. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.39, n.2, p.139-182. 1986b.

_____. Optimal-design and relaxation of variational-problems .3. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v.39, n.3, p.353-377. 1986c.

Krog, L. A.; Olhoff, N. Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. **Computers & Structures**, v.72, n.4-5, p.535-563. 1999.

Kwak, I. G.; Hahn, S. Y. Design sensitivity of transient electro-thermal problems for the specific temperature distribution. **IEEE Transactions on Magnetics**, v.36, n.4, p.1148-1152. 2000.

Larsen, U. D.; Sigmund, O. Bouwstra, S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v.6, n.2, p.99-106. 1997.

Lau, G. K.; Du, H. J.; Lim, M. K. Use of functional specifications as objective functions in topological optimization of compliant mechanism. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.34, 2001, p.4421-4433. 2001a.

_____. Techniques to suppress intermediate density in topology optimization of compliant mechanisms. **Computational Mechanics**, v.27, n.5, p.426-435. 2001b.

Lee, C. C.; Hsu, W. Optimization of an electro-thermally and laterally driven microactuator. **Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems**, v.9, n.5, p.331-334. 2003.

Li, Y.; Saitou, K.; Kikuchi, N. Topology optimization of thermally actuated compliant mechanisms considering time-transient effect. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.40, n.11, Jul, p.1317-1331. 2004.

Lin, L. W.; Chiao, M. Electrothermal responses of lineshape microstructures. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.55, n.1, Jul, p.35-41. 1996.

Liu, J.; Li, J. H.; Xu, J. G.; Yoshida, S. Optimization of micro-thermal actuator for flying height control. **Microsystem Technologies-Micro-and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems**, v.16, n.1-2, p.249-255. 2010.

Long, C. S.; Loveday, P. W.; Groenwold, A. A. Effects of planar element formulation and numerical integration order on checkerboard material layouts. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.39, n.5, p.487-501. 2009.

Lurie, K. A.; Cherkaev, A. V.; Fedorov, A. V. Regularization of optimal-design problems for bars and plates .1. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.37, n.4, p.499-522. 1982a.

_____. Regularization of optimal-design problems for bars and plates .2. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.37, n.4, p.523-543. 1982b.

Ma, Z. D.; Kikuchi, N.; Cheng, H. C. Topological design for vibrating structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.121, n.1-4, p.259-280. 1995.

Ma, Z. D.; Wang, H.; Kikuchi, N.; Pierre, C.; Raju, B. Experimental validation and prototyping of optimum designs obtained from topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.31, n.5, May, p.333-343. 2006.

Madou, M. J. **Fundamentals of Microfabrication**. Boca Ratón, FL: CRC-Press. 1998. 589 p.

Mankame, N.; Ananthasuresh, G. K. **The effect of thermal boundary conditions and scaling on electro-thermal-compliant micro devices**. Cambridge: Computational Publications. 2000. 609-612 p. (2000 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Technical Proceedings)

Mankame, N. D.; Ananthasuresh, G. K. Comprehensive thermal modelling and characterization of an electro-thermal-compliant microactuator. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.11, n.5, Sep, p.452-462. 2001.

Marinis, T. F. The Future of Microelectromechanical systems (MEMS). **Strain**, v.45, n.3, Jun, p.208-220. 2009.

Mase, G. T.; Mase, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. Boca Ratón, FL: CRC Press. 1999. 377 p.

Matsui, K.; Terada, K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.59, n.14, p.1925-1944. 2004.

Mayer, R. R.; Kikuchi, N.; Scott, R. A. Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.39, n.8, p.1383-1403. 1996.

Mello, L. A. M.; Salas, R. A.; Silva, E. C. N. On response time reduction of electrothermomechanical MEMS using topology optimization. **Submitted**. 2012.

Meric, R. A. Sensitivity analysis of functionals with respect to shape for dynamically loaded nonlocal thermoelastic solids. **International Journal of Engineering Science**, v.26, n.7, p.703-711. 1988a.

_____. Shape design sensitivity analysis for non-linear anisotropic heat conducting solids and shape optimization by the BEM. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.26, n.1, p.109-120. 1988b.

_____. Shape design sensitivity analysis and optimization for the non-homogeneous helmholtz equation by the BEM. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.12, n.2, p.95-105. 1996.

Michell, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **Philosophical Magazine**, v.8, n.43-48, p.589-597. 1904.

Mlejnek, H. P. Some aspects of the genesis of structures. **Structural Optimization**, v.5, n.1-2, Dec, p.64-69. 1992.

Moulton, T.; Ananthasuresh, G. K. Micromechanical devices with embedded electro-thermal-compliant actuation. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.90, n.1-2, p.38-48. 2001.

Nagtegaal, J. C.; Prager, W. Optimal layout of a truss for alternative loads. **International Journal of Mechanical Sciences**, v.15, n.7, p.583-592. 1973.

Nakasone, P. H.; Silva, E. C. N. Dynamic design of piezoelectric laminated sensors and actuators using topology optimization. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.21, n.16, p.1627-1652. 2010.

Neves, M. M.; Rodrigues, H.; Guedes, J. M. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. **Structural Optimization**, v.10, n.2, p.71-78. 1995.

Nishitani, W. S.; Honda, F.; Godoy, P. H.; Silva E. C. N. Development of an Electrothermomechanical XY Micropositioner. **18th International Congress of Mechanical Engineering COBEM**. Ouro Preto-MG: ABCM-Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2005. 525-532 p.

Nishiwaki, S.; Frecker, M. I.; Min, S. J.; Kikuchi, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.42, n.3, p.535-559. 1998.

Nishiwaki, S.; Min, S.; Yoo, J.; Kikuchi, N. Optimal structural design considering flexibility. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.34, p.4457-4504. 2001.

Nishiwaki, S.; Saitou, K.; Min, S.; Kikuchi, N. Topological design considering flexibility under periodic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.19, n.1, p.4-16. 2000.

Ogata, K. **Modern Control Engineering**. New York: Prentice-Hall. 1997. 997 p.

Olhoff, N.; Bendsoe, M. P.; Rasmussen, J. On cad-integrated structural topology and design optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, n.1-3, p.259-279. 1991.

Owen, D. R. J.; Damjanic, F. Reduced numerical-integration in thermal transient finite-element analysis. **Computers & Structures**, v.17, n.2, p.261-276. 1983.

Pan, C. S.; Hsu, W. Y. An electro-thermally and laterally driven polysilicon microactuator. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.7, n.1, Mar, p.7-13. 1997.

Park, C. W.; Yoo, Y. M. Shape design sensitivity analysis of a two-dimensional heat-transfer system using the boundary element method. **Computers & Structures**, v.28, n.4, p.543-550. 1988.

Park, J. S.; Chu, L. L.; Oliver, A. D.; Gianchandani, Y. B. Bent-beam electrothermal actuators - Part II: Linear and rotary microengines. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v.10, n.2, Jun, p.255-262. 2001.

Paulino, G. H.; Silva, E. C. N. Design of functionally graded structures using topology optimization. **Functionally Graded Materials VIII**, v.492-493, p.435-440. 2005.

Paulino, G. H.; Silva, E. C. N.; Le, C. H. Optimal design of periodic functionally graded composites with prescribed properties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.38, n.5, p.469-489. 2009.

Pedersen, C. B. W. Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.193, n.6-8, p.653-678. 2004.

Pedersen, N. L. On topology optimization of plates with prestress. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.51, n.2, p.225-239. 2001.

Perez, R.; Agnus, J.; Clemy, C.; Hubert, A.; Chaillet, N. Modeling, fabrication, and validation of a high-performance 2-DoF piezoactuator for micromanipulation. **IEEE-ASME Transactions on Mechatronics**, v.10, n.2, p.161-171. 2005.

Petersson, J. Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.171, n.1-2, p.123-140. 1999.

Petersson, J.; Sigmund, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.41, n.8, p.1417-1434. 1998.

Pomezanski, V.; Querin, O. M.; Rozvany, G. I. N. CO-SIMP: Extended SIMP algorithm with direct Corner Contact Control. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.30, n.2, p.164-168. 2005.

Poulsen, T. A. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.24, n.5, p.396-399. 2002a.

_____. Topology optimization in wavelet space. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.53, n.3, p.567-582. 2002b.

_____. A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.57, n.6, p.741-760. 2003.

Prager, W. A note on discretized michell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.3, n.3, p.349 - 355. 1974.

_____. Nearly optimal design of trusses. **Computers & Structures**, v.8, n.3-4, p.451-454. 1978.

Que, L.; Park, J. S.; Gianchandani, Y. B. Bent-beam electrothermal actuators - Part I: Single beam and cascaded devices. **Journal of Microelectromechanical Systems**, v.10, n.2, Jun, p.247-254. 2001.

Rahmatalla, S. F.; Swan, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.27, n.1-2, p.130-135. 2004.

Rao, S. S.; **Engineering Optimization: Theory and Practice**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc. 2009. 840 p.

Raulli, M.; Maute, K. Topology optimization of electrostatically actuated microsystems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.30, n.5, p.342-359. 2005.

Reddy, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. New York: John Wiley & Sons Inc. 2002. 608 p.

Rietz, A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.159-163. 2001.

Roch, I.; Bidaud, P.; Collard, D.; Buchaillot, L. Fabrication and characterization of an SU-8 gripper actuated by a shape memory alloy thin film. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.13, n.2, p.330-336. 2003.

Rozvany, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.90-108. 2001.

_____. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.37, n.3, p.217-237. 2009.

Rozvany, G. I. N.; Zhou, M. The COC algorithm.1. Cross-section optimization or sizing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, n.1-3, p.281-308. 1991.

Rozvany, G. I. N.; Zhou, M.; Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, v.4, n.3-4, p.250-252. 1992.

Rubio, W. M. **Projeto de “MEMS” Eletrotermomecânicos usando o Método de Otimização Topológica**. (Dissertação de Mestrado). Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. 202 p.

Rubio, W. M.; Silva, E. C. N.; Bordatchev, E. V.; Zeman, M. J. F. Topology Optimized Design, Microfabrication and Characterization of Electro-Thermally Driven Microgripper. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.20, n.6, p.669-681. 2009.

Salas, R. A.; Mello, L. A. M., Silva, E. C. N. Design of Electrothermomechanical (ETM) MEMS Using Topology Optimization Method Considering the Thermal Transient Response. **21th International Congress of Mechanical Engineering COBEM**. Natal-RN 2011.

Sardan, O.; Eichhorn, V.; Petersen, D. H.; Fatikow, S.; Sigmund, O.; Boggild, P. Rapid prototyping of nanotube-based devices using topology-optimized microgrippers. **Nanotechnology**, v.19, n.49. 2008.

Sardan, O.; Petersen, D. H.; Molhave, K.; Sigmund, O.; Boggild, P. Topology optimized electrothermal polysilicon microgrippers. **Microelectronic Engineering**, v.85, n.5-6, May-Jun, p.1096-1099. 2008.

Saxena, R.; Saxena, A. Design of Electrothermally Compliant MEMS With Hexagonal Cells Using Local Temperature and Stress Constraints. **Journal of Mechanical Design**, v.131, n.5. 2009.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, v.25, n.4, p.493-524. 1997.

_____. **Systematic design of micro actuators using topology optimization**. In: V. K. Varadan, P. J. Mcwhorter, et al (Ed.). Smart Structures and Materials 1998: Smart Electronics and Mems. Bellingham: Spie-Int Soc Optical Engineering, v.3328, 1998. Systematic design of micro actuators using topology optimization, p.23-31. (Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE))

_____. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. **Philosophical Transactions of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences**, v.358, n.1765, p.211-227. 2000.

_____. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.120-127. 2001a.

_____. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I: One-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.49-50, p.6577-6604. 2001b.

_____. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part II: Two-material structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, n.49-50, p.6605-6627. 2001c.

_____. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.33, n.4-5, p.401-424. 2007.

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v.16, n.1, p.68-75. 1998.

Sigmund, O.; Torquato, S. Composites with extremal thermal expansion coefficients. **Applied Physics Letters**, v.69, n.21, p.3203-3205. 1996.

_____. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.45, n.6, p.1037-1067. 1997.

Sigmund, O.; Torquato, S.; Aksay, I. A. On the design of 1-3 piezocomposites using topology optimization. **Journal of Materials Research**, v.13, n.4, p.1038-1048. 1998.

Silva, E. C. N.; Fonseca, J. S. O.; Kikuchi, N. Optimal design of periodic piezocomposites. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.159, n.1-2, p.49 - 77. 1998.

Silva, E. C. N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J. S. O.; Kikuchi, N. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.172, n.1-4, p.241-271. 1999.

Silva, E. C. N.; Nishiwaki, S.; Kikuchi, N. Topology optimization design of flextensional actuators. **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, v.47, n.3, p.657-671. 2000.

Squire, W.; Trapp, G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. **Siam Review**, v.40, n.1, p.110-112. 1998.

Stolpe, M.; Svanberg, K. On the trajectories of penalization methods for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.128-139. 2001.

Strang, G.; Kohn, R. V. Hencky-prandtl nets and constrained michell trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.36, n.2, p.207-222. 1983.

Sutradhar, A.; Paulino, G. H.; Miller, M. J.; Nguyen, T. H. Topological optimization for designing patient-specific large craniofacial segmental bone replacements. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v.107, n.30, Jul 27, p.13222-13227. 2010.

Suzuki, K., Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.93, n.3, p.291 - 318. 1991.

Svanberg, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, n.2, p.359-373. 1987.

_____. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. **Siam Journal on Optimization**, v.12, n.2, p.555-573. 2001.

Swan, C. C.; Kosaka, I. Voigt-Reuss topology optimization for structures with linear elastic material behaviours. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.40, n.16, p.3033-3057. 1997.

Takezawa, A.; Nishiwaki, S.; Kitamura, M.; Silva, E. C. N. Topology optimization for designing strain-gauge load cells. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.42, n.3, p.387-402. 2010.

Tenek, L. H.; Hagiwara, I. Static and vibrational shape and topology optimization using homogenization and mathematical programming. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.109, n.1-2, p.143 - 154. 1993.

Thomas, G. B.; Finney, R. L. **Calculus and Analytic Geometry**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996. 1264 p.

Thomsen, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials. **Structural Optimization**, v.5, n.1-2, p.108-115. 1992.

Timoshenko, S. P.; Gere, J. M. **Mechanics of Materials**. Boston, Mass: PWS Pub Co. 1997. 912 p.

Tortorelli, D. A.; Haber, R. B. 1st-Order design sensitivities for transient conduction problems by an adjoint method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.28, n.4, p.733-752. 1989.

Tortorelli, D. A.; Haber, R. B.; Lu, S. C. Y. Design sensitivity analysis for nonlinear thermal-systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.77, n.1-2, p.61-77. 1989.

Tortorelli, D. A.; Michaleris, P. Design sensitivity analysis: Overview and review. **Inverse Problems in Engineering**, v.1, n.1, p.71-105. 1994.

Tortorelli, D. A.; Subramani, G.; Lu, S. C. Y.; Haber, R. B. Sensitivity analysis for coupled thermoelastic systems. **International Journal of Solids and Structures**, v.27, n.12, p.1477-1497. 1991.

Tsai, Y. C.; Lei, S. H.; Sudin, H. Design and analysis of planar compliant microgripper based on kinematic approach. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.15, n.1, Jan, p.143-156. 2005.

Turteltaub, S. Optimal material properties for transient problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.22, n.2, p.157-166. 2001.

_____. Optimal non-homogeneous composites for dynamic loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.30, n.2, p.101-112. 2005.

Van Keulen, F.; Haftka, R. T.; Kim, N. H. Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.194, n.30-33, p.3213-3243. 2005.

Volland, B. E.; Heerlein, H.; Rangelow, I. W. Electrostatically driven microgripper. **Microelectronic Engineering**, v.61-2, p.1015-1023. 2002.

Wang, S. Y.; Kang, J.; Noh, J. Topology optimization of a single-phase induction motor for rotary compressor. **IEEE Transactions on Magnetics**, v.40, n.3, p.1591-1596. 2004.

Wolfe, P. The Simplex Method for Quadratic Programming. **Econometrica**, v.27, n.3, p.382-398. 1959.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers & Structures**, v.58, n.6, p.1067-1073. 1996.

Yan, D.; Khajepour, A.; Mansour, R. Modeling of two-hot-arm horizontal thermal actuator. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.13, n.2, Mar, p.312-322. 2003.

Yang, R. J.; Chuang, C. H. Optimal topology design using linear-programming. **Computers & Structures**, v.52, n.2, Jul, p.265-275. 1994.

Yin, L.; Ananthasuresh, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.23, n.1, p.49-62. 2001.

_____. A novel topology design scheme for the multi-physics problems of electro-thermally actuated compliant micromechanisms. **Sensors and Actuators a-Physical**, v.97-8, p.599-609. 2002.

Yoo, J.; Kikuchi, N. Topology optimization in magnetic fields using the homogenization design method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.48, n.10, p.1463-1479. 2000.

Zeman, M. J. F.; Bordatchev, E. V.; Knopf, G. K. Design, kinematic modeling and performance testing of an electro-thermally driven microgripper for micromanipulation applications. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v.16, n.8, p.1540-1549. 2006.

Zhang, W. H.; Fleury, C.; Duysinx, P.; Nguyen, V. H.; Laschet, I. A generalized method of moving asymptotes (GMA) including equality constraints. **Structural Optimization**, v.12, n.2-3, Oct, p.143-146. 1996.

Zhang, Y. Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the matlab environment. **Optimization Methods & Software**, v.10, n.1, p.1-31. 1998.

Zheng, B.; Chang, C. J.; Gea, H. C. Topology optimization with design-dependent pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.38, n.6, p.535-543. 2009.

Zhong, W. X. On precise integration method. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.163, n.1, p.59-78. 2004.

Zhong, W. X.; Williams, F. W. A precise time-step integration method. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science**, v.208, n.6, p.427-430. 1994.

Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. The COC algorithm .2. topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, n.1-3, p.309-336. 1991.

Zhou, M.; Shyy, Y. K.; Thomas, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.152-158. 2001.

Zhu, D.-L.; Wang, A.-L.; Jiang, T. Topology design to improve HDD suspension dynamic characteristics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.31, n.6, Jun, p.497-503. 2006.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. **Finite Element Method - The Basis**. Oxford: Butterworth-Heinemann, v.1. 2000. 725 p.

Zill, D. G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications**. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing. 1997. 608 p.

APÊNDICE A – ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE QUATRO NÓS

A formulação isoparamétrica estabelece uma relação entre os graus de liberdade em qualquer ponto e os graus de liberdade nos pontos nodais através de funções de interpolação ou funções de forma, utilizando um sistema de coordenadas natural. Os elementos isoparamétricos são denominados assim porque utilizam as mesmas funções de forma para interpolar os graus de liberdade e as coordenadas. Dentro das condições que devem ser cumpridas pelas funções de forma para que um modelo de elementos finitos seja válido temos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; BATHE, 1996):

- Devem interpolar os valores da variável por meio das suas estimações nos pontos nodais. Ou seja, devem satisfazer:

$$N_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{Para } x = x_i \\ 0 & \text{Para } x = x_j \text{ e } i \neq j \end{cases} \quad (165)$$

- Devem garantir a condição de completude, ou seja:

$$f \cong \sum_{i=1}^n N_i f_i = \bar{f} \sum_{i=1}^n N_i = \bar{f} \therefore \sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (166)$$

onde:

f: Valor real da variável de estado.

$\bar{f}$: Valor interpolado da variável de estado.

O elemento isoparamétrico de quatro nós é mostrado na Figura 107. Os nós estão numerados em sentido anti-horário e o sistema de coordenadas naturais (ξ, η) é o sistema padrão ou local, enquanto que o sistema real é denominado sistema de coordenadas globais (x, y). A aproximação da variável de estado é feita mediante as funções de interpolação que para este caso são da forma:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \therefore i = 1 \text{ a } 4 \quad (167)$$

onde (ξ_i, η_i) som as coordenadas do nodo i no sistema natural.

Figura 107 – Mapeamento entre as coordenadas naturais (elemento mestre) e as coordenadas globais (elemento físico) em um elemento isoparamétrico de quatro nós

A interpolação de uma variável escalar f qualquer dentro do elemento em termos dos valores nodais é:

$$f = \sum_{i=1}^4 N_i f_i = \mathbf{N} \mathbf{f}_e \quad (168)$$

onde:

$$\mathbf{N} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \quad (169)$$

é o vetor de funções de forma e o termo $\mathbf{f}_e$:

$$\mathbf{f}_e = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4\}^T \quad (170)$$

é o vetor de valores nodais. Da mesma forma, as coordenadas de um ponto dentro do elemento em termos das coordenadas naturais:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \mathbf{N} \mathbf{x}_e \quad (171)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = \mathbf{N} \mathbf{y}_e \quad (172)$$

onde as coordenadas nodais $\mathbf{x}_e$ e $\mathbf{y}_e$ do elemento e são:

$$\mathbf{x}_e = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad (173)$$

$$\mathbf{y}_e = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T \quad (174)$$

No cálculo de algumas das matrizes constitutivas, é preciso expressar as derivadas da função f em coordenadas x e y , em termos das suas derivadas em coordenadas ξ e η . Utilizando a regra da cadeia de diferenciação, tem-se o sistema matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{df}{d\xi} \\ \frac{df}{d\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{Bmatrix} \quad (175)$$

onde a matriz 2×2 é denominada matriz Jacobiana, a qual é a matriz que permite através do seu determinante (ou Jacobiano) fazer o mapeamento entre as coordenadas naturais e as coordenadas globais.

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \quad (176)$$

Derivando a eq.(171) e eq.(172) em relação à ξ e η a matriz Jacobiana é:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (177)$$

onde:

$$J_{11} = \frac{1}{4}(-(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4) \quad (178)$$

$$J_{12} = \frac{1}{4}(-(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4) \quad (179)$$

$$J_{21} = \frac{1}{4}(-(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4) \quad (180)$$

$$J_{22} = \frac{1}{4}(-(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4) \quad (181)$$

logo da eq.(175):

$$\begin{Bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{df}{d\xi} \\ \frac{df}{d\eta} \end{Bmatrix} \quad (182)$$

onde:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (183)$$

O Jacobiano J é definido como o determinante da matriz Jacobiana, logo:

$$J = \det([J]) = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (184)$$

Já que na determinação das matrizes constitutivas é necessária a integração numérica sobre o domínio do elemento finito, é preciso uma relação entre o domínio físico e o domínio natural, dada por:

$$dx dy = J d\xi d\eta \quad (185)$$

logo a integral bidimensional da função f no domínio do elemento com espessura constante t_e utilizando o método da quadratura gaussiana fica (BATHE, 1996):

$$I = \int_{V_e} f(\xi, \eta) dV_e = \int_{V_e} f(\xi, \eta) t_e dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) t_e J d\xi d\eta = t_e \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j J f(\xi_i, \eta_j) \quad (186)$$

O método estabelece que $w_i = w_j = 1$, $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para aproximar à integral I. Introduzindo a interpolação da variável f na eq.(175), obtém-se:

$$\nabla f = \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} f_i = \mathbf{B} \mathbf{f}_e \therefore i = 1 \text{ a } 4 \quad (187)$$

então:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} \therefore i = 1 \text{ a } 4 \quad (188)$$

A matriz $\mathbf{B}$ é denominada a matriz do gradiente das funções de forma. O número total de elementos da discretização é dado pela letra N , enquanto que o número total de nós pela letra n . Feita a discretização em elementos finitos a montagem das matrizes constitutivas é realizada seguindo as regras de conectividade que regem no modelo. Hughes (1987) define a operação de montagem de uma matriz $\mathbf{F}$ de elementos finitos qualquer, a partir de matrizes elementares $\mathbf{f}_e$, como:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^N \mathbf{A} \mathbf{f}_e \quad (189)$$

onde o operador $\mathbf{A}$, chamado de operador de montagem, é utilizado para simbolizar a montagem das matrizes constitutivas. O subíndice e percorre desde 1 até o número máximo N de elementos finitos presente no modelo.

Seguindo a formulação isoparamétrica, no caso do domínio termoelástico, o gradiente do campo de deslocamento real dado nas coordenadas físicas (x, y) deve ser definido nas coordenadas naturais (ξ, η) , portanto (BATHE, 1996):

$$\varepsilon_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,x} + u_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det([J])} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{12} & J_{11} \\ -J_{12} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = [B_{12}] \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (190)$$

Na relação anterior, os componentes J_{ij} da matriz B_{12} foram definidos anteriormente nas eq.(170) até eq.(173) e o determinante da matriz Jacobiana $[J]$ é dado pela eq.(176). Calculando as derivadas contidas no último termo da eq.(182), o vetor deformação fica:

$$\{\varepsilon\} = [B_{12}] \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \{u\} = [B_{12}][B_{22}]\{u\} \quad (191)$$

ou seja, a matriz do gradiente das funções de forma no domínio termo elástico é dada por:

$$[B_2] = [B_{12}][B_{22}] = \frac{1}{\det([J])} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{12} & J_{11} \\ -J_{12} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \quad (192)$$

APÊNDICE B – FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ELÉTRICO EM REGIME ESTACIONÁRIO

As matrizes e vetores constitutivos do problema elétrico são determinados utilizando uma interpolação da variável de estado V na eq.(14), e substituindo no gradiente de V uma expressão derivada da eq.(187), (ver APÊNDICE A), dada por:

$$V_{,p} = B_{pi} V_i \quad (193)$$

com i indo de 1 até 4 e p de 1 até 2. Para um elemento e da discretização o problema fica:

$$\int_{V_e} \bar{V}_i B_{ip}^T \sigma_o B_{pj} V_j dV_e = \int_{S_e} N_i \bar{V}_i \sigma_o \frac{\partial V}{\partial n} dS_e \quad (194)$$

com p indo de 1 até 2 e, i e j indo de 1 até 4. Os limites de integração V_e e S_e correspondem ao volume do elemento e a superfície envolvendo esse volume respectivamente. Eliminando $\bar{V}_i$ de ambos os lados, já que é um vetor de constantes arbitrário:

$$\left[\int_{V_e} B_{ip}^T \sigma_o B_{pj} V_j dV_e \right] V_j^e = \int_{S_e} N_i \sigma_o \frac{\partial V}{\partial n} dS_e \quad (195)$$

agora, levando em conta que o superíndice e faz referência ao e -ésimo elemento da discretização:

$$K_{oij}^e V_j^e = F_{oi}^e \quad (196)$$

onde i e j são os GDL do elemento e . No problema elétrico o grau de liberdade por nó corresponde à voltagem. Para um domínio de projeto qualquer, aplicando o operador de montagem definido na eq.(189), (ver APÊNDICE A), e o modelo de material para a condutividade elétrica (eq.(44)), o modelo de elementos finitos tem a forma:

$$K_{oij}(\rho_e) V_j(\rho_e) = F_{oi} \quad (197)$$

A matriz de rigidez elétrica global K_{oij} é:

$$K_{oij} = \sum_{e=1}^N K_{oij}^e = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_e} B_{ip}^T \rho_e^{P_o} \sigma_o^o B_{pj} dV_e \right]_e = \sum_{e=1}^N \left[\rho_e^{P_o} \sigma_o^o t_e \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dx dy \right]_e \quad (198)$$

O termo de corrente elétrica F_{oi} é:

$$F_{oi} = \sum_{e=1}^N F_{oi}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{S_e} N_j \sigma_o \frac{\partial V_j}{\partial \hat{n}_i} dS_e \right\}_e \quad (199)$$

Dado que as superfícies laterais que contornam o domínio são as que admitem a excitação por corrente elétrica, a superfície diferencial dS_e se transforma em (ver Figura 108):

$$dS_e = t_e dL_e = t_e (dl_{12} + dl_{23} + dl_{34} + dl_{41}) \quad (200)$$

Figura 108 – Superfícies laterais e os seus vetores normais unitários em um elemento isoparamétrico de quatro nós

Para um elemento e da discretização:

$$F_{oi}^e = \left\{ \int_{S_e} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_i} dS_e \right\}_e = t_e \left\{ \oint_{L_e} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_i} dL_e \right\}_e =$$

$$t_e \left\{ \int_{l_{12}} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_1} dl_{12} + \int_{l_{23}} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_2} dl_{23} + \int_{l_{34}} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_3} dl_{34} + \int_{l_{41}} N_j \sigma_o \frac{dV_j}{d\hat{n}_4} dl_{41} \right\} \quad (201)$$

Os termos contidos em cada integral no lado direito da equação anterior são diferentes de zero quando o nó j pertencer à fronteira dl correspondente, já que a função de forma N_j é igual a 1, caso contrário, vai para zero. Assim, tem-se:

$$F_{oi_e} = t_e \left\{ \begin{array}{l} \int_{l_{12}} N_1 \sigma_0 \frac{dV_1}{d\hat{n}_1} dl_{12} + \int_{l_{41}} N_1 \sigma_0 \frac{dV_1}{d\hat{n}_4} dl_{41} \\ \int_{l_{12}} N_2 \sigma_0 \frac{dV_2}{d\hat{n}_1} dl_{12} + \int_{l_{23}} N_2 \sigma_0 \frac{dV_2}{d\hat{n}_2} dl_{23} \\ \int_{l_{23}} N_3 \sigma_0 \frac{dV_3}{d\hat{n}_2} dl_{23} + \int_{l_{34}} N_3 \sigma_0 \frac{dV_3}{d\hat{n}_3} dl_{34} \\ \int_{l_{34}} N_4 \sigma_0 \frac{dV_4}{d\hat{n}_3} dl_{34} + \int_{l_{41}} N_4 \sigma_0 \frac{dV_4}{d\hat{n}_4} dl_{41} \end{array} \right\}_e \quad (202)$$

integrando sobre o respectivo domínio, aplicando a definição da eq.(10) e organizando os termos, observa-se que:

$$F_{oi}^e = \frac{t_e}{2} \left\{ \begin{array}{l} (-J_{12}^p)l_{12} + (-J_{41}^p)l_{41} \\ (-J_{12}^p)l_{12} + (-J_{23}^p)l_{23} \\ (-J_{23}^p)l_{23} + (-J_{23}^p)l_{34} \\ (-J_{34}^p)l_{34} + (-J_{41}^p)l_{41} \end{array} \right\}_e = \frac{t_e}{2} \begin{bmatrix} -J_{12}^p & 0 & 0 & -J_{41}^p \\ -J_{12}^p & -J_{23}^p & 0 & 0 \\ 0 & -J_{23}^p & -J_{23}^p & 0 \\ 0 & 0 & -J_{23}^p & -J_{41}^p \end{bmatrix}_e \left\{ \begin{array}{l} l_{12} \\ l_{23} \\ l_{34} \\ l_{41} \end{array} \right\}_e = \frac{t_e}{2} J_{ij}^p L_j \quad (203)$$

sendo t_e a espessura do elemento e , J_{ij}^p uma matriz 4x4 de densidade de corrente prescrita no elemento e (condições de contorno que se traduz em restrições do modelo MEF) e L_j um vetor contendo os comprimentos das fronteiras do elemento e . Finalmente, o termo F_{oi} , de acordo com o resultado anterior, e se existir corrente pontual prescrita (I_i^p) nos nós, pode ser expresso como:

$$F_{oi} = \sum_{e=1}^N F_{oi}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \frac{t_e}{2} J_{ij}^p L_j + I_i^p \right\}_e \quad (204)$$

onde:

t_e : Espessura do elemento e .

J_{ij}^p : Matriz 4x4 de densidade de corrente prescrita no elemento e (condições de contorno que se traduz em restrições do modelo MEF).

L_j : Vetor contendo os comprimentos das fronteiras do elemento e .

APÊNDICE C – DETALHAMENTO DA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS TÉRMICO

A seguir, são apresentados alguns termos da implementação numérica do MEF térmico na sua forma detalhada.

• **Jacobiano de linha para avaliação de integrais sobre o contorno do domínio.** O Jacobiano (que relaciona o domínio físico e o domínio natural) é definido para as fronteiras l_{12} e l_{34} locais do elemento e , como:

$$J_{\xi} = \sqrt{(N_{i,\xi}x_i|l_{ij})^2 + (N_{i,\xi}y_i|l_{ij})^2} \quad (205)$$

enquanto que para as fronteiras l_{23} e l_{41} :

$$J_{\eta} = \sqrt{(N_{i,\eta}x_i|l_{ij})^2 + (N_{i,\eta}y_i|l_{ij})^2} \quad (206)$$

A notação $|l_{ij}$ significa que N_i está avaliada sobre a fronteira l_{ij} correspondente.

• **Contribuição à matriz de rigidez térmica devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento.** A eq.(64), utilizando a relação da eq.(200) e aplicando o modelo de material para o coeficiente de convecção da eq.(47), é calculada como:

$$K_{hcij}^e = \left[\rho_e^{P_3} h_1^o t_e \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right]_e =$$

$$\rho_e^{P_3} h_1^o t_e \oint_{L_e} \begin{bmatrix} N_1 N_1 (dl_{12} + dl_{41}) & N_1 N_2 dl_{12} & 0 & N_1 N_4 dl_{41} \\ N_2 N_1 dl_{12} & N_2 N_2 (dl_{12} + dl_{23}) & N_1 N_2 dl_{23} & 0 \\ 0 & N_3 N_2 dl_{23} & N_3 N_3 (dl_{23} + dl_{34}) & N_3 N_4 dl_{34} \\ N_4 N_1 dl_{41} & 0 & N_4 N_3 dl_{34} & N_4 N_4 (dl_{34} + dl_{41}) \end{bmatrix}_e \quad (207)$$

Levando em conta que o contorno é variável durante o processo de otimização a eq.(64) transforma-se na eq.(117), portanto:

$$K_{hcij}^e = \left[\rho_e^{P_3} h_1^o t_e \gamma \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right]_e = \rho_e^{P_3} h_1^o t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} \begin{bmatrix} N_1 N_1 (dl_{12} + dl_{41}) & N_1 N_2 dl_{12} & 0 & N_1 N_4 dl_{41} \\ N_2 N_1 dl_{12} & N_2 N_2 (dl_{12} + dl_{23}) & N_1 N_2 dl_{23} & 0 \\ 0 & N_3 N_2 dl_{23} & N_3 N_3 (dl_{23} + dl_{34}) & N_3 N_4 dl_{34} \\ N_4 N_1 dl_{41} & 0 & N_4 N_3 dl_{34} & N_4 N_4 (dl_{34} + dl_{41}) \end{bmatrix}_e \quad (208)$$

• **Contribuição ao vetor de fluxo de calor devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento.** Com considerações iguais ao termo anterior, a eq.(67) toma a forma:

$$F_{hci}^e = \left\{ \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \oint_{L_e} N_i dL_e \right\}_e = \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \oint_{L_e} \begin{Bmatrix} N_1 (dl_{12} + dl_{41}) \\ N_2 (dl_{12} + dl_{23}) \\ N_3 (dl_{23} + dl_{34}) \\ N_4 (dl_{34} + dl_{41}) \end{Bmatrix}_e \quad (209)$$

Levando em conta que o contorno é variável durante o processo de otimização, a eq.(67) transforma-se na eq.(118), assim:

$$F_{hcie} = \left\{ \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \gamma \oint_{L_e} N_i dL_e \right\}_e = \rho_e^{P_3} h_1^o T^P t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} \begin{Bmatrix} N_1 (dl_{12} + dl_{41}) \\ N_2 (dl_{12} + dl_{23}) \\ N_3 (dl_{23} + dl_{34}) \\ N_4 (dl_{34} + dl_{41}) \end{Bmatrix}_e \quad (210)$$

• **Modelo de elementos finitos térmico em estado estacionário.** Quando considerado o caso estacionário o vetor de variação de temperatura no tempo ($\dot{T}_j$) é nulo, portanto o modelo de elementos finitos é regido por:

$$K_{1ij}(\rho_e) T_j(\rho_e) = F_{1i}(V_i(\rho_e), \rho_e) \quad (211)$$

APÊNDICE D – FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS TERMOELÁSTICO EM REGIME QUASE-ESTÁTICO

A forma vetorial da Lei de Hooke é dada pela eq.(69), onde o vetor tensão mecânica S_m (forma indicial) é definido como:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \quad (212)$$

Sendo σ_{ii} as tensões normais e τ_{ij} as tensões de cisalhamento. Assim, a matriz de módulo elástico, simétrica, tem a forma:

$$[D_2] = \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \begin{bmatrix} 1-\nu_2 & \nu_2 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & 1-\nu_2 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & \nu_2 & 1-\nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_2}{2} \end{bmatrix} \quad (213)$$

onde E_2 é o módulo de Young e ν_2 o coeficiente de Poisson. O vetor deformação é definido da forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} \quad (214)$$

sendo ε_{ii} as deformações normais e γ_{ij} as deformações cortantes. Por último o vetor de deformação térmica é:

$$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2(T - T^p) \\ \alpha_2(T - T^p) \\ \alpha_2(T - T^p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (215)$$

sendo α_2 o coeficiente de expansão térmica. Considerando um estado plano de tensão, a relação esforço-deformação reduz-se a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_2(T - T^p) \\ \alpha_2(T - T^p) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (216)$$

Assim, a matriz do módulo elástico para estado plano de tensão é dada por:

$$[D_2] = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} \quad (217)$$

Considerando o efeito térmico, pode-se definir um vetor de tensão térmica para simplificar a formulação integral, dado por:

$$\{S_T\} = \frac{E_2 \alpha_2 (T - T^p)}{1-\nu_2^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E_2 \alpha_2}{(1-\nu_2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (T - T^p) = \{\alpha_{T2}\} (T - T^p) \quad (218)$$

com $\{\alpha_{T2}\}$ como o vetor de expansão térmica.

No domínio termoelástico a incógnita do sistema é o campo vetorial de deslocamentos $\{d\}$, com componentes no eixo x (direção horizontal, u) e no eixo y (deslocamento vertical, v), tendo assim dois graus de liberdade por nó. A convenção adotada para os deslocamentos em cada elemento no sistema natural de coordenadas mostra-se na Figura 109. No domínio físico a convenção para os deslocamentos é análoga à mostrada na figura mencionada anteriormente.

Figura 109 – Deslocamentos elementares no sistema natural de coordenadas

Introduzindo a interpolação nas componentes do campo de deslocamento $\{d\} = \{u, v\}^T$ para cada nó, obtém-se:

$$u = N_i u_i \quad (219)$$

$$v = N_i v_i \quad (220)$$

que, na forma indicial, pode ser escrita:

$$d_i = N_{2ir} u_r \quad (221)$$

com i variando desde 1 até 2 e r de 1 até 8. O subíndice 2 na matriz N_{2ir} significa que somente é utilizada no problema termoelástico. A matriz N_{2ir} é dada por:

$$N_{2ir} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (222)$$

sendo N_i as funções de forma (ver APÊNDICE A), logo o vetor de deslocamento nodal u_r é:

$$u_r = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (223)$$

Na forma indicial, o gradiente do deslocamento é:

$$\varepsilon_p = B_{2pr} u_r \quad (224)$$

de novo o subíndice p variando de 1 até 3 e r de 1 até 8. Aplicando as relações anteriores à eq.(41) e considerando um elemento e da discretização, obtém-se:

$$\int_{V_e} \bar{u}_r B_{2rp}^T D_{2pi} B_{2is} u_s dV_e = \int_{S_e} \bar{u}_r N_{2rj}^T q_{ej}^p dS_e + \int_{V_e} \bar{u}_r B_{2rp}^T \alpha_{T2p} (N_q T_q - T^p) dV_e \quad (225)$$

onde deve lembrar-se que o vetor N_q é o definido na eq.(169) e T_q corresponde ao vetor de temperaturas nodais do elemento e . Os subíndices r e s variam de 1 até 8, p e i de 1 até 3, j de 1 até 2 e q de 1 até 4. O vetor q_{ej}^p é o vetor de componentes das forças de tração superficial prescritas sobre o elemento e . Considerando $\bar{u}_r$ um vetor de constantes arbitrário, pode ser eliminado da equação anterior, deste modo:

$$\left[\int_{V_e} B_{2rp}^T D_{2pi} B_{2is} dV_e \right] u_s^e = \left\{ \oint_{L_e} N_{2rj}^T q_{ej}^p t_e dL_e + \int_{V_e} B_{2rp}^T \alpha_{T2p} (N_q T_q - T^p) dV_e \right\} \quad (226)$$

com T^p como a temperatura prescrita, que neste caso é a temperatura ambiente. A forma matricial da equação anterior, levando em conta que o superíndice e faz referência ao e -ésimo elemento da discretização, é:

$$K_{2rs}^e u_s^e = F_{2r}^e \quad (227)$$

onde r e s são os GDL do elemento e . Para um domínio de projeto qualquer, aplicando o operador de montagem definido na eq.(189), (ver APÊNDICE A), e o modelo de material

para o módulo de Young e o vetor de expansão térmica (eq.(71) e eq.(72)), o modelo de elementos finitos no domínio termoelástico tem a forma:

$$K_{2rs}(\rho_e)U_s(\rho_e, t) = F_{2r}(T_q(\rho_e, t), \rho_e, t) \quad (228)$$

A matriz de rigidez estrutural global K_{2rs} é dada por:

$$K_{2rs} = \sum_{e=1}^N K_{2rs}^e = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_e} B_{2rp}^T D_{2pi} B_{2is} dV_e \right]_e = \sum_{e=1}^N \left[\rho_e^{P_4} t_e \int_{V_e} B_{2rp}^T D_{2pi}^o B_{2is} dx dy \right]_e \quad (229)$$

O termo F_{2r} se tiver prescritas forças pontuais (F_r^P) e forças distribuídas superficiais (q_{ej}^P), é definido como:

$$F_{2r} = \sum_{e=1}^N F_{2r}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ F_{qr}^P + F_{Tr}^e + F_r^P \right\}_e \quad (230)$$

onde:

F_{qr}^P : Contribuição ao vetor de força devida às forças distribuídas superficiais prescritas (q_{ej}^P) no contorno do elemento se houverem.

F_{Tr}^e : Contribuição ao vetor de força devida à mudança de temperatura no material do elemento.

Para o termo correspondente às forças distribuídas prescritas, faz-se uma análise análoga ao problema elétrico, lembrando que as superfícies laterais que contornam o elemento são aquelas que admitem carregamento (sendo a área diferencial dada pela eq.(200)), e, além disso, as funções de forma N_i , contidas na matriz N_{2jr} , são iguais a 1 quando o nó i pertencer à fronteira dl correspondente, caso contrário são nulas. De acordo com o exposto anteriormente, integrando sobre o respectivo domínio, aplicando a definição da eq.(37) e organizando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\{F_{qr}^p\}_e &= \left\{ \oint_{L_e} N_{2rj}^T q_{ej}^p t_e dL_e \right\}_e = t_e \left\{ \begin{aligned} &\int_{l_{12}} N_1 q_{x12}^p dl_{12} + \int_{l_{41}} N_1 q_{x41}^p dl_{41} \\ &\int_{l_{12}} N_1 q_{y12}^p dl_{12} + \int_{l_{41}} N_1 q_{y41}^p dl_{41} \\ &\int_{l_{12}} N_2 q_{x12}^p dl_{12} + \int_{l_{23}} N_2 q_{x23}^p dl_{23} \\ &\int_{l_{12}} N_2 q_{y12}^p dl_{12} + \int_{l_{23}} N_2 q_{y23}^p dl_{23} \\ &\int_{l_{23}} N_3 q_{x23}^p dl_{23} + \int_{l_{34}} N_3 q_{x34}^p dl_{34} \\ &\int_{l_{23}} N_3 q_{y23}^p dl_{23} + \int_{l_{34}} N_3 q_{y34}^p dl_{34} \\ &\int_{l_{34}} N_4 q_{x34}^p dl_{34} + \int_{l_{41}} N_4 q_{x41}^p dl_{41} \\ &\int_{l_{34}} N_4 q_{y34}^p dl_{34} + \int_{l_{41}} N_4 q_{y41}^p dl_{41} \end{aligned} \right\}_e = \\
\frac{t_e}{2} \left\{ \begin{aligned} &q_{x12}^p l_{12} + q_{x41}^p l_{41} \\ &q_{y12}^p l_{12} + q_{y41}^p l_{41} \\ &q_{x12}^p l_{12} + q_{x23}^p l_{23} \\ &q_{y12}^p l_{12} + q_{y23}^p l_{23} \\ &q_{x23}^p l_{23} + q_{x34}^p l_{34} \\ &q_{y23}^p l_{23} + q_{y34}^p l_{34} \\ &q_{x34}^p l_{34} + q_{x41}^p l_{41} \\ &q_{y34}^p l_{34} + q_{y41}^p l_{41} \end{aligned} \right\}_e &= \frac{t_e}{2} \begin{bmatrix} q_{x12}^p & 0 & 0 & q_{x41}^p \\ q_{y12}^p & 0 & 0 & q_{y41}^p \\ q_{x12}^p & q_{x23}^p & 0 & 0 \\ q_{y12}^p & q_{y23}^p & 0 & 0 \\ 0 & q_{x23}^p & q_{x34}^p & 0 \\ 0 & q_{y23}^p & q_{y34}^p & 0 \\ 0 & 0 & q_{x34}^p & q_{x41}^p \\ 0 & 0 & q_{y34}^p & q_{y41}^p \end{bmatrix}_e \left\{ \begin{aligned} &l_{12} \\ &l_{23} \\ &l_{34} \\ &l_{41} \end{aligned} \right\}_e = \frac{t_e}{2} t_{rj}^p L_j \quad (231)
\end{aligned}$$

sendo t_e a espessura do elemento e , t_{rj}^p uma matriz 8×4 de forças distribuídas prescritas no elemento e (condições de contorno do modelo MEF) e L_j um vetor contendo os comprimentos das fronteiras do elemento e . A contribuição ao vetor de força pela mudança de temperatura no material do elemento, levando em conta a inclusão do modelo de material para o módulo de Young no vetor de expansão térmica, é:

$$F_{Tr}^e = \left\{ \int_{V_e} B_{2rp}^T \alpha_{T2p} (N_q T_q - T^p) dV_e \right\}_e = \left\{ \rho_e^{P4} t_e \int_{V_e} B_{2rp}^T \alpha_{T2p}^0 (N_q T_q - T^p) dx dy \right\}_e \quad (232)$$

Em concordância com os resultados anteriores, o termo F_{2r} pode ser expresso como:

$$F_{2r} = \sum_{e=1}^N F_{2r}^e = \sum_{e=1}^N \left\{ \frac{t_e}{2} t_{rj}^p L_j + F_{Tr} + F_r^p \right\}_e \quad (233)$$

APÊNDICE E – CONCEITOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO

A seguir são esclarecidos alguns conceitos presentes em qualquer problema de otimização envolvendo o MEF (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009; CHOI; KIM, 2005):

- **Domínio fixo de projeto:** É o espaço geométrico fixo delimitado pelos pontos de apoio da estrutura e os pontos de aplicação dos carregamentos que conterá a estrutura encontrada pelo processo de otimização. Portanto, o material é adicionado ou removido dentro do domínio de projeto, sem que sua forma inicial seja alterada;
- **Variável de estado:** É uma função ou vetor que representa a resposta da estrutura. Nos microsistemas ETM, as variáveis de estado correspondem à tensão elétrica, temperatura e deslocamento;
- **Nó:** É um ponto contido dentro do domínio fixo de projeto, que tem associados graus de liberdade do sistema;
- **Grau de liberdade (GDL):** É a incógnita do sistema. Representa a resposta de um sistema ante qualquer estado de carga. Por exemplo, em um modelo térmico a resposta do sistema é a temperatura;
- **Elemento Finito:** Unidade gráfica e matemática que conecta os nós;
- **Condições de contorno:** São as condições iniciais e de fronteira de uma equação diferencial que se traduz em restrições de um modelo MEF;
- **Conectividade:** Característica que permite a construção global de um modelo de elementos finitos e garante a continuidade do modelo;
- **Variável de projeto:** Uma função ou vetor que parametriza o projeto, tendo a faculdade de mudar durante o processo de otimização. As variáveis de projeto podem ser de tamanho

(espessura, área transversal), de forma (comprimento ou forma do contorno da geometria) e topológicas (função de pseudo-densidades);

- **Pseudo-densidade:** É uma função que normaliza a densidade de material de cada elemento finito de um domínio discretizado, com a finalidade de interpolar as propriedades de material envolvidas no processo de otimização. Assim, a pseudo-densidade pode variar entre zero (representado o vazio) e um (representado o material sólido). Se possuir algum valor entre os dois anteriores, significa que o elemento finito possui propriedades intermediárias;

- **Função objetivo:** É uma função de desempenho ou custo que caracteriza a qualidade do sistema estudado. Essa função pode medir a massa, deslocamento, esforço, flexibilidade, frequência natural, custo de fabricação, entre outras. A função deve ter uma dependência das variáveis de projeto para que o processo de otimização seja válido;

- **Restrições:** São os critérios ou requisitos que o sistema deve satisfazer para um projeto viável. Somente os conjuntos de variáveis de projeto que satisfazem as restrições são candidatos a um projeto ótimo;

- **Domínio viável:** É a região no espaço de dimensão n definida pelas restrições, na qual estão contidos todos os conjuntos de variáveis de projeto candidatos para o projeto ótimo;

- **Domínio inviável:** É a região no espaço de dimensão n por fora do contorno das restrições. Cabe esclarecer que se em um conjunto de variáveis de projeto, apenas uma variável não cumpre alguma das restrições é considerado que o conjunto encontra-se no domínio inviável do problema;

- **Análise de sensibilidade:** É o processo de cálculo que permite estabelecer a medida de variação da função de desempenho em relação às variáveis de projeto;

- **Modelo de material:** É uma função que determina a forma de variação do material envolvido no processo de otimização;

- **Fator de penalização:** Ou simplesmente penalizador, é um parâmetro do modelo de material, que permite converter o problema contínuo de otimização em um problema discreto;
- **Solução 0-1:** É um tipo de solução para o problema de OT, no qual as variáveis de projeto têm estritamente valores zero ou um. Em outras palavras, a solução não possui valores intermediários;
- **Sensibilidades:** São as variações da função objetivo com respeito às variações das variáveis de projeto. Em outras palavras, são as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto;

A forma geral de um problema de otimização é dada por (HASSANI; HINTON, 1999; HAFTKA; GÜRDAL, 1992):

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} \text{Minimizar ou} \\ \text{Maximizar} \end{array} & \min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \text{ ou } \max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \\
 & \text{tal que } \left\{ \begin{array}{l} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_g \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n_h \\ x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \end{array} \right.
 \end{array} \quad (234)$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor de variáveis de projeto, g e h são as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, presentes em um número n_h e n_g segundo o caso. O problema também pode implicar desigualdades do tipo $g_m(\mathbf{x}) \geq 0$, $k = 1, \dots, n_m$, sem perda de generalidade. x_k^l e x_k^u são os limites inferior e superior estabelecidos para cada variável de projeto. Esses limites são expressos em restrições denominadas de caixa. Nos problemas de Engenharia o problema de otimização adquire a forma (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009):

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} \text{Minimizar ou} \\ \text{Maximizar} \end{array} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ ou } \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 & \text{tal que } \left\{ \begin{array}{l} \text{restrições nas variáveis de projeto } (\mathbf{x}) \\ \text{restrições de comportamento nas variáveis da estado } (\mathbf{y}) \\ \text{restrições de equilíbrio (equações descrevendo o problema)} \end{array} \right.
 \end{array} \quad (235)$$

APÊNDICE F – CÁLCULO DE SENSIBILIDADES UTILIZANDO O MÉTODO DIRETO

Existem três métodos para o cálculo de sensibilidade (HAFTKA; GÜRDAL, 1992):

- Método das Diferenças Finitas (MDF): De alto custo computacional, mas fácil de implementar. A sua precisão depende do tamanho do passo utilizado para o seu cálculo. O erro total da sua estimativa origina-se da composição de um erro de truncamento (próprio da aproximação matemática feita para o seu cálculo) e um erro de arredondamento (que depende da precisão do computador). Pelas desvantagens enunciadas converte-se no último recurso para o cálculo de sensibilidades (TORTORELLI; MICHALERIS, 1994). Embora sujeito a esses erros, a precisão do método pode melhorar com a introdução de uma variável complexa (SQUIRE; TRAPP, 1998). O MDF neste trabalho foi utilizado somente para a verificação das sensibilidades pelo método analítico.
- Método Semi-analítico: Alterna as vantagens da derivação direta da função objetivo ou restrições com o cálculo pelo MDF de derivadas muito complexas que estiverem envolvidas nas expressões resultantes da derivação direta. Pode levar a erros consideráveis se a perturbação utilizada no MDF não for adequada. Geralmente está relacionada com a derivação direta das equações governantes calculando as derivadas resultantes com o MDF (VAN KEULEN; HAFTKA; KIM, 2005).
- Método Analítico: Fornece o valor exato da sensibilidade sendo o método mais preciso do que os dois anteriores. Por sua vez, os métodos analíticos estão divididos em método direto e método adjunto. Neste trabalho foi utilizado o método adjunto.

A sensibilidade pelo método direto requer determinar as derivadas dos campos de resposta em relação a cada variável de projeto, sendo que deve ser aplicada a regra da cadeia para o cálculo dessas derivadas (TORTORELLI et al., 1991). Deve lembrar-se que o número total de elementos da discretização é dado pela letra N , enquanto que o número total de nós pela letra n . A letra e representa o e -ésimo elemento da discretização. A sensibilidade da

função objetivo por diferenciação direta de um problema transiente é dada por (CHEN; TONG, 2004):

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial u_{out}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial u_{out}}{\partial T_i} \frac{dT_i}{d\rho_e} \right) dt \quad (236)$$

O deslocamento e a sua sensibilidade em relação às variáveis de projeto podem ser expressos pelas seguintes relações (SIGMUND, 2001b):

$$u_{out} = L_{2r}^T U_r \quad (237)$$

$$\frac{du_{out}}{d\rho_e} = L_{2r}^T \frac{dU_r}{d\rho_e} \quad (238)$$

onde L_{2r}^T é um vetor de tamanho n , que contém zeros exceto na posição correspondente ao grau de liberdade (GDL) na direção do deslocamento de saída no problema estrutural, cujo valor é 1. Portanto, a sensibilidade da função objetivo é:

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \int_0^{t_f} L_{2r}^T \left(\frac{\partial U_r}{\partial \rho_e} + \frac{\partial U_r}{\partial T_i} \frac{dT_i}{d\rho_e} \right) dt \quad (239)$$

Da equação de equilíbrio, eq.(73), obtém-se:

$$\frac{\partial U_r}{\partial \rho_e} = K_{2rs}^{-1} \left(\frac{\partial F_{2s}}{\partial \rho_e} - \frac{dK_{2sv}}{d\rho_e} U_v \right) \quad (240)$$

Os termos K_{2sr} e U_v são conhecidos do MEF. O termo $\frac{\partial F_{2s}}{\partial \rho_e}$ define-se como:

$$\frac{\partial F_{2s}}{\partial \rho_e} = \frac{N}{A} \frac{\partial F_{2s}^e}{\partial \rho_e} = \frac{N}{A} \left\{ P_4 \rho_e^{P_4-1} \int_{V_e} B_{2sp}^T \alpha_{T2p}^o (N_q T_q - T^p) dV_e \right\}_e \quad (241)$$

O termo $\frac{dK_{2rs}}{d\rho_e}$ somente depende da variável de projeto e pode ser expresso da seguinte forma:

$$\frac{dK_{2rs}}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \frac{dK_{2rs}^e}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \left[P_4 \rho_e^{P_4-1} \int_{V_e} B_{2rp}^T D_{2pi}^0 B_{2is} dV_e \right]_e \quad (242)$$

Dado que K_{2rs} tem dimensão $2n \times 2n$, a sua sensibilidade $\frac{dK_{2rs}}{d\rho_e}$ tem dimensão $2n \times 2n$ x e . Assim, é recomendável calcular o produto $\frac{dK_{2rs}}{d\rho_e} U_s$ para evitar tratar com termos multidimensionais. Esse produto pode ser calculado como:

$$\frac{dK_{2rs}}{d\rho_e} U_s = \frac{N}{A} \left\{ \frac{dK_{2rs}^e}{d\rho_e} U_s^e \right\}_e = \frac{N}{A} \left\{ \left[P_4 \rho_e^{P_4-1} \int_{V_e} B_{2rp}^T D_{2pi}^0 B_{2is} dV_e \right] U_s \right\}_e \quad (243)$$

onde U_s é o vetor de deslocamentos nodais extraído do MEF correspondente ao elemento e . A derivada $\frac{\partial U_r}{\partial T_i}$ na eq.(239) pode ser obtida derivando novamente a equação de equilíbrio eq.(73) que conduz a:

$$\frac{\partial U_r}{\partial T_i} = K_{2rs}^{-1} \left(\frac{\partial F_{2s}}{\partial T_i} \right) \quad (244)$$

O termo $\frac{\partial F_{2s}}{\partial T_i}$ é:

$$\frac{\partial F_{2s}}{\partial T_i} = \frac{N}{A} \frac{\partial F_{2s}^e}{\partial T_i} = \frac{N}{A} \left[\rho_e^{P_4} \int_{V_e} B_{2sp}^T \alpha_{T2p}^0 N_i dV_e \right]_e \quad (245)$$

que não depende explicitamente do tempo, apesar do que o problema seja resolvido de forma dinâmica. O último termo na eq.(239) é obtido derivando-se a equação de equilíbrio térmico (eq.(56)) em relação à variável de projeto, deste modo obtém-se:

$$C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} + K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} = \frac{dF_{1i}}{d\rho_e} - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (246)$$

com a condição inicial $\left. \frac{dT_j}{d\rho_e} \right|_{t=0} = 0$, já que no instante inicial T_j é constante no domínio (KWAK; HAHN, 2000). As matrizes C_{1ij} e K_{1ij} , e os vetores $\dot{T}_j$ e T_j são conhecidos do MEF. As sensibilidades das matrizes C_{1ij} e K_{1ij} em relação às variáveis de projeto são dadas pelas relações:

$$\frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \frac{dC_{1ij}^e}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \left[P_1 \rho_e^{P_1-1} \alpha_1^0 \int_{V_e} N_i N_j dV_e \right]_e \quad (247)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \frac{dK_{1ij}^e}{d\rho_e} = \frac{N}{A} & \left[\left[P_2 \rho_e^{P_2-1} \sigma_1^0 \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dV_e \right] + \left[2P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 \int_{S_e} N_i N_j dS_e \right] + \right. \\ & \left. \left[P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right] - \left[h_1^0 t_e \sum_{m=1}^v \rho_m^{P_3} \oint_{L_m} N_i N_j dL_m \right] \right]_e \end{aligned} \quad (248)$$

Na eq.(248), o domínio de integração dL_m refere-se ao contorno do elemento vizinho m que compartilha a fronteira com o elemento e , segundo os mapeamentos descritos na Figura 108 e na Figura 27. Deste modo, os dois últimos termos nesta equação compõem a contribuição à sensibilidade da matriz de rigidez térmica em relação às variáveis de projeto, devida à transferência de calor por convecção, no contorno do elemento. Observa-se que essa sensibilidade é composta por uma parcela determinada quando o elemento m for vizinho de do elemento e (primeiro termo) e outra definida quando o elemento e for vizinho do elemento m (segundo termo). Com a finalidade de evitar o tratamento com termos multidimensionais na eq.(246), são calculados os produtos $\frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j$ e $\frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j$ com as expressões:

$$\frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j = \frac{N}{A} \left\{ \frac{dC_{1ij}^e}{d\rho_e} \dot{T}_j^e \right\}_e = \frac{N}{A} \left\{ \left[P_1 \rho_e^{P_1-1} \alpha_1^0 \int_{V_e} N_i N_j dV_e \right] \{ \dot{T}_j \} \right\}_e \quad (249)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j = & \frac{N}{A} \left\{ \frac{dK_{1ij}^e}{d\rho_e} T_j^e \right\}_e = \frac{N}{A} \left\{ \left[P_2 \rho_e^{P_2-1} \sigma_1^0 \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dV_e \right] + \right. \\
& \left[2P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 \int_{S_e} N_i N_j dS_e \right] + \left[\left[P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} N_i N_j dL_e \right] - \right. \\
& \left. \left[h_1^0 t_e \sum_{m=1}^v \rho_m^{P_3} \oint_{L_m} N_i N_j dL_m \right] \right] \left. \right\} \{T_j\}_e
\end{aligned} \quad (250)$$

onde $\dot{T}_j^e$ é o vetor de variação da temperatura nodal no tempo e T_j^e o vetor de temperaturas nodais que correspondem ao elemento e . Por outro lado, aplicando a definição de derivada total para uma função multivariável na sensibilidade em relação às variáveis de projeto do vetor de força térmica F_{1i} , tem-se:

$$\frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial V_j} \frac{dV_j}{d\rho_e} \quad (251)$$

A parte explícita da sensibilidade do vetor de carga térmica F_{1i} é calculada como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} = & \frac{N}{A} \frac{\partial F_{1i}^e}{\partial \rho_e} = \left\{ \left\{ P_0 \rho_e^{P_0-1} \sigma_0^0 \int_{V_e} N_i V_k B_{kp}^T B_{pj} V_j dV_e \right\} + \left\{ 2P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 T^P \int_{S_e} N_i dS_e \right\} + \right. \\
& \left. \left[\left\{ P_3 \rho_e^{P_3-1} h_1^0 T^P t_e \sum_{m=1}^v (1 - \rho_m) \oint_{L_e} N_i dL_e \right\} - \left\{ h_1^0 T^P t_e \oint_{L_e} \bar{N}_{im} \bar{\rho}_m^{P_3} dL_e \right\} \right] \right\}_e
\end{aligned} \quad (252)$$

onde as parcelas entre colchetes correspondem à sensibilidade da contribuição devida à transferência de calor por convecção no contorno do elemento, em relação às variáveis de projeto. Essa sensibilidade pode ser vista como uma composição de uma sensibilidade quando o elemento m for vizinho do elemento e (primeiro termo) e outra sensibilidade quando o elemento e for vizinho do elemento m (segundo termo). Levando isso em conta e com o fim de facilitar o cálculo do segundo termo enunciado antes, define-se uma matriz auxiliar de

funções de forma $\bar{N}_{im}$ (de tamanho 4x4) e um vetor $\bar{\rho}_m$ (de tamanho 4x1) de variáveis de projeto dos elementos vizinhos (ver Figura 27) ao elemento e como:

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} N_4 & 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_3 \end{bmatrix} \quad (253)$$

$$\{\bar{\rho}\} = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{Bmatrix} \quad (254)$$

Quando o elemento e pertence ao contorno do domínio pode não ter quatro vizinhos, portanto, alguns dos componentes do vetor $\bar{\rho}_m$ podem ser substituídos com zeros segundo o caso. O termo $\frac{\partial F_{1i}}{\partial V_j}$ pertencente à parte implícita da sensibilidade do vetor de força térmica em relação às variáveis de projeto calcula-se assim:

$$\frac{\partial F_{1i}}{\partial V_j} = \frac{N}{A} \frac{\partial F_{1i}^e}{\partial V_j^e} = \frac{N}{A} \left[2\rho_e^{P_o} \sigma_o^o \int_{V_e} N_i V_k B_{kp}^T B_{pj} dV_e \right]_e \quad (255)$$

O termo restante $\frac{dV_j}{d\rho_e}$ pode ser calculado a partir da equação de equilíbrio elétrica (eq.(51)) como:

$$\frac{dV_j}{d\rho_e} = K_{o\ j}^{-1} \left(\frac{dF_{oi}}{d\rho_e} - \frac{dK_{oiq}}{d\rho_e} V_q \right) \quad (256)$$

onde K_{oij} e V_j são conhecidos do MEF. A sensibilidade $\frac{dF_{oi}}{d\rho_e}$ depende do tipo de excitação do microsistema. Portanto, se a excitação for por corrente esse termo será zero, mas se for por tensão elétrica terá componentes diferentes de zero unicamente nos graus de liberdade onde a voltagem for prescrita (RUBIO, 2005). As sensibilidades não nulas são desconhecidas, desse modo, o sistema deve ser resolvido de forma reduzida com o fim de encontrar as sensibilidades dos graus de liberdade não restritos (CHOI; KIM, 2005). Por outra parte, o termo restante na eq.(256) é obtido pela expressão:

$$\frac{dK_{oij}}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \frac{dK_{oij}^e}{d\rho_e} = \frac{N}{A} \left[P_o \rho_e^{P_o-1} \sigma_o^o \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dV_e \right]_e \quad (257)$$

De novo, como K_{oij} tem dimensão $n \times n$ e a sua sensibilidade $\frac{dK_{oij}}{d\rho_e}$ tem dimensão $n \times n$ x e , é recomendável calcular o produto $\frac{dK_{oij}}{d\rho_e} V_j$ para evitar trabalhar com termos multidimensionais. Tal produto pode ser calculado como:

$$\frac{dK_{oij}}{d\rho_e} V_j = \frac{N}{A} \left\{ \frac{dK_{oij}^e}{d\rho_e} V_j^e \right\}_e = \frac{N}{A} \left\{ \left[P_o \rho_e^{P_o-1} \sigma_o^o \int_{V_e} B_{ip}^T B_{pj} dV_e \right] \{V_j\} \right\}_e \quad (258)$$

onde V_j^e é o vetor de voltagens nodais correspondente ao elemento e . De acordo ao anterior e aplicando a eq.(251) e a eq.(256) na eq.(246) obtém-se:

$$C_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} + K_{1ij} \frac{dT_j}{d\rho_e} = \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial V_j} \left(K_o^{-1}{}_{jq} \left(\frac{dF_{oq}}{d\rho_e} - \frac{dK_{oqw}}{d\rho_e} V_w \right) \right) - \frac{dC_{1ij}}{d\rho_e} \dot{T}_j - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (259)$$

Após resolver a eq.(259), a sensibilidade $\frac{dT_j}{d\rho_e}$ pode ser substituída na eq.(239) para realizar a integração no intervalo do tempo transiente e assim poder determinar a sensibilidade $\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e}$. O processo de cálculo das sensibilidades pelo método direto deve ser repetido para cada componente do vetor de variáveis de projeto ρ_e , consumindo assim tempo excessivo e tornando-o um método custoso (LI; SAITOU; KIKUCHI, 2004), portanto é utilizado o método adjunto descrito na seção 4.5.2.

APÊNDICE G – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTATICA E CÁLCULO DE SENSIBILIDADES ASSOCIADO

Neste trabalho, foi implementado para fins comparativos, um enfoque estático de otimização baseado nos trabalhos de Rubio (2005) e Rubio et al. (2009), onde foi incluído o fenômeno da transferência de calor por convecção simultaneamente no contorno e nas faces superior e inferior do microsistema. Além disso, foi adicionada a imposição de simetria proposta na seção 4.6 e foram levadas em conta na função objetivo, as funções de penalização para instabilidades numéricas tratadas na seção 4.8. Cabe ressaltar que essas considerações não foram abordadas nos trabalhos mencionados. Outra característica da implementação é o fato de poder resolver o problema de otimização pela PLS ou pelo MMA.

O problema de otimização proposto por Rubio (2005) é:

$$\max_{\rho} u_{out} \cong \left(\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} \bigg|_{\rho_e=\rho_{e0}} \right) (\rho_e) \quad (260)$$

$$\text{tal que} \begin{cases} \rho_e V_e \leq V^* & \text{(Restrição de volume)} \\ 0 \leq \rho_{min} \leq \rho_{min}^{mov} \leq \rho \leq \rho_{max}^{mov} \leq 1 & \text{(Restrição de caixa para as variáveis de projeto)} \\ K_{oij} V_j = F_{oi} & \text{(Eq. de equilíbrio elétrica)} \\ K_{1ij} T_j = F_{1i} & \text{(Eq. de equilíbrio térmica)} \\ K_{2rs} U_s = F_{2r} & \text{(Eq. de equilíbrio estrutural termoelástica)} \end{cases} \quad (261)$$

onde $\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e}$ são as sensibilidades em relação às variáveis de projeto e que são calculadas como (RUBIO, 2005):

$$\frac{dF_{ETM}}{d\rho_e} = \Lambda_{2r}^T F_{adj_{2re}} + \Lambda_{1i}^T F_{adj_{1ie}} + \Lambda_{oi}^T F_{adj_{oie}} \quad (262)$$

lembrando que Λ_x^T e F_{adj_x} são o vetor adjunto e a força adjunta, respectivamente. Os vetores adjunto estrutural (de tamanho $2n$), térmico e elétrico (ambos de tamanho n) nessa ordem, são dados por:

$$\Lambda_{2r}^T = L_{2s}^T K_{2sr}^{-1} \quad (263)$$

$$\Lambda_{1i}^T = \Lambda_{2r}^T \frac{\partial F_{2r}}{\partial T_j} K_{1ji}^{-1} \quad (264)$$

$$\Lambda_{oi}^T = \Lambda_{1q}^T \frac{\partial F_{1q}}{\partial V_j} K_{oji}^{-1} \quad (265)$$

e a força adjunta estrutural, térmica e elétrica são calculadas respectivamente, como:

$$F_{adj_{2re}} = \frac{\partial F_{2r}}{\partial \rho_e} - \frac{dK_{2rs}}{d\rho_e} U_s \quad (266)$$

$$F_{adj_{1ie}} = \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_e} - \frac{dK_{1ij}}{d\rho_e} T_j \quad (267)$$

$$F_{adj_{oie}} = \frac{dF_{oi}}{d\rho_e} - \frac{dK_{oij}}{d\rho_e} V_j \quad (268)$$

A formulação da função multi-objetivo para incluir os termos de penalização das instabilidades numéricas segue o mesmo enfoque descrito na seção 4.8.

APÊNDICE H – VALIDAÇÃO DO MEF UTILIZADO NO MOT

O MEF implementado no *ETMDinT* foi validado com o software de elementos finitos COMSOL Multiphysics. Devido ao fato de que no software desenvolvido neste trabalho foi apresentada uma formulação não usual de elementos finitos bidimensionais, onde é considerada a transferência de calor por convecção na face superior e inferior do microsistema, é necessário realizar a validação do MEF com elementos tridimensionais. A diferença entre as formulações é que no software COMSOL Multiphysics, ao utilizar o elemento sólido ou tridimensional, consideram-se variações dos fenômenos envolvidos na sua modelagem, na espessura do microsistema (direção z). Os valores comparados em cada modelagem correspondem ao último passo de integração do tempo transiente.

A validação foi realizada para as variáveis primárias ou variáveis de estado, que neste caso correspondem à voltagem (V), temperatura (T) e deslocamento na direção x (u_x) e y (u_y). Também foram verificadas algumas magnitudes derivadas das variáveis primárias denominadas variáveis secundárias. As variáveis secundárias validadas foram: A densidade de corrente (J_i) no domínio elétrico, o fluxo de calor por condução ($\dot{q}_i$) no domínio térmico e o tensor de tensões mecânicas (S_{ij}) no domínio termoelástico.

Figura 110 – Comparação da distribuição de tensão elétrica: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

Na Figura 110, Figura 111 e Figura 112, são apresentadas as distribuições das variáveis primárias obtidas no software implementado (*ETMDinT*) e no COMSOL Multiphysics para uma solução filtrada do problema do microsistema da Figura 40. Note-se que tanto as distribuições quanto as ordens de grandeza coincidiram.

(a)

(b)

Figura 111 – Comparação da distribuição de temperatura: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

(a)

(b)

Figura 112 – Comparação da distribuição da magnitude dos deslocamentos: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

Na Tabela 32, são mostrados os valores pertencentes às variáveis primárias nó de saída, obtidos com *ETMDinT* e COMSOL Multiphysics, para o problema da Figura 40. Esses valores correspondem ao instante de tempo 0,1s da análise transiente. Verifica-se que os valores da voltagem e a temperatura são iguais, porém as discrepâncias são pequenas no deslocamento apesar das diferenças entre as formulações (esforço plano - *ETMDinT*- e esforço triaxial - COMSOL Multiphysics). O valor zero em vermelho significa que o valor na formulação do MEF é assumido. A divergência nos valores do deslocamento em y pode obedecer ao erro de arredondamento próprio do computador, em vista da reduzida ordem de grandeza.

Tabela 32 – Comparação das variáveis primárias para validação do MEF

Software	t (s)	Voltagem (V)	Temperatura (K)	Deslocamento x (m)	Deslocamento y (m)	Deslocamento z (m)
COMSOL	0,1	0,1	300,479	$3,644 \times 10^{-6}$	$7,568 \times 10^{-21}$	$5,449 \times 10^{-7}$
ETMDinT	0,1	0,1	300,479	$3,643 \times 10^{-6}$	$1,659 \times 10^{-16}$	0

Figura 113 – Comparação da distribuição da magnitude da densidade de corrente: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

Na Figura 113, Figura 114 e Figura 115, são apresentadas as distribuições para as variáveis secundárias obtidas no software implementado (*ETMDinT*) e no COMSOL

Multiphysics para o problema considerado na Figura 40. Observa-se que tanto as distribuições quanto as ordens de grandeza concordaram.

Na Tabela 33, Tabela 34 e Tabela 35, são mostrados os valores das variáveis secundárias no nó de saída, obtidos com *ETMDinT* e COMSOL Multiphysics, para o problema da Figura 40. Esses valores correspondem ao instante de tempo 0,1s da análise transiente. As variáveis foram separadas nas tabelas segundo o domínio físico.

Tabela 33 – Comparação das variáveis secundárias no domínio elétrico para validação do MEF

Software	t (s)	Densidade de Corrente x	Densidade de Corrente y	Densidade de Corrente z	Magnitude da Densidade de Corrente
		(A/m ²)	(A/m ²)	(A/m ²)	(A/m ²)
COMSOL	0,1	$1,239 \times 10^{-22}$	$-2,183 \times 10^{-6}$	$7,276 \times 10^{-7}$	$2,301 \times 10^{-6}$
ETMDinT	0,1	0	0	0	0

Na Tabela 33, observa-se que a densidade de corrente diverge dada sua reduzida ordem de grandeza e igualmente pode atribuir-se ao erro de arredondamento próprio do computador. O valor zero em vermelho significa que o valor na formulação é prescrito.

Figura 114 – Comparação da distribuição da magnitude do fluxo de calor: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

Tabela 34 – Comparação das variáveis secundárias no domínio térmico para validação do MEF

Software	t (s)	Fluxo de Calor			Magnitude do Fluxo de Calor (W/m ²)
		x (W/m ²)	y (W/m ²)	z (W/m ²)	
COMSOL	0,1	1,455x10 ⁴	-2,172x10 ³	4,423x10 ³	1,536x10 ⁴
ETMDinT	0,1	1,449x10 ⁴	0	0	1,449x10 ⁴

As diferenças nas componentes do fluxo de calor por condução na Tabela 34 são devidas às considerações da formulação. No *ETMDinT* o fluxo de calor por condução em z é zero, já que na face superior e inferior do microsistema está presente o fenômeno de transferência de calor por convecção e, além disso, a espessura do microsistema é reduzida. Assim, a magnitude do fluxo de calor vai divergir em qualquer ponto da discretização. De novo, o valor zero em vermelho significa que o valor na formulação é prescrito.

Figura 115 – Comparação da distribuição da tensão de von Mises: (a) ETMDinT; (b) COMSOL

No caso do domínio termoelástico, esperava-se que as componentes do tensor de tensões mecânicas apresentassem diferenças devido novamente à formulação bidimensional de *ETMDinT* e a formulação tridimensional do elemento sólido de COMSOL Multiphysics (COMSOL, 2011b). Na formulação bidimensional é assumido que a tensão normal z , as tensões e deformações de cisalhamento nos planos xz e yz são nulas (valores zero em

vermelho da Tabela 35), enquanto que a deformação normal na direção z pode não ser nula quando aplicada a lei de Hooke (TIMOSHENKO; GERE, 1997). Na formulação tridimensional são consideradas todas as componentes de tensão, mas o seu valor depende dos carregamentos aplicados. Deste modo, sempre existirá uma diferença entre os dois enfoques (que deve ser aceitável) que permita validar os resultados. Além disso, a recuperação de tensões num modelo de elementos finitos pode utilizar diferentes algoritmos, dependendo do software empregado (Autodesk ALGOR, ANSYS ou COMSOL Multiphysics, por exemplo), pelo fato de que as tensões podem ser calculadas no centro do elemento, nos pontos da quadratura gaussiana ou serem ponderadas nos nós (BATHE, 1996).

Finalmente, considerando o critério de falha para materiais dúcteis, a tensão de von Mises apresenta uma diferença de 22,6%. Essa discrepância tem a origem na forte contribuição da tensão de cisalhamento xy , no modelo de COMSOL Multiphysics, já que possui uma ordem de grandeza igual que as tensões normais nas direções x e y , enquanto que no modelo bidimensional de *ETMDinT*, essa componente de tensão é nula.

Tabela 35 – Comparação das variáveis secundárias no domínio termoeelástico para validação do MEF

Software	t (s)	Tensão x (MPa)	Tensão y (MPa)	Tensão z (MPa)	Tensão xy (MPa)	Tensão xz (MPa)	Tensão yz (MPa)	Tensão de von Mises (MPa)
COMSOL	0,1	-26,98	-13,07	-2,176	-11,91	-1,452	-2,640	30,28
ETMDinT	0,1	-27,04	-12,84	0	0	0	0	23,43

APÊNDICE I – VERIFICAÇÃO DAS SENSIBILIDADES MEDIANTE O MDF

Nesta seção, serão tratados alguns aspectos relacionados tanto com a verificação quanto com o alto custo computacional do MDF. A verificação das sensibilidades realizada aqui corresponde ao problema do mecanismo tipo pistão da Figura 40. O MDF proporciona uma efetiva, embora custosa computacionalmente, maneira para verificar as sensibilidades calculadas analiticamente, seja com métodos diretos ou adjuntos.

O custo computacional do cálculo das sensibilidades, no problema do projeto de microsistemas ETM utilizando o MOT, aumenta com o número de elementos presentes na discretização do domínio de projeto e, além disso, com o número de passos de integração no tempo (ver eq.(142) e eq.(143)). Por essa razão, deve-se buscar o compromisso entre a discretização no espaço físico (domínio) e a dimensão tempo, com a finalidade de obter uma topologia em um tempo razoável em detrimento da precisão das sensibilidades. A análise realizada aqui com o MDF pretende auxiliar na escolha do valor da discretização e do passo do tempo mínimos para alcançar uma resposta adequada, levando em conta os requisitos do projeto de microsistemas ETM utilizando o MOT.

A análise consiste em rodar uma iteração do problema da Figura 40 com malhas grossas e poucos passos de tempo de integração e ir refinando o modelo progressivamente, calculando tanto a sensibilidade analítica quanto a sensibilidade pelo MDF. O tempo dessa iteração é calculado mediante as instruções *tic* e *toc* de MATLAB. O processo começa com uma malha de 16 elementos e 10 passos de integração e logo são incrementados os passos até que a diferença entre a sensibilidade analítica e pelo MDF apresente uma diferença menor ou igual do que 5%. Posteriormente é incrementado o número de elementos e o processo é reiniciado com 10 passos de integração e assim sucessivamente. O valor das variáveis de projeto é 0,3. Por razão do número de elementos contido no vetor de sensibilidades, o processo completo somente será mostrado na Tabela 36, Tabela 37, Tabela 38 e Tabela 39, para os resultados obtidos com uma malha de 16 elementos com passos de integração de 10, 20, 50 e 100, respectivamente. O vetor de sensibilidades mostrado corresponde à sensibilidade do deslocamento de saída u_{out} em relação ao vetor de variáveis de projeto p_e .

Tabela 36 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 10 passos de integração no tempo

Sensibilidade	Analítica	MDF	$\Delta\%$
du_{out}/dp_1	$3,64911 \times 10^{-8}$	$3,74895 \times 10^{-8}$	2,74%
du_{out}/dp_2	$-4,23987 \times 10^{-8}$	$-4,09792 \times 10^{-8}$	3,35%
du_{out}/dp_3	$-1,35439 \times 10^{-8}$	$-1,35792 \times 10^{-8}$	0,26%
du_{out}/dp_4	$-2,74679 \times 10^{-9}$	$-2,71622 \times 10^{-9}$	1,11%
du_{out}/dp_5	$5,73506 \times 10^{-8}$	$6,02968 \times 10^{-8}$	5,14%
du_{out}/dp_6	$-1,70163 \times 10^{-8}$	$-1,59383 \times 10^{-8}$	6,34%
du_{out}/dp_7	$-7,85645 \times 10^{-10}$	$-6,88072 \times 10^{-10}$	12,42%
du_{out}/dp_8	$-2,80684 \times 10^{-9}$	$-2,73225 \times 10^{-9}$	2,66%
du_{out}/dp_9	$5,73506 \times 10^{-8}$	$6,02968 \times 10^{-8}$	5,14%
du_{out}/dp_{10}	$-1,70163 \times 10^{-8}$	$-1,59383 \times 10^{-8}$	6,34%
du_{out}/dp_{11}	$-7,85645 \times 10^{-10}$	$-6,88072 \times 10^{-10}$	12,42%
du_{out}/dp_{12}	$-2,80684 \times 10^{-9}$	$-2,73225 \times 10^{-9}$	2,66%
du_{out}/dp_{13}	$3,64911 \times 10^{-8}$	$3,74895 \times 10^{-8}$	2,74%
du_{out}/dp_{14}	$-4,23987 \times 10^{-8}$	$-4,09792 \times 10^{-8}$	3,35%
du_{out}/dp_{15}	$-1,35439 \times 10^{-8}$	$-1,35792 \times 10^{-8}$	0,26%
du_{out}/dp_{16}	$-2,74679 \times 10^{-9}$	$-2,71622 \times 10^{-9}$	1,11%

Na Figura 116, mostram-se a discretização do domínio, as condições de contorno do problema e o nó de saída para o microsistema onde se está avaliando a sensibilidade. Na Tabela 36 pode ser notado que com somente 10 passos de integração, existem valores de sensibilidade com diferenças maiores do que 5% (valores em vermelho) e se faz necessário utilizar uma discretização maior no tempo, para obter uma maior precisão nas sensibilidades.

Com uma discretização de 20 passos, a precisão melhora e somente encontram-se dois valores acima do critério de 5% (valores em vermelho na Tabela 37). Novamente é necessário testar um intervalo de tempo menor para o cálculo de sensibilidades.

Figura 116 – Discretização do domínio utilizado para a verificação das sensibilidades

Tabela 37 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 20 passos de integração no tempo

Sensibilidade	Analítica	MDF	$\Delta\%$
du_{out}/dp_1	$3,70003 \times 10^{-8}$	$3,74968 \times 10^{-8}$	1,34%
du_{out}/dp_2	$-4,16843 \times 10^{-8}$	$-4,09736 \times 10^{-8}$	1,71%
du_{out}/dp_3	$-1,35667 \times 10^{-8}$	$-1,35823 \times 10^{-8}$	0,12%
du_{out}/dp_4	$-2,73946 \times 10^{-9}$	$-2,72248 \times 10^{-9}$	0,62%
du_{out}/dp_5	$5,88448 \times 10^{-8}$	$6,03101 \times 10^{-8}$	2,49%
du_{out}/dp_6	$-1,64651 \times 10^{-8}$	$-1,59292 \times 10^{-8}$	3,25%
du_{out}/dp_7	$-7,36252 \times 10^{-10}$	$-6,87692 \times 10^{-10}$	6,60%
du_{out}/dp_8	$-2,777 \times 10^{-9}$	$-2,73797 \times 10^{-9}$	1,41%
du_{out}/dp_9	$5,88448 \times 10^{-8}$	$6,03101 \times 10^{-8}$	2,49%
du_{out}/dp_{10}	$-1,64651 \times 10^{-8}$	$-1,59292 \times 10^{-8}$	3,25%
du_{out}/dp_{11}	$-7,36252 \times 10^{-10}$	$-6,87692 \times 10^{-10}$	6,60%
du_{out}/dp_{12}	$-2,777 \times 10^{-9}$	$-2,73797 \times 10^{-9}$	1,41%
du_{out}/dp_{13}	$3,70003 \times 10^{-8}$	$3,74968 \times 10^{-8}$	1,34%
du_{out}/dp_{14}	$-4,16843 \times 10^{-8}$	$-4,09736 \times 10^{-8}$	1,71%
du_{out}/dp_{15}	$-1,35667 \times 10^{-8}$	$-1,35823 \times 10^{-8}$	0,12%
du_{out}/dp_{16}	$-2,73946 \times 10^{-9}$	$-2,72248 \times 10^{-9}$	0,62%

Tabela 38 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 50 passos de integração no tempo

Sensibilidade	Analítica	MDF	$\Delta\%$
du_{out}/dp_1	$3,73041 \times 10^{-8}$	$3,74988 \times 10^{-8}$	0,52%
du_{out}/dp_2	$-4,12595 \times 10^{-8}$	$-4,09722 \times 10^{-8}$	0,70%
du_{out}/dp_3	$-1,35787 \times 10^{-8}$	$-1,35832 \times 10^{-8}$	0,03%
du_{out}/dp_4	$-2,73139 \times 10^{-9}$	$-2,7241 \times 10^{-9}$	0,27%
du_{out}/dp_5	$5,97348 \times 10^{-8}$	$6,03136 \times 10^{-8}$	0,97%
du_{out}/dp_6	$-1,61397 \times 10^{-8}$	$-1,59269 \times 10^{-8}$	1,32%
du_{out}/dp_7	$-7,06528 \times 10^{-10}$	$-6,87607 \times 10^{-10}$	2,68%
du_{out}/dp_8	$-2,75577 \times 10^{-9}$	$-2,73947 \times 10^{-9}$	0,59%
du_{out}/dp_9	$5,97348 \times 10^{-8}$	$6,03136 \times 10^{-8}$	0,97%
du_{out}/dp_{10}	$-1,61397 \times 10^{-8}$	$-1,59269 \times 10^{-8}$	1,32%
du_{out}/dp_{11}	$-7,06528 \times 10^{-10}$	$-6,87607 \times 10^{-10}$	2,68%
du_{out}/dp_{12}	$-2,75577 \times 10^{-9}$	$-2,73947 \times 10^{-9}$	0,59%
du_{out}/dp_{13}	$3,73041 \times 10^{-8}$	$3,74988 \times 10^{-8}$	0,52%
du_{out}/dp_{14}	$-4,12595 \times 10^{-8}$	$-4,09722 \times 10^{-8}$	0,70%
du_{out}/dp_{15}	$-1,35787 \times 10^{-8}$	$-1,35832 \times 10^{-8}$	0,03%
du_{out}/dp_{16}	$-2,73139 \times 10^{-9}$	$-2,7241 \times 10^{-9}$	0,27%

Estabelecendo 50 passos de integração, obtêm-se resultados apropriados para a aproximação linear da função objetivo baseada nas sensibilidades (ver Tabela 38), já que as variações encontradas nesse caso oscilam entre 0,1% e 0,5%.

Finalmente, avaliou-se a variação das sensibilidades com uma discretização de tempo ainda maior, considerando 100 passos de integração. Os resultados podem ser vistos na Tabela 39. As variações encontradas nesse ultimo caso oscilam entre 0,1% e 0,5%. Com isso pode-se concluir que uma aproximação de 100 passos não é interessante, pois o custo computacional aumenta em 56,1% (valores em vermelho da Tabela 40) sem, no entanto, aumentar significativamente a precisão nas sensibilidades.

Tabela 39 – Verificação das sensibilidades pelo MDF para uma discretização de 16 elementos e 100 passos de integração no tempo

Sensibilidade	Analítica	MDF	$\Delta\%$
du_{out}/dp_1	$3,74053 \times 10^{-8}$	$3,74991 \times 10^{-8}$	0,25%
du_{out}/dp_2	$-4,11183 \times 10^{-8}$	$-4,0972 \times 10^{-8}$	0,36%
du_{out}/dp_3	$-1,35823 \times 10^{-8}$	$-1,35834 \times 10^{-8}$	0,01%
du_{out}/dp_4	$-2,72814 \times 10^{-9}$	$-2,72433 \times 10^{-9}$	0,14%
du_{out}/dp_5	$6,00307 \times 10^{-8}$	$6,03142 \times 10^{-8}$	0,47%
du_{out}/dp_6	$-1,60318 \times 10^{-8}$	$-1,59266 \times 10^{-8}$	0,66%
du_{out}/dp_7	$-6,96483 \times 10^{-10}$	$-6,87595 \times 10^{-10}$	1,28%
du_{out}/dp_8	$-2,74813 \times 10^{-9}$	$-2,73968 \times 10^{-9}$	0,31%
du_{out}/dp_9	$6,00307 \times 10^{-8}$	$6,03142 \times 10^{-8}$	0,47%
du_{out}/dp_{10}	$-1,60318 \times 10^{-8}$	$-1,59266 \times 10^{-8}$	0,66%
du_{out}/dp_{11}	$-6,96483 \times 10^{-10}$	$-6,87595 \times 10^{-10}$	1,28%
du_{out}/dp_{12}	$-2,74813 \times 10^{-9}$	$-2,73968 \times 10^{-9}$	0,31%
du_{out}/dp_{13}	$3,74053 \times 10^{-8}$	$3,74991 \times 10^{-8}$	0,25%
du_{out}/dp_{14}	$-4,11183 \times 10^{-8}$	$-4,0972 \times 10^{-8}$	0,36%
du_{out}/dp_{15}	$-1,35823 \times 10^{-8}$	$-1,35834 \times 10^{-8}$	0,01%
du_{out}/dp_{16}	$-2,72814 \times 10^{-9}$	$-2,72433 \times 10^{-9}$	0,14%

Com o objetivo de avaliar o custo computacional por iteração do algoritmo implementado, os tempos obtidos no processo de verificação de sensibilidades foram coletados e são apresentados na Tabela 40. Além disso, esses dados foram plotados na Figura 117, onde os eixos do gráfico se encontram em escala logarítmica. Sendo exponencial o aumento do custo computacional, deve ser realizada uma adequada seleção do número de elementos da malha e dos passos da discretização do tempo transiente, para alcançar resultados de uma maneira mais eficiente.

Assim, recomenda-se utilizar uma combinação de um número de elementos finitos maior do que 1500, e um número de passos de integração maior do que 10, de acordo com o caso analisado. Vale lembrar que após a seleção dos parâmetros em questão, a relação dada na eq.(104) deve ser verificada para que não sejam induzidos erros numéricos na solução.

Tabela 40 – Dados de tempo por iteração para diferentes passos de integração e diferente número de elementos finitos na discretização

Nº Passos de Integração (m)	Número Elementos (e)					
	16	64	100	256	400	1600
	Tempo por Iteração (s)					
10	6,38	24,78	52,89	315,29	840,12	15893,96
20	7,61	36,73	81,06	487,80	1301,23	24494,86
50	10,09	71,36	162,14	1013,01	2838,92	
100	15,74	131,90	302,24	1913,09	5342,90	
200	26,16	252,33	586,99	3686,53	10728,75	
500	60,90	644,98				
1000	125,55	1422,34

Figura 117 – Custo computacional no processo de verificação das sensibilidades da função objetivo para diferentes passos de integração no tempo (m)

APÊNDICE J – DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DOS FATORES DE PENALIZAÇÃO UTILIZADOS NO MÉTODO DA CONTINUAÇÃO

Em problemas multifísicos, não existe uma regra definida para estabelecer o valor dos fatores de penalização, recorrendo a enfoques empíricos de tentativa e erro. Seguindo a metodologia de Kim et al. (2010), é formulada a hipótese de que os fatores de penalização podem ser calculados a partir de condições necessárias derivadas de um problema analítico simples. O problema analítico proposto neste caso é um problema unidimensional, consistindo de uma barra de comprimento L , seção transversal constante A , perímetro P , engastada em um extremo e ligada a uma mola de rigidez K no outro. A barra está excitada por uma tensão elétrica V aplicada nos seus extremos. No extremo engastado é imposta uma condição de contorno térmica de temperatura constante igual do que a temperatura ambiente T_0 enquanto que no outro extremo existe uma condição de contorno de transferência de calor por convecção para o ambiente. As propriedades de material são modeladas com o SIMP como visto na seção 3.4.1 e o material denominado base adota os valores mostrados na Tabela 1. De igual forma, os valores para a temperatura ambiente e o coeficiente de convecção são estabelecidos na Tabela 2.

Figura 118 – Problema unidimensional para a determinação analítica dos fatores de penalização

Para a determinação dos penalizadores, foram considerados três casos: estacionário sem considerar a convecção pelo contorno da barra, estacionário e transiente considerando a convecção pelo contorno da barra. Conforme o trabalho de Kim et al. (2010), existem duas condições necessárias que devem ser satisfeitas pelos penalizadores segundo a natureza do

problema. Essas duas condições são denominadas condição intrínseca e condição dependente do objetivo. No caso dos microsistemas ETM a condição intrínseca refere-se a que para obter o maior deslocamento de saída é necessário a maior quantidade de massa quando a restrição de volume é de desigualdade com um limite máximo fixo arbitrário, portanto a restrição de volume no problema de otimização ficará ativa (SIGMUND, 2001b). Assim, os penalizadores devem ser maiores que a unidade quando utilizado o modelo de material SIMP de modo que seja facilitada a obtenção de uma topologia 0-1 (YANG; CHUANG, 1994). Já para a condição dependente do objetivo, os fatores de penalização devem assumir valores que favoreçam extremizar a função objetivo considerada, segundo seja o caso estacionário ou transiente. Portanto, as condições dos penalizadores devem ser derivadas analiticamente e variam de acordo com a função de custo proposta no problema de otimização. Contudo, os fatores de penalização foram variados num intervalo entre 1 e 5 nos casos analisados, já que se havia observado que valores maiores a 5 conduzem a instabilidades numéricas na implementação realizada nesse trabalho. Com a finalidade de simplificar os cálculos, foram determinados os dados de geometria, voltagem de excitação, rigidez da mola e tempo transiente com os valores da Tabela 41.

Tabela 41 – Dados adicionais para a determinação analítica dos fatores de penalização

Descrição (Unidade)	Valor
Voltagem de excitação V (V)	1
Relação Perímetro/Área P/A (1/m)	10
Rigidez da mola K (N/m)	1
Tempo transiente t (s)	1

A solução do problema elétrico na barra para todos os casos estudados é dada por:

$$I = \frac{VA\sigma_0}{L} \quad (269)$$

dado que as condições de contorno elétricas não variam. Assim, pode ser deduzido que:

$$V_{,x} = \frac{V}{L} \quad (270)$$

e o calor gerado por unidade de volume na barra é uma constante igual a:

$$\dot{q}_g = \sigma_o V_{,x} V_{,x} = \sigma_o \left(\frac{V}{L} \right)^2 \quad (271)$$

Consequentemente, as soluções dos problemas térmico e elástico são diferentes para cada caso pelo fato de que são consideradas análises estacionárias com condições de contorno distintas e, além disso, a análise transiente envolve condições iniciais. A seguir, são deduzidas as soluções dos problemas analíticos estudados.

• **Solução do problema estacionário sem considerar convecção no contorno da barra.** A Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem descrevendo o fenômeno térmico é:

$$\sigma_1 T_{,xx} = -\dot{q}_g \quad (272)$$

cujas soluções analíticas vem dada por (ZILL, 1997):

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_g}{2\sigma_1} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (273)$$

sendo C_1 e C_2 constantes derivadas das condições de contorno. Aplicando tais condições obtém-se:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_g}{2\sigma_1} x^2 + \frac{\dot{q}_g L(2\sigma_1 + h_1 L)}{2\sigma_1(\sigma_1 + h_1 L)} x + T_o \quad (274)$$

No problema elástico a EDO de equilíbrio é:

$$u_{,xx} = \alpha_2 \theta_{,x} \quad (275)$$

sendo $\theta = (T(x) - T_o)$ e com solução analítica da forma (ZILL, 1997):

$$u(x) = \alpha_2 \left[-\frac{\dot{q}_g}{6\sigma_1} x^3 + \frac{\dot{q}_g L(2\sigma_1 + h_1 L)}{4\sigma_1(\sigma_1 + h_1 L)} x^2 \right] + C_3 x + C_4 \quad (276)$$

onde C_3 e C_4 são constantes derivadas das condições de contorno. De novo, aplicando essas condições tem-se que:

$$u(x) = -\frac{\alpha_2 \dot{q}_g}{6\sigma_1} x^3 + \frac{\alpha_2 \dot{q}_g L(2\sigma_1 + h_1 L)}{4\sigma_1(\sigma_1 + h_1 L)} x^2 - \frac{\alpha_2 \dot{q}_g L^2 [6E_2 A \sigma_1 + KL(4\sigma_1 + h_1 L)]}{12\sigma_1(E_2 A + KL)(\sigma_1 + h_1 L)} x \quad (277)$$

• **Solução do problema estacionário considerando a convecção no contorno da barra:** A EDO de segunda ordem não homogênea para o problema térmico é:

$$\theta_{,xx} - M^2 \theta = N \quad (278)$$

onde:

$$\theta = (T(x) - T_o) \quad (279)$$

$$M^2 = \frac{h_1 P}{\sigma_1 A} \quad (280)$$

$$N = -\frac{\dot{q}_g}{\sigma_1} \quad (281)$$

A solução da eq.(278) é dada por:

$$\theta(x) = C_1 \cosh(Mx) + C_2 \sinh(Mx) + R \quad (282)$$

onde R é a solução particular da EDO dada na eq.(278), sendo igual a:

$$R = \frac{N}{M^2} = \frac{\dot{q}_g A}{h_1 P} \quad (283)$$

e as constantes derivadas das condições de contorno são:

$$C_1 = -R \quad (284)$$

$$C_2 = \frac{R[M \sinh(ML) + S(\cosh(ML) - 1)]}{M \cosh(ML) + S \sinh(ML)} \quad (285)$$

onde:

$$S = \frac{h_1}{\sigma_1} \quad (286)$$

Para o problema elástico, deve ser resolvida a eq.(275) obtendo desse modo:

$$u(x) = \frac{\alpha_2}{M} [-R \sinh(Mx) + C_2 \cosh(Mx)] - \frac{\alpha_2}{E_2 A + K L} \left[\frac{K}{M} (Z - C_2) + Y E_2 A \right] x - \frac{\alpha_2 C_2}{M} \quad (287)$$

onde C_2 é dado pela eq.(285), enquanto que:

$$Y = -R \cosh(ML) + C_2 \sinh(ML) \quad (288)$$

$$Z = -R \sinh(ML) + C_2 \cosh(ML) \quad (289)$$

• **Solução do problema transiente considerando a convecção no contorno da barra:** Para o problema transiente, a equação que descreve o fenômeno é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) não homogênea:

$$\theta_{,xx} - M^2 \theta - N = D \dot{\theta} \quad (290)$$

onde os termos θ , M^2 e N estão dados pela eq.(279), eq.(280) e eq.(281), respectivamente. O termo D está dado por:

$$D = \frac{\alpha_1}{\sigma_1} \quad (291)$$

A eq.(290) pode ser solucionada mediante uma mudança de variável (ZILL, 1997):

$$\theta(x, t) = v(x, t) + \psi(x) \quad (292)$$

onde v é denominada solução de estado transiente, enquanto que ψ é nomeada solução de estado estacionário. Realizando a mudança de variável na eq.(290), é obtido:

$$v_{,xx} - M^2 v + \psi_{,xx} - M^2 \psi - N = D \dot{v} \quad (293)$$

Assim, o problema original é transformado em dois subproblemas, onde procura-se que as condições iniciais e de contorno para a função $u(x, t)$ sejam homogêneas, já que, desse modo, pode ser encontrada uma solução analítica. Portanto, os subproblemas que devem ser resolvidos são:

$$\psi_{,xx} - M^2\psi - N = 0 \quad (294)$$

$$u_{,xx} - M^2u = D\ddot{u} \quad (295)$$

e as condições de contorno transformam-se em:

$$\theta(0, t) = u(0, t) + \psi(0) = 0 \quad (296)$$

$$\theta(0, \infty) = u(0, \infty) + \psi(0) = 0 \quad (297)$$

$$\theta_{,x}(L, \infty) = u_{,x}(L, \infty) + \psi_{,x}(L) = -S\psi(L) \quad (298)$$

$$\theta_{,x}(L, \infty) = u_{,x}(L, \infty) + \psi_{,x}(L) = -S\psi(L) \quad (299)$$

$$\dot{\theta}(0, t) = \dot{u}(0, t) = 0 \quad (300)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) + \psi(x) = 0 \quad (301)$$

onde S está dado pela eq.(286). Das condições de contorno mostradas anteriormente pode ser deduzido que:

$$\psi(0) = 0 \quad (302)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (303)$$

$$u(0, \infty) = 0 \quad (304)$$

$$\psi_{,x}(L) = -S\psi(L) \quad (305)$$

$$v_{,x}(L, t) = 0 \quad (306)$$

$$v_{,x}(L, \infty) = 0 \quad (307)$$

$$\dot{v}(0, t) = 0 \quad (308)$$

$$v(x, 0) = -\psi(x) \quad (309)$$

Com o raciocínio anterior, devem ser solucionadas as eq.(294) e eq.(295) separadamente. A solução da eq.(294) é igual à solução dada na eq.(282) e portanto é a solução de estado estacionário, portanto:

$$\psi(x) = -R \cosh(Mx) + C_2 \sinh(Mx) + R \quad (310)$$

sendo R e C_2 constantes determinadas pelas eq.(283) e eq.(285). Já para a solução de estado transiente dada pela eq. (295), deve supor-se que tem a forma (ZILL, 1997):

$$v(x, t) = P_v(x)T_v(t) \quad (311)$$

onde $P_v(x)$ e $T_v(t)$ são funções que dependem da posição e do tempo, respectivamente. Desse modo a eq.(295) converte-se em:

$$P_{v,xx}T_v - M^2P_vT_v = DP_v\dot{T}_v \quad (312)$$

que com a separação de variáveis chega a:

$$\frac{P_{v,xx}}{P_v} = \frac{D\dot{T}_v + M^2T_v}{T_v} = -\lambda^2 \quad (313)$$

onde λ é uma constante. Deste modo, as soluções para P_v e T_v são:

$$P_v(x) = C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x) \quad (314)$$

$$T_v(t) = C_5 e^{-\beta t} \quad (315)$$

sendo $\beta = \frac{M^2 + \lambda^2}{D}$. A solução de estado transiente é dada pela expressão:

$$u(x, t) = [C_6 \cos(\lambda x) + C_7 \sin(\lambda x)] e^{-\beta t} \quad (316)$$

onde $C_6 = C_3 C_5$ e $C_7 = C_4 C_5$. Tomando a primeira derivada em relação ao tempo da equação anterior e aplicando a condição de contorno dada na eq.(308), obtém-se:

$$\dot{u}(0, t) = -C_6 \beta e^{-\beta t} = 0 \quad (317)$$

e dessa forma $C_6 = 0$, já que $\beta e^{-\beta t} > 0 \forall t > 0$. Aplicando a condição inicial dada na eq.(306) na derivada da eq.(316) em relação à posição, pode ver-se que:

$$u_x(L, t) = \lambda C_7 \cos(\lambda L) e^{-\beta t} = 0 \quad (318)$$

que pelo fato de que $\lambda C_7 e^{-\beta t} > 0 \forall t > 0$, se reduz a $\cos(\lambda L) = 0$, cuja solução é:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad (319)$$

e portanto $C_7 = A_n$, já que $u(x, t)$ é uma serie de senos com coeficientes A_n . De igual forma:

$$\beta = \frac{4L^2 M^2 + (2n-1)^2 \pi^2}{4L^2 D} \quad (320)$$

A solução de estado transiente é dada pela expressão:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) e^{-\beta t} \quad (321)$$

onde A_n é calculado utilizando a condição inicial expressa na eq.(309) e aplicando o conceito de ortogonalidad de funções (ZILL, 1997). Desse modo:

$$A_n = -\frac{2}{L} \left[\int_0^L \psi(x) \sin(\lambda_n x) dx \right] = -\frac{2}{L} \left[\frac{-RA_1 + C_2 A_2}{M^2 + \lambda_n^2} + \frac{R}{\lambda_n} [1 - \cos(\lambda_n L)] \right] \quad (322)$$

onde os termos A_1 e A_2 estão dados por:

$$A_1 = [M \sinh(ML) \sin(\lambda_n L) - \lambda_n \cosh(ML) \cos(\lambda_n L) + \lambda_n] \quad (323)$$

$$A_2 = [M \cosh(ML) \sin(\lambda_n L) - \lambda_n \sinh(ML) \cos(\lambda_n L)] \quad (324)$$

Finalmente, a solução do problema térmico é:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) e^{-\beta t} + R[1 - \cosh(Mx)] + C_2 \sinh(Mx) \quad (325)$$

onde C_2, λ_n, β e A_n são determinados pelas expressões da eq.(285), eq.(319), eq.(320) e eq.(322), respectivamente. Por fim, para o problema elástico deve ser resolvida a eq.(275) obtendo desse modo:

$$u(x, t) = \alpha_2 \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n x) e^{-\beta t} + \frac{1}{M} [-R \sinh(Mx) + C_2 \cosh(Mx)] \right] + C_3 x + C_4 \quad (326)$$

onde as constantes derivadas das condições de contorno são definidas como:

$$C_3 = - \frac{\alpha_2}{E_2 A + KL} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{K}{\lambda_n} + (-1)^{n-1} E_2 A \right) e^{-\beta t} + \left[\frac{K}{M} (Z - C_2) + Y E_2 A \right] \right] \quad (327)$$

$$C_4 = \alpha_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} e^{-\beta t} - \frac{C_2}{M} \right] \quad (328)$$

onde, novamente, Y e Z são determinados pela eq.(288) e eq.(289), respectivamente. Contudo, pode ser observado que a solução de $u(x, t)$ possui igualmente uma solução de estado estacionário (u_e) e uma solução de estado transiente ($u_t e^{-\frac{t}{\tau}}$) que pode ver-se como uma superposição da forma:

$$u(x, t) = u_e(x) + u_t(x)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (329)$$

onde:

$$u_e = \frac{\alpha_2}{M(E_2A+KL)} \{E_2A[-R \sinh(Mx) + C_2(\cosh(Mx) - 1) - (MY)x] + K[L(-R \sinh(Mx) + C_2(\cosh(Mx) - 1)) - (Z - C_2)x]\} \quad (330)$$

$$u_t = \frac{\alpha_2}{E_2A+KL} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} [E_2A(1 - \cos(\lambda_n x) + (-1)^{n-1} \lambda_n) + K(L(1 - \cos(\lambda_n x)) - 1)] \right] \quad (331)$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{4L^2 D}{4L^2 M^2 + (2n-1)^2 \pi^2} \quad (332)$$

De posse das expressões analíticas para o deslocamento nos casos considerados, devem ser inclusos os modelos de material das propriedades envolvidas (eq.(44) a eq.(48)), com a finalidade de deixar tais expressões em função da pseudo-densidade (ρ) que nesse caso age como a restrição de volume. O problema de otimização para os casos estudados é da forma:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho} F_{OBJ}(\rho) \quad \min_{\rho} -F_{OBJ}(\rho) \\ & \text{ou} \\ & \text{tal que } \left\{ \rho AL \leq V^* \quad \text{tal que } \left\{ \rho AL - V^* \leq 0 \right. \right. \end{aligned} \quad (333)$$

onde a forma padrão do lado direito é formulada para facilitar a análise concernente com o ponto ótimo. As funções objetivo para os casos estudados são:

• **Função objetivo para o problema estacionário sem considerar convecção no contorno da barra:**

$$F_{OBJ}(\rho) = u(L, \rho) = \frac{\alpha_2 \sigma_0(\rho) VL}{2\sigma_1(\rho)} \left[-\frac{1}{3} + \frac{(2\sigma_1(\rho) + h_1(\rho)L)}{2(\sigma_1(\rho) + h_1(\rho)L)} - \frac{[6E_2(\rho)A\sigma_1(\rho) + KL(4\sigma_1(\rho) + h_1(\rho)L)]}{6(E_2(\rho)A + KL)(\sigma_1(\rho) + h_1(\rho)L)} \right] \quad (334)$$

- **Função objetivo para o problema estacionário considerando a convecção no contorno da barra:**

$$F_{OBJ}(\rho) = u(L, \rho) = \frac{\alpha_2}{M(\rho)(E_2(\rho)A + KL)} \{E_2(\rho)A[-R(\rho)\sinh(M(\rho)L) + C_2(\rho)(\cosh(M(\rho)L) - 1) - (M(\rho)Y(\rho))L] + K[L(-R(\rho)\sinh(M(\rho)L) + C_2(\rho)(\cosh(M(\rho)L) - 1)) - (Z(\rho) - C_2(\rho))L]\} \quad (335)$$

- **Função objetivo para o problema transiente considerando a convecção no contorno da barra:**

$$F_{OBJ}(\rho) = \int_0^{t_f} u(L, t, \rho) dt = u_e(L, \rho)t_f + u_t(L, \rho)\tau(\rho) \left[1 - e^{-\frac{t_f}{\tau(\rho)}}\right] \quad (336)$$

O lagrangeano para o resolver o problema de otimização é (HAFTKA; GÜRDAL, 1992):

$$L(\rho, \lambda_1) = -F_{OBJ}(\rho) + \lambda_1(\rho AL - V^*) \quad (337)$$

Aplicando a condição de estacionaridade $\left(\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \wedge \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0\right)$ para calcular o ponto ótimo (ρ^*) , tem-se que:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{AL}\right) \frac{\partial F_{OBJ}(\rho)}{\partial \rho} \quad (338)$$

$$\rho = \frac{V^*}{AL} \quad (339)$$

Assim, $\rho^* = \rho$, podendo isso ser interpretado como a condição intrínseca para os fatores de penalização que é satisfeita automaticamente quando aqueles fatores são maiores que a unidade, pelo fato de que se ρ é aumentado, a propriedade de material interpolada com o SIMP também aumentará (KIM et al., 2010). Já que a restrição de volume no problema de otimização fica ativa para alcançar o maior deslocamento (quando a restrição de volume é de desigualdade com um limite máximo fixo arbitrário - SIGMUND, 2001b), o multiplicador de Lagrange associado deve ser positivo, concluindo que:

$$\frac{\partial F_{OBJ}(\rho)}{\partial \rho} > 0 \quad (340)$$

No entanto, se for calculada a segunda derivada do Lagrangeano, ela somente dependerá da variável de projeto, tendo que ser positiva para que o ponto ótimo seja um mínimo na formulação padrão (o que, na formulação original, conduziria a maximizar a função objetivo). Desse modo, outra condição que deve ser levada em conta é:

$$\frac{\partial^2 F_{OBJ}(\rho)}{\partial \rho^2} < 0 \quad (341)$$

Portanto, a condição dependente do objetivo está sujeita ao exposto nas eq.(340) e eq.(341). Devido à alta complexidade das expressões analíticas, foi necessário a utilização de de matemáticas simbólicas do software MATLAB para determinar os valores "ótimos" dos fatores de penalização, que foram variados num intervalo entre 1 e 5. De igual forma, foram examinados os casos quando a restrição de volume toma valores de 25%, 50% e 75%. O critério de seleção do conjunto de penalizadores "ótimo" é aquele que fornece o maior valor da função objetivo, da primeira derivada e o menor valor para a segunda derivada comparado com os valores de referência, obtidos quando igualados todos os penalizadores à unidade (que corresponde ao caso em que não existe a penalização). Se um conjunto penalizadores fornece valores idênticos para os itens comparados, será selecionado aquele conjunto com os valores mais altos de penalização, já que, quando utilizados no MOT, isso diminui a probabilidade de aparição de escalas de cinza, facilitando, dessa forma, a formação de topologias 0-1. Os resultados são apresentados na Tabela 42, na Tabela 43 e na Tabela 44.

Tabela 42 – Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema estacionário sem considerar convecção no contorno da barra

Restrição de Volume	Caso	Fatores de Penalização				F_{OBJ} (m)	$\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial \rho}$ (m)	$\frac{\partial^2 F_{OBJ}}{\partial \rho^2}$ (m)
		P_0	P_2	P_3	P_4			
25%	Referência	1	1	1	1	$8,6926 \times 10^{-2}$	$6,9541 \times 10^{-12}$	$-5,5632 \times 10^{-12}$
	"Ótimo"	1	2	5	5	$1,0209 \times 10^{-1}$	1,8877	-38,784
50%	Referência	1	1	1	1	$8,6926 \times 10^{-2}$	$1,7385 \times 10^{-12}$	$-6,9541 \times 10^{-12}$
	"Ótimo"	4	4	4	1	$8,6926 \times 10^{-2}$	$1,7386 \times 10^{-12}$	$-6,9846 \times 10^{-12}$
75%	Referência	1	1	1	1	$8,6926 \times 10^{-2}$	$7,7267 \times 10^{-13}$	$-2,0605 \times 10^{-12}$
	"Ótimo"	5	5	5	4	$8,6926 \times 10^{-2}$	$7,3257 \times 10^{-12}$	$-4,8841 \times 10^{-11}$

Tabela 43 – Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema estacionário considerando a convecção no contorno da barra

Restrição de Volume	Caso	Fatores de Penalização				$F_{OBJ} \text{ (m)}$	$\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial \rho} \text{ (m)}$	$\frac{\partial^2 F_{OBJ}}{\partial \rho^2} \text{ (m)}$
		P_0	P_2	P_3	P_4			
25%	Referência	1	1	1	1	$4,0014 \times 10^{-4}$	$3,2014 \times 10^{-14}$	$-2,5609 \times 10^{-13}$
	"Ótimo"	1	5	4	5	$2,8909 \times 10^{-2}$	$5,5700 \times 10^{-2}$	$-1,6547$
50%	Referência	1	1	1	1	$4,0014 \times 10^{-4}$	$8,0028 \times 10^{-15}$	$-3,2011 \times 10^{-14}$
	"Ótimo"	1	5	4	5	$3,4343 \times 10^{-3}$	$3,2913 \times 10^{-3}$	$-4,8497 \times 10^{-2}$
75%	Referência	1	1	1	1	$4,0014 \times 10^{-4}$	$3,5568 \times 10^{-15}$	$-9,4849 \times 10^{-15}$
	"Ótimo"	1	5	4	5	$9,7926 \times 10^{-4}$	$6,2563 \times 10^{-4}$	$-6,0994 \times 10^{-3}$

Tabela 44 – Conjunto "ótimo" de fatores de penalização para o problema transiente considerando a convecção no contorno da barra

Restrição de Volume	Caso	Fatores de Penalização					$F_{OBJ} \text{ (m*s)}$	$\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial \rho} \text{ (m*s)}$	$\frac{\partial^2 F_{OBJ}}{\partial \rho^2} \text{ (m*s)}$
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4			
25%	Referência	1	1	1	1	1	$5,6009 \times 10^{-5}$	$6,3019 \times 10^{-13}$	$-1,3990 \times 10^{-13}$
	"Ótimo"	1	1	2	5	5	$2,2464 \times 10^{-2}$	$8,5905 \times 10^{-2}$	$-8,6773$
50%	Referência	1	1	1	1	1	$5,6009 \times 10^{-5}$	$-3,7602 \times 10^{-13}$	$-1,7488 \times 10^{-14}$
	"Ótimo"	4	1	1	5	5	$5,5168 \times 10^{-4}$	$7,9743 \times 10^{-4}$	$-1,0991 \times 10^{-2}$
75%	Referência	1	1	1	1	1	$5,6009 \times 10^{-5}$	$-2,7213 \times 10^{-14}$	$-5,1815 \times 10^{-15}$
	"Ótimo"	5	1	3	5	5	$4,5341 \times 10^{-4}$	$1,1258 \times 10^{-4}$	$-3,7148 \times 10^{-3}$

Alguns resultados importantes alcançados mediante o estudo analítico foram:

- O fator de penalização para a condutividade elétrica (P_0) assumiu o menor valor de penalização (1) em todos os casos estacionários considerando a convecção no contorno da barra.
- O fator de penalização para a capacidade térmica (P_1) tomou o menor valor de penalização (1) em todos os casos transientes.
- O fator de penalização para o coeficiente de convecção (P_3) foi sempre maior do que o fator de penalização para a condutividade térmica (P_2) no caso transiente. No caso estacionário sem considerar a convecção no contorno $P_3 \geq P_2$, enquanto que considerando a convecção $P_3 < P_2$. Cabe ressaltar que P_3 alcançou os máximos valores de penalização (4 ou 5) na maioria dos casos.

- O fator de penalização para o módulo de Young (P_4) sempre obteve o máximo valor de penalização (5), exceto quando o fator de penalização para a condutividade elétrica (P_0) no caso estacionário sem considerar convecção no contorno da barra, alcança os valores máximos de penalização (4 ou 5).
- Existem outras combinações que também atingem as condições do estudo, porém os resultados mostrados fundamentam-se no valor máximo alcançado pela função objetivo. A combinação denominada como “caso ótimo” não necessariamente produz resultados análogos em domínios bidimensionais, situação tratada na seção 5.5.

Finalmente, na Tabela 45, são resumidas as condições lógicas que devem cumprir os fatores de penalização para maximizar a função objetivo utilizando a maior quantidade de massa, para os casos considerados.

Tabela 45 – Condições lógicas para os fatores de penalização conforme os resultados dos estudos analíticos realizados

Fatores de Penalização	Caso	Fatores de Penalização				
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_0	ESC			$\leq^I$		
	ECC				$\leq$	$\leq^{III}$
	TCC		$\geq$	$>^{II}$		
P_1	TCC	$\leq$		$\leq$	$<$	$<$
P_2	ESC	$\geq^I$			$\leq$	$<^{IV}$
	ECC				$>$	$=$
	TCC	$<^{II}$	$\geq$		$<$	$<$
P_3	ESC			$\geq$		$\geq$
	ECC	$\geq$		$<$		$<$
	TCC		$>$	$>$		$=$
P_4	ESC			$>^{IV}$	$\leq$	
	ECC	$\geq^{III}$		$=$	$>$	
	TCC		$>$	$>$	$=$	

*As células cinza significam que o penalizador da linha em questão não guarda relação nenhuma com o penalizador da coluna correspondente.

*ESC: Estacionário sem considerar convecção no contorno

*ECC: Estacionário considerando convecção no contorno

*TCC: Transiente considerando convecção no contorno

*Exceções:

^I $P_0 > P_2$ quando $P_2 < P_0 < P_3 = P_4$

^{II} $P_0 < P_2$ quando $P_0 = P_1 < P_2 < P_3 = P_4$

^{III} $P_0 > P_4$ quando $P_0 = P_2 = P_3 > P_4$

^{IV} $P_2 > P_4$ quando $P_0 = P_2 = P_3 > P_4$