RODRIGO DE CASTRO BAKER BOTELHO

Estudo de estabilização de um veículo quadricóptero não tripulado com carga pendular

São Paulo

2018

RODRIGO DE CASTRO BAKER BOTELHO

Estudo de estabilização de um veículo quadrimotor não tripulado com carga pendular

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Ciências.

São Paulo

2018

RODRIGO DE CASTRO BAKER BOTELHO

Estudo de estabilização de um veículo quadrimotor não tripulado com carga pendular

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Engenharia de Controle e Automação Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Botelho, Rodrigo

Estudo de Estabilização de um veículo quadrimotor não tripulado com carga pendular / R. Botelho -- versão corr. -- São Paulo, 2018.
166 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Veículos guiados remotamente 2. Veículos aéreos não tripulados
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

RESUMO

Este trabalho aborda o controle de um veículo aéreo não tripulado (VANT) com carga pendular acoplada. Veículos autônomos apresentam desafios de controle dados suas características como não linearidades, acoplamento de movimentos, dinâmicas desconhecidas, distúrbios ambientais e ser um sistema do tipo subatuado. O veículo aqui estudado apresenta seis graus de liberdade relativos ao movimento de corpo livre do robô e dois graus de liberdade adicionados pela carga pendular acoplada. Seu modelo matemático é deduzido através das equações de Lagrange, linearizado em torno do ponto de operação e validado através de simulações.

O projeto de controle é baseado nos controladores lineares dos tipos PID, LQR e H_∞ para sistemas multivariáveis. Uma vez obtidos os controladores, são apresentadas as simulações para três cenários distintos considerando estabilização a partir de condições iniciais e perturbações e incertezas. Os controladores resultantes das sínteses são simulados com a planta linear e não linear e verificados conforme seu desempenho.

Palavras-chave: Veículos guiados remotamente, veículos aéreos não tripulados

ABSTRACT

The present work is focused on the stabilization control of Unmanned Aerial Vehicles (UAV) connected with a slung load. UAV Control is a challenging subject due its characteristics such as non-linearities, coupling dynamics, unknown dynamics, environmental disturbances which they are subjected and their underactuated nature. The vehicle presents six degrees of freedom relative to its free body configuration and two additional degrees of freedom for it slung load coupling. The mathematical model is derived for this configuration through the Lagrange approach, further linearized around its operation point and validated through simulations.

The Control Design is based on three different linear controllers, PID, LQR and H_∞ for multivariate systems. Once designed, they are simulated with the linearized plant and the non-linearized plant considering three different scenarios for stabilization. Finally, the controllers are tested and simulated on a virtual model and the results are presented and discussed.

Keywords: Remotely guided vehicles, Unmanned Autonomous Vehicles

SUMÁRIO

RESUMO.....	5
ABSTRACT.....	6
LISTA DE FIGURA	10
LISTA DE TABELA	14
LISTA DE SÍMBOLOS	15
1. INTRODUÇÃO	19
1.1. OBJETIVOS.....	26
1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	27
2. MODELAGEM DO VEÍCULO.....	29
2.1. CARACTERÍSTICAS DO VEÍCULO	29
2.2. SISTEMAS DE COORDENADAS.....	31
2.3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA	36
2.3.1. DINÂMICA DO SISTEMA.....	36
2.3.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO SEGUNDO LAGRANGE	38
2.3.3. LINEARIZAÇÃO DO MODELO	44
3. SISTEMA DE CONTROLE	48
3.1. ABORDAGENS	50
3.2. CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	52
3.3. ESTABILIDADE DO SISTEMA.....	54
3.4. CONTROLADOR TIPO PID.....	54
3.5. CONTROLADOR TIPO LQR	58
3.6. CONTROLADOR TIPO $\mathcal{H}^\infty$	59
3.6.1. REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA LINEAR	60
3.6.2. INCERTEZAS	61
3.6.3. ESPECIFICAÇÕES E LIMITAÇÕES DE DESEMPENHO	65

3.6.4.	ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTOS	69
3.6.5.	ESCOLHA DE FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO	73
3.6.6.	SISTEMA DE DOIS PORTOS	75
3.6.7.	METODOLOGIA DA SENSIBILIDADE MISTA	78
4.	RESULTADOS	80
4.1.	MODELAGEM MATEMÁTICA	80
4.1.1.	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	83
4.1.2.	FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	83
4.1.3.	ESTABILIDADE	85
4.2.	CENÁRIOS DE TESTE	92
4.3.	CONTROLE PID	93
4.3.1.	SIMULAÇÕES	96
4.4.	CONTROLE LQR	104
4.4.1.	SIMULAÇÕES	105
4.5.	CONTROLE H_{∞}	112
4.5.1.	SIMULAÇÕES	113
4.6.	ANÁLISE DE RESULTADOS	120
5.	CONCLUSÕES	123
6.	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	125
7.	BIBLIOGRAFIA	127
APÊNDICE A		133
Modelo dos motores e hélices		133
APÊNDICE B		140
Método de Lagrange		140
APÊNDICE C		145
APÊNDICE D		149
Rotinas de MATLAB		149

Modelos Simulink.....	154
-----------------------	-----

LISTA DE FIGURA

Figura 1. Veículos Não Tripulados	21
Figura 2. Classificação de VANTs	22
Figura 3. UAV usado para fotogrametria	24
Figura 4. Airdrone 2.0 e seus principais componentes	25
Figura 5. Quadricóptero e orientação dos movimentos possíveis	30
Figura 6. Quadricóptero com carga acoplada.....	30
Figura 7. Sistemas de Coordenadas no referencial inercial e no referencial não inercial.	32
Figura 8. Transformação das taxas angulares	33
Figura 9. Ângulos de Euler	34
Figura 10. Movimentação de um quadricóptero através dos giros dos rotores ...	36
Figura 11. Eixos e Sistemas de Coordenadas do problema.....	40
Figura 12. Malha de Controle por realimentação.....	49
Figura 13. Malha de Controle de Posição de um quadricópteros	51
Figura 14. Malha de um Controlador PID	56
Figura 15. Sistema de Controle de um grau de liberdade	60
Figura 16. Estrutura clássica de Controle em Malha fechada com incerteza aditiva, distúrbios, perturbações e ruídos	62
Figura 17. Diagrama de blocos do sistema considerando incertezas multiplicativas	63
Figura 18. Diagrama de blocos de uma configuração padrão com realimentação	66
Figura 19. Valores Singulares das Funções de Sensibilidade e sua formatação ideal.....	67
Figura 20. Diagrama de blocos considerando ponderações.....	68
Figura 21. Estabilidade Robusta em SISO	70
Figura 22. Desempenho Robusto para o caso escalar.....	72
Figura 23. Formas gerais das Funções de Ponderação	74

Figura 24. Diagrama rearranjado para configuração de dois portos.....	76
Figura 25. Configuração genérica de dois portos	76
Figura 26. Diagrama de dois portos	78
Figura 27. Diagrama de Nyquist para Velocidade em Z	85
Figura 28. Diagrama de Nyquist para deslocamento Z.....	86
Figura 29. Diagrama de Nyquist para Velocidade Y	86
Figura 30. Diagrama de Nyquist para velocidade em β	87
Figura 31. Diagrama de Nyquist para velocidade em ϕ	87
Figura 32. Diagrama de Nyquist para deslocamento em Y	88
Figura 33. Diagrama de Nyquist para deslocamento em β	88
Figura 34. Diagrama de Nyquist para deslocamento em ϕ	89
Figura 35. Diagrama de Nyquist para velocidade em ψ	89
Figura 36. Diagrama de Nyquist para deslocamento em ψ	90
Figura 37. Mapa de polos do sistema com polos alocados em -0,1	91
Figura 38. Visão geral da malha de Controle do problema.....	92
Figura 39. Controladores PID das variáveis de controle do quadricóptero.....	94
Figura 40. Cenário 1 com PID: Deslocamento linear em y para controle PID e β_0 de 5 graus.....	96
Figura 41. Cenário 1 com PID: Deslocamento angulares ϕ do veículo para controle PID e β_0 de 5 graus.....	97
Figura 42. Cenário 1 com PID: Deslocamento da carga e do quadricóptero para controle PID e β de 5 graus.....	98
Figura 43. Cenário 2 com PID: Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus.....	99
Figura 44. Cenário 2 com PID: Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus.....	100
Figura 45. Cenário 2 com PID: Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus	100
Figura 46. Cenário 3 com PID: Resposta ao degrau na direção X com PID	101
Figura 47. Cenário 3 com PID: Resposta ao degrau em X em Alfa e Beta. α_0 e β_0 de 5 graus.....	101

Figura 48.Cenário 3 com PID: Deslocamento vertical do veículo e da carga sujeitos a entrada degrau em X.....	102
Figura 49. Cenário 4 com PID: Seguimento de trajetória com ângulos iniciais em 5 graus.....	103
Figura 50. Cenário 4 com PID: Deslocamento do veículo na direção y para o cenário 3.....	103
Figura 51. Cenário 1 com LQR Deslocamento linear em y com β_0 de 5 graus.	105
Figura 52.Cenário 1 com LQR: Deslocamento angular do veículo com β_0 de 5 graus.....	106
Figura 53.Cenário 1 com LQR: Deslocamento da carga e do veículo com β_0 de 5 graus.....	106
Figura 54.Cenário 2 com LQR: Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus.....	107
Figura 55. Cenário 2 com LQR: Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus.....	107
Figura 56. Cenário 2 com LQR: Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus	108
Figura 57. Cenário 3 com LQR: Resposta ao degrau na direção x com LQR ...	109
Figura 58. Cenário 3 com LQR: Deslocamentos angulares da carga com LQR para entrada degrau	109
Figura 59. Cenário 3 com LQR: Deslocamentos verticais do veículo e da carga para entrada degrau com LQR	110
Figura 60. Cenário 4 com LQR: Deslocamento linear em x, y e z com α_0 e β_0 de 15 graus para o ponto (1,0,3)	111
Figura 61.Cenário 4 com LQR: Deslocamentos angulares do veículo para o cenário 3.....	111
Figura 63. Função Peso para função de Sensibilidade Complementar para deslocamentos lineares e angulares	113
Figura 51. Cenário 1 com H_∞ Deslocamento linear em y com β_0 de 5 graus ..	114
Figura 52. Cenário 1 com H_∞ : Deslocamento angulares do veículo com β_0 de 5 graus.....	114

Figura 53. Cenário 1 com H_{∞} : Deslocamento linear da carga com β_0 de 5 graus	115
Figura 54. Cenário 2 com H_{∞} : Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus.....	116
Figura 55. Cenário 2 com H_{∞} : Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus.....	116
Figura 56. Cenário 2 com H_{∞} : Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus	117
Figura 57. Cenário 3 com H_{∞} : Resposta ao degrau na direção x com H_{∞}	117
Figura 58. Cenário 3 com H_{∞} : Deslocamentos angulares da carga com H_{∞} para entrada degrau	118
Figura 59. Cenário 3 com H_{∞} : Deslocamentos verticais do veículo e da carga para entrada degrau com H_{∞}	118
Figura 68. Sentido de giro do rotor e força de sustentação resultante	133
Figura 69. Esquema de motor BLDC.....	134
Figura 70. Representação do circuito elétrico e motor BLDC	135
Figura 71. Esquema mecânico do acoplamento motor e hélice	136
Figura 72. Esquema mecânico do acoplamento motor e hélice com caixa de redução.....	137
Figura 73. Diagrama de Dois Portos Geral.....	146

LISTA DE TABELA

Tabela 1. Requisitos para sistema robusto.....	67
Tabela 2. Características de desempenho ideias de um controlador	71
Tabela 3. Parâmetros do Veículo	80
Tabela 4. Polos do sistema linear.....	81
Tabela 5. Polos do sistema linear modificado	82
Tabela 6. Funções de transferência	84
Tabela 7. Ganhos dos Controladores PID de Atitude	94
Tabela 8. Ganhos do PID de posicionamento	95
Tabela 9. Valores Nominais e Intervalos dos parâmetros do Veículo carregado	112
Tabela 10. Desvio de trajetória por controlador.....	121

LISTA DE SÍMBOLOS

$E = \{X_E, Y_E, Z_E\}$	Sistemas de coordenadas no referencial fixo
$\xi = \{x, y, z\}$	Vetor de posição linear do quadricóptero no referencial fixo
$\xi_c = \{x_c, y_c, z_c\}$	Vetor de posição linear da carga no referencial móvel
α	Posição angular da carga em relação ao vertical do quadricóptero, no sentido de y_B
β	Posição angular da carga em relação ao vertical do quadricóptero, no sentido de x_b
$\eta = \{\phi, \theta, \psi\}$	Vetor de posição angular do quadricóptero no referencial fixo
$B = \{X_B, Y_B, Z_B\}$	Sistemas de coordenadas no referencial móvel
$V_B = \{u, v, w\}$	Vetor de velocidades lineares no referencial móvel
$\vartheta = \{p, q, r\}$	Vetor de velocidades angulares no referencial móvel
T_B^E	Matriz de transformação da base B para base E
R_i	Matriz de rotação em torno do eixo i
L	Função de Lagrange
T	Energia Cinética
V	Energia Potencial
Q^{NC}	Forças não conservativas
$q = \{x, y, z, \alpha, \beta, \phi, \theta, \psi\}$	Coordenadas generalizadas

J_c	Matriz de transformação de velocidades lineares do quadricóptero e carga para velocidades lineares do quadricóptero e angulares da carga
J_R	Matriz de transformação das velocidades angulares da base fixa para base móvel
M	Matriz de Inércia do conjunto quadricóptero e carga acoplada
m_q	Massa do quadricóptero
m_c	Massa da carga
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	Momento de inércia principal do quadricóptero na base móvel
d	Distância do centro de massa do quadricóptero ao eixo do motor
c_t	Coefficiente de sustentação do conjunto motor e hélice
c_q	Coefficiente de Torque do conjunto motor e hélice
A_x, A_y, A_z	Coefficientes de arrasto aerodinâmico do quadricóptero
g	Módulo da aceleração da gravidade
F_i	Força aerodinâmica gerada pelo i-ésimo rotor
$\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_{psi}$	Momentos aerodinâmicos gerados pelos rotores
l	Comprimento do fio da carga
C	Matriz de Amortecimento do Sistema
C_t	Matriz de Amortecimento do Sistema do arrasto aerodinâmico
C_r	Matriz de Amortecimento do Sistema originada pelas forças de Coriolis

G	Vetor de Gravidade
A	Matriz de Estados
B	Matriz de Entrada
C	Matriz de Saída
D	Matriz de Transmissão Direta
$x(t)$	Vetor de Estados
$y(t)$	Vetor de Saídas
$u(t)$	Vetor de Entradas
$\mathbb{C}$	Matriz de Controlabilidade
$\mathbb{O}$	Matriz de Observabilidade
K_p	Ganho Proporcional do Controlador tipo PID
K_i	Ganho Integral do Controlador tipo PID
K_d	Ganho Derivativo do Controlador tipo PID
Q	Matriz de pesos de estados do controlador LQR
R	Matriz de pesos das entradas do controlador LQR
q_i	Peso atribuído ao estado na matriz de pesos Q
r_i	Peso atribuído à entrada na matriz de pesos R
$\bar{\sigma}$	Valor Singular Superior
Δ_A	
W_A	Função de Ponderação de incerteza Aditiva
Δ_M	
W_M	Função de Ponderação de incerteza Multiplicativa
$I_{n \times n}$	Matriz Identidade $n \times n$

K	Controlador tipo Ganho do sistema de controle
G	Matriz de transferência que representa a planta do sistema
S_i, S_o	Função de Sensibilidade
T_i, T_o	Função de Sensibilidade Complementar
C_i, C_o	Função de Sensibilidade do Controlador
W_d	Função de Ponderação de distúrbios externos
W_i	Função de Ponderação de distúrbios internos
W_c	Função de Ponderação de Controle
W_s	Função de Ponderação de Sensibilidade
W_T	Função de Ponderação de Sensibilidade Complementar
W_n	Função de Ponderação de ruídos
$w = \{\tilde{r}, \tilde{d}, \tilde{d}_v, \tilde{n}\}$	Sinais exógenos
$z = \{\tilde{e}, \tilde{u}, \tilde{y}\}$	Sinais de saída controlados

1. INTRODUÇÃO

Dado o crescente interesse por veículos autônomos aéreos nos últimos vinte anos e a acelerada evolução de sistemas embarcados, a pesquisa deu-se início através do levantamento bibliográfico com seleção de artigos e teses que abordassem o tema. O objetivo desta primeira seleção é entender as diversas configurações de veículos existentes, suas composições, seus componentes, suas modelagens, complexidades e seus desafios.

Em seguida, definiu-se a separação do estudo de veículos aéreos não-tripulados, aqui referidos pelo acrônimo VANTs, em duas áreas. A primeira compreendendo os modelos matemáticos do sistema mecânico e a segunda dos modelos de controladores.

Uma vez definido objeto de estudo, as teses e artigos dos últimos seis anos foram selecionadas com caráter qualitativo. Entende-se que a exploração e o entendimento da modelagem de sistemas de mesma complexidade devam ser feitos de acordo com o estado-da-arte em sistemas embarcados para quadricópteros. Teses e artigos anteriores servem de base para estudos de modelagem do sistema mecânico, porém são insuficientes para apresentar evoluções no que toca à engenharia de controle.

Seguindo a etapa de modelagem, inicia-se a análise de trabalhos, artigos, teses e dissertações com foco em estratégias de controle. A seleção por artigos mais recentes busca entender a evolução dos métodos de controle e o estado-da-arte do tema. A diversidade de estratégias existentes para controle de VANTs obriga a limitação da profundidade da pesquisa.

Há diversas estratégias como Controle Clássico, Reguladores Quadráticos, Estimadores de Kalman, Redes Neurais, Controle Preditivo, Lógica Nebulosa e híbridas. Não somente a técnica, mas a malha de controle pode ser projetada de formas distintas, e cabe um estudo para definir as mais adequadas conforme as limitações de tempo e escopo deste trabalho.

Aparte a pesquisa das técnicas necessárias para modelagem e controle, é fundamental entender o sistema através de simulação. Desta forma, uma parte da pesquisa é voltada ao levantamento dos parâmetros de quadricópteros.

Fez-se uma pesquisa de campo com os principais fabricantes de VANTs e componentes mecânicos e eletrônicos a fim de obter dados suficientes para simular um veículo virtual próximo ao veículo real. As características do veículo foram levantadas com base em manuais e fichas técnicas de fabricantes de componentes e VANTs já disponíveis no mercado.

Selecionados e compreendidos os textos que sustentam a dissertação, a pesquisa desenvolveu-se por meio de dedução das equações que regem o movimento do quadricóptero.

A abordagem utilizada para dedução das equações foi a dedução por Euler-Lagrange. Inicialmente simplificou-se o modelo para dois graus de liberdade, sem carga pendular. Acrescentou-se então a carga pendular no modelo bidimensional. Por fim, evolui-se o modelo para representação tridimensional, com seis graus de liberdade do corpo do quadricóptero e dois graus de liberdade da carga acoplada. Esta dissertação apresenta os resultados obtidos com o modelo tridimensional.

O avanço da tecnologia de sensores, a redução nos custos de produção e miniaturização de componentes eletrônicos vêm possibilitando uma nova era de veículos autônomos. Os sistemas embarcados, antes poucos e restritos a grandes corporações ou áreas de pesquisa, agora tornaram-se acessíveis em termos de custo. Isto aliado a constante evolução de softwares de desenvolvimento de controle permitiram esta nova categoria de veículos.

Veículos autônomos ou veículos não tripulados (VNT) podem ser divididos em três subcategorias, conforme o meio da aplicação: os veículos podem ser terrestres, submarinos ou aéreos. Existe, ainda, o conceito em estudo e veículos autônomos híbridos. VNTs são veículos que não possuem piloto tripulado, mas são controlados de forma remota.

Figura 1. Veículos Não Tripulados

Fonte: Revista FAPESP, Amazon.com e tecmundo.com.br

Dentro da subcategoria de veículos aéreos, existem os de asas fixas, os de asas móveis e os de asas rotativas. Quadricópteros se encaixam na terceira classificação e apresentam a vantagem de pairar ou fazer decolagem vertical. São veículos aéreos dotados de quatro hélices, normalmente equidistantes, que utilizam a propulsão pelas hélices com o movimento do ar para sustentar, elevar ou manobrar o VANT.

Figura 2. Classificação de VANTs

Fonte: Próprio autor

Embora associados a helicópteros, a mecânica de voo difere. Helicópteros possuem o mecanismo de *swashplate* ou pratos, para alterar a direção de movimentação do veículo. O movimento de arfagem ou rolagem se dá pela velocidade do rotor e pela modificação no ângulo da *swashplate* com o prato estático. Este ângulo modifica o ângulo relativo da força de sustentação que, por sua vez, introduz uma parcela vetorial na direção da movimentação desejada.

Devido à presença de quatro rotores independentes, quadricópteros não necessitam de mecanismos complexos para movimentar-se. A movimentação é baseada apenas na diferença de velocidade dos quatro rotores. Conforme o sinal de controle, os rotores aumentam ou diminuem a diferença de velocidade entre si, causando um ou mais giros numa das três direções possíveis. Essa modificação nas direções atua de forma similar ao movimento relativo da *swashplate* em helicópteros, resultando numa força para deslocamento transversal ou longitudinal.

VANTs como quadricópteros apresentam características de interesse para pesquisa. A complexidade do modelo do veículo e possibilidade de utilização com acessórios do tipo estruturas estabilizadoras para câmeras, cargas solidárias ao corpo ou suspensas atraem estudos de engenharia mecânica para o sistema.

Do ponto de vista de engenharia de controle, há um grande desafio no desenvolvimento de controladores e estratégias de controles visando estabilização, eficiência no consumo de energia, seguimento de rota, manobrabilidade, robustez de controle, controle de movimento de carga, entre outros.

Os sistemas embarcados tornam-se cada vez mais complexos, conforme a capacidade de processamento, o sensoriamento, a necessidade de baterias mais duráveis, maior autonomia de voo e menor consumo de energia. Em termos eletroquímicos, o desenvolvimento de baterias é um campo atualmente em voga. A dependência da sociedade em sistemas eletroeletrônicos aumentou substancialmente ao longo dos últimos anos, não se limitando a drones, mas se estendendo à generalidade de sistemas embarcados. Isto representa um grande campo de interesse social, buscando formas de garantir maior autonomia com baterias mais eficientes, duráveis e leves.

Há uma bibliografia considerável sobre Quadricópteros, fruto das últimas décadas de pesquisa. Devido à sua complexidade, o surgimento de novo conhecimento em diversas áreas para esta aplicação apresenta desafios de interesse em Engenharia de Controle e Mecânica. Por mais que sua aplicação tenha sido explorada de diversas maneiras, ainda restam campos de pesquisa que carecem de maiores aprofundamentos, como em sistemas de transporte de carga e transporte de carga variável. Desta forma, é importante desenvolver um estudo que possa avaliar o impacto na estabilização e controle de um VANT com carga acoplada ou até mesmo com carga variável no tempo.

Graças ao desenvolvimento tecnológico recente, o número de aplicações com VANTs aumenta diariamente. Dada sua característica de não possuir um ser humano a bordo para pilotar, os VANTs vêm expandindo sua aplicação em atividades de periculosidade elevada, controle de multidões, tarefas de identificação de incêndio ou salvamento de pessoas em situações de risco como afogamento, incêndio e outras catástrofes naturais onde o acesso é difícil, ou, ainda, em casos onde há expressiva repetitividade e o ser humano é menos eficiente.

Verifica-se também a aplicação de VANTs em fotografia, operações militares de identificação de alvos, guarda de fronteiras, cartografia, uso bélico e aplicações civis de entretenimento.

Figura 3. UAV usado para fotogrametria

Fonte: <https://www.spatialsource.com.au/latest-news/complete-photogrammetry-uav-and-software-package>

Um quadricóptero é, em geral, composto por uma estrutura em formato de cruz, de quatro rotores com uma hélice cada, com uma ou mais centrais de processamento e sensores inerciais como giroscópios, acelerômetros, magnetômetros e barômetros. Conforme a velocidade de rotação da hélice, há o surgimento da força de sustentação. A escolha de rotores em pares e posicionados simetricamente deve-se ao comportamento que estes apresentam conforme o sentido de giro.

Figura 4. Airdrone 2.0 e seus principais componentes

Fonte: <https://itsacrazyday.wordpress.com/2012/11/21/ar-drone-2-0-exploded-viewservicing/>

O giro do rotor introduz um momento resultante ao VANT, um binário giroscópico. Quando o giro é em sentido horário, o momento reativo possui sentido anti-horário, quando o giro é em sentido horário, o momento é em sentido anti-horário. Baseado neste comportamento, o quadricóptero deve, então, ser composto de um par ou múltiplos pares de rotores, posicionados de forma simétrica, com sentido de rotação alternados. Isto permite estabilizar o giro de guinada do quadricóptero apenas com o controle das velocidades dos rotores.

1.1. OBJETIVOS

O objetivo deste projeto é aprofundar o estudo para futuras aplicações com quadricópteros. Ainda visto como protótipo de laboratório no país e longe de ser realidade, o transporte de cargas por veículos aéreos não tripulados é de elevado interesse do setor aeroespacial. A redução de custo e confiabilidade do sistema são vistos como atrativos para exploração da tecnologia.

Adicional ao interesse das empresas nesta aplicação, o estudo de quadricópteros com cargas pendulares é escasso no país e a aplicação de leis de controle como LQR e H_∞ ainda menores. Espera-se apresentar um estudo sobre estes controladores e uma comparação de seu desempenho, verificando a adequabilidade de seu uso para este fim. O objetivo é projetar controladores tipo PID, LQR e H_∞ , para um sistema multi-variável, garantindo estabilidade e desempenho robusto através de metodologia baseada em modelos.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A modelagem e controle de drones são áreas exploradas exhaustivamente nos últimos anos. Os estudos concentram-se em modelos de motores e modelos de veículos para transporte com algum tipo de acoplamento, seja na forma de um pêndulo como aqui apresentado e abordado em [1], [2], [7], [8], [15], [18], [19], [20], [21], seja na forma de braços robóticos acoplados, como pêndulos invertidos ou solidário ao corpo. Segundo o estudo desenvolvido, o método mais utilizado é por meio da abordagem pelas equações de Newton-Euler. A escolha por este método está ligada a dois fatores. O primeiro deve-se à instrumentação do veículo. O posicionamento dos sensores é solidário ao corpo do VANT. A abordagem por Newton-Euler é facilitada se, ao desenvolver o modelo da planta, o engenheiro adotar a base móvel para os giros e a base fixa para os deslocamentos lineares. Desta forma, utilizam-se apenas matrizes de rotação para fazer a transformação e obter os valores desejados das variáveis nas diferentes bases.

O segundo fator está no problema da tensão do cabo que conecta a carga ao veículo. Através do método de Newton-Euler, a dedução das equações com esta consideração e sua não linearidade como em momentos em que o fio não está tensionado, torna o desenvolvimento de modelos direto.

Além do método de Newton-Euler, há ainda o desenvolvimento de modelos com base na Equação de Lagrange. A inclusão de forças externas através deste modelo pode não ser uma tarefa trivial, especialmente em razão do acoplamento presente entre os ângulos de giro do pêndulo e as direções principais do veículo. Isto pode ser visto na matriz de amortecimento complexa e de forças de Coriolis presentes em modelos desenvolvidos pelo método de Lagrange, referenciados no sistema fixo na Terra. Ainda por meio das principais técnicas, o rigor dos modelos foi se aprofundando conforme evolução dos controladores. Modelos mais detalhados incluem arrasto aerodinâmico, massa suspensa, massa suspensa deslocada do baricentro, cabos com tensão variável [45] e cabo deformável [29], buscando aumentar a precisão dos modelos.

Um número grande de estruturas de controle tem sido proposto para resolver o problema de massa pendular em VANTs. O controle relativo à carga é interessante, pois trata-se de um sistema de difícil sensoriamento e com objetivo de reduzir ou, se possível, eliminar o balanço da carga. O comportamento de UAVs tem sido explorado individualmente e coletivamente. Em [2], comparam-se as técnicas de PD com Regulador Quadrático Linear, adotando um modelo de oito graus de liberdade. Em [45] é apresentado o controle de oscilação da carga através de um controle não linear capaz de controlar a carga em trajetórias contínuas. Em [1], um veículo é usado para transporte por meio de controle não linear robusto para seguimento de referência, buscando reduzir efeitos de balanço. Buscando reduzir oscilações da carga pendular, [12] propõe-se um método de planejamento de trajetória para obter oscilações residuais mínimas e, desta forma, controlar o veículo e a carga. [18] apresenta a modelagem do link com a carga acoplada, propondo um modelo de segmentos para representar o cabo e adicionando um controlador RCAC (Retrospective Cost Adaptive Control) para compensar incertezas na massa transportada.

Com relação ao Controle, o comportamento de UAVs tem sido explorado individualmente e coletivamente. Em Controle Moderno, o desenvolvimento de novas abordagens permitiu que diferentes conceitos pudessem ser aplicados para otimizar rotas e estabilidade em sistemas autônomos. Exemplo disso é a aplicação de Redes Neurais Adaptativas para controle em [6] e [7]. Além desta, outras técnicas são utilizadas para estes fins como controle de inclinação através de Lógica Fuzzy [8].

Há ainda o uso de quadricópteros em sistema cooperativo com aplicações em carregamento de carga em conjunto [9]. Neste, um grupo de drones é organizado a fim de transportar uma carga com estrutura dinâmica e deformável.

2. MODELAGEM DO VEÍCULO

Uma vez traçados os objetivos do trabalho, faz-se necessária a construção de um modelo matemático do sistema para desenvolvimento das leis de controle a ser aplicadas ao veículo. O modelo aqui obtido segue as equações que regem a mecânica do sistema. A determinação das equações se dá por meio da Mecânica Lagrangeana.

O modelo obtido será chamado de planta nominal. Isto se dá devido ao fato de que tais modelos são apenas uma representação do sistema real. As plantas reais apresentam diversas fontes de incertezas e diferenças de seus modelos. Alguns de seus parâmetros não são exatos ou conhecidos, outros se modificam conforme o tempo e o envelhecimento ou alguns fenômenos presentes são simplificados para derivação do modelo.

As simplificações para derivação do modelo nominal são abordadas dentro do capítulo 2.3, enquanto as incertezas previstas no modelo são aprofundadas dentro do capítulo 3.6.

2.1. CARACTERÍSTICAS DO VEÍCULO

Um quadricóptero é um veículo aéreo, livre para movimentar-se num espaço tridimensional nos três eixos de forma translacional e realizar os três giros em torno dos mesmos. Desta forma, seu espaço de configuração possui dimensão N igual a seis. A dimensão do espaço de configuração é entendida como os graus de liberdade do sistema. O sistema pode ser visualizado na Figura 5.

Figura 5. Quadricóptero e orientação dos movimentos possíveis

Fonte: LIU, XI, ZHONG, 2014.

O acoplamento de uma carga pendular ao veículo adiciona dois graus de liberdade, conforme um pêndulo esférico, totalizando 8 graus de liberdade ao sistema.

Figura 6. Quadricóptero com carga acoplada

Fonte: JAIN, 2015

A tarefa então é definir as equações que regem os movimentos do quadricóptero e da carga para posteriormente desenhar controladores capazes de estabilizar a carga e o veículo.

2.2. SISTEMAS DE COORDENADAS

Antes de apresentar o desenvolvimento dos modelos matemáticos, é necessário definir bases para modelagem, de modo a obter um resultado consistente e preciso. Neste caso, serão adotados dois eixos de orientação. O primeiro será fixo, posicionado na superfície terrestre. O segundo será adotado solidário ao veículo. Esta adoção de sistema de coordenadas se dá pelo interesse em controlar o posicionamento do veículo no sistema de referencial inercial através do controle de atitude no referencial móvel e solidário ao corpo do VANT. Outro fator determinante é a instrumentação. Os sensores são posicionados no referencial móvel.

A orientação do quadricópteros no espaço é descrita por uma sequência de três rotações relativas ao sistema de coordenadas inercial. Esta sequência permite definir a posição do veículo em relação ao referencial fixo, excetuados os pontos de singularidade, discutidos mais à frente. Portanto, é necessário definir a ordem das rotações do corpo em relação ao referencial fixo. Neste trabalho, o sistema de rotação adotado é baseado nas rotações em torno dos eixos X, Y e Z. Por ora chamados de ângulos de Euler, estas rotações são chamadas de rotações de Tait-Bryan, comumente utilizadas em aplicações de engenharia e por isto aqui adotadas.

O sistema de coordenadas inercial é representado pela base $\{E\}$. Os vetores de posição linear e angular são dados por $\xi = [x, y, z]^T$ e $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$.

Figura 7. Sistemas de Coordenadas no referencial inercial e no referencial não inercial.

Fonte: MOOSAVIAN, SADR, ZARAFSHAN, 2014

O sistema de coordenadas no referencial não-inercial adotado é posicionado no centro de massa do veículo. Este sistema possui a notação $B = \{x_B, y_B, z_B\}$ e seus respectivos vetores de velocidade linear e angular são $V_B = [u, v, w]^T$ e $\vartheta = [p, q, r]^T$.

Definida a sequência de giro do referencial móvel em relação ao fixo, deve-se definir a matriz de transformação que expresse tais rotações na base fixa.

Figura 8. Transformação das taxas angulares

Fonte: COOK, 2013.

Conforme a figura acima, pode-se definir as rotações das velocidades em relação aos eixos fixos como:

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \quad (1)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \quad (3)$$

Que, reescritas de forma matricial, representa a matriz de transformação das rotações:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\vartheta = T_E^B \eta \quad (5)$$

De outra forma, a definição das rotações fixas nos eixos móveis é dada pela inversa da matriz de transformação das velocidades angulares:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\eta = T_B^E \vartheta \quad (7)$$

O último passo para definição dos sistemas e suas respectivas transformações é a determinação das equações de translação, conforme as rotações.

A matriz de rotação que descreve a orientação relativa do sistema é definida pelo produto das matrizes de rotação em torno dos eixos XYZ seguindo esta sequência.

Figura 9. Ângulos de Euler

Fonte: COOK, 2013.

Conforme o Sistema apresentado na figura acima a sequência previamente definida e as bases da figura sendo $B_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $B_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ e $E = \{x_E, y_E, z_E\}$, $B = \{x_B, y_B, z_B\}$, as equações segundo cada eixo são:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = R_z B_2 = R_2^B B_2 \quad (11)$$

$$B_2 = R_y B_1 = R_1^2 B_1 \quad (12)$$

$$B_1 = R_z E = R_E^1 E \quad (13)$$

$$\{B\} = R_E^B \{E\} = R_z R_y R_x \{E\} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$R_E^B = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

Este sistema de transformação adotado apresenta um ponto de singularidade. Quando dois eixos se encontram alinhados, ou seja, um dos ângulos é $\frac{\pi}{2}$, há o fenômeno de trava gimbal e o sistema perde um grau de liberdade. Nestes pontos, as matrizes não são invertíveis. Para evitar este ponto, uma alternativa é utilizar o sistema baseado em quaternions. Uma vez que o quadricóptero no estudo é visto como para transporte e não apresenta manobras agressivas, esta posição no sistema não é considerada requisito de projeto, sendo suficiente essa adoção de coordenadas.

2.3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

2.3.1. DINÂMICA DO SISTEMA

Antes de iniciar a modelagem, é fundamental entender a dinâmica do sistema e seu controle. A *Figura 10. Movimentação de um quadricóptero através dos giros dos rotores* apresenta os cenários típicos de controle da posição de um quadricóptero. O motor gira a hélice acoplada ao seu eixo. Esta cria uma força de sustentação no mesmo sentido do eixo e com direção conforme o sentido de giro da hélice. A combinação dos giros das hélices é responsável pelos movimentos do quadricóptero. A análise a seguir assume o veículo em *hovering*, quando este encontra-se pairando no ar.

Figura 10. Movimentação de um quadricóptero através dos giros dos rotores

Fonte: <http://uav-society.blogspot.com/2014/06/quadcopter-mechanics.html>

Caso de sustentação

O movimento vertical é obtido a partir do desequilíbrio resultante das forças de sustentação de todos os rotores com a força peso do quadricóptero. Para o caso de uma força resultante diferente de zero, há duas possibilidades. Primeiramente, todos os motores giram com velocidade maior que aquela necessária para sustentar o peso veículo e da carga e tem-se uma aceleração resultante que provoca a subida do sistema. Alternativamente, há uma força resultante dos motores menor que a força peso e o movimento do quadricóptero é descendente.

Caso de rolagem ou arfagem

As ações de rolagem e arfagem são equivalentes. Os giros são controlados a partir do controle das velocidades dos pares de rotores. Tomando a Figura 10(b) como referência, caso o rotor 1 gire com maior velocidade menor que o rotor 3, o veículo executa um giro em torno do seu próprio eixo com sentido positivo a orientação apresentada. Caso este desequilíbrio de velocidades se mantenha, a resultante das forças apresentará uma parcela para sustentar o quadricóptero e outra que deve acelerar o veículo no sentido da flecha verde da figura. No caso de rolagem, o desequilíbrio é dado pelos pares 2 e 4 e as forças envolvidas serão a de sustentação e ortogonal a anterior.

Caso de guinada

O último movimento possível se dá pela diferença de giros entre os pares de rotores. Cada motor produz uma força e um torque com relação ao seu centro de giro. Quando todos os motores giram com mesma velocidade, o somatório dos torques

aerodinâmicos é zero devido ao sentido de giro dos motores. Desta forma, caso se queira modificar a guinada do veículo, basta que os pares girem com velocidades distintas para a resultante ser diferente de zero.

As equações (17), (18) e (19) apresentam os modelos matemáticos das forças de sustentação, torques de arfagem e rolagem e guinada.

$$F = U_z = c_T \sum \omega_i^2 \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_\phi \\ U_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} dc_T(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ dc_T(\omega_4^2 - \omega_2^2) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\tau_\psi = U_\psi = c_Q \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 (-1)^{i+1} \quad (19)$$

Onde l é o braço ou a distância dos motores ao centro de giro do quadricoptero adotado no centro de massa e na origem do eixo móvel, e c_Q e c_T são coeficientes característicos dos motores para sustentação e torque aerodinâmico.

2.3.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO SEGUNDO LAGRANGE

Nesta seção, determinam-se as equações de movimento do conjunto VANT e pêndulo esférico. A definição das equações de Lagrange encontra-se no **APÊNDICE B**. A equação geral de Lagrange para coordenadas generalizadas é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = [Q_{NC}] \quad (20)$$

A função Lagrangeana L pode ser escrita em termos das energias cinética, termo dissipativo e potencial, conveniente neste caso para determinar as equações do movimento.

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = [Q_{NC}] \quad (22)$$

A energia cinética sendo representada por T e a energia potencial por V e o termo dissipativo do arrasto aerodinâmico por R .

Uma vez apresentada a forma generalizada da equação de Lagrange, devemos abordar o problema seguindo os passos abaixo:

- Determinar o número de graus de liberdade do problema,
- Selecionar um conjunto de coordenadas generalizadas independentes,
- Usar as relações cinemáticas para encontrar as velocidades e deslocamentos virtuais,
- Identificar as forças que são conservativas e aquelas que não são,
- Escrever as energias Potencial e Cinética e o trabalho virtual,
- Aplicar as equações de Lagrange.

O primeiro passo é determinar o número de graus de liberdade do sistema. O sistema possui seis graus de liberdade do veículo e dois graus de liberdade do pêndulo esférico. A carga é considerada uma massa pontual, o cabo é adotado como inextensível e sempre tensionado com inércia desprezível.

Figura 11. Eixos e Sistemas de Coordenadas do problema

Fonte: Autor

A seguir, as coordenadas generalizadas adotadas são:

$$q = \{x, y, z, \alpha, \beta, \phi, \theta, \psi\} \quad (23)$$

Sendo x, y, z, ϕ, θ e ψ as coordenadas do quadricóptero em relação à base fixa e α e β os ângulos que o fio possui em relação aos eixos da base móvel.

Os deslocamentos, velocidades e relações cinemáticas da massa são:

$$\begin{aligned} x_c &= x + l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ y_c &= y + l \cdot \sin \beta \\ z_c &= z - l \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \frac{dx_c}{dt} = \dot{x} - \dot{\beta} \cdot l \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha} \cdot l \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ \dot{y}_c &= \frac{dy_c}{dt} = \dot{y} + \dot{\beta} \cdot l \cdot \cos \beta \\ \dot{z}_c &= \frac{dz_c}{dt} = \dot{z} + \dot{\beta} \cdot l \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + \dot{\alpha} \cdot l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -l \cdot \sin \beta \sin \alpha & l \cdot \cos \beta \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 & l \cdot \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \cdot \sin \beta \cos \alpha & l \cdot \cos \beta \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c\}^T = J_c \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}\}^T \quad (27)$$

No caso das velocidades angulares, estas podem ser relacionadas conforme a equação (4):

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\{p, q, r\}^T = J_r \{\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}\}^T \quad (29)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_c & 0 \\ 0 & J_r \end{bmatrix} \quad (30)$$

De posse das posições e velocidades, pode-se calcular a energia cinética e energia potencial:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T J(q)^T M J(q) \dot{q} \quad (31)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_q I_3 & 0^{2 \times 2} & 0^{3 \times 3} \\ 0^{3 \times 3} & m_c I_2 & 0^{3 \times 3} \\ 0^{3 \times 3} & 0^{2 \times 2} & I_{pqr} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$V = Mgz + mgz_c \quad (33)$$

$$V = (m_q + m_c)gz - m_c l \cdot \cos \alpha \cos \beta \quad (34)$$

Onde m_q é a massa do veículo, m_c é a massa da carga, I_{pqr} é o tensor de inércia a partir do centro de massa do veículo, g é a aceleração da gravidade, l é o

comprimento do fio e I_2 e I_3 são as matrizes identidade de duas e três dimensões, respectivamente.

Substituindo as equações (31), (32) e (34) em (22) e desenvolvendo a Lagrangeana, obtém-se:

$$M\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q_{NC} \quad (35)$$

$$\ddot{q} = M^{-1}(Q_{NC} - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \quad (36)$$

As equações acima foram deduzidas para o caso do referencial fixo. A matriz M é a matriz de inércia do sistema, $C(q, \dot{q})$ é a matriz das forças de Coriolis e a matriz $G(q)$ é a matriz de efeitos gravitacionais. Particionando o sistema entre translação, rotação das massas e rotação do quadricóptero, chega-se a:

$$(m_q + m_c)\ddot{x} + b\dot{x} + m_c(-\ddot{\beta}.l.\sin\beta.\sin\alpha + \ddot{\alpha}.l.\cos\alpha.\cos\beta - 2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.l.\cos\alpha.\sin\beta - \dot{\beta}^2.l.\sin\alpha\cos\beta - \dot{\alpha}^2.l.\sin\alpha.\cos\beta) = F_x \quad (37)$$

$$(m_q + m_c)\ddot{y} + b\dot{y} + m_c(\ddot{\beta}.l.\cos\beta - \dot{\beta}^2.l.\sin\beta) = F_y \quad (38)$$

$$(m_q + m_c)(\ddot{z}) + b\dot{z} + m_c(\ddot{\beta}.l.\sin\beta.\cos\alpha + \ddot{\alpha}.l.\sin\alpha.\cos\beta - 2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.l.\sin\alpha.\sin\beta + \dot{\beta}^2.l.\cos\alpha\cos\beta + \dot{\alpha}^2.l.\cos\alpha.\cos\beta) = F_z - (m_q + m_c)g \quad (39)$$

$$\ddot{\alpha}.l^2\cos^2\beta - 2\dot{\alpha}.\dot{\beta}.l^2.\cos\beta.\sin\beta + \ddot{x}.l.\cos\alpha\cos\beta + \ddot{z}.l.\cos\beta\sin\alpha + g.l.\sin\alpha\cos\beta = 0 \quad (40)$$

$$\ddot{\beta}.l^2 - \ddot{x}.l.\cos\alpha\sin\beta + \ddot{y}.l.\cos\beta + \ddot{z}.l.\cos\alpha\sin\beta + \dot{\alpha}^2.l^2.\sin\beta\cos\beta + g.l.\cos\alpha\sin\beta = 0 \quad (41)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_t & 0_{5 \times 3} \\ 0_{3 \times 5} & C_r \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C_t = 0_{5 \times 5}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$c_{11} = 0 \quad (44)$$

$$c_{12} = (I_{yy} - I_{zz})(\dot{\theta} c \phi s \phi + \dot{\psi} s^2 \phi c \theta) + (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi} c^2 \phi c \theta - I_{xx} \dot{\psi} c \theta \quad (45)$$

$$c_{13} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi} c \phi s \phi c^2 \theta \quad (46)$$

$$c_{21} = (I_{zz} - I_{yy})(\dot{\theta} c \phi s \phi + \dot{\psi} s^2 \phi c \theta) + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi} c^2 \phi c \theta + I_{xx} \dot{\psi} c \theta \quad (47)$$

$$c_{22} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\phi} c \phi s \phi \quad (48)$$

$$c_{23} = (-I_{xx} + I_{yy} s^2 \phi + I_{zz} c^2 \phi)\dot{\psi} s \theta c \theta \quad (49)$$

$$c_{31} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi} s \phi c \phi - I_{xx} \dot{\theta} c \theta \quad (50)$$

$$c_{32} = (I_{zz} - I_{yy})(\dot{\theta} c \phi s \phi s \theta + \dot{\phi} s^2 \phi c \theta) + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi} c^2 \phi s \phi + (I_{xx} - I_{yy} s^2 \phi - I_{zz} c^2 \phi)\dot{\psi} s \theta c \theta \quad (51)$$

$$c_{33} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi} s \phi c \phi c^2 \theta + (I_{xx} - I_{yy} s^2 \phi - I_{zz} c^2 \phi)\dot{\theta} c \theta s \theta \quad (52)$$

Anteriormente foram definidas as forças externas provenientes dos motores do quadricóptero. As forças foram definidas para uma base móvel. No caso da base no referencial fixo, estas devem ser rotacionadas conforme a rotação da base móvel. Neste caso, tem-se:

$$Q_{NC}^E = R_B^E Q_{NC}^B \quad (53)$$

$$Q_{NC}^E = R_B^E \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \theta c \psi & c \theta s \psi & -s \theta \\ s \phi s \theta c \psi - c \phi s \psi & s \phi s \theta s \psi + c \phi \cos \psi & s \phi c \theta \\ c \phi s \theta \cos \psi + s \phi s \psi & c \phi s \theta s \psi - s \phi \cos \psi & c \phi c \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$Q_{NC}^E = \begin{bmatrix} -s\theta F_z \\ s\phi c\theta F_z \\ c\phi c\theta F_z \end{bmatrix} \quad (54)$$

Vale ressaltar que as equações (53) e (54) são deduzidas para a base inercial. No caso real, os sensores estão posicionados solidários ao veículo. Assim, torna-se conveniente adotar uma formulação onde há definição das coordenadas translacionais na base fixa e rotacionais na base móvel. No caso acima definido, o modelo de simulação deverá considerar que as leituras dos sensores devem ser transformadas para base fixa e então podem realimentar o sistema.

Alternativamente ao método de Lagrange, as equações de movimento podem ser deduzidas a partir do método de Newton-Euler. A escolha entre os métodos de Newton-Euler e Lagrange deve considerar os objetivos do estudo, número de corpos envolvidos, as coordenadas generalizadas e a experiência do engenheiro. Dependendo da formulação do problema para veículos de transporte de cargas, as forças de reação podem ser importantes. Em casos onde o cabo que conecta a carga ao drone seja considerado flexível, a abordagem pelo método de Newton-Euler pode ser mais conveniente.

2.3.3. LINEARIZAÇÃO DO MODELO

O objetivo do estudo é controlar a posição do drone quando carregado. Os controladores apresentados são baseados em sistemas lineares, fazendo-se necessário obter um modelo linear do sistema para projeto dos mesmos. No caso de um quadricóptero, a linearização é feita na posição de hover. Os motores giram à velocidade constante com módulo suficiente para que a resultante da força de sustentação seja igual ao da força peso, porém com sentido contrário. Os deslocamentos angulares são todos iguais a zero e o sistema encontra-se em equilíbrio.

Deseja-se obter um sistema do tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (55)$$

O modelo encontrado anteriormente apresenta acoplamento e não linearidades. Isto requer que o sistema seja linearizado. O método de linearização adotado baseia-se na expansão por séries de Taylor em torno de um ponto de operação. Esta aproximação gera um modelo linear válido neste intervalo. Os termos da série de Taylor de ordem superior são considerados pequenos o suficiente para não interferirem no modelo linear [17].

Através da Teoria das pequenas perturbações, podemos definir o vetor de estados da forma apresentada na equação (56):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_0(t) + \Delta u(t) \end{aligned} \quad (56)$$

Substituindo a expressão acima e expandindo em séries de Taylor as equações anteriores, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= \overbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_0}}^A \Delta x(t) + \overbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{u_0}}^B \Delta u(t) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} &= f(\bar{x}_0, \bar{x}_1) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x} (x_0 - \bar{x}_0) + \frac{\partial f(\bar{x}_1)}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots \right] \end{aligned} \quad (57)$$

A região de linearização adotada é de pequenos deslocamentos angulares. Isto implica em termos de ordem igual ou superior a 2 muito reduzidos. Desta forma, são desconsiderados. Assume-se que a operação será na nesta vizinhança. Caso as condições de operação variem, as equações linearizadas não são mais válidas e outra abordagem deve ser adotada.

O ponto de operação para pequenos ângulos é:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} &\cong 0 \\ \alpha_0 = \beta_0 = \phi_0 = \theta_0 = \psi_0 &= 0 \\ \ddot{z}_0 &= -g\end{aligned}\tag{58}$$

As equações ficam reduzidas a:

$$(m_q + m_c)\ddot{x} + b\dot{x} + m_c(\ddot{\alpha}.l) = -(m_q + m_c)g\theta\tag{59}$$

$$(m_q + m_c)\ddot{y} + b\dot{y} + m_c(\ddot{\beta}.l) = (m_q + m_c)g\phi\tag{60}$$

$$(m_q + m_c)(\ddot{z}) + b\dot{z} = F_z\tag{61}$$

$$\ddot{\beta}.l + \ddot{y} + g.\beta = 0\tag{62}$$

$$\ddot{\alpha}.l + \ddot{x} + g.\alpha = 0\tag{63}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau_\phi}{I_{xx}}\tag{64}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_{yy}}\tag{65}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\tau_\psi}{I_{zz}}\tag{66}$$

Apesar do acoplamento aparente entre α , β , x e y , o sistema linearizado pode ser desacoplado, e o sistema se resume a:

$$\ddot{x} = \frac{m_c.g.\alpha - (m_q + m_c)g\theta - b\dot{x}}{m_q}\tag{67}$$

$$\ddot{y} = \frac{m_c.g.\beta + (m_q + m_c)g\phi - b\dot{y}}{m_q}\tag{68}$$

$$\ddot{z} = \frac{\Delta T - g - b\dot{z}}{(m_q + m_c)}\tag{69}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{(m_q + m_c)\left(g(\alpha - \theta) - \frac{b\dot{x}}{l}\right)}{m_q}\tag{70}$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{(m_q + m_c)(g(\beta + \phi) - \frac{b\dot{y}}{l})}{m_q} \quad (71)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\Delta\tau_\phi}{I_{xx}} \quad (72)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\tau_\theta}{I_{yy}} \quad (73)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\Delta\tau_\psi}{I_{zz}} \quad (74)$$

3. SISTEMA DE CONTROLE

Até o momento foram desenvolvidos os modelos da dinâmica da planta. Foram desenvolvidos os modelos não lineares e posteriormente feita a linearização em torno do ponto de operação quando o VANT encontra-se pairando. Um controlador é um dispositivo ou meio de obter respostas desejadas de uma planta a partir de entradas manipuláveis.

A control system or plant or process is an interconnection of components to perform certain tasks and to yield a desired response, i.e. to generate desired signal (the output), when it is driven by manipulating signal (the input). A control system is a causal, dynamic system, i.e. the output depends not only the present input but also the input at the previous time.

(Gu, Petkov, Konstantinov, 2005)

A Figura 12 apresenta a malha genérica de um Sistema de Controle por realimentação:

Figura 12. Malha de Controle por realimentação

Fonte: Autor

Como dito anteriormente, as estratégias de controle são baseadas em sistemas lineares. O objetivo é identificar qual estratégia de controle é a mais adequada para estabilizar a planta num sistema não-linear e com acoplamentos entre carga e veículo nos graus de liberdade de translação. A validação dos controladores resultantes é feita por meio de simulações da planta não-linear controlada pelos controladores desenvolvidos.

A escolha por sistemas por realimentação se dá pelas propriedades presentes nesta arquitetura. Sistemas baseados em realimentação de estados possuem robustez quanto a incertezas, estabilidade para sistemas que apresentam instabilidade em malha aberta, rejeição a ruídos e baixa sensibilidade. Estas propriedades são importantes no projeto de controladores em quadricópteros, uma vez que apresentam instabilidade em malha aberta, sensibilidade, ruídos dos sensores e distúrbios **Erro! Fonte de referência não encontrada.**].

Inicialmente, o projeto do controlador é feito com um controlador Proporcional, Integral e Derivativo. Simples e de relativa facilidade de implantação, controles tipo PID são largamente utilizados em aplicações industriais [53]. Em casos multivariáveis e,

especificamente em VANTs, este tipo de controlador apresenta um grau maior de dificuldade para ajuste. Dado o acoplamento do sistema, o ajuste dos ganhos torna-se uma tarefa iterativa por dois motivos. Em primeiro lugar, ajustar os ganhos de controladores multivariáveis em sistemas acoplados significa que um controlador pode interferir de forma considerável noutro grau de liberdade. Em segundo, para casos como quadricópteros onde o controle de posição é indireto, ou seja, a posição do veículo é resultado da inclinação e força de sustentação proporcionadas pelos giros dos motores, o ajuste destes ganhos pode ocasionar uma dinâmica com frequência maior ou menor. Isto, por sua vez, impacta na relação de estabilização e desempenho do veículo, podendo levar a um sistema pouco sensível. Alternativamente, ajustes que busquem desempenho maior e manobras mais rápidas podem dificultar ou impedir a estabilização.

Uma forma de reduzir este esforço iterativo está na adoção de um controlador sintetizável a partir de um método. O segundo controle abordado é o Regulador Quadrático Linear (LQR). A vantagem do LQR é possibilitar computar ganhos para um controle linear ótimo a partir de uma abordagem sistemática e matrizes de ponderação Q e R . Selecionados adequadamente os coeficientes destas matrizes, a obtenção de um controlador LQR resume-se a uma tarefa computacional.

Além das características naturais em sistemas com quadricópteros como instabilidade e subatuado, o sistema ainda apresenta incertezas e requisitos elevados de estabilidade desempenho. Assim, aborda-se uma terceira técnica para projetar um sistema capaz estabilizar o drone. A abordagem deve obter estabilidade e desempenho robustos através da síntese de um controlador H_{∞} .

3.1. ABORDAGENS

Como já explanado, a síntese de controladores em sistemas multivariáveis pode ser um trabalho complexo dado o nível de acoplamento. O transporte de cargas em quadricópteros apresenta oito graus de liberdade, condicionando o sistema a 16

variáveis de estado. Além disso, o controle é feito apenas em quatro destes graus, sendo eles rotações no próprio eixo de arfagem, rolagem e guinada e translação vertical.

A análise da planta permite observar que as atitudes ou orientação da aeronave são desacopladas da carga e da translação do veículo. Isto motiva a adoção de uma estratégia de controle em cascata, separando o controle numa parte interna ligada a atitude do veículo e outra externa ligada a posição no espaço. Esta configuração é semelhante a uma ponte rolante tridimensional ou um manipulador cartesiano [35].

Nesta arquitetura, as três abordagens de controle são alternativas de controladores de atitude, enquanto para o controle externo adota-se um controlador tipo PID.

Figura 13. Malha de Controle de Posição de um quadricópteros

Fonte: Autor

No capítulo 2 foi introduzida a notação e linearização da planta em torno do ponto de equilíbrio. Dando sequência a esta nomenclatura e adicionando os termos de saída da equação para sistemas lineares, representa-se o sistema na forma convencional:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{75}$$

Onde $x(t)$ é o vetor de estados do sistema, $u(t)$ são as entradas do sistema e $y(t)$ é a saída do sistema com dimensão. As matrizes $A_{8 \times 8}$, $B_{8 \times 4}$, $C_{8 \times 8}$ $D_{8 \times 4}$ são chamadas matrizes de estado, entrada, saída e transmissão direta, respectivamente. Após as linearizações feitas na seção 2.3.3, o sistema assume a forma de um sistema linear invariante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{76}$$

Adotando a notação matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix}\tag{77}$$

Aplicando a transformada de Laplace e dadas as condições iniciais como drone com velocidades e deslocamentos nulos, o sistema apresenta a forma de:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\end{aligned}\tag{78}$$

3.2. CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Dado um sistema do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, onde $x(t)$ é o vetor de estados, $u(t)$ um vetor de controle, define-se Controlabilidade como a habilidade de, a partir de um tempo t_0 , as entradas do sistema serem capazes de conduzir o estado $x(t_0)$ a outro estado $x(t_1)$ num intervalo finito de tempo. Isto pode ser verificado caso o posto da matriz

de controlabilidade $\mathbb{C}$ seja igual à ordem do sistema. A matriz de controlabilidade é dada por:

$$\mathbb{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (79)$$

$\text{posto}(\mathbb{C}) = n$

Caso o sistema não seja completamente estável, verificada através da igualdade acima, o sistema ainda pode ser estabilizável. O sistema é dito estabilizável caso os modos incontroláveis do sistema sejam estáveis e os modos instáveis sejam controláveis. Este tipo de sistema pode ser estabilizado através de uma escolha adequada de realimentação.

Observabilidade é a capacidade de se determinar os estados do sistema $x(t_0)$, num instante t_0 , a partir das observações das saídas do sistema num intervalo de tempo finito. Para um sistema do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (80)$$

O sistema é dito completamente observável se todas as transições dos estados do sistema afetarem as saídas do sistema. A verificação da observabilidade é feita através da comparação entre o posto da matriz de observabilidade $\mathbb{O}$ e a ordem do sistema. Caso sejam iguais, o sistema é dito observável.

$$\mathbb{O} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T \quad (81)$$

$\text{posto}(\mathbb{O}) = n$

No caso de sistemas de controle avançado como controle robusto, é importante definir dois outros conceitos: estabilizabilidade e detectabilidade.

O sistema pode ser reorganizado e as variáveis de estado podem ser separadas em variáveis controladas $z(t)$ e variáveis de estados observadas $y(t)$. A nova notação torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 u \\ z &= \mathbf{C}_1 x + \mathbf{D}_{11} w + \mathbf{D}_{12} u \\ y &= \mathbf{C}_2 x + \mathbf{D}_{21} w + \mathbf{D}_{22} u\end{aligned}\tag{82}$$

Neste caso, o sistema é dito estabilizável se, para o par (A, B_2) , exista um estado realimentado $u = Fx$ que estabilize o sistema. Igualmente, para o sistema ser considerado detectável, existe L tal que $A + C_2 L$ é estável.

Estas condições são necessárias para projeto de controle que são abordados adiante.

3.3. ESTABILIDADE DO SISTEMA

A análise de estabilidade do sistema permite ao projetista entender o comportamento do sistema. Através da verificação de estabilidade, é possível entender se é possível e como estabilizar o sistema.

A estabilidade pode ser verificada através da análise dos polos do sistema, através de critérios como de Routh-Hurwitz ou Nyquist.

3.4. CONTROLADOR TIPO PID

No caso de um quadricóptero, devido à dinâmica no sistema, o controle usado é por realimentação. A escolha por sistemas de realimentação se dá por se tratarem de sistemas instáveis e sensíveis a distúrbios e propensos a variações em parâmetros do sistema. Isto permite ao projetista trabalhar com componentes do sistema mais imprecisos e com menor custo.

No caso de controladores PID, as diferenças entre saídas obtidas e entradas desejadas é calculada e 3 operações são executadas a partir deste sinal.

$$\begin{aligned}u_p(t) &= K_p e(t) \\u_d(t) &= K_d \dot{e}(t) \\u_i(t) &= K_i \int e(t) dt\end{aligned}\tag{83}$$

Um controlador PID opera com os três tipos de controle em paralelo. Desta forma, o sinal de saída do controlador fica:

$$\begin{aligned}u_{PID} &= u_p(t) + u_i(t) + u_d(t) \\u_{PID} &= K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i \int e(t) dt \\U(s) &= \left(K_p + sK_d + \frac{K_i}{s} \right) E(s)\end{aligned}\tag{84}$$

A forma mais usual deste é:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + K_d s \right) E(s)\tag{85}$$

E a malha pode ser representada da seguinte forma:

Figura 14. Malha de um Controlador PID

Fonte: Autor

Cada um dos ganhos de controle acima impacta o comportamento da planta controlada de diferentes formas e isto deve ser levado em consideração no ajuste de controle.

Ações de controle proporcionais modificam a entrada proporcionalmente ao erro de controle. Aumentar o ganho proporcional implica em aumentar a velocidade de resposta. Caso o valor seja excedente, o sistema pode apresentar oscilações ou instabilidade. A ação da parte integrativa considera o erro de forma cumulativa, conduzindo o erro de estado estacionário a zero em regime permanente. Caso o erro não seja zero e o atuador encontre-se saturado, incrementos no termo integrativo não contribuirão para resposta mais rápida do sistema. A continuação do acúmulo de erro faz com que sejam alcançados valores muito altos do termo integrativo que, mesmo com sinal negativo de erro, o controlador levará muito tempo para trazer o termo integrativo de volta ao estado estacionário. Este fenômeno é conhecido como windup e gera elevado sobressinal e longo tempo de acomodação. Por fim, para acelerar a ação de controle é adicionado um fator multiplicativo à taxa de erro, sendo esta a ação da parte derivativa. Caso seu

valor seja elevado, o sistema apresentará sensibilidade ao ruído e pode apresentar instabilidade.

No caso do VANT, o sistema apresenta quatro realimentações com controle PID, estas são arfagem, rolagem, guinada e controle de altura. Embora o sistema apresente acoplamento, o ajuste dos parâmetros dos controladores PID foram feitos de forma independente entre os estados. Inicia-se com o ajuste dos ganhos proporcionais e derivativos da altitude onde os quatro motores são acionados. Passa-se ao ajuste dos ganhos para guinada onde também há efeito combinado dos giros dos motores. Por fim, os ajustes dos ganhos de rolagem e arfagem são feitos. Dada a simetria do problema, o controlador desenvolvido para arfagem é o mesmo para rolagem.

Para o ajuste dos valores de cada controlador, segue-se o Segundo Método de Ziegler-Nichols como descrito em [48].

3.5. CONTROLADOR TIPO LQR

O objetivo de Controladores tipo LQR é obter um ganho de malha fechada, $u = -Kx$, que minimize a função custo, dada por:

$$J = \int_0^{\infty} \overbrace{(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u})}^L dt \quad (86)$$

As matrizes Q e R são os pesos dados ao acompanhamento de referência e ao esforço de controle, respectivamente. O projetista deve escolher os pesos das matrizes a fim de obter o controlador. Em geral, este trabalho requer experiência por parte do projetista.

A escolha dos pesos pode ser uma tarefa árdua se feito por tentativa e erro. Desta forma, iniciou-se o processo de escolha das matrizes através da ponderação pelos máximos ao quadrado de cada estado [46]. Escolhem-se valores de q_i e r_i como o inverso do quadrado do maior valor esperado para os estados x_i e u_i . Se o resultado obtido não está dentro daqueles definidos como requisito do projetista, alteram-se os valores para obter um compromisso entre tempo de resposta, amortecimento e esforço de controle. Os pesos podem ser entendidos também como uma penalidade para cada variável de estado ou controle. Além dos valores dos máximos, é importante avaliar a relação entre os pesos das matrizes segundo a equação

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & q_i \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_i \end{bmatrix}$$

$$q_i = \frac{1}{(\max(x_i))^2}$$

(88)

$$r_i = \frac{1}{(\max(u_i))^2}$$

$$L = \|x\|^2 + \rho \|u\|^2$$

(89)

3.6. CONTROLADOR TIPO $\mathcal{H}_\infty$

Esta parte do capítulo apresenta a teoria de Controle H_∞ adotada para controle de atitude do quadricóptero. Em realidade, quadricópteros operam em campo aberto, expostos a vento e chuva, por exemplo. Além disto, os sinais oriundos dos sensores apresentam ruído devido a qualidade dos mesmos ou vibrações originadas na estrutura.

Adicionalmente, no caso de quadricópteros de transporte, as cargas alteram o centro de massa do sistema, alterando tensor de inércia e massa do sistema. Estas alterações podem ser causadas por massas de valor mais elevado ou onde o comprimento do cabo que os conecta é diferente daquele de projeto.

Figura 15. Sistema de Controle de um grau de liberdade

Fonte: SKOGESTAD, POSTLETHWAITE, 2015

O sistema da Figura 15 apresenta uma estrutura típica de controle com planta real, considerando incertezas, ruídos, distúrbios e perturbações.

Os objetivos deste controlador são: Em baixas frequência, rejeitar distúrbios e acompanhar o sinal de referência, em altas frequências, rejeitar ruídos, garantir Estabilidade Robusta na presença de incertezas.

3.6.1. REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA LINEAR

A equação (75) apresenta o problema de sistemas lineares sem distinguir entre variáveis de estado controladas, variáveis de estado observadas, sinais exógenos e ruídos. Na prática, estas variáveis e sinais são distintos e devem ser representadas no sistema linear.

A modificação da estrutura clássica de controle deve ser alterada e os estados, distúrbios e ruídos acrescentados ao modelo. Desta forma, a representação do sistema se torna:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{zw}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{zu}\mathbf{u}(t) \\
\boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{C}_\varepsilon\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{\varepsilon w}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{\varepsilon u}\mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{90}$$

A matriz $G(s)$ que representa a matriz de transferência de $U(s)$ para $Y(s)$ apresentada em (78), na nova notação de espaço de estados é alterada, apresentando se como:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w & \mathbf{B}_u \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D}_{zw} & \mathbf{D}_{zu} \\ \mathbf{C}_\varepsilon & \mathbf{D}_{\varepsilon w} & \mathbf{D}_{\varepsilon u} \end{bmatrix} \tag{91}$$

As entradas e saídas do sistema sendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \{r, d_i, d, n\}^T \rightarrow \text{Sinais exógenos} \\
\mathbf{z} &= \{e, u, y\}^T \rightarrow \text{Sinais de saída controlados}
\end{aligned} \tag{92}$$

3.6.2. INCERTEZAS

Plantas reais apresentam diversas fontes de incertezas, cabendo citar algumas como parâmetros aproximados, especialmente em modelos linearizados, simplificações de modelos de maneira conscienciosa, modelos de ordem reduzida, parâmetros que variam conforme a faixa de frequência de operação ou desconhecimento de dinâmicas da planta.

De acordo com [54], incertezas podem ser divididas em dois grupos: incertezas paramétricas, quando a estrutura do modelo é conhecida, porém alguns parâmetros não são exatos, e incertezas não estruturadas ou incertezas a partir de dinâmica negligenciada.

Considerando o modelo da planta, as incertezas apresentam-se como multiplicativas ou aditivas, conforme as Figura 16 e

Figura 17.

Figura 16. Estrutura clássica de Controle em Malha fechada com incerteza aditiva, distúrbios, perturbações e ruídos

Fonte: Autor

Em plantas com incertezas aditivas, a planta real é dada por:

$$\mathbf{G}_{\Delta_A}(s) = \mathbf{G} + \Delta_A \mathbf{W}_A \quad (93)$$

Figura 17. Diagrama de blocos do sistema considerando incertezas multiplicativas

Fonte: Autor

Enquanto incertezas multiplicativas são dadas por:

$$\mathbf{G}_{\Delta_M} = (\mathbf{I} + \Delta_M \mathbf{W}_M) \mathbf{G} \quad (94)$$

Em geral, plantas reais apresentam ambas incertezas.

3.6.3. ESPECIFICAÇÕES E LIMITAÇÕES DE DESEMPENHO

Em projeto de controles como H_∞ , o controlador deve ser capaz de garantir estabilidade do sistema e atender os requisitos de desempenho. Isto pode ser verificado a partir das magnitudes de sinais e das funções de transferência do sistema.

O método adotado para formatação do problema neste trabalho é o de Sensibilidade Mista. Neste método, busca-se formatar as funções de Sensibilidade, Sensibilidade Complementar e Sensibilidade do Controlador para atender aos requisitos especificados pelo projeto. A demonstração detalhada é apresentada em [54]. As equações em (96) apresentam as definições das Sensibilidades para a malha de controle da

Figura 18:

Função de Sensibilidade

$$S_i = (I + KG)^{-1} \quad (95)$$

$$S_o = (I + GK)^{-1}$$

Função de Sensibilidade Complementar

$$T_i = I - S_i = KG(I + KG)^{-1} \quad (96)$$

$$T_o = I - S_o = GK(I + GK)^{-1}$$

Função de Sensibilidade do Controlador

$$C = KS \quad (97)$$

Figura 18. Diagrama de blocos de uma configuração padrão com realimentação

Fonte: Autor

Estas definições são importantes, pois como pode ser visto em (98), elas apresentam um papel fundamental em cada sinal.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \mathbf{T}_o(\mathbf{r} - \mathbf{n}) + \mathbf{S}_o\mathbf{G}\mathbf{d}_i + \mathbf{S}_o\mathbf{d} \\
 \mathbf{e} &= \mathbf{S}_o(\mathbf{r} - \mathbf{d}) + \mathbf{T}_o\mathbf{n} - \mathbf{S}_o\mathbf{G}\mathbf{d}_i \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{C}(\mathbf{r} - \mathbf{d} - \mathbf{n}) - \mathbf{T}_i\mathbf{d}_i \\
 \mathbf{u}_d &= \mathbf{C}(\mathbf{r} - \mathbf{d} - \mathbf{n}) + \mathbf{S}_i\mathbf{d}_i
 \end{aligned} \tag{98}$$

Desta forma, podem ser definidas as especificações de desempenho por meio da análise em frequência das funções formatadas. O projetista deve formatá-las conforme a Tabela 1:

Tabela 1. Requisitos para sistema robusto

$\bar{\sigma}(S)$ pequeno em baixas frequências	→	Rejeita distúrbios
$\bar{\sigma}(T) \cong 1$ em baixas frequências	→	Acompanhamento do Sinal de Referência
$\bar{\sigma}(T)$ pequeno em altas frequências	→	atenua ruídos
$\bar{\sigma}(C)$ pequeno em altas frequências	→	Controle barato
$\bar{\sigma}(C)$ pequeno em altas frequências	→	Estabilidade Robusta para Incertezas Aditivas

As considerações da Tabela 1 podem ser visualizadas na Figura 19.

Figura 19. Valores Singulares das Funções de Sensibilidade e sua formatação ideal

Fonte: Cutipa-Luque, 2007.

No estudo de sistemas multivariáveis, há de se considerar a escala dos sinais quando na síntese de controladores. Semelhante ao caso do controlador LQR, o conhecimento prévio do projetista é importante na escolha destes valores, que devem estar próximos as magnitudes máximas de cada sinal. Como os sinais podem ser de magnitudes muito distintas, a normalização do sinal é de extrema importância, tornando os sinais comparáveis e a formatação de funções de sensibilidade possível.

O sistema se torna, considerando as funções de ponderação e os sinais normalizados:

Figura 20. Diagrama de blocos considerando ponderações

Fonte: Autor

Num Sistema Linear Multivariável, os pesos são dados por matrizes que fazem a normalização. As matrizes do sistema linear são normalizadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \mathbf{S}_x \mathbf{A} \mathbf{S}_x^{-1} \\ \mathbf{B}_n &= \mathbf{S}_x \mathbf{B} \mathbf{S}_u^{-1} \\ \mathbf{C}_n &= \mathbf{S}_y \mathbf{C} \mathbf{S}_x^{-1} \\ \mathbf{D}_n &= \mathbf{S}_y \mathbf{D} \mathbf{S}_u^{-1} \end{aligned} \quad (99)$$

As matrizes $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_u$ e $\mathbf{S}_y$ são matrizes diagonais de normalização dos dos estados, entradas e saídas, conforme os valores máximos esperados de cada um. No caso da síntese do controlador, o deve ser feito o processo inverso para obtenção da matriz final de Controle.

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}_u^{-1} \mathbf{K}_n \mathbf{S}_u \quad (100)$$

3.6.4. ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTOS

Em sistemas robustos, os critérios de estabilidade e desempenho devem ser re-visitados. De acordo com [54], Estabilidade Robusta é definida como aquela onde a planta apresenta estabilidade para todo o conjunto de plantas consideradas as incertezas do modelo até o pior cenário.

Toma-se como exemplo uma planta com incerteza multiplicativa (

Figura 17), dada por $\|\Delta_M(j\omega)\| \leq 1, \forall \omega$ na saída da planta. Ademais, admite-se que o sistema tenha estabilidade nominal em malha fechada, ou $\|\Delta_M(j\omega)\| = 0, \forall \omega$. As funções de transferência que representam as incertezas são obtidas por:

$$\mathbf{L}_\Delta = \mathbf{G}_\Delta \mathbf{K} = (\mathbf{1} + \Delta_M \mathbf{W}_m) \mathbf{G} \mathbf{K} = \mathbf{L} + \Delta_M \mathbf{W}_M \mathbf{L}, \|\Delta_M(j\omega)\| \leq 1, \forall \omega \quad (101)$$

Através do critério de Nyquist, sabe-se que a estabilidade está garantida se a função de transferência do sistema em malha fechada $\mathbf{L}$ não contornar o ponto -1. No caso de sistemas robustos, a estabilidade robusta estará garantida se nenhum elemento de $\mathbf{L}_\Delta(j\omega)$ contornar o ponto -1.

Isto significa que o disco formado pelas incertezas $\|\Delta_M(j\omega)\|$ deve se manter na trajetória de frequência de $\mathbf{L}(j\omega)$ nominal sem envolver o ponto -1, mesmo na ocorrência de incerteza do pior cenário, $\Delta_M = \mathbf{1}$. Ou seja:

$$|\mathbf{W}_M| < |\mathbf{1} + \mathbf{L}(j\omega)|, \forall \omega \quad (102)$$

$$\left| \mathbf{W}_M \frac{\mathbf{L}}{1 + \mathbf{L}} \right| < 1, \forall \omega$$

$$|\mathbf{W}_M \mathbf{T}| < 1, \forall \omega$$

$$\|\mathbf{W}_M \mathbf{T}\|_\infty < 1$$

$$\|\mathbf{T}\|_\infty < \|\mathbf{W}_M\|_\infty^{-1}$$

Figura 21. Estabilidade Robusta em SISO

Fonte: Cutipa-Luque, 2007

A Figura 21 apresenta o gráfico de Nyquist para um sistema escalar ilustrativo. O disco possui raio igual a $|\mathbf{W}_M \mathbf{L}|$ ao redor do sistema nominal $\mathbf{L}(j\omega)$. Este disco não deve envolver o ponto -1, mesmo no pior caso.

O caso multivariável é análogo ao escalar, porém o limite é dado pelo valor singular superior, tornando-se:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{W}_M \mathbf{T}) < 1$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}) < \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M)^{-1}, \forall \omega \tag{103}$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{L}) < \bar{\sigma}(\mathbf{W}_M)^{-1} \text{ para } \omega \text{ elevadas}$$

Segundo [54], a ausência desta condição não impede a estabilidade robusta, porém sua ocorrência garante a estabilidade robusta. Em geral, tem-se que:

$$\begin{aligned} \|S\|_{\infty} \text{ e } \|T\|_{\infty} \text{ grandes} &\Rightarrow \text{ Pouca Estabilidade Robusta} \\ \|S\|_{\infty} \text{ e } \|T\|_{\infty} \text{ pequenas} &\nRightarrow \text{ Estabilidade Robusta} \end{aligned} \quad (104)$$

Em controle, além da Estabilidade, deseja-se que os controladores desenvolvidos sejam capazes de desempenhar de forma como especificada pelo projetista.

Assim como o sistema pode apresentar problemas de estabilidade quando submetido a condições de ruídos, incertezas, perturbações e distúrbios, estes fenômenos também podem influenciar a regulação e o acompanhamento de trajetória do sistema. Portanto, é necessário utilizar testes de desempenho para o sistema. O teste deve ser capaz de indicar a pior degradação sofrida por um tipo de perturbação pelo sistema.

As funções de Sensibilidade podem ser usadas como um indicativo de desempenho, apresentando valores típicos em $\|S\|_{\infty} < 6 \text{ dB}$ e $\|T\|_{\infty} < 2 \text{ dB}$.

São características de um bom controlador:

Tabela 2. Características de desempenho ideais de um controlador

Seguir sinal de referência com proximidade
Capacidade de recuperação frente a distúrbios externos
Capacidade de resposta frente a incertezas
Rejeição a ruídos na saída

Desempenho Robusto é definido quando o sistema satisfaz os requisitos de desempenho para todo o conjunto de plantas consideradas as incertezas até o pior caso possível.

$$\begin{aligned}
|W_S S| &< 1, \forall S(j\omega) \text{ e } \forall \omega \\
|W_S| &< |1 + L_\Delta|, \forall L_\Delta \text{ e } \forall \omega
\end{aligned}
\tag{105}$$

Sendo W_S a função de ponderação da Função de Sensibilidade.

No caso de Desempenho Robusto, as funções do sistema com incertezas L_Δ não cruzam o círculo no ponto -1 com raio $|W_S|$.

Figura 22. Desempenho Robusto para o caso escalar

Fonte: Cutipa-Luque, 2007.

$$\begin{aligned}
|W_S S| + |W_M L S| &< 1, \forall \omega \\
|W_S S| + |W_M T| &< 1, \forall \omega \\
\max(|W_S S| + |W_M T|) &< 1, \forall \omega
\end{aligned}
\tag{106}$$

A generalização para o caso de sistemas multivariáveis com perturbação na saída e incertezas multiplicativas e pior cenário ($\|\Delta_M\|_\infty = 1$):

$$\bar{\sigma}(W_S S) + \bar{\sigma}(W_M T) \leq 1, \forall \omega
\tag{107}$$

3.6.5. ESCOLHA DE FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO

Por fim, a seleção das funções de ponderação é um passo fundamental para que sejam alcançados os requisitos de Estabilidade e Desempenho Robustos do projeto. Em sistemas multivariáveis, esta busca pode ser um processo complexo. A experiência do projetista e os objetivos de controle podem ajudar a seleção. Parte-se de algumas funções preestabelecidas e iterativamente busca-se uma relação entre W_s , W_T e W_C que apresente o comportamento desejado. Estas funções iniciais são:

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{\frac{s}{M_s} + \omega_{bs}}{s + \varepsilon_s \omega_{bs}} \\ W_T &= \frac{s + \frac{\omega_{bt}}{M_t}}{\varepsilon_T s + \omega_{bt}} \\ W_C &= \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_c}}{\varepsilon_C s + \omega_{bc}} \end{aligned} \tag{108}$$

Figura 23. Formas gerais das Funções de Ponderação

Fonte: Donha, 2006, p. 72

A Figura 23 apresenta as formas gerais das funções de ponderação de Sensibilidade e Sensibilidade do Controlador. Uma consideração importante entre as frequências dos filtros de cada função de ponderação e a largura de banda do sistema é, segundo [23]:

- $\omega_s \leq \omega_c \leq \omega_t \leq \omega_b$

Em baixas frequência, a magnitude da função Ponderação da Sensibilidade W_s deve ser grande. Isto porque deseja-se penalizar erros de modelagem de baixa frequência, assim dando um alto custo a função de Sensibilidade S nesta faixa de frequência. A função peso aproxima-se de um integrador com um termo de avanço, procurando-se garantir ponderação dos erros em média frequência, próximo à região da frequência de cruzamento do sistema. No caso dos parâmetros, M_s serve como limitador de sinal, em geral em torno de 2dB. A frequência de corte do filtro, ω_{bs} , é limitada pela largura de banda do sistema. Finalmente ε serve como um facilitador para implantação do filtro.

A ponderação adequada da Sensibilidade do Controlador também é parte fundamental no projeto. Isto porque a energia disponível é limitada no caso de veículos aéreos não tripulados e deseja-se limitar seu uso para contrapor distúrbios de alta frequência ou limitar a influência de ruídos na ação de controle. Isto evita saturação do atuador, desgaste por fadiga e alto consumo. Desta forma, deseja-se impor um alto custo na função de sensibilidade do controlador, C , para altas frequências. Este papel é desempenhado pela formatação de W_c com ganho elevado em altas frequências.

A formatação da função peso da sensibilidade complementar, W_T , é similar ao procedimento em W_c e deve ser tal que apresente ganho baixo em altas frequências, reduzindo efeitos de ruídos de medição.

No caso de sistemas multivariáveis como o do quadricóptero com carga pendular, essas funções de transferência são arrumadas em matrizes de funções de transferência para cada canal. Uma vez normalizadas, os ajustes nas funções devem seguir conforme a frequência de cada, apresentando-se como um procedimento trabalhoso.

3.6.6. SISTEMA DE DOIS PORTOS

A estrutura do projeto pode ser modificada para transformar o projeto de controle H_∞ num problema de otimização. Para isso, adota-se a “configuração de Dois Portos:

Figura 24. Diagrama rearranjado para configuração de dois portos

Fonte: Autor

Esta configuração é equivalente a:

Figura 25. Configuração genérica de dois portos

Fonte: Autor

Estendendo o problema ao caso com incertezas na planta, a configuração genérica apresenta mais um bloco. A solução considerando as incertezas foge ao escopo deste trabalho, portanto a síntese será feita sem considerar as incertezas. Em seguida, a avaliação de desempenho e robustez do controlador será feita considerando o pior caso possível.

Figura 26. Diagrama de dois portos

Fonte: Autor

3.6.7. METODOLOGIA DA SENSIBILIDADE MISTA

A abordagem por Sensibilidade Mista é o nome dado a abordagem que busca formatar a malha de controle através da penalização das funções de Sensibilidade S , a complementar T e a sensibilidade do controlador $C = KS$.

A função de transferência $W_s S$, que relaciona o erro e o distúrbio externo, deve ser minimizada. Isto se dá pelo fato de os distúrbios ocorrerem tipicamente em baixa frequência e, para minimizá-los, o valor singular máximo de S deve ser pequeno.

Embora tenha sido estabelecido um limite inferior a $\mathbf{W}_s\mathbf{S}$, não é possível impor um limite superior. A alternativa para resolver esta questão é de interesse limitar a largura de banda superior da função em $\mathbf{T}$.

Além disto, o sistema deve desempenhar seu papel minimizando o uso de energia, dadas as limitações dos quadricópteros. Desta forma, a função $\mathbf{C}$ também deve ser limitada.

Assim, a combinação destes requisitos leva a opção pelo empilhamento e, combinadas numa única especificação, são:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_T\mathbf{T} \\ \mathbf{W}_c\mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{109}$$

$$\|\mathbf{N}\|_\infty = \max_w \bar{\sigma}(N(jw)) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{W}_s\mathbf{S} \\ \mathbf{W}_T\mathbf{T} \\ \mathbf{W}_c\mathbf{C} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

4. RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados da modelagem matemática do veículo, dos controladores descritos segundo as teorias abordadas.

4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA

Como já descrito anteriormente, o VANT é um veículo aéreo e apresenta seis graus de liberdade. A carga pendular acoplada adiciona mais dois graus de liberdade, devido as oscilações possíveis da carga.

A modelagem e simulações são desenvolvidas em software Simulink, versão R2018a. O método de solução das equações numéricas adotado foi o Bogacki-Shampine, ODE3 de passo fixo em 0.001.

Os parâmetros do sistema adotados seguem aqueles definidos em [2].

Tabela 3. Parâmetros do Veículo

Parâmetro	Variável	Valor	Unidade
Massa do Quadricóptero	m_q	0,818	kg
Coeficiente de arrasto	$b_{x,y,z}$	0,235	Ns/m
Momento de Inércia no referencial móvel em torno do eixo X	I_{xx}	0,0095	$kg.m^2$
Momento de Inércia no referencial móvel em torno do eixo Y	I_{yy}	0,0095	$kg.m^2$
Momento de Inércia no referencial móvel em torno do eixo Z	I_{zz}	0,0186	$kg.m^2$
Distância do centro de massa ao centro de giro do motor	d	0,1857	m
Constante de Sustentação do Motor	c_T	$1,4865.10^{-7}$	$N.\frac{s^2}{rad^2}$
Constante de Torque do Motor	c_Q	$2.9250.10^{-9}$	$N.m.\frac{s^2}{rad^2}$
Massa da carga	m_c	0,153	kg

Comprimento do fio	l	0,50	m
Aceleração da Gravidade	g	9,81	$kg.\frac{m}{s^2}$

Fonte: ALOTHMAN, JASIM, 2015.

Os polos do sistema são dados por:

Tabela 4. Polos do sistema linear

Polos do Sistema
$p_1 = 0$
$p_2 = 0$
$p_3 = 0$
$p_4 = 0$
$p_5 = 0$
$p_6 = 0$
$p_7 = 0$
$p_8 = -0,094$
$p_9 = 0$
$p_{10} = -0,094$
$p_{11} = 0$
$p_{12} = -0,094$
$p_{13} = 0 + 1,566i$
$p_{14} = 0 - 1,566i$
$p_{15} = 0 + 1,566i$
$p_{16} = 0 - 1,566i$

A síntese de controle pelo método da sensibilidade mista não permite que a planta apresente polos no eixo imaginário. Desta forma, acrescentam-se polos em -0,1 para contornar esta característica do sistema e poder sintetizar um controlador.

Além da modificação dos polos, as matrizes A, B, C e D foram escalonadas pelos máximos valores admissíveis para cada estado. Este procedimento não altera os polos do sistema, mas permite que sejam comparados sinais de dimensões e unidades distintas de forma equivalente. No caso de quadricópteros, ângulos, deslocamentos e velocidades lineares e velocidades angulares apresentam diferenças substanciais de magnitude se não escalonadas. O escalonamento permite que os pesos dos sinais sejam comparáveis.

Adotam-se os seguintes valores para escalonamento:

$$\text{Ângulo Máximo} = 5 \text{ graus} \quad (110)$$

$$\text{Taxa Angular Máxima} = 7.20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (111)$$

$$\text{Deslocamento máximo} = 50 \text{ metros} \quad (112)$$

$$\text{Velocidade Máxima} = 17.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (113)$$

$$\text{Velocidade máxima do motor} = 9000 \text{ rpm} \quad (114)$$

Os polos modificados do sistema são dados na Tabela 5:

Tabela 5. Polos do sistema linear modificado

Polos do Sistema
$p_1 = -0,1$
$p_2 = -0,1$
$p_3 = -0,1$
$p_4 = -0,1$
$p_5 = -0,1$
$p_6 = -0,1$
$p_7 = -0,1$
$p_8 = -0,094$
$p_9 = -0,1$

$p_{10} = -0,094$
$p_{11} = -0,1$
$p_{12} = -0,094$
$p_{13} = 0 + 1,566i$
$p_{14} = 0 - 1,566i$
$p_{15} = 0 + 1,566i$
$p_{16} = 0 - 1,566i$

4.1.1. CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

A controlabilidade e a observabilidade do sistema podem ser calculadas segundo as fórmulas já apresentadas em (79) e (81). O posto das matrizes de controlabilidade e observabilidade são:

$$\text{posto}(\mathbb{C}) = 16 \quad (115)$$

$$\text{posto}(\mathbb{O}) = 16 \quad (116)$$

A comparação dos postos obtidos com o número de estados do sistema permite concluir que o sistema é observável e controlável.

4.1.2. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

O sistema conta com quatro entradas e dezesseis saídas. O quadricóptero é um sistema subatuado e com acoplamento entre estados como pode ser visto nas

equações (67), (68), (69), (70), (71), (72), (73) e (74) e isto é visto no número de funções de transferência.

Tabela 6. Funções de transferência

$\frac{\dot{z}}{U_z}$	$\frac{0,9775}{s + 0,2297}$
$\frac{z}{U_z}$	$\frac{0,9775}{s^2 + 0,2397s + 0,002297}$
$\frac{\dot{y}}{U_\phi}$	$\frac{-1,291s - 6331}{s^5 + 0,2497s^4 + 2,457s^3 + 0,6125s^2 + 0,01151s + 5,63410^{-5}}$
$\frac{\dot{\beta}}{U_\phi}$	$\frac{-1,291s}{s^4 + 0,02s^3 + 2,453s^2 + 0,04905s + 0,0002453}$
$\frac{\dot{\phi}}{U_\phi}$	$\frac{105.3}{s + 0,01}$
$\frac{y}{U_\phi}$	$\frac{-1,291s - 6331}{s^6 + 0,2497s^5 + 2,457s^4 + 0,6125s^3 + 0,01151s^2 + 5,63410^{-5}s}$
$\frac{\beta}{U_\phi}$	$\frac{-1,291}{s^4 + 0,02s^3 + 2,453s^2 + 0,04905s + 0,0002453}$
$\frac{\phi}{U_\phi}$	$\frac{105.3}{s^2 + 0,02s + 0,0001}$
$\frac{\dot{x}}{U_\theta}$	$\frac{-1,291s - 6331}{s^5 + 0,2497s^4 + 2,457s^3 + 0,6125s^2 + 0,01151s + 5,63410^{-5}}$
$\frac{\dot{\alpha}}{U_\theta}$	$\frac{-1,291s}{s^4 + 0,02s^3 + 2,453s^2 + 0,04905s + 0,0002453}$
$\frac{\dot{\theta}}{U_\theta}$	$\frac{105.3}{s + 0,01}$
$\frac{x}{U_\theta}$	$\frac{-1,291s - 6331}{s^6 + 0,2497s^5 + 2,457s^4 + 0,6125s^3 + 0,01151s^2 + 5,63410^{-5}s}$
$\frac{\alpha}{U_\theta}$	$\frac{-1,291}{s^4 + 0,02s^3 + 2,453s^2 + 0,04905s + 0,0002453}$
$\frac{\theta}{U_\theta}$	$\frac{105.3}{s^2 + 0,02s + 0,0001}$
$\frac{\dot{\psi}}{U_{psi}}$	$\frac{53,83}{s + 0,01}$
$\frac{\psi}{U_\psi}$	$\frac{53,83}{s^2 + 0,02s + 0,0001}$

4.1.3. ESTABILIDADE

A estabilidade do sistema pode ser analisada segundo critério de Nyquist. Dada a simetria do problema, as funções de transferência dos trios (x, α, θ) e (y, β, ϕ) possuem os mesmos polos. A dificuldade do sistema de um quadricóptero reside na quantidade de polos na origem. Além dos polos do drone, o pêndulo esférico acrescenta dois pares de polos no eixo imaginário. Desta forma, a análise do caminho de Nyquist se torna importante para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada. O gráfico do caminho de Nyquist dos estados são:

Figura 27. Diagrama de Nyquist para Velocidade em Z

Figura 28. Diagrama de Nyquist para deslocamento Z

Figura 29. Diagrama de Nyquist para Velocidade Y

Figura 30. Diagrama de Nyquist para velocidade em β

Figura 31. Diagrama de Nyquist para velocidade em ϕ

Figura 32. Diagrama de Nyquist para deslocamento em Y

Figura 33. Diagrama de Nyquist para deslocamento em β

Figura 34. Diagrama de Nyquist para deslocamento em ϕ

Figura 35. Diagrama de Nyquist para velocidade em ψ

Figura 36. Diagrama de Nyquist para deslocamento em ψ

Por fim, a síntese de controladores através de H_∞ não foi possível com a planta original. Desta forma, foram adicionados polos no semiplano esquerdo, próximos ao polo já presente, evitando polos muito lentos ou muito mais rápidos que os originais.

Figura 37. Mapa de polos do sistema com polos alocados em -0,1

4.2. CENÁRIOS DE TESTE

A estrutura da malha de controle do problema possui dois controladores, um para a parte de dinâmica de atitude ou malha interna, e outra para controle de posicionamento ou malha externa.

Figura 38. Visão geral da malha de Controle do problema

Fonte: Autor

Os cenários comuns testados para verificar estabilidade do sistema são:

- Cenário 1: Carga pendular com ângulo β de 5 graus. Verificação de estabilização do problema em torno do ponto $(x, y) = (0, 0)$. Resultados para os deslocamentos laterais em x e y , resultados para os deslocamentos angulares no referencial fixo do VANT, deslocamentos angulares da carga acoplada e deslocamento vertical do VANT e carga acoplada.
- Cenário 2: Carga pendular com ângulo de 5 graus em α e β . Verificação de estabilização do problema em torno do ponto $(x, y) = (0, 0)$.

- Cenário 3: Carga pendular com ângulo inicial de 5 graus em α e entrada degrau em x em 5 segundos.
- Cenário 4: Carga pendular com ângulo inicial de 5 graus em α_0 e β_0 e o veículo deve passar pelos pontos $(x, y, z, t) = \{(0,0,0,0), (1,0,1,5), (0,1,1,10), (-1,0,1,15), (0,-1,1,20), (1,0,1,25), (0,0,0,30)\}$.

Definidos os testes, os requisitos de controle são:

- Overshoot menor que 20%
- Tempo até o pico inferior a 2,5 segundos
- Tempo de acomodação menor que 12 segundos
- Erro em regime permanente menor que 1%

4.3. CONTROLE PID

Uma vez encontradas as funções de transferência do sistema, o ajuste do PID se deu seguindo os passos descritos anteriormente e iniciando pelo controle de altura. Após a estabilização do veículo quanto à altura, buscou-se ajustar o controle PID de guinada.

Por fim, dada a simetria do problema para arfagem e rolagem, o controle encontrado em arfagem foi replicado para rolagem e o sistema PID foi avaliado.

Figura 39. Controladores PID das variáveis de controle do quadricóptero

Fonte: Autor

O resultado dos ganhos finais encontrados é:

Tabela 7. Ganhos dos Controladores PID de Atitude

Estados	Altitude	Arfagem	Rolagem	Guinada
Ganho Proporcional	25	4	4	4
Ganho Integral	10	1	1	0.5
Ganho Derivativo	10	1.875	1.875	3.5

Fonte: Autor

Após encontrar os ganhos de cada estado e estabilizar o quadricóptero, o último passo foi encontrar os ganhos do PD para seguimento de trajetória das posições (x, y) :

Tabela 8. Ganhos do PID de posicionamento

Estados	Deslocamento em x	Deslocamento em y
Ganho Proporcional	0,32	0,32
Ganho Derivativo	0,1	0,1

Fonte: Autor

4.3.1. SIMULAÇÕES

4.3.1.1. CENÁRIO 1

Figura 40. Cenário 1 com PID: Deslocamento linear em y para controle PID e β_0 de 5 graus

Fonte: Autor

Figura 41. Cenário 1 com PID: Deslocamento angulares ϕ do veículo para controle PID e β_0 de 5 graus

Fonte: Autor

Figura 42. Cenário 1 com PID: Deslocamento da carga e do quadricóptero para controle PID e β de 5 graus

Fonte: Autor

4.3.1.2. CENÁRIO 2

Figura 43. Cenário 2 com PID: Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus

Fonte: Autor

Figura 44. Cenário 2 com PID: Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus

Figura 45. Cenário 2 com PID: Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus

4.3.1.3. CENÁRIO 3

Figura 46. Cenário 3 com PID: Resposta ao degrau na direção X com PID

Figura 47. Cenário 3 com PID: Resposta ao degrau em X em Alfa e Beta. α_0 e β_0 de 5 graus.

Figura 48. Cenário 3 com PID: Deslocamento vertical do veículo e da carga sujeitos a entrada de grau em X

4.3.1.4. CENÁRIO 4

Figura 49. Cenário 4 com PID: Seguimento de trajetória com ângulos iniciais em 5 graus

Figura 50. Cenário 4 com PID: Deslocamento do veículo na direção y para o cenário 3

4.4. CONTROLE LQR

Como explicado anteriormente, a experiência e conhecimento prévio do comportamento do modelo servem de parâmetro para as estimativas iniciais das matrizes de peso.

Assim, uma vez obtidos os ganhos e simulado o modelo com o controle PID, os valores máximos dos estados foram avaliados conforme o modelo PID. Isto é, os valores de pico obtidos na simulação com PID serviram de base para montar as matrizes de peso Q e R iniciais. Os valores normalizadores e as matrizes são dadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 30 \text{ m} \\
 \max \dot{z} &= 10 \text{ m/s} \\
 \max \phi, \theta &= 0,2618 \text{ rad} \\
 \max \dot{\phi}, \dot{\theta} &= 0,00374 \text{ rad/s} \\
 \max \psi &= 0,2618 \text{ rad} \\
 \max \dot{\psi} &= 0,00374 \text{ rad/s}
 \end{aligned}
 \tag{117}$$

$$Q = \text{diag}(2, 2, 1, 2, 2, 0.05, 0.05, 0.05, 300, 300, 30, 300, 300, 5, 5, 5)$$

$$R = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.12 & 0 & 0 & -51.12 & 39.59 & 0 & 0 & 0 & -17.44 & 0 & 0 & 18.7 & 243.10 & 0 & 0 \\ 10.12 & 0 & 0 & 51.12 & 0 & 0 & 39.59 & 0 & 17.44 & 0 & 0 & -18.7 & 0 & 0 & 243.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 113.12 \end{bmatrix}$$

O ajuste inicial dos pesos foi baseado na relação apresentada nas equações (88), mas seu desempenho não foi satisfatório e o veículo não foi estabilizado. Em seguida, adotou-se ajustar os pesos conforme a equação (89), para ρ entre 0,1 e 10. Os valores serviram de ponto de partida, mas tiveram que ser manualmente ajustados posteriormente de forma iterativa.

4.4.1. SIMULAÇÕES

A seguir, apresentam-se as simulações para os cenários 1, 2 e 3 para o controlador LQR.

4.4.1.1. CENÁRIO 1

Figura 51. Cenário 1 com LQR Deslocamento linear em y com β_0 de 5 graus

Figura 52.Cenário 1 com LQR: Deslocamento angular do veículo com β_0 de 5 graus

Figura 53.Cenário 1 com LQR: Deslocamento da carga e do veículo com β_0 de 5 graus

4.4.1.2. CENÁRIO 2

Figura 54. Cenário 2 com LQR: Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus

Figura 55. Cenário 2 com LQR: Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus

Figura 56. Cenário 2 com LQR: Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus

4.4.1.3. CENÁRIO 3

Figura 57. Cenário 3 com LQR: Resposta ao degrau na direção x com LQR

Figura 58. Cenário 3 com LQR: Deslocamentos angulares da carga com LQR para entrada degrau

Figura 59. Cenário 3 com LQR: Deslocamentos verticais do veículo e da carga para entrada de grau com LQR

4.4.1.4. CENÁRIO 4

Figura 60. Cenário 4 com LQR: Deslocamento linear em x, y e z com α_0 e β_0 de 15 graus para o ponto (1,0,3)

Figura 61. Cenário 4 com LQR: Deslocamentos angulares do veículo para o cenário 3

4.5. CONTROLE H_∞

A consideração das incertezas na massa do quadricóptero, massa da carga, e comprimento do fio são apresentadas abaixo. Para obtenção do controlador, foram considerados os valores nominais abaixo apresentados.

Tabela 9. Valores Nominais e Intervalos dos parâmetros do Veículo carregado

Parâmetro	Valor Nominal	Intervalo
Massa do quadricóptero	0,818	$\pm 10\%$
Massa da carga	0,153	$\pm 30\%$
Comprimento do Fio	0,5	$\pm 100\%$

As especificações do projeto de controlador H_∞ são:

- 1) Estabilidade do sistema em malha fechada
- 2) $\bar{\sigma}(S) < 1$ com $\omega_s < 3$ rad/s
- 3) $\bar{\sigma}(C) < 1$ com $\omega_c > 7$ rad/s
- 4) $\bar{\sigma}(T) < 1$ com $w_T > 5$ rad/s

As funções de ponderação selecionadas são dadas seguindo a equação (108):

$$W_{sz} = \frac{s + 5}{s + 0.05}$$

$$W_T = \frac{s + 5}{0.01s + 5}$$

$$W_c = \frac{s + 0.003}{s + 6}$$

1

Figura 62. Função Peso para função de Sensibilidade Complementar para deslocamentos lineares e angulares

Fonte: Autor

4.5.1. SIMULAÇÕES

Para o caso do controlador Robusto H_∞ , a massa acoplada pendular é considerada como perturbação no sistema do VANT.

4.5.1.1. CENÁRIO 1

Figura 63. Cenário 1 com H_∞ Deslocamento linear em y com β_0 de 5 graus

Figura 64. Cenário 1 com H_∞ : Deslocamento angulares do veículo com β_0 de 5 graus

Figura 65. Cenário 1 com H_{∞} : Deslocamento linear da carga com β_0 de 5 graus

4.5.1.2. CENÁRIO 2

Figura 66. Cenário 2 com H_{∞} : Deslocamento linear em x e y com α_0 e β_0 de 5 graus

Figura 67. Cenário 2 com H_{∞} : Deslocamento angular da carga com α_0 e β_0 de 5 graus

Figura 68. Cenário 2 com H_∞ : Deslocamento vertical do quadricóptero sujeito a um pulso em α_0 e β_0 de 5 graus

4.5.1.3. CENÁRIO 3

Figura 69. Cenário 3 com H_∞ : Resposta ao degrau na direção x com H_∞

Figura 70. Cenário 3 com H_{∞} : Deslocamentos angulares da carga com H_{∞} para entrada degrau

Figura 71. Cenário 3 com H_{∞} : Deslocamentos verticais do veículo e da carga para entrada de grau com H_{∞}

4.6. ANÁLISE DE RESULTADOS

Nas seções anteriores, foram apresentados os resultados da modelagem dinâmica do sistema não linear, do sistema linear e as matrizes de estado, controle, saída e transmissão direta. Em seguida, foram apresentados os resultados para os ganhos do controle tipo PID da malha externa e os ganhos do controle PID da malha interna. O modelo linearizado serviu para desenho do regulador quadrático do sistema, os valores do ganho K_{lqr} , desenho do controlador robusto por H_∞ . Para este controlador, apresentaram-se as funções peso para metodologia de Sensibilidade mista e o espaço de estados do controlador ótimo obtido através da síntese de controle H_∞ .

Uma vez obtidos os controladores, foram simulados quatro cenários distintos para avaliação de desempenho e comparados entre si.

No primeiro cenário, buscou-se verificar a estabilização do sistema no caso mais simples. Como pode ser visto nas Figura 40, Figura 41 e Figura 42 com o controlador PID, o sistema é estabilizado após 25 segundos, mas apresenta grande oscilação. No caso do controlador LQR, as oscilações cessam após 50 segundos, ultrapassando o tempo de simulação (Figura 51, Figura 52 e Figura 53). O Controlador Robusto foi capaz de estabilizar as oscilações em cerca de 25 segundos.

O controlador LQR apresentou tempo de acomodação 100% superior àquele do PID e do controlador Robusto. Embora o pico de sinal do LQR seja cerca de cinco vezes maior que do controlador PID, os valores absolutos são relativamente pequenos dada as dimensões do quadricóptero. Outro ponto importante a ser considerado foi a capacidade do controlador LQR eliminar o atraso em relação a carga, visto nas Figura 42 e Figura 53. Alternativamente, o controlador Robusto apresenta picos duas vezes maiores que o aqueles encontrados no LQR e dez vezes ao PID.

Para o segundo cenário, o controlador PID apresenta o mesmo tempo de acomodação do sistema para o caso dos deslocamentos lineares, porém os deslocamentos

angulares da carga são rapidamente controláveis e estabilizados em 25 segundos. Análogo ao primeiro cenário, o controlador LQR apresenta um comportamento amortecido para controle dos deslocamentos e mantém o tempo de acomodação em 30 segundos.

Similar ao encontrado no primeiro cenário, no segundo cenário o controlador LQR apresentou capacidade de eliminar o atraso entre a carga e o veículo, porém apresentou tempo de acomodação de 50 segundos, 100% superior ao PID. O Controlador Robusto estabiliza o veículo e a carga em quarenta segundos e apresenta picos superiores ao LQR na mesma magnitude que no cenário anterior.

No terceiro cenário, o PID teve overshoot de 13% enquanto o LQR apresenta overshoot de 11%. O tempo até o pico foi de 2,7 segundos no PID e 3,8 no caso do LQR. O tempo de acomodação foi de 15 segundos no controlador PID e 12,8 segundos no LQR. O erro em regime permanente foi de 0,01% no caso LQR e o PID não apresentou erro. O Controlador Robusto não foi capaz de seguir a referência para o deslocamento na direção x .

No último cenário, os controladores são verificados considerando um seguimento de trajetória em forma de losango, com a carga deslocada inicialmente em cinco graus em α e β . Neste caso, tanto o controlador PID quanto o Regulador Linear são capazes de levar o veículo e a carga para posição final, amortecendo as oscilações e apresentando bom seguimento de trajetória. O desempenho de cada um pode ser visto na Tabela 10. Desvio de trajetória por controlador. Como pode ser visto, ele é capaz de seguir a trajetória nas direções x e y , porém apresenta um erro elevado para seguimento de elevação.

Tabela 10. Desvio de trajetória por controlador

	Desvio da Trajetória em x (%)	Desvio da Trajetória em y (%)	Desvio da Trajetória em z (%)
PID	11,0%	6,8%	4%
LQR	5,2%	8,4%	68,0%

O controlador Robusto não foi capaz de seguir a referência. Por esta razão, não apresentou resultados.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido e apresentado um modelo matemático de um VANT com carga acoplada, seguindo o método de Lagrange e controlado por três tipos de controladores distintos. A pesquisa bibliográfica revelou ser este um tema ainda pouco explorado no Brasil, especialmente por meio da abordagem pelo método de Lagrange. O modelo obtido apresenta um sistema acoplado e não linear, tornando o projeto de controladores lineares uma tarefa pouco trivial. Dadas as características e requisitos dos controladores, a planta foi linearizada em torno do ponto de operação de hovering, e posteriormente desenvolvidos os controladores baseados neste modelo.

Uma vez obtidos os controladores, foram definidos quatro cenários para teste dos controladores PID e LQR e três cenários para o controlador H_∞ . Foram, então, simulados estes cenários e os resultados apresentados na seção adequada.

A técnica de PID serviu de base para comparação com as outras técnicas, dada a sua facilidade de implantação e vasta aplicação. Com o controlador LQR buscou-se um passo para controladores ótimos e comparação com o controlador H_∞ .

No caso do controlador H_∞ , partiu-se da metodologia de sensibilidade mista para sintetizar um controlador capaz de atender às especificações de desempenho e estabilidade robustos. Dedicou-se grande esforço à busca de funções de ponderação que tornassem a solução ótima.

As respostas obtidas para este controlador foram satisfatórias e, mesmo com a carga oscilante, foi capaz de estabilizar o veículo e seguir a referência. Os overshoots encontrados no PID e no LQR foram menores que o especificado, ficando o LQR com overshoot 2% menor que o PID. O tempo até o pico no PID foi 1,1 segundo menor ou 40% menor. O tempo de acomodação apresentado pelo LQR foi 8% menor que o PID e apresentou menor oscilação. Finalmente, o erro em regime permanente no PID foi zero e o LQR apresentou erro cem vezes menor que o especificado.

Assim, ambos se enquadram dentro dos requisitos de controle, porém, imaginando-se utilizar tal controlador para transporte de passageiros, o LQR apresenta menor oscilação e, portanto, maior conforto. Observe-se, todavia, que apenas esta análise não é suficiente para determinar se o controlador é adequado para o transporte de pessoas, uma vez que não foram avaliados critérios normativos e relativos a tal modalidade de transporte. Contudo, pode-se afirmar que os resultados obtidos no presente estudo servem de base de comparação com o controlador PID e podem ser utilizados em outros projetos.

A malha de controle é dividida entre o controle de translação com PID e controle de altitude e atitude com as diferentes técnicas. Encontrar os ganhos adequados entre os controladores apresentou-se como um caminho de muita iteração entre os ganhos dos controladores PID de translação, as matrizes de penalização do controlador LQR e as funções de sensibilidade do controlador Robusto.

Pode-se afirmar que o objetivo de desenvolvimento de controladores de estabilização para uma planta virtual foi atingido com sucesso. Porém, as simulações nos cenários de seguimento de trajetória apresentaram a dificuldade de sintonia entre os diversos controladores do sistema. A seleção de funções de ponderação e a solução do algoritmo de otimização foram exaustivamente exploradas sem obter um controlador robusto que pudesse seguir trajetória, porém capaz de rejeitar distúrbios.

6. SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção são apresentadas sugestões para trabalhos futuros a serem explorados a partir deste.

A modelagem pelo método de Lagrange aqui apresentada adotou hipóteses que, na prática, devem ser avaliadas. O fenômeno de flapping e sua influência no comportamento dinâmico das hélices não foi considerado. As hélices são pequenas e flexíveis e as velocidades angulares envolvidas são elevadas. Estas características influenciam diretamente no comportamento dinâmico e nos modos do quadricóptero. Sua consideração torna-se ainda mais relevante quando o veículo possui sistemas de aquisição de imagens ou componentes eletrônicos. A vibração induzida pode tornar a aplicação inviável, dado que impactam diretamente na qualidade de imagens, em zonas onde o controlador deve evitar e requisitos de durabilidade.

Ainda sobre as hélices, o escoamento presente nesta parte foi admitido homogêneo. Esta hipótese só é possível em poucas situações. O veículo está exposto a intempéries e os componentes apresentam comportamentos elásticos que permitem aprofundar o tema.

Ainda sobre modelagem, os motores foram considerados apenas como ganhos do sistema. Na realidade, sistemas eletrônicos, controladores e o motor possuem dinâmica própria e introduzem atrasos que podem ser acrescentados ao modelo para torná-lo mais próximo da realidade.

A expansão do uso de drones ainda é muito recente e normatização ainda é carente. Embora existam normas para aviação comercial e militar, quadricópteros são um campo relativamente novo e pouco normatizado.

Novos componentes eletrônicos são embarcados a passos rápidos neste tipo de veículo. A exploração do problema do ponto de vista de sensoriamento e implantação de uma plataforma de testes físicos é um caminho importante para validação de modelos e controladores para o sistema apresentado.

Por fim, as hipóteses adotadas no controlador robusto deste estudo exploram apenas uma parte do potencial desta técnica. A modelagem de incertezas e situações extremas com modos de falha fazem parte do desenvolvimento de controladores mais confiáveis. Recomenda-se o aprofundamento no estudo de otimização de controladores robustos com obtenção de funções de ponderação mais adequadas, por exemplo. São áreas importantes do setor aeroespacial e que este apresenta como de aplicação direta.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] ALMEIDA, M., RAFFO, G. Nonlinear robust control of a quadrotor UAV for load transportation with swing improvement. **American Control Conference**, 2016. Boston. P. 31561
- [2] ALOTHMAN, Y., GU, D., JASIM, W. Quad-rotor Lifting Transporting Cable-Suspended Payloads Control. International Conference on Automation and Computing (ICAC), 21st. 2015. Glasgow.
- [3] AMIR, M. Y., ABBAS V. U. Modelling and Neural Control of Quadrotor Helicopter. Yanbu Journal of Engineering and Science. Iambo, Vol. 2, p. 35–49, 02/04/2011.
- [4] ASTROM, K. J., HAGGLUND, T. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning. Segunda Edição. Research Triangle Park. 1995. ISBN 1556175167
- [5] ASTROM, K. J., MURRAY, R. M. Feedback Systems. Primeira Edição. New Jersey. 2008. ISBN 0691135762
- [6] BARUH, H. Analytical Dynamics. Singapura: McGraw-Hill, 1999. ISBN 0071160949
- [7] BENDTSEN, J. D., BISGAARD, M., COUR-HARBO, A. Modeling a Generic Slung Load System. Journal of Guidance, Control and Dynamics: 573-585, Vol. 32, 03-2009.
- [8] BERNARD, M., KONDAK, K. Generic Slung load transportation system using small size helicopters. Robotics and Automation, ICRA 09. 2009. Kobe.
- [9] BERNSTEIN, S., DAI, S., LEE, T. Adaptive Control of Quadrotor UAV Transporting a Cable-Suspended Load with Unknown Mass. IEEE Conference on Decision and Control, 53rd, 2014. Los Angeles. P. 6149

- [10] BOUDJERDIR H., Adaptive Neural Network for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle, *Int. J. Found. Comput. Sci. Technol.*, vol. 2, num. 4, pp. 1–13, 2012.
- [11] BRESCIANI, T. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Universidade de Lund: Lund. 2008.
- [12] CASTILLO, P., LOZANO e R., DZUL, A., Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 25, num. 6, p. 45-55, dezembro 2005.
- [13] CASTILLO, P., LOZANO, R., DZUL, A. Modelling and Control of Mini-Flying Machines. Primeira Edição. Compiègne. 2005. ISBN 1852339578
- [14] CHEN, R. A Survey of Nonuniform Inflow Models for Rotorcraft Flight Dynamics and Control Applications. Moffett Field; CA: NASA, 1989. Memorando Técnico NASA.
- [15] CICOLANI, L. S., KANNING, G., Equations of motion of slung-load systems, including multilift systems. Moffet Field; CA: NASA, 1992. Relatório Técnico NASA 3280.
- [16] COOK, M. V. Flight dynamics principles: a linear approach to aircraft stability and control. Terceira Edição, Kidlington: Elsevier, 2013
- [17] CORKE, P., MAHONY, R., KUMAR, V., Multirotor aerial vehicles: modeling, estimation, and control of quadrotor, *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 19, 27/08/2012.
- [18] CRUZ, P., FAUST, A., PALUNK, I., Learning swing-free trajectories for UAVs with suspended load. International Conference on Robotics and Automation. 2013, Karlsruhe. P. 4902
- [19] CRUZ, P., FAUST, A., PALUNK, I. Trajectory Generation for Swing-Free Maneuvers of a Quadrotor with Suspended Payload: A Dynamic Programming Approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*,

International Conference on Robotics and Automation. 2012. Minnnesota. P. 2691

[20] CRUZ, P., FIERRO, R., OISHI, M. Lift of a Cable-suspended Load by a Quadrotor: A Hybrid System Approach. American Control Conference, 2015. Chicago. P. 1887

[21] DAI S., LEE, T. e BERNSTEIN, D., Adaptive Control of a Quadrotor UAV Transporting a Cable-Suspended Load with Unknown Mass, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 2014.

[22] D'ANDREA, R., Hehn, M. A Flying Inverted Pendulum. IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2011. Shanghai. P. 763

[23] DONHA, D. C. Projeto de Sistemas de Controle Robustos Multivariáveis, Apostila. São Paulo, Brasil: Poli-USP, 2003.

[24] LUMIA, R.; STARR, G.; WOOD, J.; ZMAEROSKI, D. Rapid Swing-Free Trasnpot of Nonlinear Payloads Using Dynamic Programming. Albuquerque: University of New Mexico, 2008.

[25] ENOMOTO, J. L. F., Controle de Inclinação Utilizando Lógica Fuzzy. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

[26] FERNANDES, D. A. Sistema de Controle Ótimo para Veículo Submersível Semi-Autônomo. Fls. 129. Escola Politécnica da Univerisdade de São Paulo, São Paulo, 2008.

[27] FIERRO, R., PALUNKO, I. Adaptive Control of a Quadrotor with Dynamic Changes in the Center of Gravity. IFAC World Congress, 18th. 2011. Milão. P. 2626

[28] GARONE, E., NALDI, R., NICOTRA, M. Taut Cable Control of a Tethered UAV. International Federation of Automatic Control, 19th. 2014. Cape Town. P. 3190.

- [29] GOODARZI, F., LEE, D., LEE, T. Geometric Stabilization of a Quadrotor UAV with Payload Connected by flexible cable. American Control Conference, 2014, Portland. P. 4925
- [30] GRIMBLE, M. J. Robust Industrial Control Systems: Optimal Design Approach for Polynomial Systems. West Sussex: John Wiley & Sons, 2006.
- [31] GU, D. W., PETKOV, P. HR., KONSTANTINOV, M. M. Robust Control Design with MATLAB. London: Springer-Verlag, 2005.
- [32] GUERRERO, M., MERCADO, D., LOZANO, R., GARCÍA, C. IDA-PBC Methodology for a Quadrotor UAV Transporting a Cable-Suspended Payload. International Congress on Unmanned Aircraft Systems. 2015. Denver. P. 470.
- [33] HAMEL, T., HUA, M. MORIN, P., SAMSON, C. Introduction to Feedback Control of Underactuated VTOL Vehicles. IEEE Control Systems Magazine. P. 61-75, 17/01/2013
- [34] HERZOG, M. Design, Implementation and Analysis of a Controller for a Load Suspended From an Aerial Vehicle. Estocolmo, KTH, 2016.
- [35] JAIN, R. P. K. Transportation of Cable Suspended Load using Unmanned Aerial Vehicles A Real-time Model Predictive Control approach. Delft, Delft University of Technology. 2015.
- [36] KOGA, M. D. F. Modelagem E Controle De Veículo Aéreo Não Tripulado Do Tipo Quadricóptero Com Melhoria De Resposta Em Frequência. São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2015.
- [37] KUMAR, V., LEE, T., SREENATH, K. Geometric Control and Differential Flatness of a Quadrotor UAV with a Cable-Suspended Load. IEEE Conference on Decision and Control, 52nd. 2013, Florença. P. 2269
- [38] KUMAR, V., TANG, S., Mixed Integer Quadratic Program Trajectory Generation for a Quadrotor with a Cable-Suspended Payload. International Conference on Robotics and Automation, 2015. Seattle. P. 2216

- [39] LIU, H., XI, J., ZHONG, Y., Robust motion control of quadrotor, Journal of the Franklin Institute, vol. 351, num. 12, 12/2014.
- [40] LOPES, D. F. A. Estimativa da Atitude e Posição e Controle Robusto de Um Helicóptero Autônomo. 2010. Fls. 87. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- [41] LOZANO, R. Unmanned Aerial Vehicles. London: ISTE, 2010.
- [42] LUQUE, J. C. C. Controle Robusto Multivariável para um Veículo Submersível Autônomo. 2007. Fls. 131. Escola Politécnica, São Paulo, 2007.
- [43] MAHAPATRA, S., RUFF, R., STEPHENS, C., Applying Model-Based Design to Large-Scale Systems Development: Modeling, Simulation, Test & Deployment of a Multicopter Vehicle. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. 2012. Minneapolis
- [44] MASUDA, K., UCHIYAMA, K. Robust Control Design for Quad Tilt-Wing UAV. Aerospace 2018. Vol. 5, N. 17. 8/12/2017
- [45] MOOSAVIAN, A., SADR, S., ZARAFSHAN, P., Dynamics Modeling and Control of a Quadrotor with swing Load, Journal of Robotics, Vol. 2014, 12 pages, doi: 10.1155/2014/265897
- [46] MURRAY, R. M. Lecture LQR Control. 11 de Janeiro de 2006. 14 fls. Notas de aula.
- [47] NICOTRA, M., GARONE, E., NALDI, R., MARCONI, L. Nested Saturation Control of an UAV Carrying a Suspended Load. American Control Conference. 2014. Portland. P. 3585.
- [48] OGATA, K. Modern Control Engineering. New Jersey: Prentice Hall. 2010.
- [49] PFEIFER, E., Projeto e Controle de um UAV Quadricóptero. 2013. Fls. 132. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

- [50] PIZETTA, I., BRANDÃO, A., SARCINELLI-FILHO, M. Modelagem e Controle de um quadrimotor PVTOL Transportando uma carga suspensa. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, XII. 2015. Natal. P. 1559.
- [51] RITZ, R., ANDREA, R. D., Carrying a Flexible Payload with Multiple Flying Vehicles, pp. 3465–3471, 2013.
- [52] SÁ, R. C. Construção , Modelagem Dinâmica E Controle Pid Para Estabilidade De Um Veículo Aéreo Não Tripulado Do Construção , Modelagem Dinâmica E Controle Pid Para Estabilidade De Um Veículo Aéreo Não Tripulado. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2012.
- [53] SKOGESTAD, S., Probably the best simple PID tuning rules in the world AICHE Annual Meeting, 06-11-2001
- [54] SKOGESTAD, S. POSTLETHWAITE, I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, West Sussex, John Wiley & Sons, 2015.
- [55] VARGAS, F. J. T., PAGLIONE, P. Ferramentas de Álgebra Computacional: Aplicações em Modelagem, Simulação e Controle para Engenharia. Primeira Edição. Rio de Janeiro: LTC. 2015.
- [56] YANG, FU, Z., WEI, J., WU, Y., Nonlinear Control and Analysis of a Quadrotor with Sling Load in Path Tracking, Chinese Control Conference, 36th. 2017. Dalian. P. 6519.
- [57] WEINMANN, A. Uncertain Models and Robust Control. Viena: Springer-Verlag Wien GmbH. 1991.

APÊNDICE A

Modelo dos motores e hélices

Antes de iniciar a modelagem do corpo do quadricóptero, deve-se estudar e deduzir as equações que dão base para as forças e momentos gerados pelos atuadores do sistema.

Em aplicações como esta, o ideal é o uso de motores sem escova de corrente contínua, do inglês Brushless Direct Current motor, ou *BLDC*. O motor presente em VANTs elétricos é uma máquina elétrica que converte energia elétrica de corrente contínua em energia mecânica rotacional na hélice. Esta em conjunto com outras três convertem o giro em força com direção ortogonal à base do VANT.

Figura 72. Sentido de giro do rotor e força de sustentação resultante

Fonte: <http://www.droneomega.com/what-is-a-quadcopter/>

Os motores de corrente contínua sem escovas são motores síncronos, possuem ímãs polarizados no rotor e bobinas fixas no estator. Esta construção permite ajustar a velocidade e o sentido de giro do motor conforme a magnitude e direção da corrente que atravessa as bobinas. A corrente que atravessa a bobina é responsável por criar

um campo magnético que, dado o campo magnético presente devido ao ímã do rotor, fornecerá o giro.

Figura 73. Esquema de motor BLDC

Fonte: <https://www.renesas.com/in/en/support/technical-resources/engineer-school/brushless-dc-motor-01-overview.html>

Este princípio de funcionamento elimina as comutações mecânicas entre enrolamento e a fonte de tensão, consequentemente diminuindo a interferência eletromagnética gerada.

Além desta vantagem, motores BLDC são, em comparação aos utilizados em outras máquinas, mais leves, menos propensos ao risco de incêndio, possuem menor desgaste e menor manutenção, maior eficiência, menor interferência eletromagnética e vida útil maior.

Outro ponto fundamental é controlabilidade. Dado que este tipo de motor pode ser controlado usando realimentação, isto resulta em torque e velocidades mais precisos, menor consumo de energia, menor ruído elétrico, menor perda térmica e, consequentemente, maior duração da bateria.

Este trabalho não considera as dinâmicas dos motores na definição das equações de estado. No entanto, para efeitos de derivação dos valores das constantes de sustentação e torque, adota-se um modelo simplificado de um motor de corrente contínua, dado pelo seguinte esquema:

Figura 74. Representação do circuito elétrico e motor BLDC

Fonte: Bresciani, 2008

Aplicando inicialmente a Lei das Malhas de Kirchnoff, temos:

$$v = v_R + v_L + e \quad (118)$$

Onde v_R é a voltagem através do resistor, v_L é a voltagem através do indutor e e é a voltagem relativa a força contra eletromotriz induzida pelo giro do rotor. A resistência e a indutância são características do sistema. A equação (118) pode ser reescrita:

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + K_E \omega_M \quad (119)$$

Onde i é a corrente que passa pelo circuito, K_E é a constante do motor e ω_M é a velocidade angular do motor. O acoplamento entre sistema elétrico e sistema mecânico pode ser visto no último termo da equação (119).

A indutância presente no sistema é fundamental para determinar as características do motor. Ela é usualmente desconsiderada pois a maior parte dos motores utilizados apresentam valores muito reduzidos de indutância, o tempo de resposta do sistema elétrico é da ordem de centena de hertz, enquanto o sistema mecânico é da ordem de dezena de hertz, e computacionalmente, é menos intenso resolver problemas de primeira ordem. Desta forma, a equação se torna:

$$v = Ri + K_E \omega_M \quad (120)$$

No caso da parte mecânica, o motor é conectado à hélice através de eixo. Este transmite a potência através de torque e velocidade de giro.

Figura 75. Esquema mecânico do acoplamento motor e hélice

Fonte: Bresciani, 2008

A equação que rege o sistema pode ser escrita como:

$$J_{TM} \dot{\omega}_M = T_M - T_L \quad (121)$$

A aceleração angular $\dot{\omega}_M$ é proporcional ao desequilíbrio entre o torque do motor T_M e o torque da carga T_L e inversamente proporcional ao momento de inércia do motor.

O torque do motor é aquele gerado pela corrente que passa pelo circuito e multiplicado pela constante do motor K_M . Substituindo na equação (121), tem-se:

$$J_{TM} \dot{\omega}_M = K_M i - T_L \quad (122)$$

Substituindo a equação (122) em (120) através da corrente, obtém-se o modelo simplificado:

$$J_{TM}\dot{\omega}_M = -\frac{K_E K_M}{R}\omega_M - T_L + \frac{K_M}{R}v \quad (123)$$

O caso real apresenta um mecanismo de redução entre motor e eixo da hélice. Desta forma, a equação (123) deve considerar as características de momento de inércia e a razão de redução.

Figura 76. Esquema mecânico do acoplamento motor e hélice com caixa de redução

Fonte: Bresciani, 2008

$$P_M \eta = P_P \quad (124)$$

$$\omega_M T_{PM} \eta = \omega_P T_{MP} \quad (125)$$

A potência gerada no motor P_M é convertida na potência P_P do propulsor com rendimento igual a η . A velocidade do eixo do motor ω_M é proporcional à velocidade do eixo do rotor ω_P e proporcional à relação de transmissão do conjunto N . A equação que rege o sistema é dada por:

$$J_M \dot{\omega}_M = T_M - T_{PM} \quad (126)$$

$$J_M \dot{\omega}_M = T_M - T_{P_M} \quad (127)$$

Considerando as equações (126) e (127), e formatando como em (121), chega-se a:

$$\left(J_M + \frac{J_P}{\eta N^2} \right) \dot{\omega}_M = T_M - \frac{T_P}{\eta N} \quad (128)$$

Dada a similaridade com a equação (121), o torque resistivo da carga e o momento de inércia total podem ser calculados como:

$$T_L = \frac{T_P}{\eta N} \quad (129)$$

$$J_{TM} = J_M + \frac{J_P}{\eta N^2} \quad (130)$$

Através da teoria de elementos de pá em [11] BRESCIANI, *T. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter*. Universidade de Lund: Lund. 2008.a conversão do torque em velocidade de giro do motor para sustentação é dada por:

$$T_P = d\omega_P^2 = \frac{d\omega_M^2}{N^2} \quad (131)$$

Substituindo (129), (130) e (131) em (123), obtém-se a equação geral do motor.

$$(J_P + \eta N^2 J_M) \dot{\omega}_P = - \frac{K_E K_M}{R} \eta N^2 \omega_P - d\omega_P^2 + \frac{K_M}{R} \eta N v \quad (132)$$

O modelo encontrado apresenta comportamento não linear. Não é objeto de estudo deste trabalho aprofundar-se no estudo do comportamento do motor. Outro ponto é que o modelo de quadricóptero adotado é linearizado em torno do ponto de

levitação, onde os motores devem apresentar pequenos incrementos de velocidade. Portanto, aborda-se a equação (132) através de sua linearização.

$$\dot{\omega}_p = H\omega_p + Iv + J \quad (133)$$

$$H = \left. \frac{\partial \dot{\omega}_p}{\partial \omega_p} \right|_{\omega_p=\omega_H} = \frac{K_E K_M \eta N^2}{J_{TP} R} - \frac{2d}{J_{TP}} \omega_H \quad (134)$$

$$I = \left. \frac{\partial \dot{\omega}_p}{\partial v} \right|_{\omega_p=\omega_H} = \frac{K_M \eta N}{J_{TP} R} \quad (135)$$

$$J = \dot{\omega}_p - (H\omega_p + Iv)|_{\omega_p=\omega_H} = \frac{d}{J_{TP}} \omega_H^2 \quad (136)$$

APÊNDICE B

Método de Lagrange

Nesta seção, determinam-se as equações de Lagrange genericamente.

Inicialmente, considera-se um sistema de N partículas num campo de força conservativo, cartesiano, com coordenadas de posição x_i e M graus de liberdade. A Energia Cinética total neste sistema é escrita como:

$$T = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (137)$$

Para cada partícula viajando em três dimensões, haverá $M = 3N$ coordenadas para definir sua posição. Caso a partícula esteja viajando em apenas uma direção, haverá $M = N$ graus de liberdade.

A quantidade de movimento generalizada de uma partícula p_i é dada por:

$$p_i = m_i \dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad (138)$$

A derivada temporal da quantidade de movimento é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = m_i \ddot{x}_i \quad (139)$$

Num campo conservativo de forças, a derivada da posição da partícula na direção desejada é igual a força aplicada na partícula.

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (140)$$

Segundo o princípio fundamental da dinâmica, a força resultante é dada pela taxa de variação temporal da quantidade de movimento num referencial inercial, ou seja:

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} = m_i \ddot{x}_i \quad (141)$$

Num campo conservativo de forças, há apenas transformação das forças. Além disto, a energia cinética é invariante a posição da partícula e a energia potencial é invariante quanto a velocidade do objeto, portanto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (142)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (143)$$

Reescrevendo a equação (142) considerando (143), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial x_i} = 0 \quad (144)$$

Definindo $L = T - V$, também conhecida como Lagrangeana, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (145)$$

Até o momento, a definição da Lagrangeana considerou sistema de coordenadas ordinárias. Porém, no caso geral, estas são funções das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo.

$$\dot{x}_i = g_i(q_1, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, t) \quad (146)$$

Neste caso, a velocidade da partícula é dada por:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (147)$$

Derivando-se a expressão (147) em termos da velocidade generalizada, tem-se:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (148)$$

Pode-se definir uma quantidade de movimento generalizada, dada por:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (149)$$

Num campo de forças conservativo, o trabalho feito durante um deslocamento dx_i é dado por:

$$dW = \sum_{i=1}^N F_i dx_i = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad (150)$$

O termo do lado direito da equação (150) pode ser definido como o trabalho feito pelo deslocamento em dq_j por uma força generalizada $Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, definindo-se, então:

$$dW = \sum_{j=1}^N Q_j dq_j \quad (151)$$

Num sistema conservativo:

$$dW = -dV = -\frac{\partial V}{\partial q_j} dq_j \quad (152)$$

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (153)$$

Finalmente, abordando a taxa de variação da quantidade de movimento para forma generalizada, vemos que:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^N \left(m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \quad (154)$$

Valendo-se das igualdades:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \quad (155)$$

$$\sum_{k=1}^N m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = Q_i \quad (156)$$

Analisando o segundo termo em (154) e a variação da energia cinética em relação a coordenada generalizada, vê-se que são iguais.

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = m_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (157)$$

Partindo-se novamente da quantidade de movimento generalizada definida previamente e considerando as igualdades encontradas, encontra-se a Lagrangeana para o caso geral, dada por:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (158)$$

Reorganizando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (159)$$

A função Lagrangeana foi definida considerando um sistema conservativo de forças. Assim, forças externas ao sistema devem ser acrescentadas à função, e o equilíbrio deve ser mantido. Adiciona-se, então, ao lado direito da equação o termo das forças não conservativas e externas do sistema atuantes nas devidas direções.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{NC} \quad (160)$$

Uma vez apresentada a forma generalizada da equação de Lagrange, devemos abordar o problema seguindo os passos abaixo:

- Determinar o número de graus de liberdade do problema,
- Selecionar um conjunto de coordenadas generalizadas independentes,
- Usar as relações cinemáticas para encontrar as velocidades e deslocamentos virtuais,
- Identificar as forças que são conservativas e aquelas que não são,
- Escrever as energias Potencial e Cinética e o trabalho virtual,
- Aplicar as equações de Lagrange.

APÊNDICE C

Algoritmo Geral H_∞

Dado o sistema linear representado pelo diagrama de dois portos em diagrama de blocos dado pela Figura 77 e pelo sistema linear dado por:

$$\begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (161)$$

Com realização no espaço de estados da planta generalizada dada por:

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_z \\ C_\varepsilon \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{\varepsilon w} & D_{\varepsilon u} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (162)$$

Sendo u as variáveis de controle, ε as variáveis medidas, w os sinais exógenos, e z o sinal de erro a ser minimizado para alcançar os objetivos de controle.

As hipóteses adotadas para este tipo de problema são:

- (H1) (A, B_u, C_ε) são estabilizáveis e detectáveis
- (H2) D_{zw} e D_{zu} possuem posto completo
- (H3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$ possui posto de coluna completo para todo ω
- (H4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_w \\ C_\varepsilon & D_{\varepsilon w} \end{bmatrix}$ possui posto de coluna completo para todo ω
- (H5) $D_{zw} = 0$ e $D_{\varepsilon u} = 0$

- (H6) $\mathbf{D}_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D}_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$
- (H7) $\mathbf{D}_{zw}^T \mathbf{C}_z = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B}_w \mathbf{D}_{\varepsilon w}^T = \mathbf{0}$
- (H8) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_w)$ é estabilizável e $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_z)$ é detectável

Figura 77. Diagrama de Dois Portos Geral

A hipótese H1 é necessária para garantir a existência de um controlador $\mathbf{K}$ que estabilize o sistema, de modo que a hipótese H2 é suficiente para garantir um controlador próprio e realizável. As hipóteses H3 e H4 asseguram que não cancelamento de polos e zeros no eixo imaginário, o que poderia levar a instabilidade em malha fechada. A hipótese H5 é uma hipótese usual para problemas do tipo $\mathbf{H}_2$ e será adotada por simplicidade no caso de $\mathbf{H}_\infty$. A condição $\mathbf{D}_{zw} = \mathbf{0}$ torna a matriz $\mathbf{P}_{11}$ estritamente própria, bem

como $\mathbf{D}_{\epsilon u} = \mathbf{0}$ torna $\mathbf{P}_{22}$ estritamente própria. A hipótese H6 é adotada por motivos de simplificação, enquanto H7 é hipótese comum para problema $\mathbf{H}_2$ e, caso H7 seja verdade, as hipóteses H3 e H4 podem ser substituídas pela H8.

Deve-se agora resolver o problema de otimização para encontrar uma solução para a equação de Ricatti. Isto é, dadas as hipóteses anteriores, o diagrama e o objetivo de encontrar um controlador que estabilize o sistema, procura-se:

1. $\mathbf{X}_\infty$ que seja solução da seguinte equação de Ricatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w^T - \mathbf{B}_u \mathbf{B}_u^T) \mathbf{X}_\infty &= 0 \\ \text{Tal que } \text{Re } \lambda_i[\mathbf{A} + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w^T - \mathbf{B}_u \mathbf{B}_u^T) \mathbf{X}_\infty] &< 0, \forall i \end{aligned} \quad (163)$$

2. $\mathbf{Y}_\infty \geq 0$ é solução da equação de Ricatti

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w^T + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z - \mathbf{C}_\epsilon^T \mathbf{C}_\epsilon) \mathbf{Y}_\infty &= 0 \\ \text{Tal que } \text{Re } \lambda_i[\mathbf{A} + \mathbf{Y}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z - \mathbf{C}_\epsilon^T \mathbf{C}_\epsilon)] &< 0, \forall i \end{aligned} \quad (164)$$

3. $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$

Os controladores são determinados pela LFT (Transformação Linear Fracionária):

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_l(\mathbf{K}_c, \mathbf{Q}) \quad (165)$$

$$\mathbf{K}_c(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty & \mathbf{Z}_\infty \mathbf{B}_u \\ \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_\epsilon & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\infty &= -\mathbf{B}_u^T \mathbf{X}_\infty, & \mathbf{L}_\infty &= -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_\varepsilon^T, \\ \mathbf{Z}_\infty &= (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1} & \mathbf{A}_\infty &= \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_u \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_\varepsilon \end{aligned} \quad (167)$$

Onde ρ é o raio espectral e $\mathbf{Q}$ é qualquer função de transferência própria e estável onde vale $\|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma$.

No caso de $\mathbf{Q}(s) = 0$, vale:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_{c11}(s) = -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_\infty)^{-1} \mathbf{F}_\infty \quad (168)$$

O controlador $K_{c11}(s)$ é chamado de controlador central e possui o mesmo número de estados que a planta generalizada $P(s)$. O Controlador Central pode ser separado em duas partes. A primeira relativa aos estimadores de estados e um realimentador de estados:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_w \gamma^{-2} \mathbf{B}_w^T \mathbf{X}_\infty \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_u \mathbf{u} + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty (\mathbf{C}_\varepsilon \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (169)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_\infty \hat{\mathbf{x}} \quad (170)$$

APÊNDICE D

Rotinas de MATLAB

Controle de Atitude e Altitude

```
%% Author: Rodrigo Botelho
%% Date: 02/09/2018

Mt = quadModel.mass;
M = quadModel.mass*0.8;

% Mt = ureal('M',quadModel.mass*0.9,'Range',[quadModel.mass*0.8, quad-
Model.mass]);
Ixx = quadModel.Jx;
Iyy = quadModel.Jy;
Izz = quadModel.Jz;
g = quadModel.g;
m = quadModel.mass*0.2;
L = 0.5;
r = 0.02;
Ibx = 2/5*m*r^2+m*L^2;
Iby = Ibx;
Ibz = Ibx;
wHover = IC.w1;

%% Uncertainties
% M = ureal('M',quadModel.mass*0.8*0.7,'Percentage', 15);
% m = ureal('m',quadModel.mass*0.15,'Percentage',100/3);
% L = ureal('L',L,'Range',[0, 1]);
% wHover = ureal('wHover',sqrt(Mt*0.85/(4*quad-
Model.ct)), 'Range',[sqrt(Mt*0.7/(4*quadModel.ct)), sqrt(Mt/(4*quad-
Model.ct))]);
ct = quadModel.ct;
cq = quadModel.cq;
d = quadModel.arms_L;

%% Model for attitude dynamics
% q = {zpto, phipto, thetpto, psipto, z, phi theta, psi}

Aatt = [-0.235, zeros(1, 5);
        zeros(2,6);
        eye(3), zeros(3)];

p1 = 0.01;
Ashifted = Aatt-p1*eye(size(Aatt));
```

```

% Batt = [quadModel.ct/Mt*wHover, quadModel.ct/(Mt)*wHover, quad-
Model.ct/(Mt)*wHover, quadModel.ct/Mt*wHover;
%         -quadModel.ct*quadModel.arms_L/quadModel.Ixx*wHover, 0, quad-
Model.ct*quadModel.arms_L/quadModel.Ixx*wHover, 0;
%         0, -quadModel.ct*quadModel.arms_L/quadModel.Iyy*wHover, 0, quad-
Model.ct*quadModel.arms_L/quadModel.Iyy*wHover;
%         quadModel.cq/quadModel.Izz*wHover, -quadModel.cq/quad-
Model.Izz*wHover, quadModel.cq/quadModel.Izz*wHover, -quadModel.cq/quad-
Model.Izz*wHover;
%         zeros(4,4)];

Batt = [ct/Mt, ct/Mt, ct/Mt, ct/Mt;
        0, ct*d/Ixx, 0, -ct*d/Ixx;
        -ct*d/Iyy, 0, ct*d/Iyy, 0;
        -cq, cq, -cq, cq;
        zeros(4,4)];

% Batt = [1/Mt, 0, 0, 0;
%         0, 1/Iyy, 0, 0;
%         0, 0, 1/Iyy, 0;
%         zeros(3,3)];

% Catt = [zeros(4,8); zeros(4,4), eye(4)];
% Catt = [Aatt(1,:);
%         zeros(3,1), eye(3), zeros(3,4); zeros(4), eye(4)];

Catt = diag([ones(1,3), ones(1,3)]);
Datt = zeros(6, 4);

Gs = ss(Aatt, Batt, Catt, Datt);

Gs.InputName = {'w1', 'w2', 'w3', 'w4'};
Gs.StateName = {'z speed'; 'Phi Speed'; 'Theta Speed';...
                'z'; 'Phi Angle'; 'theta'};
Gs.StateUnit = {'m/s'; 'rad/s'; 'rad/s'; 'm'; 'rad'; 'rad'};

Gs.OutputName = {'z speed'; 'Phi Speed'; 'Theta Speed'; 'altitude'; 'pitch';
                 'roll'};
Gs.OutputUnit = {'m/s^2'; 'rad/s'; 'rad/s'; 'm'; 'rad'; 'rad'};

%% Observability and Controllability
observability = rank(observ(Gs))
controllability = rank(ctrb(Gs))

% %% Minimum System
% GsMin = minreal(Gs);
% GsMin.StateName = {'z Speed'; 'phi Speed'; 'theta Speed'; 'psi Speed'};
% GsMin.StateUnit = {'m/s'; 'rad/s'; 'rad/s'; 'rad/s'};
%
% GsMin.InputName = {'Thrust'; 'Pitch Torque'; 'Roll Torque'; 'Yaw Torque'};
% GsMin.InputUnit = {'N'; 'Nm'; 'Nm'; 'Nm'};

%% Normalizing System

```

```

maxAngle = 15*pi/180;           % rad
maxAngleRate = 0.000374;        % rad/s
maxAltitude = 30;               % m
maxAltSpeed = 0.006817;         % m/s
maxMotorSpeed = 9034.60;        % RPM

Su = 1/maxMotorSpeed;
Sz = 1/maxAltitude;
Szdots = 1/maxAltSpeed;
Sphi = 1/maxAngle;
Sphidots = 1/maxAngleRate;
Stheta = Sphi;
Sthetadots = Sphidots;
Spsi = Sphi;
Spsidots = Sphidots;

S_x = diag([Szdots, Sphidots, Sthetadots, Sz, Sphi, Stheta])/2;
S_y = S_x;
S_u = Su*eye(4)/2;

%%

An = S_x*Ashifted*inv(S_x);
Bn = S_x*Batt*inv(S_u);
Cn = S_y*Catt*inv(S_x);
Dn = S_y*Datt*inv(S_u);

Gsn = ss(An, Bn, Cn, Dn);

%% Formatting C, T and S

s = tf('s');

% Disturbances on the model may be modeled as second order system of
%  $k/(s^2+k)$ , for both alpha and beta

% Formatting the Sensitivity Function S(s)
Ms = 0.2;
wbS = 0.01;
epsS = 0.5;

Mc = 20;
wbC = 100;
epsC = 0.004;

Mt = 10;
wbT = 0.04;
epsT = 0.03;

%%
% WS = 1e-1*((s+1e1*3)/(s+1e-2*3));
% WC = 0.3548*(s++49.14)/(s+39.03);
% WT = (100*s)/(s+1e-2*3);
% bode(WS, WT)

```

```

%% WS Segundo AUVControl

WSz = tf([0.05 2.9 105.93 6.17 0.16],[1 9.19 30.80 18.83 3.95]);
% tf([1, 0.05],[0.2, 0.02]);
WSpt = 2*WSz;
% (s/Ms+wbS)/(s+wbS*epsS);

WC = ss(diag([1/50,1/50,1/50,1/50]));
% (s+wbC/Mc)/(epsC*s+wbC);

WTz = tf([0.3], [7, 1]);
WTpt = 1/(s+wbT/Mt)/(epsT*s+wbT);
%%

WS = WSz*eye(6);
WS(2,2) = WSpt;
WS(5,5) = WSpt;
WS(3,3) = WSpt;
WS(6,6) = WSpt;

WT = WTz*eye(6);
WT(2,2) = WTpt;
WT(5,5) = WTpt;
WT(3,3) = WTpt;
WT(6,6) = WTpt;

WC = WC*eye(4);
WT = WT*eye(6);

%% Hinfinity Formatting
P = augw(Gs, WS, WC, WT);

%%

nmeasure = 6;
ncontrol = 4;
gmin = 0.1;
gmax = 10000;
tol = 0.01;

[kHinf, CLHinf, GAMHinf] = hinfsyn(P, nmeasure, ncontrol, gmin, gmax, tol);
[Ah, Bh, Ch, Dh] = ssdata(kHinf);

%%
sysh = kHinf*Gs;
[Ka_inf,Kb_inf,Kc_inf,Kd_inf]=ssdata(kHinf);

%% Qatt = diag([maxAltSpeed, maxAngleRate, maxAngleRate, maxAngleRate, max-
Altitude, maxAngle, maxAngle, maxAngle]);

Qatt = diag([2, 0.35, 0.35, 0.05, 30, 5, 5, 1]);
% Qatt = diag([1/maxAltSpeed, 1/maxAngleRate, 1/maxAngleRate, 1/maxAngleRate,
1/maxAltitude, 1/maxAngle, 1/maxAngle, 1/maxAngle]);

Ratt = 0.001*eye(4);

```



```

%% LQR Control
k = lqr(Ashifted, Batt, Qatt, Ratt);
Ac = (Ashifted-Batt*k);
Bc = Batt;
Cc = Catt;
Dc = Datt;

states = {'zdot', 'phidot', 'thetadot', 'psidot', 'z', 'phi', 'theta', 'psi'};
inputs = {'r'};
outputs = {'zdot', 'phidot', 'thetadot', 'psidot', 'z', 'phi', 'theta',
'psi'};

sys_cl = ss(Ac,Bc,Cc,Dc,'statename',states,'inputname',inputs,'output-
name',outputs);

% t = 0:0.01:5;
% r = [zeros(3, length(t)); ones(1, length(t))];
% [y,t,x]=lsim(sys_cl,r,t);

```

Controle completo

```
%%
M = quadModel.mass*0.8;
m = quadModel.mass*0.2;
Mt = M+m;
% Mt = ureal('M',quadModel.mass*0.9,'Range',[quadModel.mass*0.8, quadModel.mass]);
Ixx = quadModel.Jx;
Iyy = quadModel.Jy;
Izz = quadModel.Jz;
g = quadModel.g;
L = 0.5;
r = 0.02;
Ibx = 2/5*m*r^2;
Iby = Ibx;
Ibz = Ibx;
wHover = sqrt(Mt/(4*quadModel.ct));
b1 = 1/(8*quadModel.ct*wHover);
b2 = 1/(4*quadModel.ct*wHover*quadModel.arms_L);
b3 = 1/(8*quadModel.cq*wHover);
% M = ureal('M',quadModel.mass*0.8,'Percentage', 10);
% m = ureal('m',quadModel.mass*0.2,'Percentage',30);
% L = ureal('L',0.5,'Percentage',100);

% Mt = M+m;
%% State Space Formatt
% q = {xpto, ypto, zpto, alphapto, betapto, phipto, thetapto, psipto, x, y z,
alpha, beta, phi, theta, psi}

Planta.A = [-0.235/Mt, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -Mt/M*g, 0, 0, Mt/M*g, 0;
0, -0.235/Mt, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Mt/M*g, Mt/M*g, 0, 0;
0, 0, -0.235/Mt, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
zeros(1, 3), -0.01, zeros(1,7), -Mt/M*g, zeros(1,2), Mt/M*g, zeros(1, 1);
zeros(1, 12), -Mt/M*g, -Mt/M*g, zeros(1,2);
zeros(3, 16);
eye(8), zeros(8)];
zeros(8,4)];

Planta.B = [zeros(2,4);
1/Mt, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0;
0, 1/Ixx, 0, 0;
0, 0, 1/Iyy, 0;
0, 0, 0, 1/Izz;
zeros(8,4)];

Planta.C = eye(16);

Planta.D = zeros(16, 4);
%%
p1 = 0.1;
% Ashifted = A-p1*diag([0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]);
```

```

sys = ss(Planta.A,Planta.B,Planta.C,Planta.D);
sysShifted = ss(Ashifted, B, C, D);

%%
controllabilityFull = rank(ctrb(sys))
observabilityFull = rank(observ(sys))

controllabilityFull = rank(ctrb(sysShifted))
observabilityFull = rank(observ(sysShifted))

%% %% Formatting C, T and S

s = tf('s');

% Formatting the Sensitivity Function S(s)
Ms = 1e0;
wbS = 3e0;
epsS = 1e-1;

Mc = 2e2;
wbC = 7e0;
epsC = 2e-1;

Mt = 1e0;
wbT = 5e0;
epsT = 1e-1;

% Sigurd Skogestad
Ws = (s/Ms+wbS)/(s+wbS*epsS);
Wc = (s+wbC/Mc)/(epsC*s+wbC);
Wt = (s+wbT/Mt)/(epsT*s+wbT);
bode(1/Ws,1/Wc,1/Wt)

%
WS = ss(Ws*eye(16));
WC = ss(Wc*eye(4));
WT = ss(Wt*eye(16));

% Disturbance function
Wperf = 1/(s^2+0.1*s+g/L);

% Hinfinitiy Formatting
Gs = sysShifted;
P1 = augw(Gs, WS, WC, []);
%
nmeasure = 16;
ncontrol = 4;
gmin = 0.1;
gmax = 10000;
tol = 0.01;

[kHinf, CLHinf, GAMHinf] = hinfsyn(P1, nmeasure, ncontrol, gmin, gmax, tol);

```

Modelos Simulink