Universidade de São Paulo - Escola Politécnica

ANTÔNIO CARLOS BOTOSSO

AVALIAÇÃO DO EFEITO DA RIGIDEZ ESTRUTURAL SOBRE A DINÂMICA VEICULAR

São Paulo

2015

ANTÔNIO CARLOS BOTOSSO

AVALIAÇÃO DO EFEITO DA RIGIDEZ ESTRUTURAL SOBRE A DINÂMICA VEICULAR

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo

2015

ANTÔNIO CARLOS BOTOSSO

AVALIAÇÃO DO EFEITO DA RIGIDEZ ESTRUTURAL SOBRE A DINÂMICA VEICULAR

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho

São Paulo
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Botosso, Antônio Carlos
Avaliação do efeito da rigidez estrutural sobre a dinâmica veicular / A.C. Botosso. -- São Paulo, 2015.
141 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Dinâmica 2.Dinâmica veicular 3.Rigidez estrutural 4.Engenharia robusta 5.Multicorpos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Agradecimentos

À minha esposa, e eterna namorada, Camila pelo apoio, companheirismo e por me ajudar a crescer e progredir nos estudos, trabalho e principalmente como pessoa.

Aos meus pais e irmãos por proporcionarem ótimos momentos em família e sempre estarem ao meu lado dando suporte para alcançar meus objetivos.

Ao Prof. Dr. Tarcísio A. Hess Coelho pela orientação, dedicação e paciência na execução desta dissertação.

A todos os amigos, em especial ao Daniel Vilela que, com todo o conhecimento e disponibilidade, foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

À General Motors do Brasil e a todos os colegas e gerentes que sempre permitiram que eu dividisse meu tempo entre o trabalho, a família e os estudos.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS ..... **v**
LISTA DE TABELAS ..... **vii**
Resumo ..... **viii**
Abstract ..... **ix**
1. Introdução **10**
1.1. Abordagem geral 10
1.2. Dinâmica veicular e multicorpos 11
2. Revisão da Literatura **15**
2.1. Abordagem geral 15
2.2. Abordagem específica 16
3. Motivação **20**
4. Objetivo **21**
5. Metodologia **22**
6. Dinâmica Veicular **24**
6.1. Suspensões veiculares 26
6.2. Dinâmica Lateral 30
7. Corpos Flexíveis em Sistemas Multicorpos **34**
7.1. Método de Craig Bampton 34
8. Modelo Completo de Veículo **38**
8.1. Especificações do veículo 39
8.2. Corpos flexíveis 42
8.3. Modelos multicorpos 43
8.4. Características do veículo 44
8.4.1. Rigidez torcional da estrutura 44
8.4.2. Rigidez de rolagem da suspensão 46
8.4.3. Centro de rolagem 47
9. Modelagem Analítica **50**
9.1. Modelo e hipóteses 51
9.2. Equacionamento 53
10. Estudo da sensibilidade das características do veículo à rigidez estrutural **61**

10.1. Engenharia robusta 61
10.2. Definição dos parâmetros 62
10.3. Matriz de experimentos 64
10.1. Sinal e Resposta 66
10.2. Consideração dos parâmetros de ruído 67
11. Simulação Resultados e Análise 70
11.1. Modelo de veículo completo 70
11.1.1. Corpos flexíveis 70
11.1.2. Rigidez torcional 71
11.1.3. Rigidez de rolagem 71
11.1.4. Centro de rolagem 72
11.2. Avaliação da dinâmica lateral 73
11.2.1. Transferência de carga lateral 76
11.3. Modelo Analítico 79
11.3.1. Correlação 81
11.3.2. Avaliação dos parâmetros de transferência de carga lateral 82
11.4. Análise de sensibilidade 88
11.4.1. Respostas 88
12. Conclusões 96
REFERÊNCIAS 98
APENDICE 1 102
APENDICE 2 107
ANEXO 1 135

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Definição e nomenclatura das rotações do veículo 24
Figura 2. Ângulo de convergência 25
Figura 3. Ângulo de cambagem 25
Figura 4. Suspensão com eixo rígido montado com molas helicoidais 27
Figura 5. Suspensão com eixo de torção semi-independente 28
Figura 6. Suspensão MacPherson 29
Figura 7. Suspensão duplo A 29
Figura 8. Suspensão Multi-Link 30
Figura 9. Exemplo de rolagem de um veículo 32
Figura 10. Ilustração do sobre e contra esterçamento 32
Figura 11. Modelo de elementos finitos referência 38
Figura 12. Detalhe do modelo de elementos finitos eliminando-se alguns painéis externos 39
Figura 13. Gráfico da força lateral do pneu considerado 42
Figura 14. Gráfico do torque autoalinhante do pneu considerado 42
Figura 15. Modelo de elementos finitos sub-chassi e pontos de interface corpo/sistema 43
Figura 16. Modelo de elementos finitos da carroceria e pontos de interface corpo/sistema 43
Figura 17. Modelos elaborados para análise 44
Figura 18. Modelo de elementos finitos utilizado para determinação da rigidez torcional 45
Figura 19. Modelo para obtenção da rigidez de rolagem 46
Figura 20. Altura do centro de rolagem suspensão tipo MacPherson 48
Figura 21. Posição da linha auxiliar que passa pelo braço de controle 49
Figura 22. Altura do centro de rolagem suspensão traseira Dodge Neon 49
Figura 23. Modelo analítico da dinâmica lateral - dimensões 52
Figura 24. Modelo analítico da dinâmica lateral - rigidez 52
Figura 25. Diagrama de corpo livre da massa suspensa dianteira 54
Figura 26. Diagrama de corpo livre da massa não suspensa dianteira 55
Figura 27. Diagrama de corpo livre da massa suspensa traseira 56

Figura 28. Diagrama de corpo livre da massa não suspensa traseira.....57
Figura 29. Modelo de veículo flexível para análise robusta.....64
Figura 30. Diagrama da análise proposta de engenharia robusta.....66
Figura 31. Ponderação das variâncias 69
Figura 32. Gráfico do binário aplicado à suspensão em função do ângulo de rolagem 72
Figura 33. Perfis de velocidade e aceleração.....73
Figura 34. Transferência lateral modelo com todos os modos 74
Figura 35. Participação modal da estrutura na manobra.....74
Figura 36. Modo de deformação torcional 75
Figura 37. Comparativo das respostas com todos os modos e modelo reduzido 75
Figura 38. Transferência de carga lateral em função da aceleração.....76
Figura 39. Curvas lineares interpoladas da Figura 37 77
Figura 40. Comparativo da transferência de carga lateral em função da aceleração para a carroceria de menor rigidez 78
Figura 41. Detalhe da variação na transferência de carga lateral para modelo rígido e flexível com rigidez torcional de 8792 $Nm°$ 79
Figura 42. Correlação modelo analítico vs modelo completo 81
Figura 43. Variação na transferência de carga dianteira em função da variação da rigidez torcional.....82
Figura 44. Variação na transferência de carga traseira em função da variação da rigidez torcional.....83
Figura 45. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 70:30.....85
Figura 46. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 50:50.....85
Figura 47. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 30:70.....86
Figura 48.Variação na transferência de carga para uma razão de rigidez de 0.7 87
Figura 49. Impulso calculado para a estrutura superior traseira direita da rodagem 6 do modelo rígido 89
Figura 50. Efeito dos parâmetros no SNR de deslocamentos.....93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Valores típicos de rigidez torcional total de alguns veículos.....13
Tabela 2. Especificações básicas Dodge Neon 40
Tabela 3. Dimensões básicas 40
Tabela 4. Parâmetros de controle 63
Tabela 5. Matriz de experimentos 65
Tabela 6. Rigidez torcional calculada para as três carrocerias 71
Tabela 7. Parâmetros do veículo.....80
Tabela 8. Valores típicos de rigidez de veículos 87
Tabela 9. Respostas obtidas para as 18 simulações do modelo rígido.....88
Tabela 10. Respostas obtidas para as 18 simulações do modelo flexível 89
Tabela 11. Respostas normalizadas das simulações do modelo rígido 90
Tabela 12. Respostas normalizadas das simulações do modelo flexível.....91
Tabela 13. SNR das respostas de deslocamento 92
Tabela 14. Efeito do nível de cada parâmetro no SNR total dos deslocamentos.....92
Tabela 15. SNR das respostas de impulso 94
Tabela 16. Efeito do nível de cada parâmetro no SNR total dos impulsos.....94

Resumo

O trabalho desenvolvido tem como objetivo avaliar a influência da rigidez estrutural no comportamento dinâmico do veículo baseando-se em manobra de raio constante em condição quase estática e análise de sensibilidade através de simulação numérica computacional.

São apresentados dois modelos para avaliar a transferência de carga lateral do veículo quando sujeito à aceleração lateral (manobra de raio constante), um modelo completo de veículo elaborado em ambiente multicorpos tendo a carroceria e o sub-chassi modelados como corpos flexíveis, e outro modelo analítico com a consideração da rigidez torcional (obtida de modelo de elementos finitos) da estrutura. Com o modelo analítico atendendo o nível de correlação necessário para o propósito deste trabalho, discute-se neste ponto as variações na transferência de carga devido à rigidez torcional da estrutura.

Em seguida, com o intuito de abranger, além do parâmetro de transferência de carga lateral, quais comportamentos do veículo são afetados pela sua rigidez estrutural, é proposta a utilização do método de engenharia robusta para a identificação das condições externas que geram diferentes resultados de comportamento dinâmico do veículo com a variação da rigidez estrutural.

Este estudo permite identificar manobras ou situações nas quais as considerações de flexibilidade estrutural num modelo multicorpos, ou mesmo numa condição física real, são relevantes e podem afetar a segurança, dirigibilidade e o conforto do veículo

Abstract

The work aims to evaluate the influence of structural stiffness on the dynamic behavior of the vehicle based on a constant radius maneuver in a quasi-static condition and a sensitivity analysis through computer numerical simulation.

Two models were developed to evaluate the lateral load transfer of the vehicle when subjected to lateral acceleration (constant radius maneuver), a complete vehicle built in multibody environment with the body and the sub-chassis modeled as flexible bodies, and an analytical model with consideration of structure torsional stiffness (obtained from finite element model). With the analytical model presenting the required correlation for the purpose of this paper, we discuss, at this point, the lateral load transfer variations due to torcional structural stiffness.

Then, in order to cover, in addition to lateral load transfer, how the vehicle behavior is affected by its structural stiffness, the robust engineering method is considered for identifying the external conditions that generate different dynamic behavior results for the variation of structural stiffness.

This study allows us to identify maneuvers or situations in which considerations of structural flexibility in multibody model, or even in a real physical condition, are relevant and can affect the safety, ride and handling of the vehicle.

1. Introdução

1.1. Abordagem geral

Os séculos 18 e 19 presenciaram o surgimento de uma das grandes invenções dos últimos tempos que foi o automóvel. Longe de ser uma invenção inusitada, o automóvel surgiu do antigo desejo do homem de se auto locomover por via terrestre, deixando de lado a necessidade da força animal. Tendo como primeiros representantes os veículos a vapor, praticamente como charretes motorizadas, o grande salto foi dado quando Karl Benz introduziu o motor de combustão interna de quatro tempos, mais eficiente e compacto, que permitiria assim o grandioso desenvolvimento até os dias de hoje.

O Brasil hoje é um dos maiores mercados de automóveis do mundo, ficando apenas atrás de China e Estados Unidos em número de veículos vendidos. Com uma frota de aproximadamente 35 milhões de carros (SINDIPEÇAS, 2011) e uma população de 190 milhões de habitantes (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, 2010). O Brasil tem praticamente um veículo para cada cinco habitantes e este número é ainda menor quando olhamos para grandes centros, como São Paulo, no qual há praticamente um veículo para cada dois habitantes. Além do crescente mercado, hoje o Brasil está passando de um simples importador de veículos e projetos, para um centro de pesquisa e desenvolvimento com capacidade de desenvolver carros para este e outros mercados, desde a concepção até a fabricação.

Tomando como exemplo a General Motors do Brasil®, que, assim como as outras montadoras locais, desde a sua entrada no país até um passado não muito distante, apenas adequava veículos às necessidades do mercado local, como foi feito para todas as gerações do Astra e Vectra, por exemplo. Agora, impulsionada pela forte demanda e sustentado pelo novo modelo de produção das multinacionais, desenvolve localmente veículos em toda sua cadeia, desde os esboços iniciais até a produção final. Esse desenvolvimento local atinge não só a demanda interna, mas também a externa, como foi no caso da Meriva, que foi desenvolvida no Brasil para o exigente mercado Alemão. Outros exemplos são os últimos lançamentos: Onix, Prisma, Spin e Cobalt que, além de concebidos e projetados no Brasil, são exportados e produzidos em outros países como Argentina, Índia, Indonésia etc.

Isso mostra claramente a importância que o Brasil tem ganhado nos últimos anos, não só como mercado consumidor, mas também como centro de desenvolvimento. E é dentro deste contexto que se insere o presente trabalho, com o intuito de aprofundar um tema de grande relevância no que diz respeito ao projeto de veículos e mais especificamente à dinâmica veicular.

1.2. Dinâmica veicular e multicorpos

O surgimento das corridas automotivas confunde-se com o surgimento dos primeiros automóveis. Essas corridas, que deram continuidade a eventos que anteriormente utilizavam carroças e tração animal, ainda hoje são bastante populares, dividindo-se numa infinidade de categorias e mobilizando enormes quantias de dinheiro e de pessoas. Um ponto interessante é que, apesar de o automobilismo utilizar como equipamento fundamental um produto que originalmente não foi desenvolvido para correr e sim para o transporte, ele retribui à indústria automotiva com o desenvolvimento de conceitos que acabam sendo aproveitados e aplicados nos veículos de rua.

Um exemplo bastante claro é o estudo da dinâmica veicular. Os primeiros automóveis surgiram pura e simplesmente para transportar pessoas e cargas de um lugar ao outro. O automobilismo, no entanto, necessita que além de boa velocidade o veículo tenha bom desempenho em curvas, frenagens e acelerações, o que exige um conhecimento adequado e previsível da suspensão e do sistema de direção, por exemplo. O que já foi uma preocupação exclusiva das corridas para melhorar desempenho, hoje é inerente a qualquer novo projeto uma vez que as normas legais de segurança, bem como os critérios de conforto e desempenho, só são atingidos a partir destes estudos.

O tratamento analítico dado aos problemas de engenharia é fundamental no desenvolvimento de produtos, e, além disso, o relativo baixo custo atual de computadores de alta capacidade em relação à construção de protótipos físicos ou ensaios em laboratório, e a possibilidade de criação e desenvolvimento de produtos altamente aperfeiçoados utilizando-se desses equipamentos, têm levado cada vez mais as empresas a investir dinheiro e esforços no desenvolvimento da área de CAE

(*Computer Aided Engineering* ou Engenharia Assistida por Computador) de maneira que consigam desenvolver produtos eficientes a um baixo custo.

Entre os mais diferentes métodos para se estudar os diversos aspectos de um automóvel, é de interesse deste trabalho a análise multicorpos. Esse conceito utilizado em praticamente todas as áreas da engenharia, desde a aeroespacial até a bioengenharia, é também de grande importância ao se estudar a dinâmica veicular. Com base em modelos analíticos representativos de um veículo, é possível predizer e conhecer o seu comportamento em determinadas situações. Essa previsão permite anteceder problemas e refinar um projeto de maneira a obter um produto final adequado antes mesmo que haja um protótipo físico elaborado.

A abordagem que se faz em geral para modelos multicorpos considera uma sequência de corpos rígidos vinculados entre si por juntas, além dos elementos de mola e amortecedor que conferem ao sistema analítico uma representação tão fidedigna do modelo físico quanto seja possível e desejável. Tais sistemas, ainda que apresentem alto grau de complexidade, não tem mais sido uma barreira para a capacidade de processamento de computadores. Essa disponibilidade computacional e o nível de detalhamento crescente como exigência de se observar a fundo determinados comportamentos, fez com que nos últimos anos surgisse um interesse grande por melhorar a representatividade dos modelos principalmente com a adição de corpos flexíveis em substituição aos elementos rígidos.

Um corpo rígido que se queira representar como flexível deve ter os seus modos de deformação, ou graus de liberdade, levados em consideração no modelo. O fato de que um corpo contínuo apresenta infinitos modos de deformação tornaria inviável uma análise desse tipo, por isso, na adição de um corpo flexível a um modelo multicorpos, alguns métodos são utilizados de modo a discretizar o corpo e seus modos de maneira que se obtenha a representatividade desejada. Na falta de um conhecimento prévio em relação aos modos naturais com maior contribuição em determinada situação, um estudo prévio seria necessário, evitando assim um custo computacional desnecessário.

As técnicas de redução de graus de liberdade de um corpo datam do meio do século 20, destacando-se o método de Craig-Bampton em sua publicação no AIAA Journal em Julho de 1968 “Coupling of Substructures for Dynamic Analysis”. Somente agora, no entanto, os computadores têm permitido aplicar essas técnicas adequadamente, adicionando aos modelos multicorpos novos graus de liberdade,

tipicamente dez a cinquenta graus por corpo flexível, elevando assim a representatividade do modelo, bem como a sua complexidade.

Porém, esse aumento no refino do modelo pode ter algumas consequências. A complexidade exagerada de modelos analíticos dificulta a análise crítica do sistema como um todo na medida em que, quanto maior o número de variáveis, mais difícil se torna observar claramente qual delas que realmente influencia e pode alterar um resultado. Além disso, a relativa simplicidade com boa representatividade que seria uma vantagem dos modelos multicorpos, acaba se perdendo com o aumento do número de graus de liberdade.

Pode-se diferenciar a influência dos valores de rigidez de um veículo a partir do comportamento que se observa. Valores de rigidez globais da estrutura como a torcional e de flexão, influenciam num comportamento macro do veículo, como em uma curva, desvio de obstáculo ou frenagem. Os valores de rigidez locais, como a do suporte de buchas e braços de suspensão, são importantes quando se observa, por exemplo, o modo como o acento do motorista responde às excitações do solo. É escopo deste trabalho o estudo da influência da rigidez estrutural do veículo com vistas às características de dirigibilidade.

A rigidez estrutural tem influência direta no comportamento dinâmico já que os efeitos de flexibilidade e amortecimento que a estrutura pode apresentar tem uma atuação conjunta com a suspensão. Porém, essa influência irá variar entre tipos diferentes de veículos e dependerá basicamente da relação entre a rigidez estrutural do chassi ou monobloco e a rigidez da suspensão. Como referência, a

Tabela 1 apresenta a rigidez torcional da estrutura e a rigidez de rolagem típicas para diferentes tipos de veículos.

Tabela 1. Valores típicos de rigidez torcional total de alguns veículos (DEAKIN, RAMIREZ e HANLEY, 2000)

Tipo de Veículo	Rigidez de Rolagem da suspensão (Nm/°)	Rigidez torcional da estrutura (Nm/°)
Fórmula SAE	500 – 1500	1000 – 5000
Veículo de passageiros	500 – 2500	5000 – 20000
Carro esportivo	1500 – 2500	15000 – 40000
Fórmula 1	1500 – 7500	10000 – 100000

Não há uma maneira trivial de se determinar a rigidez estrutural de um veículo. Em geral ela é obtida de maneira experimental, caso exista um protótipo, ou por cálculo analítico utilizando-se o MEF (Método dos Elementos Finitos). Analisando-se pela óptica da dinâmica, espera-se que a rigidez estrutural seja grande o suficiente para que as características de rolagem do veículo possam ser atribuídas exclusivamente à suspensão.

Há, porém, uma relação de compromisso entre a rigidez estrutural ideal para a dinâmica do carro e itens como segurança, conforto, massa, espaço e custo, por exemplo. Espera-se que um carro padrão de rua seja rígido o bastante para atender as normas legais de segurança, leve para aumentar o rendimento e diminuir o consumo de combustível, com a menor quantidade de componentes possível para diminuir custos e aumentar o espaço disponível etc. Na prática, esse conjunto de fatores determinarão a rigidez final da estrutura.

2. Revisão da Literatura

2.1. Abordagem geral

As equações básicas da dinâmica clássica, datadas de 1666 nas suas primeiras versões formuladas por Newton, são capazes de descrever o movimento de qualquer corpo sob ação de forças externas através do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e do Teorema do Momento Angular (TMA). Vilela (2010) descreve detalhadamente em seu trabalho a dedução das equações governantes da dinâmica lateral do veículo através da aplicação dos dois teoremas.

O formalismo conhecido como análise Newtoniana, deveu-se a Euler que, a partir do trabalho de Newton, descreveu em 1740 as equações para um sistema de partículas baseadas no equilíbrio de forças e momentos. Mais adiante, em 1750, Euler propôs as equações do movimento para um corpo rígido em rotação. Devido à boa percepção física dessas equações, essa abordagem ainda é largamente utilizada para descrever sistemas dinâmicos como fez Darus (2008) em seu trabalho com a modelagem de um veículo completo com 7 graus de liberdade.

Outro salto importante no desenvolvimento da mecânica analítica foi dado por Johann Bernoulli que, em 1717, formalizou o Princípio do Trabalho Virtual com o qual qualquer problema de estática poderia ser resolvido, e D'Alembert acrescentou a este a consideração da aceleração dos corpos e da inércia, mostrando assim que o Princípio do Trabalho Virtual poderia ser estendido para o estudo da dinâmica dos corpos. Popp et al. (1993) e Baruh (2000) descrevem em suas obras o Princípio de D'Alembert como uma generalização do Princípio do Trabalho Virtual (PTV). O PTV como conhecemos estaticamente é o caso particular no qual as acelerações e velocidades são desprezíveis ou nulas. Tsai (1999) elabora uma abordagem Jacobiana para manipuladores (mecanismos paralelos) que torna sistemática a análise de sistemas com grande número de corpos e graus de liberdade. Para estender o modelo e avaliá-lo dinamicamente, descreve o Princípio de D'Alembert para apenas um corpo e estende para outros corpos rígidos a partir de um somatório.

A contribuição seguinte de maior relevância foi dada por Lagrange que, em 1788, mostrou que bastando conhecer a energia potencial e cinética além das coordenadas generalizadas de determinado sistema, seria possível descrever as suas

equações do movimento. As equações Lagrangeanas foram fundamentais para o que viria em seguida na mecânica analítica.

A corrida espacial na década de 60 impulsionou o desenvolvimento da dinâmica de sistemas multicorpos. Adiante, na década de 70, surgiram as primeiras simulações numéricas para esses sistemas, sendo talvez o exemplo mais conhecido o ADAMS® (do inglês “Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems”, ou Análise Dinâmica para Sistemas Mecânicos). O ADAMS® é um programa comercial de engenharia que descreve as equações do sistema como equações de Lagrange e para a resolução das equações algébricas lineares é utilizada a técnica de Matrizes Esparsas. Essas matrizes têm maior eficiência computacional como demonstrado por Brameller et al. (1976) apud Song et al. (1979). O método de Gear é utilizado para a integração das equações diferenciais. Esses sistemas caracterizam-se por um grande número de corpos rígidos conectados entre si por juntas e conjuntos elásticos sujeitos à grandes deslocamentos e deformações.

2.2. Abordagem específica

Blundell e Harty (2004) resumem em seu livro a dinâmica veicular como sendo a ciência que estuda dois aspectos comportamentais da máquina. O primeiro seria o isolamento, que separa os ocupantes das perturbações externas e o segundo o controle, que é a resposta do veículo às ações de quem o dirige ou pilota.

Diversos livros, artigos e teses tratam deste tema devido ao grande número de aspectos comportamentais inseridos num veículo. Merece destaque a obra de Gillespie (1992) que, apesar das grandes simplificações adotadas nos modelos, aborda em seu livro desde os conceitos mais simples como os tipos de suspensão de um veículo até temas específicos como os pneus. A obra de Gillespie é de extrema relevância no que diz respeito aos conceitos fundamentais, apresentando de forma simples e objetiva os aspectos mais importantes dos veículos e suas características. A obra de Pacejka (2006) foge da generalidade e busca um aprofundamento com respeito aos pneus. Este componente tem papel fundamental na dinâmica veicular, pois é ele quem faz a interface do solo com o carro. Em sua obra, Pacejka constrói um modelo de pneu no qual a rigidez radial é substituída por uma mola equivalente e as características de momento auto-alinhante e força lateral são obtidas

empiricamente. Essa caracterização permite que modelos numéricos (ADAMS) e analíticos, possam considerar adequadamente a influência e o comportamento do pneu.

Os modelos dinâmicos, de maneira geral, são elaborados para que se tenha uma reposta adequada unicamente do comportamento que se está examinando. Diversas simplificações são conhecidas quando se estuda a dinâmica de um veículo. Andersen, Sandu e Southward (2007) apresentam um modelo de um quarto de veículo na tentativa de correlacioná-lo a testes físicos. Utilizam para tanto considerações geométricas de uma suspensão do tipo MacPherson suficientes para avaliar inclusive a sua cinemática. Modelos de um quarto de veículo são em geral utilizados para se fazer uma determinação preliminar do coeficiente de rigidez das molas e fator de amortecimento através do cálculo das frequências naturais do conjunto e do tempo de acomodação desejado.

Mais refinados que estes, os modelos de bicicleta como são conhecidos, ou modelos de meio veículo, aumentam a possibilidade de estudos que podem ser feitos em relação ao modelo de um quarto. Limitados por não ser possível observar influências de assimetria entre os lados, estes modelos, além dos resultados estáticos que fornecem, como a distribuição de massa longitudinal, raio de giro do carro e altura do solo, permitem satisfatórias análises dinâmicas como Vilela (2010) demonstra em sua tese, utilizando para os estudos um modelo de bicicleta suficiente para avaliar as características de dirigibilidade de um veículo. Com a mesma abordagem, Sampo, Sorniotti e Crocombe (2010), estudam a transferência de carga lateral do veículo inicialmente com um modelo de bicicleta tendo a massa suspensa representada como um único corpo concentrado no CG, em seguida, refinam-o dividindo essa massa suspensa em duas massas distintas posicionadas acima dos eixos do veículo (de maneira a representar a massa por eixo) e conectandas por um elemento não rígido.

Os modelos de carro completo, além de permitirem a obtenção dos mesmos resultados que são possíveis com a consideração mais simples, são capazes de capturar o efeito da assimetria lateral dos eventos a que estiver sujeito. Lee et al. (2008) utiliza um modelo de carro completo com 14 graus de liberdade mesmo avaliando métricas que seriam adequadamente obtidas a partir de modelos mais simples. No entanto, na tese de Darus (2008), a utilização de um modelo de carro completo justifica-se pelo desenvolvimento de uma suspensão ativa que depende do

comportamento e influência de todo o conjunto para uma adequada calibração. Da mesma maneira, Greco et al. (2001) utiliza um modelo numérico com dez graus de liberdade, para avaliações de conforto do veículo.

Posto isso, pode-se dizer, de maneira simplista, que, o aumento da complexidade de um modelo permite, além do estudo de fenômenos obtidos com modelos mais simples, a análise de características do veículo que dependam de um maior número de variáveis. Neste caminho, a consideração da flexibilidade em modelos dinâmicos de veículo, permite capturar efeitos anteriormente suprimidos. A preocupação com esta variável não é recente e tampouco exclusiva à dinâmica veicular.

Song e Haug (1979) tratam do tema elaborando alguns mecanismos planos e mostrando a variação do comportamento para diferentes valores de rigidez dos elementos. Há um ponto interessante que merece destaque neste trabalho que é o fato de mostrarem o tempo de processamento do computador para resolver um mecanismo biela manivela em três casos. No primeiro a biela é tratada como um único elemento e o tempo de processamento para a solução é de 1min e 29,49seg, no segundo a biela divide-se em duas para representar o primeiro modo de deformação e o tempo de processamento é de 1min e 37,99seg e finalmente no terceiro são três partes para um tempo de 2min e 16,32seg. Na mesma linha de Song e Haug, Huston (1980) e Amirouche e Jia (1987) desenvolvem métodos para considerar os efeitos da flexibilidade em modelos multicorpos. O primeiro vale-se do formalismo de Lagrange para equacionar a rigidez dos componentes, enquanto Amirouche e Jia avaliam os valores de rigidez das juntas a partir das equações de Kane. Mais específico que os trabalhos citados anteriormente, H. Du e Davies (1992) trabalham no desenvolvimento de um modelo adequado para representar o problema da estabilidade das pás de um helicóptero. É importante notar que o modelo por eles tratado é linearizado e, portanto, aceitável somente para pequenas deformações.

Atualmente, a grande capacidade de processamento dos computadores faz tornar impensável que uma análise de um sistema biela manivela com 4 graus de liberdade custe mais do que alguns décimos, ou até mesmo centésimos de segundos para ser resolvido. Isso torna possível estudos como o de Deakin et al. (2000) que elabora um modelo refinado utilizando o ADAMS® para avaliar a influência da rigidez

estrutural no comportamento em curva devido à transferência de cargas. Os trabalhos de Arant (2010) e Vargas (2011) abordam o comportamento de veículos de carga enquanto Sampo et al. (2010) são mais genéricos e apresentam um método analítico eficiente para o estudo da rigidez torcional. Todos estes coincidem num ponto que é a avaliação da influência da rigidez torcional na transferência de carga lateral. Sampo et al. ainda afirma ser universalmente reconhecido que a rigidez torcional é uma das propriedades mais importantes de um chassi de veículo.

Com respeito às metodologias utilizadas, o que se conclui de forma geral, é que, quando se trata de abordagem analítica, usualmente as equações dinâmicas são obtidas através da mecânica clássica (Newton-Euler), ou Lagrange. Além disso, devido à disponibilidade atual de computadores e programas de CAE, as publicações mais recentes valem-se de modelos altamente refinados em ambiente virtual para capturar os efeitos desejados. Dessa maneira, trabalhos específicos que tratam dos algoritmos utilizados nestes modelos como o de Sellgren (2003), que apresenta dois métodos de redução de graus de liberdade de componentes, e Bonisoll et al. (2006), que compara a técnica de Carig_Bampton com a metodologia de Serep, são relevantes para a adequada construção dos componentes flexíveis inseridos nos modelos multicorpos.

Outro ponto relevante é que, excetuando-se os trabalhos que não abordam a dinâmica veicular, os outros, quase que na totalidade, avaliam a influência da rigidez torcional do chassi na transferência lateral de cargas quando o veículo está sujeito a acelerações laterais. A experiência pode realmente mostrar que esta é a condição na qual a rigidez torcional tem a maior influência, no entanto, em nenhum dos casos aqui referenciados é feito um estudo ou comparativo que mostre se há variação ou qual a magnitude da variação dos outros comportamentos quando se considera a rigidez torcional. Adiante será discutido esse ponto como forma de motivação para este trabalho.

3. Motivação

Empurrados pela demanda crescente, *softwares* comerciais de engenharia têm evoluído em compasso com o desenvolvimento dos computadores. Isso tem facilitado a aplicação de métodos com capacidade suficiente para resolver grande parte dos problemas de engenharia. Atualmente, o MEF ou FEA (da sigla em inglês: *Finite Element Analysis*), por exemplo, permite não só a solução de problemas estruturais, mas também de sistemas que envolvam contato, expansividade térmica, elasticidade de materiais, análise térmica e de fluidos com soluções anteriormente impensáveis. A análise de multicorpos, com destaque para o ADAMS® (da sigla em inglês: *Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*, ou Análise Dinâmica Automática de Sistemas Mecânicos), que é um programa largamente utilizado na indústria automotiva, permite a resolução de modelos completos de veículos, com todos os seus componentes e características geométricas, sujeitos às mais diversas manobras e excitações capazes de predizer o seu comportamento real com fidelidade.

A grande capacidade computacional e consequente possibilidade de se refinar os modelos matemáticos tanto quanto possível pode parecer satisfatória na ânsia de se obter resultados e predições cada vez mais acertadas. No entanto, o que se observa é que o aumento na complexidade dos modelos limita a habilidade de distinguir claramente qual a real influência de cada variável, ou conjunto de variáveis, num determinado comportamento. Por esta razão, este trabalho busca entender comparativamente, a partir de um modelo de carro completo elaborado em ambiente multicorpos e de outro modelo analítico simplificado, qual a melhoria conseguida nos resultados em função do aumento na complexidade dos modelos.

4. Objetivo

O objetivo fundamental deste trabalho é apresentar e discutir modelos multicorpos com consideração de flexibilidade estrutural quanto a sua influência no comportamento dinâmico do veículo bem como a sua relevância dado a maior complexidade.

Para isso, baseado em estudos anteriores referenciados neste trabalho, será proposto um modelo de veículo completo em ambiente multicorpos utilizando o *software* Altair MotionView® para permitir a avaliação e discussão da transferência de carga lateral do veículo sujeito a acelerações laterais para diferentes condições de rigidez estrutural.

Em seguida, com o intuito de avaliar outras configurações, como distribuições de massa distintas e outros valores de rigidez de suspensão, será elaborado um modelo analítico com base no modelo completo de veículo que permita extrair respostas quanto a influência de outros parâmetros do veículo (além da rigidez estrutural) na transferência de carga lateral.

Por fim, para determinar objetivamente os comportamentos dinâmicos sujeitos à influência da rigidez estrutural em modelos multicorpos, será elaborado um estudo utilizando o método de engenharia robusta, de maneira a avaliar comparativamente dois veículos com valores de rigidez dos corpos distintos e extrair as manobras, ou influências externas, para as quais a rigidez estrutural altera a resposta dinâmica do modelo.

5. Metodologia

O desenvolvimento deste trabalho está dividido em cinco partes. Primeiramente é feita uma abordagem geral da dinâmica veicular, apresentando conceitos variados de suspensão, suas aplicações com vantagens e desvantagens e algumas características de dirigibilidade e conforto de um veículo. Além disso, nesta primeira parte são apresentados o sistema de coordenadas e as manobras típicas de avaliação de comportamento consideradas neste trabalho.

A segunda parte trata da consideração da flexibilidade dos corpos em sistemas multicorpos. É apresentado nesta etapa o método de Craig-Bampton que possibilita a determinação da matriz de massa e rigidez de determinado corpo a fim de utilizá-las em sistemas multicorpos.

A fase seguinte descreve o modelo de veículo completo, incluindo os corpos flexíveis, elaborado para analisar a variação da transferência de carga lateral em função da aceleração lateral como consequência dos diferentes valores de rigidez estrutural. Descreve-se o veículo com considerações sobre distribuição de massa, distância entre eixos e bitola, além de apresentar a metodologia utilizada para se determinar a altura do eixo de rolagem do veículo e a rigidez de rolagem da suspensão.

Dando continuidade à análise da transferência de carga lateral, na etapa seguinte é elaborado um modelo analítico simplificado (com representação da rigidez torcional da estrutura), baseado no modelo de veículo completo, que permite estudar outros valores de rigidez estrutural mais baixos (valores que não seriam possíveis de serem feitos em modelos completos elaborados em *software* comercial dado a dificuldade de convergência numérica). A simplicidade da solução numérica para este modelo permite uma análise gráfica abrangente para diferentes condições do veículo, ou seja, é possível avaliar de maneira relativamente simples o comportamento do veículo para diferentes valores de rigidez estrutural, rigidez de rolagem e distribuição de massa.

Na última parte é proposto um estudo, baseado em engenharia robusta, que permita o entendimento de como outros comportamentos do veículo são alterados em função da rigidez estrutural da carroceria, tanto para condições transientes quanto estáticas. Para isso, novamente é utilizado o modelo de veículo completo, uma vez

que não se conhece a priori quais são os modos de deformação que podem afetar o resultado, no qual aplicam-se sete variáveis de controle para duas condições de ruídos distintas, neste caso o ruído será a própria rigidez estrutural. Dessa maneira, a observação da variação na resposta obtida para os dois ruídos permitirá avaliar como outros comportamentos do veículo, que não somente a transferência de carga lateral, variam em função da flexibilidade da carroceria.

6. Dinâmica Veicular

Em seu sentido mais amplo, a dinâmica veicular compreende não somente os carros de passeio, caminhões de carga e carros de competição como conhecemos, mas sim todos os tipos de transporte, incluindo os trens, aviões e navios. Este tópico e este trabalho tratam unicamente da dinâmica dos veículos apoiados sobre quatro rodas montadas em pneumáticos.

O desempenho de um veículo é a reposta que este tem às forças a ele impostas. Essas forças podem ser longitudinais, transversais e verticais, aplicadas de maneiras distintas, contínua, em alta e baixa frequência e em impulsos. O estudo da dinâmica veicular busca entender de qual maneira a força é produzida e como pode ser controlada.

Pode-se dividir o estudo da dinâmica veicular em duas partes: dirigibilidade e conforto. Dirigibilidade é a característica relacionada à capacidade que o motorista tem de manter o controle do veículo. E conforto é a qualidade percebida de isolamento do veículo a fatores de ruído externos.

Para facilitar as descrições dos tipos de suspensão apresentadas nos itens a seguir, as figuras abaixo ilustram a nomenclatura utilizada na definição dos movimentos de rotação do veículo e o os ângulos de alinhamento das rodas.

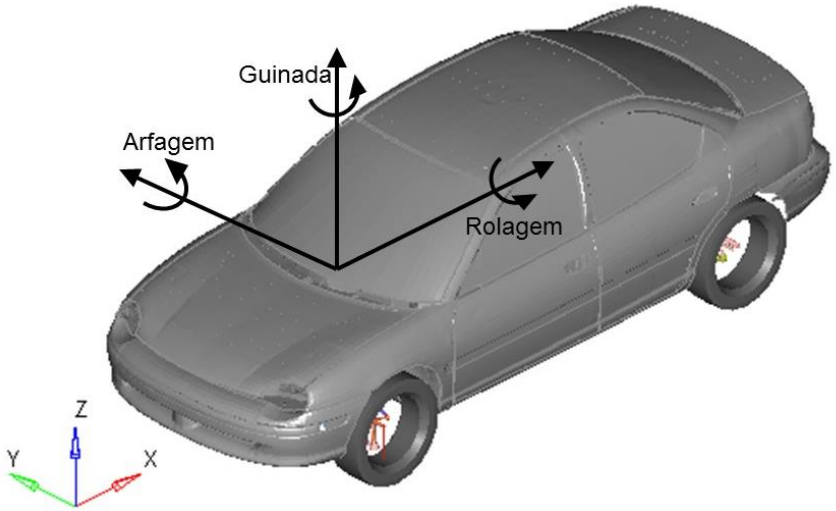


Figura 1. Definição e nomenclatura das rotações do veículo

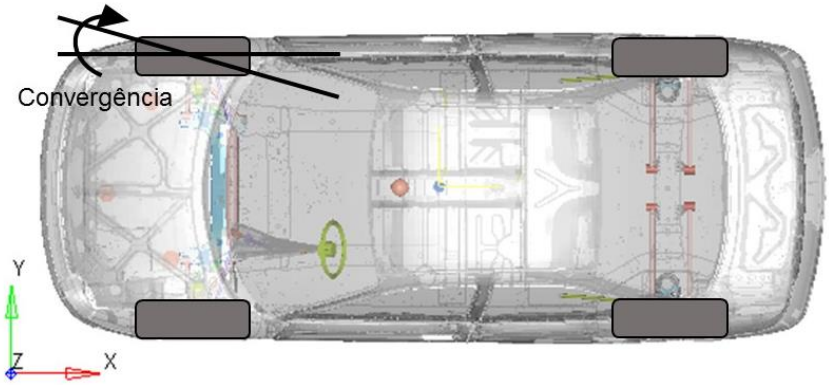


Figura 2. Ângulo de convergência

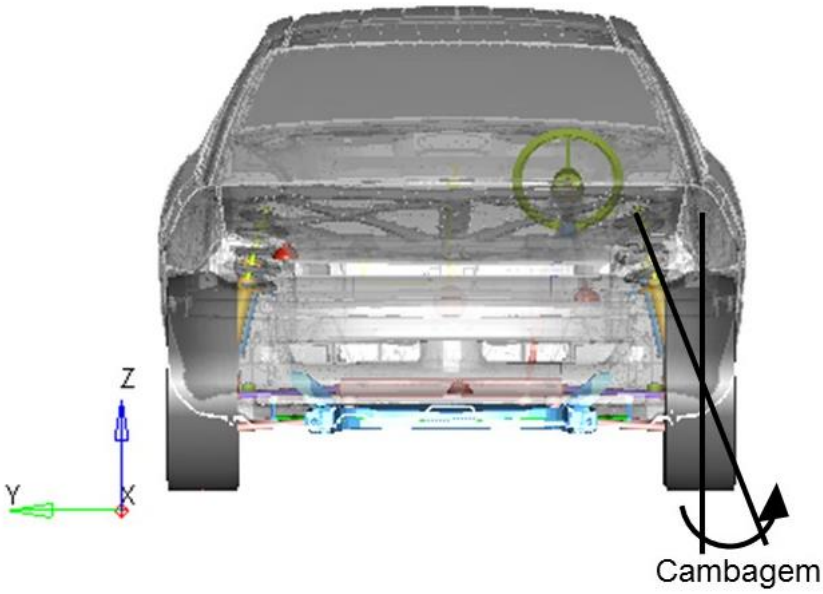


Figura 3. Ângulo de cambagem

As movimentações apresentadas na Figura 1 são usualmente descritas pela nomenclatura em inglês, *Roll* para a rolagem, *Pitch* para a arfagem e *Yaw* para guinada. Será utilizado neste trabalho a denominação em português.

Existem outros ângulos que caracterizam a geometria de determinada suspensão, a Figura 2 e a Figura 3 apresentam apenas os dois de interesse para este trabalho. É evidente que apesar dos ângulos de convergência e de cambagem terem sido representados em apenas em uma das rodas, eles também são característicos das demais, além disso, a convenção de sinal para eles não é irrelevante neste ponto e será comentada e adotada adiante.

6.1. Suspensões veiculares

O comportamento de dirigibilidade e de conforto são determinados por uma série de características individuais de cada veículo. Entre as mais relevantes estão a configuração e o tipo de suspensão. O conjunto de suspensão, dianteira e traseira, isolam as massas não suspensas (rodas, pneus, eixos de transmissão, pontas de eixo, freios etc.) das suspensas (carroceria, bancos, vidros, passageiros etc.). E a maneira como esse mecanismo de isolação é projetado determina o desempenho do veículo com respeito à dirigibilidade e ao conforto.

Existe uma enorme quantidade de tipos e conceitos diferentes de suspensão. Se ainda considerarmos todas as pequenas variações existentes dentro de um mesmo conceito, seria impraticável tratar deste tópico neste trabalho. Portanto, serão descritos a seguir apenas os principais tipos de suspensão encontrados atualmente e que são mais relevantes ao veículo estudado. Detalhamento maior pode ser encontrado em Reimpell et al. (2001) onde são descritos cuidadosamente tipos e características de diversas suspensões.

As suspensões podem ser divididas fundamentalmente em dois tipos, as dependentes e as independentes. Entende-se por dependente, aquelas suspensões em que o movimento de uma das rodas é diretamente transmitido à outra roda oposta no mesmo eixo. As independentes, portanto, são aquelas em que um lado da suspensão trabalha sem ser afetado ou afetar o lado oposto.

1. EIXO RÍGIDO

   O conceito fundamental das suspensões de eixo rígido é que cada roda é montada em uma das extremidades de um eixo rígido. Esse conceito pode variar de diversas formas, tanto na maneira de como esse eixo é fixado à estrutura suspensa, por molas helicoidais, feixes de mola ou barras de torção, quando nas suas características construtivas. Eixos rígidos podem ser independentes ou não do eixo de transmissão, podem ter diferentes perfis, algumas suspensões utilizam braços auxiliares como a barra *Panhard* etc. Independentemente da variação, pelo fato de uma roda estar conectada à outra rigidamente, todas possuem a desvantagem de que o movimento de uma roda é transmitido à outra fazendo com que variem os ângulos de cambagem e

convergência simultaneamente. A Figura 4 ilustra um eixo rígido solidário ao eixo de transmissão e montado com molas helicoidais.

Algumas vantagens das suspensões de eixo rígido são: o fato de a cambagem não ser afetada pela rolagem da carroceria, e a manutenção maior do alinhamento das rodas uma vez que há menos componentes que possam sofrer deformação. Essa característica de menor quantidade de componentes e simplicidade também confere em geral para as suspensões de eixo rígido maior confiabilidade e durabilidade, e esta é uma das razões de ser largamente utilizada em veículos de carga como caminhonetes, caminhões e ônibus.

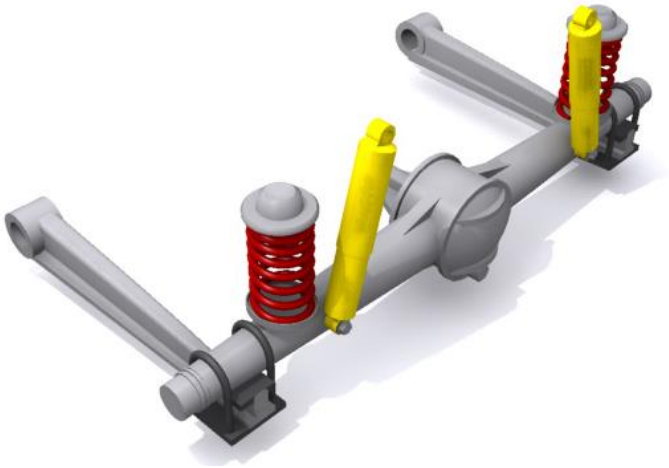


Figura 4. Suspensão com eixo rígido montado com molas helicoidais (The Suspension Bible, 2014)

2. EIXO DE TORÇÃO SEMI-INDEPENDENTE

Este conceito de suspensão é bastante similar ao anterior com a diferença de o eixo, que no caso anterior era rígido, ter determinada rigidez torcional, o que confere à suspensão uma característica de comportamento independente, daí a denominação semi-independente. Esse tipo de suspensão é comumente utilizado em veículos de passeio compactos e médios com tração dianteira devido à simplicidade (relativo baixo número de componentes) e consequente baixo custo, além te ter um desempenho satisfatório dado que, apesar de neste tipo de suspensão não haver controle efetivo das variações de cambagem e convergência em função do curso de suspensão, o movimento de uma roda não é transmitido à outra com a mesma magnitude das suspensões de eixo rígido.

A Figura 5 ilustra uma suspensão deste tipo. O posicionamento do eixo de torção, neste caso alinhado com o centro de roda, pode assumir diversas

posições longitudinalmente no veículo em função da rigidez torcional que se deseja obter conforme especificado em projeto.

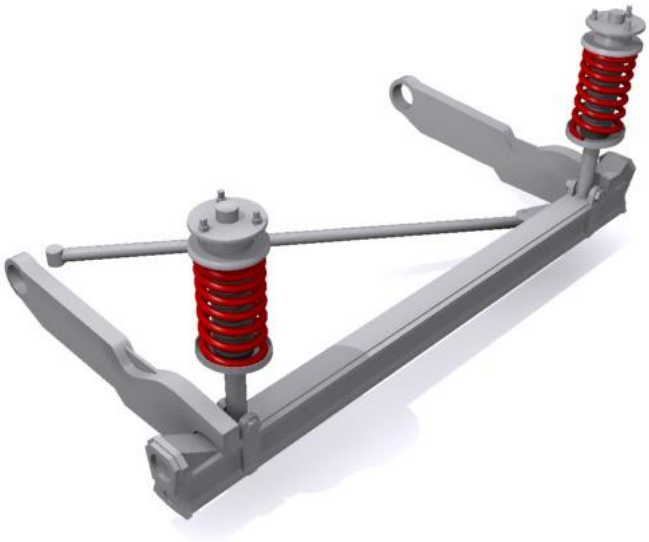


Figura 5. Suspensão com eixo de torção semi-independente (The Suspension Bible, 2014)

3. MacPHERSON

   Essa é a suspensão mais utilizada atualmente, principalmente em veículos pequenos e médios. Além de ser uma suspensão do tipo independente, possui uma característica fundamental que é o fato de agregar três funções num único componente, a estrutura superior da suspensão é uma combinação de mola, amortecedor e braço de controle de maneira que sua compactação permite um melhor aproveitamento dos espaços disponíveis, o que permite, por exemplo, a montagem dos motores na direção transversal do veículo. A relativa menor quantidade de componentes porém, é uma desvantagem no que diz respeito ao problema conjunto de distribuição das cargas na estrutura e ao controle do desempenho de dirigibilidade e conforto, uma vez que apenas os três pontos de fixação da suspensão à estrutura podem não ser suficientes para balancear adequadamente as características desejadas. A Figura 6 apresenta uma suspensão deste tipo.

Figura 6. Suspensão MacPherson (The Suspension Bible, 2014)

4. DUPLO A

   As suspensões do tipo Duplo A diferenciam-se da MacPherson, entre outros, pelo fato de a estrutura superior da suspensão estar desacoplada da mola e do amortecedor. Permitem portanto melhor distribuição de carga na estrutura e melhor controle de dirigibilidade uma vez que o posicionamento do braço superior é determinado independentemente do posicionamento da mola e do amortecedor, permitindo assim um melhor controle das variações de convergência e cambagem com o curso da suspensão. No entanto, por ocuparem um maior volume, e consequentemente dificultarem o posicionamento transversal do motor, bem como o dos semi-eixos de transmissão, esse tipo de suspensão é mais adequado a veículos que possuam tração traseira.

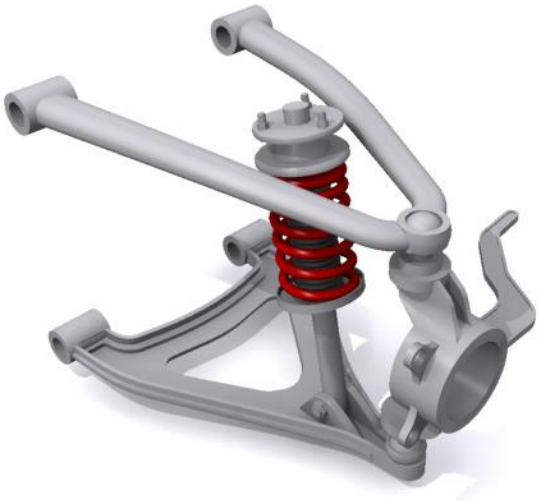


Figura 7. Suspensão duplo A (The Suspension Bible, 2014)

5. MULTI-LINK

   O princípio básico do funcionamento deste tipo de suspensão é similar ao da suspensão duplo A, com o braço inferior tendo uma característica maior de suportar as cargas e o braço superior com mais características de controle de curso de suspensão. O que as diferencia, neste caso, é que os braços, tanto superior quanto inferior, não são construídos com uma única peça, de maneira que os eixos de rotação de cada ponto de fixação do braço à carroceria ou chassi, não necessitem estarem colineares. Dessa maneira há uma maior liberdade para se controlar as variações de convergência e cambagem em função do curso da suspensão. A Figura 8 ilustra uma suspensão deste tipo. Fica claro pela imagem a ideia de não necessidade de colinearidade dos eixos de rotação.

Figura 8. Suspensão Multi-Link (The Suspension Bible, 2014)

6.2. Dinâmica Lateral

O comportamento do veículo em curvas (dinâmica lateral) é das mais importantes características no desempenho global do veículo e basicamente a ela é atribuída a definição de dirigibilidade. Define-se a dirigibilidade como sendo a resposta do veículo às entradas impostas pelo motorista. Portanto, dirigibilidade é uma “medida” de um sistema de *loop* fechado da combinação veículo-usuário uma vez que, observando a direção e a posição do veículo, o motorista faz os devidos ajustes na trajetória. No entanto, com o intuito de caracterizar apenas o veículo, as métricas de

dirigibilidade são obtidas através de manobras de *loop* aberto, ou seja, avalia-se a reposta do veículo para uma entrada específica de esterçamento (GOOD, 1977) apud (GILLESPIE, 1992).

As manobras utilizadas para obtenção de métricas objetivas de dinâmica lateral podem ser a baixa velocidade, de maneira que as acelerações laterais sejam desprezíveis e, portanto, não haja forças laterais nos pneus ou a alta velocidade, nas quais a aceleração lateral provoca reação de mesmo sentido no contato pneu solo. Manobras a baixa velocidade longitudinal são típicas para obtenção de esforços e relação de esterçamento, raio de giro e outras relacionadas ao sistema de direção. As manobras de alta velocidade longitudinal são tipicamente feitas em regime quase estático, ou seja, os incrementos de velocidade são suaves de maneira que as acelerações longitudinais podem ser desprezadas.

Há ainda as manobras de dirigibilidade limite nas quais busca-se atingir as máximas acelerações laterais utilizando ao extremo as forças laterais nos pneus. Essas manobras podem tanto fornecer informações relevantes no sentido de entender os limites seguros de um veículo bem como, no caso de um veículo de competição, fazer com que este tenha um comportamento neutro, ou seja, nem sobre esterçante nem contra esterçante para acelerações laterais limites (MILLIKEN e MILLIKEN, 1995).

A manobra considerada neste trabalho para se avaliar a distribuição de carga lateral impõe ao veículo uma curva de raio constante de 30 metros sofrendo pequenos e suaves incrementos em sua velocidade longitudinal (e consequente aumento na aceleração lateral) de maneira a manter o regime quase estático (sem aceleração longitudinal) para este tipo de avaliação.

A manobra de raio constante com incrementos de velocidade (ou CRIS da sigla em inglês *Constant Radius Increasing Speed*), avaliada na faixa que vai de 0g de aceleração lateral até o limite de escorregamento (tipicamente 0,6~0,7g), permite a obtenção de diversas métricas. Entre elas está o gradiente de rolagem, o gradiente de sub-esterçamento e a transferência de carga lateral.

O gradiente de rolagem (Figura 9) é definido pela derivada do ângulo de rolagem da carroceria do veículo em função da aceleração lateral atuante no centro de massa. O sub-esterçamento ou sobre-esterçamento, ilustrado na Figura 10, é determinado em função da diferença de rigidez de esterçamento entre a dianteira e a traseira do veículo. Essa rigidez de esterçamento é caracterizada pela razão entre o

ângulo de deriva dos pneus (ou do inglês *slip angle*) e a força lateral do pneu. O ângulo de deriva é a diferença entre o ângulo de esterçamento da roda e a direção longitudinal do pneu. Essa métrica avalia se o veículo tem a tendência de escapar a frente ou a traseira numa curva conforme aumenta sua aceleração lateral.

Figura 9. Exemplo de rolagem de um veículo (British Car Forum)

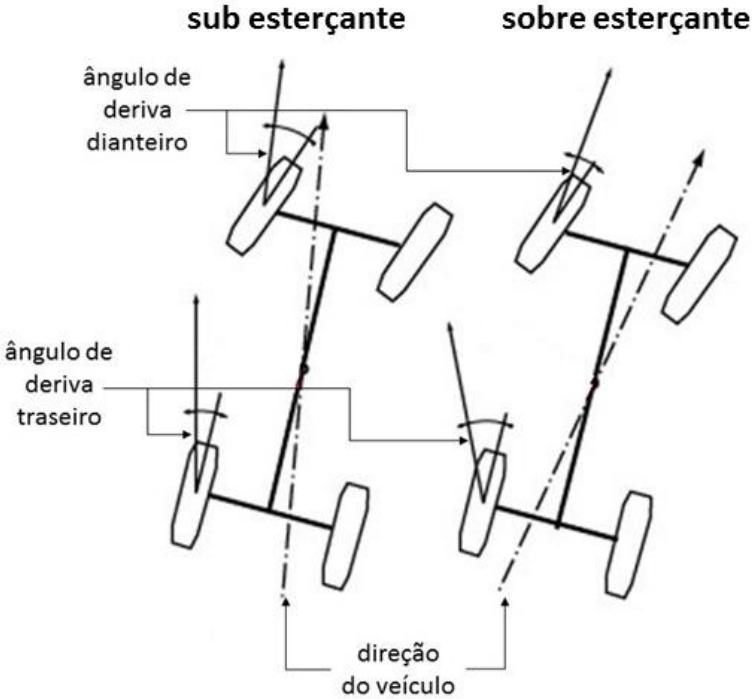


Figura 10. Ilustração do sobre e contra esterçamento (MSGroup, 2009)

A transferência de carga lateral, métrica que será abordada neste trabalho, é obtida pela diferença entre as reações normais dos pneus externos e internos à curva em função da aceleração lateral. Essa métrica é fundamental para se entender o

balanço de distribuições de cargas do veículo para, principalmente nos veículos de alto desempenho nos quais as acelerações laterais são elevadas, buscar a adequada aderência dos pneus ao solo. O entendimento de quais parâmetros interferem nesta métrica será abordado com maior detalhe no capítulo 9.

7. Corpos Flexíveis em Sistemas Multicorpos

Como comentado na seção 1.2, a teoria de sistemas multicorpos é largamente utilizada nos estudos de dinâmica veicular na indústria automotiva. Esta teoria provou-se ser um método bastante efetivo para analisar modelos com múltiplos componentes conectados entre si (CHEN e LIN, 1998). O passo seguinte nos estudos dinâmicos é a introdução da flexibilidade dos corpos nos sistemas multicorpos, com o intuito de se obter resultados virtuais e analíticos que correspondam melhor a realidade física.

Como se sabe, um corpo contínuo qualquer tem infinitos modos de deformação (ou graus de liberdade), portanto, para tornar viável a consideração destes modos nos sistemas multicorpos, é necessário um passo anterior de se discretizar o corpo em elementos finitos e reduzi-lo às suas matrizes de massa e rigidez características. Dentre os métodos disponíveis para se determinar essas matrizes, neste trabalho será utilizado o método de Craig-Bampton devido a sua característica principal de boa adaptabilidade com as interfaces rígidas dos sistemas multicorpos e consequentemente boa estabilidade numérica (BONISOLL et al., 2006), apesar do relativo alto custo computacional.

O item seguinte aborda resumidamente a teoria proposta para a redução

7.1. Método de Craig-Bampton

Para proceder com o método de Craig-Bampton, primeiramente é necessário um modelo de elementos finitos dos componentes que se deseja reduzir, bem como a definição dos nós de interface com os seis graus de liberdade que o dado componente terá com o resto do sistema. No método de Craig-Bampton, os modos normais de deformação dos componentes e os “modos de contorno”, que são modos de deformação obtidos por sucessivos deslocamentos unitários em cada grau de cada nó de interface, enquanto todos os outros nós de interface são mantidos fixos, são utilizados diretamente como vetores de Ritz (SELLGREN, 2003) apud (CRAIG e BAMPTON, 1968).

Em seu trabalho, Bonisoll et al. (2006) elencam os objetivos a serem alcançados com a redução numa aplicação automotiva:

- Obter, a partir de um modelo completo de elementos finitos, um equivalente reduzido com um comportamento de corpo rígido coerente e característica dinâmica consistente
- Construir um modelo com boa estabilidade numérica de maneira a computar adequadamente o desempenho global dinâmico dos componentes.
- Destacar qualitativamente informações de inércia e elasticidade de modelos multicorpos.

Partindo-se de um modelo de determinado componente sem amortecimento, podemos escrever a seguinte equação dinâmica para os múltiplos graus de liberdade sendo $x = [x_1, x_2, \dots x_n]$ as n coordenadas generalizadas descritas no domínio do tempo:

$$[M]\ddot{x}(t) + [K]x(t) = f(t) \tag{9.1}$$

Onde $[M]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa (ou inércia) e rigidez. $f(t)$ corresponde às forças generalizadas a que o sistema poderia estar sujeito. Em geral estes sistemas são lineares pois as matrizes $[M]$ e $[K]$ não variam no tempo. Busca-se com a redução do componente obter um modelo dinâmico com menor complexidade, ou seja, $x_r = [x_1, x_2, \dots x_m]$ com $m < n$ graus de liberdade onde x_r está relacionado à x pela matriz de transformação $[T]$ através de $x_r = [T]x$.

Dessa maneira, a equação a ser resolvida num sistema reduzido fica:

$$[M_r]\ddot{x}_r(t) + [K_r]x_r(t) = f_r(t) \tag{9.2}$$

Onde as matrizes $[M_r], [K_r]\ e\ [f_r]$ estão relacionadas à matriz de transformação $[T]$ da seguinte maneira:

$$[M_r] = [T]^t[M][T], [K_r] = [T]^t[K][T], [f_r] = [T]^t[f][T] \tag{9.3}$$

Numa redução, os graus de liberdade do corpo discretizado devem ser divididos em principais (ou *master* como na terminologia em inglês) e secundários (ou

slave do inglês). Os graus de liberdade principais são os graus retidos na redução e os secundários são os removidos. Existem critérios para a determinação de quais graus são considerados principais e secundários. O detalhamento destes critérios não será abordado neste trabalho. No entanto, é importante notar que cada critério de condensação expressa os graus de liberdade como função de pelo menos um grau de liberdade principal, ou seja:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = [T]\{x_m\} \tag{9.4}$$

onde x_m contém os graus de liberdade principais e x_s os grau de liberdade secundários.

Na aplicação deste trabalho, os graus de liberdade principais, ou graus retidos, são exatamente os seis graus (translações e rotações) de cada nó de interface do componente flexível com o restante do sistema multicorpos. Sellgren (2003) apresenta um exemplo da aplicação no qual reduz o sistema considerando diferentes quantidades de graus de liberdade principais e mostrando a variação obtida no resultado com as escolhas distintas.

Com a consideração dos graus de liberdade principais e secundários, podemos reescrever a eq. 9.1 da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.5}$$

No método de Craig-Bampton, como o deslocamento total dos graus de liberdade principais são obtidos pela superposição dos modos normais de deformação do componente com os “modos de contorno”, temos que a matriz de transformação $[T_{CB}]$ resulta:

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = [T_{CB}] \begin{Bmatrix} x_m \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \phi_f & \phi_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ q \end{Bmatrix} \tag{9.6}$$

onde $\{q\}$ é o vetor de coordenadas modais, ϕ_f são os modos normais de deformação obtidos no modelo reduzido e ϕ_c são os “modos de contorno”.

Então, a equação dinâmica para o modelo reduzido fica:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.7}$$

onde as matrizes de massa e rigidez reduzidas ficam:

$$[M_{CB}] = [T_{CB}]^t [M][T_{CB}] = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mq} \\ M_{qm} & I \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

$$[K_{CB}] = [T_{CB}]^t [K][T_{CB}] = \begin{bmatrix} K_{mm} & 0 \\ 0 & \omega_r^2 \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

Sellgren (2003) apresenta um exemplo simples no qual demonstra a combinação dos modos naturais do componente com as deformações obtidas através dos deslocamentos unitários para a obtenção das matrizes reduzidas de rigidez e inércia.

8. Modelo Completo de Veículo

Neste tópico será descrito o modelo de veículo completo utilizado para o estudo inicial de transferências de carga lateral.

Como abordado no item 5, a ideia nesta parte é tratar unicamente da análise desta métrica baseando-se num modelo com alta complexidade, elaborado em ambiente virtual com o *software* Altair MotionView®.

Considera-se para tanto um veículo referência: um Dodge Neon ano 1996.

As dimensões básicas do veículo, bem como os modelos de elementos finitos necessários para se gerar os corpos flexíveis estão disponíveis para utilização e consulta na NCAC (NCAC - NATIONAL CRASH ANALYSIS CENTER, 2013). O ANEXO 1 apresenta trechos do relatório de avaliação disponíveis na mesma fonte que identifica o modelo e valida-o através de comparação com teste físico.

As Figura 11 e Figura 12 mostram o modelo de elementos finitos disponível e utilizado para geração tanto dos corpos flexíveis como na construção do sistema multicorpos uma vez que do modelo foram retiradas as dimensões.

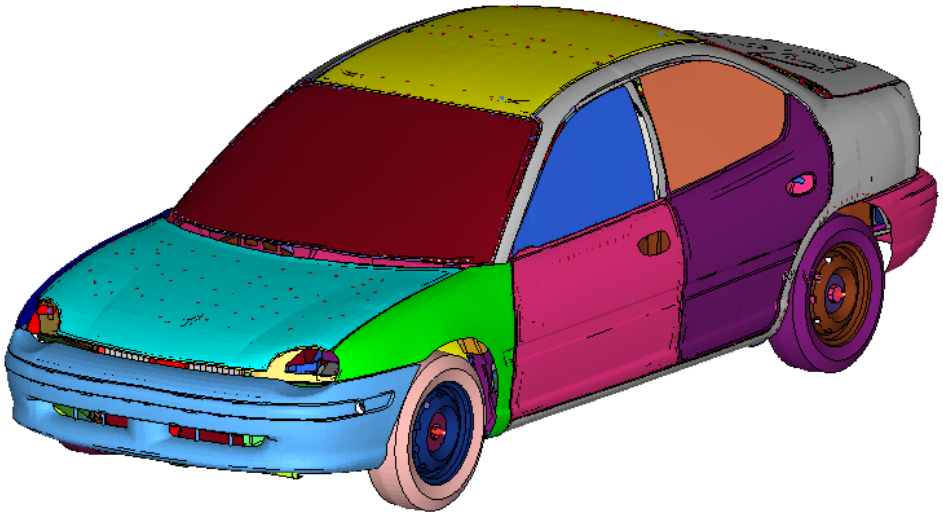


Figura 11. Modelo de elementos finitos referência (NCAC - NATIONAL CRASH ANALYSIS CENTER, 2013)

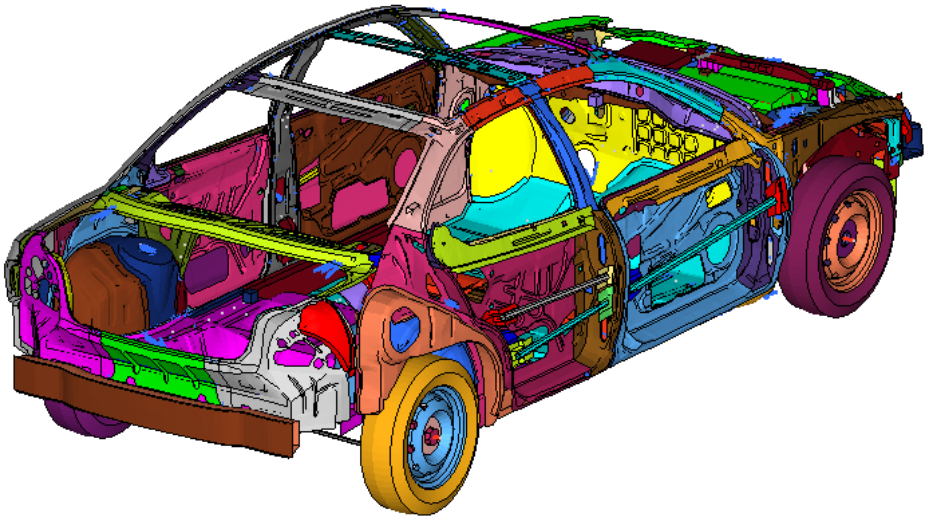


Figura 12. Detalhe do modelo de elementos finitos eliminando-se alguns painéis externos (NCAC - NATIONAL CRASH ANALYSIS CENTER, 2013)

8.1. Especificações do veículo

A seguir descrevem-se as características básicas do modelo. É importante ressaltar que o veículo Dodge Neon foi utilizado apenas como uma referência. Portanto, não estando todas as informações disponíveis como, por exemplo, valores de rigidez de molas e buchas, valores de amortecimento, curvas características dos pneus, etc., valores típicos de veículos desta categoria (apresentados a seguir) foram atribuídos e, consequentemente, o modelo utilizado no estudo, bem como os seus resultados não necessariamente representam as características de comportamento específicas de um Dodge Neon real.

A Tabela 2 apresenta as especificações do veículo com o intuito apenas de identificação e caracterização do modelo estudado, ou seja, com essa especificação podemos entender em qual categoria o Dodge Neon se enquadra, neste caso um sedã médio. Já a Tabela 3 apresenta as características dimensionais básicas.

Tabela 2. Especificações básicas Dodge Neon

GERAL	
Ano de fabricação	1996
Fabricante	Dodge
Modelo	Neon
Tipo de carroceria	Sedan 4 portas
MOTOR	
Posição	Transversal
Número de cilindros	4
Deslocamento volumétrico	2.0 litros
TRANSMISSÃO	
Tipo	Automática
Número de marchas	3
Tração	Dianteira
DIREÇÃO	
Tipo	Pinhão e cremalheira
Assistência	Hidráulica

Tabela 3. Dimensões básicas

DIMENSÃO	UNIDADE	VALOR
Distância entre eixos	mm	2642
Bitola dianteira	mm	1456
Bitola traseira	mm	1443
Massa total	kg	1196
Porção de massa dianteira	%	56,6
Porção de massa traseira	%	43,4
Rigidez das molas dianteiras	N/mm	33
Rigidez das molas traseiras	N/mm	25
Amortecimento dianteiro	N/mm/s	1
Amortecimento traseiro	N/mm/s	1

Os valores de distância entre eixos e bitolas apresentados na Tabela 3 foram medidos diretamente do modelo de elementos finitos obtido da NCAC. A massa e a distribuição são resultantes do modelo de multicorpos montado com as dimensões do Dodge Neon no MotionView® somados aos corpos flexíveis gerados (os corpos flexíveis e o modelo multicorpos serão mostrados adiante). Os componentes dos quais

não se tinham informações de massa, por exemplo, o motor, braços de suspensão, sistema de direção, etc. consideram valores disponíveis na biblioteca do pré-processador MotionView®.

Os valores de rigidez das molas, na falta de especificações disponíveis, foram ajustados de maneira que o veículo tivesse uma atitude de arfagem aproximadamente de 0 graus na condição de equilíbrio, enquanto os valores de amortecimento unitário foram atribuídos arbitrariamente uma vez que as manobras para obter as transferências de carga lateral foram realizadas em condição quase estática, ou seja, sem influência do amortecimento. No caso do estudo de influências (seção 10), há transitoriedade, porém, como o estudo é comparativo e o amortecimento foi considerado igual para ambos os modelos, a arbitrariedade na escolha do valor unitário para o coeficiente de amortecimento não afeta o resultado.

Com relação aos pneus, as características utilizadas no modelo foram as disponíveis dentro da biblioteca do MotionView®. Não havendo nenhuma informação disponível a respeito do pneu do carro, esses dados são suficientes uma vez que as respostas obtidas serão avaliadas qualitativamente. As Figura 13 e Figura 14 apresentam, respectivamente, a força lateral em função do ângulo de deriva (ou *slip angle* do inglês) em diferentes condições de força normal pneu/solo e o torque autoalinhante do pneu em função do ângulo de deriva para diferentes condições de carga.

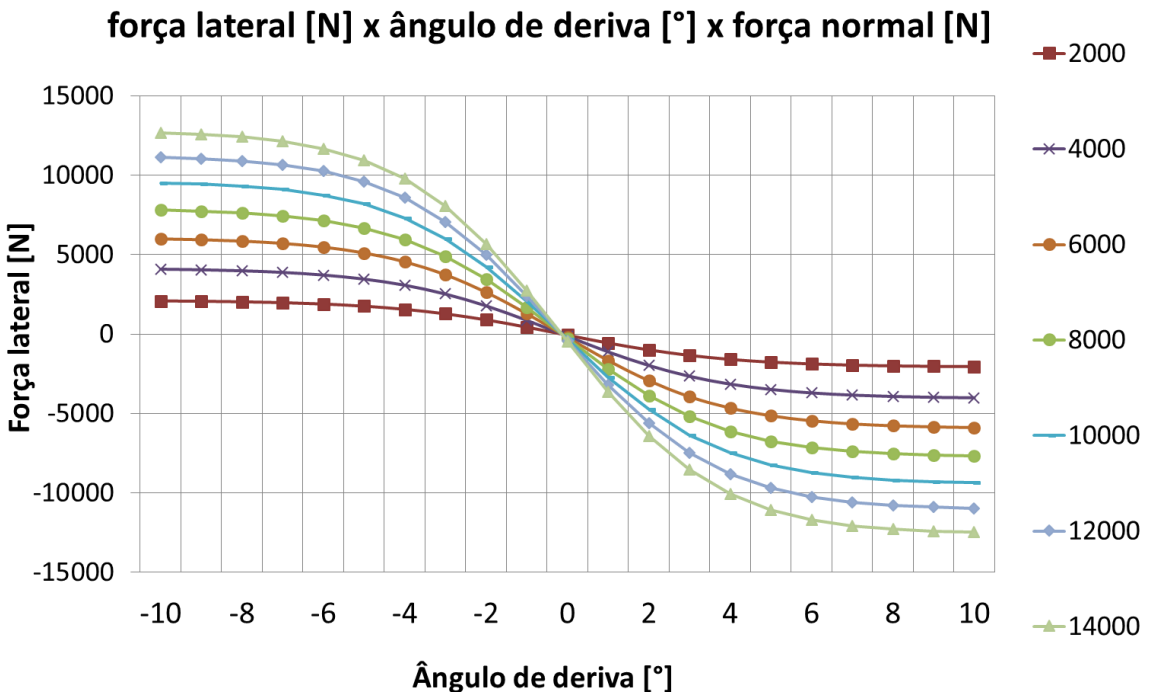


Figura 13. Gráfico da força lateral do pneu considerado

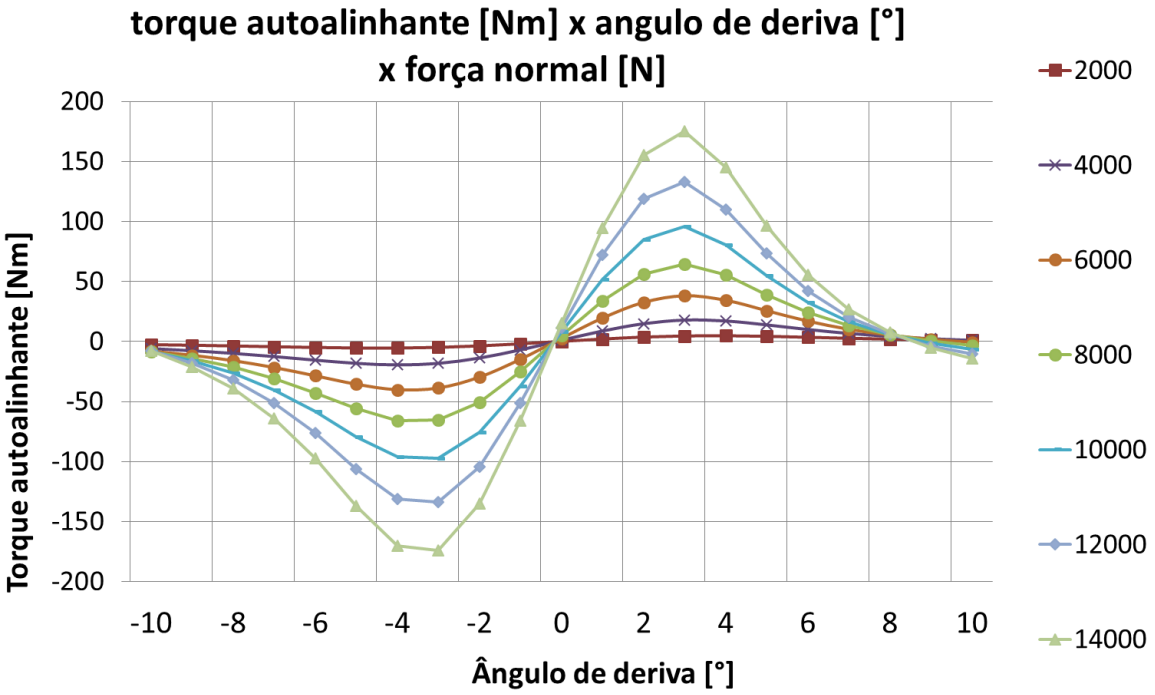


Figura 14. Gráfico do torque autoalinhante do pneu considerado

8.2. Corpos flexíveis

A partir do modelo apresentado nas Figura 11 e Figura 12, dois modelos multicorpos foram construídos. Para o “modelo rígido”, as dimensões básicas (seção 8.1) foram extraídas do modelo de elementos finitos e gerou-se um modelo no MotionView® somente com corpos rígidos conectados por juntas, buchas, molas e amortecedores. Na construção do modelo que considera a rigidez estrutural, “modelo flexível”, dois componentes rígidos foram substituídos por corpos flexíveis: carroceria e sub-chassi. As Figura 15 e Figura 16 mostram os modelos de elementos finitos utilizados na geração dos corpos flexíveis. Nelas estão indicadas pelas setas as posições dos pontos onde haverá a interface do modelo com o sistema multicorpos, ou seja, na geração de um corpo flexível para a substituição de um corpo rígido deve-se explicitar os nós que serão a conexão entre o corpo flexível e o sistema multicorpo.

No caso do sub-chassi, os modos naturais selecionados para a redução do modelo vão de 0 a 50Hz. Já para a carroceria, dado o maior número de graus de liberdade (maior quantidade de nós), os modos naturais requeridos vão de 0 a 100Hz. Esses modos, combinados às deformações obtidas com os deslocamentos unitários

em cada grau de liberdade dos nós de interface, determinaram as matrizes de inércia e rigidez a serem utilizadas no modelo de multicorpos como demonstrado na seção 7.1.

Para a obtenção das matrizes de massa e rigidez que definem o corpo flexível foi utilizado o *software* HyperMesh® para o pré-processamento (geração da malha e definição dos parâmetros de solução) e o Optistruct® como *solver*.

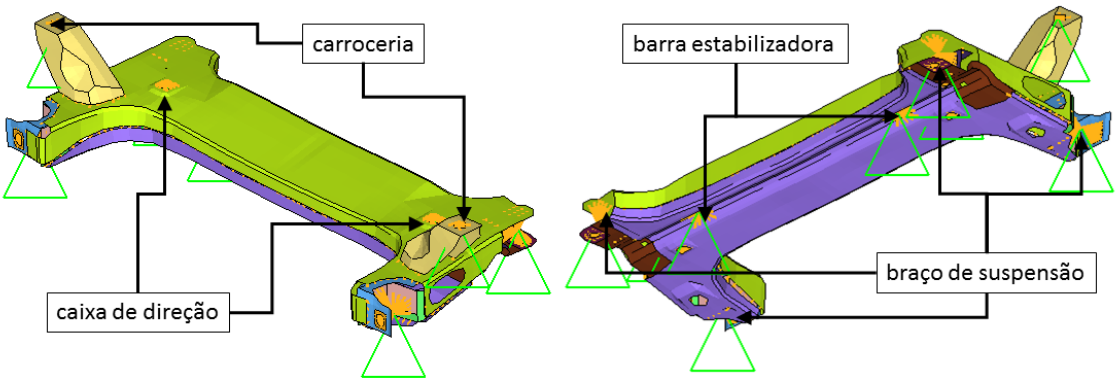


Figura 15. Modelo de elementos finitos sub-chassi e pontos de interface corpo/sistema

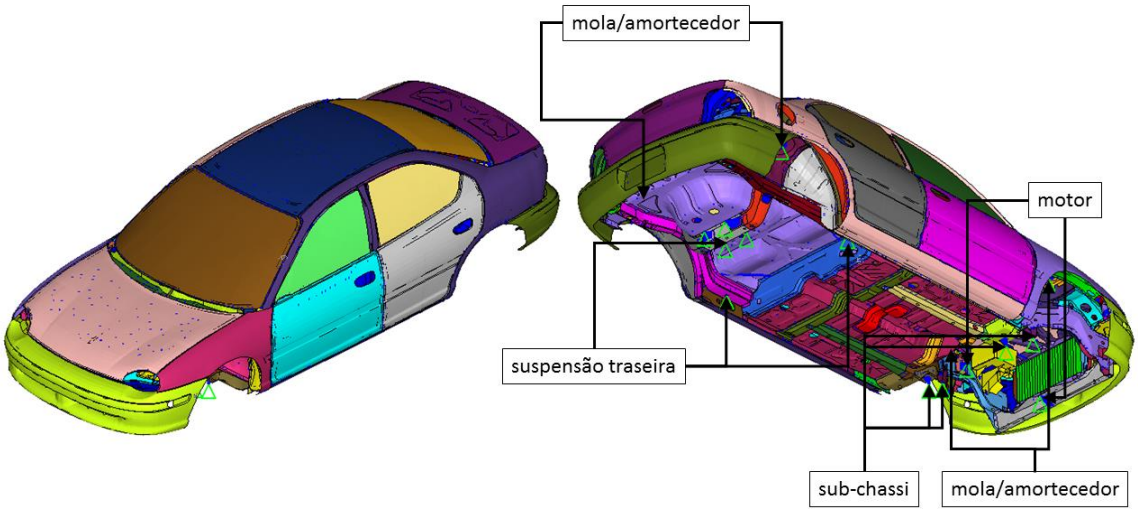


Figura 16. Modelo de elementos finitos da carroceria e pontos de interface corpo/sistema

8.3. Modelos multicorpos

A Figura 17 apresenta os dois modelos construídos. A imagem à esquerda representa o modelo rígido e as setas indicam os dois componentes que tiveram os corpos flexíveis gerados para a construção do segundo modelo à direita. O sistema

de coordenadas inercial apresentado em ambas as imagens será o considerado em todos os modelos estudados, inclusive analíticos.

O detalhamento do modelo: coordenada dos pontos, informações das buchas, molas e amortecedores e característica dos corpos do sistema são apresentados no APENDICE 1.

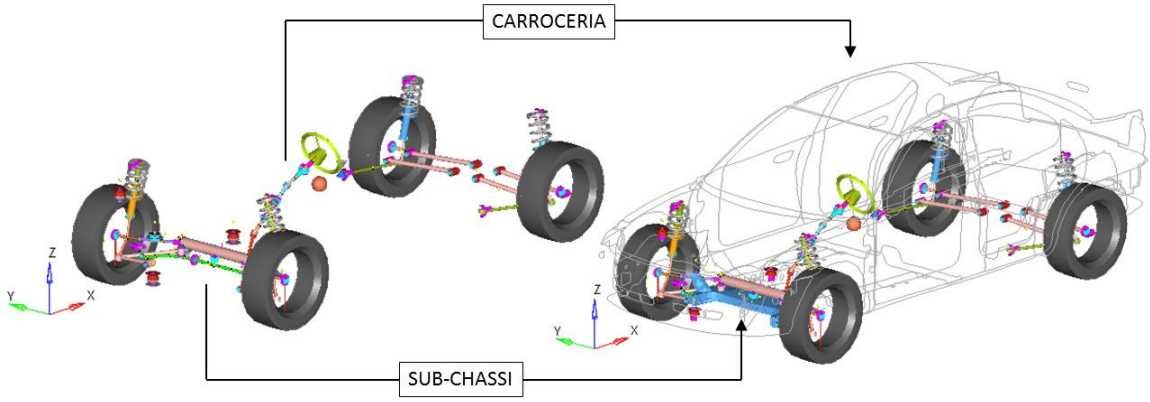


Figura 17. Modelos elaborados para análise

Vale notar que o que diferencia os corpos flexíveis dos seus correspondentes rígidos é unicamente a rigidez. A massa e a inércia dos corpos, bem como seus pontos de interface com o restante do modelo são exatamente os mesmos.

8.4. Características do veículo

Consideremos características do veículo como sendo as extraídas do modelo elaborado, neste caso do modelo completo do veículo, dependentes de todas as outras especificações descritas nos itens anteriores. As informações obtidas nos itens seguintes serão utilizadas para gerar o modelo analítico de transferência de carga lateral equivalente ao modelo de veículo completo.

8.4.1. Rigidez torcional da estrutura

A rigidez torcional é a resistência que a estrutura (carroceria mais sub-chassi) oferece a um binário aplicado na direção vertical do veículo em um de seus eixos com as forças passando pelos centros de roda enquanto os centros de roda do outro eixo são mantidos com deslocamento vertical nulo.

A rigidez torcional é usualmente expressa em unidades de torque por ângulo $\left(\frac{Nm}{\circ}\right)$. O cálculo se faz através de:

$$K_T = \frac{T}{\theta} \tag{10.1}$$

onde K_T é a rigidez torcional, T é o torque (ou binário) aplicado e Θ é o ângulo de giro que a estrutura sofre na direção longitudinal.

Para determinar a rigidez torcional da estrutura, foi utilizado o mesmo modelo de elementos finitos linear empregado na obtenção dos modelos de corpo flexível reduzidos. A Figura 18 apresenta um esquema do modelo com as condições de contorno: uma das rodas traseiras com as três translações travadas e a outra apenas duas, deixando livre os deslocamentos transversais (direção y); e os deslocamentos impostos na dianteira: deslocamentos verticais de 20mm em sentidos opostos de forma a gerar um ângulo conhecido e tomar as reações nos apoios.

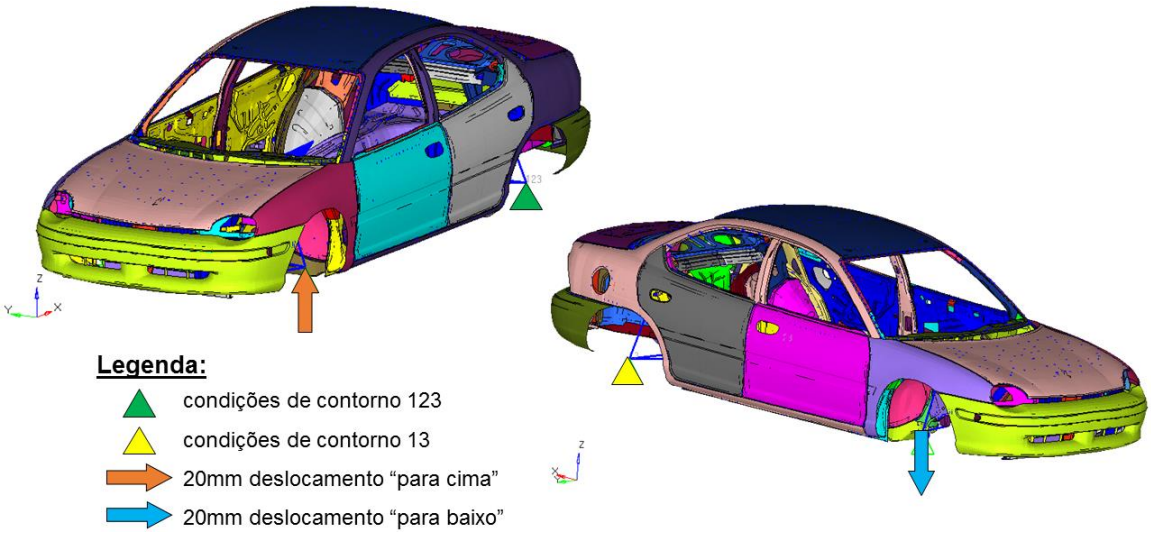


Figura 18. Modelo de elementos finitos utilizado para determinação da rigidez torcional

A partir da eq. 10.1 e da Figura 18 podemos calcular o valor da rigidez torcional com a seguinte equação:

$$K_T = \frac{(W_{fd} + W_{fe})\frac{t_f}{2}.cos(\theta)}{\theta} \tag{10.2}$$

onde K_T é a rigidez torcional da estrutura e W_{fd}, W_{fe} e t_f são, respectivamente, as reações no centro de roda dianteiro direito e esquerdo e a bitola dianteira do modelo. O ângulo θ (em graus) é conhecido e dado por:

$$\theta = asin\left(\frac{0{,}020}{\frac{t_f}{2}}\right).\frac{180}{\pi} \tag{10.3}$$

O mesmo resultado seria obtido caso o binário fosse aplicado no eixo traseiro mantendo-se engastado o eixo dianteiro.

8.4.2. Rigidez de rolagem da suspensão

A rigidez de rolagem é definida como sendo o gradiente do torque necessário para se produzir a rolagem da suspensão e usualmente é expressa em unidades de Nm/grau. A rigidez de rolagem total é determina pelo conjunto: braços, molas, amortecedores, barra estabilizadora, buchas e pneus que conferem à suspensão sua rigidez característica. A maneira mais precisa de determiná-la, a partir do modelo completo de veículo, é imponto uma rolagem à suspensão, enquanto a carroceria permanece travada, e extrair as reações normais no contato pneu/solo.

O modelo rígido de multicorpos descrito no item 8.3 foi utilizado para a obtenção da rigidez de rolagem pois, neste caso, deseja-se determina-la independentemente da rigidez estrutural. A Figura 19 apresenta o modelo utilizado com as direções dos deslocamentos aplicados.

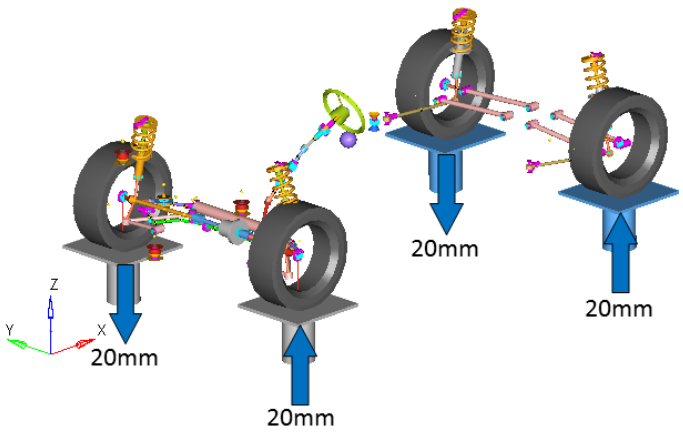


Figura 19. Modelo para obtenção da rigidez de rolagem

O gráfico resultante com a curva do torque em função do ângulo de rotação será apresentado adiante, no entanto, como todos os componentes deformáveis da suspensão (molas, buchas, pneus e barra estabilizadora) tem propriedades lineares e o amortecedor pode ser desprezado por se tratar de uma análise quase-estática, podemos também calcular a rigidez de rolagem das suspensões dianteira e traseira através de:

$$K_{sf} = \frac{(N_{fd} + N_{fe})\frac{t_f}{2}.cos(\beta_f)}{\beta_f} \tag{10.4}$$

$$K_{sr} = \frac{(N_{fd} + N_{fe})\frac{t_r}{2}.cos(\beta_r)}{\beta_r} \tag{10.5}$$

Onde K_{sf} é a rigidez de rolagem da suspensão dianteira, K_{sr} é a rigidez de rolagem da suspensão traseira e N_{fd}, N_{fe} são, respectivamente, as reações normais pneu/solo dianteiro direito e esquerdo. Os ângulos β_f e β_r (em graus) são dados por:

$$\beta_f = asin\left(\frac{0{,}020}{\frac{t_f}{2}}\right).\frac{180}{\pi} \tag{10.6}$$

$$\beta_r = asin\left(\frac{0{,}020}{\frac{t_r}{2}}\right).\frac{180}{\pi} \tag{10.7}$$

8.4.3. Centro de rolagem

É sempre possível calcular o centro instantâneo de rolagem das suspensões dianteira e traseira e traçar uma linha ligando estes centros (VILELA, 2010). A linha é dita eixo de rolagem e define instantaneamente a linha imaginária ao redor da qual o veículo rola quando sujeito à aceleração lateral.

A Figura 20 demonstra visualmente como é feito o cálculo do centro de rolagem para uma suspensão do tipo MacPherson, que é a suspensão utilizada na dianteira do Dodge Neon.

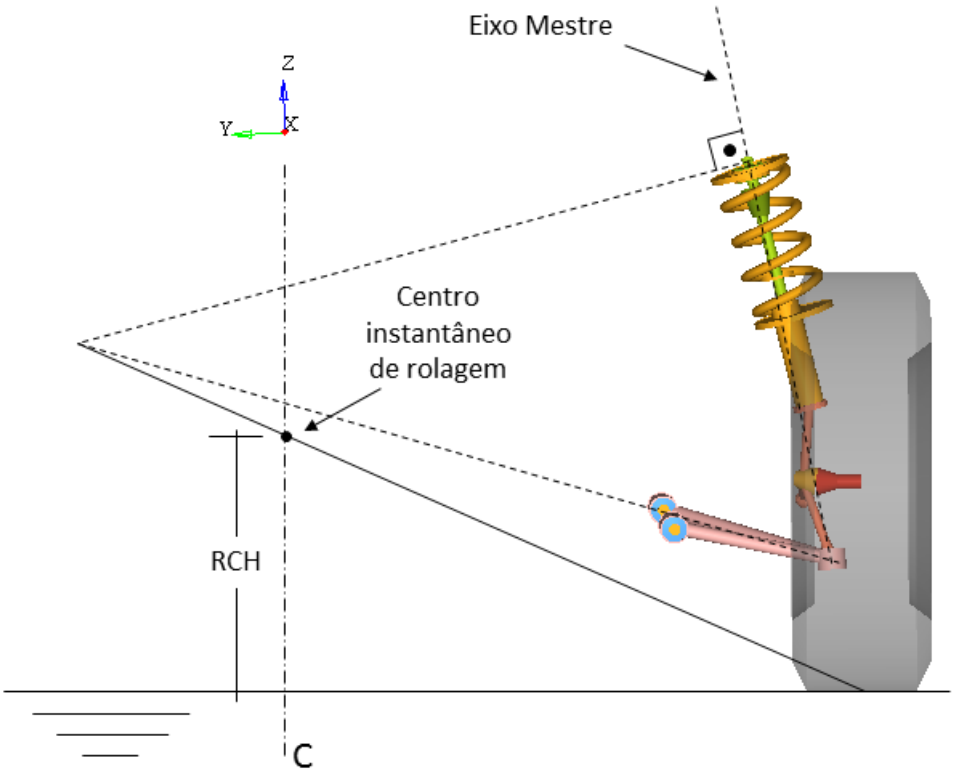


Figura 20. Altura do centro de rolagem suspensão tipo MacPherson

A altura do centro de rolagem (RCH – *Roll Center Height*) é encontrada traçando-se uma linha que passe pelo eixo mestre (linha que liga o ponto superior de fixação do conjunto mola amortecedor à junta esférica do braço de controle) e outra a partir da junta esférica passando pela posição média dos pontos de fixação do braço de controle à estrutura. A linha perpendicular ao eixo mestre determina um ponto na intersecção com a linha do braço de controle. Da intersecção ao ponto de contato pneu/solo determina-se a linha que, no plano XZ (plano de simetria lateral do veículo), define o centro instantâneo de rotação.

Para a determinação do centro de rolagem da suspensão traseira o processo é similar. O que diferencia a suspensão dianteira da traseira são os dois braços utilizados com função similar ao único braço de controle aplicado na dianteira. Neste caso, um passo adicional é necessário para determinar a posição da linha auxiliar que passa pelo braço de controle. A Figura 21 ilustra essa posição.

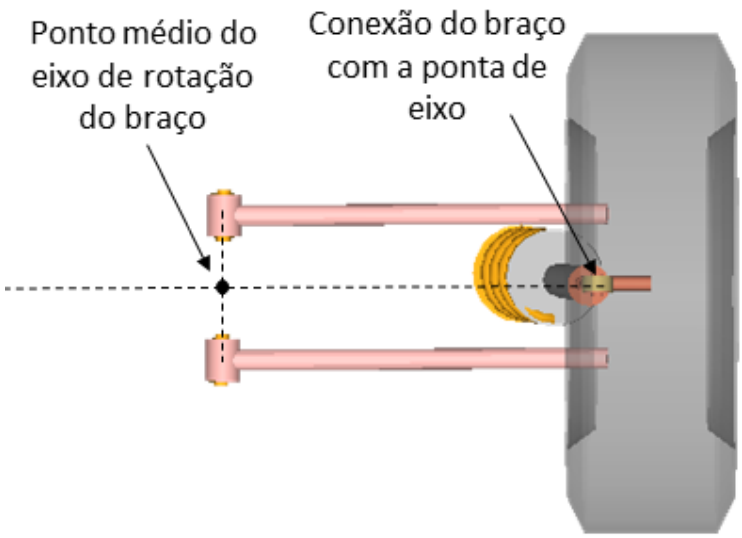


Figura 21. Posição da linha auxiliar que passa pelo braço de controle

O passo seguinte é igual ao apresentado para a suspensão MacPherson e está ilustrado na Figura 22.

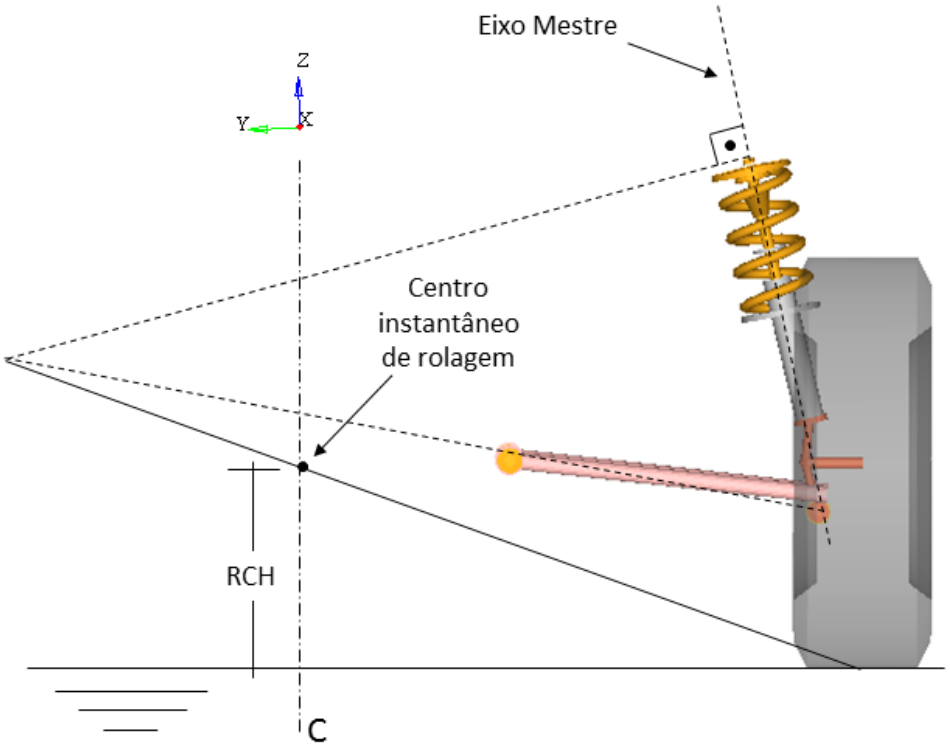


Figura 22. Altura do centro de rolagem suspensão traseira Dodge Neon

9. Modelagem Analítica

Os modelos elaborados para se representar um veículo são, em geral, construídos visando atingir tão somente os resultados desejados, ou seja, caso deseje-se, por exemplo, avaliar a frequência natural de uma suspensão, é suficiente que se tenha apenas a modelagem de um quarto do veículo representado. Em outra situação que se queira avaliar a transferência de carga traseira/dianteira numa situação de frenagem ou aceleração, um modelo bidimensional é suficiente para gerar bons resultados, o que já não ocorreria, por exemplo, numa avaliação de conforto, no qual as quatro rodas sofreriam excitações variadas, e deste modo exigiriam um modelo mais refinado com pelo menos o veículo representado de forma tridimensional (veículo completo).

No APENDICE 2 são apresentadas alguns modelos e abordagens distintas para a obtenção das equações do movimento. Inicialmente dois modelos (um quarto de veículo e veículo completo) são modelados utilizando abordagem de Newton-Euler. Em seguida outros dois modelos (meio veículo e veículo completo) são equacionados a partir do Princípio do Trabalho Virtual utilizando o Princípio de D'Alembert para corpos rígidos. Em ambos os modelos de veículos completo considera-se uma representação da rigidez torcional com o eixo de rolagem passando pelos centros de gravidade das massas suspensas.

Com os modelos construídos na seção 10, por se tratarem de modelos de veículo completo com considerações detalhadas da cinemática e rigidez do movimento, é possível extrair diversas informações e predizer como será o comportamento dinâmico do veículo como um todo. No entanto, como está sendo analisado somente a transferência de carga lateral, o elevado custo computacional e a dificuldade na resolução numérica para valores de rigidez estrutural baixos, leva-nos à elaboração de um modelo analítico com as mesmas características do modelo completo de veículo que possibilite a avaliação e comparação dos parâmetros de rigidez com maior facilidade.

A rigidez torcional é reconhecidamente uma das mais importantes propriedades do chassi de um veículo (MILLIKEN e MILLIKEN, 1995). Nos seus trabalhos Deakin et al. (2000) e Sampo et al. (2010) avaliam a distribuição de carga lateral do veículo

como função da rigidez torcional da estrutura (seção 8.4.1) e da rigidez de rolagem (seção 8.4.2), ignorando outras deformações, como a de flexão, por exemplo. O modelo elaborado a seguir utiliza a mesma consideração.

9.1. Modelo e hipóteses

O modelo analítico de dinâmica lateral utilizado neste trabalho para avaliação da distribuição de carga lateral considerando-se a rigidez torcional estrutural diferencia-se dos modelos propostos no APENDICE 2 por dois aspectos fundamentais: neste modelo, o eixo de rolagem do veículo não coincide com os centros de massa das massas suspensas e os efeitos inerciais na direção longitudinal são desprezados uma vez que a manobra a que será submetido é quase-estática e, portanto, não há transitoriedade na análise. Dessa maneira, como será visto adiante, um modelo estático com força lateral constante é suficiente para descrever a transferência de carga lateral em estado estacionário.

As Figura 23 e Figura 24 apresentam o modelo proposto equivalente ao modelo de carro completo. No artigo de Sampo et al. (2010) um modelo similar é apresentado, porém sem a distinção entre massa suspensa e não suspensa.

As hipóteses consideradas para o equacionamento são:

- Forças inerciais longitudinais desprezadas para manobra de raio constante com acréscimo lento da velocidade (regime estacionário)
- O momento gerado pelo deslocamento do centro de massa devido à rolagem do veículo será desprezado frente a ordem de grandeza superior das outras forças geradas devido à aceleração lateral.
- Centro de rolagem e centro de massa são considerados no plano de simetria do veículo
- As linhas perpendiculares ao eixo de rolagem do veículo são consideradas verticais

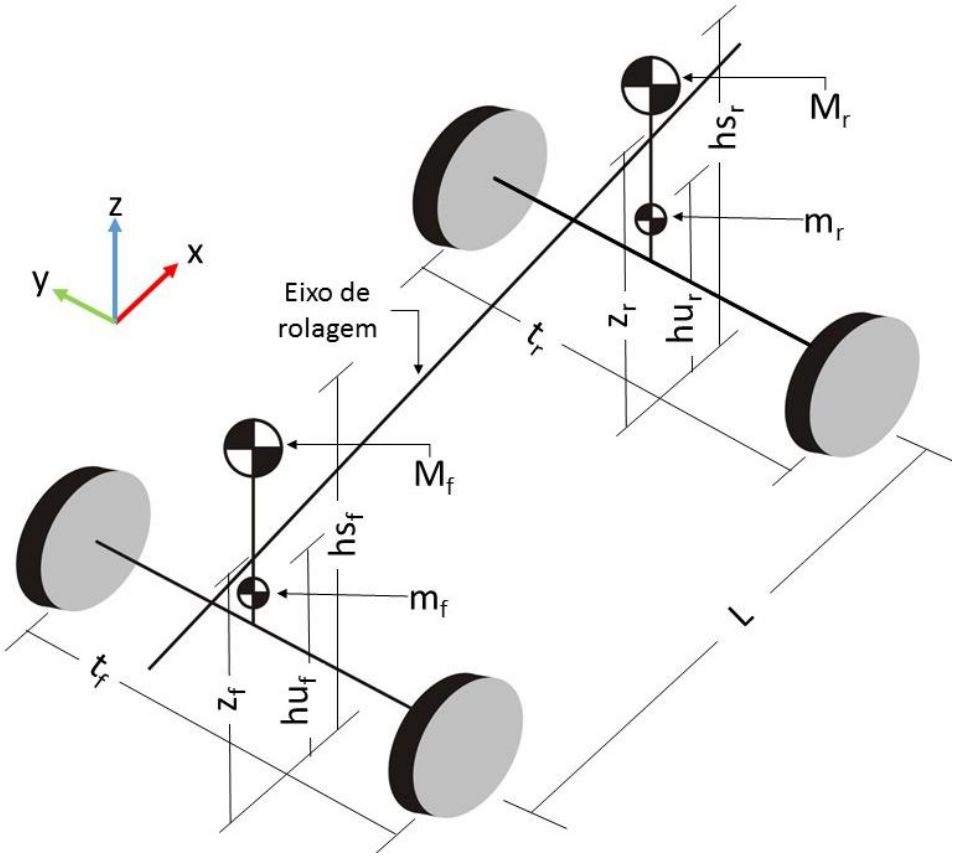


Figura 23. Modelo analítico da dinâmica lateral - dimensões

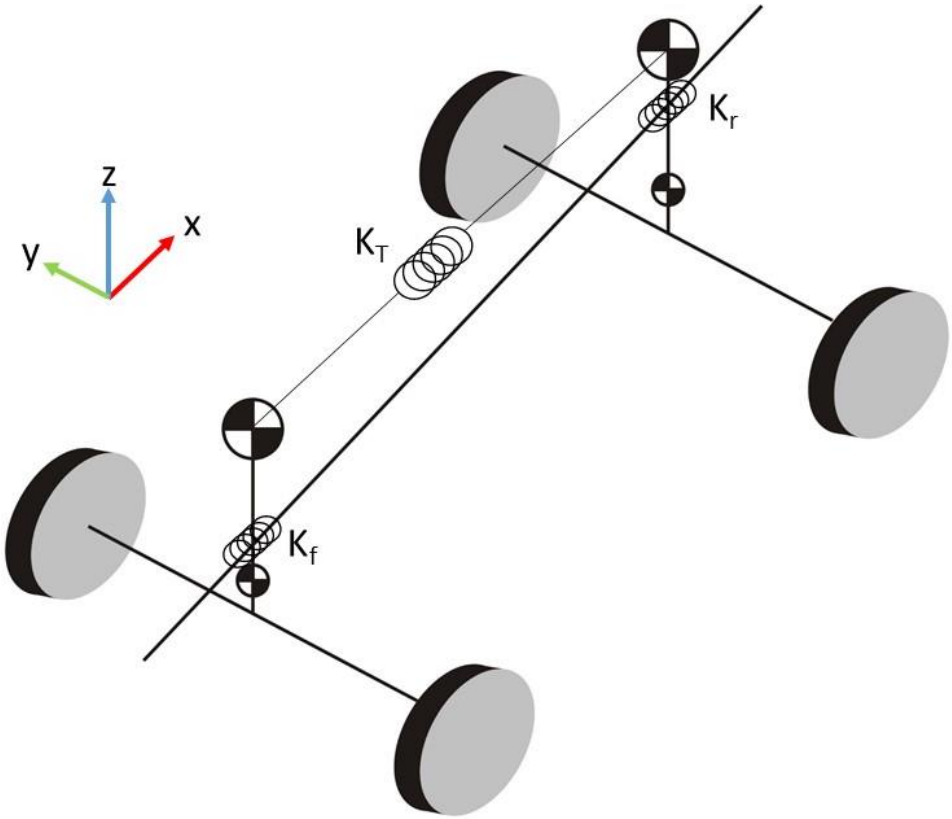


Figura 24. Modelo analítico da dinâmica lateral - rigidez

Onde:

- M_f e M_r - massas suspensas dianteira e traseiras, conectadas por uma rigidez estrutural K_T calculada no item 8.4.1.
- m_f e m_r - massas não suspensas dianteira e traseiras que, somadas às suspensas, equivalem a massa total no eixo do veículo (Tabela 3 seção 8.1)
- K_T rigidez estrutural torcional equivalente.
- K_f e K_r - rigidez de rolagem da suspensão dianteira e traseira respectivamente calculadas independentemente como na seção 8.4.2
- hs_f e hs_r - altura do CG das massas suspensas dianteira e traseira respectivamente
- hu_f e hu_r - altura do CG das massas não suspensas dianteira e traseira, respectivamente
- z_f e z_r - altura do centro de rolagem dianteiro e traseiro
- t_f e t_r - bitola dianteira e bitola traseira
- L - distância entre eixos

9.2. Equacionamento

A partir do diagrama de corpo livre da massa suspensa (Figura 25) sujeita à rigidez de rolagem e rigidez torcional da estrutura temos:

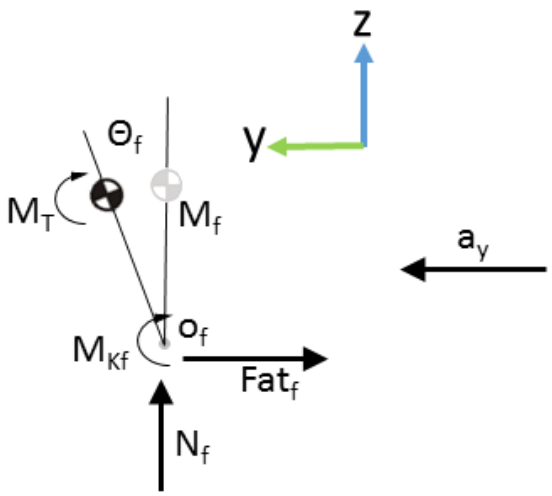


Figura 25. Diagrama de corpo livre da massa suspensa dianteira

Somatório das forças na direção Z.

$$\sum F_z = 0$$
$$N_f - (M_f + m_f).g = 0 \tag{11.1}$$

onde N_f é a reação normal total dianteira no contato pneu/solo, a_y a aceleração lateral e g a aceleração da gravidade:

Somatório das forças na direção Y.

$$\sum F_y = 0$$
$$(M_f + m_f).a_y - Fat_f = 0 \tag{11.2}$$

onde Fat_f é a força lateral total dianteira no contato pneu/solo:

Somatório dos momentos no polo O_f.

$$\sum M_{o_f} = 0$$
$$M_{K_f} + M_{K_T} - M_f.a_y.d_{sf} = 0 \tag{11.3}$$

onde O_f é o centro de rolagem da suspensão dianteira e

$$d_{sf} = h_{sf} - z_f$$
$$M_{K_f} = \Theta_f.K_f$$
$$M_{K_T} = (\Theta_f - \Theta_r).K_T$$

Para a massa não suspensa dianteira temos:

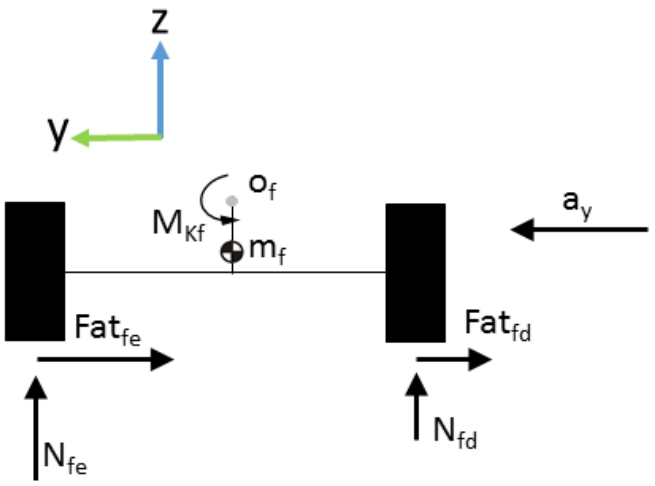


Figura 26. Diagrama de corpo livre da massa não suspensa dianteira

Somatório das forças na direção Z.

$$\sum F_z = 0$$
$$N_f = (M_f + m_f).g \tag{11.4}$$

Somatório das forças na direção Y.

$$\sum F_y = 0$$
$$Fat_f = (M_f + m_f).a_y \tag{11.5}$$

Somatório dos momentos no polo O_f.

$$\sum M_{o_f} = 0$$
$$(N_{fd} - N_{fe})\frac{t_f}{2} - (Fat_{fd} + Fat_{fe})z_f - M_{K_f} + m_f.d_{uf}.a_y = 0 \tag{11.6}$$

onde N_{fd} e N_{fe} são, respectivamente as reações normais do lado direito e esquerdo dianteiros do veículo, Fat_{fd} e Fat_{fe} são as forças laterais no contato pneu/solo direito e esquerdo dianteiros e:

$$d_{uf} = h_{uf} - z_f$$

Rearranjando a eq. 11.6 para obter a transferência de carga ΔN_f em função da aceleração:

$$\Delta N_f = \frac{2}{t_f}.a_y.\left[(M_f + m_f).z_f + \Theta_f.K_f - m_f.d_{uf}\right] \tag{11.7}$$

Procede-se de maneira similar na obtenção das equações da parte traseira do veículo. Do diagrama de corpo livre da massa suspensa traseira temos:

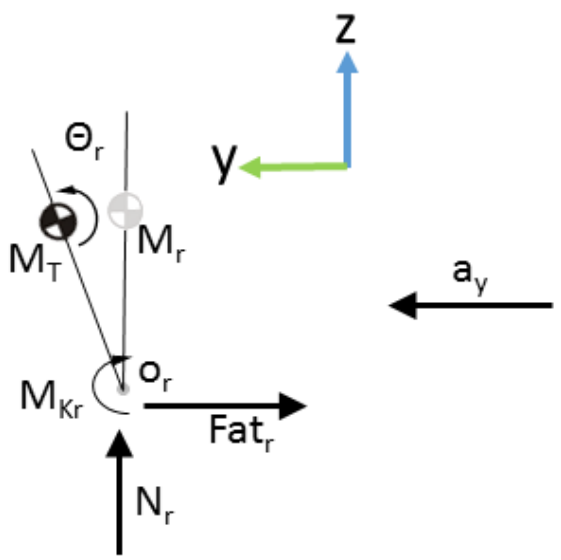


Figura 27. Diagrama de corpo livre da massa suspensa traseira

Somatório das forças na direção Z.

$$\sum F_z = 0$$
$$N_r - (M_r + m_r).g = 0 \tag{11.8}$$

onde N_r é a reação normal total traseira no contato pneu/solo, a_y a aceleração lateral e g a aceleração da gravidade:

Somatório das forças na direção Z.

$$\sum F_y = 0$$
$$(M_r + m_r).a_y - Fat_r = 0 \tag{11.9}$$

onde Fat_r é a força lateral total traseira no contato pneu/solo:

Somatório dos momentos no polo O_r.

$$\sum M_{o_r} = 0$$
$$M_{K_r} - M_{K_T} - M_r . a_y . d_{sr} = 0 \tag{11.10}$$

onde O_r é o centro de rolagem da suspensão dianteira e

$$d_{sr} = h_{sr} - z_r$$
$$M_{K_r} = \Theta_r . K_r$$
$$M_{K_T} = (\Theta_f - \Theta_r) . K_T$$

Para a massa não suspensa traseira temos:

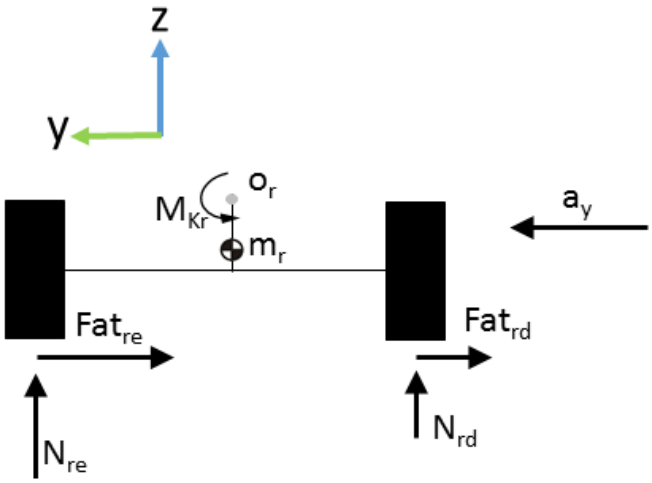


Figura 28. Diagrama de corpo livre da massa não suspensa traseira

Somatório das forças na direção Z.

$$\sum F_z = 0$$
$$N_r = (M_r + m_r) . g \tag{11.11}$$

Somatório das forças na direção Y.

$$\sum F_y = 0 \tag{11.12}$$

$$Fat_r = (M_r + m_r).a_y$$

Somatório dos momentos no polo O_r.

$$\sum M_{o_f} = 0$$

$$(N_{rd} - N_{re})\frac{t_r}{2} - (Fat_{rd} + Fat_{re})z_r - M_{K_r} + m_r.d_{ur}.a_y = 0 \tag{11.13}$$

onde N_{rd} e N_{re} são, respectivamente as reações normais do lado direito e esquerdo traseiros do veículo, Fat_{rd} e Fat_{re} são as forças laterais no contato pneu/solo direito e esquerdo traseiros e:

$$d_{ur} = h_{ur} - z_r$$

Rearranjando a eq. 11.13 para obter a transferência de carga ΔN_r em função da aceleração:

$$\Delta N_r = \frac{2}{t_r}.a_y.[(M_r + m_r).z_r + \Theta_r.K_r - m_r.d_{ur}] \tag{11.14}$$

Ainda precisa-se determinar as variáveis Θ_f e Θ_r.

Somando-se as equações 11.3 e 11.10 e lembrando que $M_{K_r} = \Theta_r.K_r$ e $M_{K_f} = \Theta_f.K_f$ obtém-se:

$$\left(M_{K_T} - M_{K_T}\right) + \Theta_f.K_f + \Theta_r.K_r - M_f.a_y.d_{sf} - M_r.a_y.d_{sr} = 0$$

Simplificando:

$$\Theta_f = \frac{M_f.a_y.d_{sf}}{K_f} + \frac{M_r.a_y.d_{sr}}{K_f} - \frac{\Theta_r.K_r}{K_f} \tag{11.15}$$

Rearranjando a eq. 11.10:

$$\Theta_r = \frac{M_r.a_y.d_{sr} + \Theta_f.K_T}{(K_r + K_T)} \tag{11.16}$$

Substituindo a eq. 11.15 em 11.16:

$$\Theta_r = \frac{M_r.a_y.d_{sr}}{(K_r + K_T)} + \frac{K_T}{(K_r + K_T)}.\left[\frac{M_f.a_y.d_{sf}}{K_f} + \frac{M_r.a_y.d_{sr}}{K_f} - \frac{\Theta_r.K_r}{K_f}\right] \quad (11.17)$$

A manipulação algébrica não será descrita aqui devido à sua extensão. O resultado obtido para Θ_r e Θ_f fica:

$$\Theta_r = M_f.a_y.d_{sf}.\frac{\frac{K_T}{(K_r + K_T)}}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.a_y.d_{sr}.\frac{1}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} \quad (11.18)$$

$$\Theta_f = M_f.a_y.d_{sf}.\frac{1}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.a_y.d_{sr}.\frac{\frac{K_T}{(K_f + K_T)}}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} \quad (11.19)$$

Substituindo as eq. 11.18 e 11.19 nas eq. 11.7 e 11.14 obtemos as equações que descrevem a transferência de carga lateral do veículo sujeito à uma aceleração lateral:

$$\Delta N_f = \frac{2}{t_f}.a_y.\left[\left(M_f + m_f\right).z_f + M_f.d_{sf}.\frac{K_f}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.d_{sr}.\frac{\frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} - m_f.d_{ur}\right] \quad (11.20)$$

$$\Delta N_r = \frac{2}{t_r}.a_y.\left[(M_r + m_r).z_r + M_f.d_{sf}.\frac{\frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.d_{sr}.\frac{K_r}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} - m_r.d_{ur}\right] \quad (11.21)$$

As equações anteriores nos mostram de qual maneira a rigidez torcional do veículo, a massa e os valores de rigidez de rolagem influenciam na transferência de carga lateral. Tomando por exemplo a eq. 11.20, vemos que a transferência dianteira é diretamente proporcional à massa e a rigidez de rolagem neste eixo dado pelo numerador do termo $M_f.d_{sf}.\frac{K_f}{K_f+\frac{K_r.K_T}{K_r+K_T}}$, enquanto a influência da massa traseira na transferência dianteira é inversamente proporcional a rigidez torcional traseira (K_r), dependente da rigidez equivalente entre a rigidez de rolagem dianteira K_f e a rigidez torcional K_T dado pelo numerador do termo $M_r.d_{sr}.\frac{\frac{K_f.K_T}{K_f+K_T}}{K_r+\frac{K_f.K_T}{K_f+K_T}}$.

O denominar desses dois termos tem a função de ponderar a distribuição de carga em função da distribuição da rigidez de rolagem total do veículo. Se imaginarmos uma rigidez torcional infinita, o termo $M_f.d_{sf}.\frac{K_f}{K_f+\frac{K_r.K_T}{K_r+K_T}}$ torna-se $M_f.d_{sf}.\frac{K_f}{K_f+K_r}$ e o termo $M_r.d_{sr}.\frac{\frac{K_f.K_T}{K_f+K_T}}{K_r+\frac{K_f.K_T}{K_f+K_T}}$ torna-se $M_r.d_{sr}.\frac{K_f}{K_r+K_f}$, esses termos indicam que a transferência de carga dianteira seria função da massa total do veículo multiplicada pela parcela de rigidez de rolagem dianteira. Para a traseira a dedução é análoga.

Quando considera-se a rigidez torcional da estrutura, ainda olhando para a transferência de carga na dianteira, a fração de transferência de carga gerada pela traseira e transmitida à dianteira, encontra no caminho a rigidez torcional da estrutura. Consequentemente, a rigidez torcional da estrutura pode ser vista como uma rigidez em série com a rigidez de rolagem do eixo (SAMPO, SORNIOTTI e CROCOMBE, 2010).

10. Estudo da sensibilidade das características do veículo à rigidez estrutural.

Até agora foi tratado apenas das variações na transferência de carga lateral do veículo em função da sua rigidez estrutural. Seguindo com o objetivo deste trabalho de discutir a influência da rigidez estrutural no comportamento dinâmico do veículo, esse capítulo busca capturar, a partir de um estudo de sensibilidade, comportamentos que variem significativamente em função da flexibilidade do chassi.

No caso da transferência de carga lateral, consideramos a rigidez torcional da estrutura como a contribuidora fundamental nas variações. Para outras características, como não sabe-se a priori quais modos de deformação da estrutura terão maior relevância, nem como responderão às entradas impostas, voltaremos a considerar o modelo completo de veículo. As análises serão feitas utilizando o MotionView® como pré processador, para a resolução do sistema o MotionSolve® e como ferramenta auxiliar para a montagem dos experimentos o HyperStudy®.

10.1. Engenharia robusta

O método de engenharia robusta (desenvolvido pelo prof. Genichi Taguchi) foi inicialmente desenvolvido para garantir que produtos ou processos estivessem menos sujeitos a fatores de difícil controle (MYERS, MONTGOMERY e ANDERSON-COOK, 2009). Esse método pode ser adaptado ao problema aqui analisado porque o conceito de robustez, implica na avaliação do grau de influência de cada parâmetro nos resultados e como estes são afetados pelos ruídos (relação sinal/ruído).

Para isso, são definidos os parâmetros de controle, que são as variáveis das quais deseja-se obter a influência nas respostas e os parâmetros de ruído (em geral, variáveis que não se tem controle) para observar a dependência do sistema a fatores externos.

É importante notar que, no método de engenharia robusta, a avaliação dos parâmetros é discreta, ou seja, o sistema é avaliado numa condição específica para os parâmetros de ruído e de controle. Para valores intermediários, superiores ou inferiores, outros métodos devem ser aplicados. Além disso, este método baseia-se

no fato de que as variáveis não são interdependentes, i.e. a variação de um parâmetro não deve interferir com as características do outro (VILELA, 2010).

Para a utilização da engenharia robusta aqui proposta, temos os seguintes passos:

- Definir os parâmetros de controle, seus extremos e o nível de discretização
- Definir os parâmetros de ruído, seus extremos e o nível de discretização
- Definir a matriz ortogonal de experimentos mais adequada ao problema
- Definir as repostas do veículo que serão observadas ou medidas
- Analisar a relação sinal/ruído que colocará de maneira objetiva a sensibilidade do sistema à influência externa (neste caso, o ruído será a rigidez estrutural – seção 10.2)
- Tentar identificar ao fim do experimento, algum resultado que caracterize um comportamento típico do veículo.

10.2. Definição dos parâmetros

A escolha dos parâmetros de controle e ruído adequados é fundamental para a correta interpretação dos resultados a serem obtidos. Um fator bastante importante na determinação dos parâmetros é o tamanho do problema. Como o método de engenharia robusta está baseado em experimentos e esses experimentos nada mais são que a combinação de todos os parâmetros e observação dos resultados para cada combinação, caso escolhêssemos, por exemplo, 10 variáveis de controle com 3 níveis e 1 fator de ruído com 2 níveis, necessitaríamos de $(3^{10})\mathrm{x}(1\mathrm{x}2) = 118098$ experimentos, onde (3^{10}) seria a combinação de todos os parâmetros (número de arranjos) e $(1x2)$ a avaliação de todos os arranjos nos dois níveis de ruído. Supondo que a simulação de cada experimento leve apenas 1 minuto para concluir, o tempo total necessário seria de 1970 horas (82 dias), o que tornaria o estudo inviável.

PARÂMETROS DE CONTROLE

Para o problema que se deseja estudar, os parâmetros de controle (ou variáveis de controle) escolhidos foram:

- Acelerações externas nas três direções
- Deslocamentos verticais impostos nas quatro rodas

Nos experimentos, as variáveis são impostas ao veículo a partir do repouso.

É evidente que, numa situação real, o veículo está sujeito a outras forças externas como deslocamentos longitudinais, laterais, forças do motor, torques etc. No entanto, também com o intuito de não inviabilizar o estudo com aumento no número de variáveis, considera-se que as reações longitudinais e laterais no contato pneu/solo são dependentes das acelerações impostas, portanto, avaliar essas forças implicaria em redundância. Dessa maneira, as variáveis de controle escolhidas devem ser suficientes para a obtenção de resultados satisfatórios que caracterizem condições reais a que o veículo possa estar sujeito.

A Tabela 4 resume os níveis e extremos de cada variável de controle

Tabela 4. Parâmetros de controle

VARIÁVEL	UNIDADE	N° DE NÍVEIS	EXTREMOS
Aceleração x	mm/s^2	3	-4000 a 4000
Aceleração y	mm/s^2	3	-1500 a 1500
Aceleração z	mm/s^2	3	-4000 a 4000
Deslocamento roda dianteira direita	mm	3	-90 a 90
Deslocamento roda dianteira esquerda	mm	3	-90 a 90
Deslocamento roda traseira direita	mm	3	-90 a 90
Deslocamento roda traseira esquerda	mm	3	-90 a 90

Basicamente três critérios foram estabelecidos para a determinação dos níveis de cada parâmetro. Primeiramente os extremos foram determinados baseados em valores típicos encontrados nos veículos, na sequência o número de níveis foi escolhido em função da matriz de experimentos a ser utilizada (mais detalhes adiante) e por fim, a estabilidade numérica da simulação. A Figura 29 apresenta o modelo de veículo com os corpos flexíveis utilizado na análise robusta para a determinação da influência da rigidez estrutural no comportamento dinâmico do veículo. Para o veículo com corpos rígidos o modelo é análogo.

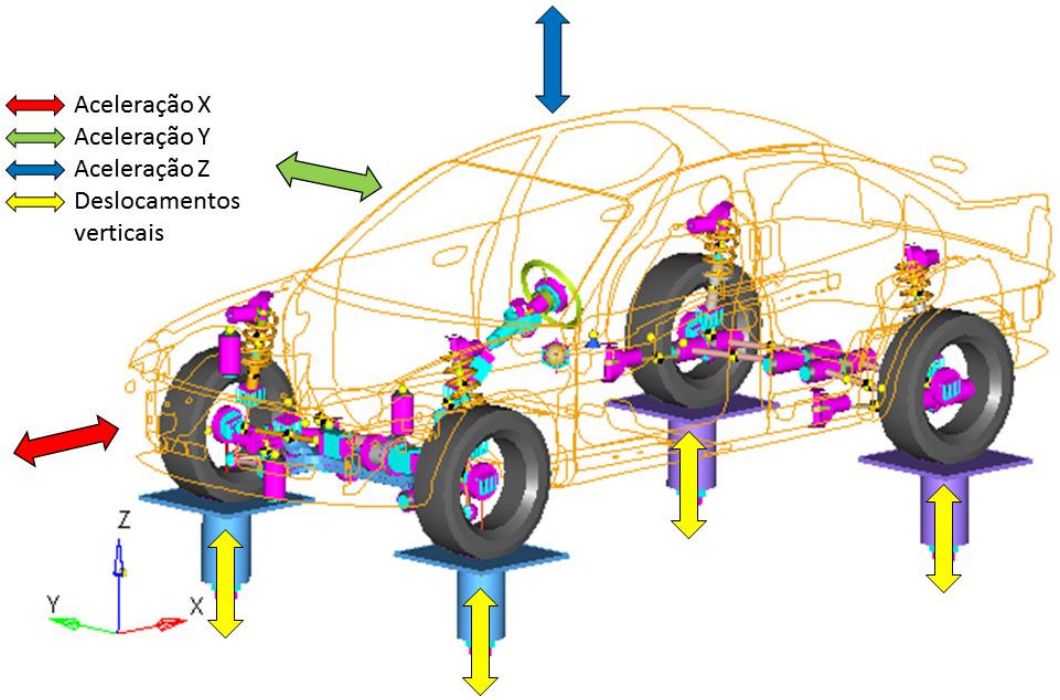


Figura 29. Modelo de veículo flexível para análise robusta

PARÂMETROS DE RUÍDO

Por estarmos avaliando como o sistema (veículo) é sensível à flexibilidade estrutural, tomaremos como parâmetro de ruído a rigidez estrutural e avaliaremos duas condições para todos os arranjos: Veículo com corpos rígidos e o veículo com sub-chassi e carroceria flexíveis.

10.3. Matriz de experimentos

Uma matriz de experimentos consiste de um número determinado de arranjos (neste caso cada experimento representa uma simulação) onde se variam os valores dos parâmetros que se deseja estudar de um experimento para outro.

As matrizes que permitem uma avaliação eficiente dos efeitos são denominadas matrizes ortogonais. A ortogonalidade neste caso deve ser interpretada num sentido combinatório, ou seja, para qualquer par de colunas, todas as combinações de níveis de parâmetros ocorrem e estas ocorrem a mesma quantidade de vezes. Essas matrizes não são fatoriais, já que os experimentos fatoriais são aqueles que analisam os resultados de todas as combinações possíveis de parâmetros (VILELA, 2010).

Portanto, no caso deste estudo, com sete variáveis a três níveis cada, a matriz de experimentos mínima que satisfaz a condição combinatória na qual para qualquer par de colunas todos os níveis combinam-se dois a dois igual quantidade de vezes, é a matriz ortogonal de 18 experimentos. Além disso, será analisado um parâmetro de ruído, ou seja, para cada um dos 18 arranjos (cada arranjo correspondendo a uma linha da matriz), duas análises serão feitas, uma para o veículo com corpos rígidos e outra flexíveis, portanto, o total de simulações será 36. A Tabela 5 apresenta a matriz ortogonal utilizada na qual pode-se constatar a condição combinatória dos níveis dois a dois para qualquer par de colunas. Cada um dos 18 experimentos será avaliado em duas condições distintas (rígido e flexível) de maneira a preencher as colunas.

Tabela 5. Matriz de experimentos

								Resposta	
Experimento	**Acc X**	**Acc Y**	**Acc z**	**Trans. DD**	**Trans. DE**	**Trans. TD**	**Trans. TE**	**Rígido**	**Flexível**
1	-4000	-1500	-4000	-90	-90	-90	-90		
2	0	-1500	0	0	0	0	0		
3	4000	-1500	4000	90	90	90	90		
4	-4000	0	0	90	90	0	-90		
5	0	0	4000	-90	-90	90	0		
6	4000	0	-4000	0	0	-90	90		
7	-4000	1500	-4000	90	0	90	0		
8	0	1500	0	-90	90	-90	90		
9	4000	1500	4000	0	-90	0	-90		
10	-4000	-1500	4000	-90	0	0	90		
11	0	-1500	-4000	0	90	90	-90		
12	4000	-1500	0	90	-90	-90	0		
13	-4000	0	4000	0	90	-90	0		
14	0	0	-4000	90	-90	0	90		
15	4000	0	0	-90	0	90	-90		
16	-4000	1500	0	0	-90	90	90		
17	0	1500	4000	90	0	-90	-90		
18	4000	1500	-4000	-90	90	0	0		

Onde:

Acc X, Acc Y e Acc Z, são as acelerações nas três direções

Trans. DD é a translação da roda dianteira direita,

Trans. DE é a translação da roda dianteira esquerda

Trans. TD é a translação da roda traseira direita

Trans. TE é a translação da roda traseira esquerda

10.1. Sinal e Resposta

O evento proposto para avaliação dos parâmetros de controle e de ruído terá duração de cinco segundos. Então, para cada experimento (linha da matriz), os sinais serão aplicados da seguinte maneira: As acelerações atuarão continuamente a partir do instante inicial e os deslocamentos serão impostos por uma função de subida a partir do instante inicial (0 segundos) até 0,2 segundos. O diagrama da Figura 30 ilustra o arranjo utilizado. Em cada um dos experimentos os parâmetros são multiplicados por suas respectivas funções, que por sua vez são impostas ao modelo que fornecerá as respostas para os dois ruídos considerados.

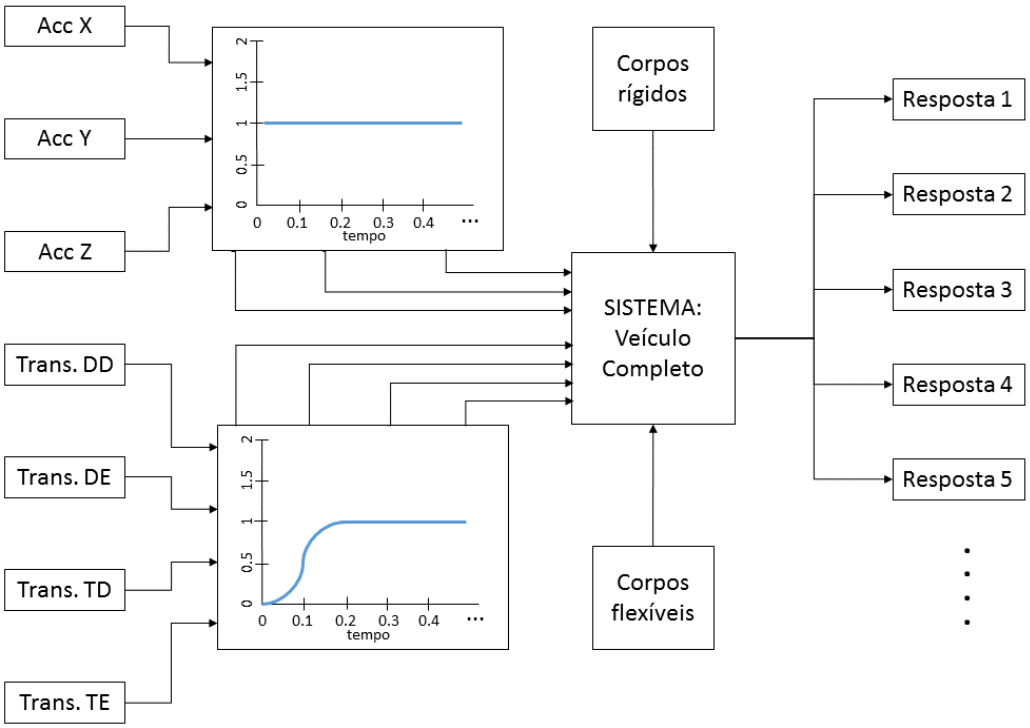


Figura 30. Diagrama da análise proposta de engenharia robusta

As respostas de cada uma das simulações fornecerão tanto respostas transientes (do instante inicial até a estabilização) quanto respostas em estado estacionário (instante seguinte à estabilização até o fim dos cinco segundos).

Da porção estacionária, considerada a partir de 1,2 segundos na simulação, serão extraídas as repostas relativas a deslocamentos medidos no baricentro do veículo solidário à carroceria:

- Rolagem
- Arfagem
- Guinada
- Deslocamento longitudinal (direção X)
- Deslocamento transversal (direção Y)
- Deslocamento vertical (direção Z)

Da faixa transiente da simulação serão extraídas as repostas relativas às forças (neste caso utilizaremos o Impulso na estrutura calculado integrando-se a força de 0 a 1,2 segundos):

- Impulso na estrutura no ponto de fixação superior da suspensão dianteira direita
- Impulso na estrutura no ponto de fixação superior da suspensão dianteira esquerda
- Impulso na estrutura no ponto de fixação superior da suspensão traseira direita
- Impulso na estrutura no ponto de fixação superior da suspensão traseira esquerda

As respostas serão analisadas de maneira conjunta, ou seja, razão sinal-ruído será avaliada em duas situações. Para os deslocamentos e rotações (faixa estática) será obtido um único valor ponderado e para os impulsos (transiente) outro. No entanto, pelo fato de estarmos trabalhando com grandezas distintas, por exemplo deslocamento (mm) e rotação (graus), numa resposta combinada, o resultado poderia ser distorcido em função das ordens de grandeza diferentes de cada número. Por isso, um passo adicional de normalização é necessário. Neste caso, o maior resultado obtido para cada resposta (tanto rígido quanto flexível) será atribuído valor 1 e o menor 0. Dessa maneira teremos todas as respostas variando de 0 a 1.

10.2. Consideração dos parâmetros de ruído

A metodologia de Taguchi sugere que é possível avaliar estatisticamente cada reposta com seus respectivos ruídos através da média e da variância. Essa síntese

estatística é denominada razão sinal-ruído (SNR – *Signal to Noise Ratio*). (MYERS, MONTGOMERY e ANDERSON-COOK, 2009)

Existem diversas formas de se avaliar o SNR no caso de uma otimização baseada em engenharia robusta e a escolha depende da função objetivo. Entre elas temos três fundamentais:

Quanto menor melhor – No caso de os experimentos buscarem minimizar a função objetivo

Quanto maior melhor – No caso de os experimentos buscarem maximizar a função objetivo

Valor nominal – Neste caso, os experimentos buscam um valor específico para a função objetivo

Para adaptar o problema de otimização ao problema aqui proposto vamos utilizar SNR para um **valor nominal**. Neste caso, busca-se um valor para a função objetivo que não tenha desvios em nenhuma direção, ou seja, busca-se um arranjo específico no qual não haja influência dos ruídos. O que vamos buscar no entanto é o oposto, queremos saber exatamente as respostas do veículo que mais sofram desvios devido ao ruído (variação na rigidez estrutural) e possivelmente assim determinar algum comportamento característico do veículo no qual seja significativa a consideração de flexibilidade estrutural.

A função SNR considerada por Taguchi é dada por:

$$SNR = -10 \log s^2 \tag{12.1}$$

onde $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y)^2}{(n-1)}$ e y_i é a resposta para cada um dos ruídos, y é a média das repostas dos ruídos e n é o número total de ruídos.

No entanto, como queremos justamente avaliar o oposto, ou seja, queremos saber quais parâmetros de controle provocam maior variação nas respostas em função do ruído, consideraremos a seguinte função SNR:

$$SNR = -10/\log s^2 \tag{12.2}$$

Essa eq. 12.2 tem a característica de penalizar as menores variâncias e favorecer as outras. Ou seja, quanto maior a variância entre as respostas de modelo rígido e modelo flexível, maior peso será dado. Neste estudo, serão observadas

variâncias da ordem de 10^{-8} a 10^{-3}, A Figura 31 apresenta o gráfico com a ponderação proposta.

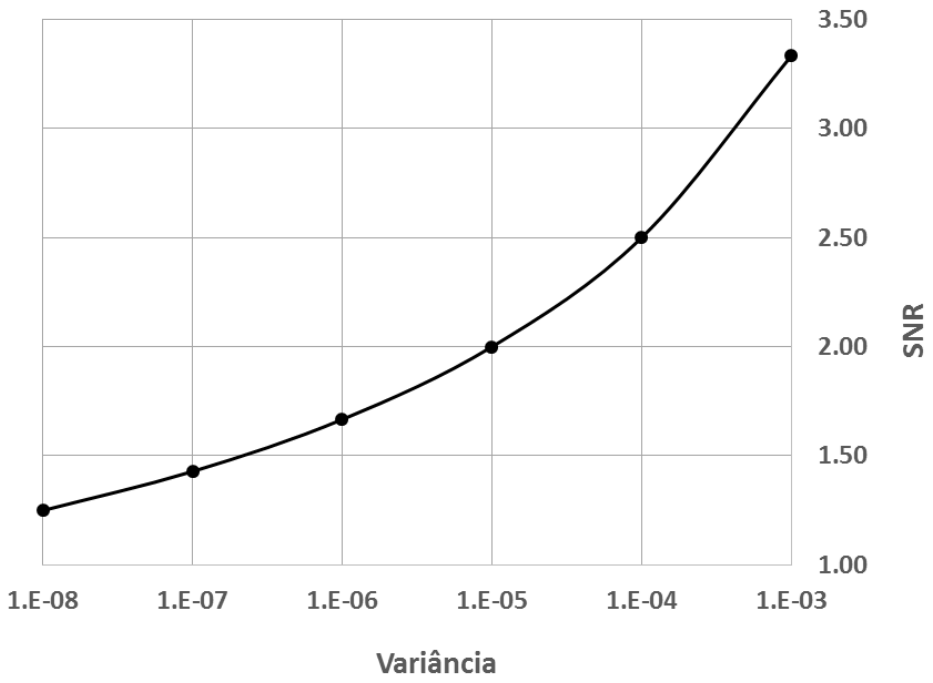


Figura 31. Ponderação das variâncias

Finalmente, temos que o efeito de cada nível dos parâmetros de controle é definido como sendo a variação que o mesmo causa em torno da média geral dos experimentos onde o nível está presente, por exemplo, na matriz de experimentos definida na Tabela 5, para avaliar o efeito do nível 1 da aceleração em Y $\left(-1500\frac{mm}{s^2}\right)$ para uma reposta qualquer temos:

$$v_{p2,1} = \frac{1}{6}(v_1 + v_2 + v_3 + v_{10} + v_{11} + v_{12}) \qquad (12.3)$$

Onde, $v_{p2,1}$ é o efeito do nível 1 referente ao parâmetro 2 e $v_1, v_2, v_3, v_{10}, v_{11}\ e\ v_{12}$ são os experimentos onde o nível se encontra.

11. Simulação Resultados e Análise

11.1. Modelo de veículo completo

Nesta seção, serão apresentados os resultados e as análises pertinentes ao modelo de carro completo.

11.1.1. Corpos flexíveis

As análises comparativas de transferência de carga lateral foram feitas para dois tipos de modelos de carro completo (um com todos os corpos rígidos e outro com a carroceria e o sub-chassi flexíveis) elaborados em ambiente multicorpos com o auxílio do *software* MotionView® e solução numérica pelo MotionSolve®. Os detalhes do modelo (dimensões, valores de rigidez, massas e inércias encontram-se no APENDICE 1.

O modelo de elementos finitos da carroceria utilizado para a redução e geração do corpo flexível possuía, inicialmente, aproximadamente 790.000 graus de liberdade, sendo cada nó com graus de liberdade nas três direções de deslocamento. Este modelo, após a aplicação do método de Craig-Bampton (funcionalidade disponível no *software* utilizado) com frequências até 100Hz, ficou reduzido a 408 graus de liberdade, sendo 6 modos de corpo rígido, 288 modos das frequências até 100Hz e 114 dos 19 nós de interface (ou graus retidos).

Outros dois modelos flexíveis foram gerados com valores de rigidez distintos. No caso de uma estrutura mais rígida, considerou-se um módulo de elasticidade do aço de 420GPa em comparação à referência de 210GPa. Da mesma maneira, um modelo com módulo de elasticidade de 105GPa foi reduzido. No caso do modelo de 420GPa, estão presentes também 114 modos dos 19 graus de liberdade retidos, porém, apenas 192 modos naturais até 100 Hz. Para o modelo com 105GPa, estão presentes 417 modos naturais até 100Hz. Essas variações na rigidez estrutural permitem uma análise comparativa da distribuição de carga lateral.

Para o sub-chassi, inicialmente com aproximadamente 30.000 graus de liberdade, foi reduzido a 60, sendo 6 modos de corpo rígido e os outros 54 modos dos nós de interface. Dada a rigidez elevada, não há modos naturais até 100Hz.

11.1.2. Rigidez torcional

A Tabela 6 a seguir apresenta os resultados da rigidez torcional calculada pela eq. 10.2 para os modelos da carroceria com os três diferentes módulos de elasticidade. É importante notar que, ainda que os modelos de elementos finitos aqui tratados sejam lineares, ou seja, as deformações na estrutura obedeçam a lei de Hooke, apenas variou-se o módulo de elasticidade da carroceria, enquanto o sub-chassi permaneceu inalterado. Por isso a relação entre os valores de rigidez torcional não é linear.

Tabela 6. Rigidez torcional calculada para as três carrocerias

	Módulo de elasticidade		
	105 GPa	210 GPa	420 Gpa
Reação no centro de roda [N]	4775	9399	18440
Rigidez torcional [Nm/°]	8792	17400	34137

11.1.3. Rigidez de rolagem

A rigidez de rolagem é uma característica da suspensão, portanto, para isolar o efeito da rigidez estrutural, ela foi obtida a partir do modelo de multicorpos rígido como comentado na seção 8.4.2. A Figura 32. Gráfico do binário aplicado à suspensão em função do ângulo de rolagem apresenta o gráfico do torque aplicado à suspensão em função do ângulo de rolagem dela. Portanto, temos a rigidez de rolagem dada pelo coeficiente linear da curva.

$$K_{sf} = 500 \frac{Nm}{\circ}$$

$$K_{sr} = 889 \frac{Nm}{\circ}$$

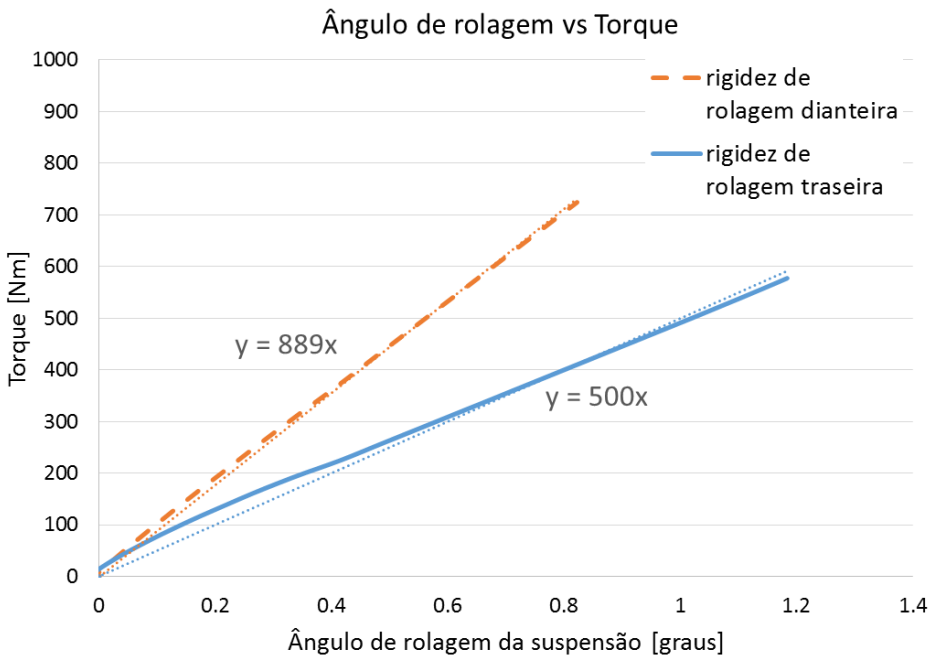


Figura 32. Gráfico do binário aplicado à suspensão em função do ângulo de rolagem

11.1.4. Centro de rolagem

Os centros de rolagem foram obtidos conforme apresentado na seção 11.1.4. com auxílio do *software* UGS NX7® para traçar as linhas auxiliares e determinar a altura do centro de rolagem (os pontos da suspensão utilizados para traçar as linhas são apresentados no APENDICE 1) resultando:

$$z_f = 189.2\ mm$$

$$z_r = 144.4\ mm$$

Esses valores foram calculados geometricamente e para uma condição estática. No entanto, o que dinamicamente define o centro de rolagem é o eixo sobre o qual uma força lateral aplicada não provoca rolagem. Essa posição dinâmica não tem exatamente o mesmo valor do centro de rolagem geométrico pelas características não rígidas dos sistemas do veículo (buchas e molas). Portanto, para obter a correlação desejada entre o modelo analítico e o modelo completo, o parâmetro de rigidez de rolagem deve ser ajustado como será descrito oportunamente.

11.2. Avaliação da dinâmica lateral

Neste trabalho, a avaliação da dinâmica lateral é feita a partir de uma manobra na qual o veículo mantém um raio constante de 30m com acréscimos suaves na velocidade longitudinal de maneira que as acelerações nessa direção sejam desprezíveis e haja apenas incremento gradual na aceleração lateral (Figura 33).

Como apresentado na seção 11.1.1, a carroceria flexível (com módulo de elasticidade 210GPa) do modelo multicorpos de veículo completo possui um total de 408 graus de liberdade. Esse acréscimo de graus de liberdade e consequente aumento significativo na complexidade do modelo exige que um passo adicional seja feito. Uma deformação estrutural pode ser representada como uma combinação ponderada de todos os seus modos, i.e. multiplicando-se cada modo de deformação por um fator adequado e somando-os é possível representar qualquer deformação que a estrutura possa sofrer, portanto, modos com maior influência terão multiplicadores maiores do que aqueles com menor participação para caracterizar a deformação. Pode-se avaliar quais desses modos efetivamente tem participação no sistema de modo a eliminar os modos não ativos. Para comparar os resultados vamos utilizar como resposta a transferência de carga lateral. A identificação dos modos será feita com o auxílio do HyperView®.

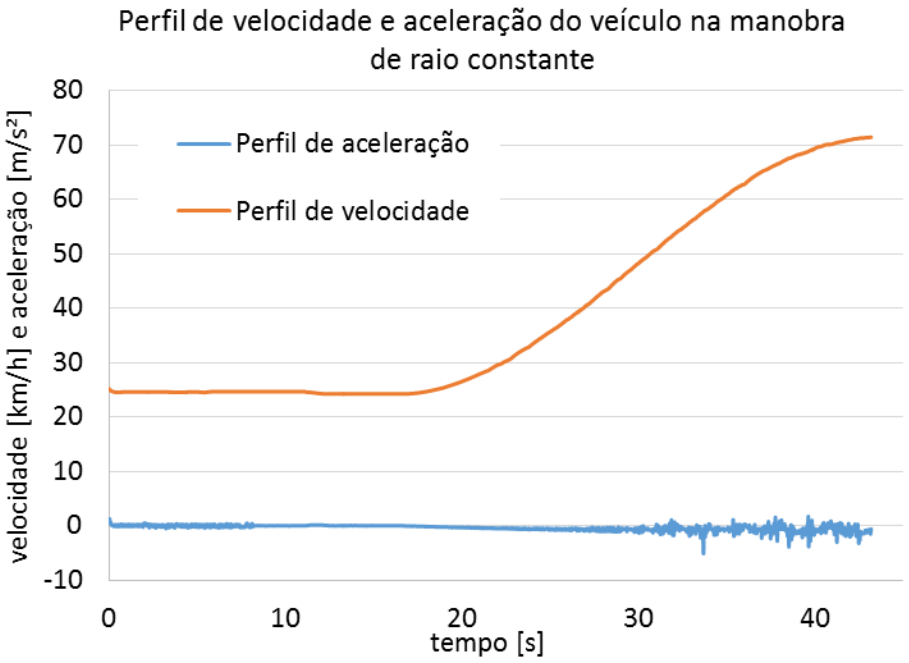


Figura 33. Perfis de velocidade e aceleração

A Figura 34. Transferência lateral modelo com todos os modos mostra a transferência de carga lateral em função do tempo para o modelo que considera todos os 408 modos de deformação da estrutura. O instante de início da transferência (~12s) corresponde ao instante em que o veículo inicia a trajetória curvilínea.

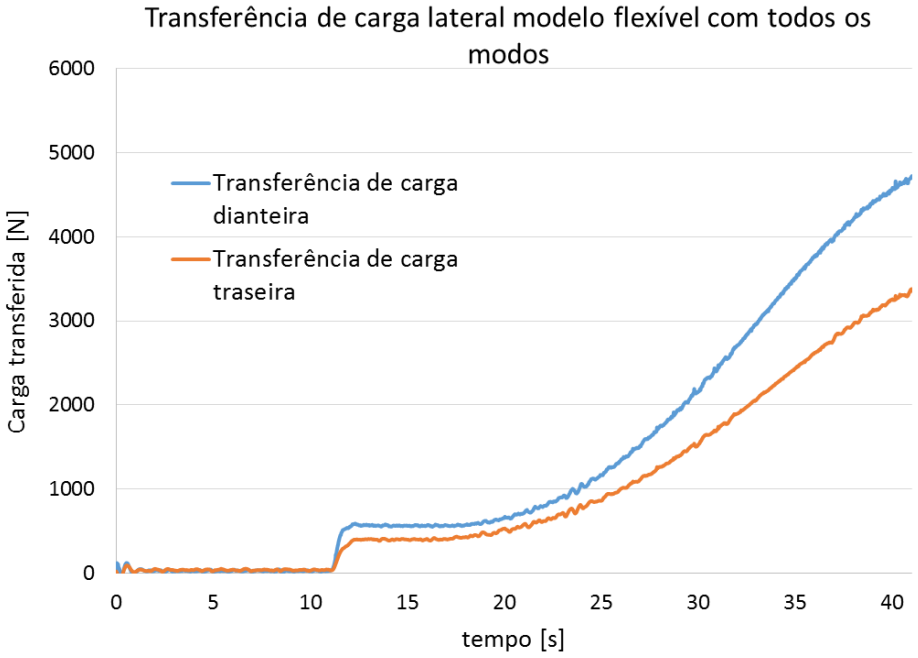


Figura 34. Transferência lateral modelo com todos os modos

Para essa manobra, temos a seguinte participação modal Figura 35:

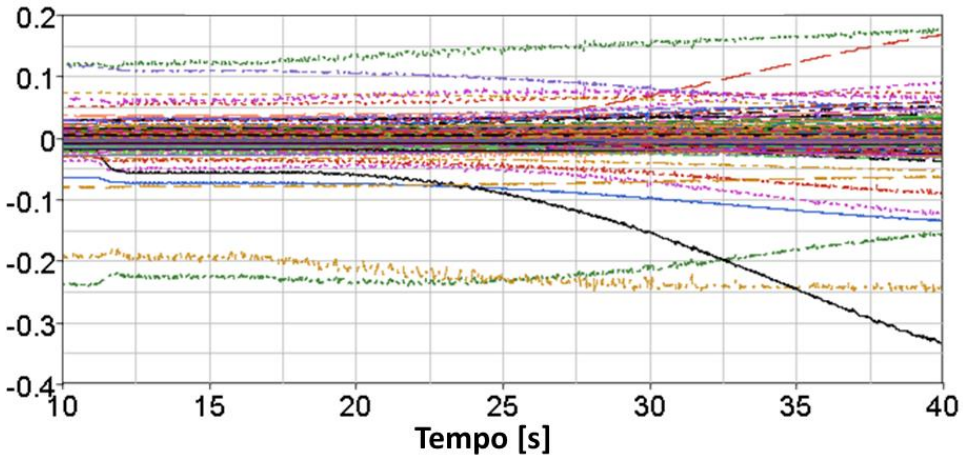


Figura 35. Participação modal da estrutura na manobra

Baseado na escala dos multiplicadores (-0,4 a 0,2) vamos, de maneira conservadora, considerar que os modos que tenham multiplicadores entre -0,01 e 0,01

sejam não participativos. Essa faixa representa aproximadamente 3% da amplitude total dos multiplicadores.

Dessa maneira é possível desconsiderar 275 modos de deformação da estrutura. Seria inviável apresentar aqui todos estes modos e não é relevante ao trabalho. Apenas como ilustração, a Figura 36, mostra um modo de deformação (modo torcional) participativo que está representado pela curva de cor preta na Figura 35.

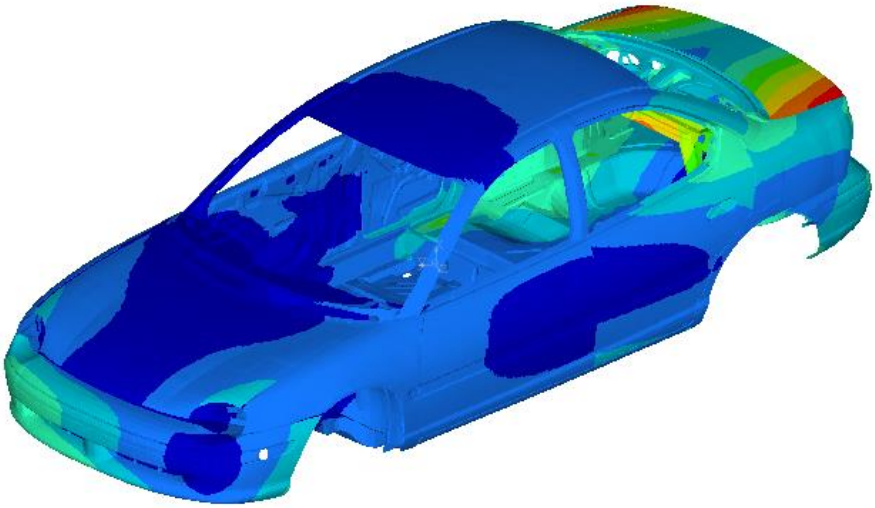


Figura 36. Modo de deformação torcional

Eliminando-se os modos desnecessários, ficamos com a seguinte resposta:

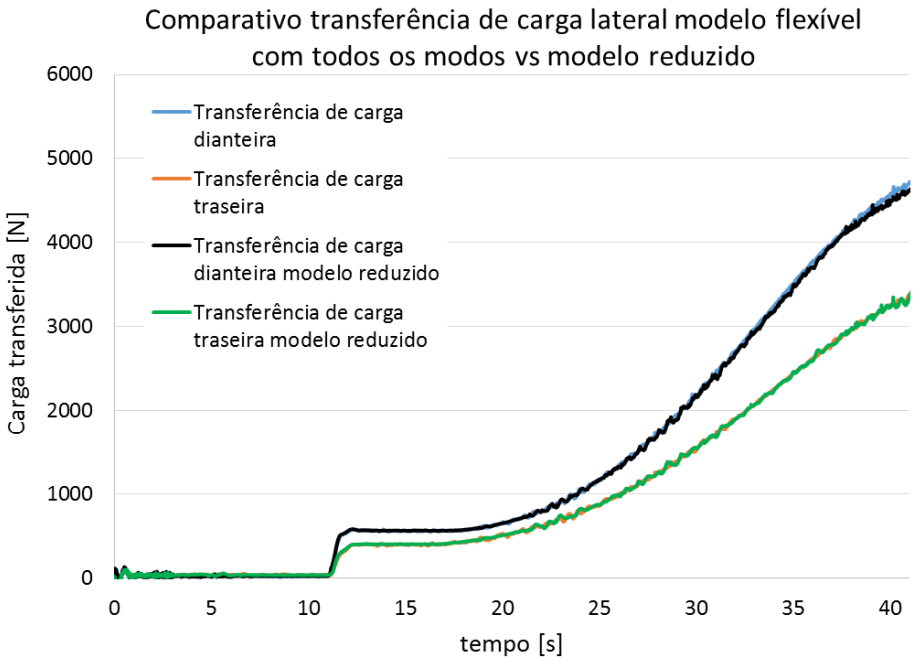


Figura 37. Comparativo das respostas com todos os modos e modelo reduzido

Como podemos observar na Figura 37, não há mudança significativa na transferência de carga lateral. Além disso, o tempo total para a solução numérica do primeiro caso foi de 1486 seg., enquanto para o modelo com menos modos foi de 691 seg. Uma redução de aproximadamente 50% no tempo de uso de máquina.

11.2.1. Transferência de carga lateral

Quando o veículo está sujeito à aceleração lateral (curva), há uma transferência de carga, em função da aceleração, da parte interna da curva para a externa. A diferença entre a reação normal no solo do pneu do lado externo a curva com a reação do pneu interno corresponde à transferência de carga lateral.

A primeira resposta a ser observada é a comparação entre a transferência de carga lateral em função da aceleração lateral para o modelo de corpo rígido e o modelo com estrutura flexível de referência, ou seja, o modelo que considera o módulo de elasticidade igual a 210GPa. A Figura 38 apresenta o gráfico dessa situação com a aceleração indo de 0,1g a aproximadamente 0,8g.

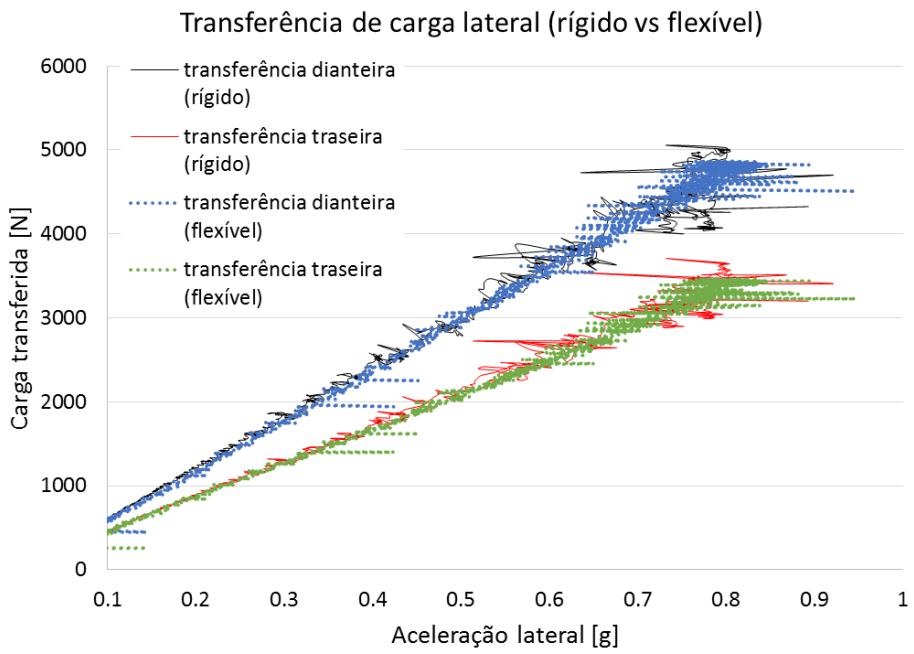


Figura 38. Transferência de carga lateral em função da aceleração

Deste gráfico podemos fazer as seguintes análises. A partir de aproximadamente 0,5g, o veículo passa a ter um comportamento irregular, ou seja, as acelerações mais elevadas provocam instabilidade no modelo devido a algumas características não lineares, como os pneus por exemplo, que começam a ter maior importância. Como estamos avaliando uma manobra que esperamos ser quase-estática, podemos avaliar que até 0,5g as curvas de transferências de cargas laterais para o modelo rígido e de estrutura flexível estão praticamente sobrepostas, ou seja, não há mudança em função da estrutura flexível do veículo. Sabendo que o comportamento da distribuição em função da aceleração lateral é linear (como mostrado no item 9.2), podemos determinar as seguintes curvas médias obtidas do gráfico da Figura 38.

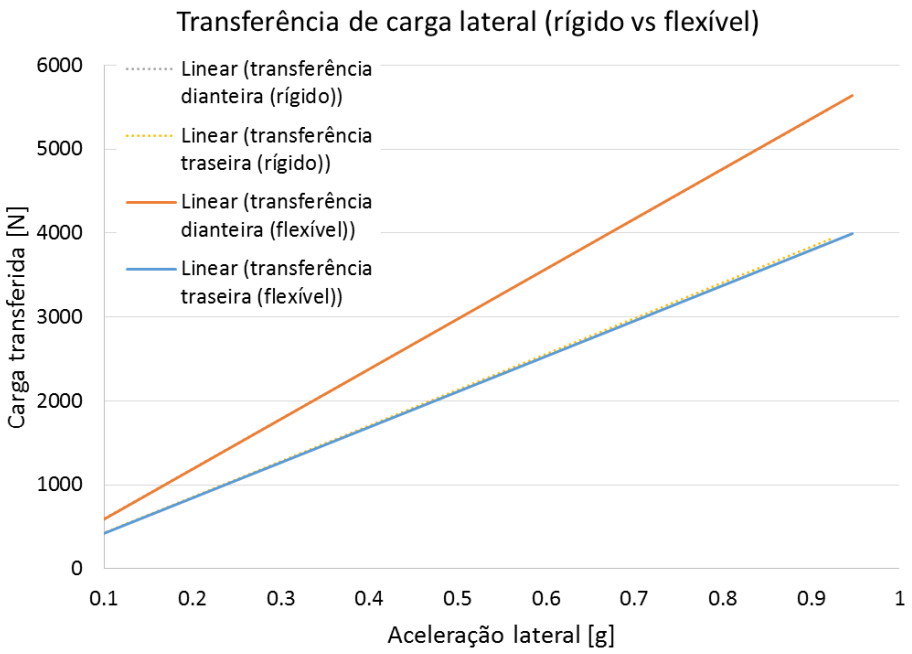


Figura 39. Curvas lineares interpoladas da Figura 38

Com as curvas interpoladas, fica mais evidente a não relevância da rigidez estrutural na transferência de carga lateral para uma estrutura de rigidez torcional intermediária. Para buscar alguma distinção, tentaremos avaliar a mesma métrica porém com o veículo utilizando a carroceria de mínima rigidez torcional (Módulo de elasticidade 105GPa na Tabela 6). Nesta condição, a comparação (com as curvas linearizadas) fica como na Figura 40.

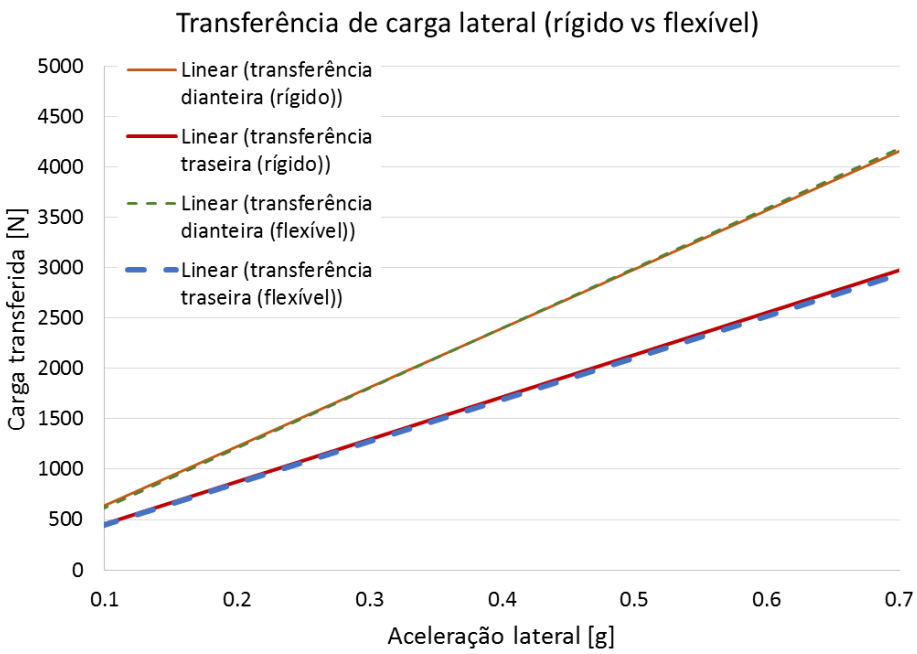


Figura 40. Comparativo da transferência de carga lateral em função da aceleração para a carroceria de menor rigidez

Neste caso, a razão maior entre os valores de rigidez da estrutura rígida (corpo infinitamente rígido) e a flexível (8792 $\frac{Nm}{°}$ de rigidez torcional), provocou uma suave mudança na transferência de carga lateral. O gráfico da Figura 41 mostra, em detalhe a transferência de carga entre 0,65g e 0,7g para facilitar a visualização da mudança.

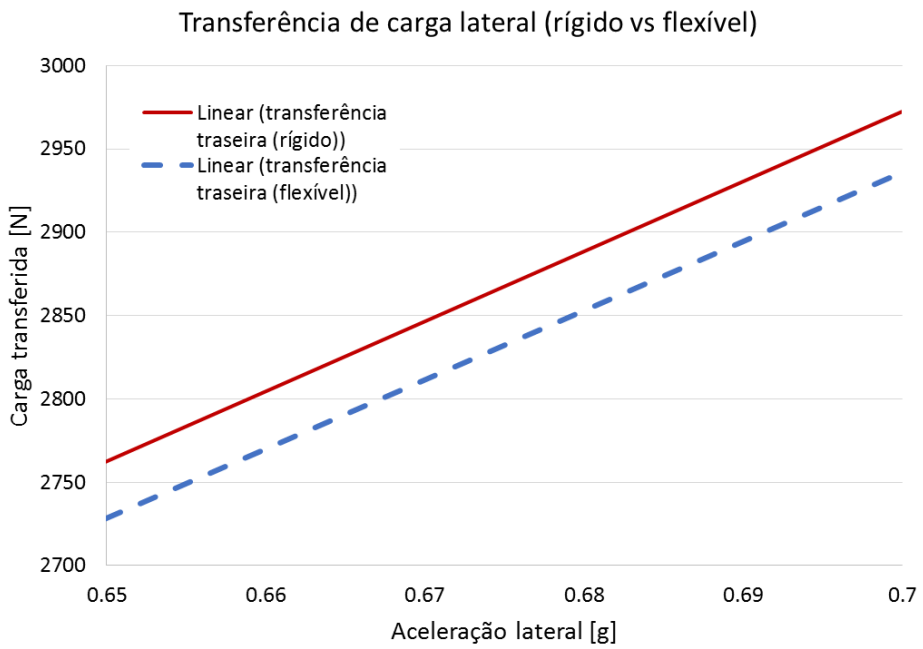


Figura 41. Detalhe da variação na transferência de carga lateral para modelo rígido e flexível com rigidez torcional de 8792 $\frac{Nm}{°}$

A avaliação da transferência de carga lateral para a carroceria mais rígida (rigidez torcional de 34137 $\frac{Nm}{°}$), baseado no resultado apresentado na Figura 39. Curvas lineares interpoladas da Figura 38, não apresentaria variação, portanto não necessita ser avaliada.

A seguir, com um modelo analítico de dinâmica lateral para avaliar a transferência de carga, serão apresentadas as relações de rigidez e distribuição de massa do veículo que o levam a apresentar variações na transferência de carga lateral. Além disso, o modelo analítico suprirá a dificuldade na solução numérica dos modelos completos com valores de rigidez estrutural muito baixas e o tempo de processamento necessário para cada simulação.

11.3. Modelo Analítico

A solução analítica está apresentada nas eqs. 11.20 e 11.21. A Tabela 7 apresenta o valor de todos os parâmetros do veículo necessários nas equações deixando-as em função da rigidez torcional e da aceleração.

Tabela 7. Parâmetros do veículo

massas não suspensas		
dianteira	76,1	kg
traseira	71,0	kg
massas suspensas		
dianteira	600,9	kg
traseira	448,1	kg
altura do CG das massas susp*		
dianteira	0,644	m
traseira	0,667	m
altura do CG das massas n susp		
dianteira	0,311	m
traseira	0,324	m
centro de rolagem *		
dianteira	0,151	m
traseira	0,173	m
centro de rolagem ao CG da massa suspensa		
dianteira	0,515	m
traseira	0,517	m
centro de rolagem ao CG da massa não suspensa		
dianteira	-0,159	m
traseira	-0,150	m
rigidez de rolagem da susp		
dianteira	889	N.m/°
traseira	500	N.m/°
Bitolas		
dianteira	1,456	m
traseira	1,444	m

Os valores de massa suspensa e massa não suspensa foram diretamente extraídos do modelo de multicorpos. Os dois itens marcados com `*´ são parâmetros que necessitaram ajuste para obter a correlação com o modelo completo adequada. No caso das alturas dos centros de massa, elas são conseguidas apenas na posição inicial do modelo, após o equilíbrio, não há informação para onde caminham. O ajuste feito (por tentativas) foi de 13% passando de 570mm para 644mm na dianteira e de 590mm para 667mm na traseira.

Para o centro de rolagem, conforme comentado no item 11.1.4, o cálculo geométrico pode não representar o valor dinamicamente correto do centro de rolagem. Neste caso, considerou-se uma variação de 20% em relação ao calculado

geometricamente e o modelo dinâmico completo. Portanto, a dianteira que havia sido calculado 189mm foi reduzido e passou a 151mm e a traseira, de 144mm foi elevado a 173mm.

11.3.1. Correlação

Tomando a carroceria do veículo com rigidez torcional de $17400\frac{Nm}{\circ}$ para a solução analítica, a correlação entre as curvas de transferência de carga lateral em função da aceleração do modelo completo e do analítico fica:

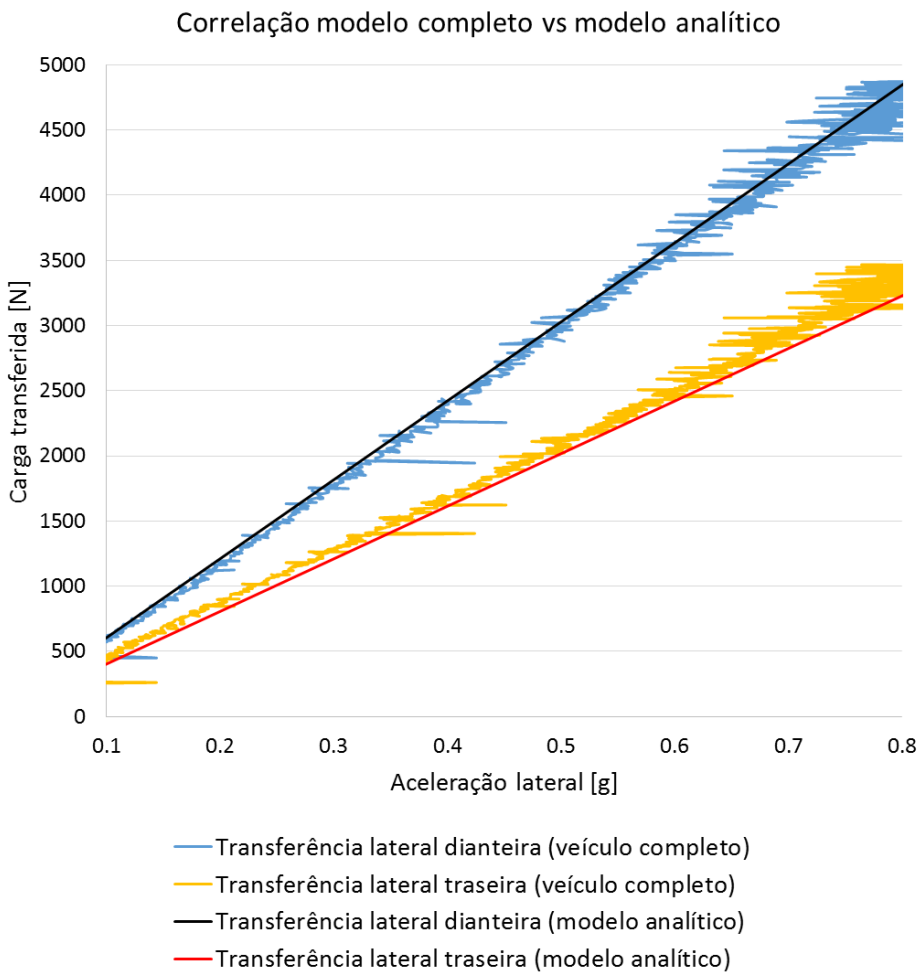


Figura 42. Correlação modelo analítico vs modelo completo

11.3.2. Avaliação dos parâmetros de transferência de carga lateral

A primeira e mais simples análise a ser feita é a avaliação de como varia a transferência de carga lateral do veículo estudado em função da variação na rigidez estrutural. As Figura 43 e Figura 44 mostram a variação observada com a diminuição na rigidez torcional da carroceria do veículo.

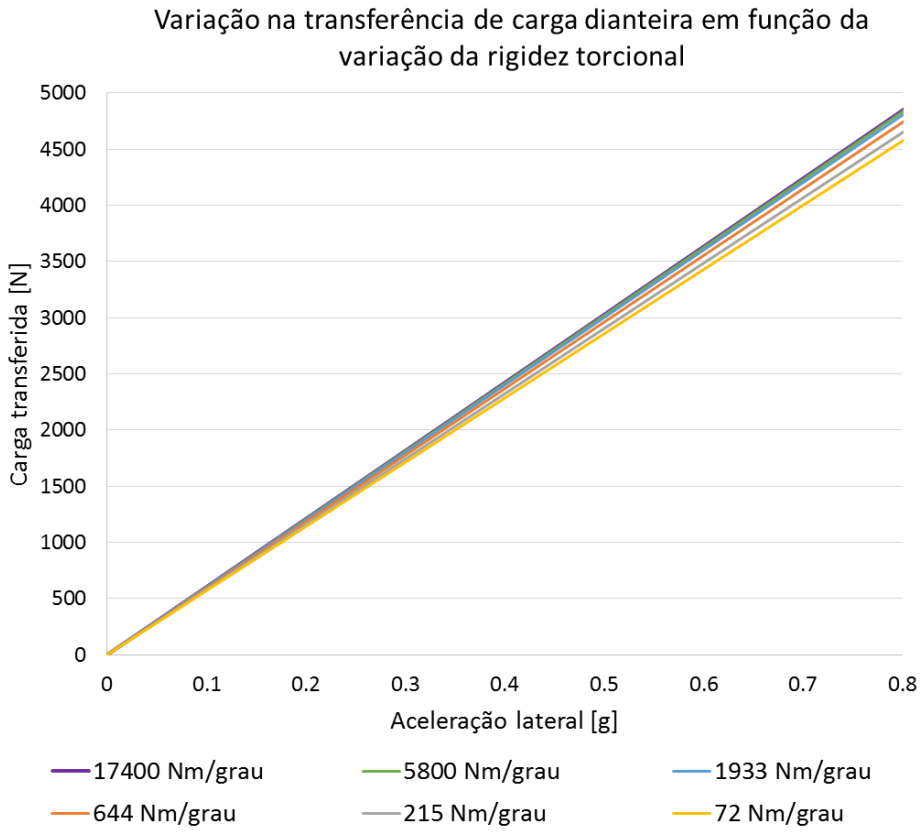


Figura 43. Variação na transferência de carga dianteira em função da variação da rigidez torcional

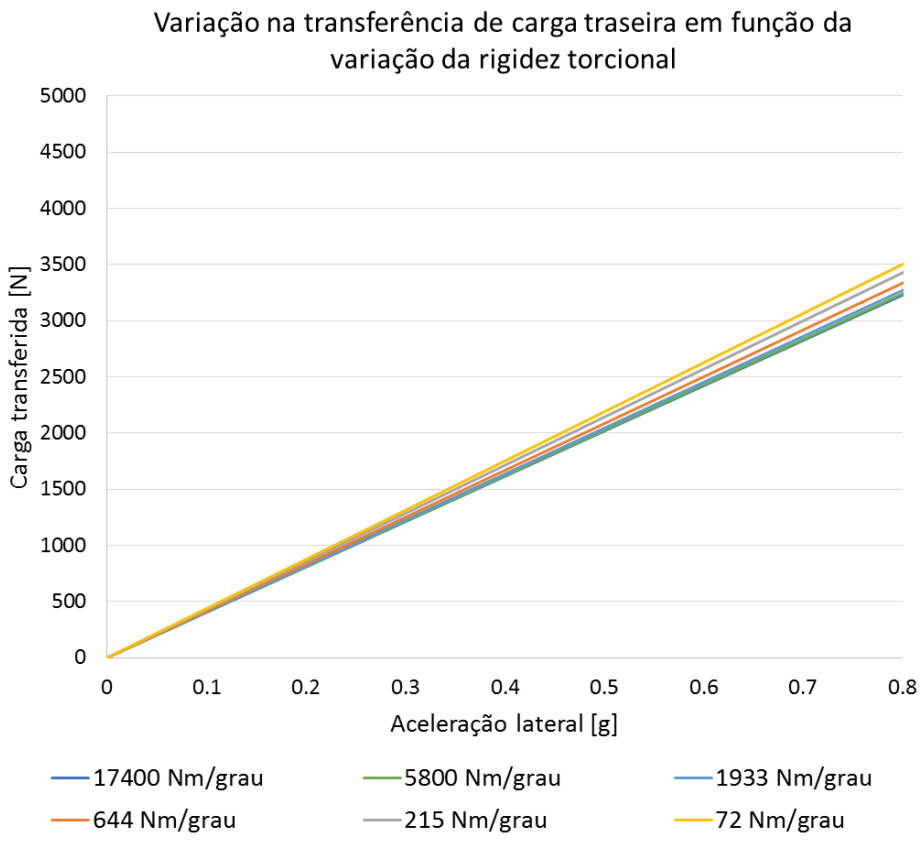


Figura 44. Variação na transferência de carga traseira em função da variação da rigidez torcional

A partir dos gráficos vemos que, mesmo para uma rigidez de 72 $\frac{Nm}{\circ}$, o que representa apenas 5,3% da rigidez de rolagem total do veículo (Rigidez de rolagem total é igual à rigidez dianteira somada à traseira: $860 + 500 = 1360\,\frac{Nm}{\circ}$) a variação na distribuição lateral de carga a 0,7g, foi de apenas 240N, o que representa 6% de variação na dianteira e 9% na traseira.

Essa análise não é suficiente para generalizar o problema da transferência de carga lateral, já que avalia apenas o caso do modelo do Dodge Neon. Para entender como ocorrem as variações na transferência em função da distribuição de massa do veículo, da razão entre a rigidez estrutural e rigidez total de rolagem e distribuição da rigidez dianteira e traseira, vamos retomar as eqs. 11.20 e 11.21.

$$\Delta N_f = \frac{2}{t_f}.a_y.\left[\left(M_f + m_f\right).z_f + M_f.d_{sf}.\frac{K_f}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.d_{sr}.\frac{\frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} - m_f.d_{ur}\right] \tag{11.20}$$

$$\Delta N_r = \frac{2}{t_r}.a_y.\left[(M_r + m_r).z_r + M_f.d_{sf}.\frac{\frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}}{K_f + \frac{K_r.K_T}{K_r + K_T}} + M_r.d_{sr}.\frac{K_r}{K_r + \frac{K_f.K_T}{K_f + K_T}} - m_r.d_{ur}\right] \tag{11.21}$$

A partir delas, serão elaborados três gráficos: no primeiro, vamos avaliar, para um veículo com distribuição de massa de 70% na dianteira e 30% na traseira, como varia a porcentagem da transferência de carga dianteira com respeito ao total transferido em função da razão entre a rolagem dianteira e traseira para 4 diferentes razões de rigidez torcional da estrutura e rigidez de rolagem da suspensão total. No segundo gráfico, os mesmos parâmetros serão avaliados para uma distribuição de 50% e no terceiro gráfico, a razão será de 30% na dianteira e 70% na traseira.

Todas as análises de variação serão feitas para uma condição de 0.5g de aceleração lateral e rigidez de rolagem da suspensão total igual a 1360 Nm/°.

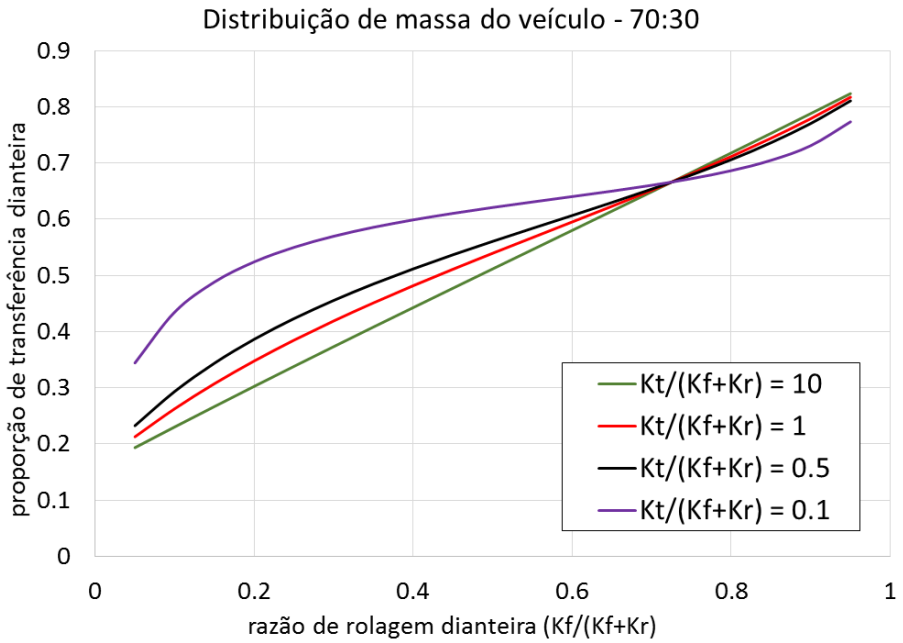


Figura 45. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 70:30

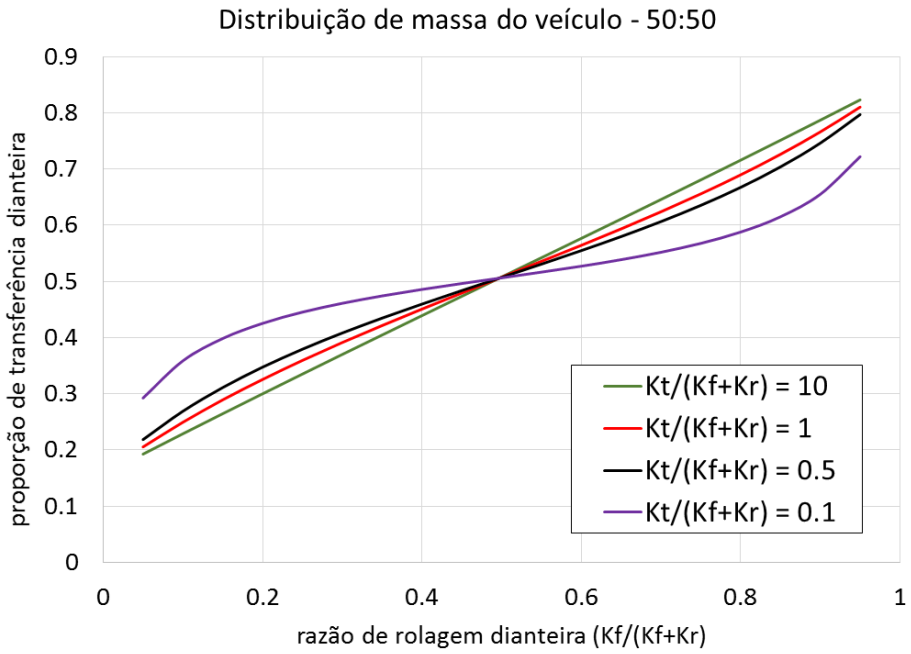


Figura 46. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 50:50

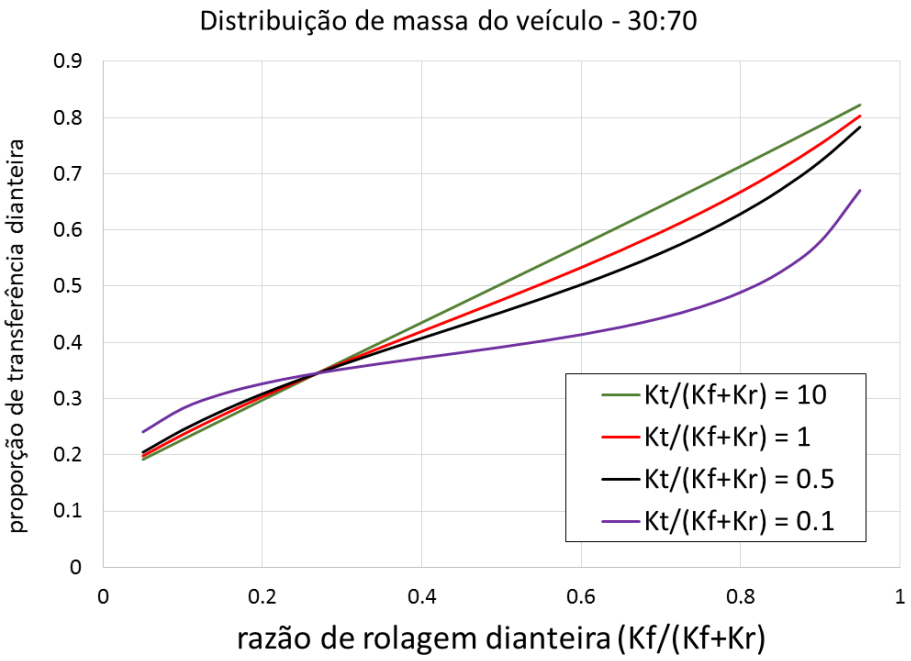


Figura 47. Transferência de carga dianteira como função da razão de rigidez de rolagem, e rigidez torcional para distribuição 30:70

Dos gráficos acima podemos perceber que existe um ponto no qual, independentemente da razão de rigidez torcional da estrutura e rolagem total da suspensão, a proporção de transferência de carga dianteira é igual à razão de rolagem dianteira do veículo. Esse ponto ocorre onde a razão da rigidez de rolagem é igual à distribuição de massa, ou seja, para o caso de um veículo com distribuição de 70% da massa na dianteira, e os mesmos 70% da rigidez de rolagem total na dianteira, não haverá alteração na transferência de carga lateral para qualquer que seja o valor da rigidez torcional.

A Tabela 8 apresenta alguns valores de rigidez de rolagem total e rigidez torcional de alguns veículos e as razões mínimas e máximas entre elas. Dos valores apresentados, a menor razão encontrada foi de 0,7 (Veículo Fórmula SAE). Num caso extremo como este, algum efeito indesejado no balanço de cargas poderia ocorrer se, além da razão de rigidez torcional e rigidez de rolagem de 0,7, a distribuição de massa fosse desproporcional à distribuição de rigidez de rolagem do veículo. Essa situação não é comum pois, em geral, as molas do carro que caracterizam a rigidez de rolagem, são exatamente definidas para equilibrar a distribuição de massa. Por exemplo no caso do modelo do Dodge Neon, a distribuição de massa é 57:43 e a distribuição da rigidez de rolagem é 63:37, Portanto, como mostra o gráfico da Figura 48.Variação na transferência de carga para uma razão de rigidez de 0.7, ainda que a razão entre a

rigidez torcional e a de rolagem total fosse de 0,7 para o modelo do Dodge neon, a variação que seria observada na proporção de transferência dianteira seria de apenas 0.9%

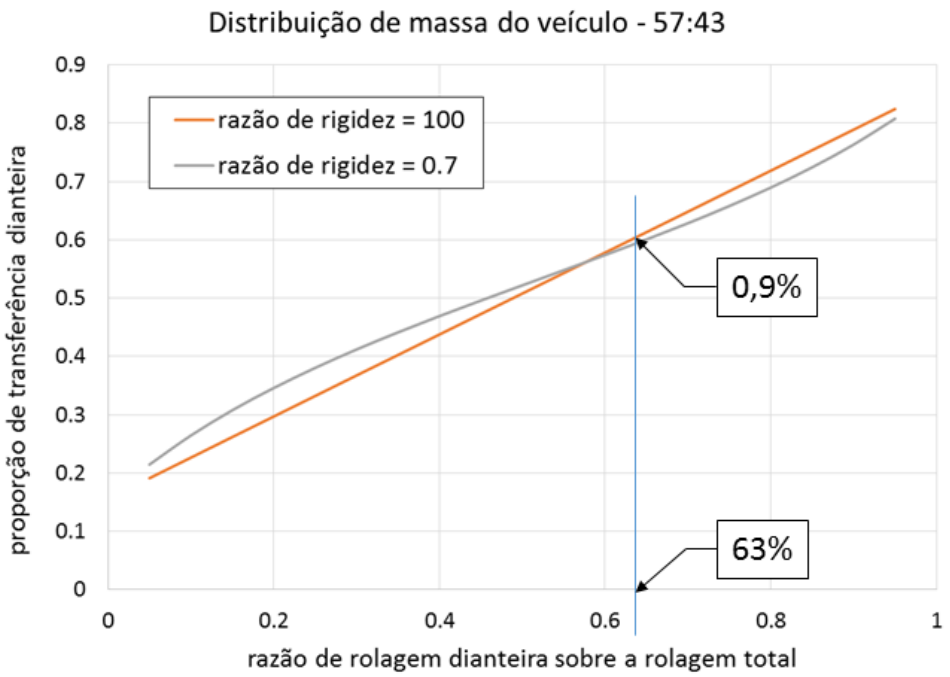


Figura 48.Variação na transferência de carga para uma razão de rigidez de 0.7

Vale notar também que a transferência de carga lateral é independente da distância entre eixos do veículo. Já a relação com as bitolas se dá de maneira inversa e independente, ou seja, quanto maior for a bitola de determinado eixo, menor será a transferência naquele eixo sem haver interferência no outro.

Tabela 8. Valores típicos de rigidez de veículos (SAMPO, SORNIOTTI e CROCOMBE, 2010)

Veículo	Rigidez de rolagem [Nm/°]	Rigidez torcional [Nm/°]	Razão de rigidez mínima	Razão de rigidez máxima
Fórmula SAE	500 – 1500	1000 - 5000	0,7	10
Veículo de passageiros	500 – 2500	5000 – 20000	2	40
Veículo esportivo	500 – 5000	15000 - 40000	3	80
Fórmula 1	1500 – 7500	10000 - 100000	1,3	67

11.4. Análise de sensibilidade

Na seção anterior vimos como a rigidez estrutural influencia na característica de transferência de carga lateral do veículo. Agora, tentaremos encontrar outros comportamentos influenciados pela rigidez estrutural, através da metodologia de engenharia robusta como descrito na seção 10.

11.4.1. Respostas

As Tabela 9 e 10 a seguir apresentam os resultados obtidos para as 18 simulações feitas para cada um dos dois modelos.

Tabela 9. Respostas obtidas para as 18 simulações do modelo rígido

	Rolagem [°]	Arfagem [°]	Guinada [°]	Des. Long. (X) [mm]	Des. Trans. (Y) [mm]	Des. Vert. (Z) [mm]	Impulso DE [N.s]	Impulso DD [N.s]	Impulso TE [N.s]	Impulso TD [N.s]
1	0.41	0.16	0.04	2.45	0.00	1.09	300	308	498	462
2	0.54	-0.25	-0.11	2.46	-0.01	1.21	42	64	53	152
3	0.54	-0.87	0.06	2.52	-0.02	1.34	114	133	155	204
4	-2.00	-2.77	-0.24	2.47	0.03	1.23	252	201	202	265
5	-1.31	2.40	0.15	2.43	0.01	1.22	174	179	177	105
6	3.66	-0.26	-0.26	2.48	-0.03	1.20	304	169	364	2212
7	-4.54	0.16	-0.20	2.42	0.06	1.23	298	114	400	200
8	6.61	-0.29	0.06	2.46	-0.05	1.20	308	248	366	324
9	-3.78	-0.74	-0.08	2.47	0.04	1.21	106	189	109	193
10	4.01	2.48	-0.17	2.42	-0.04	1.25	170	115	132	267
11	-1.86	-0.63	0.42	2.48	0.03	1.23	229	1167	3803	513
12	-1.43	-1.09	-0.62	2.48	0.02	1.20	162	236	284	2870
13	4.08	-1.72	0.23	2.46	-0.03	1.25	115	183	246	123
14	-2.26	1.57	-0.26	2.43	0.03	1.23	483	230	393	3823
15	-2.00	0.71	0.60	2.46	0.02	1.19	212	526	3318	442
16	-2.84	3.37	0.04	2.41	0.03	1.23	141	206	349	234
17	-2.16	-2.99	-0.28	2.49	0.03	1.23	152	71	157	222
18	3.35	-0.08	0.11	2.47	-0.02	1.19	237	73	2182	260

Tabela 10. Respostas obtidas para as 18 simulações do modelo flexível

	Rolagem [°]	Arfagem [°]	Guinada [°]	Des. Long. (X) [mm]	Des. Trans. (Y) [mm]	Des. Vert. (Z) [mm]	Impulso DE [N.s]	Impulso DD [N.s]	Impulso TE [N.s]	Impulso TD [N.s]
1	0.41	0.14	0.01	2.45	0.00	1.09	321	324	530	468
2	0.55	-0.26	-0.11	2.46	-0.01	1.21	40	66	52	156
3	0.54	-0.87	0.06	2.52	-0.02	1.34	121	146	176	225
4	-1.99	-2.77	-0.23	2.47	0.03	1.23	249	200	203	277
5	-1.29	2.37	0.15	2.43	0.01	1.22	191	180	187	113
6	3.60	-0.32	-0.34	2.48	-0.03	1.20	275	178	347	2177
7	-4.57	0.19	-0.19	2.42	0.06	1.23	301	117	415	209
8	6.60	-0.30	0.06	2.46	-0.05	1.20	315	253	375	322
9	-3.77	-0.73	-0.08	2.47	0.04	1.21	115	198	113	206
10	4.04	2.45	-0.22	2.42	-0.04	1.25	182	112	139	268
11	-1.77	-0.66	0.51	2.48	0.03	1.23	214	919	3522	501
12	-1.64	-1.11	-0.61	2.48	0.02	1.20	128	258	266	2483
13	4.06	-1.72	0.22	2.46	-0.03	1.25	121	191	261	136
14	-2.30	1.53	-0.32	2.43	0.03	1.22	368	218	368	3574
15	-1.87	0.66	0.62	2.46	0.02	1.19	183	457	2942	375
16	-2.86	3.36	0.05	2.41	0.03	1.23	145	216	370	253
17	-2.19	-3.00	-0.30	2.49	0.03	1.23	164	81	180	247
18	3.27	-0.15	0.14	2.47	-0.02	1.19	210	82	2288	289

A Figura 49, que mostra a força vertical na estrutura da suspensão traseira direita para a sexta simulação do modelo de corpo rígido, exemplifica como foi calculado o impulso: integrando-se a área abaixo da curva até 1.2 seg. (área hachurada).

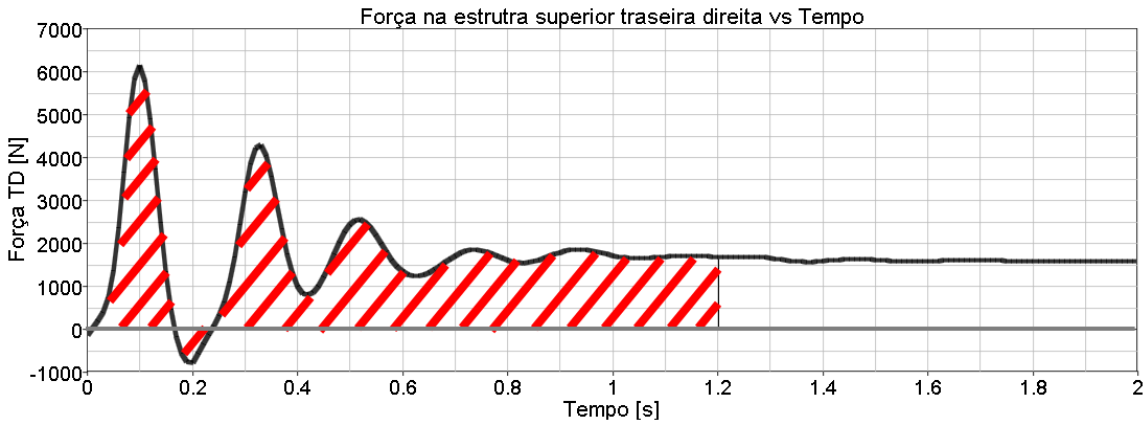


Figura 49. Impulso calculado para a estrutura superior traseira direita da rodagem 6 do modelo rígido

Em seguida, normaliza-se as repostas para permitir uma comparação agrupada dos resultados. Para isso, dentre todos os 36 valores obtidos para uma determinada resposta foi atribuído 1 para o maior, e 0 para o menor, de maneira que, tanto para o modelo rígido quanto flexível, todas as respostas variassem de 0 a 1. As tabelas a seguir mostram os valores normalizados.

Tabela 11. Respostas normalizadas das simulações do modelo rígido

	Rolagem [°]	Arfagem [°]	Guinada [°]	Des. Long. (X) [mm]	Des. Trans. (Y) [mm]	Des. Vert. (Z) [mm]	Impulso DE [N.s]	Inpulso DD [N.s]	Inpulso TE [N.s]	Inpulso TD [N.s]
1	0.45	0.50	0.53	0.41	0.47	0.00	0.59	0.22	0.12	0.10
2	0.46	0.43	0.41	0.48	0.44	0.49	0.00	0.00	0.00	0.01
3	0.46	0.34	0.54	0.99	0.32	1.00	0.17	0.06	0.03	0.03
4	0.23	0.04	0.30	0.54	0.75	0.56	0.48	0.12	0.04	0.04
5	0.29	0.85	0.62	0.24	0.62	0.50	0.30	0.10	0.03	0.00
6	0.74	0.43	0.29	0.68	0.16	0.43	0.60	0.10	0.08	0.57
7	0.00	0.50	0.34	0.16	1.00	0.54	0.58	0.05	0.09	0.03
8	1.00	0.43	0.54	0.48	0.00	0.45	0.60	0.17	0.08	0.06
9	0.07	0.35	0.43	0.59	0.84	0.46	0.15	0.11	0.02	0.02
10	0.77	0.86	0.36	0.11	0.12	0.63	0.29	0.05	0.02	0.04
11	0.24	0.37	0.84	0.63	0.74	0.54	0.43	1.00	1.00	0.11
12	0.28	0.30	0.00	0.67	0.67	0.41	0.27	0.16	0.06	0.74
13	0.77	0.20	0.68	0.45	0.17	0.61	0.17	0.11	0.05	0.01
14	0.21	0.72	0.29	0.24	0.75	0.53	1.00	0.15	0.09	1.00
15	0.23	0.58	0.98	0.50	0.64	0.40	0.39	0.42	0.87	0.09
16	0.15	1.00	0.53	0.01	0.79	0.57	0.23	0.13	0.08	0.03
17	0.22	0.00	0.27	0.73	0.72	0.56	0.25	0.01	0.03	0.03
18	0.71	0.46	0.59	0.61	0.27	0.41	0.44	0.01	0.57	0.04

Tabela 12. Respostas normalizadas das simulações do modelo flexível

	Rolagem [°]	Arfagem [°]	Guinada [°]	Des. Long. (X) [mm]	Des. Trans. (Y) [mm]	Des. Vert. (Z) [mm]	Impulso DE [N.s]	Impulso DD [N.s]	Impulso TE [N.s]	Impulso TD [N.s]
1	0.44	0.49	0.51	0.40	0.48	0.00	0.63	0.24	0.13	0.10
2	0.46	0.43	0.41	0.49	0.44	0.49	0.00	0.00	0.00	0.01
3	0.46	0.33	0.54	1.00	0.32	1.00	0.18	0.07	0.03	0.03
4	0.23	0.04	0.31	0.53	0.75	0.56	0.47	0.12	0.04	0.05
5	0.29	0.84	0.62	0.24	0.60	0.50	0.34	0.11	0.04	0.00
6	0.73	0.42	0.23	0.70	0.18	0.43	0.53	0.10	0.08	0.56
7	0.00	0.50	0.35	0.14	1.00	0.53	0.59	0.05	0.10	0.03
8	1.00	0.42	0.55	0.48	0.00	0.45	0.62	0.17	0.09	0.06
9	0.07	0.36	0.43	0.60	0.84	0.46	0.17	0.12	0.02	0.03
10	0.77	0.85	0.32	0.12	0.12	0.63	0.32	0.04	0.02	0.04
11	0.25	0.37	0.91	0.66	0.72	0.54	0.39	0.78	0.93	0.11
12	0.26	0.30	0.01	0.70	0.67	0.41	0.20	0.18	0.06	0.64
13	0.77	0.20	0.68	0.44	0.17	0.61	0.18	0.11	0.06	0.01
14	0.20	0.71	0.24	0.24	0.76	0.52	0.74	0.14	0.08	0.93
15	0.24	0.57	1.00	0.53	0.63	0.40	0.32	0.36	0.77	0.07
16	0.15	1.00	0.54	0.00	0.79	0.56	0.24	0.14	0.08	0.04
17	0.21	0.00	0.26	0.73	0.72	0.56	0.28	0.02	0.03	0.04
18	0.70	0.45	0.61	0.61	0.26	0.40	0.38	0.02	0.60	0.05

O passo seguinte é avaliar a sensibilidade das variáveis de controle ao ruído (rigidez estrutural), i. e. avaliar qual dos parâmetros tem maior participação nas variações das repostas em função da mudança de estrutura rígida para flexível.

Como mostrado na seção 10.1 as respostas estão divididas entre estáticas (deslocamentos) e dinâmicas (impulso), além disso, todos os valores obtidos foram normalizados. Portanto, avaliaremos a sensibilidade de maneira agrupada, ou seja, vamos buscar uma relação SNR para os deslocamentos e outra para Impulsos.

Com a eq. 12.2 calculamos SNR para cada uma das respostas. A Tabela 13 apresenta os valores de SNR para cada resposta de deslocamento e o SNR total que é a simples soma de todos. Na Tabela 13 os níveis de cada variável estão representados por índices de 1 a 3 apenas para simplificar o entendimento da tabela.

Tabela 13. SNR das respostas de deslocamento

	Acc X	Acc Y	Acc Z	trans DE	trans DD	trans TE	trans DE	SNR rolagem	SNR arfagem	SNR guinada	SNR desl. X	SNR desl. Y	SNR desl. Z	SNR total
1	1	1	1	1	1	1	1	1.2	1.8	2.7	2.3	2.0	1.9	12.0
2	2	1	2	2	2	2	2	1.5	1.7	1.7	1.3	1.8	1.8	9.9
3	3	1	3	3	3	3	3	1.5	1.6	1.5	2.3	1.9	1.7	10.5
4	1	2	2	3	3	2	1	1.5	1.5	2.4	2.3	1.9	1.6	11.1
5	2	2	3	1	1	3	2	1.7	2.0	1.9	1.8	2.7	1.9	12.1
6	3	2	1	2	2	1	3	2.1	2.3	3.8	3.0	2.7	1.9	15.8
7	1	3	1	3	2	3	2	1.8	2.1	2.4	2.7	2.0	2.0	13.0
8	2	3	2	1	3	1	3	1.5	1.7	2.0	1.6	2.0	1.8	10.7
9	3	3	3	2	1	2	1	1.5	1.7	1.8	2.3	2.0	1.7	10.9
10	1	1	3	1	2	2	3	1.8	2.0	3.2	1.7	2.0	1.6	12.4
11	2	1	1	2	3	3	1	2.2	2.1	3.8	2.9	2.7	2.1	15.8
12	3	1	2	3	1	1	2	2.6	1.9	2.3	3.0	2.1	1.6	13.6
13	1	2	3	2	3	1	2	1.7	1.3	2.2	2.2	1.8	1.3	10.6
14	2	2	1	3	1	2	3	1.9	2.2	3.4	1.9	2.5	2.3	14.1
15	3	2	2	1	2	3	1	2.4	2.2	2.6	2.9	2.1	1.3	13.4
16	1	3	2	2	1	3	3	1.6	1.8	2.1	2.5	1.6	1.7	11.3
17	2	3	3	3	2	1	1	1.8	1.7	2.4	1.6	2.0	1.5	11.0
18	3	3	1	1	3	2	2	2.2	2.4	2.7	1.7	2.5	2.4	13.8

Em seguida podemos analisar qual a influência de cada parâmetro nas variações observadas em SNR. Utilizando a eq. 12.3 e tendo como reposta o SNR total, obtemos a Tabela 14.

Tabela 14. Efeito do nível de cada parâmetro no SNR total dos deslocamentos

Nível	Acc X	Acc Y	Acc Z	trans DE	trans DD	trans TE	trans DE
1	11.74	12.34	14.07	12.39	12.31	12.26	12.36
2	12.23	12.84	11.67	12.37	12.58	12.03	12.14
3	12.99	11.78	11.22	12.20	12.07	12.67	12.45

Colocando os valores da Tabela 14 de forma gráfica temos:

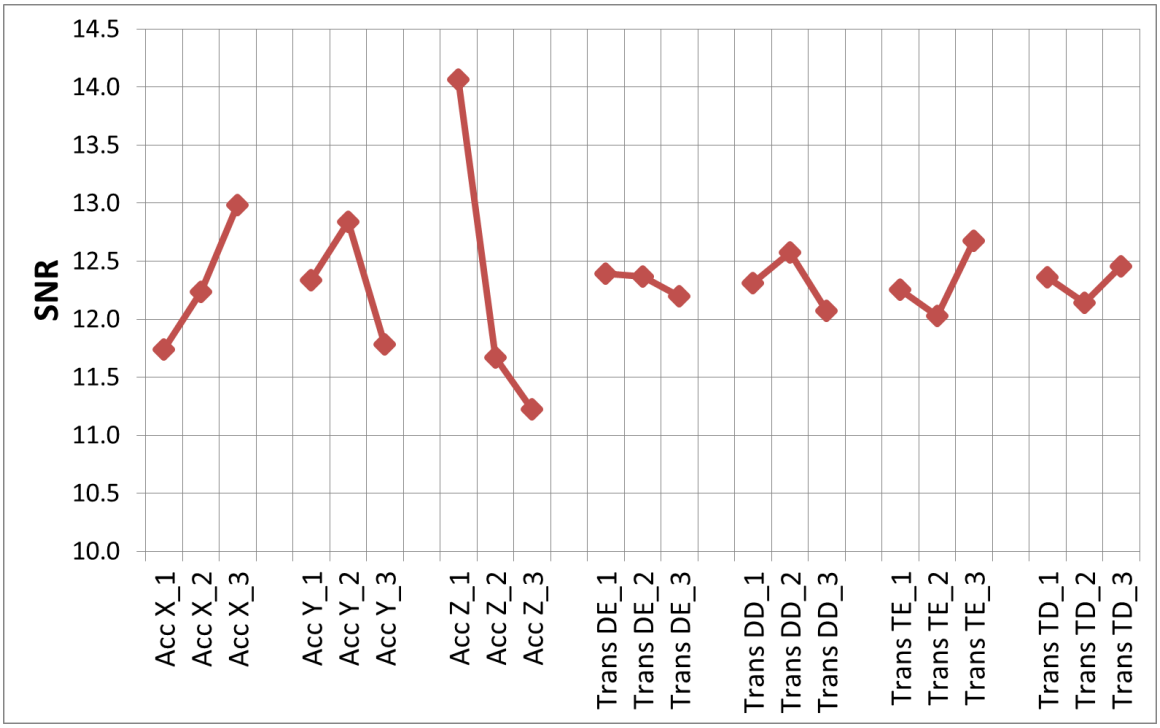


Figura 50. Efeito dos parâmetros no SNR de deslocamentos

O gráfico da Figura 50 deixa claro o efeito maior das acelerações na relação de Sinal-Ruído, i. e. o efeito das considerações de flexibilidade estrutural nos comportamentos observados do modelo (rolagem, arfagem, guinada, e deslocamentos x, y e z) é mais relevante no caso de o veículo estar sujeito a acelerações, em especial acelerações verticais, do que aos deslocamentos da suspensão.

Em seguida, procede-se da mesma maneira para a avaliação dos impulsos. A Tabela 15 apresenta os valores calculados para as respostas de Impulso.

Tabela 15. SNR das respostas de impulso

	Acc X	Acc Y	Acc Z	trans DE	trans DD	trans TE	trans DE	SNR Impulso DE	SNR Impulso DD	SNR Impulso TE	SNR Impulso TD	SNR total
1	1	1	1	1	1	1	1	3.4	2.5	2.3	1.7	9.9
2	2	1	2	2	2	2	2	1.9	1.7	1.4	1.6	6.5
3	3	1	3	3	3	3	3	2.6	2.4	2.1	2.1	9.2
4	1	2	2	3	3	2	1	2.1	1.6	1.4	1.9	7.0
5	2	2	3	1	1	3	2	3.2	1.7	1.8	1.8	8.5
6	3	2	1	2	2	1	3	3.7	2.2	2.0	2.3	10.3
7	1	3	1	3	2	3	2	2.2	1.8	2.0	1.8	7.8
8	2	3	2	1	3	1	3	2.5	2.0	1.8	1.5	7.8
9	3	3	3	2	1	2	1	2.7	2.2	1.6	1.9	8.5
10	1	1	3	1	2	2	3	2.9	1.9	1.7	1.4	7.9
11	2	1	1	2	3	3	1	3.1	6.3	3.9	1.9	15.1
12	3	1	2	3	1	1	2	3.9	2.7	2.0	4.4	13.1
13	1	2	3	2	3	1	2	2.4	2.1	2.0	1.9	8.4
14	2	2	1	3	1	2	3	6.8	2.4	2.1	3.8	15.1
15	3	2	2	1	2	3	1	3.8	3.7	4.4	2.6	14.4
16	1	3	2	2	1	3	3	2.3	2.3	2.1	2.0	8.7
17	2	3	3	3	2	1	1	2.9	2.3	2.1	2.2	9.5
18	3	3	1	1	3	2	2	3.6	2.2	2.9	2.2	11.0

Novamente utilizando a eq.12.3, temos os efeitos dos parâmetros:

Tabela 16. Efeito do nível de cada parâmetro no SNR total dos impulsos

nível	Acc X	Acc Y	Acc Z	trans DE	trans DD	trans TE	trans DE
1	8.30	10.29	11.53	9.92	10.63	9.83	10.75
2	10.42	10.62	9.61	9.61	9.40	9.35	9.23
3	11.09	8.90	8.67	10.28	9.78	10.63	9.83

A representação gráfica fica:

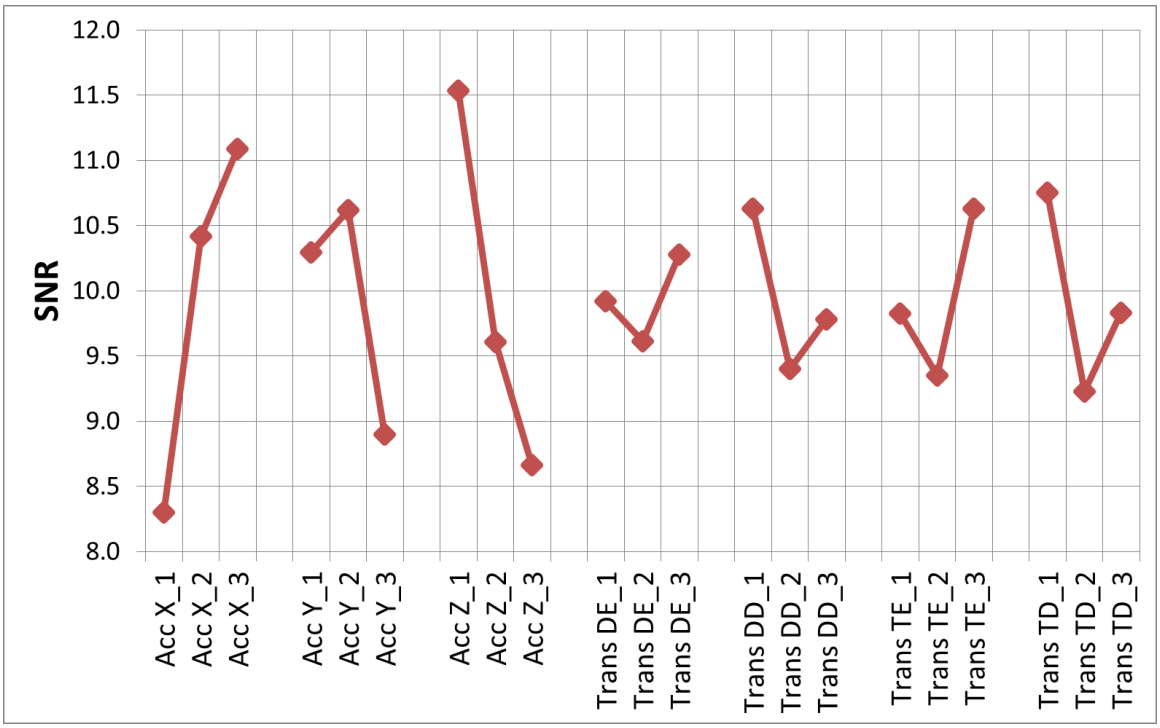


Figura 51. Efeito dos parâmetros no SNR de impulsos

Neste caso, mais uma vez, o efeito das acelerações mostra-se mais relevante do que os deslocamentos, ou seja o efeito da flexibilidade na absorção do Impulso absorvido na estrutura é mais percebido no caso de o veículo estar sujeito a acelerações, principalmente as longitudinais e verticais.

O fato de a aceleração lateral não aparecer como maior contribuidora em nenhum dos casos anteriormente observados, vai de acordo com os resultados obtidos, tanto no modelo completo quanto no analítico, de que, para o veículo estudado, quando sujeito a acelerações laterais, a variação na resposta devido à rigidez estrutural não é significativa.

12. Conclusões

Este trabalho procurou apresentar e discutir modelos multicorpos com consideração de flexibilidade estrutural quanto a sua influência no comportamento dinâmico do veículo bem como a sua relevância dado a maior complexidade que se soma ao modelo ao se adicionar corpos flexíveis.

Baseado nos resultados obtidos, podemos concluir que de fato há variação na transferência de carga lateral devido à rigidez estrutural e que este efeito, além de evidenciar-se em condições que a rigidez torcional da estrutura é muito próxima, ou menor, que a rigidez de rolagem da suspensão, pode ser contornado mantendo-se uma proporcionalidade entre a distribuição da rigidez de rolagem da suspensão e a distribuição de massa do veículo. Portanto, sabendo-se que a transferência de carga lateral é independente da distância entre os eixos do veículo, como exemplo, podemos estender o estudo ao caso dos caminhões. Estes possuem uma rigidez torcional relativamente baixa devido à extensão do chassi, e a suspensão é rígida devido às necessidades de carregamento. Dessa maneira, podemos supor que o efeito da variação na transferência de carga lateral poderá ser importante uma vez que, dependendo da carga e de como está distribuída ao longo da carroceria, o caminhão pode ter comportamentos não previsíveis de dirigibilidade o que, por sua vez, poderia afetar a sua segurança.

Além disso, a complexidade do modelo e o tempo de processamento são mais elevados para os modelos com corpos flexíveis. Pode-se otimizar o tempo de rodagem através da eliminação de modos de deformação não participativos como visto na seção 11.2.1. No entanto, como estes modos variam de manobra para manobra, e para determinar os modos desnecessários pelo menos uma análise com todos os modos deve ser realizada, só é justificável essa avaliação caso o modelo seja utilizado repetidas vezes numa mesma manobra.

Abrangendo mais a avaliação do efeito da rigidez estrutural, a análise de sensibilidade das varáveis de controle mostrou que o comportamento do veículo é mais sensível à rigidez estrutural quando está sujeito principalmente à aceleração vertical, mas também à longitudinal e à transversal. Portanto, podemos dizer que, para avaliações de conforto, por exemplo, nas quais o veículo é sujeito à acelerações elevadas e pequenos deslocamentos (alta frequência), certamente a rigidez estrutural

terá influência nas respostas. Porém, não é conclusivo dizer se menor ou maior rigidez é melhor ou pior no que diz respeito ao conforto, uma vez que a sensibilidade foi avaliada qualitativamente, além disso, um estudo dinâmico mais detalhado seria necessário o que só foi realizado em parte neste trabalho. Mais ainda, avaliações de conforto, em geral, também levam em conta a subjetividade da sensibilidade humana.

Os resultados da análise de sensibilidade também mostram que, em manobras que exijam agilidade do veículo, como desvios de obstáculos, possivelemente haverá respostas distintas para diferentes valores de rigidez estrutural, uma vez que, nestes casos, as acelerações laterais são altas e a aderência dos pneus é limitante na capacidade de concluir a manobra. Portanto, as variações de reações no contato pneu/solo, influenciadas pela rigidez estrutural, numa condição limite podem também comprometer a segurança do veículo.

É certo que podemos extrair conclusões importantes com essa base, no entanto, a avaliação subjetiva de um veículo, que caberia por exemplo à um piloto avaliar, certamente não está completamente coberta pelo estudo. Não é conclusivo dizer qual a sensibilidade de um motorista às variações observadas. Talvez, uma variação de 3% na transferência de carga lateral como observado no item 11.3.2 seja perceptível à sensibilidade humana, ou ainda, caso deseje-se um desempenho máximo numa condição de competição, por exemplo, possivelmente esses 3% sejam ainda mais críticos.

Referências

AMIROUCHE, F. M. L.; JIA, T. **Modeling of Clearances and Joint Flexibility Effects in Multibody Systems Dynamics**. Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago. Chicago, p. 9. 1987.

ANDERSEN, E. R.; SANDU, C.; SOUTHWARD, S. Multibody Dynamics Modeling and System Identification of a Quarter-Car Test Rig with McPherson Strut Suspension. **SAE 2007-01-4184**, Rosemont, Illinois, Outubro 2007.

ARANT, M. O. **Assessing the Effect of Chassis Torsional Stiffness on the Accuracyof Heavy Vehicle Understeer and Rollover Modeling**. School of Clemson University. [S.l.]. 2010.

BARUH, H. **Analytical Dynamics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998.

BARUH, H. **Another Look at the Describing Equations of Dynamics**. Department of Mechanical and Aerospace Engineering - Rutgers University. Piscataway, New Jersey. 2000.

BERR, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecância Vetorial para Engenheiros, Estática**. 5a edição. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1994.

BLUNDELL, M.; HARTY, D. **The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics**. Burlington, MA: Elsevier, 2004.

BONISOLL, E.; DELPRETE, C.; ROSSO, C. Comparison between Dynamic Condensation Techniques in Automotive Application. **SAE 2006-01-1093**, Detroid, Michigan, Abril 2006.

BRAMELLER, A.; ALLAN, R. N.; HAMAM, Y. M. **Sparsity:** Its Practical Application to Systems Analysis. [S.l.]: [s.n.], 1976.

BRITISH Car Forum. **British Car Forum**. Disponivel em: <http://www.britishcarforum.com>. Acesso em: Julho 2014.

CHEN, X.; LIN, Y. Research on the Dynamics of Flexible Multibody System of Passenger Car Suspension. **SAE 980899**, Detroit, Michigan, Fevereiro 1998.

CRAIG, R. R.; BAMPTON, M. C. C. Coupling of substructures for dynamic analyses. **AIAA Journal**, p. 1313-1319, 1968.

DARUS, R. B. **Modeling and Control of Active Suspension for a Full Car Model**. Faculty of Electrical of Engineering University Teknologi Malaysia. [S.l.], p. 76. 2008.

DEAKIN, A.; RAMIREZ, P. R.; HANLEY, R. The Effect of Chassis Stiffness on Race Car Handling Balance. **SAE 2000-01-3554**, Dearborn, MI, Novembro 2000.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação**. 2. ed. São Paulo: edUSP, 2005.

GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. Warrendale, PA: [s.n.], 1992.

GOOD, M. C. **Sensitivity of Driver-Vehcile Performance to Vehicle Characterisics Revealed in Open-Loop Tests**. [S.l.]: [s.n.], v. Vol. 6, 1977.

GRECO, P. C.; BARCELOS, C. S.; ROSA, A. A Numerical Model for Passenger Car Ride Comfort Studies. **SAE 2001-01-0039**, Detroid Michigan, Março 2001.

H. DU, D. H.; DAVIES, G. A. 0. **APPLICATION OF AN AEROELASTICITY BEAM MODEL FOR FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEMS**. School of Mechanical and Production Engineering, Nanyang Technological University, Singapore e Department of Aeronautics, Imperial College of Science Technology and Medicine, London. U.K., p. 11. 1992.

HUSTON, R. L. **Flexible Effects in Multibody System Dynamics**. Department of Mechanical & Industrial Engineering, University of Cincinnati. Ohio, p. 8. 1980.

INSTITUTO Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Censo Demográfico**, 2010. Disponivel em: <http://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 4 Abril 2013.

LEE, J.; LEE, J.; HEO, S.-J. **Full Vehicle Dynamic Modeling for Chassis Controls**. Graduate School of Automotive Engineering, Kookmin University e School of Mechanic & Automotive Engineering, Kookmin University. Coréia do Sul, p. 6. 2008.

MARCHESIN, F. P. **Análise de Desempenho de Veículos Tipo Fórmula**. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 148. 2012.

MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race Car Vehicle Dynamics**. Warrendale, Pa.: SAE, 1995.

MSGROUP. **All Things (Safety Oriented) Motorcycle**, 2009. Disponivel em: <http://www.msgroup.org/>. Acesso em: Julho 2014.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, C. M. **response Surface Methodology**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2009.

NCAC - NATIONAL CRASH ANALYSIS CENTER. **Finite Element Model Archive**, Agosto 2013. Disponivel em: <http://www.ncac.gwu.edu/vml/models.html>.

PACEJKA, H. B. **Tyre and Vehicle Dynamics**. 2. ed. Burlington, MA: Elsevier, 2006.

POPP, K.; SCHIEHLEN, W. **Ground Vehicle Dynamics**. Stuttgart: Springer, 1993.

REIMPELL, J.; STOLL, H.; BETZLER, J. W. **The Automotive Chassis:** Engineering Principles. 2ª. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

SAMPO, E.; SORNIOTTI, A.; CROCOMBE, A. Chassis Torsional Stiffness: Analysis of the Influence on Vehicle Dynamics. **SAE 2010-01-0094**, Dezembro 2010.

SELLGREN, U. **Component Mode Synthesis-A method for efficient dynamic simulation of complex technical systems**. The Royal Institute of Technology (KTH). Estocolmo, p. 27. 2003.

SINDIPEÇAS. **Levantamento da Frota**, 2011. Disponivel em: <http://www.sindipecas.org.br/>. Acesso em: 4 Abril 2013.

SONG, J. O.; J. HAUG, E. **Dynamic Analysis of Planar Flexible Mechanisms**. Material Division College of Engineering, The University of Iowa. Iowa, p. 23. 1979.

THE Suspension Bible. **Car Bible**, Julho 2014. Disponivel em: <http://www.carbibles.com>.

TSAI., L.-W. **Robot Analysis, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators**. Nova York: John Wiley & Sons, 1999.

VARGAS, V. A. D. **Efeitos da Flexibilidade Estrutural em Simulações de Dinâmica Lateral de Veículo de Transporte de Carga**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2011.

VILELA, D. **Aplicação de Métodos Numéricos de Otimização ao Problema Conjunto da Dirigibilidade e Conforto Veicular**. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 358. 2010.

YI, T. Y. Vehicle Dynamic Simulations Based on Flexible and Rigid Multibody Models. **SAE 2000-01-0114**, Detroid, Michigan, Março 2000.

APENDICE 1

As tabelas seguintes apresentam os valores considerados para os pontos, corpos, buchas, molas e amortecedores do modelo. As linhas com uma marcação preta a direita indica que existe a mesma informação simétrica no modelo.

POINTS	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	
Model				
Global Origin	0.0	0.0	0.0	
vehicle total CG	2460.4	3.5	1207.4	
Body				
Vehicle Body CG	2678.5	9.1	1260.2	
Frnt subframe				
Subframe CG	1443.8	0.0	886.4	
Front subframe mnt	1377.5	-444.3	999.3	
Rear subframe mnt	1578.5	-379.1	879.1	
Front subframe mnt ax	1377.5	-444.3	1099.3	
Rear subframe mnt ax	1578.5	-379.1	979.1	
Front subframe mnt rad	1477.5	-444.3	999.3	
Rear subframe mnt rad	1678.5	-379.1	879.1	
Frnt macpherson susp (1 pc. LCA)				
Wheel CG	1317.8	-728.3	970.0	
Wheel center	1317.8	-728.3	970.0	
Spindle align	1317.8	-628.3	970.0	
Knuckle CG	1317.8	-628.3	970.0	
LBJ	1294.0	-676.2	837.4	
OTRB	1441.7	-628.7	934.8	
LCA CG	1350.0	-540.0	885.0	
LCA frnt bushing	1279.9	-399.4	856.9	
LCA rear bushing	1578.5	-379.1	879.1	
Strut rod upr	1338.0	-548.9	1462.5	
Strut tube lwr	1358.1	-639.2	1103.1	
Spring upr	1338.0	-548.9	1462.5	
Spring lwr	1352.0	-611.0	1261.3	
Frnt strut (with inline jts)				
Strut rod CG	1344.1	-576.5	1352.6	
Strut rod lwr	1350.3	-604.2	1242.7	
Strut tube CG	1353.2	-617.3	1190.3	
Strut tube upr	1348.3	-595.4	1277.4	
Frnt stabar with links				
Drop link susp att	1325.9	-520.0	924.0	
Drop link CG	1332.3	-520.0	894.1	
Drop link stabar att	1338.6	-520.0	864.3	
Stabar pt 1	1338.6	-477.2	864.3	
Stabar pt 2	1400.1	-456.2	864.0	
Stabar pt 3	1470.7	-398.7	864.4	
Stabar pt 4	1512.3	-294.8	864.2	
Stabar pt 6	1511.7	-160.0	865.4	
Stabar pt 7	1511.7	-100.0	865.4	
Stabar mount to frame	1511.7	-220.9	865.4	

Stabar center	1511.7	0.0	865.4	
Link stabar bush ax	1120.0	-644.0	989.0	
Stabar frame bush ax	1300.0	-200.0	995.0	
Link susp bush ax	1338.6	-544.0	929.0	
Frnt internal jounce bumpers				
Jounce bumper tip	1342.2	-567.6	1387.9	
Jounce bumper contact	1345.7	-583.5	1325.0	
Rackpin steering				
Inr tierod ball jt	1529.7	-322.9	953.6	
Tierod CG	1485.7	-475.8	944.2	
Rack CG	1529.7	0.0	953.6	
Point for sperical joint instead of Rack UCons in the tasks	1529.7	0.0	953.6	
Center of Pinion	1516.3	-217.3	931.3	
Upper Input Shaft	1548.3	-251.0	1128.6	
Upper Pinion	1532.3	-234.2	1029.9	
Pinion CG	1524.3	-225.7	980.6	
Rack housing CG	1529.7	0.0	953.6	
Rack housing end	1529.7	-322.9	953.6	
Rack housing mount	1468.2	-298.5	917.0	
Rack housing axial	1468.2	-298.5	1017.0	
Rack housing radial	1568.2	-298.5	917.0	
Steering column 1 (not for abaqus)				
Steering Wheel Center	2090.0	-340.0	1565.0	
Tilt Joint Point	1925.0	-340.0	1492.2	
CM of Lower Col Shaft	1842.5	-340.0	1455.9	
CM of Upper Col Shaft	2007.5	-340.0	1528.6	
Upper U-joint Point	1760.0	-340.0	1419.5	
Telescopic Joint Point	1689.4	-310.3	1322.5	
Comp. Joint Point	1618.9	-280.7	1225.6	
CM of Upper Int Shaft	1724.7	-325.2	1371.0	
CM of Middle Int Shaft	1654.1	-295.5	1274.1	
CM of Lower Int Shaft	1583.6	-265.8	1177.1	
Transverse engine/transaxle				
Engine/Transmission CG	1136.6	20.5	1131.9	
Engine Mount #1	1191.2	-395.0	1213.6	
Engine Mount #2	1081.4	481.9	1334.8	
Engine Mount #3	837.2	-25.5	937.3	
Eng. Mnt. #1 Align.	1191.2	-395.0	1313.6	
Eng. Mnt. #2 Align.	1081.4	481.9	1434.8	
Eng. Mnt. #3 Align.	837.2	-25.5	1037.3	
fwd_mass	1317.1	-123.8	986.7	
FIALA / HTIRE				
Front Ground RM Marker	0.0	0.0	660.4	
Rear Ground RM Marker	0.0	0.0	660.4	
Rear macpherson susp				
Wheel CG	3960.3	-721.9	980.0	
Wheel center	3960.3	-721.9	980.0	
Spindle align	3960.3	-621.9	980.0	
Knuckle CG	3960.3	-621.9	980.0	
LBJ	3674.0	-702.0	884.0	
Toelink CG	3658.5	-619.8	925.3	
Outer toelink bush	3962.6	-645.3	894.4	

Inner toelink bush	3354.3	-594.2	956.2
Inner toelink bush ax	3650.0	-467.5	1013.5
Outer toelink bush ax	3660.0	-660.0	1005.0
LCA CG	3850.0	-400.0	892.5
LCA frnt bushing	3615.0	-178.0	905.0
LCA rear bushing	4010.0	-176.0	900.0
Strut rod upr	3943.6	-533.9	1458.9
Strut tube lwr	3962.2	-629.8	1059.5
Spring upr	3943.6	-533.9	1458.9
Spring lwr	3949.7	-578.0	1248.6
rr LCA body att	4068.4	-102.0	968.1
rr LCA knucle att	4068.4	-660.0	928.1
frt LCA body att	3859.9	-105.1	964.3
frt LCA knucle att	3859.9	-660.0	924.3
rr LCA CG	4068.4	-381.0	948.1
frt LCA CG	3859.9	-382.6	944.3
Rear strut (with inline jts)			
Strut rod CG	3948.7	-560.4	1348.7
Strut rod lwr	3953.9	-586.8	1238.4
Strut tube CG	3956.6	-600.7	1180.9
Strut tube upr	3950.9	-571.5	1302.3
Rear internal jounce bumpers			
Jounce bumper tip	3947.1	-551.8	1384.1
Jounce bumper contact	3948.4	-558.8	1355.0
Constant radius analysis			
Path Origin	2678.5	9.1	1260.2
Circle Center	-75861.3	-49990.9	660.4
Output Requests			
front axle mid	1317.8	0.0	970.0
rear axle mid	3960.3	0.0	980.0

BUSHINGSTIFFNESS	Kx [N/mm]	Ky [N/mm]	Kz [N/mm]	Ktx [Nmm/°]	Kty [Nmm/°]	Ktz [Nmm/°]
Frnt subframe						
Front subframe mnt	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Rear subframe mnt	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Frnt macpherson susp (1 pc. LCA)						
LCA frnt bushing	6000	6000	1000	450000	450000	60000
LCA rear bushing	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Frnt strut (with inline jts)						
Strut upr bush-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Frnt stabar with links						
Link stabar bush left-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Link stabar bush right-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Stabar frame bush left-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000
Stabar frame bush right-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000

Drop link susp bush - Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000	
Rackpin steering							
Rack housing mount	30000	30000	11150	1000000	1000000	1000000	
Steering column 1 (not for abaqus)							
Column Compliance Joint-Compliant-Joint	10000	10000	10000	100000000	100000000	100000000	
Transverse engine/transaxle							
Engine Mount #1	60000	60000	10000	4500	4500	600	
Engine Mount #2	60000	60000	10000	4500	4500	600	
Engine Mount #3	60000	60000	10000	4500	4500	600	
Rear macpherson susp							
LCA frnt bushing	6000	6000	1000	450000	450000	60000	
LCA rear bushing	6000	6000	1000	450000	450000	60000	
LCA frt bush knucle	10000	10000	10000	10000	10000	300	
LCA rr bush knucle	10000	10000	10000	10000	10000	300	
Otr toelink bush-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000	
Inner toelink bush-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000	
Rear strut (with inline jts)							
Strut upr bush-Compliant-Joint	6000	6000	1000	450000	450000	60000	

BODIES	Mass [kg]	Ixx [kg.mm²]	Iyy [kg.mm²]	Ixy [kg.mm²]	Ixz [kg.mm²]	Iyz [kg.mm²]	
Model							
dummy_total_CG	0.0	10.0	10.0	0.0	0.0	0.0	
Frnt macpherson susp (1 pc. LCA)							
Knuckle	3.0	4089.0	4089.0	0.0	0.0	0.0	
Lwr control arm	2.0	2081.0	2081.0	0.0	0.0	0.0	
Wheel	20.0	1750000.0	1750000.0	0.0	0.0	0.0	
Wheel hub	10.0	70000.0	70000.0	0.0	0.0	0.0	
Frnt strut (with inline jts)							
Strut rod (upr strut)	1.0	655.3	655.3	0.0	0.0	0.0	
Strut tube (lwr strut)	1.0	655.3	655.3	0.0	0.0	0.0	
Frnt stabar with links							
Drop link	0.3	88.1	88.1	0.0	0.0	0.0	
Rackpin steering							
Tierod	1.0	30000.0	30000.0	0.0	0.0	0.0	
Rack	2.0	30000.0	300.0	0.0	0.0	0.0	
Rack housing	8.0	200000.0	200.0	0.0	0.0	0.0	
Pinion	1.0	10000.0	10000.0	0.0	0.0	0.0	
SteeringDummyBody	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	
Steering column 1 (not for abaqus)							
Steering Wheel	5.0	15000.0	15000.0	0.0	0.0	0.0	

Upper Col Shaft	1.0	2500.0	2500.0	0.0	0.0	0.0
Lower Col Shaft	1.0	2500.0	2500.0	0.0	0.0	0.0
Upper Int Shaft	1.0	2500.0	2500.0	0.0	0.0	0.0
Middle Int Shaft	1.0	2500.0	2500.0	0.0	0.0	0.0
Lower Int Shaft	1.0	2500.0	2500.0	0.0	0.0	0.0
Transverse engine/transaxle						
Engine/Trans	120.0	5000000.0	5000000.0	0.0	0.0	0.0
fwd_mass	21.5	1590000.0	23900.0	0.0	0.0	0.0
Rear macpherson susp						
Knuckle	3.0	4089.0	4089.0	0.0	0.0	0.0
Lwr control arm front	1.0	2081.0	2081.0	0.0	0.0	0.0
Wheel	20.0	1750000.0	1750000.0	0.0	0.0	0.0
Wheel hub	10.0	70000.0	70000.0	0.0	0.0	0.0
Toelink	1.0	655.3	655.3	0.0	0.0	0.0
Lwr control arm rear	1.0	2081.0	2081.0	0.0	0.0	0.0
Rear strut (with inline jts)						
Strut rod (upr strut)	1.0	655.3	655.3	0.0	0.0	0.0
Strut tube (lwr strut)	1.0	655.3	655.3	0.0	0.0	0.0

SPRINGDAMPERS	Stiffness [N/mm]	Damping [N/mm/s]	Preload [N]	Length [mm]
Frnt strut (with inline jts)				
Coil spring	33.0	0.0	0.0	322.4
Strut damper	0.0	1.0	0.0	0.0
Rear strut (with inline jts)				
Coil spring	25.0	0.0	0.0	311.0
Strut damper	0.0	1.0	0.0	0.0

APENDICE 2

1. Modelos utilizando o formalismo de Newton-Euler

1.1. Um quarto de veículo

Os modelos de um quarto de veículo são relevantes para um estudo primário da capacidade de isolamento da suspensão com respeito às excitações verticais do solo.

Numa primeira abordagem, pode-se entender cada quarto do carro como uma massa suspensa (equivalente à metade da massa do eixo em questão) suportada por um sistema de suspensão equivalente presa à uma massa não suspensa (GILLESPIE, 1992). A Figura 52 apresenta um modelo deste tipo um pouco mais refinado no qual se considera a elasticidade do pneu. Evidente que outras variáveis, como o amortecimento do pneu, por exemplo, ainda poderiam ser acrescentadas, porém, como objeto de estudo, o modelo é satisfatório já que o amortecimento do pneu pode ser desprezado frente ao amortecimento da suspensão.

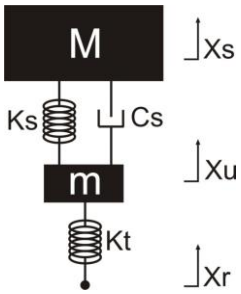


Figura 52. Modelo de um quarto de veículo

Para a obtenção das equações dinâmicas através das proposições de Newton-Euler é necessário a avaliação do diagrama de corpo livre de cada uma das massas, suspensa (M) e não suspensa (m) de maneira a aplicar o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) individualmente e extrair as equações para cada corpo.

Neste caso o Teorema do Momento Angular (TMA) não é necessário já que as rotações, e portanto as inércias rotativas, são desprezadas.

1- Diagrama de corpo livre da massa não suspensa.

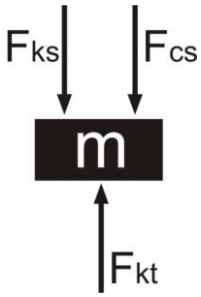


Figura 53. Diagrama de corpo livre da massa não suspensa

A Figura 53 descreve graficamente as forças as quais a massa não suspensa está sujeita: A força do solo (F_{kt}), força devido ao amortecedor (F_{cs}) e a força da mola da suspensão (F_{ks}).

Considerando-se um sistema de referências inercial, ou seja, não acelerado, Não há necessidade de se considerar as forças fictícias de Coriolis e de arrastamento no TMB, então, a equação dinâmica da Figura 53 fica:

$$\vec{F} = m.\overrightarrow{\ddot{X}_u} \tag{1.1}$$

Onde F é o somatório das forças externas sobre a massa não suspensa e $\ddot{X}_u$ a aceleração da mesma, portanto:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{kt}} + \overrightarrow{F_{cs}} + \overrightarrow{F_{ks}} \tag{1.2}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{kt}} + \overrightarrow{F_{cs}} + \overrightarrow{F_{ks}} \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{F_{cs}} = \left(\dot{X}_u - \dot{X}_s\right).C_s \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{F_{kt}} = (X_r - X_u).K_t \tag{1.5}$$

Substituindo as equações anteriores em (1.1) temos a equação que descreve a dinâmica deste corpo:

$$F = m.\ddot{X}_u = -(X_u - X_s).K_s - \left(\dot{X}_u - \dot{X}_s\right).C_s + (X_r - X_u).k_t \tag{1.6}$$

2- Diagrama de corpo livre da massa suspensa

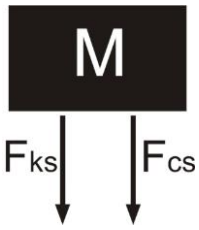


Figura 54. Diagrama de corpo livre da massa suspensa

Similar como feito para a massa não suspensa, a Figura 54 descreve graficamente as forças as quais a massa suspensa está sujeita: força devido ao amortecedor (F_{cs}) e a força da mola da suspensão (F_{ks}).

Considerando-se o mesmo sistema de referência inercial anterior, a obtenção da equação dinâmica ocorre da mesma maneira. O TMB para a massa suspensa fica:

$$\vec{F} = M.\overrightarrow{\ddot{X}_s} \tag{1.7}$$

Onde F é agora o somatório das forças externas agindo sobre a massa suspensa e $\ddot{X}_s$ a aceleração da mesma, portanto:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{cs}} + \overrightarrow{F_{ks}} \tag{1.8}$$

$$\overrightarrow{F_{ks}} = (X_u - X_s).K_s \tag{1.9}$$

$$\overrightarrow{F_{cs}} = \left(\dot{X}_u - \dot{X}_s\right).C_s \tag{1.10}$$

Substituindo as equações anteriores em (1.7) temos a equação que descreve a dinâmica deste corpo:

$$\vec{F} = M.\ddot{X}_s = -(X_s - X_u).K_s - \left(\dot{X}_s - \dot{X}_u\right).C_s \tag{1.11}$$

Reescrevendo as eqs. 1.6 e 1.11 temos as equações do movimento do sistema:

$$\begin{cases} \ddot{X}_u = \dfrac{1}{m}.\left[-(X_u - X_s).K_s - \left(\dot{X}_u - \dot{X}_s\right).C_s + (X_r - X_u).k_t\right] \\ \ddot{X}_s = \dfrac{1}{M}.\left[-(X_s - X_u).K_s - \left(\dot{X}_s - \dot{X}_u\right).C_s\right] \end{cases}$$

1.2. Modelo de carro completo

O exemplo mostrado anteriormente apresentou o passo a passo para a utilização dos fundamentos da mecânica clássica na obtenção da resposta dinâmica de um quarto de veículo. A seguir, um modelo mais complexo de carro completo com 12 graus de liberdade será elaborado utilizando o mesmo formalismo anterior.

A Figura 55 descreve o modelo em questão: Um modelo de veículo completo, com quatro massas não suspensas com liberdade apenas na direção X, suportadas por uma mola k_{ti} representando a rigidez radial do pneu.

A massa suspensa foi representada separadamente, massa dianteira M_f com inércia I_f e massa traseira M_r com inércia I_r, de maneira que pudesse ser representada uma rigidez torcional entre elas. Essas massas tem cada uma dois graus de liberdade, elas podem sofrer translação em X e rotacionar ao redor de Z. Com o intuito tão somente de simplificar as equações, esses dois graus de liberdade foram representados por duas translações independentes para cada massa x_{1f} e x_{2f} para a dianteira e x_{3r} e x_{4r} de tal maneira que a rotação pode ser calculada pela diferença entre os lados e a translação pela média aritmética dos mesmos.

A rigidez torcional está representada pela mola K presa as massas suspensas dianteira e traseira que por sua vez apoiam-se sobre a não suspensa, de valor m_i, por um conjunto mola-amortecedor k_i c_i.

A bitola dianteira tem valor $2.t_f$ e a traseira $2.t_r$. A distância entre os eixos é indiferente neste sistema pois, entre outras razões, a rigidez á flexão longitudinal deste chassi é considerada infinita.

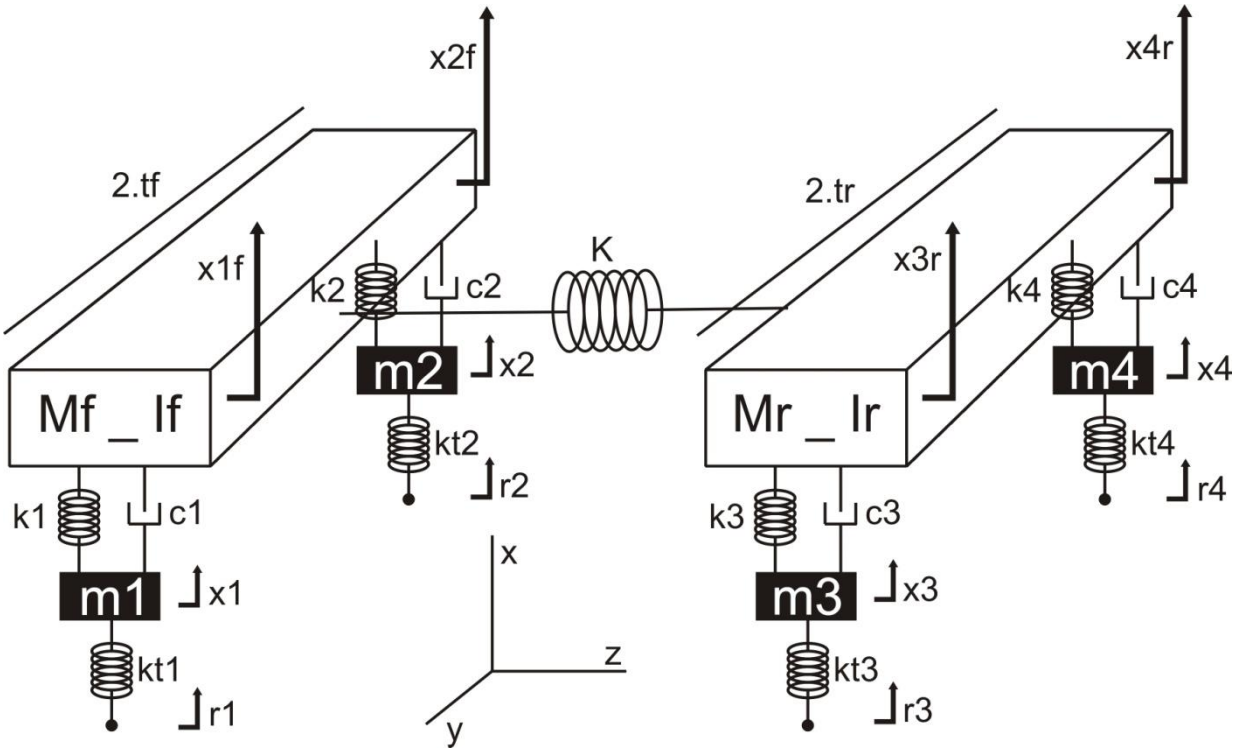


Figura 55. Modelo de carro completo com oito graus de liberdade

Utilizando uma formulação similar àquela adotada na modelagem anterior, temos para cada quarto do veículo a seguinte equação:

$$\ddot{x}_i = \frac{-F_{ik} - F_{ic} + (r_i - x_i).k_{ti}}{m_i} \tag{1.12}$$

Onde i representa cada quarto do carro, $i = \{1,2,3,4\}$ e portanto F_{ik} é a força devida a mola k_i, F_{ic} é a força devida ao amortecedor c_i, r_i é o deslocamento (excitação) vindo do solo e x_i é o grau de liberdade da massa não suspensa.

Calculando-se então cada força F_{ik} e F_{ic} temos:

$$F_{1k} = k_1.\left(x_1 - x_{1f}\right) \tag{1.13}$$

$$F_{1c} = c_1.\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1f}\right) \tag{1.14}$$

$$F_{2k} = k_2.\left(x_2 - x_{2f}\right) \tag{1.15}$$

$$F_{2c} = c_2.\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2f}\right) \tag{1.16}$$

$$F_{3k} = k_3.\left(x_3 - x_{3r}\right) \tag{1.17}$$

$$F_{3c} = c_3.\left(\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}\right) \tag{1.18}$$

$$F_{4k} = k_4.\left(x_4 - x_{4r}\right) \tag{1.19}$$

$$F_{4c} = c_4.(\dot{x}_4 - \dot{x}_{4r}) \tag{1.20}$$

Substituindo as equações de 1.13 a 1.20 em 1.12 temos determinadas as equações referentes às massas não suspensas.

$$\ddot{x}_1 = \frac{-[k_1.(x_1 - x_{1f})] - [c_1.(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1f})] + (r_1 - x_1).k_{t1}}{m_1} \tag{1.21}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-[k_2.(x_2 - x_{2f})] - [c_2.(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2f})] + (r_2 - x_2).k_{t2}}{m_2} \tag{1.22}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-[k_2.(x_2 - x_{2f})] - [c_2.(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2f})] + (r_2 - x_2).k_{t2}}{m_2} \tag{1.23}$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{-[k_4.(x_4 - x_{4r})] - [c_4.(\dot{x}_4 - \dot{x}_{4r})] + (r_4 - x_4).k_{t4}}{m_4} \tag{1.24}$$

Para a obtenção das equações referentes às massas suspensas, é adequado que se elabore um diagrama de corpo livre de uma das massas (Figura 56). As demais equações referentes à outra massa suspensa poderão ser obtidas por analogia à primeira.

O Diagrama apresentado na Figura 56 mostra a massa M_f numa determinada condição deformada (transladada de X e rotacionada de Θ em relação à condição inicial) sujeita às forças F_1 e F_2 (calculadas anteriormente) e um torque T devido à ação da mola K.

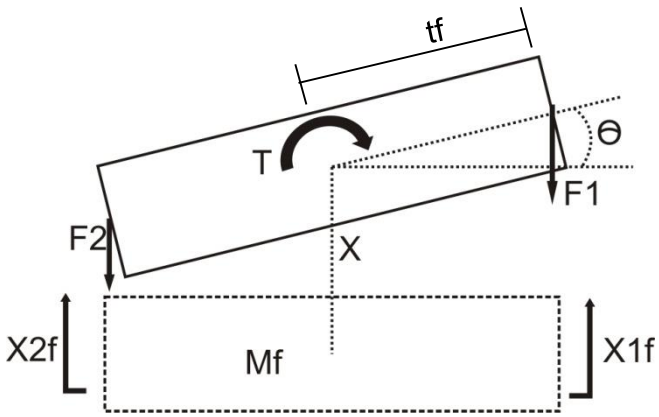


Figura 56. Vista frontal do diagrama de corpo livre da massa suspensa dianteira

Temos para essa configuração a seguinte relação:

$$x_{1f} = x - \Theta.tf \tag{1.25}$$

$$x_{2f} = x + \Theta.tf \tag{1.26}$$

Portanto, tomando-se a derivada segunda de (1.25) e (1.26), temos que a aceleração de x_{2f} e x_{if} será:

$$\ddot{x}_{1f} = \ddot{x} - \ddot{\Theta}.tf \tag{1.27}$$

$$\ddot{x}_{2f} = \ddot{x} + \ddot{\Theta}.tf \tag{1.28}$$

Utilizando o TMB e o TMA para o diagrama e considerando que o torque T, para pequenas deformações pode ser dado por:

$$T = K.\left[\operatorname{asin}\left(\frac{x_{f2} - x_{f1}}{t_f}\right) - \operatorname{asin}\left(\frac{x_{r4} - x_{r3}}{t_r}\right)\right] \approx K.\left[\frac{x_{f2} - x_{f1}}{t_f} - \frac{x_{r4} - x_{r3}}{t_r}\right]$$

tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{1}{M_f}.(F_{1k} + F_{1c} + F_{2k} + F_{2c}) \tag{1.29}$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{1}{I_f}.[(F_{2k} + F_{2c}).tf - (F_{1k} + F_{1c}).tf - T] \tag{1.30}$$

Substituindo as equações (1.29) e (1.30) em (1.27) e (1.28), determina-se as equações relativas à massa suspensa dianteira:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{1f} = {} & \frac{1}{M_f}.(F_{1k} + F_{1c} + F_{2k} + F_{2c}) \\ & - \frac{1}{I_f}.[(F_{2k} + F_{2c}).tf^2 - (F_{1k} + F_{1c}).tf^2 - T.tf]\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{2f} = {} & \frac{1}{M_f}.(F_{1k} + F_{1c} + F_{2k} + F_{2c}) \\ & + \frac{1}{I_f}.[(F_{2k} + F_{2c}).tf^2 - (F_{1k} + F_{1c}).tf^2 - T.tf]\end{aligned} \tag{1.32}$$

Analogamente é possível determinar as duas equações referentes à massa suspensa traseira observando que o torque T terá sinal invertido em relação a dianteira devido ao princípio da ação e reação.

$$\ddot{x}_{3r} = \frac{1}{M_r}.(F_{3k} + F_{3c} + F_{4k} + F_{4c}) - \frac{1}{I_r}.[(F_{4k} + F_{4c}).tr^2 - (F_{3k} + F_{3c}).tr^2 + T.tr] \tag{1.33}$$

$$\ddot{x}_{4r} = \frac{1}{M_r}.(F_{3k} + F_{3c} + F_{4k} + F_{4c}) + \frac{1}{I_r}.[(F_{4k} + F_{4c}).tr^2 - (F_{3k} + F_{3c}).tr^2 + T.tr] \tag{1.34}$$

Temos, portanto as equações do movimento determinadas.

2. Princípio do Trabalho Virtual

2.1. Cálculo Variacional

Nos estudos de dinâmica, os conceitos de cálculo variacional são frequentemente utilizados. Os princípios do Cálculo Variacional tal qual o Princípio de D'Alembert e o Princípio de Hamilton são considerados como fundamentos da mecânica analítica (BARUH, 1998). Essa seção trata portanto deste tema com o objetivo de fundamentar a base teórica que seguirá.

Um dos primeiros problemas surgidos no cálculo foi a determinação dos mínimos e máximos de determinada função. Newton, em 1671 e Leibnitz em 1684, deram os primeiros passos na solução deste problema ao notar que a taxa de variação de uma função nos mínimos e nos máximos era nula. Foi, no entanto, Euler que desenvolveu o Cálculo Variacional como o conhecemos hoje (BARUH, 1998).

Antes de introduzir o cálculo variacional, vamos tratar do conceito de valores estacionários de uma função.

2.1.1. Valores estacionários de uma função

Seja a função $f(x)$ descrita no intervalo $\varphi = (a, b)$. A função $f(x)$ terá um mínimo ou máximo local no interior do intervalo se existir x^* tal que $f(x) \geq f(x^*)$ ou $f(x) \leq f(x^*)$ para qualquer valor de x, e para que x^* seja máximo ou mínimo, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ deve ser nulo em $x = x^*$. Caso contrário os valores máximos e mínimos estarão nas extremidades $f(a)$ ou $f(b)$.

Para determinar se um determinado ponto $x = x^*$ é máximo ou mínimo locais é necessário que se avalie a segunda derivada de $f(x)$. A segunda derivada tem a característica de mostrar a forma da função, portanto, se $f''(x) > 0$, a função é convexa (concavidade para cima) e x^* será mínimo local, se $f''(x) < 0$, a função será côncava (concavidade para baixo) e x^* será máximo local. Quando $f''(x) = 0$ não se obtém conclusões.

Considerando agora uma função de n variáveis independentes $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sendo um ponto qualquer $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no intervalo $\varphi = (a_k \leq x_k \leq b_k, k =$

$1,2,\dots,n)$. A condição suficiente para haver mínimo ou máximo local, sendo a função $f(X)$ contínua e derivável para todas as variáveis, é de todas as derivadas primeiras com respeito a $x_1, x_2, \dots, x_n$ serem nulas, ou seja, o ponto $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ será mínimo ou máximo local se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{2.1}$$

Para determinar se o ponto $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ é mínimo ou máximo local é necessário investigar a segunda derivada que define a matriz Hessiana $[H]$.

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Sendo $[H]$ uma matriz positiva definida, o ponto estacionário X^* será um mínimo local, caso seja negativa definida, X^* será máximo local.

Uma matriz simétrica será positiva definida se todos os seus autovalores forem positivos e, analogamente, será negativa definida se todos os autovalores forem negativos. Caso um dos autovalores seja nulo, a matriz poderá ser será positiva-semidefinida caso os outros sejam positivos ou negativa-semidefinida caso os outros sejam negativos.

Vamos considerar agora uma função com restrições do tipo $c_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ para $j = 1,2,\dots,m$. Uma das maneiras para encontrar um ponto estacionário da função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeito às restrições $c_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é utilizando os multiplicadores de Lagrange. Para tanto, construímos a função Lagrangeana $\Phi(X) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que tem o mesmo valor de $f(X)$ porém na forma:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.3}$$

Onde λ_j é chamado de multiplicadores de Lagrange. Considerando a derivada do Lagrangeano:

$$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial c_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$dc_2 = \frac{\partial c_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial c_2}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$dc_m = \frac{\partial c_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial c_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Multiplicando cada uma das equações anteriores pelo multiplicador de Lagrange λ_j e substituindo-as em (2.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} d\Phi = df + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j dc_j = & \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial c_1}{\partial x_1}\lambda_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x_1}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial x_1}\lambda_m\right] dx_1 \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}\lambda_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x_2}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial x_2}\lambda_m\right] dx_2 \ldots \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial c_1}{\partial x_n}\lambda_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x_n}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial x_n}\lambda_m\right] dx_n = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para resolver a eq. 2.4 selecionam-se os multiplicadores de Lagrange de tal maneira que os termos entre chaves, coeficientes de dx, sejam nulos. Temos portanto um sistema de n equações que somadas às m equações provenientes das restrições $(c_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0)$ são suficientes para determinar as $m + n$ incognitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2.1.2. Aplicação do Cálculo Variacional em problemas de dinâmica

Descrevendo o movimento de uma partícula por coordenadas cartesianas x, y e z, e a variável t como a dependência do tempo. O vetor $r(x(t), y(t), z(t), t)$ descreve a posição da partícula. Sendo x, y e z as variáveis dependentes de t.

Como não há variação no vetor posição com respeito ao tempo, a variação das coordenadas espaciais, ou deslocamento virtual, é dado por:

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\delta y + \frac{\partial r}{\partial z}\delta z \tag{2.5}$$

O deslocamento virtual pode ser entendido como um reposicionamento do sistema enquanto o tempo está fixo, ou seja, instantaneamente. Essa posição arbitrária deve respeitar as condições de contorno e os movimentos possíveis que a partícula pode descrever. Este conceito está ilustrado na Figura 57.

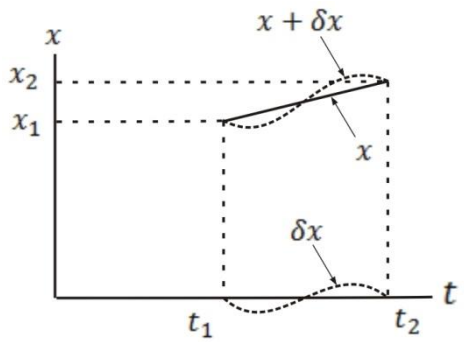


Figura 57. Deslocamento virtual referente à coordenada x

A variação na posição está diretamente relacionada à variação na velocidade. Para o movimento da partícula em questão, a velocidade pode ser dada por:

$$v(x, y, z, t) = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x}\delta\dot{x} + \frac{\partial r}{\partial y}\delta\dot{y} + \frac{\partial r}{\partial z}\delta\dot{z} + \frac{\partial r}{\partial t} \tag{2.6}$$

Portanto há a possibilidade de se calcular o deslocamento virtual a partir da expressão da velocidade, ao invés de tomar as derivadas da posição da partícula como será apresentado adiante.

2.2. Deslocamento Virtual e Trabalho Virtual

O Princípio do Trabalho Virtual afirma que se uma partícula, ou um corpo rígido, ou, de maneira mais geral, um sistema de corpos rígidos, está em equilíbrio sob a ação de várias forças externas e se o sistema sofre um deslocamento arbitrário a partir da posição de equilíbrio, o trabalho total efetuado pelas forças externas durante o deslocamento é nulo (BERR e JOHNSTON, 1994).

Utilizando a notação variacional, os deslocamentos virtuais podem ser $\delta x, \delta y, \delta z$ em termos de coordenadas cartesianas ou $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ em coordenadas generalizadas. Da mesma maneira, denota-se a variação da velocidade por $\delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z}$ em coordenadas físicas e $\delta \dot{q}_1, \delta \dot{q}_2, \dots, \delta \dot{q}_n$ para coordenadas generalizadas.

As regras para se calcular os deslocamentos virtuais é similar às de diferenciação. Considerando o vetor posição $r = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, ou $r = r(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ a variação de r torna-se:

$$\delta r = \delta x \boldsymbol{i} + \delta y \boldsymbol{j} + \delta z \boldsymbol{k} \tag{2.7a}$$

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial q_n}\delta q_n \tag{2.7b}$$

A variação de determinado vetor posição pode ser obtida de duas diferentes maneiras:

-Abordagem analítica

Nesta abordagem, determina-se uma expressão analítica para o vetor posição e toma-se o variacional a partir da diferenciação de suas coordenadas generalizadas. Essa abordagem, em problemas complexos, pode tornar as equações extensas e o processo de obtenção delas passível de erros.

-Abordagem cinemática

Esta abordagem vale-se da similaridade entre a velocidade e os deslocamentos virtuais. Quando se obtém a variação de uma expressão, a variável independente não varia. Sendo o tempo independente, nos casos em estudo, a derivada no tempo de r é:

$$\dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k + \frac{\partial r}{\partial t} \tag{2.8a}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial r}{\partial t} \tag{2.8b}$$

Eliminando-se todas as derivadas parciais de r com respeito ao tempo, substituindo $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ por $\delta x, \delta y, \delta z$ na eq. (2.8a), e $\dot{q}_k$ $(k = 1,2, \dots, n)$ por δq_k na eq. (2.8b), leva ao variacional de r.

Isso mostra que se a expressão para a velocidade for conhecida, o deslocamento virtual associado pode ser diretamente obtido a partir dela. Essa abordagem é de grande utilidade quando a velocidade de um ponto pode ser determinada a partir de um centro instantâneo ou velocidade relativa, tal como:

$$v_B = v_A + \omega \wedge r_{B/A} + v_{Brel} \tag{2.9}$$

O variacional de (2.9) é:

$$\delta r_B = \delta r_A + \delta\theta \wedge r_{B/A} + \delta r_{Brel} \tag{2.10}$$

Vamos considerar agora o trabalho realizado por uma força num determinado deslocamento virtual. Seja uma força F atuando em determinado corpo com um deslocamento virtual associado ao ponto no qual a força é aplicada. Define-se o trabalho realizado por uma força num deslocamento virtual δr como Trabalho Virtual.

$$\delta W = F.\delta r \tag{2.11}$$

De forma mais genérica, o Trabalho Virtual de um corpo sujeito às forças $F_1, F_2, \dots, F_n$ será dado por:

$$\delta W = F_1.\delta q + F_2.\delta q + \cdots + F_n \delta q \tag{2.12}$$

A eq. (2.12) pode ser estendida para um caso de um sistema de sólidos vinculados em equilíbrio considerando-se que num sistema estático as forças e momentos não realizam trabalho, ou seja, $\delta W = 0$.

$$\delta W = 0 = \sum_i F_i . \delta q_i + \sum_j M_j . \delta \theta_j \tag{2.13}$$

A eq. (2.13) é válida para um sistema em equilíbrio, pois as forças externas não realizam trabalho, ou seja, não há deslocamento e $\delta W = 0$. O termo δq_i é o deslocamento virtual da coordenada generalizada q_i associada à força F_i. Da mesma maneira, o termo $\delta \theta_i$ é o deslocamento (rotação) virtual da coordenada generalizada θ_i associada ao momento M_i.

2.3. Princípio de D'Alembert

Tratou-se até o momento do Princípio do Trabalho Virtual como ferramenta descritiva de sistemas estáticos. O Princípio de D'Alembert estende o Princípio do Trabalho Virtual da estática para a dinâmica.

Consideremos um sistema de N partículas não estáticas. Podemos escrever a Segunda Lei de Newton para a iésima partícula como:

$$R_i = m_i . a_i = \frac{d}{dt} p_i \quad i = 1,2, \dots, N \tag{2.21}$$

Onde $p_i = m . v_i$ é a quantidade de movimento da iésima partícula e R_i é a resultante de todas as forças sobre a mesma. Dividindo-se a resultante R_i em forças externas F_i e forças internas $F_i{}'$ obtém-se:

$$R_i = F_i + F_i' \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) em (2.21) obtém-se:

$$F_i + F_i' - \dot{p}_i = 0 \tag{2.23}$$

Onde o termo negativo da taxa de variação da quantidade de movimento $-\dot{p}_i = -m_i . a_i$ é tratado como uma força inercial que permite o equilíbrio. Pode-se, portanto, através da eq. (2.23), supor o sistema dinâmico como um estático e utilizar o Princípio do Trabalho Virtual.

Variacionando-se portanto a eq. (2.23) e somando todas as partículas do sistema tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i + F_i' - m_i a_i) . \delta r_i = 0 \tag{2.24}$$

Sabendo-se que as forças externas não realizam trabalho ($\sum_{i=1}^{N} F_i' . \delta r_i = 0$) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) . \delta r_i = 0 \tag{2.25}$$

A eq. 2.25 é conhecida como Princípio de D'Alembert.

Observa-se que o caso estático nada mais é do que um caso particular da eq. (2.25) quando não há forças inerciais. Portanto, o Princípio de D'Alembert fornece uma completa formulação para todos os problemas mecânicos.

2.3.1. Princípio de D'Alembert para corpos rígidos

Para a extrapolação do princípio de D'Alembert, trata-se os corpos rígidos como uma soma infinita de partículas, ou seja, na eq. (2.25) $N \to \infty$. Seja, num sistema plano, a velocidade angular de um corpo rígido P definida por $\omega = \dot{\theta}$, pode-se escrever a posição, a velocidade e aceleração deste corpo como, respectivamente:

$$r_i = r_G + P_i \qquad v_i = v_G + \omega \wedge P_i \qquad a_i = a_G + \alpha \wedge p_i - \omega^2 P_i \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{2.26}$$

Onde o subscrito G indica a coordenada do centro de gravidade do corpo e $\omega = \dot{\theta}k$ e $\omega = \ddot{\theta}k$. Dessa forma, o variacional de r_i fica:

$$\delta r_i = \delta r_G + \delta\theta k \wedge P_i \tag{2.27}$$

Sendo $\delta\theta = \delta\theta k$ e substituindo-se as equações (2.26) e (2.27) em (2.25) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i - m_i \alpha \wedge P_i + m_i \omega^2 P_i).(\delta r_G + \delta\theta k \wedge P_i) = 0 \tag{2.28}$$

Voltando a hipótese anterior de que o corpo rígido é uma soma infinita de partículas, O somatório passa a ser uma integral e m_i, P_i e F_i passam a ser dm, P e dF respectivamente, sendo m a massa total e F a resultante das forças externas. Integrando os termos tem-se:

$$\int dF.\delta r_G = F.\delta r_G \qquad \int dF.(\delta\theta k \wedge P) = M_G.\delta\theta \qquad \int dm a_G.\delta r_G = m a_G.\delta r_G$$
$$\int dm(\ddot{\theta} k \wedge P).(\delta\theta k \wedge P) = \ddot{\theta}\delta\theta \qquad \int P^2 dm = I_G \ddot{\theta}\delta\theta \tag{2.29}$$

Onde I_G é o momento de inércia com respeito ao centroide e M_G é a soma dos momentos externos aplicados com respeito ao centro de massa. O Princípio de D'Alembert para um corpo rígido em movimento plano fica portanto:

$$(F - m a_G).\delta r_G + (M_G - I_G \ddot{\theta}).\delta\theta = 0 \tag{2.30}$$

E para um sistema de N corpos rígidos:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_{G_i}).\delta r_{G_i} + (M_{G_i} - I_{G_i} \ddot{\theta}_i).\delta\theta_i = 0 \tag{2.31}$$

Essa demonstração ficará restrita ao caso plano, uma vez que o capítulo seguinte tratará da modelagem analítica de sistemas multicorpos utilizando o Princípio do Trabalho Virtual. A formulação a seguir é comumente utilizada para a determinação das equações estáticas e dinâmicas de manipuladores e plataformas robóticas, tanto seriais quanto paralelas.

3. Modelo analítico de veículo utilizando o Princípio do Trabalho Virtual

Este tratamento que será dado ao problema de um sistema multicorpos não é usual quando se fala de um problema de dinâmica veicular no qual em geral utiliza-se o formalismo de Newton-Euler. A utilização do Princípio do Trabalho Virtual permite a obtenção das equações dinâmicas do sistema sem que haja a necessidade de desmontá-lo, como ocorre na utilização de Newton-Euler que exige diagramas de corpos livres para cada corpo. Essa abordagem facilita o tratamento matemático de sistemas com grandes proporções, ou seja, com elevado número de corpos e de graus de liberdade.

No entanto, a necessidade de se recorrer a “artifícios matemáticos”, como os deslocamentos virtuais, aparece como uma desvantagem uma vez que perde-se o sentido físico do problema ao longo da construção das equações.

3.1. Mecanismos Paralelos

Existem diversas formas de se classificar um mecanismo, entre elas o número de graus de liberdade e a estrutura cinemática. Nesta última estão os mecanismos seriais e os mecanismos paralelos. Como Tsai (1999) descreve, um robô é dito serial quando a sua estrutura toma a forma de loop-aberto, como no caso de braços manipuladores largamente utilizados na indústria automotiva.

Mecanismos paralelos tem a estrutura na forma de um loop-fechado, ou seja, existe mais de um atuador para controlar o movimento final desejado. A Figura 58 ilustra um mecanismo plano paralelo de 3 graus de liberdade com 3 atuadores rotacionais (3RRR)

Podemos entender um sistema como o mostrado na Figura 55 como sendo um mecanismo paralelo de tal maneira que a massa suspensa do veículo seja a plataforma, atuada pelo movimento da massa não suspensa em conjunto com a suspensão. Desta forma, será demonstrado adiante a aplicabilidade deste conceito.

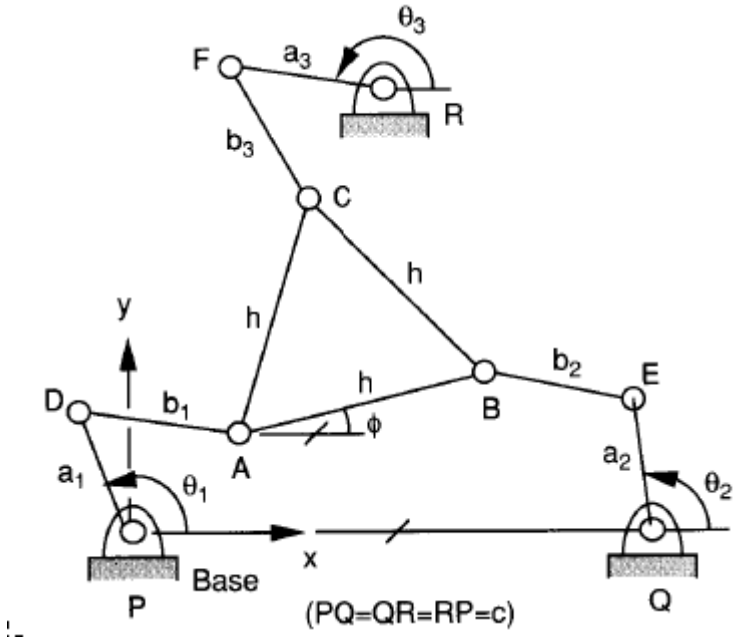


Figura 58. Mecanismo plano 3RRR de 3 graus de liberdade (TSAI., 1999)

3.2. Análise Jacobiana

Na aplicação robótica, as matrizes Jacobianas têm a função de relacionar o comportamento dos atuadores de determinado robô com o comportamento do movimento de saída do mesmo.

Para transpor esse conceito na modelagem de um veículo, basta considerar que o efeito final observado seja o comportamento da massa suspensa e os atuadores sejam as rodas e suspensão sujeitas às oscilações do solo.

Utilizando a mesma nomenclatura de Tsai (1999), pode-se demonstrar o conceito. Considera-se o atuador descrito por uma coordenada generalizada q e o posicionamento de determinado corpo sujeito a esse atuador, descrito por um vetor x. Sabendo-se que existe uma restrição entre ambos, já que estão conectados, pode-se escrever:

$$f(x, q) = 0 \tag{3.1}$$

Onde f é uma função de dimensão n dada pela quantidade de n atuadores e 0 é um vetor nulo também de dimensão n.

Diferenciando a eq. (3.1) com respeito ao tempo tem-se:

$$J_x . \dot{x} = J_q . \dot{q} \tag{3.2}$$

Onde:

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad J_q = -\frac{\partial f}{\partial q}$$

Podemos unir ambas as matrizes Jacobianas numa única matriz J, de tal maneira que (3.2) fica:

$$\dot{q} = J\dot{x} \tag{3.3}$$

Onde:

$$J = J_q^{-1} J_x$$

3.3. Análise de Rigidez de Mecanismos Paralelos Utilizando o PTV

Além de se utilizar o conceito de Matrizes Jacobianas para a determinação das equações dinâmicas, é necessário que se conheça a formulação para a caracterização da rigidez dentro do modelo. Dessa forma, é possível a representação, por exemplo, dos elementos de suspensão do veículo.

Ainda utilizando a nomenclatura de Tsai (1999), podemos escrever os deslocamentos virtuais em coordenadas generalizadas das juntas como $\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_n]^T$, onde n é o número de atuadores, e para as coordenadas de saída esperada $\delta x = [\delta x, \delta y, \dots \delta \psi]^T$. Seja a força e o momento na saída dados por:

$$F = \begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Onde f é a força e n o momento.

E a força nos atuadores dados por:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Portanto, o trabalho virtual δW dado por todas as forças ativas é dado por:

$$\delta W = 0 = \tau^T \delta q - F^T \delta x \tag{3.6}$$

Sabendo-se que os deslocamentos virtuais δq e δx estão relacionados por:

$$\delta x = J \delta q \tag{3.7}$$

Obtemos, substituindo a eq. (3.7) em (3.6):

$$(\tau^T - F^T J)\delta q = 0 \tag{3.8}$$

Como a eq. (3.8) deve ser nula para qualquer valor de δq tem-se:

$$\tau^T - F^T J = 0$$
$$\tau = J^T F \tag{3.9}$$

A eq. (3.9) configura a dependência dos torques dos atuadores com os toques na saída observada. Essa dependência é dada pela matriz J.

A solução obtida anteriormente é para um caso estático de corpos perfeitamente rígidos. No entanto, deseja-se conhecer a rigidez dos atuadores, uma vez que estes, no caso da modelagem do veículo, serão a representação da própria suspensão.

Sendo Δq_i a deflexão sofrida pelas juntas, pode-se relacionar τ_i e Δq_i pela relação:

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \tag{3.10}$$

Onde k_i é a rigidez da k-ésima junta. Utilizando a notação matricial para representar todas as juntas tem-se:

$$\tau = \chi \Delta q \tag{3.11}$$

Onde $\tau = [\tau_1 \tau_2, \dots, \tau_n]^T$, $\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T$ e $\chi = diag[k_1, k_2, \dots, k_n]$ é uma matriz diagonal $n \text{ x } n$.

Como visto anteriormente, o deslocamento das juntas está relacionado ao movimento de saída na forma da eq. (3.7):

$$\Delta x = J \Delta q \tag{3.12}$$

E a força de saída está relacionada aos torques por (3.9). Eliminando-se Δq e τ a partir das equações (3.9), (3.10) e (3.11), obtém-se:

$$F = K . \Delta x \tag{3.13}$$

Onde $K = J^{-T} \chi J^{-1}$ é dita a matriz de rigidez.

3.4. Dinâmica de Mecanismos Paralelos

Não há uma única maneira de se obter as equações dinâmicas de um determinado mecanismo paralelo, assim como para qualquer outro sistema. Entre essas formas está a formulação clássica de Newton-Euler que apresenta uma desvantagem em relação as demais que é a necessidade de se escrever as equações do movimento para cada corpo separadamente. O que, num sistema com muitos graus de liberdade, leva a um elevado número de equações e consequentemente dificuldade na sua resolução.

A formulação de Lagrange mostra-se mais eficiente que Newton-Euler pois, além de permitir uma sistematização na obtenção das equações, elimina as forças internas do sistema além e não trabalha com grandezas vetoriais. Porém, no caso de sistemas não-holônomos, como os mecanismos de cadeia fechada, exige que se calcule os multiplicadores de Lagrange.

Posto isso, o PTV, somado ao conceito de matrizes Jacobianas, aparece como um método eficiente, uma vez que, além de não trabalhar com grandezas vetoriais e não necessitar da consideração das forças internas ao sistema, permite a sistematização na obtenção das equações do movimento. Como demonstrado anteriormente na seção 2.3, a aplicação do Princípio de D'Alembert permite a

generalização do Princípio do Trabalho Virtual, que passa a satisfazer tanto sistemas estáticos quanto dinâmicos.

3.5. Modelo de Meio Veículo

Utilizando os conceitos apresentados até o momento, será proposta uma modelagem de meio veículo.

A Figura 59 descreve o modelo a ser utilizado. Uma massa suspensa de valor M e inércia I que pode rotacionar θ em seu próprio eixo e deslocar-se y_g na direção vertical a partir da posição inicial h.

A massa suspensa de largura total $2L$ é sustentada por um conjunto mola amortecedor de coeficientes k_1, k_2 e c_1, c_2 e comprimento $l1$ e $l2$. As massas não suspensas de valor $m1$ e $m2$, distantes entre si $2B$, podem se deslocar na direção y com valores $y1$ e $y2$ respectivamente

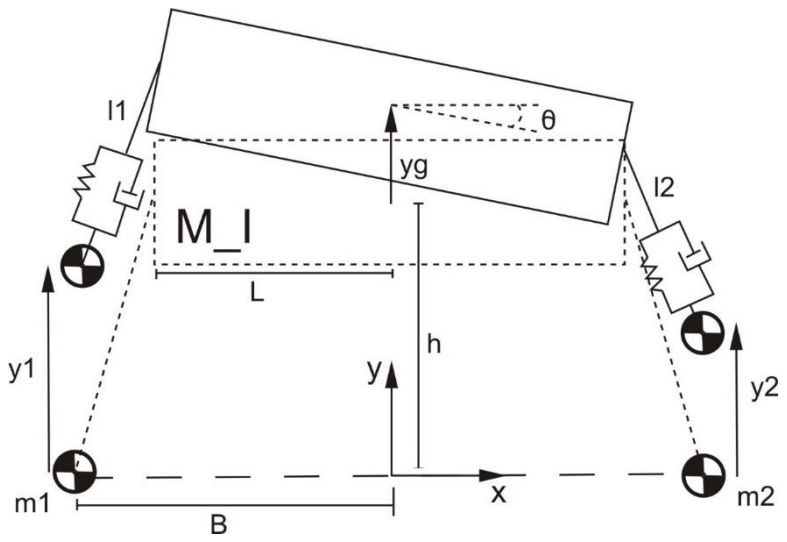


Figura 59. Modelo de meio veículo

-Abordagem analítica

Dada a relativa simplicidade em se determinar as posições neste modelo, a abordagem analítica é adequada para a determinação dos Jacobianos e consequentemente as equações dinâmicas.

Determina-se as relações entre os comprimentos $l1$ e $l2$, as posições $y1$ e $y2$ e a posição da massa suspensa:

$$\begin{cases} f_1 = \left[\left(y_g + h\right) + L.sen(\theta) - y1\right]^2 + [B - L.\cos(\theta)]^2 - l1^2 = 0 \\ f_2 = \left[\left(y_g + h\right) - L.sen(\theta) - y2\right]^2 + [B - L.\cos(\theta)]^2 - l2^2 = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sabendo-se que $df = 0$ tem-se:

$$\begin{cases} df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_g}\delta y_g + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial f_1}{\partial y1}\delta y1 + \frac{\partial f_1}{\partial y2}\delta y2 + \frac{\partial f_1}{\partial l1}\delta l1 + \frac{\partial f_1}{\partial l2}\delta l2 = 0 \\ df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_g}\delta y_g + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial f_2}{\partial y1}\delta y1 + \frac{\partial f_2}{\partial y2}\delta y2 + \frac{\partial f_2}{\partial l1}\delta l1 + \frac{\partial f_2}{\partial l2}\delta l2 = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Pode-se rearranjar o sistema anterior na forma matricial:

$$J_g.\delta_g + J_y.\delta_y + J_l.\delta_l = 0 \quad (3.16)$$

Onde:

$$J_g.\delta_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_g} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_g} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta y_g \\ \delta\theta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$J_y.\delta_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y1} & \frac{\partial f_1}{\partial y2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y1} & \frac{\partial f_2}{\partial y2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta y1 \\ \delta y2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$J_l.\delta_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l1} & \frac{\partial f_1}{\partial l2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l1} & \frac{\partial f_2}{\partial l2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta l1 \\ \delta l2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Efetuando-se as derivadas obtém-se:

$$J_g = \begin{bmatrix} \left(y_g + h\right) + L.sen(\theta) - y1 & BL.sen(\theta) + \left(y_g + h\right).L.cos(\theta) - y_1.L.cos(\theta) \\ \left(y_g + h\right) - L.sen(\theta) - y2 & BL.sen(\theta) - \left(y_g + h\right).L.cos(\theta) - y_2.L.cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$J_y = \begin{bmatrix} -\left[\left(y_g + h\right) + L.sen(\theta) - y1\right] & 0 \\ 0 & -\left[\left(y_g + h\right) - L.sen(\theta) - y2\right] \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$J_l = \begin{bmatrix} -l1 & 0 \\ 0 & -l2 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Temos portanto definido as relações entre δ_g, δ_y e δ_l em função dos Jacobianos. Sendo $y1$ e $y2$ as entradas conhecidas do sistema, Pode-se determinar a deflexão da mola e a velocidade de deflexão através da eq. (3.16):

$$\delta_l = J_l^{-1}\left(-J_g.\delta_g - J_y.\delta_y\right) \tag{3.23a}$$

$$\dot{\delta}_l = J_l^{-1}\left(-J_g.\dot{\delta}_g - J_y.\dot{\delta}_y\right) \tag{3.23b}$$

Utilizando o PTV para o sistema apresentado tem-se:

$$f^T.\delta_y - \tau^T.\delta l + W^T.\delta_g = 0 \tag{3.24}$$

Substituindo (3.23a) em (3.24):

$$f^T.\delta_y - \tau^T.J_l^{-1}\left(-J_g.\delta_g - J_y.\delta_y\right) + W^T.\delta_g = 0$$

$$f^T.\delta_y + \tau^T.J_l^{-1}J_g.\delta_g + \tau^T.J_l^{-1}J_y.\delta_y + W^T.\delta_g = 0$$

$$\left(f^T + \tau^T.J_l^{-1}J_y\right).\delta_y + \left(\tau^T.J_l^{-1}J_g + W^T\right).\delta_g = 0 \tag{3.25}$$

Da eq. (3.25), podemos obter as equações dinâmicas sabendo-se que os termos $\left(f^T + \tau^T.J_l^{-1}J_y\right)$ e $\left(\tau^T.J_l^{-1}J_g + W^T\right)$ devem ser nulos para qualquer valor de δ_y e δ_g. Além disso, como será imposto um deslocamento $Y1$ e $Y2$ ao sistema independentemente da força necessária para tal, a eq. $f^T + \tau^T.J_l^{-1}J_y = 0$ fica já determinada pois f poderá assumir qualquer valor. Portanto para resolver o sistema completamente basta resolver:

$$\tau^T.J_l^{-1}J_g + W^T = 0 \tag{3.25}$$

Onde

$$\tau = \chi.\Delta l = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \delta_{l1} \\ \delta_{l2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{l1} \\ \dot{\delta}_{l2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1.\delta_{l1} \\ k_2.\delta_{l2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1.\dot{\delta}_{l1} \\ c_2.\dot{\delta}_{l2} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$W = \begin{bmatrix} F_{yg} - M.\ddot{y}_g \\ M_{yg} - I.\ddot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Onde F_{yg} é a força vertical que atua no CG da massa suspensa e M_{yg} é o momento que atua no mesmo ponto.

Substituindo (3.27) em (3.25) tem-se:

$$\begin{aligned}&[k_1.\delta_{l1} + c_1.\dot{\delta}_{l1} \quad k_2.\delta_{l2} + c_2.\dot{\delta}_{l2}].J_l^{-1}J_g \\ &+ \left[F_{yg} - M_{yg}.\ddot{y}_g \quad M - I.\ddot{\theta}\right] = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

Reescrevendo a eq. (3.28) para isolar as acelerações:

$$\begin{aligned}\left[\ddot{y}_g \quad \ddot{\theta}\right] = [F_{yg} \quad M_{yg}].\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\ - [k_1.\delta_{l1} + c_1.\dot{\delta}_{l1} \quad k_2.\delta_{l2} + c_2.\dot{\delta}_{l2}].J_l^{-1}J_g.\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned} \tag{3.29}$$

A eq. (3.29) juntamente à movimentação imposta nas rodas é suficiente para descrever completamente o movimento do sistema.

3.6. Modelo de carro completo

Com a determinação do modelo de meio veículo é possível estender as equações de maneira a obter um modelo de veículo completo. A Figura 60 apresenta a combinação de dois modelos similares ao anterior no qual a Figura 59 é representada por linhas tracejadas. Neste modelo as características são similares ao anterior. Há dois novos deslocamentos $Y3$ e $Y4$ que representam a posição das rodas traseiras esquerda e direita respectivamente. Um corpo suspenso de massa e inércia $M2$ e $I2$ respectivamente e rotacionado de $\theta 2$, suportado por dois conjuntos mola amortecedor representados por $l3$ e $l4$. A altura inicial da massa suspensa adicional é igual a anterior ($h = h2$), enquanto que seu comprimento total é de $2.L2$ e a bitola é de $2.B2$. As massas suspensas estão conectadas através de seus baricentros por uma mola de rigidez torcional K que representaria a rigidez torcional total da estrutura do veículo. O momento gerado nesta mola pela rotação das massas será dado por $M_k = K(\theta 2 - \theta)$

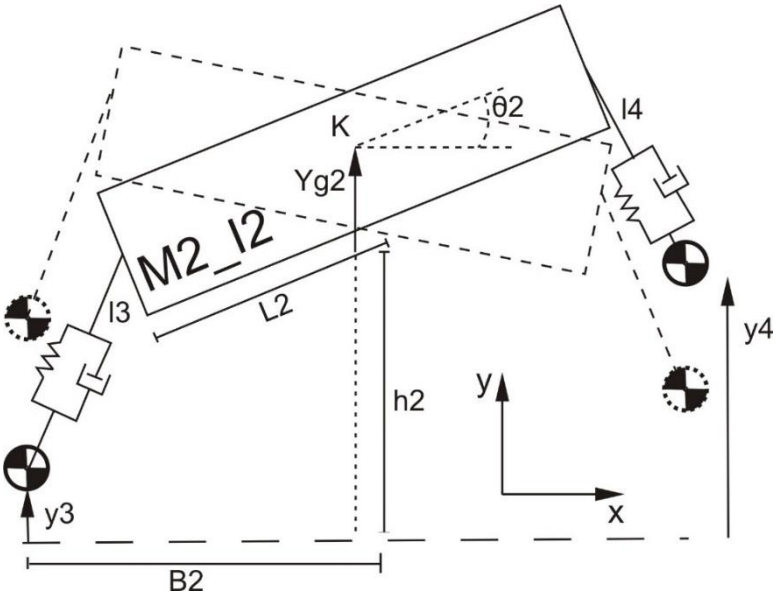


Figura 60. Vista frontal de um modelo de carro completo

Por analogia, podemos escrever que a equação que descreve o movimento da massa suspensa adicional é:

$$\begin{aligned}&\left[\ddot{y}_{g2} \quad \ddot{\theta}_2\right]\\&= [F_{yg2} \quad -M_k].\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1}\\&- [k_3.\delta_{l3} + c_3.\dot{\delta}_{l3} \quad k_4.\delta_{l4} + c_4.\dot{\delta}_{l4}].J_{l2}^{-1}J_{g2}.\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned} \tag{3.30}$$

Onde M_k representa o torque gerado pela diferença de rotação das massas suspensas e tem valor negativo dado o princípio de ação e reação.

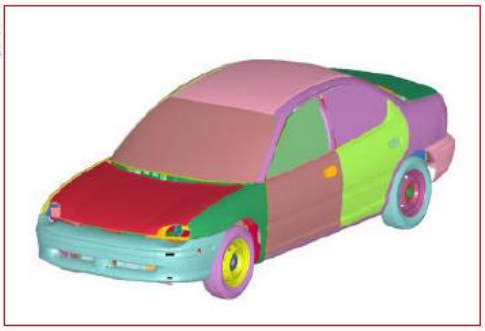
Tem-se portanto, que as duas equações de movimento que descrevem o sistema do carro completo são:

$$\begin{aligned}\left[\ddot{y}_g \quad \ddot{\theta}\right] &= [F_{yg} \quad M_{yg}].\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} - [k_1.\delta_{l1} + c_1.\dot{\delta}_{l1} \quad k_2.\delta_{l2} + c_2.\dot{\delta}_{l2}].J_l^{-1}J_g.\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}\\ \left[\ddot{y}_{g2} \quad \ddot{\theta}_2\right] &= [F_{yg2} \quad -M_k].\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1} - [k_3.\delta_{l3} + c_3.\dot{\delta}_{l3} \quad k_4.\delta_{l4} + c_4.\dot{\delta}_{l4}].J_{l2}^{-1}J_{g2}.\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned} \tag{3.31}$$

ANEXO 1

FE Model of Dodge Neon

THE GEORGE WASHINGTON UNIVERSITY VIRGINIA CAMPUS



- **Model developed mainly for frontal impacts**
- **Material data derived from coupon testing**
- **Frontal NCAP validation complete**

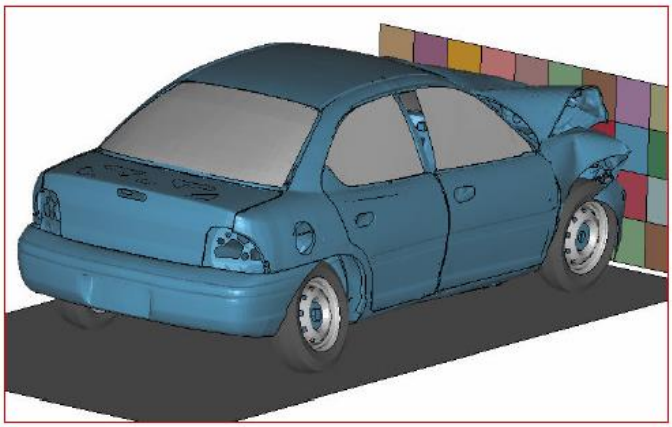
Number of Parts	- 336
Number of Nodes	- 283859
Number of Solids	- 2852
Number of Beams	- 122
Number of Shells	- 267786
Number of Elements	- 270768

6/30/2006

NCAC

Benchmark Data

THE GEORGE WASHINGTON UNIVERSITY VIRGINIA CAMPUS

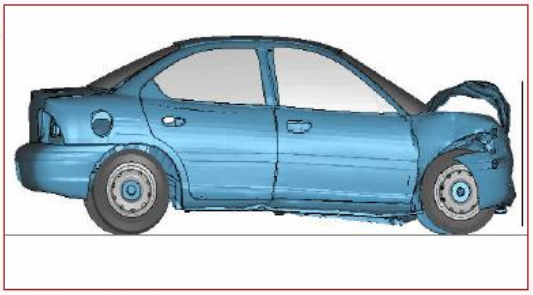


LS-DYNA
Version: 970
Revision: 5434a
Platform: SGI Workstation
OS level: IRIX64 6.5 (64 bit)
Precision: Single precision (I4R4)
Total CPU time: ~ 47 hrs (for 150 ms)
Number of processors: 4

6/30/2006

NCAC

NCAP Comparison



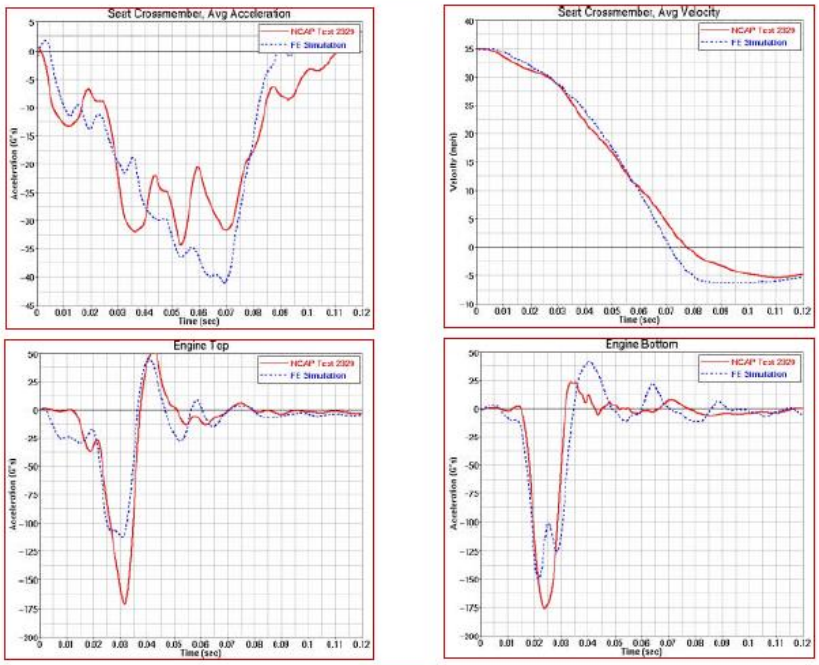
	FE Model	Test Vehicle
Weight (Kgs)	1333	1354
Engine Type	2.0L I4	2.0L I4
Tire size	P185/65R15	P185/65R14
Attitude (mm) As delivered	F – 675	F – 660
	R – 665	R – 676
Wheelbase (mm)	2648	2642
CG (mm) Rearward of front wheel C/L	1046	1022

NCAP Test Summary

Test No.: 2320
Contract or Study Title: 1996 DODGE NEON INTO FLAT FRONTAL BARRIER (Load cell wall)
Test Performer: TRC OF OHIO
Test Reference No.: 951026
Test Type: NEW CAR ASSESSMENT TEST
Test Configuration: VEHICLE INTO BARRIER
Closing Speed (kph): 56.5
Impact Angle (degrees): 0
Offset Distance (mm):
Version No.: 2
Test Objectives: OBTAIN 35 MPH NEW CAR ASSESSMENT AND RESEARCH DATA
Test Date: 10/26/1995
Contract No.: DTNH22-90-D-22121
Test Track Surface: CONCRETE
Test Track Condition: DRY
Ambient Temperature (degrees Celsius): 0
Type of Recorder: FM MULTIPLEXOR TAPE RECORDER
Total No. of Curves: 130
Test Commentary: THIS IS A 1995 TEST CONDUCTED ON 1996 VEHICLE

THE GEORGE WASHINGTON UNIVERSITY VIRGINIA CAMPUS

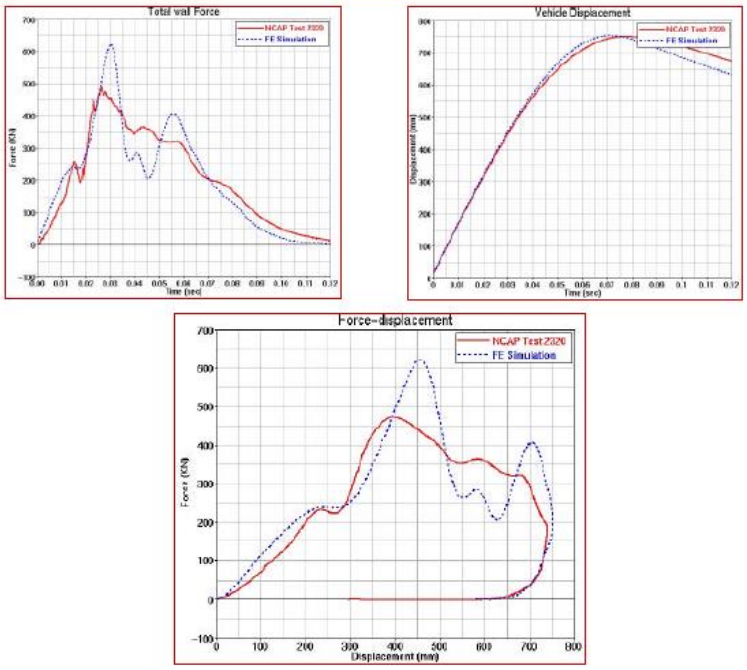
Accelerometer Data



NCAC

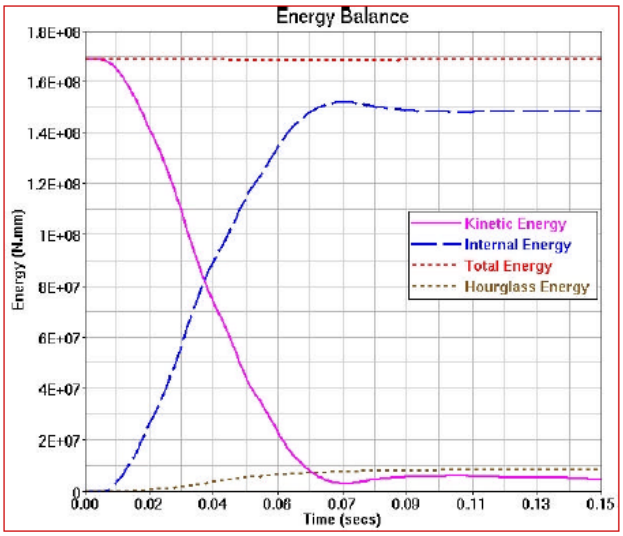
THE GEORGE WASHINGTON UNIVERSITY VIRGINIA CAMPUS

Total wall force & displacement



NCAC

Energy Balance



Notes

- FE simulation is correlated to NCAP test. FE simulation shows higher wall force compared to the NCAP test.
- FE model is stable in full frontal flat rigid wall simulations (Model has been run at 25, 30, 35 and 40 mph to ensure stability).