EDUARDO DOMINGO MORALES

ANÁLISE DE CRITÉRIOS DE FALHA EM MATERIAIS DÚCTEIS: UM
ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

São Paulo

2013

EDUARDO DOMINGO MORALES

ANÁLISE DE CRITÉRIOS DE FALHA EM MATERIAIS DÚCTEIS: UM
ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

São Paulo

2013

EDUARDO DOMINGO MORALES

ANÁLISE DE CRITÉRIOS DE FALHA EM MATERIAIS DÚCTEIS: UM
ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica de Projeto e
Fabricação

Orientadora: Prof.^a D.^{ra} Larissa Driemeier

São Paulo

2013

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 15 de abril de 2013.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

1 FICHA CATALOGRÁFICA

Morales, Eduardo Domingo

Análise de critérios de falha em materiais dúcteis: um estudo numérico e experimental / E.D. Morales. – versão corr. -- São Paulo, 2013.

112 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Imperfeições e falhas dos materiais 2. Método dos elementos finitos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dr.^a Larissa Driemeier, pela atenção e orientação durante todo este projeto.

Ao Prof. Dr. Marcílio Alves, por toda a ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Ao pessoal do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas, pela ajuda na realização dos testes experimentais e orientação na elaboração desta dissertação.

À minha família, pelo apoio que sempre tive em todos os momentos.

RESUMO

O presente trabalho visa o estudo e análise de desempenho de diferentes critérios de falha disponíveis na literatura, a diferentes estados triaxiais de tensão. Para isso, utiliza-se um corpo de prova *ad hoc*, aqui denominado *Bifailure*, que foi projetado com a finalidade de se obter falha em estado de tensão próximo ao cisalhamento puro e em estado de tensão de alta triaxialidade, em um único teste de tração. Foram realizados ensaios experimentais e simulações numéricas com o programa comercial de elementos finitos *LS-Dyna*[®]. A fim de utilizar critérios de falha recentes, ainda não disponíveis, uma subrotina de elementos finitos foi desenvolvida e implementada. Após as simulações, concluiu-se que, dentre os critérios analisados, não houve um critério que representasse perfeitamente e simultaneamente os dois tipos de falha do espécime *Bifailure*. Por fim, o estudo concluiu que o grau de acuracidade de um critério de falha está relacionado ao número de parâmetros necessários e aos testes experimentais que foram realizados para sua caracterização.

Palavras-chave: Imperfeições e falhas dos materiais. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The present work aims the study and analysis of performance of different failure criteria available in literature, in different triaxial stress states. For that, it is used an *ad hoc* specimen, here named *Bifailure*, that was designed with the purpose of obtain failure in a stress state near pure shear and in a stress state of high triaxiality, in a single tension test. Experimental tests and numerical simulations were done with commercial finite element software *LS-Dyna*[®]. In order to use recent failure criteria, that are still not available, a finite element subroutine was developed and implemented. After simulations, it was concluded that, among analysed criteria, there was not a criterion that represented perfectly and simultaneously the two types of failure of *Bifailure* specimen. Finally, the study concluded that the degree of accuracy of a failure criterion is related to the number of necessary parameters and to the experimental tests that were done for its characterization.

Keywords: Imperfections and failure of materials. Finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Falha em casco de navio após colisão.....	20
Figura 2 – a) Exemplo de falha em fuselagem de avião, resultante de colisão com pássaro. b) Falha no interior de carcaça de motor de avião, em evento de <i>blade-off</i>	21
Figura 3 – Aplicações da simulação de falha com MEF. a) Impacto em pára-choque. b) Impacto em casco de navio. c) Impacto de pássaro em asa de avião.	22
Figura 4 – Curva tensão-deformação para material dúctil.....	24
Figura 5 – Corpo de prova de aço (a) antes e (b) após ensaio de tração uniaxial.. ..	25
Figura 6 – Estrutura granular de aço, mostrando nitidamente os contornos de grão.. ..	26
Figura 7 – Discordância do tipo aresta, indicada pela seta, gerando distorção na rede cristalina.. ..	27
Figura 8 – (a) Cone representativo de um único estado de triaxialidade, (b) Projeção de um estado de tensões no plano π	30
Figura 9 – Projeção do vetor de tensões no plano π	30
Figura 10 – Deformação de falha em função do fator de triaxialidade e ângulo de Lode para a) alumínio 2024-T351; b) aço 1045	37
Figura 11 – Representação de estados de tensão no espaço de triaxialidade versus parâmetro de Lode.. ..	38
Figura 12 – Relação da deformação equivalente de falha com a triaxialidade para alumínio 2024-T351.....	41
Figura 13 – Nucleação de vazios em partículas, e falha dúctil da matriz cristalina para liga de alumínio 2024-T351.....	42
Figura 14 – (a) Ligação de vazios por empescoçamento; (b) Ligação de vazios por contato; (c) Ligação de vazios por ligação de microvazios.....	42
Figura 15 – Falha em teste de compressão de cilindros, nos planos de tensão cisalhante máxima.....	43
Figura 16 – Modelo de crescimento de vazios de McClintock.....	50
Figura 17 – Primeira geometria do espécime <i>Bifailure</i> , e corpo de prova na máquina de tração	57
Figura 18 – Medidas da primeira geometria do espécime <i>Bifailure</i>	58

Figura 19 – Resultados experimentais para a primeira geometria do <i>Bifailure</i> , em alumínio.....	59
Figura 20 – A grande deformação das regiões destacadas dificulta a obtenção de cisalhamento puro na região central do espécime.	59
Figura 21 – Segunda proposta do espécime <i>Bifailure</i>	60
Figura 22 – Medidas da segunda proposta do espécime <i>Bifailure</i>	60
Figura 23 – Em a), distanciamento do centro dos furos dos entalhes menores em relação à parede lateral do espécime; em b), indicação de raio e espaçamento máximo da curvatura dos entalhes em relação à face superior.	61
Figura 24 – Corpo de prova montado na máquina de tração	61
Figura 25 – Corpo de prova <i>Bifailure</i> montado na máquina de tração com extensômetro.....	62
Figura 26 – Medidas do corpo de prova para ensaio de tração	63
Figura 27 – Corpo de prova padrão utilizado para ensaio de tração.....	63
Figura 28 – Curva tensão-deformação de engenharia para alumínio 2024-T351	64
Figura 29 – Resultado experimental dos testes de tração padrão	64
Figura 30 – Curvas força-deformação para espécime <i>Bifailure</i>	65
Figura 31 – Região central do espécime <i>Bifailure</i> após o ensaio de tração.....	65
Figura 32 – Fluxograma representando o funcionamento da solução numérica de elementos finitos.....	69
Figura 33 – Representação esquemática da predição elástica / algoritmo de retorno para o modelo de von Mises..	71
Figura 34 – Esquema do algoritmo de previsão elástica e retorno.....	75
Figura 35 – Esquema do algoritmo de Newton-Raphson.....	76
Figura 36 – Malha de elementos finitos utilizada na simulação do teste de tração comum.....	77
Figura 37 – Curva tensão-deformação para teste de tração comum, com a curva extraída da simulação e curva do material utilizado por Wierzbicki et al. (2005)	78
Figura 38 – Malha do corpo de prova <i>Bifailure</i> , composta de 152220 elementos	78
Figura 39 – Detalhe da malha do espécime <i>Bifailure</i> , na região dos entalhes	79
Figura 40 – Variação da triaxialidade para os entalhes do espécime <i>Bifailure</i>	79

Figura 41 – Curvas experimental e numérica da simulação com critério de falha da máxima deformação plástica equivalente.....	80
Figura 42 – Resultado da simulação com critério de falha da máxima deformação plástica equivalente	80
Figura 43 – Curvas experimental e numérica da simulação com critério de falha da máxima tensão cisalhante	81
Figura 44 – Resultado da simulação com critério de falha da máxima tensão cisalhante	82
Figura 45 – Lugar geométrico de falha para o critério de falha de Johnson-Cook	83
Figura 46 – Resultado da simulação com critério de falha de Johnson-Cook.....	83
Figura 47 – Resultado da simulação com critério de falha de Johnson-Cook.....	84
Figura 48 – Resultado da simulação com critério de falha de Wilkins.....	85
Figura 49 – Resultado da simulação com critério de falha de Wilkins.....	85
Figura 50 – Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,058	86
Figura 51 – Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,485	87
Figura 52 – Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,058	87
Figura 53 – Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,485	88
Figura 54 – Trincas ao redor do entalhe 3, para critério de falha de Cockcroft-Latham com valor crítico de 0,485	88
Figura 55 – Deformação de falha para o critério de Bao-Wierzbicki	89
Figura 56 – Resultado da simulação com critério de falha de Bao-Wierzbicki	89
Figura 57 – Resultado da simulação com critério de falha de Bao-Wierzbicki	90
Figura 58 – Para o critério de falha de Bao-Wierzbicki, duas trincas foram geradas na região do entalhe central	90
Figura 59 – Superfície de deformação de falha para o critério de falha de Xue-Wierzbicki.	91
Figura 60 – Resultado da simulação para o critério de Xue-Wierzbicki	91
Figura 61 – Resultado da simulação para o critério de Xue-Wierzbicki	92
Figura 62 – Obtenção do fator de triaxialidade médio para diferentes experimentos..	101

Figura 63 – Obtenção do lugar geométrico de falha a partir dos valores de
deformação de falha e triaxialidade média obtidos numericamente.....103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do material alumínio aeronáutico	58
Tabela 2 – Propriedades do material Alumínio 2024-T351	62
Tabela 3 – Propriedades para alumínio 2024-T351	66
Tabela 4 – Parâmetros do modelo de von Mises para alumínio 2024-T351	77
Tabela 5 – Parâmetros do critério de falha de Johnson-Cook para alumínio 2024-T351	82
Tabela 6 – Parâmetros do critério de falha de Wilkins para alumínio 2024-T351	84
Tabela 7 – Parâmetros do critério de falha de Xue-Wierzbicki para alumínio 2024-T351	90

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS	<i>Antilock Braking System</i>
GMSIE	Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas
MEF	Método dos Elementos Finitos
DIC	<i>Digital Image Correlation</i>
JC	Johnson-Cook

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_1	Máxima tensão principal
σ_2	Tensão principal intermediária
σ_3	Mínima tensão principal
I_n	Invariante de tensão do tensor de tensões
s_1	Máxima tensão desviadora principal
s_2	Tensão desviadora principal intermediária
s_3	Mínima tensão desviadora principal
δ_{ij}	Delta de Kronecker
J_n	Invariante de tensão do tensor desviador
σ_m	Tensão hidrostática
$\bar{\sigma}$	Tensão equivalente
η	Fator de triaxialidade
θ_L	Ângulo de Lode
ξ	Terceiro invariante de tensão em forma normalizada
$\bar{\theta}$	Parâmetro de Lode
σ_p^*	Produto de triaxialidade
$\bar{\epsilon}_f$	Deformação plástica equivalente de falha
$\bar{\epsilon}_p$	Deformação plástica equivalente
η_m	Fator de triaxialidade médio
$\bar{\theta}_m$	Parâmetro de Lode médio
D	Variável de dano
T	Temperatura
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação
ϵ_1	Máxima deformação principal
ϵ_2	Deformação principal intermediária
ϵ_3	Mínima deformação principal
$\tau_{\max}$	Tensão cisalhante máxima

$(\tau_{\max})_f$	Tensão cisalhante máxima de ruptura
ε_c	Função de deformação de falha
D_1	Primeiro parâmetro do modelo de falha de Johnson-Cook
D_2	Segundo parâmetro do modelo de falha de Johnson-Cook
D_3	Terceiro parâmetro do modelo de falha de Johnson-Cook
D_4	Quarto parâmetro do modelo de falha de Johnson-Cook
D_5	Quinto parâmetro do modelo de falha de Johnson-Cook
$\dot{\varepsilon}_p$	Taxa de deformação plástica
$\dot{\varepsilon}_0$	Taxa de deformação de referência
T_f	Temperatura de fusão do material
T_0	Temperatura de referência
a	Primeiro parâmetro do modelo de falha de Wilkins
λ	Segundo parâmetro do modelo de falha de Wilkins
μ	Terceiro parâmetro do modelo de falha de Wilkins
p_{cr}	Tensão hidrostática crítica do modelo de falha de Wilkins
D_{crit}	Dano crítico
C_1	Primeiro parâmetro do modelo de falha de Xue-Wierzbicki
C_2	Segundo parâmetro do modelo de falha de Xue-Wierzbicki
C_3	Terceiro parâmetro do modelo de falha de Xue-Wierzbicki
C_4	Quarto parâmetro do modelo de falha de Xue-Wierzbicki
n	Coeficiente de encruamento
b	Raio instantâneo do vazio cilíndrico do modelo de McClintock
b_0	Raio original do vazio cilíndrico do modelo de McClintock
$\log F_{zb}^f$	Máxima deformação suportável pelo vazio de McClintock
σ_{esc}	Tensão de escoamento
R	Raio instantâneo do vazio esférico do modelo de Rice-Tracey
R_0	Raio original do vazio esférico do modelo de Rice-Tracey
Φ	Função de escoamento
f_v	Fração volumétrica de vazios
q_1	Primeiro parâmetro do modelo de material de Gurson
q_2	Segundo parâmetro do modelo de material de Gurson

f_v^*	Fração volumétrica de vazios modificada
f_{v0}	Fração volumétrica de vazios inicial
f_{vc}	Fração volumétrica de vazios crítica
f_{vF}	Fração volumétrica de falha
df_v	Incremento da fração volumétrica de vazios
$df_{v_nucleação}$	Incremento da fração volumétrica de nucleação
$df_{v_coalescência}$	Incremento da fração volumétrica de coalescência
$d\epsilon_{kk}^p$	Taxa de deformação plástica volumétrica
s_N	Desvio padrão da distribuição de deformações plásticas
ϵ_N	Média da distribuição de deformações plásticas
F_N	Fração volumétrica total que pode ser nucleada
$\mathbf{D}^e$	Tensor de elasticidade isotrópico
ϵ^e	Tensor de deformação elástico
$d\gamma$	Multiplicador plástico
Y	Força termodinâmica associada com o dano
s	Parâmetro de falha de Lemaître
S	Parâmetro de falha de Lemaître
G	Módulo cisalhante
K	Módulo volumétrico
A	Primeiro parâmetro do modelo de material de von Mises
B	Segundo parâmetro do modelo de material de von Mises
n	Terceiro parâmetro do modelo de material de von Mises
$\mathbf{s}$	Tensor desviador
ϵ^e	Deformação elástica
$\epsilon^{e,tent}$	Deformação elástica de tentativa
$\bar{\epsilon}^{p,tent}$	Deformação plástica de tentativa
σ^{tent}	Tensão de tentativa
$\mathbf{s}^{tent}$	Tensor desviador de tentativa
p^{tent}	Tensão hidrostática de tentativa
σ_y^{tent}	Tensão de escoamento de tentativa

ε_v	Deformação volumétrica
ε_d	Deformação desviadora
$\Delta\gamma$	Multiplicador plástico
K_t	Módulo tangente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO ESTUDO DE FALHA.....	24
2.1	Microestrutura.....	26
2.2	Invariantes de tensão	28
3	REVISÃO DA LITERATURA.....	33
3.1	Lugar geométrico de falha.....	36
3.2	Mecanismos físicos para ocorrência de falha dúctil	40
3.2.1	Alta triaxialidade.....	41
3.2.2	Triaxialidade negativa	42
3.2.3	Falha em triaxialidade intermediária	43
3.3	Modelos de falha da mecânica do contínuo	43
3.3.1	Critério de falha da máxima deformação plástica equivalente	44
3.3.2	Critério de falha da máxima tensão cisalhante.....	45
3.3.3	Critério de falha de Johnson-Cook.....	45
3.3.4	Critério de falha de Wilkins	46
3.3.5	Critério de falha de Cockcroft-Latham.....	47
3.3.6	Critério de falha de Bao-Wierzbicki	48
3.3.7	Critério de falha de Xue-Wierzbicki	49
3.4	Modelos micro-mecânicos	49
3.4.1	Modelo de falha de McClintock	50
3.4.2	Modelo de Rice e Tracey.....	51
3.4.3	Modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman	52
3.5	Modelo de dano de Lemaitre (mecânica do dano contínuo).....	55
4	ANÁLISE EXPERIMENTAL	57
4.1	Geometria inicial.....	57
4.2	Geometria proposta	60
4.2.1	Caracterização do material Alumínio 2024-T351	62
5	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	67

5.1	Implementação de subrotina	67
5.2	O procedimento de previsão elástica / algoritmo de retorno	69
6	ESTUDO DE CASO DA APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA	77
6.1	Critério de falha da máxima deformação plástica equivalente....	80
6.2	Critério de falha da máxima tensão cisalhante	81
6.3	Critério de falha de Johnson-Cook (JC)	82
6.4	Critério de falha de Wilkins	84
6.5	Critério de falha de Cockcroft Latham	86
6.6	Critério de falha de Bao-Wierzbicki	88
6.7	Critério de falha de Xue-Wierzbicki	90
6.8	Discussão dos resultados	92
7	CONCLUSÕES	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – CALIBRAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	101
	APÊNDICE B – SUBROTINA IMPLEMENTADA NO LS-DYNA®	104

1 INTRODUÇÃO

A falha corresponde à perda da capacidade de suportar carga por parte de uma estrutura ou componente, e é resultado da acumulação de microdefeitos no material, o que constitui o dano. A falha não resulta necessariamente no colapso global de uma estrutura, podendo também ser considerada como um fenômeno localizado.

O fenômeno de falha está presente no cotidiano das pessoas, em várias situações onde são verificadas rupturas em materiais, por exemplo: um copo de vidro quebrando-se ao cair no chão, uma folha de papel sendo rasgada, uma trinca em uma estrutura metálica ou de concreto, etc. São fenômenos de falha do dia-a-dia, alguns controlados e outros não.

A falha vem sendo investigada desde os tempos antigos, desde a era das cavernas, quando os ancestrais dos seres humanos utilizavam a falha de pedras para fabricar utensílios, entre eles armas.

A revolução industrial, por sua vez, desencadeou uma longa pesquisa sobre a resistência dos materiais e desenvolvimento de materiais novos. Os metais em particular, passaram a integrar estruturas de engenharia como pontes, veículos terrestres, navios, aeronaves, edifícios, entre outros dispositivos. Assim, o estudo sobre a resistência e ductilidade de metais passou a ser de grande valor na engenharia de estruturas.

Para haver falha dúctil é necessária a ocorrência de grande quantidade de plasticidade, de modo que no cotidiano das pessoas geralmente isso está presente em eventos de impacto como em colisões de navios com obstáculos, impacto de pássaros com aeronaves, perfurações de blindagens com projéteis e crash-tests de veículos.

Dessa forma, o estudo de falha é importante para a solução de problemas que ocorrem em várias áreas da engenharia. A economia de material em estruturas é um exemplo. Na indústria automotiva, na década de 80, havia um aumento de 20 quilos por ano na massa do veículo e na última década este aumento alcançou ainda uma taxa de 10 quilos por ano.

Segundo Christlein e Hambrecht (2008), isto ocorre principalmente devido ao aumento dos itens de segurança como o *airbag* e o *antilock braking system* (ABS), sendo este responsável por 30% desse aumento de massa. Melhorias no conforto e acabamento interno são responsáveis por 22% e 15%, respectivamente.

Deste modo, devem-se estudar alternativas para reforçar a estrutura do veículo sem comprometer sua massa. Isso leva a indústria em questão a utilizar materiais cada vez mais leves (Picket et al., 2004) – como compósitos, alumínio, magnésio e aços de alta resistência – que apresentam ductilidade menor que os aços comuns, apesar do alto limite de resistência (Yamashita et al, 2003). Assim, a menor ductilidade desses materiais contribui para aumentar a possibilidade de falha.

Figura 1. Falha em casco de navio após colisão. Extraído do site <http://www.brighthubengineering.com/seafaring/36193-what-is-ship-collision/> em 22/12/2012.

O fenômeno de falha também ocorre em acidentes com navios (Urban, 2003), quando geralmente ocorre ruptura do casco decorrente de colisão. Anualmente nesses acidentes perdem-se cerca de 230 embarcações, a maioria de pequeno porte, e mais de 1000 vidas humanas, além de perdas de vida selvagem, quando ocorrem acidentes com danos ao meio ambiente (Törnqvist, 2003). Entre os acidentes navais onde a falha está presente podem-se citar, por exemplo, o derramamento de óleo, resultante do encalhamento do petroleiro Exxon Valdez, nas águas do Alaska em 1989; o naufrágio do navio cruzeiro Estônia em 1994, este causado pela falha resultante do estresse gerado quando feita navegação a alta velocidade em mar agitado; e o vazamento de combustível do navio maltês Sea Bird em 2008, resultante de uma rachadura no tanque de combustível após colisão com o navio grego Syrus.

A falha é um fenômeno importante a ser considerado também no projeto de estruturas aeronáuticas. A estrutura de um avião deve ser projetada para resistir ou falhar de forma controlada em eventos de colisões com pássaros e objetos ou com fragmentos de turbina em um evento de *blade-off*, conforme ilustrado na Figura 2. Segundo Walvekar (2010), estima-se que 30000 colisões de aeronaves com pássaros ocorrem anualmente, resultando em perdas de 3 bilhões de dólares para a aviação mundial.

Figura 2. a) Exemplo de falha em fuselagem de avião, resultante de colisão com pássaro. b) Falha no interior de carcaça de motor de avião, em evento de *blade-off*. Figuras extraídas, respectivamente, dos sites <http://gawker.com/5930769/bird-strike-does-terrifying-damage-to-nose-of-united-airlines-plane> em 22/12/2012 e http://www.nasa.gov/centers/glenn/news/AF/2007/Jan07_printall_prt.htm em 24/12/2012.

Como aplicações militares para o estudo de falha podem ser citadas o projeto de blindagens e estruturas que resistam a explosões.

Ensaio experimentais de protótipos são demorados e custosos. Dessa forma, a competitividade industrial pelo desenvolvimento de produtos mais eficientes leva à crescente necessidade em se reduzir custos e tempo de desenvolvimento de produtos. Nesse contexto, a simulação do comportamento estrutural dos materiais pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta de grande valor. Com a constante evolução dos códigos, assim como da capacidade computacional, é possível analisar o comportamento da estrutura desde sua fase elástica até a falha em situações complexas de geometria e carregamento. Exemplos de simulação numérica de falha através do MEF são ilustrados na Figura 3.

Figura 3. Aplicações da simulação de falha com MEF. a) Impacto em pára-choque. Extraído de Bugelli e Driemeier (2010); b) Impacto em casco de navio. Extraído de Törnqvist (2003); c) Impacto de pássaro em asa de avião. Extraído do site <http://www.idacireland.com/autodyn> em 22/12/2012.

A Figura 3a mostra a propagação de uma falha em simulação de teste de resistência de pára-choque. Na Figura 3b é simulado um evento de colisão de navio, com ocorrência de falha no casco. Por sua vez, a Figura 3c apresenta a simulação de impacto de ave com asa de avião, na qual verifica-se se a asa falha ou não.

Modelos que mimetizam o comportamento real do material, porém, são essenciais para que os resultados numéricos reflitam o comportamento real da estrutura. Os modelos mais completos disponíveis na literatura estabelecem relações constitutivas e critérios de falha como função de grandes deformações, efeito de taxas de deformação e temperatura, perda de rigidez por danejamento, evolução do dano até surgimento da falha. Porém, ensaios experimentais são sempre muito custosos, e a caracterização de alguns desses modelos exige equipamentos sofisticados e licenças especiais.

Atualmente, portanto, projetos devem minimizar o número de ensaios experimentais, de modo a colher com eficiência dados que caracterizem o modelo de material adequado às condições de estudo. Esses dados, analisados, fornecem o *input* necessário para simulação numérica do problema. Dessa forma, podem-se racionalizar os investimentos, direcionando novos poucos testes experimentais, em situações reais, para validação da resposta numérica.

O avanço da pesquisa relacionada à área possibilita o desenvolvimento de modelos constitutivos de material, assim como critérios de falha, que apresentam boa acuracidade na representação dos fenômenos físicos modelados. Nota-se inclusive que existe uma forte parceria entre empresas e universidades no estudo e desenvolvimento de novos modelos de material e de falha (Ockewitz et al, 2006). Ainda, ao se analisar a documentação de programas comerciais de elementos finitos, como o *LS-Dyna*® (2009), verifica-se que necessidades das indústrias (principalmente a automobilística) são atendidas com relação à adaptação e inclusão

de novas funcionalidades nos códigos de MEF. Em se tratando do *LS-Dyna®*, como exemplo, pode-se citar o modelo de previsão de falha em pontos de solda desenvolvido pela Toyota e implementado no programa.

Atualmente, existem diferentes critérios de falha disponíveis em programas comerciais de elementos finitos, como *LS-Dyna®*, *Abaqus®* e *Pam-Crash®*. No entanto, para facilitar a aplicação prática, é desejado que o critério adotado possa ser calibrado com um número razoável de testes experimentais simples, e que o significado físico dos parâmetros que o caracterizam seja conhecido.

Diante do exposto, neste trabalho foram analisados diversos modelos de falha disponíveis na literatura, através do uso do software comercial *LS-Dyna®*. Esses modelos de falha foram implementados no *LS-Dyna®* através de uma subrotina. O modelo de material implementado foi o elastoplástico de von Mises tradicional. Para comparação de acuracidade entre os modelos foi utilizado um espécime *ad-hoc* desenvolvido por Alves e Driemeier (2010), denominado aqui como *Bifailure*.

O material em estudo é uma chapa de liga de alumínio 2024-T351, de espessura nominal 9,525mm, similar ao utilizado em Wierzbicki et al. (2005). Foram utilizados parâmetros de material disponíveis na literatura em conjunto com valores obtidos de ensaios experimentais de tração uniaxial.

Neste trabalho, o Capítulo 2 trata da fundamentação teórica, com conteúdo necessário ao entendimento sobre falha como invariantes de tensão e microestrutura dos materiais. No Capítulo 3, são explicados diferentes modelos de falha disponíveis na literatura. No Capítulo 4, os testes e resultados experimentais são detalhados. No Capítulo 5 a subrotina de elementos finitos implementada no *LS-Dyna®* é explicada detalhadamente. E no Capítulo 6 os diferentes critérios de falha são aplicados na simulação dos experimentos com o espécime *Bifailure*, sendo discutidos os resultados numéricos gerados por cada um.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO ESTUDO DE FALHA

A falha estrutural refere-se à perda da capacidade de suportar carga de uma estrutura ou componente. Esta se inicia quando o material atinge seu limite de resistência, causando sua separação em duas ou mais partes. A falha em um material é comumente classificada como sendo frágil ou dúctil, podendo ocorrer um tipo ou outro de falha, ou ambos, de acordo com o tipo de material, o estado de tensão, histórico de carregamento e temperatura. Os modos de falha no momento de ruptura podem variar, entretanto, para materiais dúcteis como aço e alumínio, o fenômeno pode ser ilustrado pela curva tensão-deformação de um ensaio de tração esquematizada na Figura 4.

Percebe-se pela figura que em testes de tração, usados para obter dados relativos ao comportamento mecânico do material, a falha é evidente. Distinguem-se várias etapas do comportamento mecânico do material, em trechos:

OA – comportamento linear, com deformações não permanentes;

AB – plastificação e encruamento, fenômenos associados ao movimento de discordâncias na rede cristalina;

BC – danejamento, onde se inicia o rompimento de ligações atômicas até a ruptura do material em C.

Figura 4. Curva tensão-deformação para material dúctil

O fenômeno de falha em materiais dúcteis envolve desde o comportamento linear de sua fase elástica até, depois de atingido o limite elástico do material, sua

plastificação e encruamento (fenômenos associados ao movimento de discordâncias na rede cristalina), seguido de dano (onde ocorre o rompimento de ligações atômicas). Como consequência da evolução do dano, ocorre localização de deformações e consequente estricção do corpo de prova; o material perde resistência e rigidez; ocorre crescimento e coalescência de vazios, levando, finalmente, ao surgimento de uma macrotrinca que se propaga até a falha. É, portanto, um fenômeno complicado da engenharia estrutural.

O corpo de prova de aço inoxidável (austenítico) da Figura 5 foi testado em um ensaio de tração quase-estático. Percebe-se pela figura que há considerável plastificação e estricção em uma pequena região do corpo de prova, onde ocorre a ruptura. Essa estricção está relacionada com o início do danejamento do material e ocorre no ponto B da Figura 5. Nessa região, o estado de tensão não é mais uniaxial, podendo ser medido experimentalmente através de técnicas especiais de tratamento de imagens (como o *Digital Image Correlation* - DIC) ou, simplesmente, no caso de corpos de prova cilíndricos, através do método de Bridgman (como descrito em Ling, 1996).

Figura 5. Corpo de prova de aço (a) antes e (b) após ensaio de tração uniaxial. Teste realizado no laboratório do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas (GMSIE).

Várias formas de tratar o fenômeno de falha foram desenvolvidas, entre elas modelos de falha abrupta, modelos micromecânicos e mecânica do dano contínuo, que serão explicados neste trabalho.

O fenômeno de falha geralmente envolve não linearidades de material e geométrica, assim torna-se conveniente utilizar métodos numéricos para prever a falha, sendo que com o constante aumento da capacidade de processamento dos computadores, os códigos de elementos finitos podem se tornar capazes de lidar com modelos mais complexos de falha. Por outro lado, a praticidade de calibração

de um critério de falha é uma prioridade na definição de um critério de falha robusto, que também precisa ser capaz de ser implementado numericamente e prever com boa precisão a falha em diferentes situações a fim de poder ser aplicado com facilidade na indústria.

Para o método numérico ser utilizado corretamente, é necessário conhecer bem o fenômeno estudado, que tem suas explicações na microestrutura. Além disso, é necessário modelar o material e a falha de forma consistente.

De acordo com Wu et al. (2010), o comportamento estrutural de um material depende das propriedades do material, da microestrutura e condições de carregamento (tensões, deformações e temperatura).

2.1 Microestrutura

Quando um metal solidifica-se, forma-se uma estrutura policristalina na qual cada cristal é chamado de grão e cada grão possui uma orientação cristalográfica definida. As fronteiras entre os grãos são chamadas de contornos de grão, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6. Estrutura granular de aço, mostrando nitidamente os contornos de grão. Extraído do site http://www.arcelormittal.com/automotive/saturnus/sheets/catalogue.pl?id_sheet=I5&header=&language=EN em 30/12/2011.

As propriedades mecânicas da estrutura policristalina são uma média das propriedades mecânicas de cada grão anisotrópico, assim como um todo a estrutura comporta-se como sendo isotrópica.

A estrutura atômica não é perfeita: nela existem defeitos como lacunas, átomos substitucionais ou intersticiais, discordâncias ou vazios. A plasticidade é embasada no deslocamento de discordâncias na rede cristalina, sendo que uma discordância é um defeito linear ou unidimensional que gera uma distorção local da rede cristalina, conforme Figura 7.

Figura 7. Discordância do tipo aresta, indicada pela seta, gerando distorção na rede cristalina. Adaptado de Callister (2007).

O deslocamento de discordâncias, induzido por tensões cisalhantes, ocorre ao longo de planos cristalográficos chamados de planos de escorregamento.

Quanto maior a dureza e resistência de um material, menor é a facilidade com que as discordâncias conseguem se mover no retículo cristalino. Durante o processo de deformação plástica o número de discordâncias aumenta consideravelmente, geradas pela multiplicação de discordâncias pré-existentes e por concentradores de tensão como contornos de grão e microdefeitos do material. Como a interação entre duas discordâncias é de ordem repulsiva, quando as discordâncias interagem entre si o movimento de uma discordância acaba sendo dificultado pela presença de outras discordâncias, e com isso temos o aumento da resistência mecânica do metal.

Em um ensaio de tração, ao se atingir o limite de resistência à tração do material, a deformação plástica torna-se não homogênea, concentrando-se em uma pequena porção do corpo de prova, e gerando uma zona de estrangulamento da seção conhecida por estricção. A deformação torna-se não homogênea pelo fato de a diminuição da seção transversal ocorrer mais rapidamente que o encruamento. A seguir, ocorre a ruptura (falha) do material.

Em falha dúctil, que é o foco deste trabalho, há considerável deformação plástica antes da ruptura. Geralmente quanto maior a pureza de um material dúctil,

maior a deformação plástica suportada até a ruptura. O termo “falha dúctil” geralmente está relacionado com a falha por nucleação, crescimento e propagação de vazios (Ballard, 1997).

A influência de temperatura é evidente na definição entre ocorrência de falha mais dúctil ou mais frágil, apesar do comportamento dúctil do material a temperatura ambiente. Quanto maior a temperatura, mais intenso é o movimento de vibração dos átomos. Assim maior é a facilidade de restabelecimento de ligações atômicas quando o material sofre plastificação, pela redução da resistência ao movimento relativo entre átomos. Dessa forma, a falha no material ocorre com presença de grandes deformações plásticas, o que é característico da falha dúctil. Quando a temperatura é reduzida ocorre o efeito inverso: o movimento de átomos ao longo da rede cristalina é dificultado, assim como o restabelecimento de ligações atômicas rompidas. Quando a falha ocorre, a dificuldade de restabelecimento de ligações atômicas dificulta a progressão da deformação plástica, o que caracteriza o modo de falha frágil.

2.2 Invariantes de tensão

Considerando-se as componentes do tensor de tensões σ_{ij} e as tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , define-se a tensão hidrostática como:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

onde I_1 representa o primeiro invariante do tensor de tensões e a notação com índices iguais representa um somatório. Considerando s_{ij} como as componentes do tensor desviador, e s_1 , s_2 e s_3 os seus valores principais, tem-se:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (2)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Em forma matricial, δ_{ij} corresponderia à matriz identidade. O segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador são:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3)$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{1}{3} (s_{ij} s_{jk} s_{ki}) = s_1 s_2 s_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \quad (4)$$

A tensão equivalente de von Mises ($\bar{\sigma}$) pode ser expressa por:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (5)$$

Considere um volume diferencial submetido ao estado de tensões tridimensional no espaço das tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Na Figura 8a, a reta paralela a $\vec{ON}$, ou reta $\vec{h}$, que passa pela origem com ângulos iguais entre os três eixos é chamada de eixo hidrostático, e cada ponto desse eixo corresponde a um estado hidrostático de tensões. O plano perpendicular à reta $\vec{h}$ que passa pela origem é chamado de plano π , plano octaédrico, ou ainda plano desviador, e nesse plano a tensão hidrostática é nula. Considerando um ponto P no espaço de tensões com componentes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, o vetor $\vec{OP}$ pode ser decomposto em uma componente $\vec{ON}$, com norma a , paralela ao eixo $\vec{h}$, relacionada à tensão hidrostática, e em uma componente $\vec{NP}$, com norma r , perpendicular a $\vec{h}$, relacionada à parte desviadora, tal que:

$$a = \sqrt{3}\sigma_m \quad (6)$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma} \quad (7)$$

Desta forma, o fator de triaxialidade é definido como sendo:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a}{r} \quad (8)$$

Figura 8. (a) Cone representativo de um único estado de triaxialidade, (b) Projeção de um estado de tensões no plano π

A co-tangente do ângulo ϕ da Figura 8a é proporcional ao fator de triaxialidade. Portanto demonstra-se que para um determinado fator de triaxialidade existe um infinito número de estados de tensão, representados pela superfície do “cone” da Figura 8a. Ainda, para completar a determinação do estado de tensão é necessária a inclusão do ângulo de Lode, θ_L , o qual numericamente representa a magnitude da tensão principal intermediária σ_2 em relação à maior e à menor componente de tensão σ_1 e σ_3 , e geometricamente relaciona-se com a posição do ponto P na circunferência representada na Figura 8b.

As tensões desviadoras podem ser obtidas pela projeção do vetor de tensões OP no plano π , conforme ilustrado na Figura 8b. Por essa razão que o plano π também é chamado de plano desviador.

Figura 9. Projeção do vetor de tensões no plano π . Adaptado de Xue (2007).

O ângulo de Lode corresponde ao ângulo θ_L da Figura 9. Na Figura 9, além do ângulo de Lode θ_L , aparecem as relações entre as tensões principais no plano π .

O plano π aparece esquematizado na Figura 9. Nesse plano, o ângulo entre os eixos das tensões principais é igual a 120° . Desse modo, tem-se que:

$$\tan \theta_L = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 \sin 30^\circ - \sigma_3 \sin 30^\circ}{\sigma_1 \cos 30^\circ - \sigma_3 \cos 30^\circ} \quad (9)$$

Simplificando, obtém-se a definição do ângulo de Lode θ_L :

$$\theta_L = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right\} \quad (10)$$

tal que $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}$. Dessa forma, tem-se que o ângulo de Lode, para alguns estados de tensão mais conhecidos, é definido como:

$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ com $\theta_L = -\pi/6 \rightarrow$ tensão uniaxial

$\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ com $\theta_L = 0 \rightarrow$ cisalhamento

$\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 < 0$ com $\theta_L = \pi/6 \rightarrow$ compressão uniaxial

A relação entre θ_L e o terceiro invariante J_3 é dada por:

$$\xi = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} = \cos(3\theta_L) \quad (11)$$

onde ξ é o terceiro invariante da parte desviadora normalizado, de forma que $-1 \leq \xi \leq 1$. O parâmetro ξ caracteriza a posição (magnitude) da segunda tensão principal σ_2 em relação a primeira e terceira tensões principais σ_1 e σ_3 . Quando

$\xi = -1$, tem-se $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$; quando $\xi = 1$, tem-se $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$; enquanto que $\xi = 0$ para $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$.

Quando o ângulo de Lode é medido no sentido anti-horário, a partir da linha de σ_1 na Figura 9, variando assim de zero até $\pi/3$, utiliza-se também a normalização do ângulo de Lode, conhecida como parâmetro de Lode (Bai e Wierzbicki, 2008):

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta_L}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} a \cos \xi \quad (12)$$

tal que $-1 \leq \bar{\theta} \leq 1$. Considerando-se o parâmetro de Lode $\bar{\theta}$, tem-se que $\bar{\theta} = 1$ corresponde a tração axissimétrica, $\bar{\theta} = 0$ corresponde a cisalhamento, e $\bar{\theta} = -1$ corresponde a compressão axissimétrica ou estado de tração equi-biaxial.

O estado plano de tensão ($\sigma_3 = 0$) univocamente relaciona η com ξ ou $\bar{\theta}$:

$$\xi = \cos(3\theta_L) = \cos\left[\frac{\pi}{2}(1 - \bar{\theta})\right] = -\frac{27}{2}\eta\left(\eta^2 - \frac{1}{3}\right) \quad (13)$$

A equação anterior apresenta três raízes, uma correspondendo a cisalhamento puro ($\eta = 0, \bar{\theta} = 0$) e as outras duas ao estado plano de deformação ($\eta = \pm 1/\sqrt{3}, \bar{\theta} = 0$).

Em síntese, um estado de tensão representado pelas tensões principais no sistema cartesiano de coordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, também pode ser representado no sistema cilíndrico $(\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta_L)$ ou no sistema esférico de coordenadas $(\bar{\sigma}, \eta, \theta_L)$.

Outro parâmetro derivado de invariantes e que é utilizado em trabalhos de falha é o produto de triaxialidade:

$$\sigma_p^* = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}{\bar{\sigma}^3} = \frac{I_3}{\bar{\sigma}^3} \quad (14)$$

A maioria dos critérios de falha utiliza os invariantes e parâmetros citados acima na definição de funções de deformação de falha ε_c .

3 REVISÃO DA LITERATURA

O fenômeno de falha nos metais é resultado de um processo complexo que ocorre em escala micrométrica. Tal processo envolve a evolução e acumulação de defeitos microscópicos como microvazios e bandas de cisalhamento. Esses defeitos constituem o chamado “dano” do material, afetando as propriedades mecânicas do mesmo.

No passado, várias abordagens foram propostas para o tratamento de falha dúctil, como a mecânica da fratura, modelo de crescimento de vazios, modelo de poroplasticidade, mecânica do dano e vários modelos empíricos. A mecânica de fratura lida com a propagação de uma trinca, o que é diferente do tema tratado nesta dissertação. Assim, por esse motivo, a trinca originada pelo crescimento e propagação de microvazios no material será chamada aqui de falha e não de fratura.

As observações experimentais sobre falha dúctil em geral mostram que (Xue e Wierzbicki, 2008): 1) a aplicação de pressão aumenta a ductilidade do material; 2) a ductilidade do material em estado plano de deformação (ou cisalhamento) é menor do que a ductilidade do mesmo sob o estado de tração ou compressão quando a pressão mantém-se constante; 3) o dano no material se acumula de forma acelerada, inicialmente a uma baixa taxa e posteriormente a uma taxa mais alta à medida que a falha se aproxima; 4) o dano do material afeta a sua resistência mecânica.

A revisão da literatura científica disponível revela grande empenho dos centros de pesquisa no estudo de critérios de falha mais representativos dos fenômenos analisados, considerando a viabilidade de calibração desses critérios através da minimização de testes experimentais. Apesar disso, deve-se ressaltar que a aplicação inadequada desses modelos para diversos estados complexos de deformação pode resultar em previsões errôneas.

Inicialmente, surgiram modelos de falha que consideravam a acumulação de microdefeitos no material. Considerou-se que o surgimento, crescimento e propagação de micro-vazios era responsável pela falha dúctil dos materiais. A primeira análise microscópica de falha foi proposta por McClintock et al. (1966) que assumiu uma distribuição de vazios cilíndricos no material e estudou a evolução do

crescimento desses vazios. Posteriormente, Rice e Tracey (1969) estudaram o crescimento e mudança de forma de vazios esféricos nos materiais quando sujeitos a carregamento uniaxial. Os autores propuseram que o aumento de volume era mais significativo do que a mudança de forma dos vazios e portanto escreveram a deformação de falha como função do fator de triaxialidade, que é a razão entre a tensão hidrostática e tensão equivalente. No entanto, nos dois modelos anteriores não foi estudada a interação entre microvazios no material. Assim, Leroy et al. (1981) modificou o modelo de Rice e Tracey para incluir o efeito de nucleação e interação entre vazios. Todavia, esses modelos não consideram a plasticidade como acoplada ao dano acumulado pelo material. De acordo com esses modelos, a falha ocorre quando uma variável interna de dano atinge um valor crítico, resultando em uma perda repentina da capacidade de suportar carga do material. Dessa forma, surgiram modelos com acoplamento entre plasticidade e dano, como o proposto por Gurson (1977), que considera o material como sendo um meio poroso, no qual um fator denominado fração volumétrica de vazios controla a ocorrência de falha. Aqui a falha é resultante da coalescência de vazios, e ocorre quando a fração volumétrica de vazios se iguala à unidade. O modelo de Gurson não é realístico, pois, por exemplo, não é capaz de representar a falha sob condições de cisalhamento, onde o mecanismo de crescimento de vazios é inativo. Desse modo, o modelo original de Gurson foi repetidamente modificado para levar em consideração processos adicionais responsáveis pela deterioração do material e conseqüente falha dúctil. Por exemplo, a fim de aprimorar o modelo de Gurson, Tvergaard (1981) e Tvergaard e Needleman (1984) propõem considerar a fração volumétrica de vazios uma função da nucleação de novos vazios e do crescimento de vazios existentes. No entanto, apesar dos aprimoramentos do modelo de Gurson, o grande número de parâmetros do modelo e o fato destes serem fortemente acoplados tornou difícil a calibração e aplicação do modelo. Outro tipo de modelo de falha acoplado, denominado de Mecânica do Dano Contínuo, foi proposto por Lemaitre (1985). Aqui a degradação do material é modelada a partir de uma variável interna de dano enquanto que as equações constitutivas são derivadas da primeira e segunda leis da termodinâmica para meios contínuos.

Para aplicações industriais, são utilizados modelos de falha fenomenológicos empíricos. Apesar de não possuírem embasamento micromecânico, a simplicidade e acuracidade destes modelos os tornam mais aceitos em aplicações de engenharia.

O critério de falha empírico mais simples é o baseado na máxima deformação plástica equivalente. No entanto, demonstra-se que a deformação equivalente por si só não é suficiente para indicar a ocorrência de falha (Alves e Jones, 1999).

Atualmente, diversos autores confirmam que a falha é fortemente dependente do estado de triaxialidade do material, além do nível de deformação plástica [Alves e Jones (1999), Bao e Wierzbicki (2004), Børvik et al (2004), Wierzbicki et al (2005), Bao e Wierzbicki (2005), Ockewitz et al (2006) e Grytten et al (2009a)]. O modelo de falha de Johnson-Cook (1985), que também é função da triaxialidade, é bastante conhecido por ser o primeiro modelo de falha que também é função da taxa de deformação e temperatura.

Para a calibração dos critérios baseados no fator de triaxialidade é necessário gerar dados experimentais de tensão, triaxialidade e deformação equivalente no instante de falha. Assim, a forma mais comum de se obter diferentes faixas de triaxialidade em experimentos era conduzir testes de tração em espécimes cilíndricos sem e com diferentes entalhes. A seguir, os tensores de tensão e deformação no instante de falha desses espécimes poderiam ser estimados por métodos como o de Bridgman (1956). Porém, métodos como o de Bridgman apenas poderiam gerar dados para altas triaxialidades, limitando assim a calibração e aplicação dos modelos de falha para altas triaxialidades. Desse modo, a posterior introdução das análises pelo Método dos Elementos Finitos foi essencial para prever os valores de tensão e deformação na região de falha, permitindo uma melhor calibração dos modelos de falha.

Kim et al. (2003, 2004, 2007) e Bai e Wierzbicki (2008) demonstraram que apenas o fator de triaxialidade não é suficiente para caracterizar o estado de tensões de falha, sendo necessário considerar também um novo parâmetro, o ângulo de Lode. Este fato é confirmado pela observação experimental de que em comparação com os testes de tensão e compressão uniaxiais, uma menor ductilidade é observada no teste de torção (Johnson e Cook, 1985). Desse modo, o critério de Xue-Wierzbicki proposto em Wierzbicki et al. (2005) foi criado para incorporar esta observação experimental, possuindo uma superfície de deformação de falha que é função do fator de triaxialidade e parâmetro de Lode. Além disso, investigações numéricas de um vazio esférico contido em uma célula cúbica submetida a tipos diferentes de carregamento triaxial (Gao e Kim, 2006) mostraram que o ângulo de Lode tem uma forte influência na evolução do formato do vazio e no processo de

coalescência de vazios. E a influência do ângulo de Lode na ductilidade de metais também foi demonstrada experimentalmente por Barsoum e Faleskog (2007), através de ensaios experimentais de um espécime cilíndrico especial sob carregamentos combinados de tração e torção, que produziam valores diferentes de triaxialidade e parâmetro de Lode.

Os trabalhos científicos que estudaram a influência do ângulo de Lode são relativamente recentes, de forma que foi determinada a influência do ângulo de Lode tanto em falha quanto na superfície de escoamento, para diferentes modelos de falha e plasticidade disponíveis na literatura. Por exemplo, em Bardet (1990) foi estudada a influência do ângulo de Lode no formato da superfície de escoamento, e determinado que o modelo de plasticidade de Drucker-Prager assim como os modelos de Tresca e Mohr-Coulomb têm dependência do ângulo de Lode. Além disso, alguns autores sugeriram a inclusão da dependência do ângulo de Lode na formulação de modelos constitutivos tradicionais baseados na superfície de escoamento de von Mises assim como em modelos de evolução de dano. Especificamente, Brünig et al. (2008) e Bai e Wierzbicki (2008) propuseram modelos de plasticidade que incluem a influência dos três invariantes de tensão na superfície de escoamento.

Os modelos de plasticidade baseados na tensão de Von Mises ou critério de Tresca podem prever satisfatoriamente o início do escoamento de materiais dúcteis, no entanto é o ângulo de Lode que permite representar falha em planos inclinados, como ocorre em testes de tração ou compressão uniaxial, ou diferenças entre as curvas de carregamento de testes de tração e cisalhamento de um material (Chocron et al., 2011). Isto decorre pelo fato de que quando a superfície de escoamento é escrita em função do ângulo de Lode, a mesma passa a possuir um formato não convexo, adotando a forma de uma “estrela de seis pontas”.

3.1 Lugar geométrico de falha

Estudos experimentais sobre falha em diferentes estados de tensões foram conduzidos de forma a se determinar os fatores que influenciam o fenômeno de

falha, de modo que para os modelos empíricos verificou-se ao longo do tempo que a falha era dependente da tensão hidrostática e tensão de von Mises. Esses dois fatores, que estão ligados aos invariantes de tensão, foram combinados no fator de triaxialidade. A tensão hidrostática positiva acelera o processo de nucleação-crescimento-coalescência de vazios e o movimento de bandas de cisalhamento, enquanto que a tensão hidrostática de natureza compressiva tem por efeito mitigar esses processos.

A seguir, verificou-se que a falha não era dependente apenas do fator de triaxialidade, mas também do ângulo de Lode, o qual está relacionado com o terceiro invariante de tensão do tensor desviador. No entanto, a sensibilidade da deformação de falha em relação ao fator de triaxialidade e ao ângulo de Lode é diferente para diferentes materiais. Por exemplo, na Figura 10 aparece esquematizada a superfície de deformação de falha para dois materiais, o alumínio 2024-T351 e o aço 1045, em função do fator de triaxialidade e ângulo de Lode. Percebe-se que a falha do alumínio 2024-T351 é fortemente influenciada tanto pelo fator de triaxialidade quanto pelo ângulo de Lode, enquanto que para o aço 1045 a superfície de falha tem baixa influência do ângulo de Lode.

Figura 10. Deformação de falha em função do fator de triaxialidade e ângulo de Lode para a) alumínio 2024-T351; b) aço 1045 . Extraído de Malcher et al. (2012).

Os mecanismos principais de degradação de material consistem no crescimento de vazios esféricos (influenciado por efeitos de tensão hidrostática) e alongamento de vazios (gerado por efeitos de cisalhamento).

A Figura 11 esquematiza os parâmetros de triaxialidade e ângulo de Lode que podem ser obtidos através de espécimes comumente utilizados em ensaios

experimentais. Na Figura 11, a área “A” representa a região na qual a maior parte da degradação do material ocorre por efeitos de cisalhamento, onde ambos os valores de triaxialidade e ângulo de Lode estão ao redor de zero, assim o mecanismo principal de degradação consiste no alongamento de vazios. Na área “B”, ainda existe forte influência dos efeitos de cisalhamento, observada em condições de compressão-cisalhamento e tração-cisalhamento, onde tanto ocorrem mecanismos de crescimento de vazios esféricos quanto de alongamento de vazios. Na área “C”, os efeitos de cisalhamento são desprezíveis e o mecanismo de degradação predominante consiste no crescimento de vazios esféricos.

Figura 11. Representação de estados de tensão no espaço de triaxialidade versus parâmetro de Lode. Adaptado de Malcher et al. (2012).

Na Figura 11, os valores dos eixos correspondem a valores médios do fator de triaxialidade e parâmetro de Lode, dados por:

$$\eta_m = \frac{1}{\bar{\epsilon}_f} \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \eta(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}_p \quad (15)$$

$$\bar{\theta}_m = \frac{1}{\bar{\epsilon}_f} \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \bar{\theta}(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}_p \quad (16)$$

onde $\bar{\varepsilon}_f$ corresponde à deformação plástica equivalente de falha.

A partir de observações experimentais, verifica-se que a falha dúctil compreende três fases: acúmulo de dano, início da falha e propagação de trinca. O início da falha ocorre a partir de acúmulo de dano, de forma que microscopicamente, tal dano é associado com a nucleação, crescimento, e coalescência de microvazios, movimento de bandas de cisalhamento e propagação de microtrincas. Macroscopicamente, o dano no material é verificado pela redução da resistência mecânica e ductilidade do mesmo. Essas mudanças no material são utilizadas para a previsão de falha, através do controle da verificação de valores indicativos instantâneos ou valores indicativos de falha que variam de forma cumulativa com o tempo. Em mecânica do contínuo, uma variável indicativa de danejamento no material comumente utilizada chama-se “dano”. Apesar de o dano possuir natureza anisotrópica, por praticidade o mesmo é modelado como sendo isotrópico e como uma grandeza escalar, o que tem produzido bons resultados. Como o dano é uma variável interna do material que não pode ser medida diretamente, é necessário criar uma correlação entre o dano e outras variáveis que podem ser mensuráveis. Deste modo, os modelos de dano criam a correlação necessária para se poder quantificar o dano.

Dois enfoques principais são dados para a modelagem do comportamento mecânico dos materiais: o enfoque macroscópico, em que o material é considerado em forma agregada, e o enfoque microscópico, em que a microestrutura do material é levada em consideração.

Modelos macroscópicos são construídos com base em variáveis de estado mensuráveis, como tensores de tensão e deformação, e às vezes temperatura e taxa de deformação. Demonstra-se experimentalmente que o histórico de carregamento influencia diretamente a ocorrência de falha.

Vários modelos de falha consideram que o dano não possui influência na plasticidade do material, ou seja, são modelos desacoplados. Uma vantagem dessa abordagem é que a evolução do dano e a evolução da plasticidade são desacopladas ao longo do cálculo das tensões no método de integração numérico, reduzindo o processamento computacional necessário. Consequentemente, no processo de verificação de falha, a variável de dano torna-se uma variável de pós-processamento. Por outro lado, o fato de o modelo de dano estar desacoplado

resulta em uma queda brusca da curva de carregamento do material quando da ocorrência de falha, resultando em uma representação não realística dos modos de falha, incluindo a falta da perda de resistência do material próximo do momento de falha com a representação de um aumento de resistência nos momentos finais de plasticidade que na verdade não existe.

Em mecânica do dano contínuo, considera-se que o dano possui influência na resistência mecânica do material desde o início do carregamento até a ruptura do material. Esta forma de modelagem por outro lado exige maior capacidade de processamento computacional.

Os modelos de dano cumulativos consideram que a falha ocorre quando a variável de dano excede um valor crítico D_C . Normalmente a variável de dano é normalizada em relação ao valor crítico D_C , de forma que o valor crítico de dano a ser atingido passa a ser unitário. A equação que define o incremento do dano cumulativo possui a forma geral:

$$\frac{dD}{d\bar{\epsilon}_p} = F(\epsilon, T, \dot{\epsilon}) \quad (17)$$

onde $d\bar{\epsilon}_p$ é o incremento de deformação plástica ao longo dos ciclos de integração no tempo. O lado direito da equação (17) é função de variáveis de estado como deformação, temperatura e taxa de deformação. Neste trabalho, são estudados critérios de falha que não consideram a influência de temperatura nem da taxa de deformação no lado direito da equação anterior, assim F torna-se $F = F(\epsilon)$.

3.2 Mecanismos físicos para ocorrência de falha dúctil

Como já discutido anteriormente, além da microestrutura do material e do histórico de tensões e deformações, um dos principais fatores que influenciam a ocorrência de falha dúctil é a triaxialidade. Assim, são apresentados a seguir diferentes formas de falha dúctil, de acordo com a faixa de triaxialidade.

Seguindo a idéia de Bao e Wierzbicki (2004, 2005), ilustrada na Figura 12, é conveniente distinguir três estados que levam a falhas distintas, sendo eles: falha por crescimento de vazios (alta triaxialidade), falha por cisalhamento (baixa ou nula triaxialidade), e a transição entre os dois (triaxialidade média). Bridgman (1956), por exemplo, já havia definido que quando a tensão hidrostática é compressiva, a ocorrência do fenômeno de nucleação-crescimento-coalescência de vazios é dificultada, aumentando assim a ductilidade em metais.

Figura 12. Relação da deformação equivalente de falha com a triaxialidade para alumínio 2024-T351 (Bao e Wierzbicki, 2004)

3.2.1 Alta triaxialidade

Este modo de falha se caracteriza por gerar superfícies ásperas e rugosas (com alvéolos). O início do processo ocorre com a nucleação de vazios nas regiões do material com inclusões de maior tamanho (partículas de elementos de liga), grandes defeitos da rede cristalina ou em regiões com bandas de cisalhamento. Um exemplo que ilustra a nucleação em partículas de liga é ilustrado na Figura 13.

Após a nucleação, ocorre o crescimento e propagação do vazio, sendo que a forma de crescimento e mudança de formato de vazios depende do histórico de tensões e deformações do material.

Figura 13. Nucleação de vazios em partículas, e falha dúctil da matriz cristalina para liga de alumínio 2024-T351. Extraído de Bao e Treitler (2004).

Além da nucleação e crescimento de vazios, existem diferentes mecanismos para a propagação dos mesmos. Os vazios podem propagar-se devido à estricção da rede cristalina entre dois vazios (Figura 14a), quando dois vazios entram em contato (Figura 14b), ou pela ligação de microvazios entre dois vazios maiores (Figura 14c).

Figura 14. (a) Ligação de vazios por empençoamento; (b) Ligação de vazios por contato; (c) Ligação de vazios por ligação de microvazios

3.2.2 Triaxialidade negativa

Não existem estudos detalhados sobre falha em triaxialidades negativas. No entanto, verifica-se que em testes de compressão de cilindros (nos quais a faixa de triaxialidade está entre -0,33 e -0,05) a falha ocorre nos planos de tensão cisalhante máxima (bandas de cisalhamento), a 45° da direção de carregamento, gerando uma superfície de falha que é relativamente lisa. Podem-se verificar essas características

na compressão de cilindros (Bai e Wierzbicki, 2008), de acordo com a Figura 15. No trabalho de Bao e Wierzbicki (2005), inclusive, foi proposto um valor de *cut-off* de $-1/3$ para a triaxialidade, abaixo do qual não há falha.

Figura 15. Falha em teste de compressão de cilindros, nos planos de tensão cisalhante máxima. Extraído de Bai e Wierzbicki (2008).

3.2.3 Falha em triaxialidade intermediária

French e Weinrich (1975) estudaram a influência da pressão em testes de tração de espécimes de cobre. Foi verificado que sem aplicação de pressão, a superfície de falha mostra que a mesma ocorreu totalmente por nucleação, crescimento e ligação de vazios. Por outro lado, a aplicação de pressão implica na redução da rugosidade da superfície de falha, isto é, ocorre transição gradual para o modo de falha verificado em triaxialidades negativas. Assim, pôde-se concluir que na faixa de triaxialidades intermediárias, o mecanismo de falha é uma combinação de nucleação, crescimento e ligação de vazios e falha nas bandas de cisalhamento.

3.3 Modelos de falha da mecânica do contínuo

Vários modelos de falha da mecânica do contínuo consideram o processo de danejamento do material como desacoplado do comportamento plástico do material. Assim, nesses modelos a variável de falha tem por finalidade identificar a sua

ocorrência, não influenciando na perda gradual de resistência do material até atingir a ruptura. Dessa forma, esses modelos representam uma perda súbita da capacidade do material de transmitir carga no instante de falha. Por outro lado, a mecânica do dano contínuo considera que o danejamento do material afeta sua resistência. Deste modo, o material perde gradativamente sua resistência até a ocorrência de falha. Este é o caso do modelo de dano de Lemaitre.

3.3.1 Critério de falha da máxima deformação plástica equivalente

Este critério identifica a falha quando é atingida uma deformação plástica equivalente de ruptura $\bar{\epsilon}_f$.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_f \quad (18)$$

Para um material incompressível $\bar{\epsilon}$ é definido como:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} \quad (19)$$

onde ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 são as deformações plásticas principais. Este critério é válido para todos os estados de tensão, de forma que apesar de ter sido um dos primeiros critérios de falha que surgiu, o mesmo é adotado ainda hoje, pela facilidade em identificar a falha na fase de pós-processamento (basta aplicar escalas de cores delimitadas pelo valor crítico de deformação) e pela grande disponibilidade de dados de deformação de ruptura que podem ser encontrados na literatura.

3.3.2 Critério de falha da máxima tensão cisalhante

Existem inúmeras evidências experimentais de que a falha ocorre no plano de tensão cisalhante máxima, como mostrado por Bai e Wierzbicki (2008). A condição de falha é definida como:

$$\tau_{\max} = (\tau_{\max})_f \quad (20)$$

$$\tau_{\max} = \max \left\{ \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| \right\} \quad (21)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais.

3.3.3 Critério de falha de Johnson-Cook

O critério de falha de Johnson-Cook possui uma função de dano cumulativo da forma:

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_c} \quad (22)$$

A falha é detectada quando a variável de dano D atinge o valor unitário. A função de deformação de falha, ϵ_c , é dada por:

$$\epsilon_c = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta)] \left[1 + D_4 \log \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right] \left[1 + D_5 \left(\frac{T - T_0}{T_f - T_0} \right) \right] \quad (23)$$

onde η é o fator de triaxialidade, $\dot{\epsilon}_0$ é a taxa de deformação de referência, T_f é a temperatura de fusão do material, e T_0 é a temperatura de referência. Neste

trabalho, por praticidade, o critério de falha de Johnson-Cook utilizado possui a fórmula:

$$\varepsilon_c = D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta) \quad (24)$$

Deste modo, os efeitos da taxa de deformação e temperatura sobre a deformação de falha foram ignorados. Isso porque para o alumínio 2024-T351 os efeitos de taxa de deformação e temperatura sobre a falha são significativos apenas na simulação de impacto a altas velocidades. Conclusões similares também foram tiradas para outros metais, como em Børvik et al. (2001), Børvik et al. (2003) e Hopperstad et al. (2003).

O critério de falha de Johnson-Cook é amplamente utilizado devido ao fato de ser prático de calibrar e de existir na literatura um vasto banco de dados sobre os parâmetros de falha para diversos materiais (Johnson e Holmquist, 1989). Considera-se que este critério é válido para faixas de triaxialidades médias a moderadas. Para triaxialidades baixas ou negativas não é recomendado aplicar este critério, pois a curva inteira de deformação de falha real não pode ser ajustada por apenas uma única função exponencial, de forma que na prática o ajuste de ε_c para o critério de falha de Johnson-Cook é feito para triaxialidades médias a moderadas. Deste modo, este critério é bastante utilizado na avaliação de impacto em estruturas (Grytten et al., 2009a; Dey et al., 2007), e em estudos relacionados a limite balístico (Grytten et al., 2009b).

3.3.4 Critério de falha de Wilkins

Este critério é baseado na seguinte variável cumulativa de dano:

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{1}{(1 - a\sigma_m)^\lambda} (2 - A)^\mu d\bar{\varepsilon}_p \quad (25)$$

onde $A = \max\left(\frac{s_2}{s_1}, \frac{s_2}{s_3}\right)$, s_1 , s_2 e s_3 são as tensões desviadoras principais, σ_m é a tensão hidrostática e os parâmetros a , λ e μ são parâmetros do critério de falha. Considera-se que um elemento falhou quando $D \geq D_{crit}$, e quando estas duas condições forem satisfeitas simultaneamente: $\sigma_m < p_{cr}$ e $\bar{\epsilon}_p > 0$, onde p_{cr} é uma tensão hidrostática crítica, dada por:

$$p_{cr} = -\frac{1}{a} \quad (26)$$

3.3.5 Critério de falha de Cockcroft-Latham

Neste critério a falha ocorre quando a seguinte integral atinge um valor crítico D_{crit} :

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} d\bar{\epsilon}_p \quad (27)$$

onde $\langle \sigma_1 \rangle$ é uma função que é igual a σ_1 , se $\sigma_1 > 0$, e igual a zero se $\sigma_1 \leq 0$. Este critério de falha é impreciso, pois não representa com eficácia a falha em altas triaxialidades (Teng e Wierzbicki, 2006) além do valor crítico D_{crit} variar bastante dependendo do teste utilizado para a calibração (para calibrar este critério é necessário apenas um teste experimental). Para alumínio 2024-T351 o valor D_{crit} varia de 0,058 até 0,485 segundo Teng e Wierzbicki (2006).

Além disso, o critério de Cockcroft-Latham (Cockcroft e Latham, 1968) foi estudado por Børvik em simulações de limite balístico (Børvik et al., 2009; 2010) e perfuração de placas (Børvik et al., 2011), resultando em boa correlação entre resultados experimentais e numéricos.

3.3.6 Critério de falha de Bao-Wierzbicki

Este critério de falha possibilita uma melhor representação da deformação de falha em função do fator de triaxialidade, pois a função é dividida em subequações de acordo com a faixa de triaxialidade. Este critério é baseado na seguinte variável cumulativa de dano:

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_c} \quad (28)$$

onde a função de deformação de falha ε_c para o alumínio 2024-T351 é dada por:

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 0,1225 \left(\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} + \frac{1}{3} \right)^{-0,46} & \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \leq -\frac{1}{3} \\ 1,9 \left(\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right)^2 - 0,18 \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} + 0,21 & -\frac{1}{3} < \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} < 0 \\ \exp \left(-1,944 \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) & 0 < \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} < 0,4 \\ & 0,4 < \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (29)$$

de forma que σ_m é a tensão hidrostática e $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente. Uma particularidade deste critério de falha é que para triaxialidades abaixo de $-1/3$ não há contribuição para a variável cumulativa de dano. Assim, fica implementado neste critério a observação experimental de que para triaxialidades abaixo de $-1/3$ não é possível a ocorrência de falha (Bao e Wierzbicki, 2005). O significado físico dessa afirmação é de que uma trinca nunca poderá surgir em um material submetido à compressão hidrostática com $\sigma_m/\bar{\sigma} < -1/3$.

3.3.7 Critério de falha de Xue-Wierzbicki

Este critério de falha leva em consideração na sua formulação o ângulo de Lode, além do fator de triaxialidade, o que aumenta consideravelmente sua acuracidade. A função de dano cumulativo para este critério tem o formato:

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_c} \quad (30)$$

tal que $\varepsilon_c = C_1 e^{-C_2 \eta} - (C_1 e^{-C_2 \eta} - C_3 e^{-C_4 \eta}) \left(1 - \xi^{1/n}\right)^n$ onde η é o fator de triaxialidade e ξ é o parâmetro de Lode, dado por:

$$\xi = \frac{27}{2} \frac{s_1 s_2 s_3}{\bar{\sigma}^3} \quad (31)$$

Os valores C_n são parâmetros do critério de falha, e n é o coeficiente de encruamento do material.

3.4 Modelos micro-mecânicos

Nos modelos micromecânicos, o material é considerado como sendo um meio poroso, visto que observações em escala micrométrica indicam que o mecanismo de acúmulo de dano nos materiais dúcteis envolve a nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Vários trabalhos científicos abordaram o tema sobre nucleação-crescimento-coalescência de vazios sujeitos a vários estados de tensão. Nesses modelos, o vazio é modelado como uma esfera ou elipsóide rodeado por material sem danejamento, o qual obedece às leis da mecânica do contínuo. Deste modo, a resposta global da porção de material contendo o vazio é considerada como sendo a resposta mecânica macroscópica do material. Devido à enorme combinação

de formatos e orientações possíveis para os vazios, são necessárias simplificações para tornar o problema matematicamente solúvel. Os trabalhos pioneiros cabem a McClintock (1968) e Rice e Tracey (1969) que analisaram o comportamento de um vazio cilíndrico ou esférico submetido à tensão uniforme. Nesses modelos, o material é considerado como um meio poroso, e a falha ocorre quando é atingido um valor crítico para a fração volumétrica de vazios. Gurson (1977) introduziu o acoplamento entre a influência dos microvazios e a plasticidade do material, e Tvergaard (1981) e Tvergaard e Needleman (1984) estenderam o modelo de Gurson a fim de incluir a aceleração do crescimento de vazios.

3.4.1 Modelo de falha de McClintock

Foi McClintock (1968) que realizou uma primeira análise teórica do crescimento de vazios. O material foi considerado como contendo vazios cilíndricos de seção transversal elíptica, de acordo com a Figura 16.

Figura 16. Modelo de crescimento de vazios de McClintock.

McClintock analisou uma longa cavidade cilíndrica em um material tracionado no eixo da cavidade, enquanto o mesmo era submetido a tensões transversais. O crescimento do vazio cilíndrico era governado por:

$$d \log \frac{b}{b_0} = \sqrt{3} \sinh \left(\frac{\sqrt{3} \sigma_{r,inf}}{\sigma_{r,inf} - \sigma_{z,inf}} \right) d\varepsilon_{r,inf} + d\varepsilon_{r,inf} \quad (32)$$

onde z é a direção axial, r é a direção radial, *inf* denota valores distantes, b_0 é o raio original do cilindro e b é o raio instantâneo do mesmo. O modelo de dano de McClintock pode ser expresso por:

$$dD = \frac{1}{\log F_{zb}^f} \left[\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left(\frac{\sqrt{3}(1-n)(\sigma_a - \sigma_b)}{2\bar{\sigma}} \right) + \frac{3}{4} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\bar{\sigma}} \right] d\bar{\epsilon}_p \quad (33)$$

onde $\log F_{zb}^f$ denota a máxima deformação da célula contendo o microvazio, σ_a e σ_b são as tensões transversais, $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente, $\bar{\epsilon}_p$ é a deformação plástica equivalente, n é o coeficiente de encruamento e D é a variável cumulativa de dano. A falha ocorre quando D atinge o valor unitário.

3.4.2 Modelo de Rice e Tracey

Rice e Tracey (1969) modelaram o crescimento de um vazio esférico em um material puramente elástico. Um vazio esférico sujeito à tensão uniaxial não somente cresce em tamanho, mas também muda de forma. Rice e Tracey mostraram que quanto maior o fator de triaxialidade, mais significativa é a mudança de tamanho do vazio em comparação com a sua mudança de forma. Essa conclusão está de acordo com a afirmação de que a tensão hidrostática tem por efeito acelerar o processo de nucleação-crescimento-coalescência de vazios. Rice e Tracey obtiveram a taxa de crescimento do raio dos vazios como sendo:

$$\frac{\dot{R}}{R_0} = 0,283 \exp \left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_{esc}} \right) \dot{\epsilon} \quad (34)$$

onde R_0 é o raio original do vazio, R é o seu valor atual, σ_m é a tensão hidrostática medida a distância e σ_{esc} é a tensão de escoamento. Segundo os autores, para um

material sofrendo encruamento sob tensão proporcional, a deformação de falha pode ser expressa por:

$$\varepsilon_c = a \exp\left(-b \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \quad (35)$$

onde a e b são dois parâmetros do modelo. Neste modelo, Rice e Tracey não consideraram a interação entre vazios adjacentes.

3.4.3 Modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman

O modelo de plasticidade com efeito de porosidade é chamado de modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman. Ele é baseado no modelo constitutivo poroso de plasticidade, que é dependente da tensão hidrostática e foi desenvolvido por Gurson (1977) considerando nucleação e crescimento de vazios. Considera-se aqui que os vazios estão dispersos em um meio contínuo incompressível. O parâmetro denominado fração volumétrica de vazios f_v especifica o início do surgimento de uma trinca, quando o parâmetro atinge um valor crítico.

A função de escoamento proposta por Gurson é dada por:

$$\Phi = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_{esc}^2} + 2f_v \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{esc}}\right) - 1 - f_v^2 = 0 \quad (36)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente de von Mises, σ_m é a tensão hidrostática e σ_{esc} é a tensão de escoamento do material. Posteriormente foi realizada uma modificação no modelo de Gurson de forma a introduzir dois novos parâmetros q_1 e q_2 . Assim, a função de escoamento torna-se:

$$\Phi = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_{esc}^2} + 2q_1 f_v \cosh\left(\frac{3q_2}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{esc}}\right) - 1 - (q_1 f_v)^2 = 0 \quad (37)$$

de acordo com a equação (37), o material perde capacidade de transmitir tensão quando os vazios apresentam grande crescimento. A função $f_v^*(f_v)$ foi criada por Tvergaard e Needleman (1984) para substituir f_v na equação anterior, a fim de modelar a perda gradativa de resistência do material:

$$f_v^*(f_v) = \begin{cases} f_{v0}, & \text{antes de qualquer carregamento} \\ f_v, & \text{para } f_v \leq f_{vc} \\ f_{vc} + \frac{1}{f_{vF} - f_{vc}} - f_{vc} (f_v - f_{vc}), & \text{para } f_v > f_{vc} \end{cases} \quad (38)$$

onde f_{v0} é a fração volumétrica de vazios inicial, f_{vc} é o valor crítico da fração volumétrica de vazios, a partir do qual se forma uma trinca (e a capacidade de transmitir carga cai rapidamente) e f_{vF} é a fração volumétrica de falha na qual ocorre perda completa da resistência do material (ruptura completa gerada por propagação de trinca).

O incremento da variável de fração volumétrica de vazios resulta da nucleação e coalescência de vazios:

$$df_v = df_{v_nucleação} + df_{v_coalescência} \quad (39)$$

Gurson propôs que a taxa do crescimento da fração volumétrica de vazios devido à coalescência é dada por:

$$df_{v_coalescência} = (1 - f_v) d\varepsilon_{kk}^p \quad (40)$$

onde $d\varepsilon_{kk}^p$ é a taxa de deformação plástica volumétrica. Chu e Needleman (1980) consideraram uma abordagem estatística para a nucleação de vazios. Os autores propuseram uma distribuição normal das nucleações de vazios com relação à deformação plástica:

$$\dot{f}_{v_nucleação} = A_N \dot{\varepsilon}_p \quad (41)$$

onde ε_p é a deformação plástica na matriz cristalina e

$$A_N = \frac{F_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right\} \quad (42)$$

onde s_N e ε_N são o desvio padrão e a média da distribuição de deformações plásticas e F_N é a fração volumétrica total que pode ser nucleada.

Apesar do sucesso dos modelos de nucleação-crescimento-coalescência de vazios na predição de falha em várias aplicações, ainda existem empecilhos com estes tipos de modelo:

- não é tratado o mecanismo de cisalhamento de vazios. O modelo de Gurson falha na simulação de um simples teste de cisalhamento. O modelo original de Gurson foi concebido para representar bem a faixa de alta triaxialidade, onde a pressão influencia diretamente no fenômeno de falha. Assim, recomenda-se cuidado na utilização do modelo de Gurson em baixa triaxialidade.
- no modelo de Gurson o danejamento é restrito à fração volumétrica de vazios. No entanto, o processo de danejamento no material é mais complexo do que a evolução da distribuição de vazios. Por exemplo, uma trinca sem volume na estrutura cristalina do material pode introduzir danejamento ao material ao fazer o mesmo perder resistência mecânica.
- trabalhos posteriores adicionaram novas fórmulas ao modelo de Gurson, no entanto, o modelo ainda não se mostra prático em termos de facilidade de calibração. De fato, com os desenvolvimentos posteriores do modelo, buscando aumentar a sua aplicabilidade, chegou-se a um total de dez parâmetros a serem determinados, sendo que os mesmos estão fortemente acoplados. Por essa razão encontram-se poucos casos de aplicação desse modelo na indústria.

3.5 Modelo de dano de Lemaitre (mecânica do dano contínuo)

Modelos de dano que detectam a deterioração do material desde o início do escoamento inserem uma variável de dano D à lei constitutiva, que varia de 0 a 1, onde $D = 0$ representa material íntegro e $D = 1$ representa perda total da capacidade de carga. O dano resulta na perda de rigidez, possibilitando que a falha se inicie na região danificada.

A diferença dos modelos de mecânica do dano contínuo em comparação com os modelos micromecânicos está no fato de o tratamento do crescimento e interação de vazios do primeiro ser tratado fenomenologicamente. Deste modo, parâmetros macroscópicos são utilizados na descrição da resposta mecânica do material.

No modelo de dano de Lemaitre, a lei de elasticidade com dano acoplado é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (43)$$

onde D é a variável de dano, $\mathbf{D}^e$ é o tensor de elasticidade isotrópico e $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor de deformação elástico. A lei de evolução de dano é dada por:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{(1 - D)} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \quad (44)$$

onde S e s são parâmetros do material, e $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico, um fator relacionado ao incremento de plasticidade, calculado a cada ciclo de integração no tempo (ver capítulo 5). A variável $-Y$, que representa a força termodinâmica associada com o dano, é igual a:

$$-Y = \frac{\bar{\sigma}^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2} \quad (45)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente de von Mises, p é a pressão hidrostática, G é o módulo cisalhante e K é o módulo volumétrico.

Como exemplo adicional, a variável de dano da mecânica do dano contínuo também pode ser introduzida em modelos constitutivos, de forma acoplada, como por exemplo no modelo de plasticidade de Johnson e Cook (1985):

$$\bar{\sigma} = (1 - \beta_b D) \left[A + B \cdot \bar{\epsilon}_p^n \right] \left[1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_f - T_0} \right)^q \right] \quad (46)$$

onde D é a variável de dano cumulativo do critério de falha de Johnson-Cook e β_b é um parâmetro de material.

4 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Neste trabalho propõe-se o projeto da geometria de um corpo de prova especial que falhe em diferentes níveis de triaxialidade, especificamente alta triaxialidade (falha por nucleação, crescimento e propagação de vazios) e triaxialidade próxima de zero (falha nas bandas de cisalhamento).

4.1 Geometria inicial

A geometria inicial do corpo de prova foi proposta por Alves e Driemeier (2010), conforme Figuras 17 e 18.

Figura 17. Primeira geometria do espécime *Bifailure*, e corpo de prova na máquina de tração.

Figura 18. Medidas da primeira geometria do espécime *Bifailure*

Para a primeira geometria do *Bifailure* foi testado o material alumínio aeronáutico, disponível em chapas de 6,35mm de espessura, com características dadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades do material alumínio aeronáutico

Densidade (ton/mm ³)	Módulo de elasticidade (MPa)	Coef. de Poisson
2,78x10 ⁻⁹	67100	0,33

A Figura 19 ilustra a sequência de instantes do ensaio da primeira geometria do espécime. Percebe-se que, após a primeira ruptura no entalhe menor (região de alta triaxialidade), houve grande rotação da região central do espécime, afastando a falha na região central da condição desejável de cisalhamento puro.

Figura 19. Resultados experimentais para a primeira geometria do *Bifailure*, em alumínio

A Figura 20 mostra claramente a plastificação considerável de regiões fora da região de ruptura, ocasionadas, principalmente, pelo desequilíbrio do espécime e rotação do mesmo após a primeira falha.

Figura 20. A grande deformação das regiões destacadas dificulta a obtenção de cisalhamento puro na região central do espécime.

4.2 Geometria proposta

Como solução para o problema de rotação do espécime, foi proposta uma nova geometria para o espécime *Bifailure*, com dois entalhes menores, conforme ilustra a Figura 21. A geometria do espécime foi projetada para que a deformação de falha dos entalhes menores fosse pequena e, portanto, não houvesse rotação significativa do espécime. As medidas do espécime são apresentadas nas Figuras 22 e 23. Este espécime com as dimensões mostradas a seguir foi o espécime utilizado neste trabalho.

Figura 21. Segunda proposta do espécime *Bifailure*

Figura 22. Medidas da segunda proposta do espécime *Bifailure*

Figura 23. Em a), distanciamento do centro dos furos dos entalhes menores em relação à parede lateral do espécime; em b), indicação de raio e espaçamento máximo da curvatura dos entalhes em relação à face superior.

Os ensaios de tração foram realizados na máquina de tração Instron do Laboratório de Impacto do GMSIE, conforme ilustrado na Figura 24.

Figura 24. Corpo de prova montado na máquina de tração

Para os testes foi utilizado um extensômetro para medição de deformação, ilustrado na Figura 25.

Figura 25. Corpo de prova *Bifailure* montado na máquina de tração com extensômetro

4.2.1 Caracterização do material Alumínio 2024-T351

O material utilizado neste trabalho foi a liga de alumínio 2024-T351, de forma que os corpos de prova foram fabricados a partir de uma chapa com 9,5 mm de espessura do referido material. As propriedades desse material são listadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades do material Alumínio 2024-T351

Densidade (ton/mm ³)	Módulo de elasticidade (MPa)	Coef. de Poisson
2,7x10 ⁻⁹	74660	0,3

Foram realizados testes de tração uniaxial de corpo de prova padrão para esse tipo de ensaio, com dimensões dadas pela Figura 26.

Figura 26. Medidas do corpo de prova para ensaio de tração

O ensaio de tração padrão consiste em tracionar o corpo de prova até a ruptura. O corpo de prova utilizado é ilustrado na Figura 27.

Figura 27. Corpo de prova padrão utilizado para ensaio de tração

A curva tensão-deformação de engenharia obtida para o alumínio 2024-T351 é ilustrada na Figura 28. Verifica-se na curva o instante de ruptura do espécime, evidenciado pela queda da magnitude da curva no final do teste.

A opção pelo estudo da liga de alumínio 2024-T351 foi pelo fato de os parâmetros que definem as propriedades do material estarem disponíveis na literatura científica. Trabalhos como o de Wierzbicki et al. (2005) e Malcher et al. (2012) apresentam um extensivo estudo sobre modelos de falha aplicados ao alumínio 2024-T351 e portanto fornecem tabelas com os parâmetros dos modelos de falha utilizados neste trabalho.

Figura 28. Curva tensão-deformação de engenharia para alumínio 2024-T351

Figura 29. Resultado experimental dos testes de tração padrão

Posteriormente foram realizados testes de tração do espécime *Bifailure* (segunda proposta), obtendo-se o resultado mostrado na Figura 30. Na mesma figura aparece também o indicativo da região de falha correspondente a cada queda da curva de força do gráfico. Desse modo, obtém-se que a primeira queda da curva de força está ligada à ruptura dos entalhes laterais menores, enquanto que a queda final da curva de força está ligada à ruptura do entalhe central.

Figura 30. Curva força-deformação para espécime *Bifailure*

Obteve-se ruptura do espécime *Bifailure* sem grande rotação da região central, de acordo com a Figura 31, o que favoreceu a obtenção de medidas mais precisas com o extensômetro.

Figura 31. Região central do espécime *Bifailure* após o ensaio de tração

Em síntese, as propriedades do alumínio 2024-T351 utilizadas neste trabalho são listadas na Tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades para alumínio 2024-T351

Descrição	Símbolo	Valor	Referência
Densidade	ρ	2700 kg/m ³	Teng et al. 2005
Módulo elástico	E	74660 MPa	Teng et al. 2005
Coef. Poisson	ν	0,3	Teng et al. 2005
Parâmetro de JC	A	352 MPa	Teng et al. 2005
Parâmetro de JC	B	440 MPa	Teng et al. 2005
Parâmetro de JC	n	0,42	Teng et al. 2005
Max. def. plást. equiv. de falha	$\bar{\epsilon}_f$	0,21	Teng e Wierzbicki, 2006
Max. tensão cisalhante de falha	$\tau_{\max}$	380 MPa	Teng e Wierzbicki, 2006
Parâmetro de falha de JC	D_1	0,13	Teng et al. 2005
Parâmetro de falha de JC	D_2	0,13	Teng et al. 2005
Parâmetro de falha de JC	D_3	-1,5	Teng et al. 2005
Parâmetro de falha de Wilkins	a	0,0012 MPa ⁻¹	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Wilkins	λ	2,15	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Wilkins	μ	2,18	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Wilkins	D_c	0,93	Wierzbicki et al. 2005
Valor crítico superior de falha de Cockcroft-Latham	D_{crit}	0,485	Teng e Wierzbicki, 2006
Valor crítico inferior de falha de Cockcroft-Latham	D_{crit}	0,058	Teng e Wierzbicki, 2006
Parâmetro de falha de Xue-Wierzbicki	C_1	0,87	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Xue-Wierzbicki	C_2	1,77	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Xue-Wierzbicki	C_3	0,21	Wierzbicki et al. 2005
Parâmetro de falha de Xue-Wierzbicki	C_4	0,01	Wierzbicki et al. 2005
Coeficiente de encruamento	n	0,153	Wierzbicki et al. 2005

5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

5.1 Implementação de subrotina

A fim de se obter maior controle sobre o algoritmo numérico de solução e para ser possível a utilização de critérios de falha que não estão originalmente disponíveis no programa comercial de elementos finitos, foi desenvolvida uma subrotina de material para o software *LS-Dyna®*. A subrotina consiste na implementação do modelo constitutivo de material e dos critérios de falha que foram tratados neste trabalho. O modelo de material que foi implementado foi o de von Mises, para lidar com elementos sólidos.

A subrotina é escrita na linguagem de programação Fortran, a qual é também utilizada originalmente na compilação do programa de elementos finitos *LS-Dyna®*.

A subrotina completa está disponível no Apêndice B, sendo que aqui serão explicados os pontos mais importantes sobre o seu funcionamento.

O modelo de plasticidade de von Mises é composto por:

1) Uma lei linear elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (47)$$

onde $\mathbf{D}^e$ é o tensor de elasticidade isotrópico e $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor de deformações.

2) Uma função de escoamento na forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s})} - \sigma_y = \bar{\sigma}(\mathbf{s}) - \sigma_y \quad (48)$$

onde $\mathbf{s}$ é o tensor desviador, $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente e σ_y é a tensão de escoamento, que é tomada como uma função da deformação plástica acumulada,

ou função do modelo constitutivo, de forma que neste trabalho é igual a $\sigma_y = A + B\bar{\varepsilon}_p^n$ (modelo constitutivo de von Mises).

3) Uma lei de escoamento:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (49)$$

tal que $\dot{\gamma}$ é chamado de multiplicador plástico.

4) E uma lei de encruamento, com a equação de evolução para a variável interna de encruamento:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}^p\| = \dot{\gamma} \quad (50)$$

O processo de retorno aplicado ao estado de previsão elástica descrito na próxima seção é necessário para se determinar quanto do incremento de deformação total que ocorre a cada passo de integração é de natureza elástica e quanto é de natureza plástica. O fluxograma da Figura 32 ilustra o que se explicou aqui. Nesse fluxograma, o índice n indica o passo atual e o índice $n+1$ indica o próximo passo no processo de integração.

Figura 32. Fluxograma representando o funcionamento da solução numérica de elementos finitos

5.2 O procedimento de previsão elástica / algoritmo de retorno

Dado o incremento de deformação total:

$$\Delta \epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \quad (51)$$

correspondente a um pseudo incremento de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ e dadas as variáveis de estado $\{\epsilon_n^e, \bar{\epsilon}_n^p\}$ em t_n , a fim de ser possível determinar quanto do incremento de deformação total é elástico e quanto é plástico considera-se inicialmente que esse incremento de deformação total é elástico. Desse modo, a deformação elástica de tentativa e a deformação plástica acumulada de tentativa são dadas por:

$$\epsilon_{n+1}^{e, \text{tent}} = \epsilon_n^e + \Delta \epsilon \quad (52)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p, \text{tent}} = \bar{\epsilon}_n^p \quad (53)$$

A correspondente tensão de tentativa é calculada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tent} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,tent} \quad (54)$$

Ou, de forma equivalente, decompondo nas partes hidrostática e desviadora:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{tent} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,tent} \quad (55)$$

$$p_{n+1}^{tent} = K\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{e,tent} \quad (56)$$

onde $\mathbf{s}$ e p denotam, respectivamente, os tensores desviador e hidrostático, G e K são respectivamente os módulos cisalhante e volumétrico e os índices d e v representam, respectivamente, os componentes desviador e volumétrico.

Depois de calcular o estado elástico de tentativa, o próximo passo no algoritmo é verificar se $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tent}$ se situa dentro ou fora da superfície de escoamento de tentativa:

- Se $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tent}$ se situar dentro da superfície de escoamento de tentativa, isto é, se:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tent}, \sigma_{y,n}) = \bar{\sigma}(s_{n+1}^{tent}) - \sigma_{y,n} \leq 0 \quad (57)$$

então o processo no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ é puramente elástico e o próprio estado elástico é a solução do problema de integração. Desse modo, se atualiza:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,tent} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tent} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \sigma_{y,n+1} &= \sigma_{y,n} \end{aligned} \quad (58)$$

- Caso contrário, o processo é elasto-plástico no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ e o algoritmo de retorno descrito a seguir precisa ser aplicado. A Figura 33 ilustra este caso, mostrando o processo de previsão elástica e algoritmo de retorno à superfície de escoamento.

Figura 33. Representação esquemática da predição elástica / algoritmo de retorno para o modelo de von Mises. Extraído de Souza Neto et al. (2008).

Deve-se destacar que o algoritmo de retorno consiste em resolver o sistema de equações não lineares a seguir:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n+1}^e &= \epsilon_{n+1}^{e,tent} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \\
 \bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \\
 \sqrt{3J_2(s_{n+1})} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) &= 0
 \end{aligned} \tag{59}$$

Que precisa ser resolvido para ϵ_{n+1}^e , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$, onde:

$$s_{n+1} = s_{n+1}(\epsilon_{n+1}^e) = 2G\epsilon_{d,n+1}^e \tag{60}$$

Depois de resolver o sistema de equações (59), o tensor de deformações plásticas pode ser atualizado de acordo com a seguinte fórmula:

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \tag{61}$$

O sistema de equações (59) pode ser simplificado em uma única equação não-linear em função do multiplicador plástico $\Delta\gamma$. Esta redução no número de equações é fundamental para tornar o processo de atualização de tensões mais eficiente computacionalmente. Pela simplificação do sistema de equações (59), nota-se que a plasticidade afeta apenas a parte desviadora e não a volumétrica dos tensores. A separação em partes desviadora e volumétrica das deformações fornece:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{e,tent} \quad (62)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,tent} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (63)$$

De forma equivalente, em termos de tensões temos:

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{tent} \quad (64)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{tent} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (65)$$

Assim, o processo de retorno afeta somente o componente desviador de tensão. A componente hidrostática, p_{n+1} , tem seu valor calculado na fase de previsão elástica e pode, portanto, ser eliminada do sistema de equações. Uma maior simplificação é alcançada rearranjando a equação (65):

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}\right) \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{tent} \quad (66)$$

ou seja, as tensões desviadora de tentativa e atualizada são colineares. Isso implica que:

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{tent}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tent}\|} \quad (67)$$

A substituição da equação (67) na equação (65) conduz a uma fórmula mais simples para a atualização de tensões desviadoras:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{tent}\|} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{tent} = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{tent}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{tent} \quad (68)$$

onde $\bar{\sigma}_{n+1}^{tent} \equiv \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{tent})}$ é a tensão elástica de tentativa de von Mises. Observa-se que sendo $\mathbf{s}_{n+1}^{tent}$ um tensor constante no processo de retorno, a tensão desviadora $\mathbf{s}_{n+1}$ é uma função linear de $\Delta\gamma$ somente na equação de atualização (68). Temos que a equação (68) indica que a tensão desviadora atualizada é obtida aplicando-se o fator de escala $1 - \Delta\gamma 3G / \bar{\sigma}_{n+1}^{tent}$ à tensão desviadora de tentativa.

Finalmente, com a substituição das equações (68) e (59)₂ na equação (59)₃, obtém-se que o sistema de equações (59) é reduzido à seguinte equação escalar (e não linear) que é função do multiplicador plástico $\Delta\gamma$:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) \equiv \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} - 3G\Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma) = 0 \quad (69)$$

A equação (69) é resolvida pelo método de Newton-Raphson, e com a solução $\Delta\gamma$, as variáveis de estado são atualizadas de acordo com:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{tent}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{tent} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} + p_{n+1}^{tent} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e &= [\mathbf{D}^e]^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{2G} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\epsilon}_{v,n+1}^{e,tent} \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \end{aligned} \quad (70)$$

O procedimento de estado elástico de tentativa e algoritmo de retorno está resumido nos esquemas das Figuras 34 e 35 ao final deste capítulo.

Os critérios de falha implementados na subrotina são os mesmos descritos na seção 3.3, ou critérios de falha empíricos baseados na mecânica do dano. Vale

ressaltar que os critérios de falha implementados produzem leves diferenças de resultados em comparação com os mesmos critérios já disponíveis no programa de elementos finitos, como o critério da máxima deformação plástica equivalente, ou critério de falha de Johnson-Cook. Acredita-se que essas diferenças ocorrem pelo critério de ativação de falha nos elementos. Na subrotina, conhece-se que a falha é ativada quando o valor crítico de falha é atingido em pelo menos um ponto de integração do elemento.

Algoritmo de previsão elástica e retorno

(i) Previsão elástica. Dado $\Delta \epsilon$ e as variáveis de estado em t_n , avaliar o estado elástico de tentativa:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1}^{e,tent} &:= \epsilon_n^e + \Delta \epsilon \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^{p,tent} &:= \bar{\epsilon}_n^p \\ p_{n+1}^{tent} &:= K \epsilon_{v,n+1}^{e,tent} ; \quad s_{n+1}^{tent} := 2G \epsilon_{d,n+1}^{e,tent} \\ \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} &:= \sqrt{\frac{3}{2} s_{n+1}^{tent} : s_{n+1}^{tent}}\end{aligned}$$

(ii) Verificar ocorrência de plasticidade:

$$\text{SE } \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^{p,tent}) \leq 0$$

ENTÃO ajuste $(\cdot)_{n+1} := (\cdot)_{n+1}^{tent}$ e SAIA da subrotina

(iii) Procedimento de retorno. Resolver a equação:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) \equiv \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} - 3G\Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma) = 0$$

para $\Delta\gamma$ usando o método de Newton-Raphson (ir para esquema da Figura 35) e atualizar as variáveis de estado:

$$\begin{aligned}p_{n+1} &:= p_{n+1}^{tent} ; \quad s_{n+1} := \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{tent}}\right) s_{n+1}^{tent} \\ \sigma_{n+1} &:= s_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} \\ \epsilon_{n+1}^e &= \frac{1}{2G} s_{n+1} + \frac{1}{3} \epsilon_{v,n+1}^{e,tent} \mathbf{I} \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p &:= \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma\end{aligned}$$

(iv) SAIR

Figura 34. Esquema do algoritmo de previsão elástica e retorno. Extraído de Souza Neto et al. (2008).

Algoritmo de Newton-Raphson

(i) Ajuste um valor inicial para $\Delta\gamma$

$$\Delta\gamma^{(0)} := 0$$

e o correspondente residual (valor da função de escoamento):

$$\tilde{\Phi} := \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p)$$

(ii) Executar iteração de Newton-Raphson

$$H := \left. \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}^p} \right|_{\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma} \quad (\text{inclinação})$$

$$d := \frac{d\tilde{\Phi}}{d\Delta\gamma} = -3G - H \quad (\text{derivada residual})$$

$$\Delta\gamma := \Delta\gamma - \frac{\tilde{\Phi}}{d} \quad (\text{novo valor para } \Delta\gamma)$$

(iii) Verificar convergência

$$\tilde{\Phi} := \bar{\sigma}_{n+1}^{tent} - 3G\Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma)$$

SE $|\tilde{\Phi}| \leq \varepsilon_{tol}$ ENTÃO RETORNAR ao esquema da Figura 34

(iv) IR PARA (ii)

Figura 35. Esquema do algoritmo de Newton-Raphson. Extraído de Souza Neto et al. (2008).

6 ESTUDO DE CASO DA APLICAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA

Conforme explicado anteriormente, a fim de simular numericamente os ensaios experimentais, foi utilizado o programa comercial de elementos finitos *LS-Dyna®* e o modelo constitutivo de von Mises:

$$\bar{\sigma} = A + B\bar{\epsilon}_p^n \quad (71)$$

onde A , B e n são constantes do material que precisam ser determinadas experimentalmente. Neste trabalho esses parâmetros foram extraídos do modelo constitutivo de Johnson-Cook, sem considerar os efeitos da taxa de deformação e temperatura, a partir do trabalho de Teng et al. (2005).

Tabela 4 - Parâmetros do modelo de von Mises para alumínio 2024-T351

A (MPa)	B (MPa)	n
352	440	0,42

Inicialmente foi realizada a simulação do teste de tração com espécime comum, utilizando a malha de elementos finitos mostrada na Figura 36.

Figura 36. Malha de elementos finitos utilizada na simulação do teste de tração comum

A simulação do teste de tração comum foi feita a fim de verificar a correlação entre as curvas tensão-deformação experimental e numérica. Nesta comparação foi incluída também a curva do alumínio 2024-T351 utilizada por Wierzbicki et al. (2005).

Figura 37. Curva tensão-deformação para teste de tração comum, com a curva extraída da simulação e curva do material utilizado por Wierzbicki et al. (2005)

Verifica-se na Figura 37 boa correlação entre resultados experimentais e numéricos, com relação ao comportamento plástico do material.

Como ocorreu a validação dos parâmetros de material adotados, os mesmos foram utilizados na simulação do espécime *Bifailure*, no teste de diferentes critérios de falha. A malha do espécime *Bifailure* é apresentada nas Figuras 38 e 39. Os pinos que tracionam o espécime foram modelados como superfícies analíticas (cilindros), sendo aplicado um deslocamento imposto no pino de uma extremidade enquanto que o outro pino é mantido fixo. Os valores de deformação de engenharia obtidos são tomados a partir da distância entre dois nós que corresponderiam aos pontos de apoio das pinças do extensômetro com o corpo de prova. Por simplificação, os entalhes que rompem a alta triaxialidade serão chamados de 1 e 2, e o entalhe central, que rompe a triaxialidade próxima a zero será chamado de entalhe 3.

Figura 38. Malha do corpo de prova *Bifailure*, composta de 152220 elementos

Figura 39. Detalhe da malha do espécime *Bifailure*, na região dos entalhes

Através de simulação foram medidas as triaxialidades para os entalhes 1, 2 e 3, que estão ilustradas na Figura 40. O valor médio de triaxialidade obtido para os entalhes 1 e 2 é de 0,629 e para o entalhe 3 é de 0,016.

Figura 40. Variação da triaxialidade para os entalhes do espécime *Bifailure*

A seguir são discutidos os resultados numéricos dos critérios de falha implementados na subrotina de elementos finitos.

6.1 Critério de falha da máxima deformação plástica equivalente

Para este critério foi utilizado o valor de deformação de falha de 0,21, extraído do trabalho de Teng e Wierzbicki (2006). O resultado da simulação é apresentado na Figura 41.

Figura 41. Curvas experimental e numérica da simulação com critério de falha da máxima deformação plástica equivalente

Verifica-se correlação razoável entre resultados experimentais e numéricos, apesar do critério embasado apenas em deformação ser relativamente simples. Após a ruptura dos entalhes 1 e 2, verifica-se na curva numérica um comportamento oscilatório do espécime. Isso ocorre pelo fato de não haver amortecimento nas simulações.

Figura 42. Resultado da simulação com critério de falha da máxima deformação plástica equivalente

Verifica-se que a acuracidade deste critério depende do valor utilizado para a calibração do mesmo. Pelo fato de ser necessário apenas um teste para a calibração do critério da máxima deformação plástica equivalente, em Wierzbicki et al. (2005) foi adotado um valor que produzisse uma melhor correlação com os testes experimentais analisados nesse trabalho. O valor utilizado para a calibração não foi baseado no teste de tração uniaxial, o qual produziria um valor crítico muito maior ($\bar{\epsilon}_f = 0,45$).

6.2 Critério de falha da máxima tensão cisalhante

Para este critério foi utilizado o valor de tensão cisalhante de falha de 380 MPa, extraído do trabalho de Teng e Wierzbicki (2006). O resultado da simulação é apresentado na Figura 43. Verifica-se que o critério da máxima tensão cisalhante superestimou a ruptura do espécime, resultando em grande rotação da parte central do mesmo, evidenciada na Figura 44, que ilustra o momento imediatamente após a falha.

Figura 43. Curvas experimental e numérica da simulação com critério de falha da máxima tensão cisalhante

Figura 44. Resultado da simulação com critério de falha da máxima tensão cisalhante

Este critério precisa apenas de um teste experimental para ser calibrado, por essa razão o valor utilizado para a calibração deve ser o mais representativo possível da ruptura dos espécimes ensaiados. Uma implementação do critério da máxima tensão cisalhante foi feita no espaço das deformações principais em Wierzbicki et al. (2005), chegando-se a bons resultados.

6.3 Critério de falha de Johnson-Cook (JC)

Para este critério, a deformação de falha tem o seguinte formato:

$$\varepsilon_c = D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta) \quad (72)$$

Desta forma, neste trabalho foram adotados os valores de Teng et al. (2005), que aparecem na Tabela 5. A relação fator de triaxialidade x deformação de falha está mostrada na Figura 45.

Tabela 5 - Parâmetros do critério de falha de Johnson-Cook para alumínio 2024-T351

D_1	D_2	D_3
0,13	0,13	-1,5

Figura 45. Lugar geométrico de falha para o critério de falha de Johnson-Cook

Figura 46. Resultado da simulação com critério de falha de Johnson-Cook

De acordo com a Figura 46, verifica-se boa correlação entre resultado experimental e numérico, apesar de o critério de falha de Johnson-Cook considerar apenas o fator de triaxialidade em sua formulação. Três testes experimentais são necessários para a calibração do critério de falha de JC. Desse modo, da mesma forma que ocorre com os dois critérios anteriores, o critério de JC também necessita de uma calibração que satisfaça a maior parte dos ensaios experimentais analisados. Por esse motivo encontra-se disponível na literatura mais de um

conjunto de parâmetros de JC para alumínio 2024-T351. A Figura 47 ilustra o espécime logo após a falha.

Figura 47. Resultado da simulação com critério de falha de Johnson-Cook

Um ponto interessante a ser considerado é que nesta simulação a falha do entalhe 3 não ocorreu exatamente no centro, mas sim de forma assimétrica. Outro ponto importante foi uma representação razoável da ruptura no entalhe 3. O critério de Johnson-Cook foi originalmente proposto para a representação de falha em altas triaxialidades. Assim, pode-se dizer que a representação de falha no entalhe 3 foi razoável apesar do fato de a ruptura próxima a cisalhamento puro implicar em altos valores de deformação de falha pelo critério de JC.

6.4 Critério de falha de Wilkins

O critério de falha de Wilkins implementado aqui foi calibrado de acordo com Wierzbicki et al. (2005). Os parâmetros utilizados aparecem na Tabela 6.

Tabela 6 - Parâmetros do critério de falha de Wilkins para alumínio 2024-T351

a	λ	μ	D_{crit}
$1,2 \cdot 10^{-3} MPa^{-1}$	2,15	2,18	0,93

Figura 48. Resultado da simulação com critério de falha de Wilkins.

Pelos resultados apresentados, na Figura 48 percebe-se que o critério de falha de Wilkins subestimou a ocorrência de ruptura em alta triaxialidade (entalhes laterais menores) e gerou uma péssima previsão da falha em cisalhamento (entalhe central). Apesar de serem necessários no mínimo 4 testes experimentais para a sua calibração, este critério de falha não apresentou bons resultados no presente trabalho. De acordo com Wierzbicki et al. (2005) este critério produziria bons resultados na faixa de triaxialidade $-1/3 < \eta < 1/3$ enquanto que subestimaria resultados na faixa de triaxialidade $1/3 < \eta < 2/3$.

Figura 49. Resultado da simulação com critério de falha de Wilkins.

6.5 Critério de falha de Cockcroft Latham

Este critério de falha é baseado em uma energia de deformação de ruptura na definição do valor crítico de falha. Desse modo, apenas um teste experimental é necessário para a sua calibração. No entanto, da mesma forma que para os critérios baseados na máxima deformação plástica equivalente e no critério da máxima tensão cisalhante, é necessário calibrar este critério com o valor que melhor representa na média os fenômenos de falha analisados. De acordo com Teng e Wierzbicki (2006) os valores críticos deste critério para o alumínio 2024-T351 variam de 0,058 até 0,485. Dessa forma, aqui foram feitas simulações com esses dois valores extremos.

Figura 50. Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,058

Figura 51. Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,485

Verifica-se que os valores extremos de calibração deste critério não geraram bons resultados para a simulação do espécime *Bifailure*. A fim de se representar melhor a simulação do *Bifailure*, um melhor valor crítico poderia ser escolhido para a simulação. De acordo com Teng e Wierzbicki (2006), a calibração deste critério a partir de ensaios de compressão de cilindros oferecem valores consistentes, enquanto que a calibração feita a partir de ensaios de tração uniaxial de espécimes com e sem entalhe geram valores que se espalham em uma longa faixa.

Figura 52. Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,058

É interessante notar na Figura 52 que a utilização de um valor crítico baixo resultou em duas pequenas trincas, uma de cada lado ao redor do entalhe 3, antes da ocorrência da ruptura. Nas Figuras 52 e 53, percebe-se que houve ruptura não simétrica em relação ao entalhe 3, sendo que na Figura 54 verifica-se a existência de duas microtrincas de modo que uma delas irá originar a ruptura final do entalhe 3 (microtrinca do lado vermelho).

Figura 53. Resultado da simulação com critério de falha de Cockcroft-Latham e valor crítico de 0,485

Figura 54. Trincas ao redor do entalhe 3, para critério de falha de Cockcroft-Latham com valor crítico de 0,485

6.6 Critério de falha de Bao-Wierzbicki

O critério de falha de Bao-Wierzbicki é função apenas do fator de triaxialidade, mas é representado por quatro funções diferentes de acordo com a faixa de triaxialidade. Este critério de falha foi desenvolvido por Bao e Wierzbicki (2004) através da construção do lugar geométrico de falha (*fracture locus*) pela realização e simulação de vários testes experimentais incluindo testes em cisalhamento puro e testes uniaxiais de espécimes em forma de cilindro com e sem entalhe, para o alumínio 2024-T351. A função de deformação de falha aparece esquematizada na seção 3.3.6 para o alumínio 2024-T351, sendo que a mesma é ilustrada na Figura 55.

Figura 55. Deformação de falha para o critério de Bao-Wierzbicki

Figura 56. Resultado da simulação com critério de falha de Bao-Wierzbicki

Apesar da formulação deste critério possuir uma melhor representação da deformação de falha para praticamente toda a faixa de triaxialidades, não foi constatado um bom resultado numérico para a falha sob cisalhamento. Além disso, uma grande oscilação da curva de força numérica foi verificada, conforme Figura 56.

Apesar do resultado ruim para a previsão de falha por cisalhamento por parte deste critério, em contrapartida pode-se dizer que o mesmo já foi empregado com sucesso em simulações de impacto com falha, como em simulações de testes de Taylor com a verificação de diferentes modos de falha do espécime (Teng et al., 2005).

Figura 57. Resultado da simulação com critério de falha de Bao-Wierzbicki

Figura 58. Para o critério de falha de Bao-Wierzbicki, duas trincas foram geradas na região do entalhe central

6.7 Critério de falha de Xue-Wierzbicki

Este critério considera o fator de triaxialidade e o ângulo de Lode em sua formulação, possuindo cinco parâmetros para a sua calibração, os quais estão listados na Tabela 7.

Tabela 7 - Parâmetros do critério de falha de Xue-Wierzbicki para alumínio 2024-T351

C_1	C_2	C_3	C_4	n
0,87	1,77	0,21	0,01	0,153

Na Tabela 7, n é o coeficiente de encruamento do material, extraído do ajuste da curva tensão-deformação equivalente do material à função:

$$\bar{\sigma} = K_t \bar{\epsilon}_p^n \quad (73)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente, K_t é o módulo tangente e $\bar{\varepsilon}_p$ é a deformação plástica equivalente. A superfície de deformação de falha em função do fator de triaxialidade e ângulo de Lode para este critério é mostrada na Figura 59.

Figura 59. Superfície de deformação de falha para o critério de falha de Xue-Wierzbicki. Extraído de Wierzbicki et al. (2005)

Figura 60. Resultado da simulação para o critério de Xue-Wierzbicki

Este critério representou com uma razoável acuracidade a falha no material, como pode ser verificado na Figura 60, além de gerar uma falha simétrica em torno do entalhe 3.

Figura 61. Resultado da simulação para o critério de Xue-Wierzbicki

6.8 Discussão dos resultados

Com relação aos critérios baseados em um único valor de calibração, foi obtido um bom resultado para o critério da máxima deformação equivalente. Deve-se ressaltar que os resultados ruins dos critérios da máxima tensão cisalhante e do critério de Cockcroft Latham dependem dos valores utilizados na calibração, os quais geralmente são calibrados para atender um maior número de casos de testes experimentais de diferentes espécimes. Com relação aos critérios de falha baseados no fator de triaxialidade, obteve-se um bom resultado com o critério de falha de Johnson-Cook, apesar de sua simplicidade. Para o critério de falha de Bao-Wierzbicki, somente a falha em alta triaxialidade foi prevista com boa acuracidade. Assim, pode-se dizer que este critério teve um resultado ruim levando em consideração a sua complexidade. Para o critério de falha de Xue-Wierzbicki um bom resultado pôde ser obtido. Deve-se destacar que o critério de Xue-Wierzbicki é o único critério avaliado aqui que também é função do ângulo de Lode.

Com relação ao formato de falha dos espécimes, esperava-se que ocorresse falha simétrica. No entanto em alguns critérios de falha verificou-se uma falha não simétrica em torno do entalhe central. Isso ocorreu devido ao fato de haver pequena rotação em torno do entalhe central, o que gerava o início de duas trincas de lados opostos de forma não simétrica, como ilustrado na Figura 54 para o critério de Cockcroft-Latham. Para o critério de Bao-Wierzbicki, inclusive, quase ocorreu a liberação de um fragmento do entalhe central pelo fato de haver ruptura não-simétrica.

Foi provado que o espécime *Bifailure* é útil para o *benchmark* de critérios de falha. No entanto, uma limitação do referido espécime é o fato de ser possível

avaliar apenas duas triaxialidades diferentes. Desse modo, recomenda-se para trabalhos futuros a possibilidade do projeto de um espécime como o *Bifailure* com falha em três triaxialidades diferentes, provavelmente tornando diferentes as geometrias dos entalhes 1 e 2.

7 CONCLUSÕES

Após um estudo detalhado da teoria de falha em materiais dúcteis, concluiu-se que a falha é influenciada por parâmetros como triaxialidade, nível de deformação plástica e, de acordo com a literatura mais atual, ângulo de Lode. Dessa forma, foi obtida a geometria de um corpo de prova especial de ensaio de tração para *benchmark* de critérios de falha em dois estados de tensão distintos, o estado de tensão de alta triaxialidade e o estado de tensão próximo ao cisalhamento puro.

O espécime especial foi denominado *Bifailure*, sendo que a segunda geometria obtida para o mesmo resultou em baixa rotação da região central do espécime durante o teste, o que proporcionou a obtenção de estado de tensão próximo ao cisalhamento puro na região central, além de medidas mais precisas com o extensômetro.

A fim de ser possível a comparação de desempenho entre diferentes critérios de falha, uma subrotina especial foi desenvolvida para o programa comercial de elementos finitos *LS-Dyna*[®]. Verificou-se através da simulação que critérios de falha mais simples, como o baseado na máxima deformação plástica equivalente, puderam gerar resultados satisfatórios para o espécime em questão. Inclusive, um critério de falha tradicional como o de Johnson-Cook gerou resultados melhores do que critérios de fundamentação mais complexa, como o de Bao-Wierzbicki e Xue-Wierzbicki.

Acredita-se que os critérios de falha mais simples representam melhor situações de falha similares àsquelas que ocorrem nos espécimes utilizados para a calibração. Por exemplo, o critério de falha de Cockcroft-Latham e da máxima deformação plástica equivalente possuem apenas um único parâmetro de calibração. Dessa forma, não há um valor crítico ótimo comum a todos os tipos de falha. Se forem feitos vários testes, a diferentes condições, pode-se utilizar um valor que atenda razoavelmente bem a maior quantidade possível de situações.

Para trabalhos futuros, propõe-se um reprojeto do espécime *Bifailure* com três entalhes de geometria diferentes, o que poderia proporcionar a falha em três estados de triaxialidade diferentes ao invés de dois, como é o caso do espécime atual.

REFERÊNCIAS

ALVES, M.; DRIEMEIER, L. A bi-failure specimen for accessing the performance of failure criteria. **SEM – Society of Experimental Mechanics, Inc. Symposium on Plasticity and Impact (including Blast) Mechanics (IMPLAST2010)**, Providence, Rhode Island USA, 2010.

ALVES, M.; JONES, N. Influence of hydrostatic stress on failure of axisymmetric notched specimens. **Journal of Mechanics and Physics of Solids** 47, p. 643-667, 1999.

BAI, Y.; WIERZBICKI, T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. **International Journal of Plasticity** 24, p. 1071-1096, 2008.

BALLARD, J. **Brittle Fracture**. Virginia Tech Materials Science and Engineering, 1997. Disponível em: <http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094_NoteBook/97ClassProj/exper/ballard/www/ballard.html>. Acesso em: 12 fev. 2012.

BAO, Y.; TREITLER, R. Ductile crack formation on notched Al2024-T351 bars under compression–tension loading. **Materials Science and Engineering A** 384, p. 385-394, 2004.

BAO, Y.; WIERZBICKI, T. On the fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. **International Journal of Mechanical Sciences** 46, p. 81-98, 2004.

BAO, Y.; WIERZBICKI, T. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. **Engineering of Fracture Mechanics** 72(7), p. 1049-69, 2005.

BARDET, J. P. Lode dependence for isotropic pressure-sensitive elastoplastic materials. **Journal of Applied Mechanics** 57, p. 498-506, 1990.

BARSOUM, I.; FALESKOG, J. Rupture mechanisms in combined tension and shear – experiments. **Int. J. Solids Struct.** 44 (6), p. 1768-1786, 2007.

BØRVIK, T. et al. A computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration. **European Journal of Mechanics: A/Solids** 29, p. 685-712, 2001.

BØRVIK, T. et al. Effects of target thickness in blunt projectile penetration of Weldox 460 E steel plates. **International Journal Impact Engineering** 28, p. 413-464, 2003.

BØRVIK, T. et al. Perforation of AA5083-H116 aluminium plates with conical-nose steel projectiles - experimental studies. **International Journal of Impact Engineering** 30(4), p. 367-384, 2004.

BØRVIK, T.; DEY, S.; CLAUSEN, A. H. Perforation resistance of five different high-strength steel plates subjected to small-arms projectiles. **International Journal of Impact Engineering** 36, p. 948-964, 2009.

BØRVIK, T.; HOPPERSTAD, O. S.; PEDERSEN, K. O. Quasi-brittle fracture during structural impact of AA7075-T651 aluminium plates. **International Journal of Impact Engineering** 37, p. 537-551, 2010.

BØRVIK, T. et al. Normal and oblique impact of small arms bullets on AA6082-T4 aluminium protective plates. **International Journal of Impact Engineering** 38, p. 577-589, 2011.

BRIDGMAN, P. W. **Studies in Large Plastic Flow and Fracture**. McGraw-Hill Inc., 1956.

BRÜNIG, M. et al. A ductile damage criterion at various stress triaxialities. **International Journal of Plasticity** 24, p. 1731-1755, 2008.

BUGELLI, E.; DRIEMEIER, L. Failure Models Evaluations on Structures Under Low Speed Crash – Experiments and Simulations. **Proceedings of the IMPLAST 2010 Conference**, USA, 2010.

CALLISTER, W. D. **Materials Science and Engineering: An Introduction**. John Wiley & Sons, 2007.

CHOCRON, S.; ERICE, B.; ANDERSON, C. E. A new plasticity and failure model for ballistic application. **International Journal of Impact Engineering** 38, p. 755-764, 2011.

CHRISTLEIN, J.; HAMBRECHT, T. Safety and lightweight design – not a contradiction. **Impact Loading of Lightweight Structures**, 2008.

CHU, C. C.; NEEDLEMAN, A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. **Journal of Engineering Materials and Technology** 102, p. 249-256, 1980.

COCKCROFT, M. G.; LATHAM, D. J. Ductility and the workability of metals. **Journal Institute Metals** 96, p. 33-39, 1968.

DEY, S. et al. On the influence of constitutive relation in projectile impact of steel plates. **International Journal of Impact Engineering** 34, p. 464-486, 2007.

FRENCH, I. E.; WEINRICH, P. F. The influence of hydrostatic pressure on the tensile deformation and fracture of copper. **Metallurgical Transactions A** 6A, p. 785-790, 1975.

GAO, X.; KIM, J. Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence. **Int. J. Solids Struct.** 43, p. 6277-6293, 2006.

GRYTEN, F. et al. Quasi-static perforation of thin aluminium plates. **International Journal of Impact Engineering** 36, p. 486-497, 2009a.

GRYTEN, F. et al. Low velocity perforation of AA5083-H116 aluminium plates. **International Journal of Impact Engineering** 36, p. 597-610, 2009b.

GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-yield criteria and flow rules for porous ductile media. **Journal of Engineering Materials and Technology** 99, p. 2-15, 1977.

HOPPERSTAD, O. S. et al. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behavior of a structural steel. Part I: Experiments. **European Journal of Mechanics A/Solids** 22, p. 1-13, 2003.

JOHNSON, G. R.; COOK, W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. **Engineering Fracture Mechanics** 21(1), p. 31-48, 1985.

JOHNSON, G. R.; HOLMQUIST, T. J. **Test data and computational strength and fracture model constants for 23 materials subjected to large strain, high strain rates, and high temperature**. Los Alamos National Laboratory, 1989. Technical Report LA-11463-MS.

KIM, J.; GAO, X.; SRIVATSAN, T. S. Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. **International Journal of Solids and Structures** 40, p. 7357-7374, 2003.

KIM, J.; GAO, X.; SRIVATSAN, T. S. Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. **Engineering Fracture Mechanics** 71, p. 379-400, 2004.

KIM, J.; ZHANG, G.; GAO, X. Modeling of ductile fracture: application of the mechanism-based concepts. **International Journal of Solids and Structures** 44, p. 1844-1862, 2007.

LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. **Journal of Engineering Materials and Technology – Transactions of the ASME** 107, p. 83-89, 1985.

LEROY, G. et al. A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. **Acta Metallurgica** 29, p. 1509-1522, 1981.

LING, Y. Uniaxial true stress-strain after necking. **AMP Journal of Technology** 5, p. 37-48, 1996.

LS-DYNA Keyword Users Manual Version 971. Livermore Software Technology Corporation, 2009.

MALCHER, L.; ANDRADE PIRES, F. M.; CÉSAR DE SÁ, J. M. A. An assessment of isotropic constitutive models for ductile fracture under high and low stress triaxiality. **International Journal of Plasticity** 30-31, p. 81-115, 2012.

MCCLINTOCK, F. A.; KAPLAN, S. M.; BERG, C. A. Ductile fracture by hole growth in shear bands. **International Journal of Fracture Mechanics** 2, p. 614-627, 1966.

MCCLINTOCK, F. A. A criterion for ductile fracture by growth of holes. **Trans. ASME - Journal of Applied Mechanics** 35, p. 363-371, 1968.

OCKEWITZ, A. et al. Damage modelling of automobile components of aluminium materials under crash loading. **LS-Dyna Anwenderforum**, 2006.

PICKET, A. K. et al. Failure prediction for advanced crashworthiness of transportation vehicles. **International Journal of Impact Engineering** 30(7), p. 853-872, 2004.

RICE, J. R.; TRACEY, D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 17, p. 201-217, 1969.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity**. John Wiley & Sons, 2008.

TENG, X. et al. Numerical prediction of fracture in the Taylor test. **International Journal of Solids and Structures** 42, p. 2929-2948, 2005.

TENG, X.; WIERZBICKI, T. Evaluation of six fracture models in high velocity perforation. **Engineering Fracture Mechanics** 73, p. 1653-1678, 2006.

TÖRNQVIST, R. **Design of Crashworthy Ship Structures**. 2003. 243 p. Tese (Doutorado) - Technical University of Denmark, Copenhagen, 2003.

TVERGAARD, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. **International Journal of Fracture** 17 (4), p. 389-407, 1981.

TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. **Acta Metallurgica** 32, p. 157-169, 1984.

URBAN, J. **Crushing and Fracture of Lightweight Structures**. 2003. 218 p. Tese (Doutorado) - Technical University of Denmark, Copenhagen, 2003.

WALVEKAR, V., **Birdstrike analysis on leading edge of an aircraft wing using a smooth particle hydrodynamics bird model**. 2010. 65 p. Dissertação (Mestrado) - Wichita State University, Wichita, 2010.

WIERZBICKI, T. et al. Calibration and evaluation of seven fracture models. **International Journal of Mechanical Sciences** 47, p. 719-743, 2005.

WU, P. D. et al. Effects of superimposed hydrostatic pressure on fracture in sheet metals under tension. **International Journal of Mechanical Sciences** 52(2), p. 236-244, 2010.

XUE, L., **Ductile fracture modeling – Theory, experimental investigation and numerical verification**. 2007. 228 p. Tese (Doutorado) - Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2007.

XUE, L.; WIERZBICKI, T. Ductile fracture initiation and propagation modeling using damage plasticity theory. **Engineering Fracture Mechanics** 75, p. 3276-3293, 2008.

YAMASHITA, M.; GOTOH, M.; SAWAIRI, Y. Axial crush of hollow cylindrical structures with various polygonal cross-sections – numerical simulation and experiment. **Journal of Materials Processing Technology** 140, p. 59-64, 2003.

APÊNDICE A – CALIBRAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE FALHA DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

Percebe-se que, em ensaios em corpos de prova, o fator de triaxialidade e ângulo de Lode não são constantes durante todo o teste, conforme Figura 62. Dessa forma, aqui será descrito um método de calibração dos critérios de falha da mecânica do contínuo que são baseados na variável cumulativa de dano:

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_c} \quad (74)$$

Figura 62. Obtenção do fator de triaxialidade médio para diferentes experimentos. Adaptado de Bao e Wierzbicki (2004).

O processo de calibração será exemplificado aqui para o critério de falha de Johnson-Cook, que apresenta a seguinte função de deformação de falha ϵ_c (dependente apenas do fator de triaxialidade η):

$$\epsilon_c = D_1 + D_2 \cdot \exp(D_3 \cdot \eta) \quad (75)$$

Aqui é necessário calibrar três parâmetros: D_1 , D_2 e D_3 . Assim são necessários, no mínimo, três testes experimentais em diferentes valores de triaxialidade η . Neste caso, geralmente são realizados testes em cisalhamento puro (η próximo de zero) e testes de tração uniaxial de espécimes com e sem entalhe (altos valores de η). Depois de realizados os testes experimentais, o próximo passo é realizar simulações em elementos finitos desses testes experimentais. Neste passo, é possível empregar na simulação modelos constitutivos que não são afetados pelo dano no material (sem perda de resistência mecânica induzida por dano). Verifica-se na literatura que nesta fase são empregados modelos de plasticidade que requerem uma curva tensão-deformação verdadeira do material ou modelos de plasticidade como o de von Mises. O objetivo da simulação numérica dos experimentos é extrair a deformação plástica e os componentes de tensão ou deformação da região onde ocorre ruptura dos corpos de prova, no momento de ruptura. Sabe-se, por exemplo, que para espécimes com entalhe é possível que a ruptura ocorra na região com o maior valor de triaxialidade, ou seja, no centro dos entalhes e não no raio de curvatura dos mesmos. Assim, sabendo o local de ocorrência de falha nos experimentos, nas simulações deve-se obter para o elemento onde ocorreria a falha a deformação plástica equivalente, e neste caso, o fator de triaxialidade. No entanto, o fator de triaxialidade a ser obtido do elemento que falha é um valor médio ao longo de todo o histórico de carregamento do elemento durante a simulação. Esse valor médio é dado pela fórmula:

$$\eta_m = \frac{1}{\bar{\epsilon}_f} \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} d\bar{\epsilon}_p \quad (76)$$

onde σ_m é a tensão hidrostática e $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente. Deste modo, para o elemento onde ocorre a falha deve ser obtida a deformação de falha e o fator de triaxialidade médio dado pela fórmula acima. A razão de ser utilizado um fator de triaxialidade médio ao invés de um fator de triaxialidade no instante de falha vem do fato de o equacionamento a seguir poder ser aplicado:

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_c(\bar{\eta})} = \frac{1}{\epsilon_c(\bar{\eta})} \int_0^{\bar{\epsilon}_f} d\bar{\epsilon}_p = \frac{\bar{\epsilon}_f}{\epsilon_c(\bar{\eta})} \quad (77)$$

Para $D = 1$, temos: $\bar{\epsilon}_f = \epsilon_c(\bar{\eta})$, o que possibilita a calibração. Deste modo, obtidas as deformações de falha e as triaxialidades médias de ruptura para cada espécime é possível obter os parâmetros de falha utilizando a função de deformação de falha $\epsilon_c(\eta)$ e o método dos mínimos quadrados, e a partir daí montar um gráfico que corresponderia ao lugar geométrico de falha, como o gráfico da Figura 63.

Figura 63. Obtenção do lugar geométrico de falha a partir dos valores de deformação de falha e triaxialidade média obtidos numericamente.

Um ponto importante a ser considerado é que para a calibração e obtenção dos parâmetros de falha o fator de triaxialidade η na equação de deformação de falha ϵ_c torna-se o fator de triaxialidade médio η_m .

APÊNDICE B – SUBROTINA IMPLEMENTADA NO *LS-DYNA*®

```

*****
*****
      subroutine umat45 (cm,eps,sig,epsp,hsv,dt1,capa,etype,tt,
1 temper,failel,crv)
      include 'nlqparm'
      include 'iounits.inc'
      dimension  cm(*),eps(*),sig(*),hsv(*),crv(101,2,*)
      dimension  aterms(4),rtr(3),rstava(7)
      real mult,bas,powp,effs,depi,A,B,n,qtrial,sigmay,phi,tol
      real q1,q2,q3,q4,q5,q6,dgama,g2,g,epbar,denom,ddgama,resnor
      real factor,R2G,R3G,davg,p,aj2,aux,aux1,aux2,aux3,epbar_i
      real eta,alfa
      integer nriter, mxiter, debug
      character*(*) etype
      logical failel
*
*****
*****
*
*
*      Johnson-Cook solid visco-elastic-plastic material
*      with isotropic hardening variables
*      ***** for BRICK elements *****
*
*
*
*      cm(1)=young's modulus
*      cm(2)=poisson's ratio
*      cm(3)=shear Modulus
*      cm(4)=Hardening factor beta (Johnson-Cook parameter n)
*      cm(5)=Tangent modulus (Johnson-Cook parameter B)
*      cm(6)=yield stress (Johnson-Cook parameter A)
*      cm(7)=Bulk Modulus
*      cm(8)=C (Johnson-Cook material model parameter)
*      cm(9)=eps0 (Johnson-Cook material model reference strain rate)
*
*      cm(10)=Failure criteria flag
*              (ifflag      =0 no failure,
*                          =1 accumulated equivalent plastic strain
*                          =2 maximum shear stress
*                          =3 Johnson-Cook
*                          =4 Wilkins
*                          =5 Cockcroft-Latham
*                          =6 Bao-Wierzbicki
*                          =7 Xue-Wierzbicki
*
*
*      cm(11)= critical value for erosion (crit)
*      cm(12)= constant for failure criteria (cf1)
*      cm(13)= constant for failure criteria (cf2)
*      cm(14)= constant for failure criteria (cf3)
*      cm(15)= constant for failure criteria (cf4)
*      cm(16)= constant for failure criteria (cf5) - hardening exponent for
*              Wierzbicki failure criterion
*
*      cm(17)=tolerance for Newton-Raphson algorithm convergence
*      cm(18)=max number of iterations for Newton-Raphson algorithm
*      cm(19)=starting value for dgama, for Newton-Raphson algorithm
*      cm(20)=debug variable, if equals 1 debug messages are printed

```

```

*      hsv(1)=total plastic strain
*      hsv(2)=total pressure
*      hsv(3)=von Mises stress
*      hsv(4)=max shear stress
*      hsv(5)=triaxiality (-hsv(2)/hsv(3))
*      hsv(6)=Lode parameter
*      hsv(7)=cumulative damage
*      hsv(8)=sum of (triaxiality)*(plastic strain increments)
*      hsv(9)=sum of (Lode parameter)*(plastic strain increments)
*
*      eps=strain increments to obtain elastic trial stress state
*      ql-6=deviatoric stresses
*      depi=incremental plastic strain
*
*****
*****
*****
      R0=0.E0
      R1=1.E0
      R2=2.E0
      R3=3.E0
      R6=6.E0
      R1D2=R1/R2
      R1D3=R1/R3
      R2D3=R2/R3
      tol=cm(17)
      mxiter=cm(18)
      dgama=cm(19)
      debug=cm(20)
*
*      for failure
*
      ifflag=cm(10)
      if(ifflag.ne.0.0) then
        crit=cm(11)
        cf1=cm(12)
        cf2=cm(13)
        cf3=cm(14)
        cf4=cm(15)
        cf5=cm(16)
      endif
*
*      Set some material parameters
*
      A=cm(6)
      B=cm(5)
      n=cm(4)
      C=cm(8)
      eps0=cm(9)
*
*      Shear modulus and auxiliary parameters
*
      g2 =cm(1)/(R1+cm(2))
      g  =R1D2*g2
      R2G=R2*g
      R3G=R3*g
*
      davg=(-eps(1)-eps(2)-eps(3))/3.
*      Computing Hydrostatic Stress(Incremental)
      p=-davg*cm(1)/((R1-R2*cm(2)))

```

```

* Updating Total Pressure
  hsv(2)=hsv(2)-p
* Computing Trial Stress
  sig(1)=sig(1)+p+g2*(eps(1)+davg)
  sig(2)=sig(2)+p+g2*(eps(2)+davg)
  sig(3)=sig(3)+p+g2*(eps(3)+davg)
  sig(4)=sig(4)+g*eps(4)
  sig(5)=sig(5)+g*eps(5)
  sig(6)=sig(6)+g*eps(6)
*
* Computing Deviatoric Stress
*
  q1=hsv(2)+sig(1)
  q2=hsv(2)+sig(2)
  q3=hsv(2)+sig(3)
  q4=sig(4)
  q5=sig(5)
  q6=sig(6)
  aj2=q4*q4+q5*q5+q6*q6+(q1*q1+q2*q2+q3*q3)/2.
  if(debug.eq.1) then
    write(59,*) 'sig(1) = ', sig(1)
    write(59,*) 'sig(2) = ', sig(2)
    write(59,*) 'sig(3) = ', sig(3)
    write(59,*) 'sig(4) = ', sig(4)
    write(59,*) 'sig(5) = ', sig(5)
    write(59,*) 'sig(6) = ', sig(6)
    write(59,*) 'hsv(2) = ', hsv(2)
    write(59,*) 'aj2 = ', aj2
  endif
*
* Calculation of equivalent stress and flow function
*
  qtrial=sqrt(R3*aj2)
  sigmay=A+B*(eps**n)
  if(debug.eq.1) then
    write(59,*) 'initial_dgamma = ', dgamma
    write(59,*) 'R3G = ', R3G
    write(59,*) 'initial qtrial = ', qtrial
    write(59,*) 'initial sigmay = ', sigmay
  endif
*
* Begin strain rate effect
*
  if(C.ne.R0) then
    d1d=eps(1)+davg
    d2d=eps(2)+davg
    d3d=eps(3)+davg
    d4d=eps(4)
    d5d=eps(5)
    d6d=eps(6)
    ds=d4d**R2+d5d**R2+d6d**R2
* Computing effective strain
    aux=R2*(d1d**R2+d2d**R2+d3d**R2+R2*ds)/R3
    if(aux.ne.R0) then
      effs=sqrt(aux)
    else
      effs=R0
    end if
* Computing strain rate
    if(tt.ne.R0) then
      effs=effs/dt1

```

```

* Updating flow stress based on strain rate effect
    sigmay=sigmay*(R1+C*log(effs/eps0))
    end if
end if
* -----
* Check for plastic admissibility
* -----
    phi=qtrial-sigmay
*
    if(phi/sigmay.gt.tol) then
* Plastic step: Apply return mapping - use Newton-Raphson algorithm
* to solve the return mapping equation
* -----
        epbar_i = epsp
        phi = qtrial - R3G*dgamma - A - B*((epbar_i+dgamma)**n)
        if(debug.eq.1) then
            write(59,*) 'Starting Newton-Raphson - phi=', phi
            write(59,*) 'initial epsp = ', epsp
        endif
        do 11 nriter=1,mxiter
*            Compute residual derivative
            aux1=epbar_i+dgamma
            aux2=n-R1
            aux3=aux1**aux2
            denom=-R3G-n*B*aux3
*            Compute Newton-Raphson increment and update variable DGAMA
            ddgamma=-phi/denom
            dgamma=dgamma+ddgamma
            if(debug.eq.1) then
                write(59,*) 'nriter = ', nriter
                write(59,*) 'epbar_i+dgamma = ', aux1
                write(59,*) 'n-R1 = ', aux2
                write(59,*) '(epbar_i+dgamma)**(n-R1) = ', aux3
                write(59,*) 'denom = ', denom
                write(59,*) 'ddgamma = ', ddgamma
                write(59,*) 'dgamma = ', dgamma
            endif
*            Compute new residual
            epbar=epbar_i+dgamma
            sigmay=A+B*(epbar**n)
            phi=qtrial-R3G*dgamma-sigmay
            if(isnan(phi).eq.-1) then
                write(59,*) 'Not a number found!! phi = ', phi
                goto 997
            endif
*            Check convergence
            resnor=abs(phi/sigmay)
            if(debug.eq.1) then
                write(59,*) 'isnan(phi) = ', isnan(phi)
                write(59,*) 'epbar = ', epbar
                write(59,*) 'sigmay = ', sigmay
                write(59,*) 'phi = ', phi
                write(59,*) 'resnor = ', resnor
            endif
            if(resnor.le.tol) then
                if(debug.eq.1) then
                    write(59,*) '**convergence achieved**'
                endif
*            Update accumulated plastic strain
                epsp=epbar
*            Update incremental plastic strain

```

```

*           depi=dgamma
*           Update stress components
*               factor=R1-R3G*dgamma/qtrial
*               sig(1)=factor*q1-hsv(2)
*               sig(2)=factor*q2-hsv(2)
*               sig(3)=factor*q3-hsv(2)
*               sig(4)=factor*q4
*               sig(5)=factor*q5
*               sig(6)=factor*q6
*               goto 997
*           endif
11      continue
*           Reset failure flag and print warning message if the algorithm
*           fails
*           write(59,*) '**CONVERGENCE FAILED**'
*       else
*           depi=R0
*       endif
*
* Updating accumulated plastic strain in history variable
*
997      hsv(1)=epsp
*
*****
*       post processor
*****
* von Mises stress
*       vm=R2/R6*(sig(1)*sig(1)+sig(2)*sig(2)
+       +sig(3)*sig(3)-(sig(1)*sig(2)
+       +sig(2)*sig(3)+sig(3)*sig(1))
+       +(sig(4)*sig(4)+sig(5)*sig(5)
+       +sig(6)*sig(6))
*       vm=sqrt(R3*vm)
*       hsv(3)=vm
*
* Triaxiality
*       if(vm.eq.R0) then
*           hsv(5)=R0
*           hsv(6)=R0
*           goto 10
*       else
*           hsv(5)=-hsv(2)/vm
*       end if
*
* Calculation of principal stresses by diagonalization of stress tensor.
* Finding the principal stresses for three-dimensional case means finding
* the roots for the equation:  s3 - AA*s^2 + BB*s - CC = 0
*
*       AA=sig(1)+sig(2)+sig(3)
*       BB=sig(1)*sig(2)+sig(2)*sig(3)+sig(1)*sig(3)-
+       +sig(4)**2-sig(5)**2-sig(6)**2
*       CC=sig(1)*sig(2)*sig(3)+R2*sig(4)*sig(5)*sig(6)-
+       +sig(1)*sig(5)**2-sig(2)*sig(6)**2-sig(3)*sig(4)**2
*       aterms(1)=R1
*       aterms(2)=-AA
*       aterms(3)=BB
*       aterms(4)=-CC
*       call cubroot(aterms,rtr)
*       if(rtr(3).gt.rtr(2)) then
*           if(rtr(1).lt.rtr(2)) then
*               sig1=rtr(3)

```

```

        sig2=rtr(2)
        sig3=rtr(1)
    elseif(rtr(1).lt.rtr(3)) then
        sig1=rtr(3)
        sig2=rtr(1)
        sig3=rtr(2)
    else
        sig1=rtr(1)
        sig2=rtr(3)
        sig3=rtr(2)
    end if
else
    if(rtr(1).lt.rtr(3)) then
        sig1=rtr(2)
        sig2=rtr(3)
        sig3=rtr(1)
    elseif(rtr(1).lt.rtr(2)) then
        sig1=rtr(2)
        sig2=rtr(1)
        sig3=rtr(3)
    else
        sig1=rtr(1)
        sig2=rtr(2)
        sig3=rtr(3)
    end if
end if
*
* Ordering of principal deviatoric stresses
*
        rtr(1)=sig1+hsv(2)
        rtr(2)=sig2+hsv(2)
        rtr(3)=sig3+hsv(2)
*
    if(rtr(3).gt.rtr(2)) then
        if(rtr(1).lt.rtr(2)) then
            s1=rtr(3)
            s2=rtr(2)
            s3=rtr(1)
        elseif(rtr(1).lt.rtr(3)) then
            s1=rtr(3)
            s2=rtr(1)
            s3=rtr(2)
        else
            s1=rtr(1)
            s2=rtr(3)
            s3=rtr(2)
        end if
    else
        if(rtr(1).lt.rtr(3)) then
            s1=rtr(2)
            s2=rtr(3)
            s3=rtr(1)
        elseif(rtr(1).lt.rtr(2)) then
            s1=rtr(2)
            s2=rtr(1)
            s3=rtr(3)
        else
            s1=rtr(1)
            s2=rtr(2)
            s3=rtr(3)
        end if
    end if

```

```

        end if
*
* Max shear stress
    hsv(4)=abs(sig1-sig3)/R2
*
* Lode parameter
    hsv(6)=1.-(6./3.1416)*atan((2.*(s2-s3)/(s1-s3)-1.)/sqrt(3.))
*
* Calculation of integrals for definition of average triaxiality and
* average Lode parameter
*
    hsv(8)=hsv(8)+hsv(5)*depi
    hsv(9)=hsv(9)+hsv(6)*depi
*
* Calculation of principal strain increments by diagonalization of
* tensor made by components of strain increments.
* Finding the principal stresses for three-dimensional case means finding
* the roots for the equation:  $s^3 - AA*s^2 + BB*s - CC = 0$ 
*
    AA=eps(1)+eps(2)+eps(3)
    BB=eps(1)*eps(2)+eps(2)*eps(3)+eps(1)*eps(3)-
+     eps(4)**2-eps(5)**2-eps(6)**2
    CC=eps(1)*eps(2)*eps(3)+R2*eps(4)*eps(5)*eps(6)-
+     eps(1)*eps(5)**2-eps(2)*eps(6)**2-eps(3)*eps(4)**2
    aterms(1)=R1
    aterms(2)=-AA
    aterms(3)=BB
    aterms(4)=-CC
    call cubroot(aterms,rtr)
    if(rtr(3).gt.rtr(2)) then
        if(rtr(1).lt.rtr(2)) then
            eps1=rtr(3)
            eps2=rtr(2)
            eps3=rtr(1)
        elseif(rtr(1).lt.rtr(3)) then
            eps1=rtr(3)
            eps2=rtr(1)
            eps3=rtr(2)
        else
            eps1=rtr(1)
            eps2=rtr(3)
            eps3=rtr(2)
        end if
    else
        if(rtr(1).lt.rtr(3)) then
            eps1=rtr(2)
            eps2=rtr(3)
            eps3=rtr(1)
        elseif(rtr(1).lt.rtr(2)) then
            eps1=rtr(2)
            eps2=rtr(1)
            eps3=rtr(3)
        else
            eps1=rtr(1)
            eps2=rtr(2)
            eps3=rtr(3)
        end if
    end if
end if
*****
***

```

```

*****EROSION*****
***
*                               for different failure criteria
*
*****
***      if(ifflag.eq.0) return
***Maximum equivalent plastic strain
      if(ifflag.eq.1) then
        hsv(7)=hsv(1)
***Maximum shear stress
      elseif(ifflag.eq.2) then
        hsv(7)=abs(sig1-sig3)/R2
***Johnson & Cook
      elseif(ifflag.eq.3) then
        eta=hsv(5)
        hsv(7)=hsv(7)+depi/(cf1+cf2*exp(cf3*eta))
***Wilkins
      elseif(ifflag.eq.4) then
        if((s1.ne.R0).and.(s3.ne.R0)) then
          A1=s2/s1
          A2=s2/s3
          if(A1.gt.A2) then
            A=A1
          else
            A=A2
          end if
          hsv(7)=hsv(7)+depi*((R2-A)**cf1)/((R1+cf2*hsv(2))**cf3)
          if((hsv(2).lt.(-R1/cf2)).and.(hsv(1).gt.R0)) then
            hsv(7)=crit+R1
          end if
        end if
***Cockcroft-Latham
      elseif(ifflag.eq.5) then
        if(sig1.gt.R0) then
          hsv(7)=hsv(7)+depi*(sig1/vm)
        end if
***Bao-Wierzbicki (for aluminum 2024-T351)
      elseif(ifflag.eq.6) then
        eta=hsv(5)
        if(eta.le.(-R1D3)) then
          hsv(7)=hsv(7)+depi/1.E10
        elseif((eta.gt.(-R1D3)).and.(eta.lt.R0)) then
          hsv(7)=hsv(7)+depi/(0.1225*(eta+R1D3)**(-0.46))
        elseif((eta.gt.R0).and.(eta.lt.0.4)) then
          hsv(7)=hsv(7)+depi/(1.9*eta**2.0-0.18*eta+0.21)
        else
          hsv(7)=hsv(7)+depi/(exp(-1.944*eta))
        end if
***Xue-Wierzbicki
      elseif(ifflag.eq.7) then
        eta=hsv(5)
        lode=(27./2.)*(s1*s2*s3)/(vm**3.)
        hsv(7)=hsv(7)+depi/(cf1*exp(-cf2*eta)-(cf1*exp(-cf2*eta)
+      -cf3*exp(-cf4*eta))*(1.-lode**(1./cf5))**cf5))
        end if
*****
      if (hsv(7).ge.crit) then
        sig(1)=0.0
        sig(2)=0.0
        sig(3)=0.0

```



```
        sig(4)=0.0
        sig(5)=0.0
        sig(6)=0.0
        failel=.true.
    end if
10    return
    end
*****
```