UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

SILVIO LUIS HORI CAVALLARO

Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero

São Paulo
2019

SILVIO LUIS HORI CAVALLARO

Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção de título de Mestre em Ciências

Área de Concentração: Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Décio Crisol Donha

São Paulo
2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Cavallaro, Silvio Luis Hori

Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero / S. L. H. Cavallaro -- versão corr. -- São Paulo, 2019.
153 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Aeronaves não tripuladas 2.Aeronaves quadrimotoras 3.Controle ótimo
4.Simulação (aprendizagem) I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

CAVALLARO, S. L. H. **Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero.** 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Esta dissertação visa a modelagem, simulação e controle de um veículo aéreo não tripulado (VANT) do tipo quadricóptero, utilizando-se as técnicas de controle ótimo e controle robusto no espaço de estados. O quadricóptero deve realizar as funções de decolagem, voo em cruzeiro e pouso de maneira autônoma. A dissertação inclui a síntese e análise comparativa entre um observador de estados de ordem plena de Luenberger e um filtro de Kalman. Além disso, um controlador linear quadrático gaussiano e um controlador robusto serão sintetizados e avaliados, procurando-se avaliar qual tem o melhor desempenho nas diversas tarefas do VANT.

Palavras-chave: Aeronaves não tripuladas. Aeronaves quadrimotoras. Controle ótimo. Simulação (aprendizagem).

ABSTRACT

CAVALLARO, S. L. H. **Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero.** 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

This dissertation includes the modeling, simulation and control of a quadroter unmanned aerial vehicle by using optimum control and robust control techniques on the space state. The quadroter must perform the takeoff, cruise flight and landing in an autonomous way. This report also presents the synthesis and comparative analysis between a Luenberger full order state observer and a Kalman filter. A linear quadratic gaussian controller and a robust controller will be also synthesized and analyzed, to compare which one exhibits the best performance on the UAV tasks.

Keywords: Unmanned aerial vehicles. Quadroters. Optimal control. Simulation (learning).

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - STARMAC II quadrrroto	27
Figura 2 - Hélices do tipo empurrador e puxador	28
Figura 3 - Movimentos possíveis do quadricóptero e identificação dos motores	29
Figura 4 - Ilustração dos efeitos da saturação e da zona morta	33
Figura 5 - Referencial inercial e não inercial	34
Figura 6 - Indicação das massas e braços do quadricóptero	39
Figura 7 - Coeficiente de empuxo pela taxa de avanço	45
Figura 8 - Coeficiente de potência pela taxa de avanço	45
Figura 9 - Resposta a um degrau de 5V da velocidade angular do motor	47
Figura 10 - Mapa de polos em malha fechada do regulador linear quadrático	58
Figura 11 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero	59
Figura 12 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero	59
Figura 13 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero	62
Figura 14 - Variação de U, V e W pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero	63
Figura 15 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para ângulos de Euler iniciais diferentes de zero	64
Figura 16 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para ângulos de Euler iniciais diferentes de zero	64
Figura 17 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para velocidades lineares iniciais diferentes de zero	66
Figura 18 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com iteração final do regulador linear quadrático para velocidades lineares iniciais diferentes de zero	66
Figura 19 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para rotações dos conjuntos propulsores iniciais diferentes de zero	68
Figura 20 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para rotações dos conjuntos propulsores iniciais diferentes de zero	68

Figura 21 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero	69
Figura 22 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero	70
Figura 23 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero	71
Figura 24 - Variação de U, V e W pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero	72
Figura 25 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero	77
Figura 26 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero	77
Figura 27 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero	79
Figura 28 - Variação de U, V e W pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero	80
Figura 29 - Variação dos erros de estimação de X, Y e Z pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero	81
Figura 30 - Variação dos erros de φ , θ e ψ pelo tempo com o observador de estado para posições lineares iniciais diferentes de zero	81
Figura 31 - Variação de X pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero com diferentes erros iniciais	83
Figura 32 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem	88
Figura 33 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem	88
Figura 34 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem	89
Figura 35 - Variação de U, V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem	90
Figura 36 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro	91

Figura 37 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro	91
Figura 38 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro	92
Figura 39 - Variação de U, V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro	93
Figura 40 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada.....	94
Figura 41 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada.....	94
Figura 42 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada	95
Figura 43 - Variação de U, V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo guinada.....	95
Figura 44 - Variação de X Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso	96
Figura 45 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso	97
Figura 46 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante a manobra de pouso	97
Figura 47 - Variação de U, V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso	98
Figura 48 - Variação de X e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	101
Figura 49 - Variação de Y e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	101
Figura 50 - Variação de Z e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	102
Figura 51 - Variação de φ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	103
Figura 52 - Variação de θ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	103

Figura 53 - Variação de ψ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	104
Figura 54 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	105
Figura 55 - Variação da norma euclidiana da matriz de covariância do erro pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	106
Figura 56 - Variação da norma euclidiana da matriz ganhos de Kalman pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	106
Figura 57 - Variação da estimativa de X e de sua medida pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano.....	107
Figura 58 - Variação da estimativa de φ e de sua medida pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano.....	108
Figura 59 - Variação do resíduo de X pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	109
Figura 60 - Variação do resíduo de φ pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	109
Figura 61 - Histograma do resíduo de φ pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano	110
Figura 62 - Estimativa de X pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano e com o controle ótimo com o observador de Luenberger.....	111
Figura 63 - Variação de ω_2 pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano e com o controle ótimo com o observador de Luenberger.....	111
Figura 64 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência G pela frequência	118
Figura 65 - Variação do número de condicionamento da matriz de funções de transferência G pela frequência.....	119
Figura 66– Diagrama de blocos do sistema controlado pelo regulador linear quadrático	120
Figura 67 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta L do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência	122
Figura 68 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada T do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência	122
Figura 69 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade S do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência	123

Figura 70 – Configuração de dois portos de um sistema linear invariante no tempo sistema controlado por um controlador de qualquer configuração.....	125
Figura 71 - Variação dos valores singulares das matrizes de funções de transferência G e G_d pela frequência.....	130
Figura 72 - Variação dos valores singulares de $W_T \cdot TROB$ pela frequência.....	134
Figura 73 - Variação dos valores singulares de $W_C \cdot CROB$ pela frequência.....	134
Figura 74 - Variação dos valores singulares de $W_S \cdot SROB$ pela frequência	135
Figura 75 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta $LROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência.....	136
Figura 76 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada $TROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência.....	136
Figura 77 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade $SROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência	137
Figura 78 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade do controlador $CROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência.....	137
Figura 79 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada $TROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_T pela frequência	139
Figura 80 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade $SROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_S pela frequência	139
Figura 81 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade do controlador $CROB$ do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_C pela frequência	140
Figura 82 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem.....	141
Figura 83 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem.....	141
Figura 84 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem	142
Figura 85 - Variação de U , V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem.....	143

Figura 86 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro	144
Figura 87 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro	144
Figura 88 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro	145
Figura 89 - Variação de U, V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro	146
Figura 90 - Variação de X, Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada	147
Figura 91 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada	147
Figura 92 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada.....	148
Figura 93 - Variação de U, V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores máximos das variáveis de estado na iteração final.....	57
Tabela 2 – Polos de malha fechada do regulador linear quadrático	57
Tabela 3 – Polos de malha fechada do observador de estados	75
Tabela 4 – Comparação entre os parâmetros de desempenho do sistema sem observador estados e com o observador de Luenberger para posições lineares iniciais diferentes de zero	78
Tabela 5 – Covariâncias dos ruídos de processo e dos ruídos de medida	101
Tabela 6 – Comparação entre os afastamentos máximos da posição de equilíbrio e o tempo de acomodação no eixo x do sistema com observador de Luenberger e com o filtro de Kalman para a manobra de pouso	112
Tabela 7 – Parâmetros do domínio da frequência do LQR	125
Tabela 8 – Parâmetros do domínio da frequência do controlador robusto	138

LISTA DE SÍMBOLOS

A – matriz de estado

A_{des} – matriz de estado deslocada

A_P – área projetada (m^2)

A_r – matriz de estado do controlador robusto

A_{rd} – matriz de estado do controlador robusto da planta deslocada

A_{ref} – matriz de estado da referência variável

A_S – ganho em baixa frequência da matriz de ponderação que penaliza o sinal de erro

A_T – ganho em baixa frequência da matriz de ponderação que penaliza o sinal de saída

A_{11} – submatriz da matriz de estado

A_{12} – submatriz da matriz de estado

B – matriz de entrada

b – braço dos momentos de rolagem e arfagem (m)

C – matriz de saída

$\mathbb{C}$ – matriz de controlabilidade

CG – centro de gravidade do quadricóptero

C_R – matriz de funções de sensibilidade do controlador

C_{ROB} – matriz de funções de sensibilidade do controlador do sistema controlado pelo controlador robusto

c_A – coeficiente de arrasto

c_P – coeficiente de potência

c_T – coeficiente de empuxo

D – matriz de transmissão direta

D_e – matriz de normalização de erro

D_u – matriz de normalização de entrada

e – vetor de erro

$\dot{e}$ – derivada do vetor de erro em relação ao tempo

$e(0)$ – vetor de erro inicial

$\hat{e}_{max}$ – máxima variação esperada no erro

e_r – vetor de erro de referência

$\dot{e}_r$ – derivada do vetor de erro de referência em relação ao tempo

$\hat{e}_{Xmax}$ – máxima variação esperada no erro de X

$\hat{e}_{Y_{max}}$ – máxima variação esperada no erro de Y
 $\hat{e}_{Z_{max}}$ – máxima variação esperada no erro de Z
 $\hat{e}_{\varphi_{max}}$ – máxima variação esperada no erro de φ
 $\hat{e}_{\theta_{max}}$ – máxima variação esperada no erro de θ
 $\hat{e}_{\psi_{max}}$ – máxima variação esperada no erro de ψ
 F_A – força de arrasto atuante sob o quadricóptero (N)
 F_P – empuxo total gerado pelo conjunto propulsor (N)
 F_R – resultante das forças externas atuantes sob o quadricóptero (N)
 F_{P_x} – empuxo gerado pelo conjunto propulsor na direção x (N)
 F_{P_y} – empuxo gerado pelo conjunto propulsor na direção y (N)
 F_{P_z} – empuxo gerado pelo conjunto propulsor na direção z (N)
 G – matriz de funções de transferência
 G_P – planta perturbada
 $\tilde{G}$ – planta normalizada
 G_1 – função de transferência de um sistema de primeira ordem $\left(\frac{rad/s}{V}\right)$
 g – aceleração da gravidade $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
 I – matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_d – matriz identidade
 I_x – termo (1,1) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{xy} – termo (1,2) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{xz} – termo (1,3) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_y – termo (2,2) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{yx} – termo (2,1) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{yz} – termo (2,3) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_z – termo (3,3) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{zx} – termo (3,1) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 I_{zy} – termo (3,2) da matriz de inércia do quadricóptero ($kg \cdot m^2$)
 J – taxa de avanço
 J_{LQR} – índice de desempenho
 K – constante do motor $\left(\frac{rpm}{V}\right)$
 K_a – matriz de ganhos do seguidor de referência constante

K_e – matriz de ganhos do observador

K_{KAL} – matriz de ganhos do filtro de Kalman

$\|K_{KAL\infty}\|$ – norma euclidiana da matriz de ganhos de Kalman

K_{LQR} – matriz de ganhos do controlador

K_M – constante de momento do motor ($kg \cdot m^2$)

K_T – constante de torque do motor ($kg \cdot m$)

K_{TM} – constante da hélice (m)

L – matriz de funções de transferência de malha aberta

L_{ROB} – matriz de funções de transferência de malha aberta do sistema controlado pelo controlador robusto

M_H – torque produzido por cada hélice ($N \cdot m$)

M_p – máximo sobressinal

M_R – momento do sistema de forças externas em relação ao baricentro do quadricóptero ($N \cdot m$)

M_S – ganho em alta frequência da matriz de ponderação que penaliza o sinal de erro

M_T – ganho em alta frequência da matriz de ponderação que penaliza o sinal de saída

M_x – momento de rolagem ($N \cdot m$)

M_y – momento de arfagem ($N \cdot m$)

M_z – momento de guinada ($N \cdot m$)

m – massa total do quadricóptero (kg)

m_C – massa do corpo (kg)

m_M – massa do motor (kg)

N – matriz de funções de transferência de malha fechada

N_u – matriz auxiliar do seguidor de referência constante

N_x – matriz auxiliar do seguidor de referência constante

O_{XYZ} – origem do sistema de coordenadas fixo

O_{xyz} – origem do sistema de coordenadas móvel

$\mathbb{O}$ – matriz de observabilidade

P – velocidade angular com relação ao referencial móvel na direção x ($\frac{rad}{s}$)

$\dot{P}$ – aceleração angular com relação ao referencial móvel na direção x ($\frac{rad}{s^2}$)

P_e – planta estendida

P_{KAL} – matriz de covariância do erro

$\dot{P}_{KAL}$ – propagação da matriz de covariância do erro
 P_{LQR} – matriz de ponderação da ação de controle
 $P_{LQR_{jj}}$ – termo da diagonal principal da matriz de ponderação da ação de controle
 P_M – potência fornecida por um motor (W)
 P_Q – força peso atuante no quadricóptero (N)
 P_{max} – velocidade angular máxima com relação ao referencial móvel na direção x $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 $P(X, Y, Z)$ – ponto genérico do referencial fixo
 $P(x, y, z)$ – ponto genérico do referencial móvel
 $\|P_\infty\|$ – norma euclidiana da matriz de covariância do erro
 p_{LQR_i} – polos de 1 a 16 de malha fechada do regulador linear quadrático
 p_{OBS_i} – polos de 1 a 16 de malha fechada do observador de estados
 p_{MA_i} – polos de 1 a 12 de malha aberta
 p_{MA_j} – polos de 13 a 16 de malha aberta
 pos – posições lineares do quadricóptero (m)
 Q – velocidade angular com relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 $\dot{Q}$ – aceleração angular com relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$
 Q_{KAL} – matriz de covariância dos ruídos de processo
 Q_{LQR} – matriz de ponderação do estado
 $Q_{LQR_{ii}}$ – termo da diagonal principal da matriz de ponderação de estado
 Q_{max} – velocidade angular máxima com relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 R – velocidade angular com relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{rad}{s}\right)$
 $\dot{R}$ – aceleração angular com relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{rad}{s^2}\right)$
 $R(\theta)$ – matriz de rotação na direção y
 $R(\varphi)$ – matriz de rotação na direção x
 $R(\psi)$ – matriz de rotação na direção z
 R_i – resistência do integrador elétrico (Ω)
 R_{KAL} – matriz de covariância dos ruídos de medida
 R_{LQR} – matriz de Ricatti
 R_{max} – velocidade angular máxima com relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{rad}{s}\right)$

rot – velocidades angulares do quadricóptero $\left(\frac{rad}{s}\right)$

res – resíduo de medida

$r(\mathbb{C})$ – posto da matriz de controlabilidade

$r(\mathbb{O})$ – posto da matriz de observabilidade

r_H – raio da hélice (m)

S – matriz de funções de sensibilidade

S_R – matriz de mudança de referencial

S_{ROB} – matriz de funções de sensibilidade do sistema controlado pelo controlador robusto

s – variável complexa $\left(\frac{1}{s}\right)$

T – matriz de funções de transferência de malha fechada

TC – taxa de corte $\left(\frac{dB}{década}\right)$

TC_{ROB} – taxa de corte do sistema controlado pelo controlador robusto $\left(\frac{dB}{década}\right)$

T_{ROB} – matriz de funções de transferência de malha fechada do sistema controlado pelo controlador robusto

T_M – empuxo gerado por um motor (N)

T_m – constante de tempo dos motores depois do regulador linear quadrático (s)

T_1 – empuxo gerado pelo motor 1 (N)

T_2 – empuxo gerado pelo motor 2 (N)

T_3 – empuxo gerado pelo motor 3 (N)

T_4 – empuxo gerado pelo motor 4 (N)

t_i – tempo inicial de aplicação da entrada tipo degrau (s)

t_0 – instante inicial genérico (s)

t_p – tempo de pico (s)

t_s – tempo de acomodação (s)

U – velocidade linear em relação ao referencial móvel na direção x $\left(\frac{m}{s}\right)$

U_{max} – velocidade linear máxima em relação ao referencial móvel na direção x $\left(\frac{m}{s}\right)$

U_0 – velocidade linear inicial em relação ao referencial móvel na direção x $\left(\frac{m}{s}\right)$

u – lei de controle (V)

u_{RP} – termo adicional da lei de controle do seguidor de referência constante

$\hat{u}_{max}$ – máxima variação esperada na entrada (V)

u^* – valor nominal da entrada (V)

u_{jj} – termo da diagonal principal do vetor da ação de controle (V)

u_0 – velocidade de voo $\left(\frac{m}{s}\right)$

$\hat{u}_{1max}$ – máxima variação esperada na entrada do motor 1 (V)

$\hat{u}_{2max}$ – máxima variação esperada na entrada do motor 2 (V)

$\hat{u}_{3max}$ – máxima variação esperada na entrada do motor 3 (V)

$\hat{u}_{4max}$ – máxima variação esperada na entrada do motor 4 (V)

V – velocidade linear em relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{m}{s}\right)$

V_0 – velocidade linear inicial em relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{m}{s}\right)$

V_{max} – velocidade linear máxima em relação ao referencial móvel na direção y $\left(\frac{m}{s}\right)$

V_{mot} – tensão aplicada a um motor (V)

V_{mot_0} – tensão relativa à zona morta (V)

V_{sat} – tensão de saturação do motor (V)

V_{max} – tensão máxima aplicada a um motor (V)

v – vetor de velocidades lineares relativas ao referencial móvel $\left(\frac{m}{s}\right)$

v_{max} – velocidade linear máxima do quadricóptero $\left(\frac{m}{s}\right)$

v_r – ruído

W – velocidade linear em relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{m}{s}\right)$

W_0 – velocidade linear inicial em relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{m}{s}\right)$

W_S – matriz de ponderação que penaliza o sinal de erro

W_T – matriz de ponderação que penaliza o sinal de saída

W_C – matriz de ponderação que penaliza o sinal de controle

W_{max} – velocidade linear máxima em relação ao referencial móvel na direção z $\left(\frac{m}{s}\right)$

w – entradas exógenas

w_P – matriz de ponderação das perturbações complexas

w_d – distúrbio

X – posição do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção x (m)

X_0 – posição inicial do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção x (m)

$\dot{X}$ – velocidade linear em relação ao referencial fixo na direção x ($\frac{m}{s}$)

X_{max} – posição do centro de gravidade máximo do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção x (m)

x – vetor de estado

x_{RP} – vetor de estado no regime permanente

x_{ii} – termo da diagonal principal do vetor de estado

x_r – vetor de estado de referência

x_0 – vetor de condições iniciais

$x(t_0)$ – estado no instante inicial t_0

$x(t_p)$ – estado no tempo de pico t_p

$x(t_\infty)$ – estado no tempo infinito t_∞

$\tilde{x}$ – vetor de estado estimado

Y – posição do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção y (m)

Y_0 – posição inicial do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção y (m)

Y_{max} – posição do centro de gravidade máximo do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção y (m)

$\dot{Y}$ – velocidade linear em relação ao referencial fixo na direção y ($\frac{m}{s}$)

y_{RP} – vetor de saídas no regime permanente

y_r – sinal de referência

Z – posição do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção z (m)

Z_0 – posição inicial do centro de gravidade do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção z (m)

Z_{max} – posição do centro de gravidade máximo do quadricóptero em relação ao referencial móvel na direção z (m)

$\dot{Z}$ – velocidade linear em relação ao referencial fixo na direção z ($\frac{m}{s}$)

z_d – variável complexa deslocada ($\frac{1}{s}$)

α_d – termo auxiliar da transformação bilinear

β_d – termo auxiliar da transformação bilinear
 γ – número de condicionamento
 γ_d – termo auxiliar da transformação bilinear
 Δ – perturbações complexas
 δ – afastamento máximo da posição de equilíbrio
 δ_d – termo auxiliar da transformação bilinear
 δ_x – afastamento máximo da posição de equilíbrio em x (m)
 δ_y – afastamento máximo da posição de equilíbrio em y (m)
 δ_θ – afastamento máximo da posição de equilíbrio em θ ($^\circ$)
 δ_φ – afastamento máximo da posição de equilíbrio em φ ($^\circ$)
 δ_ψ – afastamento máximo da posição de equilíbrio em ψ ($^\circ$)
 ε – entradas do controlador
 ζ_m – fator de amortecimento dos motores depois do regulador linear quadrático
 θ – ângulo de arfagem (rad)
 θ_0 – ângulo de arfagem inicial (rad)
 θ_{max} – ângulo de arfagem máximo (rad)
 ρ – densidade do ar local ($\frac{kg}{m^3}$)
 $\sigma_v^2_{pos.ang}$ – covariância do ruído de medida das posições angulares (rad^2)
 $\sigma_v^2_{pos.lin}$ – covariância do ruído de medida das posições lineares (m^2)
 $\sigma_w^2_{pos.ang}$ – covariância do ruído de processo das posições angulares (rad^2)
 $\sigma_w^2_{pos.lin}$ – covariância do ruído de processo das posições lineares (m^2)
 $\sigma_w^2_{rot.mot}$ – covariância do ruído de processo da rotação dos motores ($\frac{rad^2}{s^2}$)
 $\sigma_w^2_{vel.ang}$ – covariância do ruído de processo das velocidades angulares ($\frac{rad^2}{s^2}$)
 $\sigma_w^2_{vel.lin}$ – covariância do ruído de processo das velocidades lineares ($\frac{m^2}{s^2}$)
 $\bar{\sigma}$ – máximo valor singular
 $\underline{\sigma}$ – mínimo valor singular
 τ – constante de tempo do motor (s)
 φ – ângulo de rolagem (rad)
 φ_0 – ângulo de rolagem inicial (rad)
 φ_{max} – ângulo de rolagem máximo (rad)
 ψ – ângulo de guinada (rad)

ψ_0 – ângulo de guinada (rad)

ψ_{max} – ângulo de guinada máximo (rad)

ω – velocidade angular do motor ($\frac{rad}{s}$)

ω_B – largura de banda ($\frac{rad}{s}$)

$\omega_{B_{ROB}}$ – largura de banda do sistema controlado pelo controlador robusto ($\frac{rad}{s}$)

ω_{BT} – largura de banda em termos da matriz de funções de transferência de malha fechada ($\frac{rad}{s}$)

$\omega_{BT_{ROB}}$ – largura de banda em termos da matriz de funções de transferência de malha fechada do sistema controlador pelo controlador robusto ($\frac{rad}{s}$)

ω_C – frequência de cruzamento ($\frac{rad}{s}$)

$\omega_{C_{ROB}}$ – frequência de cruzamento do sistema controlado pelo controlador robusto ($\frac{rad}{s}$)

ω_Q – vetor de velocidades angulares relativas ao referencial móvel ($\frac{rad}{s}$)

ω_m – frequência natural não amortecida dos motores depois do regulador linear quadrático ($\frac{rad}{s}$)

ω_{max} – velocidade angular máxima do motor ($\frac{rad}{s}$)

ω_0 – velocidade angular do motor no ponto de operação ($\frac{rad}{s}$)

ω_1 – velocidade angular do motor 1 ($\frac{rad}{s}$)

ω_{1_0} – velocidade angular inicial do motor 1 ($\frac{rad}{s}$)

ω_2 – velocidade angular do motor 2 ($\frac{rad}{s}$)

ω_3 – velocidade angular do motor 3 ($\frac{rad}{s}$)

ω_4 – velocidade angular do motor 4 ($\frac{rad}{s}$)

$\dot{\omega}$ – aceleração angular do motor ($\frac{rad}{s^2}$)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	24
1.1	OBJETIVOS	24
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
1.3	PROBLEMA ABORDADO	27
2	MODELAGEM.....	30
2.1	HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS.....	30
2.2	MODELAGEM DO CONJUNTO PROPULSOR.....	30
2.2.1	Modelagem da hélice.....	30
2.2.2	Modelagem do motor	32
2.3	MODELAGEM DO QUADRICÓPTERO	34
2.3.1	Variáveis de estado	34
2.3.2	Matrizes de rotação.....	35
2.3.3	Equações de movimento	36
2.4	LINEARIZAÇÃO	42
2.4.1	Ponto de operação	42
2.5	PARÂMETROS.....	45
2.5.1	Parâmetros da hélice.....	45
2.5.2	Parâmetros do motor	46
2.5.3	Parâmetros do quadricóptero	47
2.5.4	Matrizes de estado e de entrada.....	48
2.6	SENSORES.....	48
2.6.1	Acelerômetro	49
2.6.2	Giroscópio	49
2.6.3	Matrizes de saída e de transmissão direta	49
2.7	DETERMINAÇÃO DOS POLOS DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	50
2.8	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	50
3	PROJETO DOS CONTROLADORES.....	52
3.1	ANÁLISE DE CONTROLABILIDADE E DE OBSERVABILIDADE	52
3.2	PROJETO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	53
3.2.1	Desenvolvimento matemático	53
3.2.2	Escolha dos termos das matrizes de ponderação	54
3.2.3	Polos em malha fechada do regulador linear quadrático.....	57

3.2.4	Simulações em malha fechada com o regulador linear quadrático.....	58
3.3	SIMULAÇÕES EM MALHA FECHADA COM MODELO NÃO LINEAR.....	69
3.4	PROJETO DO OBSERVADOR DE ESTADOS DE LUENBERGER	73
3.4.1	Desenvolvimento matemático	73
3.4.2	Escolha dos polos do observador de estados de ordem plena	74
3.4.3	Determinação do erro inicial do observador de estados.....	75
3.4.4	Simulações em malha fechada com o observador de estados	76
3.4.5	Análise da influência do erro inicial na resposta do sistema.....	82
3.5	PROJETO DO SEGUIDOR DE REFERÊNCIA CONSTANTE.....	84
3.5.1	Desenvolvimento matemático	84
3.5.2	Simulações em malha fechada com o seguidor de referência constante	87
3.6	PROJETO DO FILTRO DE KALMAN.....	98
3.6.1	Desenvolvimento matemático	99
3.6.2	Simulações em malha fechada com o filtro de Kalman	100
3.6.3	Comparação com o observador de estados de Luenberger	110
3.7	PROJETO DO CONTROLADOR ROBUSTO	112
3.7.1	Conceitos iniciais.....	113
3.7.2	Determinação da matriz de funções de transferência.....	114
3.7.3	Normalização de sinais	115
3.7.4	Valores singulares	117
3.7.5	Determinação e análise do número de condicionamento	118
3.7.6	Funções de transferência de malha aberta, malha fechada e sensibilidade do controlador inicial	120
3.7.7	Configuração de dois portos com as matrizes de ponderação	125
3.7.8	Relações de compromisso em sistemas realimentados.....	126
3.7.9	Sensibilidade mista / H^∞	127
3.7.10	Lidando com polos situados sob o eixo imaginário.....	129
3.7.11	Definição das matrizes de ponderação	131
3.7.12	Estabilidade robusta, estabilidade nominal e desempenho robusto para o sistema controlado pelo controlador robusto.....	133
3.7.13	Valores singulares do sistema controlado pelo controlador robusto	135
3.7.14	Simulações em malha fechada com o controlador robusto	140
4	CONCLUSÕES.....	150

5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	152
----------	--	------------

1 INTRODUÇÃO

Os veículos aéreos não tripulados (VANT) são um tipo de aeronave que não necessita de pilotos embarcados para ser guiada. Usam-se meios eletrônicos e computacionais para seu controle remoto e dispõem de um sistema autônomo de navegação, não sendo necessária a interferência humana no voo, uma vez que todas as operações são programadas em terra (INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANIZATION, 2011, p. 32).

No princípio, os VANT tinham apenas aplicação militar, sendo inspirados em bombas voadoras e aeromodelos rádiocontrolados para operar em áreas onde o acesso com naves embarcadas era inviável. Porém, o seu uso em operações civis está aumentando consideravelmente (TICE, 2011, p. 1).

Os VANT podem embarcar diversos tipos de sensores, câmeras fotográficas de alta definição, câmeras de vídeo com transmissão em tempo real e até sistemas de GPS que permitem que estes percorram uma trajetória pré-definida, porém com a capacidade de corrigir seu curso. Outros dispositivos são utilizados conforme suas tarefas em campo e é essa versatilidade que os tornam tão essenciais em certas aplicações.

Podem-se destacar como usos militares dos VANT: sensoriamento remoto; apoio e controle de tiro de artilharia; apoio às tropas de infantaria do exército; atividades de patrulhamento; monitoramento de fronteiras e controle de mísseis de cruzeiro (TICE, 2011, p. 1). Como usos civis: exploração e produção de óleo, gás e mineral; pesquisas científicas como a localização de espécies de arara azul no território brasileiro e auxílio na busca, resgate e análise de danos durante os furacões que atingiram o estado do Texas e Louisiana em 2008 (BARNARD, 2013, p. 12).

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desta dissertação é a modelagem, simulação e controle de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero. A dissertação utiliza técnicas de controle ótimo linear quadrático (LQ), linear quadrático gaussiano (LQG) e robusto, a fim de realizar tarefas como decolar, voar em cruzeiro e pousar, sendo que o quadricóptero deve desempenhá-las de maneira autônoma, isto é, sem a interferência humana no seu decorrer, sendo elas já pré-programadas antes

do voo. Primeiramente, será executada uma revisão bibliográfica, seguida da descrição do problema abordado, hipóteses simplificadoras e modelagem. Em seguida, vem a linearização da planta, definição dos parâmetros, sensores, determinação dos polos do sistema em malha aberta, análises de controlabilidade e observabilidade para se dar início ao projeto dos reguladores de estado, observador de estados de Luenberger, seguidor de referência, filtro de Kalman e por fim, controlador robusto.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos últimos anos, o uso de veículos aéreos não tripulados apresentou um aumento considerável. Atualmente, os VANT são objeto de estudo em universidades e centros de pesquisa, onde técnicas de controle avançado, como as técnicas de controle robusto, adaptativo, não linear e de inteligência artificial têm sido sintetizadas de modo a aprimorar o desempenho e a eficiência destas aeronaves (DOMINGUES, 2009, p. 7).

Bradford, Nelson e Palm (2010) utilizaram técnicas de controle moderno para sintetizar um controlador linear quadrático, implementado em uma estrutura de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero, construída com o objetivo de o veículo se movimentar de maneira autônoma, atingindo resultados de desempenho satisfatórios.

Domingues (2009) construiu um protótipo de um quadricóptero autônomo utilizando como sensores apenas uma bússola digital e um acelerômetro triaxial. A partir da síntese de um regulador linear quadrático em conjunto com um filtro de Kalman discreto, ele desenvolveu um controlador LQG de modo que o sistema pudesse seguir uma referência de altitude, obtendo resultados satisfatórios do ponto de vista de eficiência energética da máquina e precisão e agilidade no seguimento da trajetória de referência.

Enquanto muitos trabalhos visam simular e utilizar o quadricóptero apenas ao redor do ponto de operação, usualmente o de pairagem (“hovering”), Hofmann et al. (2007) abordaram os problemas causados quando a aeronave é operada em regimes de voo não usuais, investigando três efeitos aerodinâmicos distintos, ocasionados pela velocidade de voo do veículo, ângulo de ataque das hélices e aerodinâmica da estrutura da máquina, sendo que os resultados computacionais foram, quando possível, postos à prova através de testes de voo com um protótipo.

Mokhtari, Benallegue e Daachi (2006) sintetizaram um controlador robusto do tipo GH_∞ em conjunto com a técnica de linearização por realimentação (“feedback linearization”) em um modelo não linear de um quadricóptero. A saturação dos atuadores e limitações nas saídas do espaço de estados foram introduzidas de modo a analisar o pior cenário ao qual a aeronave pudesse estar submetida. O resultado evidenciou que, com a escolha adequada das matrizes de ponderação, o controlador se mostrou satisfatoriamente robusto quando a planta é submetida a incertezas paramétricas, distúrbios externos e ruídos de medida.

Miller (2008) sintetizou controladores do tipo PD para cada eixo de movimento do quadricóptero com o objetivo de seguir uma trajetória de referência constante. A robustez do controlador foi analisada através da inserção de incertezas devido a dinâmicas não modeladas e distúrbios como o vento, gerando como conclusão que é necessário o uso de controladores mais complexos para contornar as dinâmicas não modeladas da aeronave.

Ballas (2007) utilizou-se de um modelo não linear para controlar a posição e o ângulo de guinada de um quadricóptero do tipo Draganflyer Xpro. Foram desenvolvidas três metodologias envolvendo controladores do tipo PID e reguladores lineares quadráticos, com o objetivo de analisar o desempenho e a estabilidade quando a aeronave era submetida a manobras agressivas, atingindo resultados satisfatórios.

Geisert e Mansard (2016) sintetizaram um controlador utilizando-se da abordagem do “direct multiple shooting”, a qual possibilita resolver diversos problemas complexos com pouco desenvolvimento analítico. Os resultados se mostraram satisfatórios para uma gama de problemas, tais como seguir uma trajetória constante e controle de um quadricóptero carregando uma carga presa por um cabo.

Rajappa et al. (2016) utilizaram um controlador robusto adaptativo para sintetizar um seguidor de referência para um quadricóptero. A lei de adaptação proposta é dotada da vantagem de não ser necessário o conhecimento dos limites superiores das incertezas inseridas no modelo, sendo que os resultados validaram a eficiência do controlador frente à essas incertezas.

Zhang et al. (2017) modelaram e simularam um quadricóptero do tipo VTOL UAV empregando diversas técnicas para melhorar o modelo utilizado, tais como: otimização dos parâmetros aerodinâmicos do veículo com base nos resultados obtidos em teste em túnel de vento;

consideração da degradação do empuxo e torque gerados pelo conjunto propulsor quando o quadricóptero movimenta-se horizontalmente; uso de quaternions na modelagem rotacional do veículo, entre outros. Os resultados evidenciaram que o modelo desenvolvido é uma boa referência para síntese e análise de diversos tipos de controladores.

Embora haja diversos outros trabalhos abordando o tema, não se pretende fazer uma revisão extensiva, valendo a pena ressaltar que haverá nesta dissertação uma preocupação com o problema de robustez do controlador para um voo nos seis graus de liberdade, algo ainda não solucionado satisfatoriamente devido às limitações dos modelos matemáticos atualmente empregados.

1.3 PROBLEMA ABORDADO

O quadricóptero é formado por três sistemas interligados entre si inseridos em seu corpo principal: o conjunto propulsor, composto por quatro rotores com rotação independente; os sensores, compostos por um acelerômetro triaxial e um giroscópio triaxial; e o sistema de controle, que recebe as informações provenientes dos sensores e envia comandos aos atuadores, ou seja, o conjunto propulsor, de modo que o veículo execute a função a ele designada.

Figura 1 - STARMAC II quadrirrotor

Fonte: Hoffmann, Huang, Waslander e Tomlin (2007).

O princípio de funcionamento é baseado no fato de que cada conjunto propulsor, ao operar, produz torques e empuxos sobre a aeronave, fazendo-a se movimentar conforme solicitado pelo operador. Visando a estabilidade do VANT, sem variação de posição linear nem angular (*hovering*), os rotores não são idênticos: apesar de o empuxo produzido pelos propulsores ser

num mesmo sentido, dois dos rotores operam com rotação invertida relativamente aos outros com o objetivo de que o torque líquido atuante sobre a máquina seja nulo, fato que possibilita o movimento de pairagem (DOMINGUES, 2009, p. 1). A diferença entre os rotores é no formato das suas pás. Para uma rotação no sentido horário, o rotor dianteiro e o traseiro geram um empuxo para cima, empurrando o ar, e os rotores laterais geram um empuxo para baixo, puxando o ar, sendo assim chamados de empurradores (“pushers”) e puxadores (“pullers”), respectivamente, conforme é mostrado na Figura 2, à direita e à esquerda, nesta ordem.

Figura 2 - Hélices do tipo empurrador e puxador

Fonte: Domingues (2009).

A modelagem do quadricóptero é feita utilizando um modelo com seis graus de liberdade: três translações do seu centro de gravidade e três rotações. Com relação às rotações, definem-se três parâmetros dinâmicos: os ângulos de rolagem φ , arfagem θ , e guinada ψ , rotações referentes aos eixos x , y e z , respectivamente. Na Figura 3, são explicitados os seis movimentos possíveis da aeronave.

Figura 3 - Movimentos possíveis do quadricóptero e identificação dos motores

Fonte: Autoria própria.

2 MODELAGEM

2.1 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

A fim de reduzir o grau de complexidade do problema, uma série de hipóteses são adotadas. No decorrer do texto hipóteses mais específicas serão apresentadas:

- a) A estrutura do quadricóptero é considerada como um corpo rígido;
- b) A variação de altura não influencia a aceleração da gravidade g , considerada constante;
- c) Não são consideradas forças de atrito entre as partes móveis e fixas do rotor;
- d) O centro de gravidade do quadricóptero coincide com seu centro geométrico e sua distribuição de massa é simétrica em relação aos dois eixos ortogonais entre si que passam pelo centro geométrico e têm direção horizontal;
- e) Não se considera a dinâmica do circuito elétrico que alimenta os motores, uma vez que sua capacitância e indutância equivalentes são desprezíveis;
- f) A força de arrasto é aplicada no centro de gravidade do veículo;
- g) Os únicos elementos com massa não desprezível são o corpo principal e os motores;

Todos os parâmetros do modelo são constantes em relação ao tempo e ao espaço.

2.2 MODELAGEM DO CONJUNTO PROPULSOR

Cada um dos quatro conjuntos propulsores é composto por um motor elétrico e por uma hélice que pode ser do tipo empurrador, ou puxador. Como o tipo de hélice apenas define o sentido do empuxo conforme o sentido da rotação, todas as hélices são modeladas da mesma maneira. O modelo do motor e da hélice, assim como seus parâmetros são definidos nas seções 2.5.1 e 2.5.2, respectivamente.

2.2.1 Modelagem da hélice

Uma hélice típica pode ser representada por três parâmetros: o coeficiente de empuxo c_T , o coeficiente de potência c_P e o raio r_H . Deste modo, o empuxo T_M e a potência fornecida P_M podem ser calculados pelas seguintes equações (DOMINGUES, 2009, p. 15), sendo ρ a densidade do ar local:

$$T_M = c_T \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^4}{\pi^2} \cdot \omega^2 \quad (1)$$

$$P_M = c_P \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^5}{\pi^3} \cdot \omega^3 \quad (2)$$

Como pode-se notar, tanto o empuxo quanto a potência crescem rapidamente com o raio da hélice. Deste modo, se o raio é suficientemente grande, a velocidade angular do motor ω requerida não é demasiadamente elevada.

A potência fornecida relaciona-se com o torque produzido por cada hélice M_H da seguinte forma:

$$P_M = \omega \cdot M_H \quad (3)$$

Desenvolvendo a equação acima, o torque vale:

$$M_H = c_P \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^5}{\pi^3} \cdot \omega^2 \quad (4)$$

Desta forma, definem-se a constante de momento K_M e a constante de empuxo K_T da seguinte forma:

$$K_M = c_P \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^5}{\pi^3} \quad (5)$$

$$K_T = c_T \cdot \frac{4 \cdot \rho \cdot r_H^4}{\pi^2} \quad (6)$$

Finalmente, pode-se relacionar o momento e o empuxo da seguinte maneira:

$$M_H = \frac{K_M}{K_T} \cdot T_M \quad (7)$$

Daí, define-se como constante da hélice K_{TM} a seguinte relação:

$$K_{TM} = \frac{c_P \cdot r_H}{c_T \cdot \pi} \quad (8)$$

2.2.2 Modelagem do motor

O motor a ser utilizado é de corrente contínua, controlado por uma corrente de armadura e sem escovas. O motivo da escolha se dá pelo fato de estes motores serem mais leves em relação aos de combustão interna, não necessitarem de manutenção frequente e por terem maior potência e eficiência (DOMINGUES, 2009, p. 18).

Como o motor é controlado por armadura, sua velocidade angular relaciona-se com a tensão V_{mot} aplicada da seguinte forma:

$$\omega = K \cdot V_{mot} \quad (9)$$

Denota-se por K a constante do motor.

Motores elétricos de corrente contínua podem ter sua função de transferência descrita por dois polos reais, sendo cada um associado a uma constante de tempo elétrica e a uma mecânica; além de um ganho. Como o polo associado à constante de tempo elétrica situa-se mais distante do eixo imaginário que o outro, a dinâmica do sistema é comandada pelo polo associado à constante de tempo mecânica, mais próximo do eixo imaginário. Deste modo, o motor pode ser modelado como um sistema de primeira ordem (DOMINGUES, 2009, p. 32). Assim:

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \quad (10)$$

No caso do motor em questão, a saída é a velocidade angular e a entrada é a tensão. Aplicando a transformada inversa de Laplace à função de transferência, vem:

$$\dot{\omega} = \frac{K \cdot V_{mot} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} - \omega}{\tau} \quad (11)$$

Motores elétricos de corrente contínua apresentam duas não linearidades inerentes, sendo estas a saturação e a zona morta (DOMINGUES, 2009, p. 22). Para a modelagem, é considerado que o motor responde imediatamente a um degrau de tensão. Posteriormente, será retomada a equação diferencial que rege a dinâmica do motor.

a) Modelagem da saturação

Um saturador permite a passagem de um sinal sem distorção até que sua amplitude alcance um limite (GARCIA, 2009, p. 242). Para valores acima deste ponto, a saída é mantida constante num patamar.

Particularizando para o motor em questão e admitindo e que não haja tensões negativas, pode-se equacionar a saturação da seguinte forma:

$$\omega(V_{mot}) = K \cdot V_{mot} \text{ para } 0 < V_{mot} < V_{sat} \quad (12)$$

$$\omega(V_{mot}) = K \cdot V_{sat} \text{ para } V_{mot} \geq V_{sat} \quad (13)$$

b) Modelagem da zona morta

A zona morta consiste em uma região onde a saída independe da entrada e vale sempre zero. Deste modo, particularizando para o motor em questão, vem:

$$\omega(V_{mot}) = 0 \text{ para } 0 < V_{mot} < V_{mot_0} \quad (14)$$

$$\omega(V_{mot}) = K \cdot (V_{mot} - V_{mot_0}) \text{ para } V_{mot} \geq V_{mot_0} \quad (15)$$

Na Figura 4 é ilustrada a velocidade angular do motor em função da tensão a ele aplicada, já incluindo as não linearidades.

Figura 4 - Ilustração dos efeitos da saturação e da zona morta

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que para uma resposta desejada, o motor deve operar na região linear, ou seja, depois da zona morta e antes da saturação, uma vez que apenas nesta região é possível ter uma saída que varie conforme a entrada. Deste modo, a rotação que o motor fornece no trecho linear de operação pode ser calculada pela seguinte equação, já considerando a dinâmica do sistema:

$$\dot{\omega} = \frac{K \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \cdot (V_{mot} - V_{mot_0}) - \omega}{\tau} \quad (16)$$

2.3 MODELAGEM DO QUADRICÓPTERO

Para a modelagem da aeronave, devem-se definir dois sistemas de coordenadas: um referencial móvel solidário à máquina O_{xyz} , com sua origem coincidindo com o centro de gravidade do quadricóptero CG ; e um referencial fixo solidário à Terra O_{XYZ} . Nota-se que, apenas no referencial fixo, o teorema do movimento do baricentro e o teorema do momento angular podem ser aplicados, uma vez que apenas este é inercial (DOMINGUES, 2009, p. 25).

Figura 5 - Referencial inercial e não inercial

Fonte: Autoria própria.

2.3.1 Variáveis de estado

De modo a modelar, simular e controlar o quadricóptero é necessária a definição das variáveis de estado, aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis que são capazes de determinar o estado de um sistema dinâmico (OGATA, 2010, p. 25).

Neste caso, as variáveis de estado são os ângulos de Euler relativos ao referencial fixo φ , θ e ψ , que representam os movimentos de rolagem, arfagem e guinada; suas respectivas velocidades angulares com relação ao referencial móvel P , Q e R ; a posição do centro de gravidade do quadricóptero X , Y e Z em relação ao referencial fixo e suas velocidades lineares U , V e W , em relação ao referencial móvel.

2.3.2 Matrizes de rotação

Para que se obtenha o equacionamento completo da máquina, é necessário relacionar o comportamento dinâmico do referencial móvel com o fixo. As matrizes de rotação $R(\varphi)$, $R(\theta)$ e $R(\psi)$ podem ser utilizadas para tal.

Para deduzi-las, basta supor que apenas uma rotação ocorre por vez. Assim, para o sistema de coordenadas O_{XYZ} que sofre uma rotação de ângulo φ em torno de x , gerando um novo sistema de coordenadas O_{xyz} e relacionando as coordenadas de um ponto genérico do sistema de coordenadas novo $P(x, y, z)$ com o antigo $P(X, Y, Z)$, vem:

$$P(x, y, z) = S_R \cdot P(X, Y, Z) \quad (17)$$

A análise é análoga para as outras matrizes de rotação. Assim, elas valem:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & s\varphi \\ 0 & -s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Denotam-se por s, c e t as abreviaturas para $\sin$, $\cos$ e $\tan$, respectivamente.

Define-se como matriz de mudança de referencial S_R o produto $R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot R(\psi)$. Deste modo, esta matriz assume a seguinte forma:

$$S_R = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\psi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi & c\varphi \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi & s\varphi \cdot c\theta \\ c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi & s\theta \cdot c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi & c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.3.3 Equações de movimento

Aplicando o teorema do movimento do baricentro no quadricóptero, tem-se que a resultante das forças externas F_R vale:

$$F_R = \frac{d}{dt}[m \cdot v]_{CG} + \omega_Q^T \times [m \cdot v]_{CG} \quad (22)$$

Onde:

$$v = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\omega_Q = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (24)$$

O termo $\omega_Q^T \times [m \cdot v]_{CG}$ é adicionado para que o teorema possa ser aplicado em qualquer referencial, inercial ou não (PHILLIPS, 2009, p. 609). Nota-se que a massa total do quadricóptero m é constante em relação ao tempo.

A força peso P_Q representada no referencial não inercial pode ser calculada através da seguinte equação:

$$P_Q = m \cdot S_R \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = m \cdot g \cdot \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \cdot s\varphi \\ c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} \quad (25)$$

A força de arrasto que atua sob a aeronave pode ser calculada do seguinte modo (WHITE, 2011, p. 505):

$$F_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot U^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot V^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot W^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Aplicando a transformação de coordenadas fixas para as móveis, tem-se:

$$F_A = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_P \cdot C_A \cdot \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi \cdot U^2 + c\theta \cdot s\psi \cdot V^2 - s\theta \cdot W^2 \\ (s\psi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi) \cdot U^2 + (c\varphi \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi) \cdot V^2 + s\varphi \cdot c\theta \cdot W^2 \\ (c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi) \cdot U^2 + (s\theta \cdot c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi) \cdot V^2 + c\theta \cdot c\varphi \cdot W^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Define-se como F_P o empuxo total gerado pelo conjunto propulsor:

$$F_P = \begin{bmatrix} F_{P_x} \\ F_{P_y} \\ F_{P_z} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Assim, a resultante das forças externas que atuam sob o quadricóptero vale:

$$F_R = F_P + P_Q - F_A \quad (29)$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} F_{P_x} \\ F_{P_y} \\ F_{P_z} \end{bmatrix} + g \cdot \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \cdot s\varphi \\ c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \cdot W - R \cdot V \\ R \cdot U - P \cdot W \\ P \cdot V - Q \cdot U \end{bmatrix} - \frac{F_A}{m} \quad (30)$$

Como se está tratando do referencial solidário, tem-se que o empuxo é sempre na direção z . Deste modo:

$$F_{P_x} = 0 \quad (31)$$

$$F_{P_y} = 0 \quad (32)$$

$$F_{P_z} = -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \quad (33)$$

O sinal negativo é devido ao fato de o eixo z ser orientado para baixo, no sentido oposto ao dos empuxos gerados pelos motores. Finalmente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix} + g \cdot \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \cdot s\varphi \\ c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \cdot W - R \cdot V \\ R \cdot U - P \cdot W \\ P \cdot V - Q \cdot U \end{bmatrix} - \frac{F_A}{m} \quad (34)$$

Aplicando o teorema do momento angular no quadricóptero e tomando como polo o centro de gravidade, o momento do sistema de forças externas em relação seu baricentro M_R vale:

$$M_R = \frac{d}{dt} [I \cdot \omega_Q]_{CG} + \omega_Q \times [I \cdot \omega_Q]_{CG} \quad (35)$$

O termo $\omega_Q^T \times [I \cdot \omega_Q^T]_{CG}$ é adicionado para que o teorema possa ser aplicado em qualquer referencial, inercial ou não (PHILLIPS, 2009, p. 609). Nota-se que a matriz de inércia I é constante em relação ao tempo.

A matriz de inércia de um sólido em relação a um referencial ortogonal, que neste caso será o móvel O_{xyz} , define-se por (FRANÇA; MATSUMURA, 2004, p. 183):

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (36)$$

Considerando que os eixos do referencial móvel são os eixos principais de inércia em relação ao centro de gravidade, tem-se que a matriz de inércia possui somente termos não nulos em sua diagonal principal, os quais são chamados de momentos principais de inércia (FRANÇA; MATSUMURA, 2004, p. 184). Assim, vem:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pode-se modelar o quadricóptero como uma massa concentrada, que representa seu corpo principal, com quatro barras que conectam o corpo aos motores, também modelados como massas concentradas, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Indicação das massas e braços do quadricóptero

Fonte: Autoria própria.

É válido assumir como hipótese simplificadora o fato de que a massa das barras é desprezível frente à massa dos motores m_M e do corpo m_C e de que tanto os motores como o corpo são pontos materiais. Deste modo, os momentos de inércia principais podem ser calculados pelas seguintes expressões:

$$I_x = 2 \cdot m_M \cdot b^2 \quad (38)$$

$$I_y = 2 \cdot m_M \cdot b^2 \quad (39)$$

$$I_z = 4 \cdot m_M \cdot b^2 \quad (40)$$

O corpo não contribui para o momento de inércia do quadricóptero uma vez que este é modelado como uma massa concentrada, a qual não possui momento de inércia em torno de seu próprio eixo.

Os momentos atuantes na aeronave são os momentos de rolagem M_x , de arfagem M_y , e de guinada M_z , cada um nas direções x , y e z , respectivamente. Tanto a força peso como a de arrasto não causam momentos sob o quadricóptero pois são ambas aplicadas em seu centro de

gravidade. Assim, os momentos podem ser calculados pelas seguintes equações (DOMINGUES, 2009, p. 28):

$$M_r = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$M_x = (T_4 - T_2) \cdot b \quad (42)$$

$$M_y = (T_1 - T_3) \cdot b \quad (43)$$

$$M_z = (T_1 + T_3 - T_2 - T_4) \cdot K_{TM} \quad (44)$$

Desenvolvendo, vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(T_4 - T_2) \cdot b}{I_x} \\ \frac{(T_1 - T_3) \cdot b}{I_y} \\ \frac{(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) \cdot K_{TM}}{I_z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_y)}{I_x} \cdot Q \cdot R \\ \frac{(I_x - I_z)}{I_y} \cdot R \cdot P \\ \frac{(I_y - I_x)}{I_z} \cdot P \cdot Q \end{bmatrix} \quad (45)$$

Conforme descrito anteriormente, pode-se utilizar a matriz de mudança de referencial para a mudança entre referenciais. Deste modo, a conversão das velocidades do quadricóptero vistas do referencial fixo para o móvel ficam:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = S_R \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Como a matriz de mudança de referencial é ortogonal, sua inversa é igual a sua transposta. Deste modo:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = S_R^T \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi \cdot U + (s\psi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi) \cdot V + (c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi) \cdot W \\ c\theta \cdot s\psi \cdot U + (c\varphi \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi) \cdot V + (s\theta \cdot c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi) \cdot W \\ -s\theta \cdot U + s\varphi \cdot c\theta \cdot V + c\theta \cdot c\varphi \cdot W \end{bmatrix} \quad (48)$$

Observa-se que as derivadas dos ângulos de Euler não são as velocidades angulares em relação ao referencial móvel. Se um sólido está girando a uma taxa constante, sua velocidade angular é constante, porém as derivadas dos ângulos de Euler variam, pois dependem dos ângulos instantâneos entre as coordenadas do referencial fixo e as do referencial móvel (DOMINGUES, 2009, p. 29). Deste modo tem-se:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot R(\psi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Desenvolvendo a equação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\varphi & s\varphi \cdot c\theta \\ 0 & -s\varphi & c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Isolando o vetor das derivadas dos ângulos de Euler, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t\theta \cdot s\varphi & t\theta \cdot c\varphi \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi/c\theta & c\varphi/c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (51)$$

Finalmente, obtiveram-se todas as derivadas das variáveis de estado para modelar o quadricóptero.

Desta forma, o modelo matemático do quadricóptero é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix} + g \cdot \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \cdot s\varphi \\ c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q \cdot W - R \cdot V \\ R \cdot U - P \cdot W \\ P \cdot V - Q \cdot U \end{bmatrix} - \frac{F_A}{m} \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(T_4 - T_2) \cdot b}{I_x} \\ \frac{(T_1 - T_3) \cdot b}{I_y} \\ \frac{(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) \cdot K_{TM}}{I_z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_y)}{I_x} \cdot Q \cdot R \\ \frac{(I_x - I_z)}{I_y} \cdot R \cdot P \\ \frac{(I_y - I_x)}{I_z} \cdot P \cdot Q \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi \cdot U + (s\psi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi) \cdot V + (c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi) \cdot W \\ c\theta \cdot s\psi \cdot U + (c\varphi \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi) \cdot V + (s\theta \cdot c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi) \cdot W \\ -s\theta \cdot U + s\varphi \cdot c\theta \cdot V + c\theta \cdot c\varphi \cdot W \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t\theta \cdot s\varphi & t\theta \cdot c\varphi \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi/c\theta & c\varphi/c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (55)$$

2.4 LINEARIZAÇÃO

Nota-se que as equações do sistema obtidas têm três tipos de não-linearidade: as quadráticas, presentes nas equações de movimento e a zona morta e a saturação, presentes na dinâmica dos motores elétricos.

2.4.1 Ponto de operação

Admite-se que o ponto de operação desejado seja aquele onde o quadricóptero esteja estável e planando a uma certa altitude z do solo, no movimento de pairagem. Deste modo o vetor de estados do sistema x assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_0 &= [X \ Y \ Z \ \varphi \ \theta \ \psi \ U \ V \ W \ P \ Q \ R \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^T \\ &= [0 \ 0 \ -z \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega_0 \ \omega_0 \ \omega_0 \ \omega_0]^T \end{aligned} \quad (56)$$

Nesta posição, cada um dos conjuntos propulsores deve fornecer um empuxo equivalente a um quarto da força peso (DOMINGUES, 2009, p. 46) de modo que o quadricóptero permaneça planando na altura desejada. Fazendo um equilíbrio de forças na direção z , tem-se:

$$T_i = \frac{P_Q}{4}, i = 1,2,3,4 \quad (57)$$

Desenvolvendo a equação, pode-se determinar a rotação de equilíbrio que cada conjunto propulsor deve fornecer ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4 \cdot r_H^2} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g}{c_T \cdot \rho}} \quad (58)$$

Ao se linearizar uma função, deve se expandir a função não-linear em série de Taylor em torno do ponto estacionário, desprezando todos os termos envolvendo derivadas de ordens superiores à primeira (GARCIA, 2009, p. 55), conforme a equação a seguir:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (59)$$

$$\dot{x} \cong f(x_0, u_0) + \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} \cdot (x - x_0) + \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} \cdot (u - u_0) \quad (60)$$

Como $f(x_0, u_0) = 0$, tem-se:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} \cdot (x - x_0) + \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} \cdot (u - u_0) \quad (61)$$

Definindo $\tilde{x} = x - x_0$, pode-se utilizar a seguinte representação no espaço de estados:

$$\dot{\tilde{x}} = A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{u} \quad (62)$$

$$\tilde{y} = C \cdot \tilde{x} + D \cdot \tilde{u} \quad (63)$$

Onde A é a matriz de estado, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída e D é a matriz de transmissão direta (OGATA, 2010, p. 27).

Assim, linearizando as equações, tem-se:

$$A = [A_{11} \quad A_{12}] \quad (64)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2 \cdot r_H^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot c_T \cdot \rho}{m}} \\ 0 \\ \frac{2 \cdot r_H^2 \cdot b}{\pi \cdot I_y} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} \\ \frac{2 \cdot r_H^2 \cdot K_{TM}}{\pi \cdot I_z} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} \\ -\frac{1}{\tau} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (65)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2 \cdot r_H^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot c_T \cdot \rho}{m}} & -\frac{2 \cdot r_H^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot c_T \cdot \rho}{m}} & -\frac{2 \cdot r_H^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot c_T \cdot \rho}{m}} \\ -\frac{2 \cdot r_H^2 \cdot b}{\pi \cdot I_x} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} & 0 & \frac{2 \cdot r_H^2 \cdot b}{\pi \cdot I_x} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} \\ 0 & -\frac{2 \cdot r_H^2 \cdot b}{\pi \cdot I_y} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} & 0 \\ -\frac{2 \cdot r_H^2 \cdot K_{TM}}{\pi \cdot I_z} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} & \frac{2 \cdot r_H^2 \cdot K_{TM}}{\pi \cdot I_z} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} & -\frac{2 \cdot r_H^2 \cdot K_{TM}}{\pi \cdot I_z} \cdot \sqrt{g \cdot c_T \cdot \rho \cdot m} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (66)$$

[illegible]

Nota-se que o arrasto é eliminado na linearização devido ao fato de que a aeronave se encontra parada no ponto de operação, assim como a zona morta, pois os motores estão operando na região linear. As matrizes C e D são determinadas na seção 2.6.3.

2.5 PARÂMETROS

2.5.1 Parâmetros da hélice

A hélice a ser usada é o modelo EPP1045 com raio $r_H = 0,127\text{ m}$ (DOMINGUES, 2009, p. 15). Os coeficientes de potência e empuxo ambos são função da taxa de avanço J , que pode ser calculada pela seguinte equação (DOMINGUES, 2009, p. 15):

$$J = \frac{30 \cdot u_0}{\omega \cdot r_H} \quad (68)$$

A partir dessa grandeza podem-se obter os coeficientes dos gráficos a seguir:

Figura 7 - Coeficiente de empuxo pela taxa de avanço

Fonte: Domingues (2009).

Figura 8 - Coeficiente de potência pela taxa de avanço

Fonte: Domingues (2009).

Considerando que a velocidade da aeronave é baixa, a taxa de avanço aproxima-se de zero e os coeficientes de empuxo e de potência tornam-se constantes (DOMINGUES, 2009, p. 15). Assim, $c_T = 0,1154$ e $c_P = 0,0743$.

A densidade do ar é considerada constante e igual a $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$.

Desta forma, tem-se que o empuxo e a potência fornecida por um conjunto propulsor valem:

$$T_M = 1,46 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2 \quad (69)$$

$$P = 3,80 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^3 \quad (70)$$

Finalmente, a constante da hélice vale $K_{TM} = 0,026 m$.

2.5.2 Parâmetros do motor

O modelo do motor a ser utilizado é o BL-Outrunner 2824-34 (DOMINGUES, 2009, p. 18). Conforme já descrito, o motor elétrico pode ser modelado como um sistema de primeira ordem com saturação e zona morta, sendo caracterizado por um ganho, uma constante de tempo, uma tensão mínima de alimentação e uma rotação máxima que valem $K = 1100 \frac{rpm}{V}$, $\tau = 0,136 s$, $V_{mot_0} = 0,941 V$ e $\omega_{max} = 12100 rpm$.

Assim, a rotação que o motor fornece no trecho linear de operação vale:

$$\dot{\omega} = \frac{1100 \cdot (V_{mot} - 0,941) - \omega}{0,136} \quad (71)$$

A Figura 9 ilustra a resposta a um degrau de 5 V da velocidade angular do motor.

Figura 9 - Resposta a um degrau de 5V da velocidade angular do motor

Fonte: Autoria própria.

a) Cálculo da rotação de operação

A equação que calcula a rotação de operação já foi deduzida na seção 2.4.1 e seu valor é $\omega_0 = 3544 \text{ rpm}$.

Nota-se que o valor se situa na região linear do motor, bem abaixo do limite de saturação, possibilitando uma grande faixa de operação.

2.5.3 Parâmetros do quadricóptero

Os parâmetros do quadricóptero são a massa do corpo principal, a massa dos motores, o braço dos momentos de rolagem e arfagem e os produtos principais de inércia, que valem $m_c = 0,628 \text{ kg}$, $m_M = 0,048 \text{ kg}$, $b = 0,290 \text{ m}$, $I_x = 8,074 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_y = 8,074 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot$

m^2 e $I_z = 1,615 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (DOMINGUES, 2009, p. 37). A aceleração da gravidade vale $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2.5.4 Matrizes de estado e de entrada

Substituindo os valores dos parâmetros nas matrizes de estado e entrada, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,013 & -0,013 & -0,013 & -0,013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,389 & 0 & 0,389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,389 & 0 & -0,389 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,018 & -0,018 & 0,018 & -0,018 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,353 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,353 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,353 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 846,998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 846,998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 846,998 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 846,998 \end{bmatrix}^T \quad (73)$$

2.6 SENSORES

Um sensor, ou elemento de medição, é um dispositivo que converte a variável de saída em outra variável conveniente que pode ser utilizada para comparar a saída ao sinal de entrada de referência (OGATA, 2010, p. 16).

Sensores são essenciais em sistemas de controle uma vez que são eles os responsáveis por mensurar as saídas a fim de reconstruir o vetor de estados do problema abordado.

Para o projeto em questão, são utilizados dois tipos de sensores: um acelerômetro triaxial, ou seja, capaz de executar medições nos três eixos cartesianos e um giroscópio triaxial.

2.6.1 Acelerômetro

O acelerômetro é o dispositivo mais importante para medição de vibrações, choques mecânicos e aferição de movimentos absolutos em geral. É muito popular devido a sua larga banda de resposta em frequência, indo de zero a altos valores, e devido ao fato de que deslocamentos e velocidades são facilmente obtidas através de integradores elétricos (DOEBELIN, 1990, p. 323).

Para esta modelagem, considerar-se-á que tanto a dinâmica do integrador quanto a do acelerômetro são desprezíveis frente à do quadricóptero, portando a aferição da posição do centro de gravidade em relação ao referencial fixo é instantânea.

2.6.2 Giroscópio

O giroscópio é o dispositivo utilizado para aferição de movimentos rotacionais absolutos em geral, utilizando-se de integradores elétricos para obter os deslocamentos e velocidades angulares (DOEBELIN, 1990, p. 346).

Para esta modelagem, considerar-se-á que tanto a dinâmica do integrador quanto a do giroscópio são desprezíveis frente à do quadricóptero, portando a aferição dos ângulos de Euler em relação ao referencial fixo é instantânea.

2.6.3 Matrizes de saída e de transmissão direta

Após a modelagem de todos os sensores, podem-se definir as saídas do problema abordado:

$$y = [X \quad Y \quad Z \quad \varphi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (74)$$

Finalmente, tem-se que as matrizes de saída e de transmissão direta valem:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Nota-se que como a matriz de transmissão direta é nula, as entradas do sistema não influenciam diretamente nas saídas.

2.7 DETERMINAÇÃO DOS POLOS DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

Os polos de um sistema descrito no espaço de estados são os autovalores da matriz de estado A , os quais são determinadores da resposta deste em malha aberta (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 135). Deste modo, calculando-se os autovalores da matriz de estado A da planta, tem-se que $p_{MA_i} = 0$ para $i = [1:12]$ e $p_{MA_j} = -7,353$ para $j = [13:16]$.

2.8 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

Para sistemas lineares e invariantes no tempo, a análise dos polos em malha aberta do sistema permite classificá-lo quanto a sua estabilidade:

- a) Se todas as partes reais dos polos em malha aberta forem menores que zero, o sistema é assintoticamente estável, ou seja, a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial;
- b) Se qualquer um dos polos portar parte real positiva, o sistema é instável, ou seja, a saída pode divergir indefinidamente a partir do estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma condição inicial;

- c) Se todos os polos em malha aberta tiverem partes reais não positivas, porém um ou mais polos tiverem parte real zero e se todos estes polos forem raízes da equação característica com multiplicidade 1, o sistema é estável, mas não assintoticamente;
- d) Se todos os polos em malha aberta tiverem partes reais não positivas, porém um ou mais polos tiverem parte real zero e se algum destes polos forem raízes da equação característica com multiplicidade maior que 1, o sistema é instável.

Nota-se que o polo 0 tem multiplicidade 12 e, portanto, o sistema é instável.

3 PROJETO DOS CONTROLADORES

Um regulador é um tipo de controlador que visa levar o sistema a um estado de equilíbrio quando este é submetido a alguma perturbação, seja esta uma condição inicial e/ou um distúrbio.

Devido ao fato da falta de informações e de bibliografia sobre as frequências naturais e fatores de amortecimento dos polos que devem ser alocados, os reguladores a serem projetados são obtidos a partir do método do regulador linear quadrático. Posteriormente, um observador de estados será projetado para assim dar-se início ao projeto dos seguidores.

3.1 ANÁLISE DE CONTROLABILIDADE E DE OBSERVABILIDADE

Um sistema é dito controlável quando no instante t_0 , for possível por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010, p. 617).

Um sistema é dito observável se no instante t_0 , com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito (OGATA, 2010, p. 617).

A relevância dos conceitos de controlabilidade e observabilidade é justificada pelo fato de que a aplicação de certas técnicas de controle moderno necessitam que o sistema em questão seja totalmente controlável e observável.

Certos sistemas podem conter subsistemas não controláveis e/ou não observáveis. Um sistema é dito estabilizável se contém subsistemas incontroláveis, porém estáveis e instáveis, porém controláveis e é dito detectável se contém subsistemas não observáveis, porém estáveis e instáveis, porém observáveis (OGATA, 2010, pp. 623 e 628).

Define-se como matriz de controlabilidade $\mathbb{C}$ a seguinte relação:

$$\mathbb{C} = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B] \quad (77)$$

Um sistema invariante no tempo é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade $r(\mathbb{C})$ for igual à ordem do sistema (FRIEDLAND, 1986, p. 209).

Deste modo, foi verificado numericamente que $r(\mathbb{C}) = 16$. Assim, pode-se concluir que o sistema é totalmente controlável.

Define-se como matriz de observabilidade $\mathbb{O}$ a seguinte relação:

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (78)$$

Um sistema invariante no tempo é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade $r(\mathbb{O})$ for igual a ordem do sistema (FRIEDLAND, 1986, p. 210).

Deste modo, foi verificado numericamente que $r(\mathbb{O}) = 16$. Assim, pode-se concluir que o sistema é totalmente observável.

3.2 PROJETO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

O regulador linear quadrático, ou *LQR*, tem como objetivo otimizar a performance do sistema baseando-se na minimização de um índice de desempenho. Existem basicamente três tipos de reguladores: aqueles que otimizam o gasto de energia de controle, consumindo o mínimo para que o sistema chegue à referência; os que otimizam a resposta do sistema, fazendo com que esta se regule o mais rapidamente possível; e um misto dos dois tipos dos controladores, o qual será utilizado nesta dissertação.

3.2.1 Desenvolvimento matemático

Seja um sistema linear invariante no tempo descrito pela seguinte equação:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (79)$$

Definindo a lei de controle u e substituindo-a na equação anterior, temos:

$$u = -K_{LQR} \cdot x \quad (80)$$

$$\dot{x} = (A - B \cdot K_{LQR}) \cdot x \quad (81)$$

Se os elementos da matriz de ganhos do controlador K_{LQR} forem determinados com o objetivo de se minimizar o índice de desempenho, o controle será ótimo para qualquer estado inicial e o projeto do regulador está totalmente definido (OGATA, 2010, p. 718).

Pode-se definir o índice de desempenho J_{LQR} a partir da seguinte equação:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q_{LQR} \cdot x + u^T \cdot P_{LQR} \cdot u) \quad (82)$$

Onde as matrizes Q_{LQR} e P_{LQR} são as matrizes de ponderação do estado e da ação de controle, respectivamente. Q_{LQR} deve ser hermitiana semidefinida-positiva, hermitiana definida-positiva ou real simétrica e P_{LQR} deve ser hermitiana definida-positiva ou real simétrica.

Desenvolvendo, a matriz de ganhos do controlador é dada por (OGATA, 2010, p. 720):

$$K_{LQR} = P_{LQR}^{-1} \cdot B^T \cdot R_{LQR} \quad (83)$$

Onde R_{LQR} é a matriz de Ricatti, a qual deve ser definida positiva para que o sistema resultante seja estável e que pode ser determinada quando o intervalo de controle é infinito, (FRIEDLAND, 1986, p. 346), resolvendo-se a equação algébrica de Ricatti, que é apresentada a seguir (OGATA, 2010, p. 720):

$$A^T \cdot R_{LQR} + R_{LQR} \cdot A - R_{LQR} \cdot B \cdot P_{LQR}^{-1} \cdot B^T \cdot R_{LQR} + Q_{LQR} = 0 \quad (84)$$

3.2.2 Escolha dos termos das matrizes de ponderação

Os termos das matrizes de ponderação podem ser divididos em dois tipos: os termos diretos, ou seja, aqueles que influenciam somente uma variável de estado, localizando-se na diagonal

principal e os termos cruzados, que são aqueles que agem sobre mais de uma variável de estado, sendo estes os elementos restantes das matrizes.

Como não serão ponderados no índice de desempenho os termos cruzados da matriz de ponderação do estado, nem tampouco os termos cruzados da matriz de ponderação da ação de controle, as matrizes Q_{LQR} e P_{LQR} são diagonais (COZMAN, 1991). Este fato favorece a sensibilidade do projetista sobre o sistema, uma vez que cada elemento das matrizes de ponderação tem influência apenas sobre uma variável de estado ou sobre uma ação de controle. Nota-se que como o índice de desempenho deve ser minimizado, quanto maior o elemento da matriz de ponderação referente a uma certa variável de estado, menor é seu valor máximo na resposta do sistema.

Observando o vetor de estados do sistema, nota-se que as variáveis de estado podem ser classificadas entre três grupos: posições e velocidades do quadricóptero, sejam angulares ou lineares e rotações do motor. Deste modo, a ponderação entre as posições, independentemente do tipo, assim como entre as velocidades será a mesma, uma vez que cada uma destas é igualmente responsável pela precisão da posição do quadricóptero e pelo tempo despendido para que este chegue ao seu destino de maneira equânime, respectivamente. A exceção ocorre para o eixo z, pois tem uma dinâmica muito diferente dos outros dois eixos, como pode ser percebido analisando-se o modelo matemático do quadricóptero. Os termos que balizam as rotações dos motores e as tensões têm o mesmo fator de ponderação uma vez que não há diferenciação entre os sistemas de propulsão do quadricóptero.

Como o veículo é alimentado por uma bateria que se encontra embarcada, fazendo com que uma recarga com o quadricóptero em movimento seja inviável, há o objetivo de minimizar a energia de controle para que a aeronave atinja as coordenadas a ela designadas. Assim, em detrimento do tempo despendido para tal, os termos que ponderam a posição são balizados em relação aos que ponderam as ações de controle de modo que se tenha uma autonomia de voo razoável.

Uma técnica que pode ser aplicada para a determinação dos elementos das matrizes de ponderação é conhecida como regra de Bryson, onde cada elemento é calculado em função do valor limite que este pode assumir (DOMINGUES, 2009, p. 56), de acordo com a seguinte equação:

$$Q_{LQR_{ii}} = \frac{1}{x_{ii}^2} \quad (85)$$

$$P_{LQR_{jj}} = \frac{1}{u_{jj}^2} \quad (86)$$

A regra de Bryson é útil quando as unidades usadas na representação das variáveis de estado e das ações de controle provocam valores numericamente diferentes entre si, uma vez que uma ponderação baseada em valores máximos iguala os termos $x^T \cdot Q_{LQR} \cdot x$ e $u^T \cdot P_{LQR} \cdot u$ do índice de desempenho, corrigindo esta discrepância (HESPANHA, 2007, p. 11).

Nota-se que certas variáveis de estado não possuem valores limites determinados, como as posições lineares *pos* e as velocidades angulares do quadricóptero *rot*, sendo que os respectivos elementos da matriz de ponderação de estado são iterados até que se obtenha uma resposta satisfatória. Para o quadricóptero em questão, espera-se que este atinja a trajetória requisitada em no máximo 6 s, com desvios lineares e angulares máximos de 5 % em relação à posição de equilíbrio e 10 °, respectivamente.

As velocidades lineares máximas são calculadas considerando que a taxa de avanço seja a mais próxima possível do zero, de modo que se mantenha a hipótese de que os coeficientes de empuxo e de potência sejam constantes. Assim, tem-se que $J_{LQR} = 0,05$ e $v_{max} = 2,56 \frac{m}{s}$.

Já o ângulo de guinada não deve superar os 360° para que o quadricóptero não desenhe trajetórias repetitivas para chegar ao seu ponto de destino. Portanto, $\varphi_{max} = \theta_{max} = 90^\circ$ e $\psi_{max} = 360^\circ$.

As rotações máximas dos motores e suas tensões de alimentação são aquelas que levam o motor ao limite da saturação, ou seja, $\omega_{max} = 895,98 \frac{rad}{s}$ e $V_{max} = 7,79 V$.

Nota-se que os valores máximos das rotações e das tensões não são os máximos determinados previamente pois como o sistema foi modelado no espaço de estados e no formato de diferenças: $\tilde{x} = x - x_0$, o valor limite a ser considerado é o da saturação menos o da posição de equilíbrio.

Os termos rot_{max} , pos_{max} , φ_{max} e θ_{max} foram iterados até que se obtivesse uma resposta satisfatória para uma gama de condições iniciais diferentes. O método iterativo foi executado tendo em vista que o aumento de rot_{max} acarreta em um menor tempo de acomodação, em uma maior variação dos ângulos de Euler e das velocidades dos conjuntos propulsores e que o aumento de pos_{max} gera efeitos contrários. Também foi considerado como critério de seleção que os tempos de acomodação de os movimentos fossem semelhantes.

Na Tabela 1 são ilustrados os valores máximos relativos a cada variável de estado e a cada ação de controle já iterados. Todos os elementos da Tabela 1 estão com as unidades de acordo com o Sistema Internacional de Unidades.

Tabela 1 – Valores máximos das variáveis de estado na iteração final

v_{max}	pos_{max}	φ_{max}	θ_{max}	ψ_{max}	$P_{max} = Q_{max}$	Q_{max}	ω_{max}	V_{max}
2,56	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$2 \cdot \pi$	1	10	895,98	7,79

Fonte: Autoria própria.

3.2.3 Polos em malha fechada do regulador linear quadrático

Os polos em malha fechada do novo sistema dinâmico valem:

Tabela 2 – Polos de malha fechada do regulador linear quadrático

p_{LQR_1}	p_{LQR_2}	p_{LQR_3}	p_{LQR_4}
$-42,90 + 42,27 \cdot i$	$-42,90 - 42,27 \cdot i$	$-42,90 + 42,27 \cdot i$	$-42,90 - 42,27 \cdot i$
p_{LQR_5}	p_{LQR_6}	p_{LQR_7}	p_{LQR_8}
-10,16	$-7,48 + 2,43 \cdot i$	$-7,48 - 2,43 \cdot i$	-2,81
p_{LQR_9}	$p_{LQR_{10}}$	$p_{LQR_{11}}$	$p_{LQR_{12}}$
$-1,33 + 1,84 \cdot i$	$-1,33 + 1,84 \cdot i$	$-1,33 - 1,84 \cdot i$	$-1,33 - 1,84 \cdot i$
$p_{LQR_{13}}$	$p_{LQR_{14}}$	$p_{LQR_{15}}$	$p_{LQR_{16}}$
$-1,75 + 0,74 \cdot i$	$-1,75 - 0,74 \cdot i$	-1,91	-1,91

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 10 é ilustrado o mapa de polos em malha fechada:

Figura 10 - Mapa de polos em malha fechada do regulador linear quadrático

Fonte: Autoria própria.

3.2.4 Simulações em malha fechada com o regulador linear quadrático

Durante a análise da resposta do sistema a diferentes estados iniciais, será observado se os ângulos de arfagem e rolagem não ultrapassam o valor limite de 90° e se nenhuma rotação do conjunto propulsor atinge valores acima de 12100 rpm .

São analisadas 4 tipos de condições iniciais sob as quais o quadricóptero pode estar sujeito: posições lineares iniciais; ângulos de Euler iniciais; velocidades lineares iniciais e rotações dos conjuntos propulsores iniciais, todas diferentes de zero e com o mesmo objetivo: analisar o tempo de acomodação do quadricóptero t_s e seu afastamento máximo da posição de equilíbrio δ .

Foi escolhido o método de integração de Runge-Kutta, a ser utilizado computacionalmente.

b) Posições lineares iniciais diferentes de zero

Esta análise é importante pois simula a maneira como o quadricóptero se comporta quando este for solicitado a se movimentar de uma coordenada no espaço a outra, semelhante quando a máquina é controlada com um seguidor de referência constante, sendo esta a função para a qual o equipamento é mais solicitado.

Considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais as seguintes variáveis de estado não nulas: $X_0 = Z_0 = -1 \text{ m}$ e $Y_0 = 1 \text{ m}$.

Nas Figuras 11 e 12 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 11 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 12 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Observa-se que a dinâmica dos movimentos de translação nos eixos x e y assemelha-se à de um sistema de segunda ordem e no eixo z de um sistema de primeira ordem, aproximadamente. Isto pode ser afirmado devido ao fato de que os movimentos de translação horizontal apresentam resposta oscilatória dotada de sobressinal, enquanto o movimento de translação vertical não apresenta nenhuma destas características.

Portanto, pode-se inferir que os movimentos de translação nos eixos x e y , assim como os de arfagem e rolagem são representados pelos pares de polos imaginários e os movimentos de translação no eixo z e de guinada pelos polos reais.

Assim, é possível definir para as respostas dos subsistemas de segunda ordem um tempo de acomodação t_s e um máximo sobressinal M_p .

O tempo de acomodação é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa de 2% ou 5% em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente (OGATA, 2010, p. 155). Para esta e para as posteriores simulações, é utilizado o critério de 2% por ser o mais rigoroso.

O máximo sobressinal é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir do valor final, conforme a seguinte equação (OGATA, 2010, p. 155):

$$M_p = \frac{x(t_p) - x(\infty)}{x(\infty)} \quad (87)$$

Porém, essas características de desempenho são especificadas em termos da resposta transitória a uma entrada do tipo degrau unitário. Como as simulações anteriores ilustravam a resposta do sistema a condições iniciais não nulas, uma nova definição deve ser feita com base no sobressinal usual, sendo que este parâmetro de desempenho será denominado afastamento máximo da posição de equilíbrio δ . Já o conceito de tempo de acomodação permanece o mesmo, neste caso.

Define-se afastamento máximo da posição de equilíbrio δ como o valor máximo do pico da curva de resposta, medido a partir do zero, tanto para posições lineares quanto para angulares.

Estes parâmetros são importantes pois é a partir deles que se pode quantificar o tempo necessário para que o quadricóptero atinja a trajetória requisitada pelo controlador e o quanto a máquina desvia-se do destino para alcançá-lo, respectivamente.

Para a resposta devido às posições iniciais diferentes de zero, tem-se que $t_s = 2,90 \text{ s}$, $\delta_x = \delta_y = 0,03 \text{ m}$ e $\delta_\varphi = \delta_\theta = 7,97^\circ$.

Nota-se que o projeto do controlador foi bem executado, uma vez que os afastamentos máximos da posição de equilíbrio são baixos, fazendo com que o quadricóptero não se distancie demasiadamente do seu destino e o tempo de acomodação está dentro do requisitado, fazendo com que o quadricóptero chegue ao ponto final sem demorar demasiadamente.

Na Figura 13 é representada a variação das rotações dos conjuntos propulsores.

Figura 13 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para estas condições iniciais, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3924 \text{ rpm}$.

Analisando a Figura 13, nota-se que $\omega_1 = \omega_3$ e $\omega_2 = \omega_4$.

Este fato é vantajoso, pois nenhum dos quatro conjuntos propulsores fica sobrecarregado, sendo cada um igualmente responsável por levar o quadricóptero à posição de equilíbrio.

Na Figura 14 é ilustrada a variação das velocidades lineares do quadricóptero sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 14 - Variação de U , V e W pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para estas condições iniciais, os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = V_{max} = 0,79 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 1,38 \text{ m/s}$.

Pode-se observar que nenhum dos valores limites é ultrapassado, mantendo-se válida a hipótese dos coeficientes de empuxo e de potência serem constantes.

c) Ângulos de Euler iniciais diferentes de zero

O objetivo desta análise é simular a maneira como o quadricóptero se comporta quando está no limiar dos ângulos de arfagem e rolagem, além de analisar a velocidade de estabilização do ângulo de guinada, elemento ainda não simulado até agora.

Considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais as seguintes variáveis de estado não nulas: $\varphi_0 = \frac{\pi}{18}$, $\theta_0 = -\frac{\pi}{18}$ e $\psi_0 = \frac{\pi}{18}$.

Nas Figuras 15 e 16 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 15 - Variação de **X**, **Y** e **Z** pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para ângulos de Euler iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 16 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para ângulos de Euler iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Conforme esperado, o tempo de acomodação do sistema mantém-se o mesmo e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio em módulo valem $\delta_x = \delta_y = 0,15 \text{ m}$, $\delta_\varphi = \delta_\theta = 3,23^\circ$ e $\delta_\psi = 0,01^\circ$.

Nota-se que δ_ψ é quase zero, o que valida a hipótese de que a dinâmica do ângulo de guinada aproxima-se da de um sistema de primeira ordem.

Para estas condições iniciais, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3830 \text{ rpm}$ e os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = V_{max} = 0,27 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0 \text{ m/s}$.

Pode-se observar que nenhum dos valores limites é ultrapassado.

d) Velocidades lineares iniciais diferentes de zero

Nesta análise, verifica-se a habilidade do quadricóptero de frear quando este é submetido a velocidades iniciais diferentes de zero, e para tal é quantificado o tempo despendido e o desvio até que o estado de equilíbrio seja atingido.

Considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais as seguintes variáveis de estado não nulas: $U_0 = W_0 = -1 \text{ m/s}$ e $V_0 = 1 \text{ m/s}$.

Nas Figuras 17 e 18 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas em cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 17 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para velocidades lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 18 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com iteração final do regulador linear quadrático para velocidades lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para estas condições iniciais, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3664 \text{ rpm}$.

Conforme o esperado, o tempo de acomodação do sistema mantém-se o mesmo e o desvio do estado de equilíbrio vale $0,42\text{ m}$ nas translações nos eixos x e y e de $0,15\text{ m}$ para o eixo z , sendo que estas são as distâncias percorridas pelo quadricóptero até que este freie completamente.

Para estas condições iniciais, os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = V_{max} = W_{max} = 1\text{ m/s}$.

O resultado é esperado, evidenciando baixos afastamentos máximos da posição de equilíbrio. Pode-se então observar que nenhum dos valores limites foi ultrapassado.

e) Rotações dos conjuntos propulsores diferentes de zero

Nesta análise, verifica-se a habilidade do quadricóptero de se estabilizar quando por algum motivo, como picos de corrente, um ou mais motores sofre um salto na rotação, e para tal é quantificado o tempo despendido e o desvio até que o estado de equilíbrio seja atingido. Nesta análise, apenas um motor tem sua condição inicial alterada.

Considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais a seguinte variável de estado não nula: $\omega_{1_0} = 371,13\text{ rpm}$.

Nas Figuras 19 e 20 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 19 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para rotações dos conjuntos propulsores iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 20 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático para rotações dos conjuntos propulsores iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para esta condição inicial, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 7088 \text{ rpm}$ e os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,05 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0,19 \text{ m/s}$.

Observa-se que mesmo submetido a uma rotação duas vezes superior ao valor de equilíbrio, os afastamentos máximos da posição de equilíbrio são baixos e nenhum valor limite é ultrapassado.

3.3 SIMULAÇÕES EM MALHA FECHADA COM MODELO NÃO LINEAR

De modo a avaliar o desempenho e estabilidade do controlador linear quadrático quando este é submetido a operar com o modelo não linear do quadricóptero, a seguinte simulação é executada: considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais as seguintes variáveis de estado não nulas: $X_0 = Z_0 = -1 \text{ m}$ e $Y_0 = 1 \text{ m}$.

Nas Figuras 21 e 22 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 21 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 22 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para a resposta devido às posições iniciais diferentes de zero, tem-se que o tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 3,00 \text{ s}$, $\delta_x = \delta_y = 0,02 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 7,78^\circ$, $\delta_\theta = 7,74^\circ$ e $\delta_\psi = 0,52^\circ$.

Na Figura 23 é representada a variação das rotações dos conjuntos propulsores.

Figura 23 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para estas condições iniciais, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3924 \text{ rpm}$.

Analisando a Figura 23, nota-se que $\omega_1 \cong \omega_3$ e $\omega_2 \cong \omega_4$.

Na Figura 24 é ilustrada a variação das velocidades lineares do quadricóptero sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 24 - Variação de U , V e W pelo tempo com a iteração final do regulador linear quadrático com o modelo não linear para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Para estas condições iniciais, os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,77 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,76 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 1,31 \text{ m/s}$.

Pode-se observar que nenhum dos valores limites é ultrapassado, mantendo válida a hipótese dos coeficientes de empuxo e de potência serem constantes.

Comparando-se os parâmetros de desempenho, nota-se que todas as respostas do regulador linear quadrático para posições lineares iniciais diferentes de zero com o modelo não linear assemelham-se muito àquelas com o modelo linear. Desta forma, pode-se afirmar que o comportamento do controlador é satisfatório quando aplicado ao modelo não linear do quadricóptero.

Portanto, devido à maior relevância da análise do comportamento da máquina para esta situação, uma vez que o modelo não linear reflete melhor a realidade do que o modelo linear, a partir deste momento, as simulações serão realizadas apenas com o modelo não linear.

3.4 PROJETO DO OBSERVADOR DE ESTADOS DE LUENBERGER

Para o projeto do regulador linear quadrático, utiliza-se a hipótese de que todo o estado está disponível para a realimentação, porém, na prática isto não é verdade para todas as variáveis (OGATA, 2010, p. 683).

Apesar de haver sistemas em que a realimentação de apenas parte do estado, aquela que é mensurável, promova resultados satisfatórios do ponto de vista do controle, existem sistemas onde o desempenho requisitado não é alcançado com tais métodos. Daí se faz a necessidade da estimativa das outras variáveis de estado que não foram medidas, o que é chamado de observação (FRIEDLAND, 1986, p. 259).

Observadores de estado determinísticos podem ser classificados em dois tipos: os de ordem plena, onde todas as variáveis de estado são estimadas, inclusive aquelas que podem ser obtidas via medição direta, e os de ordem reduzida, onde pelo menos uma variável de estado não é estimada, podendo este ainda ser de ordem mínima quando o número de variáveis de estado estimada for a menor possível. Neste projeto, o observador de estados determinístico projetado será o de ordem plena, também denominado observador de Luenberger, o qual será linear e projetado com base no sistema linearizado no ponto de operação desejado, ou seja, no movimento de pairagem.

3.4.1 Desenvolvimento matemático

Seja um sistema linear invariante no tempo submetido a distúrbios e ruídos, descrito pelas seguintes equações e admitindo que a matriz de transmissão direta seja nula:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + G_d \cdot w_d \quad (88)$$

$$y = C \cdot x + v_r \quad (89)$$

Onde w_d e v_r são denominados ruídos de processo e de medida, os quais são ruídos brancos e gaussianos de média nula e matriz de covariância constante Q_{KAL} e R_{KAL} , respectivamente. O observador de estados tem um modelo matemático semelhante ao da planta, com a exceção de um termo adicional que incorpora o erro de estimação, o qual compensa as incertezas das matrizes A e B e a ausência do erro inicial (OGATA, 2010, p. 683). Assim, temos:

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_e \cdot (y - C \cdot \hat{x}) \quad (90)$$

Pode-se definir como vetor de erro e a seguinte relação:

$$e = x - \hat{x} \quad (91)$$

Subtraindo as equações que representam o estado do sistema da do observador, temos:

$$\dot{e} = (A - K_e \cdot C) \cdot e + G_d \cdot w_d - K_e \cdot v_r \quad (92)$$

Nota-se que uma escolha adequada dos polos do observador de estados, tornando este sistema estável, permite que para qualquer valor de $x(0)$ e $\hat{x}(0)$, o erro sempre estará limitado, caso os distúrbios e ruídos também sejam limitados (OPPENHEIM; VERGHESE, 2015, p. 106). Caso a planta seja completamente observável, o que já foi constatado como verdade, a escolha dos autovalores da matriz $A - K_e \cdot C$ é arbitrária (OGATA, 2010, p. 684).

Utilizando o princípio da separação, a lei de controle é obtida pelo mesmo controlador sintetizado anteriormente (LQR), porém operando sobre o estado reconstruído:

$$u = -K_{LQR} \cdot \hat{x} \quad (93)$$

O princípio da separação também estabelece que os polos de um sistema controlado que tenha um observador de estados são dados pelo conjunto de polos do controlador e polos do observador, podendo-se projetar cada um separadamente.

3.4.2 Escolha dos polos do observador de estados de ordem plena

Com o objetivo de tornar a dinâmica do observador pouco influente na planta a ser controlada, os polos do observador são usualmente alocados numa região onde a parte real de todos estes polos seja inferior a pelo menos o dobro da parte real do polo de menor parte real do sistema controlado, ou seja:

$$\Re(p_{OBS_i}) = 2 \cdot \Re(\max(p_{LQR_i})) \quad (94)$$

Os polos do observador de estados, e consequentemente o seu ganho, afetam no erro de observação de duas formas, governando a dinâmica deste através da matriz $(A - K_e \cdot C)$ e multiplicando o ruído. Desta forma, existe uma relação de compromisso entre o decaimento do erro e influência do ruído no sistema. Portanto, um ganho do observador de estados elevado, apesar de diminuir a influência dos distúrbios do sistema na planta, acentua o efeito do ruído, sendo que a recíproca também é verdadeira (OPPENHEIM; VERGHESE, 2015, p. 106).

Como no projeto do quadricóptero existe uma preocupação tanto em mitigar os distúrbios tanto quanto os ruídos, misturam-se os polos do observador com os polos do sistema. Apesar desta metodologia provocar uma maior influência do erro e consequentemente dos distúrbios na realimentação do estado, gerando um maior tempo de acomodação e maiores afastamentos máximos da posição de equilíbrio, espera-se que o resultado seja menos influenciado pelos ruídos. Assim, cada polo do observador é calculado dobrando-se a parte real e mantendo a imaginária dos polos do controlador:

Tabela 3 – Polos de malha fechada do observador de estados

p_{LQR_1}	p_{LQR_2}	p_{LQR_3}	p_{LQR_4}
$-85,80 + 42,27 \cdot i$	$-85,80 - 42,27 \cdot i$	$-85,80 + 42,27 \cdot i$	$-85,80 - 42,27 \cdot i$
p_{LQR_5}	p_{LQR_6}	p_{LQR_7}	p_{LQR_8}
$-20,31$	$-14,97 + 2,43 \cdot i$	$-14,97 - 2,43 \cdot i$	$-5,63$
p_{LQR_9}	$p_{LQR_{10}}$	$p_{LQR_{11}}$	$p_{LQR_{12}}$
$-2,66 + 1,84 \cdot i$	$-2,66 + 1,84 \cdot i$	$-2,66 - 1,84 \cdot i$	$-2,66 - 1,84 \cdot i$
$p_{LQR_{13}}$	$p_{LQR_{14}}$	$p_{LQR_{15}}$	$p_{LQR_{16}}$
$-3,50 + 0,74 \cdot i$	$-3,50 - 0,74 \cdot i$	$-3,82$	$-3,82$

Fonte: Autoria própria.

3.4.3 Determinação do erro inicial do observador de estados

Um dos desafios na estimação do estado do sistema é ocasionado pela incerteza em relação ao estado inicial do sistema, o qual não é totalmente conhecido (OPPENHEIM; VERGHESE, 2015, p. 101). Desta forma, o erro inicial de algumas variáveis de estado é não nulo. Seu valor é influenciado pelas características dos sensores empregados no quadricóptero, entre outros

fatores, sendo que, para este projeto, o valor escolhido do erro de cada variável de estado é descrito a seguir:

$$e(0) = 10^{-1} \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 3,49 \ 3,49 \ 3,49 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (95)$$

Nota-se que nem todos os erros iniciais são diferentes de zero: devido ao fato de no instante inicial a aeronave estar localizada na origem e com os motores operando numa velocidade de regime, os erros iniciais das posições lineares e posições angulares do quadricóptero e velocidades angulares dos motores são nulos. Desta forma, apenas o erro inicial das velocidades lineares e velocidades angulares é diferente de zero.

3.4.4 Simulações em malha fechada com o observador de estados

Com o objetivo de avaliar a qualidade do observador de estados, ou seja, sua influência sobre o sistema controlado, a seguinte simulação é executada: considera-se que o quadricóptero tem no vetor de condições iniciais as seguintes variáveis de estado não nulas: $X_0 = Z_0 = -1 \text{ m}$ e $Y_0 = 1 \text{ m}$. Tanto os valores limites dos ângulos de rolagem e arfagem quanto as rotações dos conjuntos propulsores também se mantêm os mesmos.

Apesar de o observador de estados ter sido projetado com o modelo linearizado no ponto de operação de pairagem, as simulações serão executadas com o modelo não linear do quadricóptero de modo a promover maior fidedignidade para as simulações.

Nas Figuras 25 e 26 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 25 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 26 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 2,99 \text{ s}$, $\delta_x = 0,03 \text{ m}$, $\delta_y = 0,04 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 7,96^\circ$, $\delta_\theta = 8,80^\circ$ e $\delta_\psi = 0,87^\circ$.

Nota-se que os afastamentos máximos da posição de equilíbrio dos movimentos de translação lineares e angulares aumentam de intensidade, o que é esperado, uma vez que parte da energia gasta pelo sistema de controle é utilizada inicialmente para suprimir o erro do observador de estados. O tempo de acomodação permanece praticamente o mesmo. A comparação entre os parâmetros de desempenho do sistema sem observador e com o observador de Luenberger pode ser vista na Tabela 4:

Tabela 4 – Comparação entre os parâmetros de desempenho do sistema sem observador estados e com o observador de Luenberger para posições lineares iniciais diferentes de zero

Simulação	t_s	δ_x	δ_y	δ_φ	δ_θ	δ_ψ
Sem observador	3,00 s	0,02 m	0,02 m	7,78 °	7,74 °	0,52 °
Luenberger	2,99 s	0,03 m	0,03 m	7,96 °	8,80 °	0,87 °

Fonte: Autoria própria.

Outros pontos a serem salientados são o fato de que os ângulos de arfagem e rolagem não variam de maneira idêntica e que o ângulo de guinada apresenta uma resposta não nula maior. Estes acontecimentos são ocasionados porque os erros iniciais de estimação de algumas variáveis são diferentes de zero, fazendo com que o controlador considere que estas estão fora do ponto de equilíbrio e assim enviando ações de controle para elas, impactando indiretamente na resposta das demais.

Na Figura 27 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 27 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que as rotações ω_1 e ω_3 assim como as rotações ω_2 e ω_4 tem respostas distintas, porém de comportamento semelhante, sendo que este fato tem a mesma justificativa da variação dos ângulos de Euler.

Quando o quadricóptero é submetido a estas condições iniciais, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores é $\omega_{max} = 3896 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 28, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 28 - Variação de U , V e W pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,86 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,85 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 1,22 \text{ m/s}$.

Nota-se que mesmo com a influência do observador de estados, as velocidades continuam abaixo dos limites definidos.

Nas Figuras 29 e 30 estão ilustradas as respostas dos erros de estimação do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que os erros de estimação de X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 29 - Variação dos erros de estimação de X , Y e Z pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Figura 30 - Variação dos erros de φ , θ e ψ pelo tempo com o observador de estado para posições lineares iniciais diferentes de zero

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que os erro de estimação do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler comportam-se como esperado, tendendo a zero com o passar do tempo. Porém, estes são dotados de um tempo de acomodação semelhante ao do sistema observado, devido ao fato de que os polos do observador terem parte real próxima a parte real dos polos do controlador,

sendo que, idealmente, a dinâmica dos erros deve ser mais rápida que a dinâmica da planta. Todavia, este fato não degrada significativamente a resposta do sistema, como pode ser visto na Tabela 4, além de proporcionar menor susceptibilidade a ruídos. Desta forma, pode-se seguir com o observador sintetizado.

3.4.5 Análise da influência do erro inicial na resposta do sistema

Nos modelos matemáticos utilizados, a ação de controle é calculada a partir do estado do sistema e é determinante na maneira como ele responde quando submetido a diferentes condições iniciais. Num sistema que dispõe de um observador de estados, como o estado ou parte dele é estimado, o erro tem um peso fundamental na resposta do modelo, sendo que uma análise da maneira como este atua sobre a planta é essencial.

São executadas três simulações com as mesmas condições iniciais anteriores, onde o erro inicial assume o valor das simulações anteriores, sendo posteriormente aumentado em 300%. As respostas são comparadas com a do sistema controlado apenas pelo regulador linear quadrático, conforme pode ser visto na Figura 31, onde somente é ilustrada a variação da posição do quadricóptero no eixo x . A resposta do sistema sem o observador é representada pela curva cheia e os erros originais e aumentados em 300% pelas curvas tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 31 - Variação de x pelo tempo com o observador de estados para posições lineares iniciais diferentes de zero com diferentes erros iniciais

Fonte: Autoria própria.

Pode-se notar que quanto maior o erro inicial, maior é o afastamento do quadricóptero de sua trajetória, conforme é esperado.

3.5 PROJETO DO SEGUIDOR DE REFERÊNCIA CONSTANTE

Entende-se por seguidor o ato de comandar a saída de um sistema de modo que esta siga assintoticamente uma referência (KWONG, 2008).

O projeto do seguidor de referência constante é essencial para que o quadricóptero desempenhe suas funções básicas de decolagem, voo em cruzeiro e pouso. Valendo-se do princípio da separação, a realimentação é feita com o estado estimado. Assim, o regulador linear quadrático em conjunto com observador de Luenberger é utilizado para o projeto do seguidor. Porém, apenas para o desenvolvimento matemático, assume-se que a realimentação é feita com o estado não estimado.

3.5.1 Desenvolvimento matemático

Seja um sistema linear invariante no tempo descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (96)$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u \quad (97)$$

O objetivo do projeto do seguidor é desenvolver uma ação de controle de modo que a saída do sistema se aproxime de uma referência $y_r(t)$ num intervalo de tempo, conforme a seguinte equação:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0 \quad (98)$$

Para este projeto, admite-se que o sinal de referência seja invariante no tempo, ou seja:

$$y_r(t) = y_r \quad (99)$$

Para adicionar características de seguidor ao controlador, tem-se que mudar a lei de controle. Uma primeira abordagem pode ser descrita pela seguinte equação:

$$u = -K_{LQR} \cdot (x - x_r) \quad (100)$$

Porém, em geral, esta lei de controle proposta não leva o estado do sistema ao estado de referência, podendo acarretar em erro em regime permanente. Desta forma, para evitar tal empecilho, muda-se a lei de controle adicionando-se um termo para corrigir o erro em regime permanente:

$$u = -K_{LQR} \cdot (x - x_{RP}) + u_{RP} \quad (101)$$

Quando o sistema atinge o regime permanente, as seguintes relações são válidas:

$$x = x_{RP} \quad (102)$$

$$u = u_{RP} \quad (103)$$

$$y = y_{RP} \quad (104)$$

Aplicando isto às equações de estado do sistema, tem-se:

$$0 = A \cdot x_{RP} + B \cdot u_{RP} \quad (105)$$

$$y_{RP} = C \cdot x_{RP} + D \cdot u_{RP} \quad (106)$$

Admitindo que o vetor de saídas do sistema tenha a mesma dimensão que o vetor de estados, pode-se impor, no regime permanente, que:

$$y_{RP} = x_{RP} \quad (107)$$

Considerando que:

$$x_{RP} = N_x \cdot y_r \quad (108)$$

$$u_{RP} = N_u \cdot y_r \quad (109)$$

Aplicando as relações anteriores às equações de estado do sistema em regime permanente, tem-se que matrizes N_u e N_x podem ser calculadas resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix} \quad (110)$$

Onde I_d é a matriz identidade de dimensão 6.

Desta forma, tem-se que:

$$N_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$N_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Nota-se que os termos da matriz N_x referentes aos ângulos de rolagem e arfagem não são unitários, evidenciando a impossibilidade de levar estas variáveis às suas respectivas referências sem que haja erro em regime permanente, exceto quando estes valores forem nulos.

Finalmente, a lei de controle pode ser descrita da seguinte forma, já considerando que o sistema é realimentado pelo estado estimado:

$$u = -K_{LQR} \cdot \hat{x} + (N_u \cdot K_{LQR} \cdot N_x) \cdot y_r \quad (113)$$

A partir deste momento, adota-se a seguinte notação:

$$K_a = N_u \cdot K_{LQR} + N_x \quad (114)$$

3.5.2 Simulações em malha fechada com o seguidor de referência constante

De modo a validar a qualidade do seguidor de referência constante quanto ao tempo de acomodação, afastamentos máximos da posição de equilíbrio e erro em regime permanente, são executadas quatro simulações que visam avaliar o desempenho do quadricóptero na decolagem, voo em cruzeiro, guinada e pouso.

Durante estas análises, é observado se os ângulos de arfagem e rolagem não ultrapassam o valor limite de 90° e se nenhuma rotação do conjunto propulsor atinge valores acima de 12100 rpm .

As simulações serão executadas com o modelo não linear do quadricóptero realimentado com o estado estimado de modo a promover maior fidedignidade às simulações.

a) Decolagem

Admite-se que, no momento da decolagem, o centro de gravidade da aeronave coincida com a origem do referencial fixo; que o quadricóptero esteja paralelo ao solo com o eixo x do referencial móvel apontado para o norte magnético e com os quatro conjuntos propulsores operando na rotação de equilíbrio, fazendo com que o vetor de condições iniciais seja nulo.

A decolagem inicia-se no momento em que o quadricóptero deixa o solo e atinge a altitude do voo de cruzeiro h_c , a qual será admitida como 1 m . Nas Figuras 32 e 33 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 32 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Figura 33 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Observando os gráficos anteriores, nota-se que entre as posições lineares, apenas ocorre variação significativa no eixo z e entre as posições angulares, a variação dos ângulos de Euler também é pequena, o que evidencia que o seguidor foi projetado de maneira adequada, uma vez que na manobra de decolagem, o quadricóptero deve apenas elevar sua altitude, sem que se

mova horizontalmente ou angularmente. Porém, devido ao erro inicial do observador de Luenberger ser não nulo, ocorre uma certa variação nas variáveis em questão, conforme já elucidado anteriormente. Vale ressaltar que o erro em regime permanente é desprezível. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 1,32 \text{ s}$, $\delta_x = 0,01 \text{ m}$, $\delta_y = 0,04 \text{ m}$, $\delta_\phi = 0,87^\circ$, $\delta_\theta = 0,41^\circ$ e $\delta_\psi = 1,59^\circ$.

Na Figura 34 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 34 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que as quatro rotações dos conjuntos propulsores variam no tempo de maneira aproximadamente equânime, uma vez que o quadricóptero deve se movimentar apenas para cima, exigindo de cada um dos motores o mesmo empuxo. O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 4713 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 35, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 35 - Variação de U , V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,02 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,06 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 1,45 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de decolagem, nenhum dos valores limites foi alcançado.

b) Voo em cruzeiro

O voo em cruzeiro inicia-se no momento em que o quadricóptero atinge a altitude h_c , a qual mantém-se constante durante a manobra, passando a se deslocar no plano xy . Assim, o vetor de condições iniciais e o sinal de referência valem:

$$x_0 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (115)$$

$$x_r = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (116)$$

Nas Figuras 36 e 37 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 36 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Figura 37 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que o quadricóptero comporta-se de maneira adequada e consoante com o projeto do regulador linear quadrático, além de apresentar erro em regime permanente nulo, tanto para as posições angulares quanto para as lineares. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 3,25 \text{ s}$, $\delta_x = 0,01 \text{ m}$, $\delta_y = 0,06 \text{ m}$, $\delta_z = 0,06 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 8,89^\circ$, $\delta_\theta = 7,75^\circ$ e $\delta_\psi = 1,10^\circ$.

Nota-se que o tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio muito semelhantes aos obtidos no regulador linear quadrático com o observador de Luenberger de ordem plena, conforme esperado.

Na Figura 38 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 38 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3873 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 39, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 39 - Variação de U , V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,78 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,86 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0,05 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de voo em cruzeiro, nenhuma dos valores limites foi alcançado.

c) Guinada

Nesta manobra, o quadricóptero irá alterar o ângulo referente a este movimento de 0° para 10° . Assim, o vetor de condições iniciais e o sinal de referência valem:

$$x_0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (117)$$

$$x_r = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \pi/18]^T \quad (118)$$

Nas Figuras 40 e 41 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 40 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

Figura 41 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 1,99 \text{ s}$, $\delta_x = 0,01 \text{ m}$, $\delta_y = 0,05 \text{ m}$, $\delta_z = 0,03 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 0,87^\circ$, $\delta_\theta = 0,30^\circ$ e $\delta_\psi = 0,05^\circ$.

Nota-se que o tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio são muito semelhantes aos obtidos no regulador linear quadrático com o observador de Luenberger de ordem plena, conforme esperado.

Na Figura 42 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 42 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3605 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 43, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 43 - Variação de U , V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de voo guinada

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,02 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,06 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0,07 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de guinada, nenhuma dos valores limites foi alcançado.

d) Pouso

A manobra de pouso ocorre logo após o quadricóptero finalizar a guinada e consiste em fazer com que a máquina retorne à posição original, ou seja, àquela antes do início da decolagem. Assim, o vetor de condições iniciais e o sinal de referência valem:

$$x_0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \pi/18 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (119)$$

$$x_r = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (120)$$

Nas Figuras 44 e 45 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas em cheias, tracejadas e pontilhadas, respectivamente.

Figura 44 - Variação de X Y e Z pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso

Fonte: Autoria própria.

Figura 45 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso

Fonte: Autoria própria.

Nesta manobra, o seguidor de referência age como um regulador, levando o estado do sistema a um vetor nulo. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 3,23 \text{ s}$, $\delta_x = 0,03 \text{ m}$, $\delta_y = 0,05 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 7,93^\circ$, $\delta_\theta = 8,85^\circ$ e $\delta_\psi = 0,00^\circ$.

Na Figura 46 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 46 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o seguidor de referência constante a manobra de pouso

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3900 \text{ rpm}$

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 47, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 47 - Variação de U , V e W pelo tempo com o seguidor de referência constante para a manobra de pouso

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,85 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,87 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 1,22 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de pouso, nenhum dos valores limites foi alcançado.

3.6 PROJETO DO FILTRO DE KALMAN

Um estimador ótimo é um algoritmo computacional que processa medidas de modo a proporcionar um erro mínimo na estimativa do estado de um sistema utilizando: conhecimento do sistema e das dinâmicas de medida; características estatísticas dos ruídos do sistema e erros de medida e informações sobre as condições iniciais do problema (GELB, 1974, p. 2).

O estimador ótimo a ser utilizado nesta dissertação é o filtro de Kalman que tem como objetivo estimar o estado de um sistema linear submetido a ruídos brancos, gaussianos, com média nula e matrizes de covariância conhecidas.

A abordagem utilizada é a do modelo linear contínuo/contínuo, no qual tanto o modelo da dinâmica do sistema quanto o modelo de observações são contínuos no tempo.

3.6.1 Desenvolvimento matemático

Seja um sistema linear invariante no tempo descrito pelas seguintes equações e admitindo que a matriz de transmissão direta seja nula:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + G_d \cdot w_d \quad (121)$$

$$y = C \cdot x + v_r \quad (122)$$

Onde w_d e v_r são denominados ruídos de processo e de medida, os quais são ruídos brancos e gaussianos de média nula e matriz de covariância constante Q_{KAL} e R_{KAL} , respectivamente.

Admitem-se três hipóteses para o desenvolvimento matemático do filtro de Kalman: não há correlação entre os ruídos de processo e medida; não há correlação entre o estado e o ruído de processo e não há correlação entre o estado e o ruído de medida. Estas hipóteses são representadas pelas seguintes relações:

$$E(w_d(t), v_r^T(t)) = 0 \quad (123)$$

$$E(x(t), w_d^T(t)) = 0 \quad (124)$$

$$E(x(t), v_r^T(t)) = 0 \quad (125)$$

Como um dos objetivos desta dissertação é a síntese de um controlador linear quadrático gaussiano, também conhecido como LQG, o vetor de entradas do sistema pode ser representado pela seguinte equação, admitindo que a realimentação da planta seja baseada no estado observado:

$$u = -K_{LQR} \cdot \hat{x} + K_a \cdot y_r \quad (126)$$

Desta forma, o modelo dinâmico da planta pode ser representado pela seguinte equação:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot (-K_{LQR} \cdot \hat{x} + K_a \cdot y_r) + G_d \cdot w_d \quad (127)$$

A equação da estimativa do estado, a equação da propagação da matriz de covariância do erro e a equação da matriz de ganhos de Kalman podem ser descritas das seguintes formas, respectivamente (GELB, 1974, p. 123):

$$\hat{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot (-K_{LQR} \cdot \hat{x} + K_a \cdot y_r) + K_{KAL} \cdot (y - C \cdot \hat{x}) \quad (128)$$

$$\dot{P}_{KAL} = A \cdot P_{KAL} + P_{KAL} \cdot A^T + G_d \cdot Q_{KAL} \cdot G_d^T - K_{KAL} \cdot R_{KAL} \cdot K_{KAL}^T \quad (129)$$

$$K_{KAL} = P_{KAL} \cdot C \cdot R_{KAL}^{-1} \quad (130)$$

3.6.2 Simulações em malha fechada com o filtro de Kalman

As simulações serão executadas com o modelo não linear do quadricóptero realimentado com o estado estimado de modo a promover maior fidedignidade para as simulações.

De modo a facilitar as comparações com as simulações em malha fechada com o observador de Luenberger, o quadricóptero executará a manobra de pouso.

Para as simulações posteriores, o vetor de condições iniciais do estado, o vetor de condições iniciais da estimativa do estado e o vetor de referências valem:

$$x_0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \pi/18 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (131)$$

$$\hat{x}_0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \pi/18 \quad -0,1 \quad -0,1 \quad -0,1 \quad -0,035 \quad -0,035 \quad -0,035 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (132)$$

$$x_r = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (133)$$

A matriz de covariâncias do ruído de processo visa representar as parcelas não modeladas/incertas da planta, e para simulações mais fidedignas à realidade, seria necessário sintonizar cada uma das covariâncias do ruído de processo de maneira independente. Para as covariâncias do ruído de medida, sua sintonia deve ser conforme as características técnicas dos sensores empregados.

Porém, para esta dissertação, as matrizes de covariância do ruído de processo e do ruído de medida são assumidas como matrizes diagonais dotadas das seguintes covariâncias em suas diagonais principais, respectivamente:

Tabela 5 – Covariâncias dos ruídos de processo e dos ruídos de medida

$\sigma_w^2_{pos.lin}$	$\sigma_w^2_{vel.lin}$	$\sigma_w^2_{pos.ang}$	$\sigma_w^2_{vel.ang}$	$\sigma_w^2_{rot.mot}$	$\sigma_v^2_{pos.lin}$	$\sigma_v^2_{pos.ang}$
10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$3,49 \cdot 10^{-4}$	15,01	10^{-5}	$1,75 \cdot 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 48, 49, 50, 51, 52 e 53 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que a variável de estado e sua estimativa são representadas pelas linhas cheia mais grossa e mais fina, respectivamente.

Figura 48 - Variação de X e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 49 - Variação de Y e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 50 - Variação de Z e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 51 - Variação de φ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 52 - Variação de θ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 53 - Variação de ψ e sua estimativa pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Observa-se que o sistema continua comportando-se da mesma maneira, mesmo sob a influência dos ruídos de processo e medida: a dinâmica dos movimentos de translação nos eixos x e y é de um sistema de segunda ordem e no eixo z de um de primeira ordem, aproximadamente.

Nota-se que os afastamentos máximos da posição de equilíbrio dos movimentos de translação vertical e horizontal aumentam de intensidade em relação ao sistema controlado pelo regulador linear quadrático. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 3,51 \text{ s}$, $\delta_x = 0,10 \text{ m}$, $\delta_y = 0,03 \text{ m}$, $\delta_z = 0,01 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 7,12^\circ$, $\delta_\theta = 9,04^\circ$ e $\delta_\psi = 0,07^\circ$.

O tempo de acomodação do sistema sofre um aumento relativo de cerca de 8,7%, atingindo o valor de 3,51 s.

Estes resultados são esperados, uma vez que como o sistema está submetido tanto a ruídos de processo como de medidas, é natural que os parâmetros de desempenho do quadricóptero sofram certa deterioração, mesmo com o estado do sistema sendo estimado pelo filtro de Kalman.

Observa-se que o controlador linear quadrático gaussiano foi bem executado, uma vez que a o sinal de saída aproximou-se do sinal de referência, a despeito da pequena variação em regime permanente devido aos ruídos, conforme pode ser visto nas Figuras 48, 49, 50, 51, 52 e 53.

Na Figura 54 está ilustrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 54 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, idem ao sistema controlado pelo controlador linear quadrático, as rotações ω_1 e ω_3 assim como as rotações ω_2 e ω_4 tem respostas distintas, porém de comportamento semelhante.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores é $\omega_{max} = 3915 \text{ rpm}$.

Conforme o esperado, o valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores não sofreu muita alteração, ainda se situando dentro da faixa linear de operação do motor. Isto mostra que mesmo operando sob distúrbios, o filtro de Kalman atuou de maneira satisfatória.

De modo a analisar a propagação da matriz de covariância do erro e da matriz de ganhos de Kalman, as normas euclidianas destas matrizes serão calculadas em cada instante de tempo e ilustradas nas Figuras 55 e 56.

Figura 55 - Variação da norma euclidiana da matriz de covariância do erro pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 56 - Variação da norma euclidiana da matriz ganhos de Kalman pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que tanto a norma euclidiana da matriz de covariância do erro como a norma euclidiana da matriz de ganhos de Kalman convergem para um valor finito, os quais valem $\|P_{\infty}\| = 2,63 \cdot 10^{-1}$ e $\|K_{KAL\infty}\| = 312,607$.

Porém, a convergência destes valores indica que o filtro de Kalman não atua mais sob o sistema, suspendendo a atualização da estimativa do estado com a chegada de novas medidas. De modo a evitar isto, seria necessário introduzir uma pequena perturbação na matriz de covariâncias do erro de tempos em tempos de modo a manter o filtro sempre atuante sob o sistema.

Nas Figuras 57 e 58 são ilustradas a resposta da estimativa da variável de estado e de sua medida para X e φ , sendo que a estimativa e a medida são representadas pelas linhas cheia mais grossa e mais fina, respectivamente.

Figura 57 - Variação da estimativa de X e de sua medida pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 58 - Variação da estimativa de φ e de sua medida pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que o filtro de Kalman desempenhou sua função com êxito, filtrando os tanto os ruídos de processo como de medida de maneira satisfatória, o que é evidenciado pelo comportamento menos variacional da estimativa das variáveis de estado em questão em comparação à suas respectivas medidas.

Pode-se calcular o resíduo de medida conforme a seguinte equação:

$$res = y - C \cdot \hat{x} \quad (134)$$

Na Figuras 59 e 60 estão ilustradas a variação do resíduo de X e de φ pelo tempo:

Figura 59 - Variação do resíduo de X pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Figura 60 - Variação do resíduo de φ pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que ambos os resíduos se comportam de maneira adequada, ou seja, situam-se ao redor do zero em regime permanente, evidenciando que o filtro de Kalman conseguiu estimar o estado de maneira satisfatória.

Na Figura 61 é representado o histograma do resíduo de φ .

Figura 61 - Histograma do resíduo de φ pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que em regime permanente o resíduo de φ comporta-se como uma distribuição normal de média $1,92 \cdot 10^{-2}$ e variância $8,09 \cdot 10^{-2}$, conforme o esperado.

3.6.3 Comparação com o observador de estados de Luenberger

De modo a verificar se o filtro de Kalman foi sintetizado corretamente, seu desempenho é comparado com o do observador de Luenberger, sendo que ambos são submetidos aos mesmos ruídos de processo e de medida.

Na Figura 62 pode-se observar a variação da estimativa de X , sendo que as respostas das estimativas do sistema estimado pelo filtro de Kalman e do sistema estimado pelo observador de Luenberger são representadas pelas linhas cheia mais fina e cheia mais grossa, respectivamente.

Figura 62 - Estimativa de $\hat{\mathbf{X}}$ pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano e com o controle ótimo com o observador de Luenberger

Fonte: Autoria própria.

Figura 63 - Variação de ω_2 pelo tempo com o controle linear quadrático gaussiano e com o controle ótimo com o observador de Luenberger

Fonte: Autoria própria.

Analisando os parâmetros de desempenho na Tabela 6, nota-se que o sistema controlado pelo controle ótimo com o observador de Luenberger apresenta menores afastamentos máximos da posição de equilíbrio e menor tempo de acomodação.

Tabela 6 – Comparação entre os afastamentos máximos da posição de equilíbrio e o tempo de acomodação no eixo x do sistema com observador de Luenberger e com o filtro de Kalman para a manobra de pouso

Observador	t_s	δ_x
Luenberger	2,63 s	0,03 m
Kalman	3,04 s	0,10 m

Fonte: Autoria própria.

Porém, a influência dos ruídos sob o sistema estimado pelo observador de Luenberger é mais significativa, o que pode ser visto na maior oscilação tanto da estimativa do estado quanto da rotação do motor 2, sendo mais acentuada nesta segunda. Deste modo, quando o sistema é submetido aos mesmos ruídos de processo e de medida, o filtro de Kalman tem um desempenho superior do ponto de vista de estimar o estado do que o observador de Luenberger.

3.7 PROJETO DO CONTROLADOR ROBUSTO

Apesar das diversas vantagens do controlador linear quadrático associado a um observador de Luenberger, o controlador linear quadrático gaussiano não garante estabilidade relativa da planta controlada, seja de ganho ou de margem (DOYLE, 1978, p. 756). Motivado por essas limitações, parte-se para uma solução mais refinada para sintetizar um controlador capaz de rejeitar distúrbios e ruídos, além de garantir bom seguimento de trajetória sem dispendir muita energia de controle. Dessa forma, o controlador robusto apresenta-se como um candidato para tal.

Um controlador é considerado robusto se este é insensível a diferenças entre a planta real e o modelo que foi utilizado para sintetizar o controlador. Estas diferenças podem ser incompatibilidades entre o sistema real e o modelo ou simplesmente incertezas do modelo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 259).

As fontes de incerteza podem ter diversas origens como: parâmetros do modelo que são conhecidos apenas aproximadamente, como a massa específica do ar ou as constantes de empuxo e potência do hélice; imperfeições na precisão dos sistemas de medição, ocasionadas, por exemplo, pelo cascadeamento dos integradores elétricos do giroscópio triaxial (DOEBELIN, 1990, p. 323); negligência de certas dinâmicas devido a certas hipóteses simplificadoras e/ou linearizações e diferenças entre o controlador projetado e aquele implementado (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 261).

Pode-se dividir as incertezas em dois grupos: incertezas paramétricas, ou seja, aquelas que são acarretadas pelo desconhecimento parcial de parâmetros do sistema; e incertezas dinâmicas, ou seja, aquelas que são acarretadas pela ausência de certas dinâmicas, seja por negligência deliberada ou desconhecimento do sistema a ser controlado.

Para esta dissertação, o principal objetivo da síntese do controlador robusto é contornar os problemas causados pelas limitações dos modelos matemáticos atualmente empregados nos quadricópteros, tratando as dinâmicas não modeladas e negligenciadas como incertezas, além de garantir boa estabilidade relativa.

3.7.1 Conceitos iniciais

Antes de iniciar o desenvolvimento matemático e a síntese do controlador robusto, alguns conceitos devem ser apresentados.

a) Entradas exógenas

- Os distúrbios mais usuais aos quais os quadricópteros estão submetidos são: os climáticos, como ventos e intempéries; os quais causam forças e momentos aerodinâmicos na aeronave (ONER et al., 2008, p. 5); picos de tensão ou subalimentação dos atuadores, fazendo-os operar nas regiões de saturação ou zona morta, respectivamente, sendo estas não linearidades o principal problema para a definição do controlador robusto;
- Os ruídos mais usuais aos quais os sensores do quadricóptero estão submetidos são vibrações ocasionadas pelos conjuntos propulsores, as quais interferem na medição do giroscópio e acelerômetro triaxiais (DOMINGUES, 2009, p. 71).

b) Entradas manipuláveis

- As entradas manipuláveis do problema abordado são as tensões de alimentação dos atuadores.

c) Incertezas

- Conforme descrito anteriormente, as principais fontes de incertezas do quadricóptero são as dinâmicas não modeladas e negligenciadas, as quais podem ser tratadas como incertezas multiplicativas não estruturadas (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 262).
- Este tipo de incerteza é difícil de ser quantificada, sendo que o domínio da frequência é mais adequado para lidar com elas. Isso acarreta em perturbações complexas $\Delta(s)$, com dimensões compatíveis às da planta, que podem ser modeladas da seguinte forma:

$$G_P(s) = G(s) \cdot (I + w_P(s) \cdot \Delta(s)) \quad (135)$$

$$|\Delta(j \cdot \omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (136)$$

3.7.2 Determinação da matriz de funções de transferência

Após definidas as entradas manipuláveis, pode-se determinar a matriz de funções de transferência do problema abordado G .

A matriz de funções de transferência de malha aberta de um sistema linear invariante no tempo pode ser calculada pela seguinte equação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 4):

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D \quad (137)$$

Assim, para o quadricóptero considerado, tem-se:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-3234 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{3234 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 \\ 0 & \frac{-3234 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{3234 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ \frac{-11,19 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-11,19 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-11,19 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-11,19 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ 0 & \frac{-329,7 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{329,7 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ \frac{329,7 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{-329,7 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 \\ \frac{14,8 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-14,8 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{14,8 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-14,8 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \end{bmatrix} \quad (138)$$

Nota-se que as funções de transferência refletem um comportamento já esperado do quadricóptero: a translação do eixo x é influenciada apenas pelos motores 1 e 3, a translação no eixo y é influenciada apenas pelos motores 2 e 4, a translação no eixo z é influenciada por todos os 4 motores, o ângulo de rolagem é influenciado apenas pelos motores 2 e 4, o ângulo de arfagem é influenciado apenas pelos motores 1 e 3 e o ângulo de guinada é influenciado por todos os 4 motores.

3.7.3 Normalização de sinais

A normalização de sinais é muito importante uma vez que torna a análise da planta e a síntese do controlador (seleção das matrizes de ponderação) mais simples (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 5).

De modo a normalizar a matriz de funções de transferência, devem-se determinar a matriz de normalização de erro D_e e a matriz de normalização de entrada D_u , as quais podem ser calculadas pelas seguintes expressões:

$$D_e = \begin{bmatrix} \hat{e}_{x_{max}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{e}_{y_{max}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{e}_{z_{max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{\varphi_{max}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{\theta_{max}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{\psi_{max}} \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$D_u = \begin{bmatrix} \hat{u}_{1max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}_{2max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{u}_{3max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{u}_{4max} \end{bmatrix} \quad (140)$$

Como a normalização é feita para os piores cenários, deve-se usar as menores variações para normalizar os erros e as entradas, conforme as seguintes equações (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 7):

$$\hat{e}_{max} = \min(|e_-|, |e_+|) \quad (141)$$

$$\hat{u}_{max} = \min(|u_{max} - u^*|, |u_{min} - u^*|) \quad (142)$$

Sendo u^* o valor nominal da entrada. Os valores dos erros variam da seguinte maneira:

$$0,05 \text{ m} \leq e_x = e_y = e_z \leq 0,05 \text{ m} \quad (143)$$

$$-10^\circ \leq e_\varphi = e_\theta \leq 10^\circ \quad (144)$$

$$-1^\circ \leq e_\psi \leq 1^\circ \quad (145)$$

Desta forma, tem-se que $\hat{e}_{xmax} = \hat{e}_{ymax} = \hat{e}_{zmax} = 0,05 \text{ m}$, $e_\varphi = e_\theta = 10^\circ$ e $e_\psi = 1^\circ$.

As tensões aplicadas aos motores variam entre a tensão relativa à zona morta e a tensão máxima, referente à saturação. O valor nominal desta grandeza é a tensão de operação. Desta forma, tem-se que $u_{min} = 0,941 \text{ V}$, $u_{max} = 11 \text{ V}$, $u^* = 3,222 \text{ V}$ e $\hat{u}_{1max} = \hat{u}_{2max} = \hat{u}_{3max} = \hat{u}_{4max} = 2,281 \text{ V}$.

Finalmente, a matriz de funções de transferência normalizada pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$\tilde{G} = D_e^{-1} \cdot G \cdot D_u \quad (146)$$

Assim, tem-se:

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1,475 \cdot 10^5 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{1,475 \cdot 10^5 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 \\ 0 & \frac{-1,475 \cdot 10^5 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{1,475 \cdot 10^5 \cdot s^{11}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ \frac{-5,106 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-5,106 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-5,106 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-5,106 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ 0 & \frac{-4,309 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{4,309 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \\ \frac{4,309 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 & \frac{-4,309 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & 0 \\ \frac{1,934 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-1,934 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{1,934 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} & \frac{-1,934 \cdot 10^2 \cdot s^{13}}{s^{16} + 7,353 \cdot s^{15}} \end{bmatrix} \quad (147)$$

A partir desta parte da dissertação, a matriz de funções de transferência normalizada será denotada de $G(s)$ de modo a facilitar a notação.

3.7.4 Valores singulares

Os valores singulares de uma matriz G são as raízes quadradas positivas dos autovalores da matriz $G^H \cdot G$, onde G^H é a complexa conjugada transposta de G (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 80). Estes valores variam conforme a frequência e podem ser dispostos num gráfico.

Na Figura 64 pode-se observar a variação pela frequência dos valores singulares $\sigma(G)$ da matriz de funções de transferência G .

Figura 64 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência $\mathbf{G}$ pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Observando-se a Figura 64, nota-se que para $\omega \rightarrow 0$, $\overline{\sigma}(G) \rightarrow \infty$ e $\underline{\sigma}(G) \rightarrow \infty$. Assim, o máximo e o mínimo valor singular da matriz de funções de transferência G valem:

$$\overline{\sigma}(G) = \underline{\sigma}(G) = \infty \quad (148)$$

3.7.5 Determinação e análise do número de condicionamento

O número de condicionamento $\gamma(G)$ de um sistema linear invariante no tempo pode ser calculado a partir da seguinte equação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 82) para a largura de banda do sistema, a qual varia entre 0 rad/s e cerca de 130 rad/s , como será visto mais adiante na dissertação:

$$\gamma(G) = \frac{\overline{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (149)$$

Observando-se a matriz de funções de transferência, nota-se que número de condicionamento da planta depende da frequência. Na Figura 65 pode-se observar a variação pela frequência do número de condicionamento da matriz de funções de transferência G .

Figura 65 - Variação do número de condicionamento da matriz de funções de transferência G pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que para frequências mais baixas, o número de condicionamento é muito elevado. Este comportamento tem correlação direta com a maneira como o máximo e o mínimo valor singular da matriz de funções de transferência variam conforme a frequência, como pode ser visto na Figura 65 onde o máximo valor singular cresce mais rapidamente que o mínimo valor singular para frequências menores que 1 rad/s . A partir da região ao redor de 1 rad/s , o número de condicionamento varia muito pouco com a frequência. Desta forma, dentro de toda a largura de banda do sistema, tem-se que $\gamma(G) = 5,967$.

O número de condicionamento depende fortemente da normalização dos sinais de erro e saída (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 82). Desta forma, é importante a execução adequada da normalização de modo a minimizar o número de condicionamento, o qual, para a planta em questão, vale 5,967 a partir da região ao redor de 1 rad/s .

Matrizes com números condicionais grandes são classificadas como matrizes mal condicionadas, o que indica que um alto grau de direcionalidade da planta, acarretando numa variação do ganho considerável de acordo a direção da entrada a ele aplicada. (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 81).

O número de condicionamento é utilizado como uma medida de controlabilidade entre a entrada e a saída da planta e é postulado que um número de condicionamento grande implica que o

sistema é sensível a incertezas não estruturadas, como distúrbios e/ou dinâmicas não modeladas (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 82).

Analisando o número de condicionamento do problema abordado, nota-se que sua matriz de funções de transferência é mal condicionada e consequentemente o sistema é sensível a incertezas não estruturadas, sendo difícil de ser controlado. O alto grau de direcionalidade é evidenciado, por exemplo, pela variação consideravelmente maior do ângulo de rolagem em relação ao de guinada para um degrau de tensão no motor 2.

3.7.6 Funções de transferência de malha aberta, malha fechada e sensibilidade do controlador inicial

Antes da síntese do controlador robusto para o quadricóptero, deve-se inicialmente projetar um controlador genérico de modo a obter-se acesso às matrizes de funções de transferência de malha fechada e de sensibilidade preliminares para posterior formatação destas e daí obter o controlador final (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 95). O controlador selecionado para tal é o regulador linear quadrático já sintetizado anteriormente.

A Figura 66 ilustra o diagrama de blocos do sistema controlado pelo regulador linear quadrático com a matriz de transmissão direta nula.

Figura 66– Diagrama de blocos do sistema controlado pelo regulador linear quadrático

Fonte: Autoria própria.

A matriz de funções de transferência de malha aberta é a matriz que relaciona o sinal de realimentação u com o sinal de erro atuante e (OGATA, 2010, p. 16), a qual pode ser calculada a partir da seguinte equação (CHEN, 2014, p. 16):

$$L(s) = K \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \quad (150)$$

A matriz de funções de transferência de malha fechada é a matriz que relaciona o sinal de saída y com o sinal de referência r (OGATA, 2010, p. 16), a qual pode ser calculada a partir da seguinte equação (CHEN, 2014, p. 17):

$$T(s) = K \cdot (s \cdot I - A + B \cdot K)^{-1} \cdot B \quad (151)$$

A matriz de funções de sensibilidade é a matriz que relaciona o sinal de erro atuante e com o sinal de referência r , a qual pode ser calculada a partir da seguinte equação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 22):

$$S(s) = I - T(s) \quad (152)$$

Nas Figuras 67, 68 e 69 pode-se observar a variação pela frequência dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta L , da matriz de funções de transferência de malha fechada T e da matriz de funções de sensibilidade S .

Figura 67 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta L do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 68 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada T do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 69 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade $\mathbf{S}$ do sistema controlador pelo regulador linear quadrático pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Previamente à análise dos valores singulares das matrizes, alguns conceitos devem ser introduzidos: a largura de banda, valor de pico e taxa de corte. Os máximos e mínimos valores singulares de sistemas multivariáveis podem ser analisados de maneira similar à magnitude da resposta em frequência de sistemas SISO (LEVINE, 2011, p. 9-18). Dessa forma, larguras de banda de sistemas multivariáveis são definidas por intervalos entre os cruzamentos dos mínimos valores singulares (limite de baixa frequência) e máximos valores singulares (limite de alta frequência) com determinadas magnitudes.

A largura de banda de um sistema multivariável ω_B é o intervalo de frequência em que o mínimo valor singular e o máximo valor singular da matriz de funções de sensibilidade cruzam $0,707$ ($-3dB$) por baixo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 81). A largura de banda é diretamente correlacionada com a performance do sistema: sistemas com pequenas larguras de banda geralmente tendem a ser mais lentos, porém mais robustos e vice-versa. Pode-se também definir a largura de banda em termos da matriz de funções de transferência de malha fechada ω_{BT} como o intervalo de frequência em que o mínimo valor singular e máximo valor singular da matriz de funções de transferência de malha fechada cruzam $0,707$ ($-3dB$) por cima (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 39).

A frequência de cruzamento de um sistema multivariável ω_C é o intervalo de frequência em que o mínimo valor singular e o máximo valor singular da matriz de transferência de malha aberta cruzam 1 (0dB) por cima (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 39). Caso deseje-se definir apenas uma frequência para as larguras de banda e para a frequência de cruzamento, estas devem ser calculadas pelos máximos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade, da matriz de funções de transferência de malha fechada e da matriz de funções de transferência de malha aberta, respectivamente (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 81). Para sistemas com margem de fase abaixo de 90° (a maioria dos sistemas), tem-se que:

$$\omega_B < \omega_C < \omega_{BT} \quad (153)$$

Os máximos valores de pico da matriz de funções de sensibilidade e da matriz de funções de transferência de malha fechada de sistemas multivariáveis podem ser calculados como o máximo valor singular da resposta em frequência destas matrizes. Usualmente, estes parâmetros devem atender os seguintes requisitos para bom desempenho de sistemas escalares (DONHA, 2006, p. 56):

$$\max \bar{\sigma}(S) < 6 \text{ dB} \quad (154)$$

$$\max \bar{\sigma}(T) < 2 \text{ dB} \quad (155)$$

Apesar da planta em questão ser multivariável, estes valores máximos de pico serão utilizados como referência.

A taxa de corte TC é definida como a inclinação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta após a frequência de corte (DONHA, 2006, p. 32). Altas taxas de corte indicam que o sistema é menos sujeito a ruídos, porém acarretam em atrasos de fase que podem instabilizar o sistema, se excessivos. Para sistemas estáveis e de fase mínima, pode-se afirmar que este parâmetro não pode exceder 40 dB/década .

Os parâmetros para a planta em questão podem ser vistos na Tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros do domínio da frequência do LQR

ω_B	ω_C	ω_{BT}	$\max \bar{\sigma}(S)$	$\max \bar{\sigma}(T)$	TC
$28,8 \text{ rad/s}$	$86,5 \text{ rad/s}$	$131,0 \text{ rad/s}$	$3,2 \text{ dB}$	$3,3 \text{ dB}$	$20,2 \text{ dB/década}$

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, os requisitos do valor de pico da matriz de funções de sensibilidade, de pico da matriz de funções de transferência de malha fechada e da taxa de corte são atendidos. Em linhas gerais, o comportamento dos valores singulares pode ser descrito da seguinte forma: Os valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada são próximos da unidade (0 dB) em baixa frequência e pequenos em alta frequência. Os valores singulares da matriz de funções de sensibilidade são pequenos em baixa frequência e próximos da unidade em alta frequência (0 dB). Os valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta são grandes em baixa frequência e pequenos em alta frequência.

3.7.7 Configuração de dois portos com as matrizes de ponderação

Um sistema linear invariante no tempo, submetido a distúrbios e ruídos e controlado por um controlador de qualquer configuração pode ser representado pela Figura 70 (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 13):

Figura 70 – Configuração de dois portos de um sistema linear invariante no tempo sistema controlado por um controlador de qualquer configuração

Fonte: Autoria própria.

Sendo esta configuração conhecida como configuração de dois portos, onde P_e é a planta estendida, w são as entradas exógenas – sinais de distúrbios, de ruídos e de referência; z são as saídas exógenas – sinais de controle e de saída e ε pode ser calculado pela seguinte equação:

$$\varepsilon = r - (y + v_r) \quad (156)$$

Dessa forma, o objetivo é sintetizar um controlador que, baseando-se na informação contida em ε , gere um sinal de controle u que contrapõe as influências de w em z , minimizando alguma norma da função de transferência de w para z , a qual é denominada N .

Pode-se calcular a planta estendida a partir da seguinte equação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 106):

$$P_e = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix} \quad (157)$$

3.7.8 Relações de compromisso em sistemas realimentados

O comportamento da matriz de funções de transferências de um sistema multivariável pode ser avaliada a partir do comportamento de seus valores singulares em relação à frequência. A formatação dessa matriz se dá pela formatação de uma ou mais matrizes de funções de transferência como a de malha aberta, malha fechada e/ou sensibilidade (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 341).

A síntese de controladores deve levar em questão uma série de requisitos, como: rejeição de distúrbios, atenuação de ruídos, precisão ao seguir referência, minimização da energia de controle, estabilidade robusta na presença de incerteza aditivas e estabilidade robusta na presença de incerteza multiplicativa. Estes requisitos podem ser avaliados analisando-se o comportamento dos máximos valores singulares das matrizes de funções de transferência:

- a) Para rejeição de distúrbios, $\bar{\sigma}(S)$ deve ser pequeno em baixa frequência;
- b) Para atenuação de ruídos, $\bar{\sigma}(T)$ deve ser pequeno em alta frequência;
- c) Para precisão ao seguir trajetória, $\bar{\sigma}(T)$ deve ser próximo da unidade (0 dB) em baixa frequência;
- d) Para minimização da energia de controle, $\bar{\sigma}(C_R)$ deve ser pequeno em alta frequência;
- e) Para estabilidade robusta na presença de incertezas aditivas, $\bar{\sigma}(C_R)$ deve ser pequeno em alta frequência;

- f) Para estabilidade robusta na presença de incertezas aditivas, $\bar{\sigma}(T)$ deve ser pequeno em alta frequência.

3.7.9 Sensibilidade mista / H_∞

Dentre os métodos de síntese de controladores robustos, o método escolhido para esta dissertação é o da sensibilidade mista / H_∞ que envolve formatar a matriz de funções de sensibilidade S , a matriz de funções de sensibilidade do controlador C_R e/ou a matriz funções de transferência de malha fechada T de modo a obter um controlador que atenda aos requisitos de estabilidade nominal, performance nominal, estabilidade robusta e performance robusta (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 359).

Este tipo de controlador robusto foi selecionado dentre uma variedade de outros controladores por permitir que o sistema controlado vise atender à maioria dos requisitos anteriormente descritos a partir da formatação das funções de transferência. Além disso, este método é recomendado para casos onde o sistema a ser controlado não é excessivamente complexo, isto é, tem um número e variedade baixa de sinais exógenos e classe de perturbações limitadas (DONHA, 2006, p. 67).

A síntese do controlador robusto pelo método da sensibilidade mista / H_∞ consiste em obter um controlador que minimize a norma ∞ da função de transferência das entradas exógenas para saídas exógenas, o que pode ser descrito pela seguinte equação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 107):

$$\min \|N(K)\|_\infty \quad (158)$$

$$z = N \cdot w \quad (159)$$

$$N = \begin{bmatrix} W_S \cdot S \\ W_C \cdot K \cdot S \\ W_T \cdot T \end{bmatrix} \quad (160)$$

Sendo que W_S é a matriz de ponderação que penaliza o sinal de erro, W_C é a matriz de ponderação que penaliza o sinal de controle e W_T é a matriz de ponderação que penaliza o sinal de saída.

Como o controlador robusto será sintetizado pelo método da sensibilidade mista / H_∞ , a planta deve ser disposta na configuração de dois portos com as matrizes de ponderação. Dessa forma, tem-se que (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 107):

$$P_e = \begin{bmatrix} W_S & -W_S \cdot G \\ 0 & W_C \\ 0 & W_T \cdot G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (161)$$

A estabilidade robusta de um sistema multivariável linear invariante no tempo, submetido a incertezas multiplicativas, está garantida se e somente se (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1990, p. 58):

$$\bar{\sigma}(W_T \cdot T) < 1, \forall \omega \quad (162)$$

A estabilidade robusta de um sistema multivariável linear invariante no tempo, submetido a incertezas aditivas, está garantida se e somente se (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1990, p. 58):

$$\bar{\sigma}(W_C \cdot C_R) < 1, \forall \omega \quad (163)$$

O desempenho nominal de um sistema multivariável linear invariante no tempo está garantido se e somente se (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1990, p. 46):

$$\bar{\sigma}(W_S \cdot S) < 1, \forall \omega \quad (164)$$

O desempenho robusto de um sistema multivariável linear invariante no tempo, submetido a incertezas multiplicativas e incertezas aditivas, está garantido se e somente se (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 317):

$$\|N(K)\|_\infty = \bar{\sigma}(N(K)) < 1, \forall \omega \quad (165)$$

3.7.10 Lidando com polos situados sob o eixo imaginário

Se a planta contiver polos puramente imaginários, os métodos de síntese da sensibilidade mista / H_∞ não podem ser usados diretamente. Neste caso, uma nova variável complexa deve ser introduzida, a qual se relaciona com a variável complexa s da seguinte maneira:

$$s = \frac{\alpha_d \cdot z_d + \delta_d}{\gamma_d \cdot z_d + \beta_d} \quad (166)$$

Onde z_d é a nova variável complexa e α_d , β_d , γ_d e δ_d são termos auxiliares da transformação de variáveis.

Essa transformação de variáveis é denominada transformação bilinear no domínio da frequência (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007, p. 251). Com essa transformação, os polos situados sob o eixo imaginário são deslocados para fora deste, permitindo a síntese do controlador robusto a partir desta planta deslocada. Em seguida, realiza-se a transformação bilinear inversa no controlador recém-sintetizado para se obter o controlador robusto para a planta original.

A planta em malha aberta do quadricóptero é dotada de doze polos nulos, ou seja, situados sob o eixo imaginário. Desta forma, é necessária a realização de uma transformação bilinear no domínio da frequência para que o controlador robusto seja sintetizado. Um algoritmo de deslocamento comum pode ser descrito pela seguinte equação (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007, p. 266):

$$z_d = s + \delta_d \quad (167)$$

Nota-se que quanto menor o valor de δ_d , menores serão os deslocamentos dos polos da planta original e o controlador robusto sintetizado com a nova planta não será muito diferente daquele que seria sintetizado com a planta original. Desta forma, é interessante que o valor de δ_d seja o menor possível, sempre respeitando a relação de compromisso de que um valor de δ_d muito pequeno acarrete em um deslocamento insuficiente para a síntese do controlador robusto. Esta transformação bilinear complexa altera a matriz de estado da planta da seguinte maneira:

$$A_{des} = A - \delta_d \cdot I \quad (168)$$

Onde A_{des} é a matriz de estado da planta deslocada. Após a síntese do controlador robusto com a planta deslocada, realiza-se a transformação bilinear complexa reversa, a qual altera a matriz de estado do controlador robusto da planta deslocada da seguinte maneira:

$$A_r = A_{rd} + \delta_d \cdot I \quad (169)$$

Onde A_r é a matriz de estado do controlador robusto que irá controlar a planta original e A_{rd} é a matriz de estado do controlador robusto da planta deslocada.

Para a planta em questão, adota-se $\delta_d = -1,00 \cdot 10^{-3}$. Desta forma, os polos da matriz funções de transferência normalizada valem $p_{dMA_i} = 1,00 \cdot 10^{-3}$ para $i = [1:12]$ e $p_{dMA_j} = -7,351$ para $j = [13:16]$.

Na Figura 71 pode-se observar a variação pela frequência dos valores singulares da matriz de funções de transferência G e da matriz de funções de transferência deslocada G_d em pontilhado e cheio, respectivamente.

Figura 71 - Variação dos valores singulares das matrizes de funções de transferência G e G_d pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que apenas para valores de frequência abaixo de $0,006 \text{ rad/s}$ que os valores singulares das matrizes de funções de transferência começam a divergir.

3.7.11 Definição das matrizes de ponderação

As matrizes de ponderação devem ser matrizes diagonais compostas por funções de transferência estáveis e próprias e detêm características que variam conforme a matriz (de transferência de malha aberta, de transferência malha fechada ou de sensibilidade) que se deseja formatar.

A matriz de ponderação da matriz de funções de sensibilidade W_S é selecionada de modo que o sistema atenda aos requisitos de desempenho. Como os máximos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade devem ser pequenos em baixa frequência para rejeição de distúrbios e próximos da unidade em alta frequência, cada elemento da diagonal da matriz de ponderação da matriz de funções de sensibilidade deve ter o formato de um filtro passa-baixas com a ganho em baixa frequência A_S , ganho em alta frequência M_S e frequência de cruzamento ω_B . (BIBEL; MALYEVAC, 1992, p. 13). Dessa forma, as funções de ponderação podem ser modeladas da seguinte forma:

$$W_{S_i} = \frac{s/M_{S_i} + \omega_{B_i}}{s + \omega_{B_i} \cdot A_{S_i}} \quad (170)$$

Sendo que o ganho em baixa frequência deve ser o menor possível, aproximadamente igual ao inverso do erro em regime permanente desejado, sendo que valores muito pequenos podem acarretar em erros numéricos na síntese do controlador robusto; o ganho em alta frequência deve ser entre 0,1 e 0,5 para o limitar os afastamentos máximos da posição de equilíbrio sem penalizar tanto a velocidade de resposta do sistema e frequência de cruzamento próxima da largura de banda da função de sensibilidade (BIBEL; MALYEVAC, 1992, p. 13). Todos estes parâmetros podem ser diferentes para cada canal de saída da planta.

A matriz de ponderação da matriz de funções de transferência em malha fechada W_T é selecionada de modo que o sistema atenda aos requisitos de estabilidade robusta. Como os máximos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada devem ser

próximos da unidade em baixa frequência para atenuação de ruídos e precisão ao seguir trajetória e pequenos em alta frequência para estabilidade robusta na presença de incertezas aditivas, cada elemento da diagonal da matriz de ponderação da matriz de funções de transferência de malha fechada deve ter o formato de um filtro passa-altas com a ganho em baixa frequência A_T , ganho em alta frequência M_T e frequência de cruzamento ω_{BT} (BIBEL; MALYEVAC, 1992, p. 13). Dessa forma, as funções de ponderação podem ser modeladas da seguinte forma:

$$W_{T_i} = \frac{s/M_{T_i} + \omega_{BT_i}}{s + \omega_{BT_i} \cdot A_{T_i}} \quad (171)$$

Sendo que o ganho em baixa frequência deve aproximadamente igual ao inverso do máximo valor da variável de saída, o ganho em alta frequência deve ser entre alto o suficiente para promover atenuação de ruídos, limitando a taxa de corte e frequência de cruzamento próxima da largura de banda da função de transferência de malha fechada (BIBEL; MALYEVAC, 1992, p. 13). Todos estes parâmetros podem ser diferentes para cada canal de saída da planta.

A matriz de ponderação da matriz de funções de sensibilidade do controlador W_C é selecionada de modo que o sistema atenda aos requisitos de estabilidade robusta. Os máximos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade do controlador devem ser pequenos em baixa frequência para minimização da energia de controle e estabilidade robusta na presença de incertezas aditivas, porém esta penalização não costuma ser necessária uma vez que a matriz de funções de transferência da planta G costuma ter ganho pequeno em altas frequências. Dessa forma, caso a planta tenha sido normalizada, uma escolha inicial razoável de W_C pode ser a matriz identidade. Caso deseje-se um controle mais restritivo em baixas frequências, as funções de ponderação das funções de sensibilidade do controlador podem ser modeladas da seguinte forma:

$$W_C = \frac{s}{s + \omega_{BT}} \quad (172)$$

Sendo a frequência de cruzamento próxima da largura de banda da função de transferência de malha fechada (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 95)

Finalmente, outro critério de sintonia é que o intervalo entre o zero da matriz de ponderação da matriz de funções de sensibilidade e o cruzamento da curva de magnitude desta com a da matriz de ponderação da matriz de funções de transferência de malha fechada deve ser superior a uma década (DONHA, 2006, p. 72).

Aplicando os critérios mencionados, tem-se que:

$$W_S = \begin{bmatrix} \frac{s/1000 + 0,03}{s + 1,50 \cdot 10^{-6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s/1000 + 0,03}{s + 1,50 \cdot 10^{-6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s/10 + 0,07}{s + 3,50 \cdot 10^{-5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s/3,2 + 0,01}{s + 1,50 \cdot 10^{-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s/3,2 + 0,01}{s + 1,50 \cdot 10^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s/4,5 + 0,15}{s + 1,05 \cdot 10^3} \end{bmatrix} \quad (173)$$

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{1250 \cdot s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1250 \cdot s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4000 \cdot s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s + 131}{s + 3,00 \cdot 10^4} \end{bmatrix} \quad (174)$$

$$W_C = \frac{s}{s + 131} \quad (175)$$

3.7.12 Estabilidade robusta, estabilidade nominal e desempenho robusto para o sistema controlado pelo controlador robusto

Na Figuras 72 e 73 pode-se observar a variação pela frequência dos valores singulares de $W_T \cdot T_{ROB}$ e de $W_C \cdot C_{ROB}$ para o controlador robusto.

Figura 72 - Variação dos valores singulares de $W_T \cdot T_{ROB}$ pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 73 - Variação dos valores singulares de $W_C \cdot C_{ROB}$ pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Observando as Figura 72 e 73, nota-se que o máximo valor singular de $W_T \cdot T_{ROB}$ e $W_C \cdot C_{ROB}$ valem $5,59 \cdot 10^{-2}$ e $6,63 \cdot 10^{-3}$, respectivamente. Como tanto $W_T \cdot T_{ROB}$ como $W_C \cdot C_{ROB}$ são inferiores a 1, o sistema controlado pelo controlador H_∞ é dotado de estabilidade robusta.

Na Figura 74 pode-se observar a variação pela frequência dos valores singulares de $W_S \cdot S_{ROB}$ para o controlador robusto.

Figura 74 - Variação dos valores singulares de $W_S \cdot S_{ROB}$ pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 74, nota-se que o máximo valor singular de $W_S \cdot S_{ROB}$ vale $6,67 \cdot 10^{-1}$, que é inferior a 1, portanto o sistema controlado pelo controlador robusto é dotado de desempenho nominal.

O máximo valor singular de $N(K)$ vale 0,667, o qual é inferior a 1, portanto, o sistema controlado pelo controlador robusto é dotado de desempenho robusto.

3.7.13 Valores singulares do sistema controlado pelo controlador robusto

Na Figuras 75, 76, 77 e 78 podem-se observar os valores singulares das funções de transferência de malha aberta, de malha de fechada, de sensibilidade, e de sensibilidade do controlador do sistema controlado pelo controlador robusto.

Figura 75 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha aberta L_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 76 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada T_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 77 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade S_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 78 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade do controlador C_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Observando as Figuras anteriores, nota-se que o projeto do controlador H_∞ foi bem executado, uma vez que $\bar{\sigma}(S_{ROB})$ é pequeno em baixa frequência, $\bar{\sigma}(T_{ROB})$ é pequeno em alta frequência, $\bar{\sigma}(T_{ROB}) \sim 0 \text{ dB}$ em baixa frequência, e $\bar{\sigma}(C_{ROB})$ é pequeno em alta frequência. Esses parâmetros indicam boa rejeição de distúrbio, boa atenuação de ruídos, bom acompanhamento

do sinal de referência, controlador barato e estabilidade robusta na presença de incertezas aditivas e multiplicativas. Nas Figuras 75 e 76, os dois valores singulares de menor magnitude correspondem aos ângulos de rolagem e arfagem, que devido à natureza da planta, não é possível fazer com que estas variáveis de estado sigam uma trajetória arbitrária.

Para o sistema controlado pelo controlador robusto, a largura de banda em termos da matriz de sensibilidade, a largura de banda em termos da matriz de funções de transferência de malha fechada, a frequência de cruzamento, a taxa de corte e os máximos valores de pico da matriz de funções de sensibilidade e da matriz de funções de transferência de malha fechada podem ser vistos na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros do domínio da frequência do controlador robusto

ω_B	ω_C	ω_{BT}	$\max \bar{\sigma}(S)$	$\max \bar{\sigma}(T)$	TC
0,31 rad/s	0,62 rad/s	0,84 rad/s	2,9 dB	0,12 dB	84,3 dB/década

Fonte: Autoria própria.

Comparando estes parâmetros com aqueles do sistema controlado pelo regulador linear quadrático, nota-se que todos foram atendidos, com exceção da taxa de corte, a qual ficou 44,3 db/década acima do recomendado, o que pode acarretar atrasos de fase que podem instabilizar o sistema, os quais serão verificados nas simulações em malha fechada com o controlador robusto.

Nas figuras 79, 80 e 81 pode-se observar os valores singulares das funções de transferência de malha de fechada, de sensibilidade, e de sensibilidade do controlador do sistema controlado pelo controlador robusto e os valores singulares do inverso de suas matrizes de ponderação correspondentes, as quais são representadas pelas linhas cheias e pontilhadas, respectivamente.

Figura 79 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de transferência de malha fechada T_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_T pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 80 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade S_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_S pela frequência

Fonte: Autoria própria.

Figura 81 - Variação dos valores singulares da matriz de funções de sensibilidade do controlador C_{ROB} do sistema controlado pelo controlador robusto e do inverso da matriz de ponderação W_C pela frequência

Fonte: Autoria própria.

É importante avaliar se há algum cruzamento entre os valores singulares das matrizes T_{ROB} , S_{ROB} e C_{ROB} com o inverso das suas respectivas matrizes de ponderação. Eventuais cruzamentos são um indicativo de baixa robustez e distâncias muito grandes indicam excesso de robustez e provavelmente desempenho ruim, havendo assim uma relação de compromisso.

Observa-se que para as três matrizes, não há intersecção dos valores singulares delas com os valores singulares do inverso das matrizes de ponderação correspondentes, além do fato de as distâncias entre os valores singulares não serem demasiadamente grandes.

3.7.14 Simulações em malha fechada com o controlador robusto

As simulações serão executadas com o modelo não linear do quadricóptero realimentado com o estado estimado de modo a promover maior fidedignidade para as simulações.

a) Decolagem

Nas Figuras 82 e 83 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 82 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Figura 83 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Observando os gráficos anteriores, nota-se que entre as posições lineares, apenas ocorre variação significativa no eixo z e entre as posições angulares, a variação dos ângulos de Euler também é pequena, o que evidencia que o controlador robusto foi projetado de maneira adequada, uma vez que na manobra de decolagem, o quadricóptero deve apenas elevar sua altitude, sem que se mova horizontalmente ou angularmente. Vale ressaltar que o erro em

regime permanente é cerca de 1,66%. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 6,34 \text{ s}$, $\delta_x \sim 0 \text{ m}$, $\delta_y \sim 0 \text{ m}$, $\delta_\varphi \sim 0^\circ$, $\delta_\theta \sim 0^\circ$ e $\delta_\psi \sim 0^\circ$.

Comparando com o seguidor de referência e/ou o LQG, nota-se que o tempo de acomodação teve um aumento significativo, porém houve grande redução na variação dos afastamentos máximos, que são praticamente nulos.

Na Figura 84 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 84 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Nota-se que as quatro rotações dos conjuntos propulsores variam no tempo de maneira equânime, uma vez que o quadricóptero deve-se movimentar apenas para cima, exigindo de cada um dos motores o mesmo empuxo. O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3639 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 85, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 85 - Variação de U , V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de decolagem

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} \sim 0 \text{ m/s}$, $V_{max} \sim 0 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0,30 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de decolagem, nenhuma dos valores limites foi alcançado.

b) Voo em cruzeiro

O vetor de condições iniciais e o sinal de referência valem:

$$x_0 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (176)$$

$$x_r = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (177)$$

Nas Figuras 86 e 87 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 86 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Figura 87 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que o quadricóptero comporta-se de maneira semelhante ao projeto do regulador linear quadrático, além de apresentar erro em regime permanente de cerca de 4,74%, para as posições lineares e nulo para as posições angulares. O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 4,53 \text{ s}$, $\delta_x = 0,05 \text{ m}$, $\delta_y = 0,05 \text{ m}$, $\delta_z = 0,04 \text{ m}$, $\delta_\varphi = 2,49^\circ$, $\delta_\theta = 2,48^\circ$ e $\delta_\psi = 0,05^\circ$.

Comparando com o seguidor de referência e/ou o LQG, nota-se que o tempo de acomodação teve um aumento significativo, porém houve grande redução na variação dos afastamentos máximos, semelhante aos resultados obtidos na manobra de decolagem.

Na Figura 88 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 88 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3569 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 89, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 89 - Variação de U , V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de voo em cruzeiro

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} = 0,38 \text{ m/s}$, $V_{max} = 0,38 \text{ m/s}$ e $W_{max} = 0,02 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de voo em cruzeiro, nenhuma dos valores limites foi alcançado.

c) Guinada

Nesta manobra, o quadricóptero irá alterar o ângulo referente a este movimento de 0° para 10° . Assim, o vetor de condições iniciais e o sinal de referência valem:

$$x_0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (178)$$

$$x_r = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \pi/18]^T \quad (179)$$

Nas Figuras 90 e 91 estão ilustradas as respostas das posições do quadricóptero referentes ao referencial fixo e seus ângulos de Euler, sendo que X e φ ; Y e θ e Z e ψ são representados pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 90 - Variação de X , Y e Z pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

Figura 91 - Variação de φ , θ e ψ pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

O tempo de acomodação e os afastamentos máximos da posição de equilíbrio valem $t_s = 5,80 \text{ s}$, $\delta_x \sim 0 \text{ m}$, $\delta_y \sim 0 \text{ m}$, $\delta_z \sim 0 \text{ m}$, $\delta_\varphi \sim 0^\circ$ e $\delta_\theta \sim 0^\circ$.

Comparando com o seguidor de referência e/ou o LQG, nota-se que o tempo de acomodação teve um aumento significativo, porém houve grande redução na variação dos afastamentos máximos, semelhante aos resultados obtidos nas manobras de decolagem e voo em cruzeiro.

Na Figura 92 é mostrada a variação da rotação dos conjuntos propulsores.

Figura 92 - Variação de ω_1 , ω_2 , ω_3 e ω_4 pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo das rotações dos conjuntos propulsores vale $\omega_{max} = 3653 \text{ rpm}$.

A resposta das velocidades lineares pode ser vista na Figura 93, sendo que U , V e W são representadas pelas linhas cheia, tracejada e pontilhada, respectivamente.

Figura 93 - Variação de U , V e W pelo tempo com o controlador robusto para a manobra de guinada

Fonte: Autoria própria.

Os valores máximos das velocidades lineares em módulo valem $U_{max} \sim 0 \text{ m/s}$, $V_{max} \sim 0 \text{ m/s}$ e $W_{max} \sim 0 \text{ m/s}$.

Nota-se, portanto, que durante a manobra de guinada, nenhuma dos valores limites foi alcançado.

4 CONCLUSÕES

Nota-se que a síntese do controlador linear quadrático foi bem executada, uma vez que os afastamentos máximos da posição de equilíbrio são baixos, fazendo com que o quadricóptero não se afaste demasiadamente do seu destino e o tempo de acomodação está dentro do requisitado, levando o quadricóptero ao ponto final sem demorar demasiadamente e sem provocar acelerações altas demais nas partes mecânicas da máquina. As rotações limites que levariam o conjunto propulsor à saturação não foram ultrapassadas bem como as velocidades limites, que devem ser baixas para manter válida a hipótese de que os coeficientes de potência e de empuxo sejam constantes.

Em sequência, foi executado o projeto do observador de estados, onde notou-se que o erro inicial tem uma influência significativa na precisão da trajetória e no tempo dispendido para que quadricóptero a execute, além de exigir maiores rotações dos motores. As simulações com o observador de estados são mais realistas, pois incluem as incertezas inerentes do sistema de medição, na forma de erros iniciais diferentes de zero.

Dando continuidade, o seguidor de referência constante foi confeccionado e pôde-se perceber que o quadricóptero comportou-se da maneira esperada: manteve os tempos de acomodação e afastamentos máximos da posição de equilíbrio obtidos no projeto do regulador linear quadrático; apresentou erro em regime permanente praticamente nulo das variáveis a serem seguidas sem que nenhum dos valores limites fosse alcançado, utilizando ainda pouco esforço de controle.

Em seguida, foi sintetizado o filtro de Kalman em conjunto com o seguidor de referência constante ótimo, denominado controle linear quadrático gaussiano, o qual é útil para sistemas que estão submetidos tanto a ruídos de processo como de medida. Notou-se que o sistema apresentou uma maior deterioração nos parâmetros de desempenho, porém o estimador estocástico se mostrou mais eficiente do que o estimador de Luenberger em estimar o estado da planta, acarretando em ações de controle menos variacionais devido ao fato destas serem diretamente influenciadas pela estimativa do estado.

Finalmente, foi sintetizado o controlador robusto pelo método da sensibilidade mista de modo a contornar distúrbios e ruídos, garantir bom seguimento de trajetória sem dispendir muita

energia de controle e eventuais problemas causados pelas limitações dos modelos matemáticos atualmente empregados nos quadricópteros. Este controlador apresentou grande deterioração no tempo de acomodação do veículo e pequenos erros em regime permanente, porém redução significativa nos demais afastamentos máximos da posição de equilíbrio.

Em suma, comparando o controlador linear quadrático gaussiano e o controlador robusto em termos de desempenho e robustez, temos que o primeiro é dotado de menor tempo de acomodação, menor erro em regime permanente, maiores afastamentos máximos da posição de equilíbrio, menor robustez e maior gasto de energia de controle, enquanto o segundo apresenta características inversas. Desta forma, caso a aplicação em campo do quadricóptero em questão seja em um ambiente dotado de certa variabilidade nos parâmetros atmosféricos e sujeito a distúrbios como ventos, uma maior robustez aliada a menor despendimento de energia de controle são característica mais almejadas em detrimento ao pequeno erro em regime permanente e maior tempo de acomodação. Porém, caso o ambiente seja mais controlado, com menor incidência de distúrbios e/ou deseja-se uma resposta mais precisa e veloz, o controlador linear quadrático gaussiano é mais recomendado por apresentar menor tempo de acomodação e menor erro em regime permanente, em detrimento da menor robustez.

O próximo passos para esta dissertação seria a implementação dos sistemas de controle/observadores de estado sintetizados num protótipo para validação do desempenho e estabilidade destes em simulações reais.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALLAS, C. **Modelling and Linear Control of a Quadrotor**. Cranfield University, 2007. 138 p.
- BARNARD, J. **The requirements for unmanned aircraft operating in oil, gas and mineral exploration and production**. AUVSI Unmanned Systems North America 2013 Conference, 2013. 31 p.
- BIBEL, J. E.; MALYEVAC, D. S. **Guidelines for the Selection of Weighting Functions for H-Infinity Control**. Naval Surface Warfare Center, Dahlgren Division, 1992. 18 p.
- BRADFORD, A.; NELSON, A.; PALM, J. **Quad-Rotor UAV project: Final Report**. University of Washington, 2010. 35 p.
- COZMAN, F. G. **Controlador de trajetória para o robô móvel ariel – solução de controle ótimo**. Universidade de São Paulo, 1991. 179 p.
- CHEN, C. **On the Robustness of the Linear Quadratic Regulator via Perturbation Analysis of the Riccati Equation**. Dublin City University, 2014. 110 p.
- DOEBELIN, E. O. **Measurement systems: application and design**. New York: McGraw-Hill, 1990. 960 p.
- DOMINGUES, J. M. B. **Quadrotor prototype**. Universidade de Lisboa, 2009. 101 p.
- DONHA, D. C. **Teorias Avançadas de Controle**. Universidade de São Paulo, 2006. 90 p.
- DOYLE, J. C. **Guaranteed margins for LQG regulators**. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978. 2 p.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B.; TANNENBAUM, A. **Feedback Control Theory**. Macmillan Publishing Co., 1990. 214 p.
- FRANÇA, L. N. F.; MATSUMURA, A. Z. **Mecânica geral**. São Paulo: Edgard Blucher: Instituto Mauá de tecnologia, 2004. 235 p.
- FRIEDLAND, B. **Control System Design: An Introduction to State-Space Methods**. Dover Publications, 2005. 513 p.
- GARCIA, C. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009. 678 p.
- GEISERT, M.; MANSARD, N. **Trajectory Generation for Quadrotor Based Systems using Numerical Optimal Control**. International Conference of Robotics and Automation, 2016. 10 p.
- GELB, A. **Applied Optimal Estimation**. The MIT Press, 1974. 374 p.
- HESPANHA, J. P. **Undergraduate lecture notes on LQG/LQR controller design**.

University of California Santa Barbara, 2007. 33 p.

HOFFMANN, G. M.; HUANG, H.; WASLANDER, S.L.; TOMLIN, C.J. **Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. 20 p.

INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANIZATION. **Unmanned Aircraft Systems (UAS)**. Montréal: 2011. 54 p.

KWONG, R. H. **Control design for set point tracking**. University of Toronto, 2008. 86 p.

LEVINE, W. S. **Control System Fundamentals**. University of Maryland, 2011. 740 p.

MILLER, K. **Path Tracking Control for Quadrotor Helicopters**. University of California, Berkeley, 2008. 13 p.

MOKHTARI, A.; BENALLEGUE, A.; DAACHI, B. **Robust Feedback Linearization and GH_{∞} Controller for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle**. Journal of ELECTRICAL ENGINEERING, VOL. 57, NO. 1, 2006. 20-27 p.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Tradução de Heloísa Coimbra de Souza. Revisão técnica de Eduardo Aoun Tannuri. São Paulo: Prentice Hall, 2011. 809 p.

ONER, K. T. B.; CETINSOY, E.; UNEL, M.; AKSIT, M. F.; KANDEMIR, I.; GULEZ, K. **Dynamic Model and Control of a New Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle with Tilt-Wing Mechanism**. World Academy of Science, Engineering and Technology, 2008. 6 p.

OPPENHEIM, A. V.; VERGHESE, G. C. **Signals, Systems and Inference**. Prentice Hall, 2015. 704 p.

PHILLIPS, W. F. **Mechanics of Flight**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2009. 1152 p.

RAJAPPA, S.; MASONE, C.; BÜLTHOFF, H.; STEGAGNO, P. **Adaptive Super Twisting Controller for a Quadrotor UAV**. International Conference of Robotics and Automation, 2016. 7 p.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005. 574 p.

WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos**. Tradução de Mário Moro Fecchio, Nelson Manzanares Filho. Revisão Técnica de José Carlos Cesar Amorim. Porto Alegre: AMGH, 2011. 880 p.

TICE, B. P. **Unmanned Aerial Vehicles**. Airpower Journal, 2011. 1 p.

XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. **Linear Feedback Control: Analysis and Design with (MATLAB)**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. 370 p.

ZHANG, F.; LYU, X.; WANG, Y.; GU, H.; LI, Z. **Modeling and Flight Control Simulation of A Quad Rotor Tail-Sitter VTOL UAV**. AAIA Modeling and Simulation Technologies Conference, 2017. 13