VINÍCIUS MICHELAN DEMARQUE

Projeto de Atuadores de Múltiplos Graus de Liberdade Baseados em
Placas Piezelétricas Utilizando o Método de Otimização Topológica

São Paulo

2012

Vinícius Michelin Demarque

Projeto de Atuadores de Múltiplos Graus de Liberdade Baseados em Placas
Piezelétricas Utilizando o Método de Otimização Topológica

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia

Área de concentração:
Controle e Automação Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo

2012

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 01 de Setembro de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

Demarque, Vinícius Michelan

**Projeto de atuadores de múltiplos graus de liberdade baseados em placas piezelétricas utilizando o método de otimização topológica / V.M. Demarque. -- ed.rev. -- São Paulo, 2012.
132 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Atuadores piezelétricos 2. Sistemas microeletromecânicos 3. Otimização topológica 4. Princípio bilaminar I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.

Agradecimentos

Ao orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pela orientação e transmissão de conhecimentos e experiências, pela motivação e apoio diante das dificuldades enfrentadas e pela dedicação ao sucesso deste trabalho.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, especificamente ao Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, por aceitar e prover as condições, equipamentos e infraestrutura para a realização deste trabalho.

Aos colegas do grupo de pesquisa, pela prontidão e disponibilidade em auxiliar e debater questões enfrentadas, especialmente aos amigos Cesar Yukishigue Kiyono e Paulo Henrique Nakasone.

À minha família, por me dar todo o suporte de que precisava e por acreditar em mim.

À Nina, pela motivação e inspiração, por sonhar junto comigo e nunca me deixar desistir.

A todos os que estiveram ao meu lado durante a execução deste trabalho, que direta ou indiretamente, contribuíram para a execução do mesmo.

Resumo

Atuadores piezelétricos são dispositivos que permitem a conversão de energia elétrica em energia mecânica. Dentre os atuadores piezelétricos, destacam-se os bilaminares, que consistem em duas piezocerâmicas de polarização oposta (ou excitadas com cargas de sinal contrário) com um substrato entre elas. Os atuadores piezelétricos também podem ser miniaturizados, alcançando a escala de MEMS (*Micro-Electric-Mechanical System*). Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma metodologia utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT) para o projeto de atuadores piezelétricos com múltiplos graus de liberdade baseados no princípio bilaminar. A fase de projeto consiste na utilização do MOT para a determinação de uma configuração de atuadores que maximizem o deslocamento numa direção e sentido especificados para uma restrição na quantidade de material utilizado em cada camada, considerando a polarização da cerâmica piezelétrica presente nessa configuração e o acoplamento e simetria entre as camadas. Para a simulação do atuador é utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) através de um elemento de placa piezelétrica isoparamétrico de oito nós expandido. O MOT, neste trabalho, utiliza o modelo de material denominado PEMAP-P (Material Piezelétrico com Penalização e Polarização). A técnica de projeção é utilizada junto ao MOT para a obtenção de um resultado com uma geometria bem definida. O problema de otimização é resolvido através de Programação Matemática Sequencial (PMS) através do algoritmo GCMMA (*Globally Convergent Method of Moving Asymptotes*). Como exemplo é estudado o projeto de um atuador piezelétrico para microespelhos. Dentre as configurações obtidas pelo MOT, uma é fabricada utilizando as técnicas de corte a laser e colagem e, posteriormente, é caracterizada. Finalmente, é realizada a comparação entre os resultados de simulação e experimentais do protótipo.

Palavras chave: Atuador piezelétrico, princípio bilaminar, multiatuação, otimização topológica, MEMS.

Abstract

Piezoelectric actuators are devices that allow the conversion of electric energy to mechanical energy. Among the piezoelectric, the bimorph stands. It consists of two piezoceramic plates with opposite polarization (or excited with opposite sign charges) with a substrate between them. The piezoelectric actuators can also be miniaturized in a MEMS scale. This work aims the design of a methodology using the Topology Optimization Method (TOM) for the design of piezoelectric actuators with multiple degrees of freedom using the bimorph principle. The design phase applies the TOM to determine an optimized configuration of actuators that maximizes the output displacement in a specified direction and orientation for a constraint in the amount of material used at each layer, by considering the polarization of the piezoelectric ceramic present on this configuration and the coupling and symmetry between layers. The Finite Element Method (FEM) is applied for actuator simulation through an extended piezoelectric plate isoparametric element with 8 nodes. The TOM in this work employs a material model called PEMP-P (Piezoelectric Material with Penalization and Polarization). The projection technique is implemented with TOM to obtain a result with a well-defined geometry. The optimization problem is solved by using Sequential Mathematical Programming (SMP) through the GCMMA algorithm (Globally Convergent Method of Moving Asymptotes). As an example, the design of a piezoelectric actuator for micromirrors is studied. Among the configurations obtained by the TOM, one is manufactured using laser cutting and bonding techniques and it is tested. Finally, a comparison between the simulated and experimental results from prototype is performed.

Keywords: Piezoelectric actuator, bilaminar principle, multiactuation, topology optimization, MEMS.

Conteúdo

Lista de Figuras	24
Lista de Tabelas.....	28
Lista de Abreviaturas e Siglas.....	29
Lista de Símbolos	30
1 Introdução	18
1.1 OBJETIVO.....	22
1.2 JUSTIFICATIVA	23
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	23
2 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Modelagem de Placas Piezelétricas.....	25
2.1 Equações Piezelétricas	25
2.2 Equações Constitutivas Piezelétricas para Placas Delgadas.....	27
2.3 Elemento de Placa Piezelétrica.....	29
2.3.1 Elemento de Placa Piezelétrica Utilizado	29
2.3.2 Formulação do Elemento de Placa Piezelétrica Utilizado	31
2.4 Modelo de Placa Piezelétrica Laminada.....	37
3 Método de Otimização Topológica.....	39
3.1 Método de Otimização Topológica aplicado a transdutores piezelétricos.....	42
3.2 Modelo de Material.....	45
3.2.1 Modelo de Material Utilizado	46
3.3 Formulação do Projeto de Transdutores Piezelétricos Estáticos utilizando o MOT.....	47
3.3.1 Maximização do deslocamento gerado	47
3.3.2 Minimização da Flexibilidade Média.....	48

3.3.3 Função Multiobjetivo para o problema de OT com múltiplos graus de liberdade 49

4	Implementação numérica e caracterização experimental	52
4.1	Implementação do algoritmo de MOT	52
4.2	Técnica de Projeção.....	53
4.3	Formulação discreta do problema	56
4.4	Implementação do MOT	57
4.5	<i>Globally Convergent Method of Moving Asymptotes</i> (GCMMA).....	59
4.6	Cálculo das Sensibilidades.....	60
4.7	Casos de carga utilizados	63
4.8	Fabricação do protótipo.....	64
4.9	Caracterização experimental.....	65
5	Resultados.....	67
5.1	Projeto de atuadores com três graus de liberdade.....	67
5.1.1	Exemplo 1 – Otimização utilizando acoplamento das camadas...	69
5.1.2	Exemplo 2 – Otimização sem utilizar acoplamento das camadas	75
5.1.3	Exemplo 3 – Otimização com camadas de PZT menores que camada intermediária.....	79
5.1.4	Exemplo 4 – Otimização com restrição de padrão alterando valor inicial	85
5.2	Fabricação e caracterização de protótipo.....	92
6	Conclusões.....	99
6.1	Trabalhos futuros	99
	Referências Bibliográficas.....	101
	Apêndice A Formulação do elemento de placa piezelétrica.....	114
A.1	Método dos Elementos Finitos Aplicado a Estruturas de Placas.....	114
A.2	Geometria e Cinemática do Elemento.....	114
A.3	Campo de Deslocamentos	116

A.4	Campo de Deformações.....	117
A.5	Definição do Sistema de Coordenadas Nodal-Local	119
Apêndice B	Adesão Perfeita entre Placas.....	121
Apêndice C	Comparação do programa de MEF implementado com software comercial ANSYS.....	123
Apêndice D	Validação do cálculo da sensibilidade da Função Objetivo utilizando o Método das Diferenças Finitas.....	126
Apêndice E	Desenhos de fabricação do protótipo.....	131

Lista de Figuras

Figura 1.1 – (a) Reflexão do microespelho rotacional (TSAUR <i>et al.</i> , 2002); (b) Reflexão do microespelho com deslocamento em Z (YEE <i>et al.</i> , 2000).....	19
Figura 1.2 - <i>Scanner</i> 1D (KOBAYASHI; TSAUR; MAEDA, 2005).....	20
Figura 1.3 - Microespelho rotacional 1D (FILHOL <i>et al.</i> , 2005).....	20
Figura 1.4 - Desenho esquemático de microespelho piezelétrico (MAEDA <i>et al.</i> , 2002).	21
Figura 1.5 - Microespelho piezelétrico (YEE <i>et al.</i> , 2000).....	22
Figura 2.1 – Distribuição de potencial elétrico ao longo da espessura de um elemento de placa piezelétrica.	30
Figura 2.2 – Deformações ao longo da espessura de placas compostas seguindo a teoria <i>layer-wise</i>	37
Figura 3.1 – Métodos de otimização estrutural.	39
Figura 3.2 – Caso de carga para cálculo do deslocamento gerado.....	48
Figura 3.3 – Caso de carga para cálculo da flexibilidade média.....	49
Figura 3.4 – Casos de carga para OT de múltiplos graus de liberdade.....	49
Figura 4.1 – Instabilidade de tabuleiro.....	53
Figura 4.2 – Representação da técnica de projeção.	55
Figura 4.3 – Fluxograma do Método de Otimização Topológica.....	57
Figura 4.4 – (a) Restrição de simetria; (b) Restrição de padrão	59
Figura 4.5 – Implementação dos casos de carga para maximização do deslocamento gerado.....	64
Figura 4.6 – Esquema elétrico de aplicação de potencial nas cerâmicas piezelétricas.	65
Figura 4.7 – Sensor fotônico de fibra ótica MTI-2100.	65
Figura 4.8 – Esquema do fluxo de comando.	66
Figura 4.9 – Medição do deslocamento vertical utilizando o sensor fotônico.	66
Figura 5.1 – Domínio de Projeto com as três camadas do mesmo tamanho..	69
Figura 5.2 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical com acoplamento das camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.	70

Figura 5.3 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X com acoplamento das camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.....71

Figura 5.4 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com simetria entre as camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.73

Figura 5.5– (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com simetria entre camadas e restrição de padrão; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.....74

Figura 5.6 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.75

Figura 5.7 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.76

Figura 5.8 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.77

Figura 5.9 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.78

Figura 5.10 – Domínio de projeto com as camadas de PZT reduzidas.79

Figura 5.11 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.80

Figura 5.12 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.81

Figura 5.13 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.82

Figura 5.14 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com

restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	83
Figura 5.15 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	84
Figura 5.16 – Valor inicial favorável à restrição de padrão.	85
Figura 5.17 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão com valor inicial alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	86
Figura 5.18 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado e com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	88
Figura 5.19 – Domínio de projeto com engaste alterado (a) para camadas de PZT de mesmo tamanho da camada de alumínio; (b) para camadas de PZT menores que a camada de alumínio.	89
Figura 5.20 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado e com engaste alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	90
Figura 5.21 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado, com camadas de PZT menores e com engaste alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.	91
Figura 5.22 – Resultado do processo de atenuação das bordas na configuração pós processada.	92
Figura 5.23 – Protótipo fabricado.	93
Figura 5.24 – Pontos utilizados para a medição com sensor fotônico.	94
Figura 5.25 – Simulação do protótipo no Ansys	95
Figura 5.26 – Aplicação de cola epóxi em regiões espalhadas no domínio.	96
Figura 5.27 – Simulação do protótipo no Ansys adicionada a cola epóxi.	97

Figura A.1 – Sistema de coordenada para um elemento de casca piezelétrico de 8 nós.....	115
Figura C.1 – Resultado da simulação no ANSYS.....	123
Figura C.2 – Resultado da simulação no software utilizado neste trabalho..	124
Figura C.3 – Pontos utilizados para comparação do software utilizado neste trabalho com o Ansys.....	124
Figura E.1 – Desenho de fabricação da camada de alumínio do protótipo (unidade em mm). 131	
Figura E.2 – Desenho de fabricação da camada de cerâmica do protótipo (unidade em mm).	131
Figura E.3 – Desenho de fabricação da base de poliamida do protótipo (unidade em mm).	132

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Potencial elétrico aplicado em cada caso de carga utilizado para maximização do deslocamento gerado	63
Tabela 5.1 – Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT 5A	67
Tabela 5.2 – Propriedades do alumínio	68
Tabela 5.3 – Resultado da Otimização apresentada no exemplo 1	74
Tabela 5.4 – Resultado da Otimização apresentada no exemplo 2	78
Tabela 5.5 – Resultados da Otimização apresentada no exemplo 3	84
Tabela 5.6 – Resultados da Otimização apresentada no exemplo 4	92
Tabela 5.7 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo protótipo e pela simulação realizada no Ansys	95
Tabela 5.8 – Propriedades da resina epóxi	96
Tabela 5.9 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo protótipo e pela simulação realizada no Ansys	97
Tabela 5.10 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelas simulações no Ansys com e sem cola epóxi	98
Tabela A.1 – Coordenadas naturais r e s para os nós de um elemento	119
Tabela C.1 – Comparação do resultado do MEF	125
Tabela D.1 – Validação do cálculo da sensibilidade em relação à pseudodensidade	127
Tabela D.2 – Validação do cálculo da sensibilidade em relação à polarização	129

Lista de Abreviaturas e Siglas

1D	Uma Dimensão
2D	Duas Dimensões
DFE	Domínio Fixo Estendido
DVD	<i>Digital Versatile Disc</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
GCMMA	<i>Globally Convergent Method of Moving Asymptotes</i>
HD	<i>Hard Disk</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método de Elementos Finitos
MEMS	<i>Micro-Electro-Mechanical Systems</i>
MITC	<i>Mixed Interpolation of Tensorial Components</i>
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
PS	Programação Sequencial
PEMAP	<i>Piezoelectric Material with Penalization</i>
PEMAP-P	<i>Piezoelectric Material with Penalization and Polarization</i>
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
TO	<i>Topology Optimization</i>
TOM	<i>Topology Optimization Method</i>

Lista de Símbolos

θ	Ângulo de rotação de um microespelho
h	Deslocamento vertical de um microespelho
σ	Vetor de tensões
b	Vetor de densidade de força de corpo
u	Vetor de deslocamentos
ρ	Densidade de massa
D	Vetor de deslocamento elétrico
$\tilde{\rho}$	Densidade de cargas elétricas livres
C	Matriz de elasticidade
e	Matriz piezelétrica
ϵ	Matriz de permissividade
ε	Vetor de deformações
E	Vetor campo elétrico
φ	Potencial elétrico
Γ_u	Condições de contorno mecânicas
Γ_t	Fronteira de aplicação de carga mecânica superficial
t	Carga mecânica superficial
Ω	Domínio de projeto
Γ_φ	Condições de contorno elétricas
Γ_q	Fronteira de aplicação de carga elétrica
q	Densidade de carga de superfície
D_i^-	Deslocamento elétrico no meio piezelétrico
D_i^+	Deslocamento elétrico no meio circundante
ϵ_{rel}	Permissividade relativa
$C_{11}, C_{12}, C_{13},$ $C_{33}, C_{44}, C_{66},$	Componentes da matriz de elasticidade
$e_{15}, e_{31}, e_{33},$	Componentes da matriz piezelétrica
$\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$	Componentes da matriz de permissividade elétrica
γ	Vetor de deformações por cisalhamento
Σ	Representação generalizada das tensões
Z	Representação generalizada das deformações

w_j, ϕ	Funções de peso das equações de equilíbrio elástico e elétrico
$A, B, C,$ L_t, L_q	Operadores integrais
$\Delta\varphi$	Diferença de potencial entre eletrodos
φ_m	Potencial elétrico na superfície média do elemento
N	Funções de forma
x, y, z	Coordenadas globais
x', y', z'	Coordenadas nodais-loais
r, s, t	Coordenadas naturais
J	Matriz Jacobiana
T_φ	Matriz de transformação de coordenadas de potencial elétrico
B_φ	Matriz de interpolações piezelétricas
φ^e	Vetor de potenciais elétricos no elemento
B_u	Matriz de interpolações Mecânicas
K	Matriz de rigidez
F	Vetor de forças mecânicas
Q	Vetor de cargas elétricas
$\hat{\varphi}$	Vetor de potenciais elétricos no elemento
$\hat{u}$	Vetor de deslocamentos no elemento
ϕ_1	Graus de liberdade nodais
ϕ_2	Graus de liberdade dos eletrodos
X	Função pseudodensidade de material
ρ_1	Variável de pseudodensidade de material
ρ_2	Variável de polarização do material piezelétrico
$p_c, p_e, p_i, p_\varepsilon$	Coeficientes de penalização
$\varepsilon_{v\u00e1cuo}$	Permissividade do vácuo
u_1^A, L_1	Deslocamento gerado
L_{33}, L_3	Flexibilidade média
$\mathcal{F}$	Função objetivo
ω	Coeficiente de peso da função objetivo

α_i, β_i	Coeficientes de pesos de cada caso de carga da otimização
d_k	Variável Topológica definida no nó k
Ω_k	Área de influência do filtro de projeção
r	Distância entre dois nós
$\mathbf{x}_k$	Coordenadas do nó k
r_{min}	Raio da técnica de projeção
w_p	Função peso da técnica de projeção
p_{proj}	Coeficiente de penalização da técnica de projeção
θ	Fração de volume de uma camada do DFE
θ_1	Limite de restrição de volume a ser utilizado
$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$	Variáveis de projeto topológica e de polarização
d_{min}	Valor mínimo que a variável topológica pode assumir
L_i, U_i	Assíntota inferior e superior do GCMMA
V_1^k, V_2^k, V_3^k	Versores unitários do sistema de coordenada local
$(\ ^lx, \ ^ly, \ ^lz)$	Vetor que define as coordenadas cartesianas de qualquer ponto no elemento
$(\ ^lx_k, \ ^ly_k, \ ^lz_k)$	Vetor que define as coordenadas nodais
h_k	Espessura do elemento
${}^0V_n^k, {}^1V_n^k$	Vetor diretor para o nó k antes e depois da deformação
V_n^k	Diferença entre os vetores diretores antes e depois da deformação
α_k, β_k	Rotações do vetor diretor ${}^0V_n^k$
x_{ne}	Coordenadas globais do nó ne

1 Introdução

Materiais piezelétricos são os materiais que tem a capacidade de converter energia potencial elétrica em energia mecânica e vice-versa. Quando transdutores piezelétricos têm por objetivo converter energia potencial elétrica em energia mecânica, estes são chamados de atuadores. O titanato zirconato de chumbo (PZT) é o material mais utilizado nos atuadores piezelétricos.

Cada direção de deslocamento que um atuador pode gerar é chamada de grau de liberdade. Um atuador com múltiplos graus de liberdade gera deslocamentos em mais de uma direção. Neste trabalho é estudado o projeto de atuadores com múltiplos graus de liberdade.

Esses atuadores têm sido aplicados, dentre outras áreas, na área de MEMS (*Micro-Electric-Mechanical Systems*). MEMS são dispositivos cuja dimensão é da ordem de micrômetros (10^{-6} m). Os materiais piezelétricos podem ser empregados nas mais diversas áreas de atuação de MEMS, como micro (KOMEPELLI *et al.*, 2011) e nanoposicionadores (POLIT; DONG, 2011), microinterruptores (PROIE *et al.*, 2011), microbombas de fluxo (VATANABE *et al.*, 2008), microespelhos (ZHU *et al.*, 2011; KOH; KOBAYASHI; LEE, 2011).

Como exemplo de atuador com múltiplos graus de liberdade, temos a atuação de microespelhos. Nos últimos anos, pesquisas na área de MEMS envolvendo microespelhos foram desenvolvidas e todas elas ligadas a diversos tipos de aplicações, como leitura de código de barras e escaneamento de imagens (TSAUR *et al.*, 2002) e leitura de dados digitais em HD e DVD (YEE *et al.*, 2000). Diferentes métodos de atuação são utilizados. Eletromagnéticos, eletrostáticos, térmicos e piezelétricos são os mais citados na literatura (KOBAYASHI; TSAUR; MAEDA, 2005). A necessidade de aplicação de uma corrente elétrica alta nos eletromagnéticos e eletrostáticos e a demora na resposta dos térmicos faz com que os atuadores piezelétricos sejam superiores a baixas tensões e apresentem consumo de energia mais baixo, além de facilitar a miniaturização.

A seguir, alguns microespelhos piezelétricos estudados, fabricados e testados são apresentados para ilustrarem o conceito de atuadores piezelétricos com múltiplos graus de liberdade.

Uma das aplicações de microespelhos que exige uma altíssima precisão, ou seja, um deslocamento extremamente pequeno (da ordem de 10^{-6} m) e bem controlado é a leitura ótica de dados, ou *scanner* ótico. Para essa finalidade, utiliza-se um microespelho atuado por cerâmicas piezelétricas. Esse espelho pode ser rotacionado no eixo X ou Y, como visto na Figura 1.1(a) (TSAUR *et al.*, 2002), ou então, deslocado no eixo Z, representado na Figura 1.1(b) (YEE *et al.*, 2000) para fazer a varredura de uma determinada área alterando a posição do feixe de luz refletido pelo espelho.

Figura 1.1 – (a) Reflexão do microespelho rotacional (TSAUR *et al.*, 2002); (b) Reflexão do microespelho com deslocamento em Z (YEE *et al.*, 2000).

A Figura 1.2 ilustra um microespelho piezelétrico para *scanner* 1D (uma dimensão). As barras engastadas de PZT são os atuadores que suportam o espelho através das barras de torção e das articulações que ligam o microespelho às barras (KOBAYASHI; TSAUR; MAEDA, 2005). Um campo elétrico passa pelas cerâmicas através da excitação dos eletrodos, fazendo com que o espelho rotacione em torno do eixo das barras de rotação. O ângulo θ de varredura chega a 25° dependendo das dimensões das barras e das articulações.

Figura 1.2 - *Scanner* 1D (KOBAYASHI; TSAUR; MAEDA, 2005).

A Figura 1.3 mostra outro tipo de mecanismo para espelho rotacional. Neste caso, as barras torcionais foram conectadas fora do centro do espelho circular (FILHOL *et al.*, 2005), assim, com uma excitação vertical do atuador piezelétrico, o espelho tende a apresentar um movimento oscilatório não mais vertical, mas sim rotacional. Variando o comprimento e a espessura das barras de torção pode-se obter um ângulo de varredura θ de $19,8^\circ$ a $99,1^\circ$.

Figura 1.3 - Microespelho rotacional 1D (FILHOL *et al.*, 2005).

A Figura 1.4 e a Figura 1.5 exibem microespelhos que podem ser utilizados para rotação nos eixos X e Y (TSAUR *et al.*, 2002) e para deslocamento no eixo Z (MAEDA *et al.*, 2002). Quatro barras engastadas são utilizadas nesse caso e o microespelho é suportado por quatro pequenas articulações. A Figura 1.4 é um desenho esquemático deste tipo de espelho, já a Figura 1.5 demonstra um espelho com os materiais utilizados para sua fabricação. Para um espelho com rotação nos dois eixos o ângulo de varredura θ obtido foi de 2° . Já no espelho com deslocamento vertical h , este deslocamento passou de cinco micrômetros.

Figura 1.4 - Desenho esquemático de microespelho piezelétrico (MAEDA *et al.*, 2002).

Figura 1.5 - Microespelho piezelétrico (YEE *et al.*, 2000).

Para que o espelho acima apresente rotação em torno de um eixo, basta que apenas uma das cerâmicas piezelétricas seja excitada por uma tensão elétrica (TSAUR *et al.*, 2002), ou que elas sejam excitadas em oposição de fase, isto é, uma para baixo e sua oposta para cima. Já para a obtenção de um deslocamento vertical em Z, é preciso excitar duas cerâmicas opostas ou todas as quatro (YEE *et al.*, 2000) em fase, isto é, todas para baixo ou todas para cima.

Dentre os tipos de microatuadores piezelétricos apresentados anteriormente, é focado neste trabalho o estudo de um atuador piezelétrico baseado no princípio bilaminar com deslocamento vertical (eixo Z) e rotações em torno dos eixos no plano do espelho (eixos X e Y). O desenvolvimento de novas configurações desse atuador é realizado através do Método de Otimização Topológica (MOT). Esse método consiste na discretização de um domínio de projeto e na alocação ou remoção de material em cada elemento desse domínio, visando à obtenção da melhor resposta dentro das condições de contorno impostas. Um protótipo é fabricado e caracterizado para analisar sua resposta e compará-la com os resultados da simulação de forma a validar o método.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma metodologia utilizando o MOT para o projeto de atuadores piezelétricos com múltiplos graus de liberdade baseados no princípio bilaminar.

Projetos de atuadores são realizados de maneira sistematizada utilizando o MOT, tendo como exemplo de aplicação um microespelho piezelétrico com movimentação vertical (eixo Z) e rotações em torno de X e Y. Dentre as configurações obtidas pelo MOT, uma é fabricada e caracterizada. Finalmente, é realizada a comparação entre o resultado simulado e o obtido pelo protótipo. A medição dos deslocamentos gerados pelo protótipo é feita utilizando interferometria laser.

1.2 JUSTIFICATIVA

Dada a complexidade no projeto de atuadores com múltiplos graus de liberdade é necessário um método para o seu projeto que seja genérico e permita lidar com topologias complexas. Assim, o desenvolvimento de uma metodologia sistemática de projeto baseada no MOT para o projeto de um atuador piezelétrico baseado no princípio bilaminar facilita a fase de projeto desse tipo de atuador e possibilita várias mudanças nos requisitos do projeto, sem que seja necessário alterar o método de resolução do algoritmo de otimização, podendo-se projetar diferentes atuadores, com diferentes objetivos, de maneira sistemática e rápida. Nesse sentido, o Método de Otimização Topológica busca um resultado que atenda às especificações do projeto, dando versatilidade e grande abrangência à metodologia desenvolvida neste trabalho.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A seguir, no capítulo 2, são introduzidos os conceitos do Método de Elementos Finitos (MEF) para o elemento de placa piezelétrica utilizados neste trabalho. No capítulo 3, é discutido o Método de Otimização Topológica e a formulação do problema de Otimização. No capítulo 4, são apresentadas as técnicas de implementação numérica do problema, como a discretização do problema contínuo, a sensibilidade da função objetivo, a técnica de projeção e o algoritmo utilizado para a resolução do problema de Otimização Topológica (OT), bem como os problemas mais comuns em OT. São apresentadas também as metodologias de fabricação do protótipo e caracterização experimental.

No capítulo 5, são mostrados os resultados das otimizações obtidas para atuadores com múltiplos graus de liberdade para diferentes especificações de

projeto. Também no capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos pelo protótipo fabricado. No capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste trabalho. As referências bibliográficas estão listadas no capítulo 7.

O Apêndice A exibe as equações para formulação do elemento de placa, sua geometria e cinemática, o campo de deslocamentos, o campo de deformações e o sistema de coordenadas nodal-local utilizado. O Apêndice B apresenta a formulação para a adesão entre camadas de placas adjacentes. O Apêndice C mostra uma validação do programa de MEF implementado neste trabalho com o software comercial ANSYS. O Apêndice D traz a validação das sensibilidades da função objetivo através do Método das Diferenças Finitas (MDF). O Apêndice E apresenta os desenhos de fabricação utilizados no protótipo.

2 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Modelagem de Placas Piezelétricas

2.1 Equações Piezelétricas

As equações de equilíbrio para o meio piezelétrico são a equação de quantidade de movimento e a equação de carga elétrica (Lei de Coulomb).

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.1)$$

$$D_{i,i} = \tilde{\rho} \quad (2.2)$$

onde $\sigma_{ij,i}$ é o tensor de tensões de Cauchy, b_j é a densidade de força de corpo, u_j o vetor de deslocamentos, ρ a densidade de massa, D_i o vetor de deslocamento elétrico e $\tilde{\rho}$ a densidade de cargas elétricas livres. Uma vez que os materiais piezelétricos pertencem a uma classe de dielétricos, que não possuem cargas elétricas livres, segue-se que $\tilde{\rho} = 0$.

As equações de equilíbrio são suplementadas pelas equações constitutivas

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{lij} E_l \quad (2.3)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{il}^S E_l \quad (2.4)$$

que descrevem o acoplamento entre os campos elástico e elétrico. As propriedades do material são descritas pelo tensor de elasticidade C_{ijkl}^E (medido em campo elétrico constante), tensor piezelétrico e_{ikl} e tensor de permissividade (ou dielétrico) ϵ_{il}^S (medido em deformação constante). Assumindo campos de pequenos deslocamentos (teoria linear), as deformações ε_{kl} podem ser obtidas dos deslocamentos u_k através da relação cinemática:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (2.5)$$

No campo eletrostático, o campo elétrico E_k é irrotacional, possuindo assim um potencial. Este potencial é conhecido como potencial elétrico φ , que se relaciona com o campo elétrico através da expressão:

$$E_k = -\varphi_{,k}. \quad (2.6)$$

Combinando as Eqs. (2.1 – 2.6), chegam-se às equações piezelétricas acopladas:

$$C_{ijkl}^E u_{k,li} + e_{lij} \varphi_{,li} = \rho \ddot{u}_j - \rho b_j, \quad (2.7)$$

$$e_{ikl} u_{k,li} - \epsilon_{il}^S \varphi_{,li} = D_i. \quad (2.8)$$

Para o campo elástico, as condições de contorno e condições iniciais são dadas por:

$$u_i = \bar{u}_i \quad em \quad \Gamma_u, \quad (2.9)$$

$$t_i = \bar{t}_i \quad em \quad \Gamma_t, \quad (2.10)$$

$$u_i(t = 0) = u_i^0 \quad em \quad \Omega, \quad (2.11)$$

$$\dot{u}_i(t = 0) = \dot{u}_i^0 \quad em \quad \Omega, \quad (2.12)$$

onde o vetor de tração t_i relaciona-se com o tensor σ_{ij} através de $t_i = \sigma_{ij} n_j$.

Para o campo elétrico, as condições de contorno são:

$$\varphi = \bar{\varphi}_i \quad em \quad \Gamma_\varphi, \quad (2.13)$$

$$q = \bar{q}_i \quad em \quad \Gamma_q, \quad (2.14)$$

Nas superfícies livres do dielétrico, as densidades de cargas de superfície somem ($q = 0$), enquanto nos eletrodos do piezelétrico, q é obtido da condição

$$(D_i^+ - D_i^-)n_i = q, \quad (2.15)$$

em que D_i^- é o deslocamento elétrico no meio piezelétrico e D_i^+ é o deslocamento elétrico no meio circundante (normalmente ar ou vácuo). Considerando que para materiais piezelétricos a permissividade relativa $\epsilon_{rel} \gg 1$, segue-se que $D_i^- \gg D_i^+$ e, assim, a densidade de carga na superfície do eletrodo é aproximadamente dada por:

$$q = D_i n_i. \quad (2.16)$$

2.2 Equações Constitutivas Piezelétricas para Placas Delgadas

Na maioria das aplicações em estruturas inteligentes, os materiais piezelétricos aplicados são isotrópicos da classe de simetria 6mm. Neste caso, as matrizes constitutivas possuem apenas 10 elementos independentes. Utilizando as simetrias $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ dos tensores de tensão e deslocamento, e $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$, $e_{lij} = e_{lji}$, $\epsilon_{il} = \epsilon_{li}$ dos tensores constitutivos, as equações constitutivas podem ser escritas em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -\epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ -E \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

em que, para a maioria dos materiais $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$. As componentes $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ são as deformações por cisalhamento. O acoplamento entre os campos

elástico e elétrico é descrito pelos coeficientes piezelétricos. Os coeficientes e_{31} e e_{33} descrevem o acoplamento entre as deformações/tensões normais e os deslocamentos elétricos/campo elétrico transversais, enquanto o coeficiente e_{15} descreve o acoplamento entre as deformações/tensões de cisalhamento e o campo elétrico no plano, respectivamente.

Para considerar o estado de tensões que ocorre em placas delgadas, assume-se que $\sigma_{33} = 0$, e o componente ε_{33} pode ser eliminado da Eq. (2.17) por condensação.

As equações constitutivas condensadas podem ser divididas em duas partes: uma relacionando as componentes elásticas no plano com o campo elétrico transversal:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{11}^* & 0 & e_{31}^* \\ C_{11}^* & C_{11}^* & 0 & e_{31}^* \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & 0 & -\epsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ -E_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ou

$$\Sigma_I = C_I Z_I \quad (2.20)$$

e uma segunda parte, relacionando as tensões e deformações por cisalhamento transversal com as componentes elétricas no plano:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & C_{44} & e_{15} & 0 \\ 0 & e_{15} & -\epsilon_{11} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 & -\epsilon_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ -E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

ou

$$\Sigma_{II} = C_{II} Z_{II}. \quad (2.22)$$

Os vetores Σ e Z podem ser interpretados como a representação generalizada das tensões e deformações piezelétricas, respectivamente.

Devido à eliminação de ε_{33} , os seguintes coeficientes aparecem nas Eqs. (2.19 e 2.20):

$$C_{11}^* = C_{11} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}, \quad (2.23)$$

$$C_{12}^* = C_{12} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}, \quad (2.24)$$

$$e_{31}^* = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}} e_{33}, \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} - \frac{(e_{33})^2}{C_{33}} \quad (2.26)$$

2.3 Elemento de Placa Piezelétrica

Para uma melhor compreensão do elemento de placa utilizado neste trabalho, encontra-se no Apêndice A o Método de Elementos Finitos aplicado a estruturas de placas tomando como base um elemento estrutural simples que posteriormente é expandido para placa piezelétrica adicionando-se os graus de liberdade referentes ao potencial elétrico.

2.3.1 Elemento de Placa Piezelétrica Utilizado

A grande maioria das aplicações de piezelétricos utilizam bases elásticas nas quais filmes poliméricos e cerâmicas piezelétricas são fixados, o que faz com que esse tipo de estrutura seja melhor modelada através do MEF com a utilização de elementos de placa piezelétrica.

O grande diferencial adicionado aos materiais piezelétricos em comparação aos materiais estruturais comuns é o acoplamento eletromecânico. Devido ao fato das cargas elétricas se encontrarem distribuídas nas extremidades do material, a discretização do campo elétrico torna-se um item importante e também bastante complexo no estudo dessas estruturas, especialmente para as formulações uni e bidimensionais.

O acoplamento eletromecânico completo pode ser adequadamente tratado através de formulações de elementos finitos tridimensionais (BENJEDDOU, 2000)

com um vetor de deslocamentos generalizado que inclua tanto os graus de liberdade estruturais como os elétricos.

Uma abordagem bastante comum para a formulação de elementos finitos para materiais piezelétricos é a condensação estática (ou de Guyan) para desacoplar os graus de liberdade estruturais dos elétricos (ALLIK; HUGHES, 1970; CARRERA, 1997; SARAVALOS; HEYLIGER; HOPKINS, 1997; TZOU; TSENG, 1990; VARADAN; KIM; VARADAN, 1997).

O acoplamento eletromecânico também pode ser considerado através de uma solução iterativa entre o efeito piezelétrico direto e o efeito piezelétrico inverso (GAUDENZI; BATHE, 1995) que, no entanto, ainda despreza os potenciais elétricos induzidos.

Uma hipótese bastante empregada é a variação linear do potencial elétrico ao longo da espessura (LAMMERING, 1991; SARAVALOS; HEYLIGER; HOPKINS, 1997; SULEMAN; VENKAYYA, 1995), o que conseqüentemente, ignora o potencial induzido pelas deformações no material. Os potenciais elétricos ao longo da espessura de um elemento de placa piezelétrica (FERNANDES; POUGET, 2001) estão ilustrados na Figura 2.1, na qual se pode ver a contribuição da parcela referente à deformação elástica do elemento.

Figura 2.1 – Distribuição de potencial elétrico ao longo da espessura de um elemento de placa piezelétrica.

Neste trabalho é utilizado o elemento de placa piezelétrica proposto por Kögl e Bucalem (2005) que estende as vantagens da interpolação mista aplicada a análises estruturais para placas piezelétricas.

2.3.2 Formulação do Elemento de Placa Piezelétrica Utilizado

O MEF piezelétrico pode ser formulado através de vários princípios, dentre eles o princípio de Hamilton (TIERSTEN, 1967), o princípio dos trabalhos virtuais para meios piezelétricos (ALLIK; HUGHES, 1970) ou o método dos resíduos ponderados (NAILLON; COURSAINT; BESNIER, 1983). Este trabalho utilizará uma formulação de elementos finitos baseado no método dos resíduos ponderados (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

A forma integral das equações de equilíbrio estático elástico e elétrico, utilizando as funções de peso w_j e ϕ , é dada por:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,i}(u_k, \varphi) + \rho b_j) w_j d\Omega = 0 \quad (2.27)$$

$$\int_{\Omega} D_{i,i}(u_k, \varphi) \phi d\Omega = 0 \quad (2.28)$$

em que: $\sigma_{ij}(u_k, \varphi)$ e $D_i(u_k, \varphi)$ indicam que o tensor de tensões e o vetor de deslocamento elétrico dependem dos deslocamentos u_k e do potencial elétrico φ .

Utilizando a integração por partes e o teorema integral de Gauss, é possível obter a forma fraca das equações de equilíbrio.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u_k, \varphi) \varepsilon_{ij}(w) d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_j(u_k, \varphi) w_j d\Gamma \quad (2.29)$$

$$\int_{\Omega} D_i(u_k, \varphi) E_i(\phi) d\Omega = \int_{\Gamma_t} q(u_k, \varphi) \phi d\Gamma \quad (2.30)$$

utilizando as condições de contorno $\bar{t}_i = t_i$ em Γ_t e $\bar{q} = q$ em Γ_q para as tensões e cargas prescritas, pode-se obter em notação matricial:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{u}, \varphi) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{w} d\Gamma \quad (2.31)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}^T(u_k, \varphi) \mathbf{E}(\phi) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{q} \phi d\Gamma \quad (2.32)$$

em que as matrizes coluna σ , ε , $\mathbf{D}$, e $\mathbf{E}$ contêm as componentes cartesianas dos respectivos vetores.

As relações entre as variáveis independentes (deslocamentos $\mathbf{u}$ e potencial elétrico φ) e as variáveis dependentes (tensões σ e deslocamentos elétricos $\mathbf{D}$) são dados pelas equações constitutivas piezelétricas:

$$\sigma(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{C}\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{e}\mathbf{E}(\varphi), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{e}^T \varepsilon(\mathbf{u}) + \epsilon \mathbf{E}(\varphi), \quad (2.34)$$

em que $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}$ e ϵ são as matrizes de elasticidade, piezeletricidade e permissividade, respectivamente. Definindo os operadores integrais

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{w}) d\Omega & B(\mathbf{u}, \varphi) &= \int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{u}) \mathbf{e} \mathbf{E}(\varphi) d\Omega \\ C(\varphi, \phi) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}^T(\varphi) \epsilon \mathbf{E}(\phi) d\Omega & L_t(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{w} d\Gamma \\ L_q(\bar{q}, \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma_q} \bar{q} \phi d\Gamma \end{aligned} \quad (2.35)$$

é possível reescrever a Eq. (2.31) e a Eq. (2.32) como:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - B(\mathbf{u}, \varphi) = L_t(\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{w}) \quad (2.36)$$

$$B(\mathbf{u}, \varphi) + C(\varphi, \phi) = L_q(\bar{q}, \mathbf{w}) \quad (2.37)$$

Para obter o sistema de equações de elementos finitos, a estrutura piezelétrica deve ser discretizada em elementos com oito nós, 6 graus de liberdade por nó e 1 grau de diferença de potencial definido para o elemento, nos quais as variáveis são interpoladas utilizando as funções de forma e os valores nodais.

Para a discretização do campo elétrico, foi adotada a abordagem que emprega uma interpolação tridimensional do potencial no elemento de placa (KÖGL; BUCALEM, 2005). A interpolação leva em conta o fato das superfícies superior e inferior do elemento piezelétrico – nas quais os eletrodos estão conectados – serem

superfícies equipotenciais. Além da diferença de potencial entre os eletrodos $\Delta\varphi^{(e)}$, graus de liberdade de potencial elétrico adicionais são definidos para permitir a variação quadrática do potencial elétrico ao longo da espessura do elemento. Comparada à primeira abordagem, um grau de liberdade adicional em cada nó é introduzido, aumentando seu custo computacional. Por outro lado, esta abordagem é mais precisa, uma vez que não assume um deslocamento elétrico unidimensional e é vantajosa para a aplicação de OT, uma vez que as matrizes de interpolação B são independentes do material (KÖGL; SILVA; BUCALEM, 2003).

Neste trabalho, devido à sua adequação à utilização com o MOT, é empregado o elemento isoparamétrico de oito nós (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970; REDDY, 2004) combinado com o elemento piezelétrico de placas proposto por Kögl e Bucalem (2005).

Utilizando uma variação quadrática na direção da espessura e levando-se em conta que os eletrodos estão ligados às superfícies superior e inferior do elemento e são superfícies equipotenciais, o potencial elétrico na placa piezelétrica ao longo da espessura pode ser escrito em função das coordenadas r , s e t como:

$$\varphi(r, s, t) = \frac{1}{2}(t + t^2)\Delta\varphi^{(e)} + (1 - t^2)\varphi_m(r, s) \quad (2.38)$$

em que: $\Delta\varphi^{(e)}$ é a diferença de potencial entre os eletrodos e φ_m é o potencial elétrico na superfície média do elemento. Da Eq. (2.38), é possível obter para as superfícies superior ($t = 1$), inferior ($t = -1$) e média ($t = 0$)

$$\varphi(t = 1) = \Delta\varphi, \quad (2.39)$$

$$\varphi(t = -1) = 0, \quad (2.40)$$

$$\varphi(t = 0) = \varphi_m, \quad (2.41)$$

respectivamente, ou seja, o eletrodo inferior é considerado aterrado.

Quando a estrutura é discretizada, os potenciais na superfície média podem ser interpolados da maneira usual empregando funções de forma e os valores nodais:

$$\varphi_m(r, s) = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) \bar{\varphi}_{mk} \quad (2.42)$$

onde N_k são as funções de forma quadráticas para um elemento k de oito nós e $\bar{\varphi}_{mk}$ são os graus de liberdade de potencial elétrico nodal na superfície média da camada piezelétrica, de tal forma que o potencial elétrico no elemento de placa pode ser aproximado por:

$$\varphi(r, s, t) = \frac{1}{2}(t + t^2)\Delta\varphi + (1 - t^2) \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) \bar{\varphi}_{mk}. \quad (2.43)$$

O campo elétrico em cada direção é dado pelo gradiente do potencial elétrico da estrutura (dado pela Eq. (2.43)) com respeito à (x', y', z') . Entretanto, a posição de qualquer ponto da estrutura foi definida anteriormente (Eq. (A.1)) para o sistema de coordenadas globais (x, y, z) e, portanto, é necessária uma transformação de coordenadas. Assim, o campo elétrico pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}(\varphi) = \begin{Bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \end{Bmatrix} = -\mathbf{T}_\varphi \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

sendo que $\mathbf{T}_\varphi$ é a matriz de transformação de coordenadas de potencial elétrico dada por

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

onde l_i , m_i e n_i ($i = 1, 2, 3$) são dados pela Eq. (A.15), e

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Derivando a Eq. (2.43), em relação à r , s , e t e substituindo a Eq. (2.46) na Eq. (2.44), pode-se reescrever o campo elétrico como:

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\mathbf{T}_\varphi \mathbf{B}_\varphi \boldsymbol{\varphi}^e \quad (2.47)$$

sendo que $\mathbf{B}_\varphi$ é a matriz de interpolações piezelétricas e $\boldsymbol{\varphi}^e$ é o vetor de potenciais elétricos no elemento, dados por:

$$\mathbf{B}_\varphi = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} (1-t^2)\frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ (1-t^2)\frac{\partial N}{\partial s} & 0 \\ -2t\mathbf{N} & (1/2+t) \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\varphi}^e = \{\boldsymbol{\varphi}_m\}^e = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.48)$$

onde $\mathbf{N}$ é o vetor de funções de forma e $\boldsymbol{\varphi}_m$ é o vetor de potenciais elétricos nodais da superfície média:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad \dots \quad N_8] ; \quad \boldsymbol{\varphi}_m = [\bar{\varphi}_{m1} \quad \dots \quad \bar{\varphi}_{m8}]^T \quad (2.49)$$

Os deslocamentos, deformações e campo elétrico dentro dos elementos podem ser expressos de maneira genérica em termos das variáveis nodais, respectivamente, como:

$$\mathbf{U}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{N}_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.52)$$

com o vetor $\hat{\mathbf{u}}$ definido na Eq. (A.8) e o vetor $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ definido na Eq. (2.48).

Substituindo essas funções de interpolação nas Eqs. (2.35) e escolhendo as funções de peso $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\varphi}$ é possível obter (KÖGL; BUCALEM, 2005):

$$\begin{aligned} A(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{uu} \hat{\mathbf{u}} & B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}) &= -\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{u\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ C(\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}) &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} & L_t(\hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{F} \\ L_q(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.53)$$

com as matrizes de rigidez do elemento definidos como:

$$\mathbf{K}_{uu}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u d\Omega, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e} \mathbf{B}_\varphi d\Omega, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{B}_\varphi d\Omega. \quad (2.56)$$

Os vetores de força nodal equivalente e cargas $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Q}$ são obtidos de maneira usual.

Substituindo essas expressões nas Eqs. (2.36 e 2.37):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{(e)} & \mathbf{K}_{u\varphi}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^{(e),T} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^{(e)} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(e)} \\ \mathbf{Q}^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Finalmente, monta-se a equação global de equilíbrio:

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (2.58)$$

em que:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Pode-se escrever a equação global da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

ou também:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi_1} & \mathbf{K}_{u\phi_2} \\ \mathbf{K}_{u\phi_1}^T & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2} \\ \mathbf{K}_{u\phi_2}^T & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2}^T & \mathbf{K}_{\phi_2\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varphi}_m \\ \Delta\boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

sendo ϕ_1 e ϕ_2 os graus de liberdade nodais e dos eletrodos, respectivamente. A Eq. (2.61) pode ser simplificada para o caso de aplicação de potencial elétrico para:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_1} \\ K_{u\phi_1}^T & K_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \phi_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{u\phi_2} \\ K_{\phi_1\phi_2} \end{bmatrix} \Delta\phi. \quad (2.62)$$

2.4 Modelo de Placa Piezelétrica Laminada

As camadas de placa podem apresentar apenas características estruturais e também incluir efeitos piezelétricos (KÖGL; BUCALEM, 2005). Na abordagem utilizada neste trabalho, uma variação suave do deslocamento ao longo da espessura é assumida para cada camada, mas o campo de deslocamento ao longo do composto não é suave nas interfaces entre camadas adjacentes, como pode ser visto na Figura 2.2. Esta abordagem é denominada de teoria *Zig-Zag* ou teoria *layer-wise* (SARAVANOS; HEYLIGER; HOPKINS, 1997; CARRERA, 1997, 2002). Essa abordagem apresenta resultados mais precisos, mas também aumenta o custo computacional do elemento, por considerar graus de liberdade na superfície média de cada camada.

Figura 2.2 – Deformações ao longo da espessura de placas compostas seguindo a teoria *layer-wise*.

Nem todas as camadas utilizadas no composto precisam necessariamente ser piezelétricas e, uma vez que diferentes tensões elétricas podem ser aplicadas em cada camada, pode ocorrer surgimento de descontinuidade de potencial elétrico

nas interfaces (KÖGL; BUCALEM, 2005). Isto pode ser considerado adotando-se graus de liberdade elétricos distintos para cada camada de material.

Assim, independentemente da teoria de laminados empregada, é sempre necessária a abordagem *Zig-Zag* para o potencial elétrico (KÖGL; BUCALEM, 2005).

Este projeto considera a abordagem proposta por Kögl e Bucalem (2005) que utiliza a abordagem *Zig-Zag* ou *layer-wise* para placas piezelétricas compostas. Essa abordagem apresenta um elevado custo computacional, mas apresenta grande versatilidade e melhor qualidade de resultados. A formulação da adesão dos nós comuns de elementos de placas adjacentes está demonstrada no Apêndice B.

3 Método de Otimização Topológica

Projetar uma estrutura buscando o melhor desempenho e a melhor resposta para o problema proposto é um desafio para a Engenharia desde o seu princípio. Para isso, novos materiais foram criados, como os materiais compósitos, e métodos para parametrização da busca de novas soluções foram propostos. No ramo da otimização estrutural, três métodos se destacam pela sua grande utilização pela comunidade científica. Para demonstrar essas três abordagens da otimização estrutural podemos observar o exemplo proposto na Figura 3.1, que consiste na obtenção da estrutura com maior rigidez para um dado volume de material que suporte uma determinada força aplicada no ponto demonstrado na figura.

Figura 3.1 – Métodos de otimização estrutural.

O primeiro método, demonstrado na Figura 3.1(a), é denominado otimização paramétrica (VANDERPLAATS, 1984), e consiste em adotar como variáveis de projeto parâmetros da estrutura como dimensões (espessuras, áreas, ângulos de fibra, etc.) ou razão de dimensões. A geometria da estrutura permanece inalterada sendo alteradas apenas as suas dimensões ou razão de dimensões. Por exemplo, na Figura 3.1(a), a estrutura da esquerda é discretizada com elementos de treliça, e nesse caso definiu-se que as variáveis de projeto otimizáveis são as características geométricas, como a área da seção transversal de cada elemento. No entanto, podem-se definir também como variáveis de projeto, as coordenadas dos nós. No exemplo analisado, se adotarmos que a função objetivo é maximizar a rigidez da estrutura, que está sujeita a uma restrição de volume, obtém-se o resultado mostrado na estrutura apresentada à esquerda na Figura 3.1(a).

Já o método da Figura 3.1(b) é chamado de otimização de forma (HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1990), onde contornos externos e internos da estrutura são parametrizados com curvas *splines*. Neste caso as variáveis de projeto são as variáveis dessas curvas. Esse método é mais genérico que o anterior, aumentando o espaço de possibilidades para uma estrutura considerada ótima. Como em todos os casos de otimização estrutural, o MEF pode ser aplicado em conjunto com o método de otimização. No caso da otimização de forma, conforme as curvas se modificam, os elementos da região em torno das curvas podem se tornar excessivamente distorcidos, além da necessidade de algoritmos de “remalhamento”, o que pode tornar seus resultados pouco confiáveis (BATHE, 1996). Além disso, se houver uma grande mudança na forma do domínio, fica extremamente difícil manter uma malha razoável sem elementos muito deformados. Esse problema se torna difícil e complexo de ser resolvido principalmente no caso dos problemas tridimensionais.

O terceiro método, foco deste trabalho, é o método de otimização topológica (MOT) e está ilustrado na Figura 3.1(c). Neste método determina-se um domínio de projeto, denominado domínio fixo estendido (DFE), e busca-se uma distribuição ótima de material dentro do DFE, permitindo que haja espaços vazios dentro da estrutura. As variáveis de projeto podem ser a quantidade de material dentro de cada elemento do MEF. Durante o processo de distribuição de material há criação de buracos nas regiões onde não há necessidade de material, dando a forma da topologia ótima da estrutura. A OT é a mais genérica e eficiente, pois a quantidade

de material removido e o valor final da função objetivo são maiores do que nos outros métodos de otimização, e consequentemente obtém-se a estrutura mais leve e com o melhor desempenho. Os algoritmos utilizados para obter a solução da OT são baseados nos chamados critérios de optimalidade, métodos de programação matemática e métodos de aproximação sequencial, disponíveis para problemas lineares e não-lineares com restrições (VANDERPLAATS, 1984; HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1990). O critério de optimalidade é um algoritmo de otimização que apresenta uma formulação específica, desenvolvida para resolver problemas específicos de otimização. No entanto, é eficiente computacionalmente e foi aplicado nos primeiros problemas de OT, principalmente no problema de minimização de flexibilidade média (ou maximização de rigidez) (BENDSØE; KIKUCHI, 1988). Já os métodos baseados na programação matemática e os métodos de aproximação sequencial são métodos classificados como genéricos, podendo ser aplicados na solução de problemas de otimização em geral.

No DFE são definidas as condições de contorno e as cargas na estrutura. A definição da topologia da estrutura pode ser dada por duas abordagens, a macro e a micro.

A abordagem macro, baseada na geometria, engloba três principais métodos: o *bubble method* (ESCHENAUER; KOBOLEV; SCHUMACHER, 1994; SOKOLOWSKI; ZOCHOWSKI, 1999; NOVOTNY et al., 2003), que altera a estrutura através da alocação de “buracos” em seu domínio; o método de *level set* (SETHIAN; WIEGMANN, 2000; ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004), que define os contornos da estrutura baseando-se em curvas de nível; e os métodos evolucionários (CHU et al., 1996, 1997; LIU; PARKS; CLARKSON, 2000), que alocam e removem elementos de uma malha de MEF utilizando critérios heurísticos.

A abordagem micro, que é utilizada neste trabalho, propõe a existência de uma microestrutura “porosa” definida pela densidade volumétrica de uma célula unitária dentro do DFE. Essa densidade é representada por variáveis contínuas dentro do DFE. Nessa abordagem, a malha de MEF utilizada permanece inalterada, diferentemente da otimização de forma (BENDSØE; SIGMUND, 2003; BENDSØE; SOARES, 1993). Ainda que, durante a otimização, os valores das variáveis de projeto possam assumir qualquer valor entre 0 e 1, ao final da otimização os valores

devem tender preferencialmente aos valores limites, demonstrando se naquele elemento há, ou não, presença de material.

3.1 Método de Otimização Topológica aplicado a transdutores piezelétricos

Inicialmente, Silva, Fonseca e Kikuchi (1997) empregam o MOT para o projeto de microestruturas, ou células unitárias, de materiais piezelétricos, buscando melhorar o desempenho destes materiais. Posteriormente, a aplicação do MOT no projeto de atuadores piezelétricos flexensionais é apresentada por Silva e Kikuchi (1999b) (SILVA *et al.*, 1999; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 1999; SILVA; KIKUCHI, 1999a; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; CARBONARI; SILVA, 2003; NISHIWAKI *et al.*, 2005; CARBONARI; SILVA; PAULINO, 2007; VATANABE; PIRES; NAKASONE; SILVA, 2008; KANG; WANG, 2010), através da expansão dos conceitos de energia mútua e flexibilidade média (NISHIWAKI *et al.*, 1998; FRECKER *et al.*, 1997) antes aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis (ANANTHASURESH; KOTA; GIANCHANDANI, 1994; ANANTHASURESH; KOTA, 1995; FRECKER; KIKUCHI; KOTA, 1999). Mecanismos flexíveis são mecanismos cujos movimentos se dão pela flexibilidade da estrutura (deformação elástica, principalmente) e ausência de juntas e pinos. Possuem grande aplicação em dispositivos de mecânica de precisão, na área biomédica, e mais recentemente na construção de MEMS. Várias técnicas são utilizadas no projeto de mecanismos flexíveis, sendo que entre elas, a Otimização Topológica tem se mostrado a mais genérica e sistemática. Essencialmente, o projeto de um mecanismo flexível pode ser entendido como a distribuição de flexibilidade e rigidez no interior de um domínio fixo para atender as especificações de projeto do mesmo. Utilizando um software de MOT pode-se obter o projeto de um mecanismo flexível ou atuador piezelétrico flexensional apenas especificando o DFE, a excitação de entrada (força ou potencial elétrico) e a direção dos deslocamentos de saída em um determinado ponto desejado. Isso viabilizou o projeto de atuadores piezelétricos não-convencionais como garras, grampos, pinças, etc. A utilização do MOT tornou eficaz, genérico e sistemático o projeto de mecanismos flexíveis e atuadores piezelétricos flexensionais (SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; NISHIWAKI *et al.*, 1998, 2001; SIGMUND, 1997).

Já a OT envolvendo estruturas de placas é um dos problemas clássicos na área de otimização estrutural (BENDSØE; SIGMUND, 2003). O problema de otimização considerando a espessura como variável de projeto parece, a princípio, apenas um problema de otimização paramétrica, mas, considerando a dependência cúbica da rigidez com a espessura do material, nota-se uma grande semelhança com a interpolação utilizada no modelo de material SIMP, discutido na seção 3.2.

Inicialmente o problema de OT envolveu tanto placas baseadas na teoria de Kirchhoff (KOZLOWSKI; MRÓZ, 1969; OLHOFF, 1970) quanto placas baseadas na teoria de Reissner-Mindlin (SOTO; DIAZ, 1993; TENEK; HAGIWARA, 1993; PEDERSEN, 2001). As primeiras abordagens da OT para estruturas de placa envolvem aplicações estruturais, como por exemplo, a otimização de placas para utilização em carrocerias automotivas, reservatórios de gases ou líquidos, aeronaves, pontes, vasos de pressão, etc. (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Long, Loveday e Groenwold (2009) realizaram um estudo sobre diversas modelagens de placas estruturais e a sua influência nos resultados obtidos por OT. A placa de Kirchhoff apresenta uma falta de generalidade por sua limitação a pequenas espessuras, produzindo resultados similares mesmo com espessuras diferentes. Já a placa de Reissner-Mindlin com formulação MITC, utilizada nesse trabalho conforme proposto por Kögl e Bucalem (2005) e apresentado no apêndice A, produz resultados adequados, com diferentes topologias para diferentes espessuras de placas.

Nos últimos anos, muitos trabalhos têm empregado técnicas de otimização para determinar a distribuição de material piezelétrico em placas laminadas, aumentando cada vez mais o interesse nesse campo de pesquisa e abrindo novas possibilidades a serem exploradas. Assim, Sun e Tong (2001, 2005) desenvolvem uma abordagem evolucionária de otimização para o controle de forma de estruturas laminadas através da distribuição de pequenas áreas de material piezelétrico. Sedaghati, Zabihollah e Ahari (2006) propõem a distribuição dessas pequenas áreas de material piezelétrico em estruturas laminadas para o controle de forma estático. Ip e Tse (2001) estudam a alocação de pequenas áreas de material em estruturas laminadas como forma de suprimir vibrações indesejadas na estrutura. Moita *et al.* (2006) desenvolvem um algoritmo de ‘recozimento simulado’ (*simulated annealing*) para otimização da distribuição de pequenas placas piezelétricas em sistemas com controle ativo. Já Mukherjee e Joshi (2002) utilizam uma abordagem heurística de

otimização para a distribuição de material piezelétrico no controle de placas estruturais permitindo uma distribuição arbitrária de material, diferentemente do estudado por outros pesquisadores até então. Numa abordagem diferenciada, Sanchez-Rojas *et al.* (2010) mantêm fixo uma estrutura baseada em placa piezelétrica e aplicam algoritmos de otimização para a determinação dos eletrodos buscando a maximização das amplitudes de vibração em determinados modos de vibrar.

A otimização topológica também faz parte desse estudo. Assim, Kögl e Silva (2005) aplicaram o MOT para a distribuição de material piezelétrico numa estrutura laminada juntamente com o sinal da sua polarização com o objetivo de maximizar os deslocamentos em determinados pontos da estrutura. Kang e Tong (2008a) também utilizam o MOT para o projeto de estruturas laminadas através da distribuição de material piezelétrico e do valor das tensões elétricas ótimas para conseguir o desempenho desejado dos seus atuadores. No entanto, Kang e Tong (2008b) enfatizam as dificuldades de se aplicar um campo de tensões elétricas arbitrário num dado domínio, o que exigiria um projeto eletrônico altamente complexo ou mesmo inviável de ser implementado. Assim, os mesmos autores apresentam novos resultados, considerando uma distribuição uniforme de tensões elétricas para um problema estático de controle de forma, em que o objetivo é obter um campo de deformações genérico. No projeto de transdutores bilaminares, o MOT também tem sido aplicado conjuntamente aos materiais com gradação funcional (CARBONARI; SILVA; PAULINO, 2007), que são, basicamente, compósitos especiais com propriedades que variam gradualmente, sendo caracterizadas pela variação espacial da sua microestrutura. Outro campo de aplicação da otimização de placas piezelétricas que tem crescido ultimamente é a otimização de *energy harvesters* piezelétricos (RUPP *et al.*, 2009; CHEN *et al.*, 2010). Esse termo vem do inglês e traduzido literalmente significa coletores de energia, também utilizado como geradores de energia, isto é, esse dispositivo tem por objetivo gerar energia elétrica para dispositivos de baixo consumo aproveitando a energia mecânica disponível no ambiente.

3.2 Modelo de Material

Sendo Ω o DFE, podemos escrever X como sendo a função que contenha os valores da densidade de material em cada elemento. Essa função é discreta, apresentando valores 0 ou 1, indicando ausência ou presença de material, respectivamente.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{presença de material} \\ 0, & \text{ausência de material} \end{cases} \quad (3.1)$$

O problema discreto, por apresentar vários mínimos locais, não apresenta solução única, sendo quase sempre possível determinar um novo conjunto de valores que melhore os requisitos do projeto (função objetivo).

Para fugir desses mínimos locais em busca do mínimo global da função objetivo é necessário que os valores de X possam assumir valores entre 0 e 1. Essa relaxação do problema durante a otimização faz com que se aumente o espaço de soluções admissíveis, viabilizando a solução do problema. Ao final da otimização, aplica-se uma penalização para “forçar” os valores a 0 ou 1 de forma que a estrutura final seja bem definida.

É preciso introduzir o conceito de modelo de material para realizar a relaxação do problema discreto para a variação da função $X(\Omega)$. Existem basicamente duas abordagens desse conceito: os modelos baseados em microestrutura e os modelos artificiais.

Os primeiros se baseiam na existência de uma microestrutura com geometria parametrizável em cada elemento. É como se o material fosse formado por “poros” de dimensões conhecidas. Quando esse poro tivesse as mesmas dimensões da menor unidade dessa malha, então a densidade de material no ponto seria igual a 0. Quando o poro tivesse dimensões nulas, a densidade de material no ponto seria 1.

Já os modelos artificiais adotam uma função matemática contínua para a variação das propriedades mecânicas do material. O método mais amplamente utilizado para essa penalização é o SIMP, *Solid Isotropic Material with Penalization* (Material Sólido Isotrópico com Penalização), (BENDSØE, 1989; ROZVANY; ZHOU; BIRKER, 1992) que utiliza uma interpolação não linear para as propriedades do material, no qual os valores intermediários apresentam pequenos valores de rigidez

em comparação à quantidade de material empregado. Comumente emprega-se uma função exponencial do tipo $\rho(x)^p$, tal que $x \in \Omega$.

Os problemas penalizados são, geralmente, não convexos, com múltiplos mínimos locais. Sugere-se então que seja utilizado um método de continuação, de forma a aumentar a possibilidade de obtenção de um ótimo global. A idéia básica da continuação é a utilização de penalizações cada vez maiores, através do aumento de valor gradual do expoente p , fazendo com que o mesmo convirja para valores cada vez mais próximos ao mínimo global do problema (STOLPE; SVANBERG, 2001).

3.2.1 Modelo de Material Utilizado

Para o modelo de material com propriedades piezelétricas, é utilizado o modelo proposto por Kögl e Silva (2005) que consiste no modelo de material artificial SIMP estendido para propriedades piezelétricas utilizado para o projeto de placas piezelétricas laminadas. Esse modelo é denominado *Piezoelectric Material with Penalization* (PEMAP), ou “Material Piezelétrico com Penalização”. Neste mesmo trabalho, Kögl e Silva incluíram uma segunda variável de projeto para descrever a polarização do material piezelétrico. Esse modelo que combina a distribuição de material piezelétrico através de sua densidade ρ_1 e sua polarização ρ_2 foi denominado *Piezoelectric Material with Penalization and Polarization* (PEMAP-P), ou “Material Piezelétrico com Penalização e Polarização”.

Assim, este trabalho emprega o modelo de material PEMAP-P proposto por Kögl e Silva (2005):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \rho_1^{p_c} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{e} &= \rho_1^{p_e} (2\rho_2 - 1)^{p_i} \mathbf{e}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \rho_1^{p_\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $\rho_1 \in [0,1]$ e $\rho_2 \in [0,1]$, onde $\rho_2 = 0$ representa polarização negativa e $\rho_2 = 1$ representa polarização positiva, são as variáveis de projeto no problema de otimização, e $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{e}_0$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ são as matrizes de elasticidade, piezeletricidade e permissividade do material elétrico, respectivamente. Na topologia final, por motivos de viabilidade construtiva, as variáveis de projeto devem tender aos valores 0 ou 1,

sendo isso conseguido através dos fatores de penalização p_c , p_e , p_i e p_ε , utilizados para penalizar as densidades intermediárias.

A determinação dos penalizadores é feita através do critério proposto por Kim *et al.*, 2010. Nele, o gradiente da função objetivo é estudado como condição de convergência da solução do problema de otimização. Para o caso em que é aplicado potencial elétrico, este critério determina que os pesos devem seguir a seguinte condição:

$$p_e > p_c. \quad (3.3)$$

A variável ρ_1 não pode assumir o valor 0, pois isso significaria que a permissividade do material é nula. Como a menor permissividade conhecida é a do vácuo, e mesmo com um valor de ρ_1 muito baixo, aproximadamente 10^{-4} , o termo $\rho_1^{p_\varepsilon} \varepsilon_0 \gg \varepsilon_{\text{vácuo}}$, é mais simples para evitar que ρ_1 seja igual a zero do que adicionar um termo que leve em consideração à permissividade do vácuo.

3.3 Formulação do Projeto de Transdutores Piezelétricos Estáticos utilizando o MOT

O problema de otimização consiste em descobrir a distribuição ótima do material nas camadas do transdutor para maximizar um determinado deslocamento num ponto específico, numa direção dada com φ aplicado. Isso pode ser conseguido através da análise simultânea de dois problemas de projeto (KÖGL; SILVA, 2005): maximização do deslocamento gerado u_1^A e minimização da flexibilidade média $L_{33} = L_3(u_3, \varphi_3)$.

3.3.1 Maximização do deslocamento gerado

No processo de OT de atuadores piezelétricos, o principal objetivo é maximizar o deslocamento desejado u_1 em um dado ponto, numa certa direção e sentido. Esse deslocamento é gerado a partir da aplicação de um potencial elétrico φ_1 em uma região Γ_u num ponto A onde se deseja maximizá-lo, sendo representado por $u_1^A = L_1$. Esse caso de carga está representado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Caso de carga para cálculo do deslocamento gerado.

3.3.2 Minimização da Flexibilidade Média

Quando todas as camadas do transdutor estão sendo otimizadas, o deslocamento máximo é obtido quando a rigidez se aproxima de zero, o que é inviável do ponto de vista construtivo. Para que isso não aconteça é necessário minimizar a flexibilidade média da estrutura (KÖGL; SILVA, 2005) dada por:

$$L_3 = \int_{\Gamma_{t_3}} \mathbf{t}_3^T \mathbf{u}_3 d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_3}} q_3 \varphi_3 d\Gamma. \quad (3.3)$$

onde $\varphi_3 = 0$, pois o eletrodo está aterrado como mostra a Figura 3.3, que ilustra o caso de carga correspondente.

Figura 3.3 – Caso de carga para cálculo da flexibilidade média.

3.3.3 Função Multiobjetivo para o problema de OT com múltiplos graus de liberdade

Esse trabalho é focado em atuadores com múltiplos graus de liberdade. Para que se possa controlar cada grau de liberdade, um caso de aplicação de potencial elétrico é utilizado para cada deslocamento gerado a ser maximizado, seja ele um deslocamento ou rotação. Sendo assim, a função objetivo tem mais de um caso de maximização de deslocamento gerado e mais de um caso de minimização de flexibilidade, como pode ser visto na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Casos de carga para OT de múltiplos graus de liberdade.

Tendo definido os problemas de deslocamento gerado e flexibilidade média, a função multiobjetivo pode ser definida como:

$$\mathcal{F} = \omega \sum_{i=0}^n \alpha_i \ln(u_{1_i}) - (1 - \omega) \sum_{i=0}^n \beta_i \ln(L_{3_i}), \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (3.4)$$

em que ω é o coeficiente de peso que define a maneira com que a função objetivo pondera os problemas de otimização envolvidos, n é o número de graus de liberdade que se está otimizando, ou seja, o número de casos de carga utilizados, α_i e β_i são os coeficientes de peso de cada caso de carga na OT, L_{1_i} é o deslocamento gerado pra cada caso de carga com aplicação de potencial elétrico e L_{3_i} é a flexibilidade média para o mesmo caso de carga. O problema de otimização é definido como:

Maximizar $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2)$

$\rho_1(\mathbf{x}), \rho_2(\mathbf{x})$

sujeito a: para o caso de carga 1_i:

$$A(\mathbf{u}_{1_i}, \mathbf{w}_{1_i}) - B(\mathbf{w}_{1_i}, \varphi_{1_i}) = L_t(\bar{\mathbf{t}}_{1_i}, \mathbf{w}_{1_i})$$

$$B(\mathbf{u}_{1_i}, \phi_{1_i}) + C(\varphi_{1_i}, \phi_{1_i}) = L_q(\bar{q}_{1_i}, \phi_{1_i})$$

para o caso de carga 3_i:

$$A(\mathbf{u}_{3_i}, \mathbf{w}_{3_i}) - B(\mathbf{w}_{3_i}, \varphi_{3_i}) = L_t(\bar{\mathbf{t}}_{3_i}, \mathbf{w}_{3_i})$$

$$B(\mathbf{u}_{3_i}, \phi_{3_i}) + C(\varphi_{3_i}, \phi_{3_i}) = L_q(\bar{q}_{3_i}, \phi_{3_i})$$

$$0 \leq \rho_1(\mathbf{x}) \leq 1$$

$$0 \leq \rho_2(\mathbf{x}) \leq 1$$

$$\Theta(\rho_1) = \frac{1}{V} \int_V \rho_1 dV \leq \Theta_1$$

em que: $\rho_1(\mathbf{x})$ é a variável de projeto referente à distribuição de pseudodensidades de material piezelétrico, $\rho_2(\mathbf{x})$ é a variável de projeto responsável pela representação da polarização do material (sendo 1 para polarização positiva e 0 para polarização negativa), V é o volume do domínio de projeto, Θ é a fração de volume, Θ_1 é o limite superior restringindo a quantidade de material piezelétrico na camada piezelétrica, e $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $L_t(\cdot)$ e $L_q(\cdot)$ são os operadores integrais

definidos na Eq.(2.35) e que definem o equilíbrio piezelétrico como nas Eq.(2.36) e Eq. (2.37). As restrições de caixa para as variáveis $\rho_1(x)$ e $\rho_2(x)$ representam o domínio no qual as mesmas estão definidas. Finalmente, o caso de carga 1_i corresponde a cada caso utilizado para o cálculo do deslocamento gerado, o caso de carga 3_i é utilizado para o cálculo da flexibilidade média em cada um dos casos.

Caso o deslocamento gerado inverta de direção durante as iterações do processo de otimização, corre-se o risco de haver uma instabilidade numérica quando se calcular o $\ln(u_{1_i})$ com $u_{1_i} < 0$. Sendo assim a função multiobjetivo pode ser utilizada como segue:

$$\mathcal{F} = \frac{\sum_{i=0}^n L_{3_i}}{\sum_{i=0}^n u_{1_i}}. \quad (3.5)$$

4 Implementação numérica e caracterização experimental

Neste capítulo é apresentada a implementação numérica do algoritmo de otimização topológica para o problema anteriormente definido. É proposta a utilização da técnica de projeção para processamento dos resultados e atenuação de problemas comuns em algoritmos de OT. Finalmente são apresentadas as metodologias utilizadas na fabricação do protótipo e caracterização experimental.

4.1 Implementação do algoritmo de MOT

Neste trabalho, a utilização de multiplicadores de Lagrange para prescrição de valores nos graus de liberdade do problema de MEF é adotada para fazer o acoplamento entre elementos de placa numa estrutura laminada. Ela é feita através da adição de linhas e colunas na matriz de rigidez do problema. Essas linhas e colunas possuem valores nulos em todas as posições, exceto pela posição correspondente ao grau de liberdade desejado (BATHE, 1996). Assim, a equação de equilíbrio do MEF passa a ser escrita como:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} K_{uu} & K_{u\varphi} & e_1 & \cdots & e_i & \cdots & e_n \\ K_{u\varphi}^T & K_{\varphi\varphi} & & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ou

$$\mathbf{K}' \tilde{\mathbf{u}}' = \tilde{\mathbf{F}}' \quad (4.2)$$

em que n é o número de restrições necessárias à prescrição dos graus de liberdade para a implementação da adesão entre placas, uma vez que deslocamentos e rotações entre camadas adjacentes são interdependentes, em todos os elementos e e_i são os vetores com todos os elementos nulos, exceto pelo i -ésimo elemento, que

tem valor unitário. Assim, o vetor $\tilde{\mathbf{F}}'$ contém os valores dos deslocamentos como um carregamento aplicado ao sistema.

A implementação do algoritmo de MOT é realizada através do software MATLAB. Utilizando a equação de equilíbrio do MEF, Eq. (2.57), a flexibilidade média pode ser escrita em termos de valores nodais e matrizes de elasticidade. Como os eletrodos estão aterrados ($\varphi_3 = 0$), a equação é reduzida à flexibilidade elástica:

$$L_3 = \tilde{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{K}_{uu} \tilde{\mathbf{u}}_3 . \quad (4.3)$$

4.2 Técnica de Projeção

Uma instabilidade bastante comum em OT é a instabilidade de tabuleiro (*checker board*), onde elementos com presença e ausência de material se alternam na solução final dando uma falsa impressão de estrutura rígida. Diaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996) mostram que os padrões de tabuleiro resultam de instabilidades numéricas, não representando, portanto, estruturas ótimas. Essa instabilidade pode ser suavizada ou até inibida utilizando-se elementos finitos de alta ordem (DIAZ; SIGMUND, 1995; JOG; HABER, 1996) ou restrições adicionais (POULSEN, 2002). A Figura 4.1 a seguir demonstra a instabilidade de tabuleiro.

Figura 4.1 – Instabilidade de tabuleiro.

A dependência de malha é outro problema recorrente na OT, que faz com que, conforme os elementos da malha utilizada no MEF diminuem, espaços vazios menores surgem no domínio, tornando as estruturas demasiadamente delgadas ou com pequenos buracos, dificultando a fabricação. Uma forma de eliminar a

dependência de malha é limitar o perímetro total da estrutura (AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993).

Neste trabalho, para lidar com esses problemas, é utilizada a técnica de projeção baseada na técnica proposta por Guest, Prevost e Belytschko (2004), onde é proposto inicialmente que as variáveis do problema de otimização sejam definidas nos nós de cada elemento ρ_1^k , e que o valor da densidade do elemento ρ_1^e seja obtido através da projeção desses valores em relação ao centróide do elemento.

A densidade do elemento é obtida através da expressão (MATSUI; TERADA, 2004):

$$\rho_1^e = \sum_{i=1}^4 \rho_1^{k,i} N_i \quad (4.4)$$

onde i representa cada vértice do elemento e e $\rho_1^{k,i}$ é a pseudodensidade nodal associada ao vértice i .

A pseudodensidade no elemento (como um valor constante dentro do elemento) é calculada a partir de um novo conjunto de variáveis de projeto d_k definido nos nós da malha. A partir dessa ideia, propõe-se neste trabalho calcular ρ_1^k em função de d_k , de modo a manter a distribuição contínua dentro de cada elemento pela Eq. (4.4). Neste trabalho, as variáveis d_k são chamadas de variáveis topológicas e são definidas nos mesmos vértices dos elementos como ρ_1^k . Assim, a função de projeção é escrita da seguinte maneira:

$$\rho_1^k = \frac{\sum_{j \in \Omega_k} d_j w_p(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{\sum_{j \in \Omega_k} w_p(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)} \quad (4.5)$$

onde d_j é o conjunto de variáveis topológicas dentro da área de influência Ω_k do nó k . Ω_k é definido como:

$$\mathbf{x} \in \Omega_k \quad \text{se } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq r_{min} \quad (4.6)$$

onde r é a distância entre um nó arbitrário e o nó k e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_k$ são suas respectivas coordenadas, e r_{min} é o raio da projeção.

$w_p(x_j - x_k)$ é a função peso da projeção que calcula o quanto a variável d_j influencia a pseudodensidade ρ_1^k . Essa função peso pode ser escrita da seguinte maneira:

$$w_p(x_j - x_k) = \begin{cases} \left(\frac{r_{min}-r}{r_{min}}\right)^{p_{proj}} & \text{se } x \in \Omega_w^k \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_w^k \end{cases} \quad (4.7)$$

onde p_{proj} é o coeficiente de penalização da projeção definida para reduzir a influência dos vizinhos mais distantes. Neste trabalho utiliza-se uma função linear para $w_p(x_j - x_k)$ calculada em função das distâncias entre d_j e ρ^k .

A Figura 4.2 ilustra a técnica de projeção, sendo que r_{min} não depende da discretização da malha.

Figura 4.2 – Representação da técnica de projeção.

A técnica de projeção é utilizada também para as variáveis de polarização ρ_2 . Neste trabalho, as variáveis de polarização são definidas nos elementos, assim a técnica de projeção deve ser levemente modificada para calcular as distâncias entre os centróides dos elementos.

4.3 Formulação discreta do problema

As funções multiobjetivo discutidas, anteriormente, na seção 3.3 são, agora, descritas na forma discreta como segue:

$$\begin{aligned}
 u_{1_i} &= \mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_{1_i} \\
 L_{3_i} &= \tilde{\mathbf{U}}_{3_i}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_{3_i} = \mathbf{F}_{3_i}^T \tilde{\mathbf{U}}_{3_i} \\
 \mathcal{F} &= \omega \sum_{i=0}^n \alpha_i \ln(\mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_{1_i}) - (1 - \omega) \sum_{i=0}^n \beta_i \ln(\tilde{\mathbf{U}}_{3_i}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_{3_i}), \quad 0 \leq \omega \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

para $\mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_{1_i} \geq 0$ ou

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathbf{U}}_{3_i}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_{3_i} / \mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_{1_i} \tag{4.9}$$

para $\mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_{1_i} < 0$, em que: $\tilde{\mathbf{U}}_{1_i}$ e $\tilde{\mathbf{U}}_{3_i}$ são os vetores de deslocamento resultantes da aplicação das cargas Φ_{1_i} e $\mathbf{F}_{3_i}$, respectivamente, que correspondem aos casos de carga para o cálculo do deslocamento gerado e da flexibilidade média mencionados no capítulo 3 e $\mathbf{L}_i$ é um vetor nulo com um valor unitário na posição do deslocamento que se deseja maximizar.

Assim, o problema de otimização pode ser descrito na forma discreta como:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar:} \quad & \mathcal{F} \\
 & \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \\
 \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} \\
 & 0 < d_{min} \leq d_{1,i} \leq 1 \text{ para } i = 1 \dots n \\
 & 0 \leq d_{2,i} \leq 1 \text{ para } i = 1 \dots n \\
 & \theta_k(\mathbf{d}_1) = \frac{\sum_{i=1}^n d_{1,k,i} V_{k,i}}{\sum_{i=1}^n V_{k,i}} \leq \theta_{1,k}
 \end{aligned}$$

onde n é o número de elementos em cada camada, k é o número de camadas, $V_{k,i}$ é o volume de cada elemento, θ_k é a fração de volume e $\theta_{1,k}$ é o limite de restrição de material a ser utilizado na camada k , onde estiver ocorrendo o processo de otimização. As outras restrições são as equações de equilíbrio $\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}$ e as

restrições dos valores que as variáveis de projeto d_1 e d_2 podem assumir. O limite d_{min} é escolhido para se evitar problemas numéricos, e em geral é admitido o valor de 10^{-6} .

4.4 Implementação do MOT

A solução do algoritmo de otimização é feita através do método de Programação Matemática Sequencial, PMS, utilizando o GCMMA. Ele permite lidar com um grande número de variáveis de projeto (d_n) e diferentes funções objetivos e restrições (VANDERPLAATS, 1984; HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1990). O PMS resolve um problema de otimização em que a função objetivo e as restrições não são lineares em relação às variáveis de projeto. Após a otimização, um novo conjunto de variáveis de projeto (d_i) é obtido e atualizado no modelo de MEF. As iterações continuam até que seja atingida a convergência da função objetivo.

Figura 4.3 – Fluxograma do Método de Otimização Topológica.

A Figura 4.3 mostra o fluxograma do algoritmo de otimização utilizado neste trabalho e implementado em MATLAB. Os dados iniciais, como dimensões das placas, tipo de material e valores iniciais das variáveis de projeto são fornecidos ao programa. As pseudodensidades são calculadas e através do modelo de material obtêm-se as matrizes de rigidez para cada placa. O sistema de equações do MEF é solucionado para cada caso de carga e, em seguida, é realizado o cálculo da função objetivo e das restrições. Caso haja convergência, tem-se o resultado final, caso contrário, a sensibilidade da função objetivo em relação a cada variável de projeto é calculada novamente. Essas informações são fornecidas ao algoritmo de otimização GCMMA que obtém uma nova distribuição de material e uma nova polarização do material. Esta, por sua vez, é atualizada para o cálculo das pseudodensidades, prosseguindo-se, assim, para uma nova iteração, até que a convergência seja alcançada.

Algumas restrições podem ser aplicadas no momento em que o algoritmo de otimização vai ser resolvido ou na hora de atualizar as pseudodensidades para que requisitos de projeto como simetrias e restrições de padrão sejam atendidos. O acoplamento entre camadas é utilizado quando uma camada do atuador é forçada a ser igual à outra. Essa restrição pode ser aplicada nas três camadas ao mesmo tempo ou de duas em duas. Essa restrição consiste em, ao utilizar o algoritmo de otimização para atualizar as pseudodensidades, atualizar apenas uma camada utilizando a soma das sensibilidades de cada elemento correspondente das camadas que se deseja “acoplar” e copiar o resultado para todas as camadas “acopladas”.

A restrição de simetria implementada está representada na Figura 4.4(a). Nela o atuador é dividido em quatro quadrantes e cada um deles é espelhado em relação aos eixos de simetria. As coordenadas locais r e s demonstram a relação de cada quadrante. Para implementar essa simetria é necessário, depois de atualizar as pseudodensidades, fazer a média aritmética da pseudodensidade dos quatro elementos simétricos e atualizá-la novamente.

A restrição de padrão é semelhante à de simetria. Nela ocorre uma repetição de padrão conforme indicado na Figura 4.4(b). A implementação da repetição de padrão é análoga à da restrição de simetria.

Figura 4.4 – (a) Restrição de simetria; (b) Restrição de padrão

4.5 Globally Convergent Method of Moving Asymptotes (GCMMA)

O MMA (*Method of Moving Asymptotes*) é um método de programação matemática desenvolvido originalmente por Svanberg (1987), no qual se constroem aproximações convexas sequenciais controladas por assíntotas móveis para que o problema de otimização seja resolvido. A aproximação local baseada no MMA é (SVANBERG, 1987):

$$F_{lin}(\mathbf{x}) \cong F(\mathbf{x}_0) + \sum_{+,i}^n p_i \left(\frac{1}{U_i - x_i} - \frac{1}{U_i - x_{0i}} \right) + \sum_{-,i}^n q_i \left(\frac{1}{x_i - L_i} - \frac{1}{x_{0i} - U_i} \right) \quad (4.10)$$

onde os símbolos $\sum_{+,i}^n$ e $\sum_{-,i}^n$ referem-se à somatória correspondente aos termos que possuem as suas primeiras derivadas positivas e negativas, respectivamente. Os termos p_i e q_i são calculados como (SVANBERG, 1987):

$$p_i = \begin{cases} (U_i - x_{0i})^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} > 0 \\ 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$q_i = \begin{cases} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_{o_i} - L_i)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Os termos L_i e U_i se denominam assíntota inferior (*lower*) e superior (*upper*), respectivamente, e ajustam a convexidade da aproximação do problema de otimização. Esses termos são determinados pelas expressões (BRUYNEEL; DUYSINX; FLEURY, 2002):

$$L_i = x_i - S_i(x_{o_i} - L_{o_i}) \quad (4.13)$$

$$U_i = x_i - S_i(U_{o_i} - x_{o_i}) \quad (4.14)$$

onde L_{o_i} e U_{o_i} são os valores das assíntotas definidas na iteração imediatamente anterior e S_i é um parâmetro que depende do histórico dos valores das variáveis de projeto. Aproximações como GCMMA consideram ambas as assíntotas não nulas (BRUYNEEL; DUYSINX; FLEURY, 2002).

4.6 Cálculo das Sensibilidades

A solução do problema de otimização é feita pela Programação Matemática Sequencial mostrada acima, utilizando o GCMMA como otimizador, o que torna necessário o conhecimento prévio das sensibilidades da função objetivo $\mathcal{F}$ em relação às variáveis de projeto ρ_1 e ρ_2 . A sensibilidade da função objetivo em relação à ρ , que pode ser tanto ρ_1 quanto ρ_2 é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} = \omega \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{u_{1_i}} \frac{\partial u_{1_i}}{\partial \rho} - (1 - \omega) \sum \frac{\beta_i}{L_{3_i}} \frac{\partial L_{3_i}}{\partial \rho} \quad (4.15)$$

para $L_{1_i} \geq 0$ e por:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n u_{1i}} \sum_{i=0}^n \frac{\partial L_{3i}}{\partial \rho} - \frac{\sum_{i=0}^n L_{3i}}{(\sum_{i=0}^n u_{1i})^2} \sum_{i=0}^n \frac{\partial u_{1i}}{\partial \rho} \quad (4.16)$$

para $L_1 < 0$.

A derivada de cada parcela da Função Objetivo é calculada pelo método adjunto, como segue:

$$\frac{\partial u_{1i}}{\partial \rho} = \mathbf{L}_i^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{1i}}{\partial \rho} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \rho} = \mathbf{F}_{3i}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{3i}}{\partial \rho} \quad (4.18)$$

Sendo que $\mathbf{L}_i$ e $\mathbf{F}_{3i}$ não dependem de nenhuma variável de projeto. $\frac{\partial(\Delta\Phi_{1i})}{\partial \rho} = 0$, porque $\Delta\Phi_{1i}$ é o potencial elétrico de entrada do caso de carga 1 e não depende das variáveis de projeto.

Considerando que $\tilde{\mathbf{U}}_{1i}$ é obtido através da excitação pelo potencial elétrico $\Delta\Phi_{1i}$, $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{1i}}{\partial \rho}$ é obtido diferenciando a Eq. (2.62):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{1i}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \Phi_{m1i}}{\partial \rho} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi_1} \\ \mathbf{K}_{u\phi_1}^T & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi_1}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi_2}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi_1}^T}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi_1\phi_2}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{1i} \\ \Phi_{m1i} \\ \Delta\Phi_{1i} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{3i}}{\partial \rho}$ é obtido diferenciando a Eq. (2.61)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{3i}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \Phi_{m3i}}{\partial \rho} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi_1} \\ \mathbf{K}_{u\phi_1}^T & \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi_1}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi_1}^T}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi_1\phi_1}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{3i} \\ \Phi_{m3i} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

onde $\frac{\partial(\Delta\Phi_{3i})}{\partial \rho} = 0$, pois os eletrodos do caso de carga 3 estão aterrados e, consecutivamente, os graus de liberdade ϕ_2 não são considerados.

No entanto, devido às inversões de matrizes das equações acima, $\frac{\partial \bar{u}_{1i}}{\partial \rho}$ não pode ser obtida separadamente dos outros graus de liberdade para cada caso de carga. Sendo assim as Eqs. (4.17) devem ser reescritas para evitar derivadas não utilizadas, e considerando a Eq. (4.19) a derivada resultante é obtida:

$$\frac{\partial u_{1i}}{\partial \rho} = \{L_i^T \quad \mathbf{0}\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_{1i}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \Phi_{m1i}}{\partial \rho} \end{Bmatrix} = -U_{adj1i}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{u\phi_1}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{u\phi_2}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial K_{u\phi_1}^T}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{\phi_1\phi_1}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{\phi_1\phi_2}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{1i} \\ \Phi_{m1i} \\ \Delta \Phi_{1i} \end{Bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde U_{adj1i} é o vetor adjunto obtido pela resolução do sistema linear abaixo apenas uma vez por iteração:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_1} \\ K_{u\phi_1}^T & K_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix} U_{adj1i} = \{L_i\}. \quad (4.22)$$

Já no caso da flexibilidade média, podemos substituir as Eqs. (2.58) e (4.20) na Eq. (4.18) obtendo assim:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \rho} = - \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_1} \\ K_{u\phi_1}^T & K_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{3i} \\ \Phi_{m3i} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_1} \\ K_{u\phi_1}^T & K_{\phi_1\phi_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{u\phi_1}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial K_{u\phi_1}^T}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{\phi_1\phi_1}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{3i} \\ \Phi_{m3i} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

e simplificando:

$$\frac{\partial L_{3i}}{\partial \rho} = - \begin{Bmatrix} \bar{U}_{3i} \\ \Phi_{m3i} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{u\phi_1}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial K_{u\phi_1}^T}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{\phi_1\phi_1}}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{3i} \\ \Phi_{m3i} \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

Considerando a Eq. (3.2) do modelo de material proposto, obtemos as derivadas das matrizes K_{uu} , $K_{u\phi}$ e $K_{\phi\phi}$ em relação às variáveis de projeto ρ_1 e ρ_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_1} &= \frac{(1 + p_c(1 - \rho_1) + p_c \rho_1)}{(1 + p_c(1 - \rho_1))^2} \mathbf{K}_{uu}, & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\varphi}}{\partial \rho_1} &= \frac{p_e}{\rho_1} \mathbf{K}_{u\varphi}, & \frac{\partial \mathbf{K}_{\varphi\varphi}}{\partial \rho_1} &= \frac{p_e}{\rho_1} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}, \\
\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_2} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\varphi}}{\partial \rho_2} &= \frac{2p_i}{2\rho_2 - 1} \mathbf{K}_{u\varphi}, & \frac{\partial \mathbf{K}_{\varphi\varphi}}{\partial \rho_2} &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.7 Casos de carga utilizados

Como o atuador projetado neste trabalho possui múltiplos graus de liberdade, mais de um caso de carga precisa ser utilizado para que os deslocamentos gerados, sejam eles quaisquer um dos 5 graus de liberdade mecânicos, possam ser obtidos com uma mesma polarização das cerâmicas piezelétricas. No exemplo de atuador utilizado neste trabalho, a otimização é feita no deslocamento vertical, ao longo do eixo Z, e nas rotações em torno de X e Y, mas não necessariamente todos ao mesmo tempo. Para isso, a aplicação de potencial elétrico para a realização da otimização é feita como mostrado na Tabela 4.1, onde para cada caso de carga, um determinado grau de liberdade está sendo maximizado. Para isso o domínio de projeto foi dividido em quatro regiões iguais como ilustrado na Figura 4.5, onde para cada caso de carga uma tensão elétrica de sinal diferente é aplicada.

Tabela 4.1 – Potencial elétrico aplicado em cada caso de carga utilizado para maximização do deslocamento gerado

Caso de carga	Tensão elétrica aplicada (V)							
	Camada de cima				Camada de baixo			
	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Uy	-100V	-100V	-100V	-100V	+100V	+100V	+100V	+100V
θx	+100V	+100V	-100V	-100V	-100V	-100V	+100V	+100V
θy	+100V	-100V	-100V	+100V	-100V	+100V	+100V	-100V

Figura 4.5 – Implementação dos casos de carga para maximização do deslocamento gerado.

Para a minimização da flexibilidade da estrutura, não convém diminuir a flexibilidade da estrutura na mesma direção em que se quer maximizar o deslocamento gerado, portanto, a flexibilidade da estrutura é minimizada nos graus de liberdade mecânicos que não estão sendo otimizados. No exemplo de atuador otimizado neste trabalho, os graus de liberdade cuja flexibilidade é minimizada em sua direção são os deslocamentos ao longo do eixo X e do eixo Y, u_x e u_y , respectivamente.

4.8 Fabricação do protótipo

Devido às dimensões e complexidade da geometria dos atuadores, como tratado neste trabalho, um método de fabricação bastante utilizado e adotado neste trabalho para as cerâmicas piezelétricas e para o material intermediário é o corte a *laser*. Uma base de poliamida é usada para suporte, onde o atuador é engastado. As cerâmicas piezelétricas utilizadas são de PZT 5A e, depois de cortadas, são coladas no substrato de alumínio com a utilização de uma cola epóxi que é aplicada através da colocação de pequenos pontos de cola por toda a extensão que deve ser colada para que não se forme um filme de cola entre a cerâmica e o alumínio, mantendo o contato elétrico e diminuindo os erros do resultado teórico obtido pela otimização e o experimental. Depois de colado, o atuador é engastado na base de poliamida.

A Figura 4.6 ilustra o esquema de ligação elétrica das cerâmicas piezelétricas. Para a confecção do protótipo, foram coladas em ambas as faces da placa de

alumínio cerâmicas piezelétricas com a mesma polarização, isto é, o eixo da polarização tem a mesma direção e sentido nas duas camadas. Como a camada de alumínio é sempre considerada aterrada, as cerâmicas em ambas as faces precisam ser excitadas por um potencial elétrico de mesmo sinal para que uma camada possa se expandir enquanto a outra se contrai. Assim, para que se apliquem tensões positivas e negativas, de acordo com cada caso de carga, duas fontes de corrente contínua foram associadas em série, como mostrado na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Esquema elétrico de aplicação de potencial nas cerâmicas piezelétricas.

4.9 Caracterização experimental

O comando do atuador piezelétrico é feito através de uma tensão elétrica aplicada que resulta na deformação da cerâmica e, assim, no deslocamento do atuador. Esse comando é feito ajustando-se a fonte de tensão elétrica para a tensão desejada. Os terminais da fonte são ligados à cerâmica piezelétrica que aciona o atuador. O deslocamento obtido pelo atuador é verificado e medido através de um sensor fotônico de fibra ótica MTI-2100 (*MTI Instruments*, EUA) ilustrado na Figura 4.7. O esquema do fluxo de comando está demonstrado na Figura 4.8.

Figura 4.7 – Sensor fotônico de fibra ótica MTI-2100.

Figura 4.8 – Esquema do fluxo de comando.

A medição do deslocamento vertical do protótipo h , ilustrada na Figura 4.9, se dá através da aplicação de uma tensão elétrica contínua no microespelho e com o sensor fotônico posicionado perpendicularmente ao plano do espelho é medida a amplitude do deslocamento. Como o MTI-2100 mede apenas deslocamentos perpendiculares ao feixe de luz, a medição do ângulo de rotação do protótipo θ não é realizada de maneira direta, mas é feita de maneira indireta. A ponta de prova do sensor fotônico é colocada na lateral do microespelho e é medido o deslocamento vertical também nos casos de carga de rotação do microespelho.

Figura 4.9 – Medição do deslocamento vertical utilizando o sensor fotônico.

5 Resultados

Esse capítulo tem por objetivo mostrar resultados de Otimização Topológica de atuadores com múltiplos graus de liberdade a partir do método proposto neste trabalho. O exemplo tomado como caso para estudo é o de otimizar o mecanismo de um microespelho.

Inicialmente, alguns exemplos de otimização de atuadores são apresentados para diversos tipos de domínios de projeto e condições de contorno. Por fim, os resultados obtidos pelo protótipo construído são exibidos e comparados com os resultados da OT.

5.1 Projeto de atuadores com três graus de liberdade

A dimensão do domínio de projeto é uma área quadrada de 15 mm de lado. O dispositivo é formado por três camadas de material a serem otimizadas, sendo a do meio de alumínio e as outras duas de cerâmica piezelétrica. As propriedades utilizadas para a cerâmica e para o alumínio estão na Tabela 5.1 e na Tabela 5.2, respectivamente.

Tabela 5.1 – Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT 5A

Propriedade	Valor
e_{31} (C/m ²)	-9,6
e_{33} (C/m ²)	15,1
e_{15} (C/m ²)	12,0
ϵ_{11} (F/m)	$1,71 \times 10^{-8}$
ϵ_{33} (F/m)	$1,87 \times 10^{-8}$
C_{11} (GPa)	107,6
C_{12} (GPa)	63,12
C_{13} (GPa)	63,85
C_{33} (GPa)	100,40
C_{44} (GPa)	19,62
C_{66} (GPa)	22,24
ρ (kg/m ³)	7800

Tabela 5.2 – Propriedades do alumínio

Propriedade	Valor
E (GPa)	68,9
Poisson	0,33
ρ (kg/m ³)	2700

As camadas de cerâmica têm espessura de 0,4 mm e a de alumínio 0,25 mm. Nas simulações apresentadas a seguir deseja-se otimizar o deslocamento vertical (eixo Z) ou a rotação em torno de X ou de Y do ponto central O das placas. Como exemplo, o atuador utilizado tem a função de um microespelho com a função de refletir raios laser. Para isso uma região central quadrada de 4,5 mm de lado é deixada sem material nas camadas de PZT e com material na camada de alumínio para simular a posição do microespelho dentro do domínio de projeto. A restrição de volume utilizada é $\theta_1 = 0,4$ e os coeficientes de penalização utilizados são $p_c = 1$, $p_e = 4$, $p_\varepsilon = 1$ e $p_i = 1$ (KIM *et al.*, 2010). É utilizada uma malha de 30 x 30 elementos e um raio de projeção r_{min} de 1 mm com peso p_{proj} descrito na Eq. (4.7) com valor igual a 1. Depois da iteração 7, p_c assume o valor 2 até a iteração 13, o valor 3 até a iteração 30 e o valor 4 até o final do processo de otimização. Também depois da iteração 30, p_e assume o valor 5. A partir da iteração 25, deixa-se de utilizar a técnica de projeção. São realizadas 50 iterações para se chegar ao resultado final da otimização. Os valores das variáveis de projeto iniciais são iguais a 0,4 para as pseudodensidades das três camadas e 0,7 para a polarização das duas camadas de PZT.

O pós processamento é realizado com uma técnica chamada *thresholding*, que consiste na determinação de um valor de corte onde, cada nó que possuir o valor de ρ_1 menor do que esse valor de corte, ρ_1 assume o valor 10^{-6} e, caso o valor de ρ_1 seja maior do que o valor de corte, ρ_1 assume o valor 1. O valor de corte utilizado neste trabalho é de 0,2.

São otimizados atuadores com a camada de alumínio engastada em seus quatro lados, sendo que no item 5.1.1 utiliza-se o acoplamento entre as camadas, no item 5.1.2 as otimizações são realizadas sem o acoplamento entre as camadas, no item 5.1.3 as duas camadas de PZT são menores que as camadas de alumínio e na seção 5.1.4 utiliza-se a restrição de padrão alterando-se os valores iniciais e com

engaste feito apenas na parte das laterais da camada de alumínio onde os valores iniciais foram alterados.

5.1.1 Exemplo 1 – Otimização utilizando acoplamento das camadas

Neste caso as três camadas do domínio são de mesmo tamanho com a camada do meio engastada em todo o seu contorno, como pode ser visto na Figura 5.1. As camadas, neste caso, foram acopladas, isto é, as variáveis de projeto de um nó numa determinada posição são iguais aos nós das outras camadas nessa mesma posição, a menos da região central onde não há material nas camadas de cima e de baixo.

Figura 5.1 – Domínio de Projeto com as três camadas do mesmo tamanho.

Num primeiro momento é otimizado apenas o deslocamento vertical do ponto O . O coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), é $\omega = 0,5$. O resultado obtido pode ser observado na Figura 5.2(a). A Figura 5.2(b) apresenta o pós processamento desse resultado e a Figura 5.2(c) ilustra a configuração deformada para o caso de carga com deslocamento vertical. Na configuração deformada é possível identificar cada tipo de material que está sendo utilizado. O material da camada do meio é o alumínio, representado pela cor vermelha. A cerâmica piezelétrica com polarização positiva é representada pela cor azul, enquanto a cerâmica piezelétrica com polarização negativa é representada pela cor verde. Neste caso é utilizada a restrição de simetria. O valor do deslocamento vertical h obtido por essa configuração está na Tabela 5.3.

Figura 5.2 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical com acoplamento das camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

No próximo exemplo a otimização é realizada em relação à rotação em torno do eixo X. A restrição de simetria é utilizada e o coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), é $\omega = 0,5$. O resultado obtido na otimização pode ser observado na Figura 5.3(a), o pós processamento na Figura 5.3(b) e a configuração deformada na Figura 5.3(c). Nesse caso, o valor da rotação θ_x está demonstrado na Tabela 5.3.

Figura 5.3 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X com acoplamento das camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

No próximo exemplo são otimizados simultaneamente o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. São realizadas três otimizações com o valor do coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), $\omega = 0,5$, $0,2$ e $0,05$. A restrição de simetria é utilizada nesse exemplo. A Figura 5.4(a) ilustra os resultados das otimizações para cada valor de ω , a Figura 5.4(b) os resultados pós processados e a Figura 5.4(c) as configurações deformadas para cada caso de aplicação de carga. Neste exemplo, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.3.

a) Camada 1

Camada 2

Camada 3

 $\omega = 0,5$ $\omega = 0,2$ $\omega = 0,05$

b) Camada 1

Camada 2

Camada 3

 $\omega = 0,5$ $\omega = 0,2$ $\omega = 0,05$

c) Deslocamento vertical

Rotação em X

Rotação em Y

 $\omega = 0,5$ $\omega = 0,2$ $\omega = 0,05$

■ Alumínio
 ■ PZT com polarização positiva
 ■ PZT com polarização negativa

Figura 5.4 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com simetria entre as camadas e restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

Em seguida é retirada a restrição de simetria e aplicada à restrição de padrão no mesmo exemplo anterior apenas utilizando o valor do coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), igual a $\omega = 0,5$. A configuração obtida está ilustrada na Figura 5.5(a), o resultado do pós processamento na Figura 5.5(b) e as configurações deformadas na Figura 5.5(c). A Tabela 5.3 apresenta os valores de saída para essa configuração.

Figura 5.5— (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com simetria entre camadas e restrição de padrão; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

A seguir encontra-se a Tabela 5.3 onde estão os resultados das configurações obtidas pelas otimizações e pós processadas ilustradas nas figuras acima.

Tabela 5.3 – Resultado da Otimização apresentada no exemplo 1

		Deslocamento e rotações do resultado otimizado			Deslocamento e rotações do resultado pós processado		
		h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)
Figura 5.2		2,50	-	-	2,21	-	-
Figura 5.3		-	0,035	-	-	0,048	-
Figura 5.4	$\omega = 0,5$	2,72	0,023	0,026	1,51	0,020	0,024
Figura 5.4	$\omega = 0,2$	1,77	0,020	0,020	2,10	0,023	0,023
Figura 5.4	$\omega = 0,05$	1,70	0,011	0,011	2,03	0,016	0,017
Figura 5.5		2,69	0,025	0,024	1,38	0,020	0,021

5.1.2 Exemplo 2 – Otimização sem utilizar acoplamento das camadas

Nos exemplos a seguir, os mesmos parâmetros dos exemplos anteriores são empregados, no entanto, sem utilizar o acoplamento entre as camadas, isto é, as três camadas podem obter uma configuração diferente uma da outra.

Os projetos de atuadores do item anterior foram repetidos para esta nova condição com ausência de acoplamento entre as camadas.

No primeiro exemplo é otimizado o deslocamento vertical do ponto O . O coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), é $\omega = 0,5$. A restrição de simetria é utilizada neste caso. O resultado obtido está ilustrado na Figura 5.6(a). A Figura 5.6(b) apresenta o pós processamento desse resultado. A Figura 5.6(c) mostra a configuração deformada para o caso de carga para deslocamento vertical. O valor do deslocamento vertical h obtido por essa configuração está na Tabela 5.4.

Figura 5.6 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

A seguir, a otimização é realizada em relação à rotação em torno do eixo X utilizando-se a restrição de simetria. O coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), vale $\omega = 0,5$. O resultado obtido na otimização pode ser observado na Figura 5.7(a), o pós processamento na Figura 5.7 (b) e a configuração deformada para o caso de carga na Figura 5.7(c). O valor da rotação θ_x está demonstrado na Tabela 5.4.

Figura 5.7 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

No próximo exemplo são otimizados simultaneamente o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. É realizada uma otimização com o valor do coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), $\omega = 0,5$ e com restrição de simetria. A Figura 5.8(a) ilustra o resultado da otimização, a Figura 5.8(b) o resultado

pós processado e a Figura 5.8(c) as configurações deformadas. Neste exemplo, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.4.

Figura 5.8 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

O mesmo exemplo anterior é novamente otimizado adicionando-se a restrição de padrão e retirando-se a restrição de simetria. O resultado da otimização e do pós processamento estão apresentados na Figura 5.9(a) e (b), respectivamente. As configurações deformadas estão ilustradas na Figura 5.9(c). Os deslocamentos gerados por essa configuração estão na Tabela 5.4.

Figura 5.9 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

A seguir, a Tabela 5.4 mostra os resultados das configurações obtidas pelas otimizações e pelos pós processamentos das imagens acima.

Tabela 5.4 – Resultado da Otimização apresentada no exemplo 2

	Deslocamento e rotações do resultado otimizado			Deslocamento e rotações do resultado pós processado		
	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)
Figura 5.6	3,72	-	-	3,67	-	-
Figura 5.7	-	0,046	-	-	0,032	-
Figura 5.8	4,17	0,041	0,036	3,67	0,032	0,034
Figura 5.9	4,09	0,036	0,036	3,92	0,034	0,034

5.1.3 Exemplo 3 – Otimização com camadas de PZT menores que camada intermediária

Para evitar que as camadas de PZT tendam a ir em direção ao engaste e visando uma fabricação mais simples, é realizada uma alteração no DFE para que não haja PZT colado na parte onde o alumínio intermediário está engastado. O DFE nas camadas superior e inferior passa a ter apenas 14 mm de lado como mostra a Figura 5.10.

Em todos os casos o valor do coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), é igual a $\omega = 0,5$.

Figura 5.10 – Domínio de projeto com as camadas de PZT reduzidas.

Inicialmente o projeto do atuador é feito com camadas desacopladas e restrição de simetria. É otimizado apenas o deslocamento vertical. A Figura 5.11(a) ilustra a configuração obtida neste exemplo, a Figura 5.11(b) ilustra o pós processamento e a Figura 5.11(c) apresenta a configuração deformada. O deslocamento obtido é apresentado na Tabela 5.5.

Figura 5.11 – (a) Resultado da otimização do deslocamento vertical sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

A seguir é otimizada a rotação em torno de X. A configuração obtida, o pós processamento e a configuração deformada estão ilustradas na Figura 5.12(a), (b) e (c), respectivamente. A rotação obtida por essa configuração está mostrada na Tabela 5.5.

Figura 5.12 – (a) Resultado da otimização da rotação em torno de X sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configuração deformada.

No próximo exemplo as camadas são novamente acopladas e a otimização é realizada simultaneamente para o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. A restrição de simetria é utilizada neste exemplo. A configuração obtida por essa otimização está demonstrada na Figura 5.13(a), o pós processamento na Figura 5.13(b) e as configurações deformadas na Figura 5.13(c). A Tabela 5.5 mostra os resultados dessa configuração.

Figura 5.13 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y com acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

Em seguida as camadas são desacopladas e a otimização é realizada simultaneamente para o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. O resultado dessa otimização está demonstrado na Figura 5.14(a), o resultado pós processado está na Figura 5.14(b) e as configurações deformadas estão na Figura 5.14(c). A Tabela 5.5 traz os resultados dessa configuração.

Figura 5.14 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de simetria com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

Finalmente, o mesmo caso anterior é repetido, mas neste momento com restrição de padrão. A otimização é realizada simultaneamente para o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. A configuração obtida nessa otimização está apresentada na Figura 5.15(a), o resultado pós processado está na Figura 5.15(b) e as configurações deformadas estão na Figura 5.15(c). A Tabela 5.5 traz os resultados obtidos por essa configuração.

Figura 5.15 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

A seguir é apresentada a Tabela 5.5 que contém os deslocamentos e rotações obtidas nas otimizações e pós processamentos dos casos do exemplo 3.

Tabela 5.5 – Resultados da Otimização apresentada no exemplo 3

	Deslocamento e rotações do resultado otimizado			Deslocamento e rotações do resultado pós processado		
	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)
Figura 5.11	1,91	-	-	2,91	-	-
Figura 5.12	-	0,021	-	-	0,045	-
Figura 5.13	2,9	0,026	0,026	3,1	0,028	0,028
Figura 5.14	3,72	0,03	0,036	3,52	0,029	0,035
Figura 5.15	3,55	0,032	0,032	3,43	0,033	0,032

5.1.4 Exemplo 4 – Otimização com restrição de padrão alterando valor inicial

Nos exemplos a seguir, o valor inicial das pseudodensidades foi alterado para uma configuração mais favorável à restrição de padrão. Nessa nova configuração do valor inicial, quatro regiões de 3,5 x 7 mm seguindo a restrição de padrão tiveram seu valor inicial das pseudodensidades alterado de 0,4 para 0,6. Essa nova configuração está ilustrada na Figura 5.16. Os exemplos a seguir são feitos com as camadas desacopladas e em todos os casos o valor do coeficiente de peso utilizado na função objetivo, Eq. (3.4), é igual a $\omega = 0,5$.

Figura 5.16 – Valor inicial favorável à restrição de padrão.

Primeiramente é realizada a otimização simultaneamente do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y utilizando o domínio de projeto demonstrado na Figura 5.1. A configuração obtida é apresentada na Figura 5.17(a), o pós processamento na Figura 5.17(b) e as configurações deformadas na Figura 5.17(c). A Tabela 5.6 traz os resultados obtidos por essa configuração.

Figura 5.17 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas e com restrição de padrão com valor inicial alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

No exemplo a seguir, o domínio de projeto é alterado para o apresentado na Figura 5.10 com as camadas de PZT menores que a de alumínio. São resolvidos três casos de otimização neste exemplo, todos otimizando simultaneamente o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. O primeiro com a restrição de volume $\theta_1 = 0,3$, o segundo com $\theta_1 = 0,4$ e o terceiro com $\theta_1 = 0,6$. A configuração obtida na otimização está ilustrada na Figura 5.18 (a), o pós processamento na Figura 5.18(b) e as configurações deformadas na Figura 5.18 (c). A Tabela 5.6 traz os resultados obtidos por essa configuração.

a) Camada 1

Camada 2

Camada 3

 $\theta_1 = 0,3$ $\theta_1 = 0,4$ $\theta_1 = 0,6$

b) Camada 1

Camada 2

Camada 3

 $\theta_1 = 0,3$ $\theta_1 = 0,4$ $\theta_1 = 0,6$

Figura 5.18 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado e com camadas de PZT menores; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

A partir do próximo exemplo, as condições de contorno do domínio de projeto também são alteradas. O engaste na camada de alumínio fica restrito apenas aos elementos que recebem o valor inicial das pseudodensidades igual a 0,6. Esse novo domínio de projeto está ilustrado na Figura 5.19, tanto para camadas de PZT de mesmo tamanho (a) e menores (b) que a camada de alumínio.

Figura 5.19 – Domínio de projeto com engaste alterado (a) para camadas de PZT de mesmo tamanho da camada de alumínio; (b) para camadas de PZT menores que a camada de alumínio.

O primeiro exemplo utiliza o domínio de projeto da Figura 5.19(a). A otimização é realizada simultaneamente para o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. A configuração obtida nessa otimização está apresentada na Figura 5.20(a), o pós processamento está na Figura 5.20(b) e as configurações deformadas na Figura 5.20(c). Os resultados obtidos por essa otimização estão na Tabela 5.6.

Figura 5.20 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado e com engaste alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

Por fim, o mesmo exemplo é repetido utilizando-se o domínio de projeto da Figura 5.19(b) com camadas de PZT menores. A otimização é realizada simultaneamente para o deslocamento vertical e as rotações em torno de X e Y. A configuração obtida, o pós processamento e as configurações deformadas obtidas por essa otimização estão ilustradas na Figura 5.21(a), (b) e (c), respectivamente. Os resultados dessa configuração estão na Tabela 5.6.

Figura 5.21 – (a) Resultado da otimização simultânea do deslocamento vertical e das rotações em torno de X e Y sem acoplamento das camadas, com restrição de padrão, com valor inicial alterado, com camadas de PZT menores e com engaste alterado; (b) Resultado pós processado; (c) Configurações deformadas.

Segue abaixo a Tabela 5.6 que contém os resultados obtidos nas otimizações e pós processamentos do exemplo 4.

Tabela 5.6 – Resultados da Otimização apresentada no exemplo 4

	Deslocamento e rotações do resultado otimizado			Deslocamento e rotações do resultado pós processado		
	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)	h (μm)	θ_x ($^\circ$)	θ_y ($^\circ$)
Figura 5.17	4,77	0,038	0,038	4,65	0,037	0,037
Figura 5.18 $\theta_1 = 0,3$	2,64	0,023	0,026	3,22	0,031	0,031
Figura 5.18 $\theta_1 = 0,4$	4,08	0,033	0,033	4,05	0,034	0,034
Figura 5.18 $\theta_1 = 0,6$	5,05	0,040	0,040	4,60	0,036	0,036
Figura 5.20	5,19	0,045	0,045	5,06	0,041	0,041
Figura 5.21	4,87	0,040	0,040	4,98	0,040	0,040

5.2 Fabricação e caracterização de protótipo

A configuração utilizada para a fabricação do protótipo é a ilustrada na Figura 5.14. Para maior facilidade na fabricação, a configuração obtida pelo pós processamento é submetida a um processo de atenuação nas regiões das bordas. Nesse processo eliminam-se os “degraus” formados pelos elementos com presença de material nas regiões das bordas da configuração pós processada, comuns em configurações geradas pelo MOT, diminuindo a quantidade de linhas necessárias para se desenhar o contorno da configuração. A Figura 5.22 ilustra o resultado desse processo proposto por MA *et al.* (2006).

Figura 5.22 – Resultado do processo de atenuação das bordas na configuração pós processada.

A partir dessa configuração, os desenhos de fabricação do protótipo são gerados e são apresentados no Apêndice E. Como a aplicação de potencial elétrico é feita separadamente em cada região da cerâmica piezelétrica, ela é dividida nos seus eixos de simetria e oito peças iguais são fabricadas. Na camada de alumínio, oito regiões de material foram adicionadas para fazer o engaste da peça na base de poliamida. A Figura 5.23 ilustra as peças obtidas pelo processo de corte a laser e a montagem final do protótipo na base usinada.

Figura 5.23 – Protótipo fabricado.

A Figura 5.24 ilustra os pontos em que as medidas utilizando o sensor fotônico são realizadas. O ponto O_1 é utilizado para medição do caso de carga de deslocamento vertical, o ponto O_2 é utilizado para a medição do caso de carga de rotação em torno do eixo X e o ponto O_3 é utilizado para a medição do caso de carga de rotação do eixo Y. Os pontos utilizados para medição nos casos de carga de rotação se encontram um pouco deslocados em relação à junção das duas placas de cerâmica, pois nessa região a luz refletida para a medição do sensor fotônico é mais baixa do que o necessário para a realização das medições.

Figura 5.24 – Pontos utilizados para a medição com sensor fotônico.

A Tabela 5.7 traz os deslocamentos obtidos pelo protótipo e medidos pelo sensor fotônico com a aplicação de 35 V de tensão elétrica contínua. Para comparar com os deslocamentos obtidos pelo protótipo, é feita a simulação da configuração apresentada na Figura 5.22 com o software Ansys. Para a simulação, é utilizado o sólido tetraédrico de 10 nós SOLID187 para a camada de alumínio e o sólido tetraédrico de 10 nós SOLID98 para as camadas de cerâmica piezelétrica. Nessa simulação é aplicada uma tensão elétrica de 35 V em cada camada e os três casos de carga são simulados. A dimensão dos elementos utilizados é igual à metade da espessura das camadas, isto é, 0,125 mm para a camada de alumínio e 0,2 mm para a camada de cerâmica piezelétrica.

A Figura 5.25 ilustra as configurações deformadas e as curvas de nível com os deslocamentos verticais em cada um dos casos de carga. A Tabela 5.7 mostra os deslocamentos obtidos pela simulação nos pontos O_1 , O_2 e O_3 no caso de carga de

deslocamento vertical, rotação em torno de X e rotação em torno de Y, respectivamente, e a comparação entre este resultado e o resultado obtido pelo protótipo.

Tabela 5.7 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo protótipo e pela simulação realizada no Ansys

Ponto	Deslocamento obtido pelo protótipo fabricado (μm)	Deslocamento obtido no Ansys (μm)	Erro
O ₁	0,46	1,29	64%
O ₂	0,04	0,44	91%
O ₃	0,14	0,52	73%

Figura 5.25 – Simulação do protótipo no Ansys

Os deslocamentos obtidos pelo protótipo medidos pelo sensor fotônico são muito menores que os deslocamentos obtidos pelo Ansys. Isso se deve aos erros de construção do protótipo, principalmente pela presença da cola epóxi. Se uma camada muito grande de cola é colocada, introduz-se no atuador um terceiro componente em quantidade suficiente para alterar o seu deslocamento, visto que a cola não é considerada na simulação realizada no Ansys. Em contraposição, se a cola for aplicada em uma quantidade inferior à necessária, a cerâmica piezelétrica

não fica completamente aderida ao alumínio, o que diminui consideravelmente o deslocamento obtido pelo protótipo. Como a cola epóxi é isolante, uma quantidade pequena de cola foi colocada entre o alumínio e a cerâmica piezelétrica para que se mantivesse o contato elétrico, uma vez que a camada de alumínio serve como eletrodo para a cerâmica.

Para simular o caso em que partes da cerâmica estão coladas ao alumínio e parte não está colada, é feita a simulação introduzindo no domínio algumas regiões com a presença de uma camada de cola de resina epóxi de 100 μm de espessura, conforme mostra a Figura 5.26. A Tabela 5.8 traz as propriedades da resina epóxi utilizada. Os deslocamentos obtidos por essa nova configuração para os mesmos pontos utilizados na medição dos deslocamentos do protótipo com o sensor fotônico estão na Tabela 5.9. As configurações deformadas e as curvas de níveis com o deslocamento vertical para cada caso de carga estão na Figura 5.27.

Figura 5.26 – Aplicação de cola epóxi em regiões espalhadas no domínio.

Tabela 5.8 – Propriedades da resina epóxi

Propriedade	Valor
E (GPa)	1,5
Poisson	0,38
ρ (kg/m ³)	1150

Tabela 5.9 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo protótipo e pela simulação realizada no Ansys

Ponto	Deslocamento medido no protótipo fabricado (μm)	Deslocamento obtido no Ansys (μm)	Erro
O ₁	0,46	0,73	37%
O ₂	0,04	0,23	83%
O ₃	0,14	0,19	25%

Figura 5.27 – Simulação do protótipo no Ansys adicionada a cola epóxi.

A Tabela 5.10 mostra a comparação entre os deslocamentos obtidos pelas simulações no Ansys com e sem a cola epóxi. Nota-se que os deslocamentos diminuíram consideravelmente e, portanto, a causa dos baixos valores de deslocamento obtidos pelo protótipo na medição com sensor fotônico é a irregularidade na camada de cola aplicada.

Tabela 5.10 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelas simulações no Ansys com e sem cola epóxi

Ponto	Deslocamento obtido na simulação sem cola epóxi (μm)	Deslocamento obtido na simulação com cola epóxi (μm)	Diferença
O ₁	1,29	0,73	43%
O ₂	0,44	0,23	47%
O ₃	0,52	0,19	64%

6 Conclusões

Este trabalho estuda a aplicação de um método sistemático para o projeto de atuadores piezelétricos com múltiplos graus de liberdade utilizando a OT. Os resultados obtidos indicam que o método é eficaz na obtenção de uma geometria que atenda às restrições do problema.

A técnica de projeção utilizada com a continuação garante a tendência de resultados com geometrias contínuas, sem a presença de instabilidades. Para diminuir a quantidade de cinza após as iterações utilizando a técnica de projeção, algumas iterações podem ser realizadas sem a sua utilização, aumentando-se o valor do coeficiente de penalização elástico p_c .

O aparecimento de estruturas delgadas (*hinges*) na solução final acontece onde a estrutura deve ter máxima flexibilidade. Em alguns casos, a conexão do engaste com a área central do microespelho foi realizada através de áreas aparentemente com ausência de material. Isso se deve ao fato de a variável ρ_1 não poder assumir o valor 0, mas sim um valor mínimo de 0,001.

A restrição de quantidade de material utilizado por camada é determinante para a configuração final. Quando se diminui a quantidade de volume empregado surgem áreas delgadas cada vez mais longas em direção ao ponto que se deseja otimizar os deslocamentos e rotações.

Utilizar altos valores de corte para o pós processamento faz com que o resultado pós processado contenha muitos *hinges* e pouca quantidade de material, tornando a configuração descontínua, de difícil fabricação e com deslocamentos e rotações menores.

A utilização de valores iniciais e condições de contorno propícias ao problema, como demonstrado na seção 5.2.4 tornam os resultados mais satisfatórios, aumentando o deslocamento e as rotações geradas.

6.1 Trabalhos futuros

Existem muitos assuntos relacionados ao projeto de atuadores de múltiplos graus de liberdade utilizando o Método de Otimização Topológica para serem explorados futuramente. O elemento utilizado neste trabalho possibilita a otimização

dos graus de liberdade de deslocamento ao longo do eixo X e do eixo Y. Além disso, por ser um elemento de oito nós, pode ser utilizado também como elemento de casca.

Outra abordagem a ser explorada é a utilização de materiais compósitos e a otimização dos deslocamentos gerados mediante a alteração da orientação da fibra do compósito ao longo do domínio de projeto.

Referências Bibliográficas

AHMAD, S.; IRONS, B.; ZIENKIEWICZ, O. **Analysis of thick and thin shell structures by curved elements**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, p. 419–451, 1970.

ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A. M. **Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method**. Journal Of Computational Physics, v. 194, n. 1, p. 363–393, 2004.

ALLIK, H.; HUGHES, T. J. **Finite element method for piezoelectric vibration**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, p. 151–157, 1970.

AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. **An optimal-design problem with perimeter penalization**. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, SPRINGER VERLAG, 175 FIFTH AVE, NEW YORK, NY 10010, v. 1, n. 1, p. 55–69, 1993. ISSN 0944-2669.

ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S. **Designing compliant mechanisms**. Mechanical Engineering, v. 117, n. 11, p. 93–96, 1995.

ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. B. **A methodical approach to the design of compliant micromechanisms**. In: Technical Digest, Solid-State Sensor and Actuator Workshop. Hilton Head Island, SC, USA: [s.n.], 1994. p. 189–192.

BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. **A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators**. Smart Materials and Structures, v. 17, 2008.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BATHE, K. J.; BREZZI, F.; CHO, S. W. **The MITC7 and MITC9 plate bending elements.** Computers & Structures, v. 32, n. 3-4, p. 797–814, 1989.

BATHE, K. J.; BUCALEM, M. L.; BREZZI, F. **Displacement and stress convergence of our MITC plate bending elements.** Engineering Computations, v. 7, p. 291–302, 1990.

BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. **A 4-node plate bending element based on mindlin reissner plate-theory and a mixed interpolation.** International Journal For Numerical Methods In Engineering, v. 21, n. 2, p. 367–383, 1985.

BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. **A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components.** International Journal For Numerical Methods In Engineering, v. 22, n. 3, p. 697–722, 1986.

BATHE, K. J.; IOSILEVICH, A.; CHAPELLE, D. **An evaluation of the MITC shell elements.** Computers & Structures, v. 75, n. 1, p. 1–30, 2000.

BENDSØE, M. P. **Optimal shape design as a material distribution problem.** Structural Optimization, v. 1, p. 192–202, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.** Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, Elsevier Science Sa Lausanne, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization.** 2. ed. Berlin: Springer, 2003.

BENDSØE, M.; SOARES, C. **Topology design of structures.** Dordrecht: NATO ASI, Kluwer Academic Publishers, 1993.

BENJEDDOU, A. **Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 76, n. 1-3, p. 347–363, 2000.

BETTI, E. **Teoria della Elasticità**. [S.l.]: Nuovo Cimento, 1872. 5-21 p.

BRUYNEEL M., DUYSINX P., FLEURY C. **A family of MMA approximations for structural optimization**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v.24, n. 4, p. 263–276, 2002.

BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J. **Higher-order MITC general shell elements**. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v. 36, n. 21, p. 3729–3754, 1993.

CARBONARI, R. C. ; SILVA E. C. N. **Design of Flextensional Piezoelectric Actuators Using the Topology Optimization Based on the SIMP Method**. In: XXIV CILAMCE (Congresso Ibero-Latino-Americano em Métodos Computacionais em Engenharia), 2003, Ouro Preto. Proceedings of XXIV CILAMCE (Congresso Ibero-Latino-Americano em Métodos Computacionais em Engenharia), 2003.

CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. **Topology optimization design of functionally graded bimorph-type piezoelectric actuators**. Smart Materials & Structures, Iop Publishing Ltd, v. 16, n. 6, p. 2607–2620, 2007.

CARRERA, E. **Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells**. Applied Mechanics Reviews - ASME, v. 53, n. 3, p. 287–308, 2003.

CARRERA, E. **An improved reissner-mindlin-type model for the electromechanical analysis of multilayered plates including piezo-layers**. Journal Of Intelligent Material Systems And Structures, Technomic Publ Co Inc, v. 8, n. 3, p. 232–248, 1997.

CARRERA, E. **Theories and finite elements for multilayered, an isotropic, composite plates and shells**. Archives Of Computational Methods In Engineering, Int Center Numerical Methods Engineering (Cimne), v. 9, n. 2, p. 87–140, 2002.

CHAPELLE, D.; BATHE, K. J. **Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures.** Computers & Structures, v. 66, n. 1, p. 19–36, 1998.

CHEN, S.; GONELLA, S.; CHEN, W.; W.K., L. **A level set approach for optimal design of smart energy harvesters.** Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, p. (published online), 2010.

CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. **Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints.** Finite Elements In Analysis And Design, v. 21, n. 4, p. 239–251, 1996.

CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. **On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints.** Finite Elements In Analysis And Design, v. 24, n. 4, p. 197–212, 1997.

DIAZ, A.; SIGMUND, O. **Checkerboard patterns in layout optimization.** Structural Optimization, SPRINGER VERLAG, 175 FIFTH AVE, NEW YORK, NY 10010, v. 10, n. 1, p. 40–45, 1995. ISSN 0934-4373.

ESCHENAUER, H. A.; KOBOLEV, V. V.; SCHUMACHER, A. **Bubble method for topology and shape optimization of structures.** Structural Optimization, Springer Verlag, v. 8, n. 1, p. 42–51, 1994.

FERNANDES, A.; POUGET, J. **Accurate modelling of piezoelectric plates: single-layered plate.** Archive Of Applied Mechanics, Springer-Verlag, v. 71, n. 8, p. 509–524, 2001.

FERNANDES, A.; POUGET, J. **Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 84, n. 22-23, p. 1459–1470, 2006.

FILHOL, F. et al. **Resonant micro-mirror excited by a thin-film piezoelectric actuator for fast optical beam scanning.** Elsevier Science. Grenoble Cedex, 2005.

FRECKER, M.; KIKUCHI, N.; KOTA, S. **Topology optimization of compliant mechanisms with multiple outputs.** Structural Optimization, v. 17, n. 4, p. 269–278, 1999.

FRECKER, M. I.; ANANTHASURESH, G. K.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N.; KOTA, S. **Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization.** Journal of Mechanical Design, American Society of Mechanical Engineers, v. 119, n. 2, p. 238–245, 1997.

GAUDENZI, P.; BATHE, K. J. **An iterative finite-element procedure for the analysis of piezoelectric continua.** Journal Of Intelligent Material Systems And Structures, Technomic Publ Co Inc, v. 6, n. 2, p. 266–273, 1995.

GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. **Boundary Element Methods for Engineers and Scientists.** [S.l.]: Springer, 2003.

GUEST, J.; PREVOST, J.; BELYTSCHKO, T. **Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, JOHN WILEY & SONS LTD, THEATRIUM, SOUTHERN GATE, CHICHESTER PO19 8SQ, W SUSSEX, ENGLAND, v. 61, n. 2, p. 238–254, 2004. ISSN 0029-5981.

HA, K. H. **Finite-element analysis of sandwich plates - an overview.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 37, n. 4, p. 397–403, 1990.

HAFTKA, R. T.; GURDAL, Z.; KAMAT, M. P. **Elements of Structural Optimization.** 2. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1990.

IP, K. H.; TSE, P. C. **Optimal configuration of a piezoelectric patch for vibration control of isotropic rectangular plates.** Smart Materials & Structures, IOP Publishing Ltd, v. 10, n. 2, p. 395–403, 2001.

JOG, C.S.; HABER, R. B. **Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design.** Computer Methods In Applied

Mechanics And Engineering, Elsevier Science Sa Lausanne, v. 130, n. 3-4, p. 203–226, 1996.

KANG, Z.; TONG, L. Y. **Integrated optimization of material layout and control voltage for piezoelectric laminated plates.** Journal Of Intelligent Material Systems And Structures, Sage Publications Ltd, v. 19, n. 8, p. 889–904, 2008.

KANG, Z.; TONG, L. Y. **Topology optimization-based distribution design of actuation voltage instatic shape control of plates.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 86, n. 19-20, p. 1885–1893, 2008.

KANG, Z.; WANG, X. **Topology optimization of bending actuators with multilayer piezoelectric material.** Smart Materials and Structures, v. 19, n. 7, 2010.

KIM, J. E.; KIM, D. S.; MA, P. S.; KIM Y. Y. **Multi-physics interpolation for the topology optimization of piezoelectric systems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, CMAME-D-09-00808R2, Seoul, 2010

KOBAYASHI, T.; TSAUR, J.; MAEDA, R. **Fabrication of Optical Micro “scanner” driven by PZT actuators.** Japanese Journal of Applied Physics. Tsukuba, 2005.

KÖGL, M.; BUCALEM, M. L. **Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements.** Computers & Structures, v. 83, n. 15-16, p. 1153–1163, 2005.

KÖGL, M.; SILVA, E. C. N. **Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators.** Smart Materials & Structures, v. 14, n. 2, p. 387–399, 2005.

KÖGL, M.; SILVA, E.; BUCALEM, M. **Design of piezoelectric plate and shell actuators using topology optimization.** In: ISSMO. Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5). Lido di Jesolo, Italy: Italian Polytechnic Press, p. 207–8, 2003.

KOZLOWSKI, W.; MRÓZ, Z. Optimal design of solid plates. *Int. J. Solids Struct.*, v. 5, p. 781–794, 1969.

LAMMERING, R. **The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control.** *Computers & Structures*, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 41, n. 5, p. 1101–1109, 1991.

LEE, S. Y.; KO, B.; YANG, W. S. **Theoretical modeling, experiments and optimization of piezoelectric multimorph.** *Smart Materials & Structures*, IOP Publishing Ltd, v. 14, n. 6, p. 1343–1352, 2005.

LIU, J. S.; PARKS, G. T.; CLARKSON, P. J. **Metamorphic development: a new topology optimization method for continuum structures.** *Structural And Multidisciplinary Optimization*, v. 20, n. 4, p. 288–300, 2000.

LONG, C. S.; LOVEDAY, P. W.; GROENWOLD, A. A. **Effects of finite element formulation on optimal plate and shell structural topologies.** *Finite Elements In Analysis and Design*, Elsevier Science Bv, v. 45, n. 11, p. 817–825, set. 2009.

MA, Z.-D.; WANG, H.; KIKUCHI, N.; PIERRE, C.; RAJU, B. **Experimental validation and prototyping of optimum designs obtained from topology optimization.** *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 31, n. 5, p. 333–343, 2006.

MAEDA, R. et al. **Preparation and application of Lead Zirconate Titanate (PZT) films deposited by hybrid process: Sol-Gel method and Laser Ablation.** *Japanese Journal of Applied Physics* . Tsukuba, 2002.

MATSUI, K.; TERADA, K. **Continuous approximation of material distribution for topology optimization.** *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, John Wiley & Sons Ltd, v. 59, n. 14, p. 1925–1944, abr. 2004.

MINDLIN, R. D. **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.** *Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme*, Asme-Amer Soc Mechanical Eng, v. 18, n. 1, p. 31–38, 1951.

MOITA, J. M. S.; CORREIA, V. M. F.; MARTINS, P. G.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M. **Optimal design in vibration control of adaptive structures using a simulated annealing algorithm.** Composite Structures, Elsevier Sci Ltd, v. 75, n. 1-4, p. 79–87, 2006.

MUKHERJEE, A.; JOSHI, S. **Piezoelectric sensor and actuator spatial design for shape control of piezolaminated plates.** AIAA Journal, Amer Inst Aeronaut Astronaut, v. 40, n. 6, p. 1204–1210, 2002.

MURAKAMI, H. **Laminated composite plate-theory with improved in plane responses.** Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme, v. 53, n. 3, p. 661–666, 1986.

NAILLON, M.; COURSAINT, R. H.; BESNIER, F. **Analysis of piezoelectric structures by a finite-element method.** Acta Electronica, Lep, v. 25, n. 4, p. 341–362, 1983.

NISHIWAKI, S.; FRECKER, M. I.; MIN, S. J.; KIKUCHI, N. **Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method.** International Journal For Numerical Methods In Engineering, John Wiley & Sons Ltd, v. 42, n. 3, p. 535–559, 1998.

NISHIWAKI, S.; SILVA, E. C. N.; IZUI, K.; YOSHIMURA, M. **Structural Topology Optimization of Piezoelectric Actuators Using Multiple Deformations.** Optimization Symposium, v. 6, p. 149–154, 2004.

NOVOTNY, A. A.; FEIJOO, R. A.; TAROCO, E.; PADRA, C. **Topological sensitivity analysis.** Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, v. 192, n. 7-8, p. PII S0045–7825 (02) 00599–6, 2003.

NOWACKI, W. **Electromagnetic interactions inelastic solids.** In: _____. Wien: Springer, 1979. cap. Chapter I - Foundations of Linear Piezoelectricity, p. 105–157.

OLHOFF, N. **Optimal design of vibrating circular plates.** Int. J. Solids Struct., v. 6, p. 139–156, 1970.

PEDERSEN, N. L. **On topology optimization of plates with prestress.** International Journal For Numerical Methods In Engineering, John Wiley & Sons Ltd, v. 51, n. 2, p. 225–239, 2001.

POULSEN, T. **A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization.** Structural and Multidisciplinary Optimization, SPRINGER VERLAG, 175 FIFTH AVE, NEW YORK, NY 10010 USA, v. 24, n. 5, p. 396–399, 2002. ISSN 1615-147X.

REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.** [S.I.]: Oxford University Press, Oxford, U.K., 2004.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method.** Third. [S.I.]: McGraw-Hill, NY, 2006.

REISSNER, E. **The effect of transverses hear deformation on the bending of elastic plates.** Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme, Asme-Amer Soc Mechanical Eng, v. 12, n. 2, p. A69 – A77, 1945.

ROBBINS, D. H.; REDDY, J. N. **Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 41, n. 2, p. 265–279, 1991.

ROZVANY, G. I. N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. **Generalized shape optimization without homogenization.** Structural Optimization, Springer Verlag, v. 4, n. 3-4, p. 250–252, 1992.

RUPP, C.; EVGRAFOV, A.; MAUTE, K.; DUNN, M. **Design of piezoelectric energy harvesting systems: A topology optimization approach based on multilayer plates and shells.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 0, p. 1–17, 2009.

SANCHEZ-ROJAS, J. L.; HERNANDO, J.; DONOSO, A.; BELLIDO, J. C.; MANZANEQUE, T.; ABABNEH, A.; SEIDEL, H.; SCHMID, U. **Modal optimization and filtering in piezoelectric microplate resonators**. Journal of Micromechanics and Microengineering, v. 20, n. 5, p. 055027, maio 2010.

SARAVANOS, D. A. **Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures**. AIAA Journal, Amer Inst Aeronaut Astronaut, v. 35, n. 8, p. 1327–1333, 1997.

SARAVANOS, D. A.; HEYLIGER, P. R.; HOPKINS, D. A. **Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates**. International Journal Of Solids And Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 34, n. 3, p. 359–378, 1997.

SEDAGHATI, R.; ZABIHOLLAH, A.; AHARI, M. **Sensitivity analysis and optimal design of smart piezolaminated composite beams**. AIAA Journal, Amer Inst Aeronaut Astronaut, v. 44, n. 12, p. 2987–2996, 2006.

SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, A. **Structural boundary design via levelset and immersed interface methods**. Journal Of Computational Physics, v. 163, n. 2, p. 489–528, 2000.

SIGMUND, O. **On the design of compliant mechanisms using topology optimization**. Mechanics of Structures and Machines, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997.

SILVA, E. C. N.; FONSECA, J. S. O.; ESPINOSA, F. M. de; CRUMM, A. T.; BRADY, G. A.; HALLORAN, J. W.; KIKUCHI, N. **Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization - part i**. Archives Of Computational Methods In Engineering, Int Center Numerical Methods Engineering (Cimne), v. 6, n. 2, p. 117–182, 1999.

SILVA, E. C. N.; FONSECA, J. S. O.; KIKUCHI, N. **Optimal design of piezoelectric microstructures**. Computational Mechanics, Springer Verlag, v. 19, n. 5, p. 397–410, 1997.

SILVA, E. C. N.; KIKUCHI, N. **Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization - part iii**. Archives Of Computational Methods In Engineering, Int Center Numerical Methods Engineering (Cimne), v. 6, n. 4, p. 305–329, 1999.

SILVA, E. C. N.; KIKUCHI, N. **Design of piezoelectric transducers using topology optimization**. Smart Materials & Structures, Iop Publishing Ltd, v. 8, n. 3, p. 350–364, 1999.

SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. **Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization - part ii**. Archives Of Computational Methods In Engineering, Int Center Numerical Methods Engineering (Cimne), v. 6, n. 3, p. 191–222, 1999.

SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. **Topology optimization design of flexensional actuators**. IEEE Transactions On Ultrasonics Ferroelectrics And Frequency Control, IEEE - Inst Electrical Electronics Engineers Inc, v. 47, n. 3, p. 657–671, 2000.

SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M.; CORREIA, V. M. F. **Optimal design of piezolaminated structures**. Composite Structures, Elsevier Sci Ltd, v. 47, n. 1-4, p. 625–634, 1999.

SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. **On the topological derivative in shape optimization**. Siam Journal On Control And Optimization, v. 37, n. 4, p. 1251–1272, 1999.

SOTO, C. A.; DIAZ, A. R. **On the modeling of ribbed plates for shape optimization**. Structural Optimization, Springer Verlag, v. 6, n. 3, p. 175–188, 1993.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. **On the trajectories of penalization methods for topology optimization.** Structural And Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag, v. 21, n. 2, p. 128–139, 2001.

SULEMAN, A.; VENKAYYA, V. B. **A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers.** Journal Of Intelligent Material Systems And Structures, Technomic Publ Co Inc, v. 6, n. 6, p. 776–782, 1995.

SUN, D. C.; TONG, L. Y. **Modal control of smart shells by optimized discretely distributed piezoelectric transducers.** International Journal Of Solids And Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 38, n. 18, p. 3281–3299, 2001.

SUN, D. C.; TONG, L. Y. **Design optimization of piezoelectric actuator patterns for static shape control of smart plates.** Smart Materials & Structures, IOP Publishing Ltd, v. 14, n. 6, p. 1353–1362, 2005.

SVANBERG, K. **The method of moving asymptotes a new method for structural optimization.** International Journal for Numerical Methods In Engineering, v. 24, n. 2, p. 359–373, 1987.

TENEK, L. H.; HAGIWARA, I. **Optimization of material distribution within isotropic and anisotropic plates using homogenization.** Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, Elsevier Science Sa Lausanne, v. 109, n. 1-2, p. 155–167, 1993.

TIERSTEN, H. **Hamilton's principle for linear piezoelectric media.** Proceedings of the IEEE, v. 55, n. 8, p. 1523–1524, 1967. ISSN 0018-9219.

TSAUR, J. et al. **Design and fabrication of 1D and 2D micro “scanners” actuated by double layered Lead Zirconate Titanate (PZT) bimorph beams.** Japanese Journal of Applied Physics. Tsukuba, 2002.

TZOU, H. S.; TSENG, C. I. **Distributed piezoelectric sensor actuator design for dynamic measurement control of distributed parameter - systems - a piezoelectric finite-element approach.** Journal Of Sound And Vibration, Academic Press Ltd, v. 138, n. 1, p. 17–34, 1990.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications.** [S.l.]: McGraw-Hill, New York, EUA, 1984.

VARADAN, V. V.; KIM, J.; VARADAN, V. K. **Optimal placement of piezoelectric actuators for active noise control.** AIAA Journal, Amer Inst Aeronaut Astronaut, v. 35, n. 3, p. 526–533, 1997.

VATANABE, S. L. ; PIRES, R. F. ; NAKASONE, P. H. ; SILVA, E. C. N. **New Configurations of Oscillatory Flow Pumps Using Bimorph Piezoelectric Actuators.** In: 15th SPIE Annual International Symposium Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, 2008, San Diego. Proceedings of 15th SPIE Annual International Symposium Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, 2008. v. 6930. p. 1-11.

YEE, Y. et al. **PZT actuated micromirror for nano-tracking of laser beam for high-density optical data storage.** The 13th Annual International Conference on MEMS. Seoul, 2000.

ZALLO, A.; GAUDENZI, P. **Finite element models for laminated shells with actuation capability.** Computers & Structures, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 81, n. 8-11, p. 1059–1069, 2003.

ZIENKIEWICZ. **The Finite Element Method.** 3. ed. London: McGrall-Hill, 1977.

Apêndice A Formulação do elemento de placa piezelétrica

A.1 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Estruturas de Placas

Das várias abordagens apresentadas na literatura (ZIENKIEWICZ, 1977), as mais empregadas são a teoria de Kirchhoff-Love e a teoria de Reissner-Mindlin (REISSNER, 1945; MINDLIN, 1951). A primeira considera que a espessura da placa deve ser muito menor do que seu comprimento e largura e que, uma linha reta, normal à superfície média da placa em sua posição indeformada deverá permanecer reta e continuar normal à superfície média na posição deformada. Assim, apenas as deformações por flexão estariam sendo consideradas.

O elemento de placa utilizado neste trabalho segue a teoria de Reissner-Mindlin, onde são consideradas as deformações por flexão e cisalhamento. Essa teoria admite que as placas sejam ligeiramente espessas e sua cinemática considera que uma linha reta, normal à superfície média da placa em sua posição indeformada, deverá permanecer reta, mas não necessariamente normal à superfície média na posição deformada.

A.2 Geometria e Cinemática do Elemento

Para formular o elemento de placa utilizado neste trabalho, deve-se inicialmente definir três diferentes sistemas de coordenadas: o sistema global (x, y, z) , sistema natural (r, s, t) , e o sistema local (x', y', z') , como mostrado na Figura A.1. O sistema de coordenada global é definido pelos eixos cartesianos e é adotado para descrever as equações governantes e os graus de liberdade do sistema. O sistema de coordenada natural facilita a criação das matrizes de rigidez e dos vetores de força utilizando a integração numérica e pode ser definido a partir da sequência dos nós em cada elemento. O sistema de coordenada local é utilizado para descrever a geometria do elemento e as propriedades do material. Este sistema é definido, em cada nó, pelos versores unitários $\{V_1^k, V_2^k, V_3^k\}$ representando (x', y', z') , respectivamente, e o cálculo para obtenção deste sistema é apresentado no Apêndice A.5.

Figura A.1 – Sistema de coordenada para um elemento de casca piezelétrico de 8 nós.

A cinemática de um elemento de placa de 8 nós é descrita pela interpolação de sua geometria e de suas variáveis de deslocamento. As coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento de placa utilizado são dadas por (BATHE, 1996; REDDY, 2004):

$$\begin{Bmatrix} {}^l x \\ {}^l y \\ {}^l z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) \left(\begin{Bmatrix} {}^l x_k \\ {}^l y_k \\ {}^l z_k \end{Bmatrix} + t \frac{h_k}{2} \begin{Bmatrix} {}^l V_{nx}^k \\ {}^l V_{ny}^k \\ {}^l V_{nz}^k \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{A.1})$$

onde $N_k(r, s)$ são as funções de forma para os nós $k = 1, \dots, 8$ (BATHE, 1996), r, s , e t são as coordenadas isoparamétricas (coordenadas naturais), $({}^l x, {}^l y, {}^l z)$ é o vetor que define as coordenadas cartesianas de qualquer ponto no elemento, $({}^l x_k, {}^l y_k, {}^l z_k)$ é o vetor que define as coordenadas nodais, h_k é a espessura do elemento no nó k e ${}^l V_{nx}^k, {}^l V_{ny}^k, {}^l V_{nz}^k$ são as componentes do vetor diretor ${}^l \mathbf{V}_n^k$ para o nó k , sendo que todos esses vetores são definidos no sistema global de coordenadas.

O sobrescrito à esquerda l denota a configuração do elemento, podendo ser configuração inicial ou deformada adotando valores iguais a 0 ou 1, respectivamente.

A.3 Campo de Deslocamentos

Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento contínuo de placa são obtidos através da diferença entre a coordenada do ponto após e antes da deformação (BATHE, 1996):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1x \\ {}^1y \\ {}^1z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^0x \\ {}^0y \\ {}^0z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) \left(\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + t \frac{h_k}{2} \begin{Bmatrix} V_{nx}^k \\ V_{ny}^k \\ V_{nz}^k \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{V}_n^k = \{V_{nx}^k \ V_{ny}^k \ V_{nz}^k\}^T$ representa a diferença entre os vetores diretores antes e depois da deformação:

$$\mathbf{V}_n^k = {}^1\mathbf{V}_n^k - {}^0\mathbf{V}_n^k. \quad (\text{A.3})$$

Definindo α_k e β_k como as rotações do vetor diretor ${}^0\mathbf{V}_n^k$ em torno dos vetores ${}^0\mathbf{V}_1^k$ e ${}^0\mathbf{V}_2^k$ (que definem o sistema local), a expressão Eq. (A.3) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^0\mathbf{V}_2^k \alpha_k - {}^0\mathbf{V}_1^k \beta_k. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se a Eq. (A.4) na Eq. (A.2) chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) \left(\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + t \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} -V_{2x}^k & V_{1x}^k \\ -V_{2y}^k & V_{1y}^k \\ -V_{2z}^k & V_{1z}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{A.5})$$

que pode ser escrito como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \dots \ \mathbf{A}_k] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{u}^e \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2x}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1x}^k \\ 0 & N_k & 0 & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2y}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1y}^k \\ 0 & 0 & N_k & -t\frac{h_k}{2}N_k V_{2z}^k & t\frac{h_k}{2}N_k V_{1z}^k \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \{u_k \quad v_k \quad w_k \quad \alpha_k \quad \beta_k\}^T. \quad (\text{A.8})$$

A obtenção do sistema local (que é um sistema ortonormal) $\{ {}^0\mathbf{V}_n^k, {}^0\mathbf{V}_1^k, {}^0\mathbf{V}_2^k \}$ está descrita no Apêndice A.5. Assim, define-se o campo de deslocamentos de um elemento genérico de placa composto por 5 graus de liberdade mecânicos por nó, considerando 3 componentes de translação dos nós da superfície média u_k , v_k e w_k (em coordenadas globais), e duas rotações α_k e β_k (em coordenadas locais) do vetor nodal $\mathbf{V}_n^k$ em relação aos vetores tangentes nodais $\mathbf{V}_2^k$ e $\mathbf{V}_1^k$.

A.4 Campo de Deformações

Considerando que as equações constitutivas são definidas para o sistema de coordenada local, os índices 1, 2 e 3 das Eqs. (2.17) a (2.22) devem ser substituídos por x' , y' e z' respectivamente. Uma vez definidos os deslocamentos de um elemento genérico de placa, as componentes do tensor de deformação podem ser obtidas, em relação ao sistema de coordenada local, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x'} \\ v_{,y'} \\ w_{,z'} \\ u_{,y'} + v_{,x'} \\ v_{,z'} + w_{,y'} \\ u_{,z'} + w_{,x'} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{u1} \quad \mathbf{B}_{u2} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{uk}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_u \mathbf{u}^e \quad (\text{A.10})$$

sendo que a matriz $\mathbf{B}_u$ é chamada de matriz de interpolação mecânica, e $\mathbf{T}_\varepsilon$ é uma matriz de transformação de coordenadas para deformações mecânicas.

Cada termo $\mathbf{B}_{uk}$ é calculado utilizando-se a matriz Jacobiana e as funções de forma, e pode ser escrita como (BATHE, 1996; BALAMURUGAN; NARAYANAN, 2008; REDDY, 2006):

$$\mathbf{B}_{uk} = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 & -d_k V_{2x}^k & d_k V_{1x}^k \\ 0 & b_k & 0 & -e_k V_{2y}^k & e_k V_{1y}^k \\ 0 & 0 & c_k & -g_k V_{2z}^k & g_k V_{1z}^k \\ b_k & a_k & 0 & -(e_k V_{2x}^k + d_k V_{2y}^k) & (e_k V_{1x}^k + d_k V_{1y}^k) \\ 0 & c_k & b_k & -(g_k V_{2y}^k + e_k V_{2z}^k) & (g_k V_{1y}^k + e_k V_{1z}^k) \\ c_k & 0 & a_k & -(d_k V_{2z}^k + g_k V_{2x}^k) & (d_k V_{1z}^k + g_k V_{1x}^k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

onde $k = 1, 2, \dots, 8$ para um elemento de placa quadrilátero de 8 nós. Os coeficientes dessa matriz são obtidos por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{k,r} \\ N_{k,s} \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} d_k \\ e_k \\ g_k \end{Bmatrix} &= \frac{h_k}{2} \left(t \begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} J_{13}^* \\ J_{23}^* \\ J_{33}^* \end{Bmatrix} N_k \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde $\mathbf{J}$ é a matrix Jacobiana ($\mathbf{J}^*$ é a sua matriz inversa) de transformação do sistema de coordenadas global (x, y, z) para o sistema de coordenadas natural (r, s, t) (REDDY, 2006):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} r_{,x} & s_{,x} & t_{,x} \\ r_{,y} & s_{,y} & t_{,y} \\ r_{,z} & s_{,z} & t_{,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Entretanto, como está sendo considerado o estado plano de tensões, o termo $\varepsilon_{z'z'}$ deve ser eliminado do vetor de deformações. Isso pode ser feito definindo-se $\mathbf{T}_\varepsilon$ com dimensão (5×6) como (BATHE, 1996):

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

e $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2$ e n_3 podem ser convenientemente obtidos a partir da matriz Jacobiana Eq. (A.13) de transformação entre o sistema de coordenada global (x, y, z) e o natural (r, s, t) :

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \{l_1 \quad m_1 \quad n_1\}^T = (J_1)_{norma} \\ \hat{e}_3 &= \{l_3 \quad m_3 \quad n_3\}^T = (J_1 \times J_2)_{norma} \\ \hat{e}_2 &= \{l_2 \quad m_2 \quad n_2\}^T = (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde J_i é a coluna i da matriz Jacobiana ‘ $\times$ ’ representa o produto cruzado dos vetores e ‘*norma*’ indica a norma do vetor.

A.5 Definição do Sistema de Coordenadas Nodal-Local

O sistema de coordenadas nodal-local é obtido considerando-se a orientação do sistema de coordenadas naturais (ver Figura A.1) e os eixos do sistema de coordenadas globais. Portanto, as funções de forma do elemento e as coordenadas globais de cada nó são utilizadas. Assim, as coordenadas naturais nodais para r e s (utilizadas para calcular as funções de forma) são dadas na Tabela A.1.

Tabela A.1 – Coordenadas naturais r e s para os nós de um elemento

Nó (ne)	1	2	3	4	5	6	7	8
r	1	-1	-1	1	0	-1	0	1
s	1	1	-1	-1	1	0	-1	0

Utilizando esses pontos, dois vetores auxiliares podem ser calculados para cada nó k do domínio:

$$\begin{aligned}
v_{1k} &= \left\{ \sum_{ne=1}^q x_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \quad \sum_{ne=1}^q y_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \quad \sum_{ne=1}^q z_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial r} \right\} \\
v_{2k} &= \left\{ \sum_{ne=1}^q x_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \quad \sum_{ne=1}^q y_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \quad \sum_{ne=1}^q z_{ne} \frac{\partial N_{ne}}{\partial s} \right\}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

onde N_{ne} e x_{ne} são as funções de forma e as coordenadas globais x do nó ne , respectivamente, e q é o número de nós em cada elemento ($q = 8$ neste trabalho). Ou seja, para cada nó k do domínio, todos os nós ne dos elementos à que k pertence devem ser considerados para calcular seu sistema de coordenada nodal.

Assim, o vetor normal à superfície média no nó k pode ser calculado por:

$$V_n^k = \frac{v_{1k} \times v_{2k}}{\|v_{1k} \times v_{2k}\|}. \tag{A.17}$$

Entretanto, se um nó k pertence a mais de um elemento, a Eq. (A.17) deve ser calculada para cada elemento ao redor de k , e então, eles devem ser somados e normalizados pela seguinte expressão:

$$V_n^k = \frac{\sum_{e=1}^{e_n} V_n^{ke}}{\|\sum_{e=1}^{e_n} V_n^{ke}\|} \tag{A.18}$$

onde e_n é o número de elementos aos quais o nó k pertence.

Utilizando V_n^k e os eixos do sistema de coordenada global, os vetores unitários tangentes à superfície média no nó k podem ser calculados por:

$$\begin{aligned}
V_1^k &= \frac{e_y \times V_n^k}{\|e_y \times V_n^k\|} \\
V_2^k &= V_n^k \times V_1^k
\end{aligned} \tag{A.19}$$

onde $e_y = [0 \quad 1 \quad 0]$. Se V_n^k é paralelo à e_y , então $V_1^k = e_z$.

Apêndice B Adesão Perfeita entre Placas

Considerando duas placas m e n que estão perfeitamente aderidas uma à outra, o campo de deslocamentos na interface entre as mesmas deve ser contínuo. Considerando as coordenadas naturais r , s e t da formulação isoparamétrica do elemento, na qual $-1 \leq t \leq 1$ ao longo da espessura do elemento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_i^m(t=1) &= u_i^n(t=-1) \\ v_i^m(t=1) &= v_i^n(t=-1) \\ w_i^m(t=1) &= w_i^n(t=-1) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

em que: $i = 1, \dots, n_{\text{nós}}$.

Como os deslocamentos são calculados diretamente nos nós, as funções de forma da Eq. (A.2) são iguais a 1 somente para o nó em questão e zero para os outros nós. Assim, os deslocamentos das camadas m e n podem ser escritos como:

$$\begin{Bmatrix} u^m \\ v^m \\ w^m \end{Bmatrix}_{(t=1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{h_k^m}{2}V_{2x}^{k,m} & \frac{h_k^m}{2}V_{1x}^{k,m} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{h_k^m}{2}V_{2y}^{k,m} & \frac{h_k^m}{2}V_{1y}^{k,m} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h_k^m}{2}V_{2z}^{k,m} & \frac{h_k^m}{2}V_{1z}^{k,m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k^m \\ v_k^m \\ w_k^m \\ \alpha_k^m \\ \beta_k^m \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{k,m} \hat{\mathbf{u}}_k^m \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{Bmatrix} u^n \\ v^n \\ w^n \end{Bmatrix}_{(t=-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_k^n}{2}V_{2x}^{k,n} & -\frac{h_k^n}{2}V_{1x}^{k,n} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{h_k^n}{2}V_{2y}^{k,n} & -\frac{h_k^n}{2}V_{1y}^{k,n} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h_k^n}{2}V_{2z}^{k,n} & -\frac{h_k^n}{2}V_{1z}^{k,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k^n \\ v_k^n \\ w_k^n \\ \alpha_k^n \\ \beta_k^n \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{k,n} \hat{\mathbf{u}}_k^n \quad (\text{B.3})$$

Substituindo as Eqs. (B.2) e (B.3) na Eq. (B.1) tem-se a seguinte equação de acoplamento:

$$[\bar{\mathbf{A}}^{k,m} \quad -\bar{\mathbf{A}}^{k,n}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_k^m \\ \hat{\mathbf{u}}_k^n \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^k \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_k^m \\ \hat{\mathbf{u}}_k^n \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{B.4})$$

que pode ser introduzida na equação de equilíbrio (Eq. (2.60)) através dos multiplicadores de Lagrange da seguinte maneira (BATHE, 1996):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} & \bar{\mathbf{A}}^T \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C Comparação do programa de MEF implementado com software comercial ANSYS

A comparação do software utilizado neste trabalho com um software comercial certifica o MEF utilizado neste trabalho e apresentado no Capítulo 2. O modelo em MEF simulado no ANSYS é feito com elementos sólidos com graus de liberdade de deslocamentos em X, Y e Z e tensão elétrica. Para o PZT, o elemento utilizado é o SOLID5, e para o alumínio é utilizado o elemento SOLID185. São utilizadas três camadas, duas de PZT com 0,4 mm de espessura e uma de alumínio entre as duas com 0,25 mm de espessura num domínio quadrado de 15 mm de lado. O engaste é feito numa lateral do domínio. O potencial elétrico aplicado é de 100 V em cada camada. A Figura C.1 ilustra o resultado da simulação obtida pelo ANSYS numa malha de 40 x 40 x 2 elementos por camada.

No software utilizado neste trabalho, o elemento de placa utilizado é mostrado no Capítulo 2. A malha utilizada é de 40 x 40 elementos por camada, e o resultado da simulação é apresentado na Figura C.2.

Para a comparação entre os dois resultados, foram utilizados dez nós distribuídos pelo domínio de projeto, ilustrados na Figura C.3. Os pontos foram sempre utilizados na linha média da camada central de alumínio.

Figura C.1 – Resultado da simulação no ANSYS.

Figura C.2 – Resultado da simulação no software utilizado neste trabalho.

Figura C.3 – Pontos utilizados para comparação do software utilizado neste trabalho com o Ansys.

Os dez pontos utilizados foram posicionados afastados da região engastada para que os deslocamentos comparados sejam de maior magnitude, diminuindo o erro. A Tabela C.1 apresenta os resultados e a comparação entre os dois métodos

de simulação. Os deslocamentos em X e Y são por volta de 70 e 30 vezes menores que o deslocamento em Z, respectivamente, e por isso não são comparados.

Tabela C.1 – Comparação do resultado do MEF

Ponto	Deslocamento obtido pelo software (μm)	Deslocamento obtido pelo Ansys (μm)	Erro
O ₁	6,739	6,573	-2,46%
O ₂	4,055	3,871	-4,54%
O ₃	6,739	6,573	-2,46%
O ₄	10,236	9,957	-2,73%
O ₅	10,236	9,957	-2,73%
O ₆	20,320	19,940	-1,87%
O ₇	17,806	17,415	-2,20%
O ₈	16,999	16,597	-2,36%
O ₉	17,806	17,415	-2,20%
O ₁₀	20,320	19,940	-1,87%

O resultado do deslocamento em Z nos dois casos é bastante próximo e essa afirmação é comprovada pelo erro apresentado entre as duas simulações. Esse resultado comprova a eficácia do elemento de placa adotado e do método utilizado neste trabalho, bem como sua implementação.

Apêndice D Validação do cálculo da sensibilidade da Função Objetivo utilizando o Método das Diferenças Finitas

A sensibilidade da função objetivo é o que define quais serão os valores das variáveis de projeto na próxima iteração do processo de otimização topológica, por isso, é muito importante que se valide o seu cálculo.

Para fazer essa validação é utilizado o Método das Diferenças Finitas (MDF). Esse método consiste em calcular a sensibilidade da função objetivo utilizando os valores da própria função objetivo, conforme a Eq. (D.1) abaixo:

$$f'(x) \cong \frac{f(x + i) - f(x)}{i} , \quad (D.1)$$

sendo i o valor de um pequeno deslocamento na variável de projeto em relação a qual se está calculando a sensibilidade. Quanto menor o valor de i , menor o erro apresentado no cálculo da sensibilidade. Feito o cálculo pelo MDF, compara-se o valor obtido com o valor apresentado pelo programa. Além de comparar a sensibilidade da função objetivo $\mathcal{F}$, foi comparado também o cálculo da sensibilidade do deslocamento gerado L_1 , e da flexibilidade média L_3 , para a pseudodensidade e apenas do deslocamento gerado L_1 para a polarização, visto que a flexibilidade é calculada apenas na camada de alumínio e não sofre influência da polarização da camada piezelétrica. A Tabela D.1 apresenta os valores obtidos e o erro entre os dois cálculos da sensibilidade em relação à pseudodensidade e a Tabela D.2 traz os valores para o cálculo da sensibilidade em relação à polarização.

Tabela D.1 – Validação do cálculo da sensibilidade em relação à pseudodensidade

Nó	Função	Valores das sensibilidades obtidas pelo programa	Valores em x	Valores em $x+i$	Valores do MDF	Erro
144	L1	-0,006877	-39,316743	-39,316812	-0,006897	0,29%
	L3	-0,000115	-32,613397	-32,613398	-0,000115	-0,10%
	$\mathcal{F}$	0,003381	3,351673	3,351707	0,003391	0,30%
288	L1	0,006253	-39,316743	-39,316680	0,006274	0,33%
	L3	-0,000192	-32,613397	-32,613399	-0,000192	-0,12%
	$\mathcal{F}$	-0,003222	3,351673	3,351641	-0,003233	0,32%
432	L1	0,023101	-39,316743	-39,316511	0,023171	0,30%
	L3	-0,000551	-32,613397	-32,613403	-0,000551	-0,11%
	$\mathcal{F}$	-0,011826	3,351673	3,351554	-0,011861	0,29%
576	L1	0,034740	-39,316743	-39,316395	0,034841	0,29%
	L3	-0,001079	-32,613397	-32,613408	-0,001078	-0,11%
	$\mathcal{F}$	-0,017910	3,351673	3,351493	-0,017959	0,28%
720	L1	0,025045	-39,316743	-39,316492	0,025121	0,30%
	L3	-0,000569	-32,613397	-32,613403	-0,000568	-0,11%
	$\mathcal{F}$	-0,012807	3,351673	3,351545	-0,012844	0,29%
864	L1	0,004912	-39,316743	-39,316694	0,004927	0,32%
	L3	-0,000275	-32,613397	-32,613400	-0,000275	-0,12%
	$\mathcal{F}$	-0,002593	3,351673	3,351647	-0,002601	0,29%
1008	L1	-0,009275	-39,316743	-39,316836	-0,009265	-0,11%
	L3	-0,000232	-32,613397	-32,613400	-0,000232	-0,13%
	$\mathcal{F}$	0,004521	3,351673	3,351718	0,004516	-0,11%
1152	L1	-0,000062	-39,316743	-39,316744	-0,000062	-0,12%
	L3	-0,000216	-32,613397	-32,613399	-0,000216	-0,05%
	$\mathcal{F}$	-0,000077	3,351673	3,351672	-0,000077	-0,03%
1296	L1	-0,000133	-39,316743	-39,316745	-0,000133	-0,03%
	L3	-0,000468	-32,613397	-32,613402	-0,000467	-0,06%
	$\mathcal{F}$	-0,000167	3,351673	3,351671	-0,000167	-0,07%
1440	L1	-0,000274	-39,316743	-39,316746	-0,000274	-0,02%
	L3	-0,001487	-32,613397	-32,613412	-0,001486	-0,05%
	$\mathcal{F}$	-0,000607	3,351673	3,351667	-0,000606	-0,06%
1584	L1	-0,000209	-39,316743	-39,316745	-0,000209	-0,02%
	L3	-0,000814	-32,613397	-32,613405	-0,000813	-0,06%
	$\mathcal{F}$	-0,000302	3,351673	3,351670	-0,000302	-0,07%
1728	L1	-0,000082	-39,316743	-39,316744	-0,000082	-0,03%
	L3	-0,000230	-32,613397	-32,613399	-0,000230	-0,06%
	$\mathcal{F}$	-0,000074	3,351673	3,351672	-0,000074	-0,07%
1872	L1	-0,000740	-39,316743	-39,316751	-0,000740	-0,04%
	L3	-0,000136	-32,613397	-32,613399	-0,000136	-0,05%
	$\mathcal{F}$	0,000302	3,351673	3,351676	0,000302	-0,03%

Nó	Função	Valores das sensibilidades obtidas pelo programa	Valores em x	Valores em $x+i$	Valores do MDF	Erro
2016	L1	-0,004203	-39,316743	-39,316785	-0,004215	0,30%
	L3	-0,000046	-32,613397	-32,613398	-0,000046	-0,12%
	$\mathcal{F}$	0,002078	3,351673	3,351694	0,002085	0,31%
2160	L1	-0,004091	-39,316743	-39,316784	-0,004099	0,19%
	L3	-0,000094	-32,613397	-32,613398	-0,000094	-0,11%
	$\mathcal{F}$	0,001998	3,351673	3,351693	0,002002	0,20%
2304	L1	-0,009054	-39,316743	-39,316834	-0,009082	0,31%
	L3	-0,000195	-32,613397	-32,613399	-0,000195	-0,10%
	$\mathcal{F}$	0,004430	3,351673	3,351717	0,004444	0,32%
2448	L1	-0,010236	-39,316743	-39,316846	-0,010266	0,29%
	L3	-0,000245	-32,613397	-32,613400	-0,000244	-0,10%
	$\mathcal{F}$	0,004996	3,351673	3,351723	0,005011	0,30%
2592	L1	-0,003450	-39,316743	-39,316778	-0,003458	0,23%
	L3	-0,000221	-32,613397	-32,613399	-0,000221	-0,11%
	$\mathcal{F}$	0,001614	3,351673	3,351689	0,001618	0,25%
2736	L1	-0,001683	-39,316743	-39,316760	-0,001685	0,09%
	L3	-0,000117	-32,613397	-32,613398	-0,000117	-0,12%
	$\mathcal{F}$	0,000783	3,351673	3,351681	0,000784	0,10%
2880	L1	-0,005711	-39,316743	-39,316800	-0,005726	0,27%
	L3	-0,000078	-32,613397	-32,613398	-0,000078	-0,10%
	$\mathcal{F}$	0,002816	3,351673	3,351701	0,002824	0,27%

Tabela D.2 – Validação do cálculo da sensibilidade em relação à polarização

Nó	Função	Valores das sensibilidades obtidas pelo programa	Valores em x	Valores em $x+i$	Valores do MDF	Erro
90	L1	-0,002095	-39,316743	-39,316764	-0,002095	0,0008%
	$\mathcal{F}$	0,001047	3,351673	3,351683	0,001047	0,0008%
180	L1	-0,003279	-39,316743	-39,316776	-0,003279	0,00164
	$\mathcal{F}$	0,001640	3,351673	3,351689	0,000013	0,0010%
270	L1	-0,004458	-39,316743	-39,316788	-0,004458	0,0018%
	$\mathcal{F}$	0,002229	3,351673	3,351695	0,002229	0,0010%
360	L1	-0,005197	-39,316743	-39,316795	-0,005197	0,0021%
	$\mathcal{F}$	0,002599	3,351673	3,351699	0,002599	0,0008%
450	L1	-0,005498	-39,316743	-39,316798	-0,005498	0,0022%
	$\mathcal{F}$	0,002749	3,351673	3,351700	0,002749	0,0006%
540	L1	-0,005317	-39,316743	-39,316796	-0,005317	0,0022%
	$\mathcal{F}$	0,002658	3,351673	3,351700	0,002658	0,0008%
630	L1	-0,004765	-39,316743	-39,316791	-0,004765	0,0019%
	$\mathcal{F}$	0,002383	3,351673	3,351697	0,002383	0,0010%
720	L1	-0,003703	-39,316743	-39,316780	-0,003703	0,0015%
	$\mathcal{F}$	0,001851	3,351673	3,351692	0,001851	0,0011%
810	L1	-0,002444	-39,316743	-39,316768	-0,002444	0,0010%
	$\mathcal{F}$	0,001222	3,351673	3,351685	0,001222	0,0009%
900	L1	-0,001639	-39,316743	-39,316760	-0,001639	0,0012%
	$\mathcal{F}$	0,000820	3,351673	3,351681	0,000820	0,0012%
990	L1	-0,002095	-39,316743	-39,316764	-0,002095	0,0008%
	$\mathcal{F}$	0,001047	3,351673	3,351683	0,001047	0,0008%
1080	L1	-0,003279	-39,316743	-39,316776	-0,003279	0,0013%
	$\mathcal{F}$	0,001640	3,351673	3,351689	0,001640	0,0010%
1170	L1	-0,004458	-39,316743	-39,316788	-0,004458	0,0018%
	$\mathcal{F}$	0,002229	3,351673	3,351695	0,002229	0,0010%
1260	L1	-0,005197	-39,316743	-39,316795	-0,005197	0,0021%
	$\mathcal{F}$	0,002598	3,351673	3,351699	0,002598	0,0008%
1350	L1	-0,005240	-39,316743	-39,316796	-0,005240	0,0024%
	$\mathcal{F}$	0,002620	3,351673	3,351699	0,002620	0,0007%
1440	L1	-0,005312	-39,316743	-39,316796	-0,005312	0,0022%
	$\mathcal{F}$	0,002656	3,351673	3,351700	0,002656	0,0008%
1530	L1	-0,004765	-39,316743	-39,316791	-0,004765	0,0019%
	$\mathcal{F}$	0,002383	3,351673	3,351697	0,002383	0,0010%
1620	L1	-0,003703	-39,316743	-39,316780	-0,003703	0,0015%
	$\mathcal{F}$	0,001851	3,351673	3,351692	0,001851	0,0011%
1710	L1	-0,002444	-39,316743	-39,316768	-0,002444	0,0010%
	$\mathcal{F}$	0,001222	3,351673	3,351685	0,001222	0,0009%

Nó	Função	Valores das sensibilidades obtidas pelo programa	Valores em x	Valores em $x+i$	Valores do MDF	Erro
1800	L1	-0,001639	-39,316743	-39,316760	-0,001639	0,0012%
	$\mathcal{F}$	0,000820	3,351673	3,351681	0,000820	0,0012%

Apêndice E Desenhos de fabricação do protótipo

A Figura E.1 mostra o desenho de fabricação da camada de alumínio do protótipo.

Figura E.1 – Desenho de fabricação da camada de alumínio do protótipo (unidade em mm).

A Figura E.2 traz o desenho de fabricação da camada de cerâmica piezelétrica do protótipo.

Figura E.2 – Desenho de fabricação da camada de cerâmica do protótipo (unidade em mm).

A Figura E.3 mostra o desenho de fabricação da base de poliamida dividida em duas peças. A camada de alumínio é colocada entre as duas peças de poliamida e as peças são fixadas por parafusos de aço M4 x 20, engastando, assim, a camada de alumínio.

Figura E.3 – Desenho de fabricação da base de poliamida do protótipo (unidade em mm).