ANDRÉ RODRIGUES GARCIA DA SILVEIRA

Determinação analítica da correção de hélice em um par engrenado devido ao efeito da flexo-torção

São Paulo

2016

ANDRÉ RODRIGUES GARCIA DA SILVEIRA

Determinação analítica da correção de hélice em um par engrenado devido ao efeito da flexo-torção

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências**

São Paulo

2016

ANDRÉ RODRIGUES GARCIA DA SILVEIRA

Determinação analítica da correção de hélice em um par engrenado devido ao efeito da flexo-torção

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Ciências**

**Área de Concentração:
Engenharia Mecânica**

**Orientador: Prof. Dr. Roberto
Martins de Souza**

São Paulo

2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Silveira, André

Determinação analítica da correção de hélice em um par engrenado devido ao efeito da flexo-torção / A. Silveira -- versão corr. -- São Paulo, 2016.
101 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 2.ELEMENTOS DE MÁQUINAS
3.ENGRENAGENS I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

O foco do presente trabalho é estudar a intensificação da pressão de contato entre os dentes de duas engrenagens cilíndricas de dentes retos, que ocorre por causa do deslocamento dos componentes de um redutor de velocidades. Essa intensificação ocorre inclusive em um redutor fabricado sem quaisquer erros de usinagem ou de montagem.

A correção de hélice é uma usinagem realizada na superfície do dente da engrenagem que compensa os deslocamentos dos eixos e engrenagens, devido à flexão e à torção, e os deslocamentos dos dentes das engrenagens, devido à flexão e à pressão de contato.

Foram estudados efeitos importantes para essa correção de hélice em um redutor de velocidades. Com isso, foi desenvolvido um modelo analítico que calcula a correção necessária para diminuir esse intensificador de pressão de contato em função dos deslocamentos citados acima.

Esse modelo analítico foi comparado com um modelo analítico da literatura e com o *software* comercial RIKOR®. Os resultados de correção de hélice propostos são similares aos da literatura e do RIKOR® com exceção das bordas das engrenagens, aonde existem algumas divergências.

Posteriormente, foi desenvolvido um modelo sólido de engrenagem com o perfil evolvente e com as correções de hélice calculadas analiticamente. Este modelo tridimensional (3D) foi elaborado usando os *softwares* SolidWorks® e Inventor® e simulado por elementos finitos por meio do *software* ANSYS®. Verificou-se que as três correções de hélice - a proposta, a da literatura e a do RIKOR® - realmente diminuem a intensificação de pressão de contato no flanco do dente da engrenagem. Por fim, foi possível visualizar que a correção proposta nesta dissertação é 3% mais efetiva que a proposta pela literatura e pelo RIKOR® para o caso analisado.

ABSTRACT

This work will study the contact pressure intensifier between two spur gears teeth, which exists due to the displacement of the components of the gearbox. This effect occurs even in gearboxes manufactured without any machining and/or assembling errors.

The lead correction is a machining operation conducted at the gear tooth surface that compensates the displacement of shafts and gears, due to bending and torsion, and the gear teeth displacement, due to bending and contact pressure.

Factors that are important to the lead correction in gearboxes were studied. An analytical model was proposed in order to evaluate the lead correction necessary to diminish the contact pressure intensifier as a function of the displacements mentioned above.

This analytical model was compared to a literature one and to the commercial software RIKOR®. The results of the proposed lead correction are similar to the literature and RIKOR® ones, although there are differences at the borders of the gears.

This work also describes the development of a solid model of the gears and shafts with the involute profile and the lead correction evaluated analytically. This model is tridimensional (3D) and was designed using SolidWorks® and Inventor software. It was simulated using finite element analysis software ANSYS® and it was possible to verify that the three lead corrections - proposed, from literature and from RIKOR® - diminished the contact pressure intensifier at the gears tooth flank. It was also possible to verify that the lead correction proposed is 3% more effective than the other ones for the case analyzed.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Porcentagem de artigos científicos que estudam correção em engrenagens que aborda cada um dos assuntos listados na tabela.	31
Tabela 2 - Dados do engrenamento estudado.....	46
Tabela 3 – Informações do eixo pinhão utilizadas no estudo analítico.	47
Tabela 4 - Informações do eixo coroa utilizadas no estudo analítico.....	47
Tabela 5 – Fator de correção dos componentes do cálculo da correção de hélice da literatura.	76
Tabela 6–Análise de sensibilidade da flexão dos dentes e deslocamento devido à pressão de contato.	86
Tabela 7 – Correlação dos perfis estudados com uma equação de parábola	90
Tabela 8 – Valores dos concentradores de tensão encontrados por meio dos elementos finitos.	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução da forma construtiva de redutores de velocidade com o passar do tempo.....	16
Figura 2 - Caminho do torque em um eixo. O torque “T” é transmitido ao eixo por uma de suas laterais e é transferido à outra engrenagem no contato “t”.	18
Figura 3 – Diagrama de torque do eixo mostrado na Figura 2.....	18
Figura 4 – Exemplo da diferença de flexão entre o pinhão e a coroa frente ao mesmo carregamento (força no dentado).	19
Figura 5 – (a) linha de flanco do dente descarregado sem correção de hélice. (b) linha de flanco do dente sem correção de hélice após a aplicação da carga. (c) linha de flanco do dente descarregado com correção de hélice.....	20
Figura 6 - Visualização da correção de hélice em 3D.....	21
Figura 7 – Possíveis consequências da falta da usinagem da correção de hélice [8].....	22
Figura 8 – Representação da evolvente de círculo [12].....	24
Figura 9 - Ilustração da reta de trabalho [13].	25
Figura 10 – Principais parâmetros de um engrenamento reto [11].	26
Figura 11 – Representação do deslocamento de perfil em uma engrenagem [15].	27
Figura 12 - Comparação entre distintos deslocamentos de perfil [16]. Perfil da esquerda possui $x=-0,2$. O do meio não tem deslocamento de perfil ($x=0$) e o da direita possui $x=0,5$	28
Figura 13 – Representação da linha de flanco de uma engrenagem [17].....	29
Figura 14 – Ilustração em uma engrenagem dos quatro efeitos que podem afetar a correção de hélice. A torção e a flexão da engrenagem estão esquematizadas nas vistas laterais das mesmas.....	30
Figura 15 – Modelo de um multiplicador de velocidades utilizado pela referência para ilustrar o cálculo da correção de hélice (para o autor, o número I indica o eixo estudado, e o número II os demais eixos) [29].	33

Figura 16 – Coroa com alma esbelta [29].	35
Figura 17 – Correção de hélice devido à torção do pinhão [29].	37
Figura 18 – Soma de vários efeitos em apenas uma correção, abordado pela referência [29]. (a) Folga do rolamento. (b) Deslocamento no rolamento. (c) Torção da engrenagem. (d) Flexão da engrenagem. (e) Deslocamento elástico da carcaça. (f) somatório de todos os efeitos (a+b+c+d+e).	38
Figura 19 – Engrenagem planeta típica apoiada internamente por rolamentos [30].	40
Figura 20 - Parâmetros da viga equivalente ao dentado descritos em [31].	41
Figura 21 – Aproximação do dentado pela viga equivalente [31].	42
Figura 22 – Possíveis erros em engrenamentos abordados pela referência [34].	43
Figura 23 – Usinagem do abaulamento. a) Apenas em uma direção (da evolvente). b) Nas duas direções (evolvente e largura).	44
Figura 24 – Perfil do engrenamento 1.	48
Figura 25 – Perfil do engrenamento 2.	48
Figura 26 – Perfil do engrenamento 3.	49
Figura 27 - À esquerda, apenas um par de dentes está engrenado. À direita, dois pares estão engrenados.	52
Figura 28 – Parâmetros importantes para o cálculo da equação da evolvente.	54
Figura 29 – Sistema de coordenadas das equações de deslocamento dos eixos e das engrenagens.	55
Figura 30 – Mudança de coordenadas a ser efetuada em cada plano devido ao deslocamento dos eixos. O centro do sistema de coordenadas X,Y é fixo, enquanto que o centro do sistema X',Y' varia ao longo da engrenagem.	56
Figura 31 – Comparação de dois deslocamentos de perfil distintos.	57
Figura 32 – Representação da linha do engrenamento.	60

Figura 33 – Detalhe da Figura 32, mostrando a semelhança de triângulos e o novo ângulo de trabalho do engrenamento.....	61
Figura 34 – Definição dos ângulos de deslocamento do pinhão.....	65
Figura 35 – Determinação dos novos pontos de contato do engrenamento...	67
Figura 36 – Visualização da correção de hélice.	67
Figura 37 – Representação da divisão de um eixo genérico em várias seções de diâmetros constantes.	68
Figura 38 – Ilustração das cargas definidas para cada elemento do eixo disposto na Figura 37.....	69
Figura 39– Deslocamento perpendicular ao contato: modelo da literatura.	76
Figura 40 – Modelagem do rolamento (O raio R deve ser o mesmo raio da pista externa do rolamento).....	78
Figura 41 – Aplicação das condições de contorno no modelo.....	79
Figura 42 – Modelagem apenas da região de interesse.....	80
Figura 43 - Malha do modelo geral, com aproximadamente 890.000 nós e 620.000 elementos.....	81
Figura 44 - Malha do modelo do dentado com aproximadamente 7.500.000 nós e 5.400.000 elementos.	82
Figura 45 – Valores da flexão dos eixos e engrenamentos.	83
Figura 46 – Deslocamentos significativos para a correção de hélice. (a) deslocamento total do engrenamento. (b) deslocamento é dividido em dois, um de corpo rígido (linha fina) e outro relativo (linha grossa). (c) único deslocamento significativo para a análise é o relativo.....	84
Figura 47 – Valores da flexão e da torção relativas dos eixos e engrenamentos.	85
Figura 48 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 1).	87
Figura 49 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 2).	88

Figura 50 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 3).	89
Figura 51 – Gap responsável pela diferença entre os modelos analíticos propostos pela literatura e por esta dissertação.....	90
Figura 52 – Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo sem correção de hélice.	91
Figura 53 - Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo com correção de hélice da literatura.	91
Figura 54 - Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo com correção de hélice proposta nesta dissertação.	92
Figura 55 – Pressão de contato ao longo da largura.	92
Figura 56 – Tensão de von Mises no material em uma seção transversal da coroa. Apenas a região próxima ao engrenamento trabalha. A região oposta não é solicitada.	94

LISTA DE SÍMBOLOS

Lista com os símbolos das equações e figuras do trabalho. Alguns símbolos podem possuir subscritos, os quais indicarão a engrenagem ou componente referenciado.

A – Ponto do contato entre o perfil evolvente e a circunferência de base.

B – Ponto definido como a tangente entre a circunferência de base da engrenagem e uma reta perpendicular a um ponto P do perfil evolvente.

C – Ponto de contato entre as engrenagens.

E – Módulo de elasticidade.

F – Força atuante no eixo / engrenagem.

G – Módulo de cisalhamento.

H_a – Diferença entre o raio de cabeça da engrenagem e o raio de contato.

I – Momento de inércia de área da seção do componente.

J – Momento de inércia polar de área da seção do componente.

K – Constantes auxiliares ao cálculo da flexão / torção.

L – Altura virtual total da viga equivalente ao dente da engrenagem.

M – Momento aplicado sobre o eixo / engrenagem.

P – Ponto qualquer situado no perfil evolvente.

S_a – Espessura da cabeça da engrenagem.

S_d – Espessura da viga equivalente à engrenagem na base.

S_n – Espessura da engrenagem no seu diâmetro de contato.

T – Torque concentrado aplicado no eixo ou na engrenagem.

$Oxyz$ – Sistema de coordenadas original.

$Ox'y'z'$ - Sistema de coordenadas auxiliar.

a – Distância entre centros.

a_d – Distância entre o diâmetro de contato da engrenagem e o pico de sua viga equivalente.

b – Largura da engrenagem.

d_a – Diâmetro de cabeça da engrenagem.

d_i – Diâmetro de fundo do dente.

d_p – Diâmetro primitivo.

d_{sh} – Diâmetro do pino que suporta a engrenagem no porta planeta [30].

dx_c – Variação do centro da coroa no eixo x devido à flexão do eixo.

dx_p – Variação do centro do pinhão no eixo x devido à flexão do eixo.

dy_c – Variação do centro da coroa no eixo y devido à flexão do eixo.

dy_p – Variação do centro do pinhão no eixo y devido à flexão do eixo.

h – Altura do dentado que está efetivamente engrenado.

h_z – Altura total do dente da engrenagem.

h_k – Altura da cabeça do dente da engrenagem.

h_f - Altura do pé do dente da engrenagem.

l – Comprimento do pino que suporta a engrenagem planeta

m – Módulo da engrenagem.

q – Força distribuída no eixo / engrenagem.

r_{base} – Raio da circunferência de base da engrenagem.

$r_{cilindroevolvente}$ – Raio de curvatura instantâneo do perfil evolvente em um ponto P qualquer do perfil evolvente.

$r_{contato}$ – Raio de contato da engrenagem.

$r_{evolvente}$ – Raio entre o centro da engrenagem e um ponto P qualquer do perfil evolvente.

$r_{primitivo}$ – Raio da circunferência primitiva da engrenagem.

rt – Reta de trabalho do engrenamento. Definida como a reta que tangencia as circunferências de base das duas engrenagens.

s_k – Folga do fundo do dente.

s_p – Distância entre um dente e outro na mesma engrenagem.

t – Torque distribuído aplicado no eixo ou no engrenamento.

t_p – Passo da engrenagem.

u_{bgi} - Deslocamento da engrenagem devido à flexão.

$u_g CT_m$ – Folga do rolamento ajustada pela temperatura.

$u_g E_{mi}$ – Deslocamento do rolamento devido à carga.

$u_g HE_i$ – Deslocamento elástico da carcaça.

u_{ili} – Deslocamento total da engrenagem.

u_{ti} – Deslocamento da engrenagem devido à torção.

x_{perfil} – Deslocamento de perfil.

xt_c – Distância no eixo x do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base da coroa e o seu centro no sistema de coordenadas $Oxyz$.

xt'_c – Distância no eixo x do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base da coroa e o seu centro no sistema de coordenadas $Ox'y'z'$.

xt_p – Distância no eixo x do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base do pinhão e o seu centro no sistema de coordenadas $Oxyz$.

xt'_p – Distância no eixo x do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base do pinhão e o seu centro no sistema de coordenadas $Ox'y'z'$.

yt_c – Distância no eixo y do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base da coroa e o seu centro no sistema de coordenadas $Oxyz$.

yt'_c – Distância no eixo y do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base da coroa e o seu centro no sistema de coordenadas $Ox'y'z'$.

yt_p – Distância no eixo y do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base do pinhão e o seu centro no sistema de coordenadas $Oxyz$.

yt'_p – Distância no eixo y do ponto de tangência entre a reta de trabalho rt e a circunferência de base do pinhão e o seu centro no sistema de coordenadas $Ox'y'z'$.

$w_{(z)}$ – Distribuição de carga no dentado.

z – Número de dentes da engrenagem.

α – Ângulo da evolvente (definido como o ângulo $\widehat{POB}$).

α_0 – Ângulo de engrenamento teórico.

α_a – Ângulo da evolvente no diâmetro de cabeça da engrenagem.

α_{ref} – Ângulo entre a reta que une os centros das engrenagens e o eixo x .

α_t – Ângulo de trabalho do engrenamento.

α_{yt} – Ângulo auxiliar 1 utilizado para calcular a espessura do dentado.

β – Ângulo de hélice.

β_0 – Ângulo teórico de hélice.

β_y – Ângulo auxiliar 2 utilizado para calcular a espessura do dentado.

δ – Deslocamento do dente. Parâmetro para cálculo da rigidez do dentado.

γ – Ângulo da viga equivalente à engrenagem.

θ – Ângulo de referência utilizado no cálculo da correção de hélice.

θ_0 – Ângulo percorrido desde o início do referencial utilizado até o encontro do perfil evolvente com a circunferência de base da engrenagem para um dente posicionado na vertical (definido como o ângulo $\widehat{AOx}$).

φ_y - Ângulo auxiliar 3 utilizado para calcular a espessura do dentado.

Índice

1.	Introdução.....	16
2.	Revisão Bibliográfica	23
2.1.	Evolvente de círculo	23
2.2.	Parâmetros básicos do engrenamento	25
2.3.	Correção de hélice	29
2.3.1.	Estudo da torção e da flexão da engrenagem.....	32
2.3.2.	Estudo dos deslocamentos do dente da engrenagem.....	41
2.4.	Outras referências.....	43
3.	Objetivo	45
4.	Metodologia	46
5.	Método Analítico	50
5.1.	Hipóteses Simplificadoras	50
5.1.1.	Não é considerada a presença de lubrificante no engrenamento	50
5.1.2.	São desprezadas as forças de atrito no engrenamento	51
5.1.3.	São estudadas apenas engrenagens cilíndricas de dentes retos	51
5.1.4.	O contato entre duas engrenagens pode ser aproximado por um contato cilindro-cilindro.....	52
5.1.5.	Engrenamento ocorre no diâmetro de trabalho	52
5.1.6.	Análise estática	53
5.2.	Dedução das fórmulas analíticas	53

5.2.1.	Equação da evolvente de círculo	54
5.2.2.	Equação da linha de engrenamento.....	59
5.2.3.	Determinação dos deslocamentos devido à flexão	67
5.2.4.	Determinação dos deslocamentos devido à torção	72
5.2.5.	Determinação dos deslocamentos do dente da engrenagem devido ao efeito da sua flexão.....	72
5.2.6.	Determinação dos deslocamentos do dente da engrenagem devido à pressão de contato	74
5.2.7.	União de todos os efeitos previamente estudados a fim de determinar a correção de hélice final do engrenamento	75
5.2.8.	Modelo analítico proposto pela literatura [29].....	75
6.	Método dos Elementos Finitos.....	77
6.1.	Pré-processamento.....	77
6.1.1.	Rolamentos	77
6.1.2.	Elementos de contato.....	78
6.1.3.	Modelos simulados.....	78
6.1.4.	Geometria dos perfis das engrenagens.....	80
6.1.5.	Refino da malha	80
6.2.	Pós-processamento	82
7.	Resultados Obtidos e Discussões	83
7.1.	Modelo analítico	83

7.2.	Modelo dos elementos finitos.....	91
7.3.	Comparação entre modelo analítico e MEF	93
8.	Conclusões.....	96
9.	Propostas de trabalhos futuros	97
10.	Referências Bibliográficas	98

1. Introdução

Um redutor de velocidade é um equipamento industrial constituído por eixos, mancais, engrenagens e uma, ou mais, carcaça(s) que protege(m) e suporta(m) esses elementos. As engrenagens são os componentes mecânicos responsáveis pela transmissão do torque entre dois eixos.

Figura 1 – Evolução da forma construtiva de redutores de velocidade com o passar do tempo.

A Figura 1 mostra a evolução da redução do espaço ocupado pelos redutores com o passar do tempo, sendo que a letra “A” representa o conceito de redutor mais antigo e a letra “G” o conceito mais novo. Inicialmente, não existiam materiais capazes de aguentar uma grande pressão de contato – o limite dos materiais antigamente era de 800 MPa, sendo que os atuais podem suportar valores da ordem de 1500 MPa. Dessa forma, no conceito mais antigo, as relações de transmissão eram grandes a fim de aumentar o braço da força responsável por transmitir o torque entre as engrenagens (letra “A”). Com o advento do material cementado, que suporta uma maior pressão de contato, foi possível diminuir as distâncias entre os eixos, utilizando menos material e compactando o redutor (B em diante). A letra “C” ilustra um redutor com divisão de torque. Como o torque é dividido entre dois pontos de contato, é possível reduzir ainda mais as larguras e os diâmetros das engrenagens, uma vez que a força aplicada no dentado cai pela metade. A letra “D” ilustra um redutor que utiliza o mesmo conceito do anterior, mas para três pontos de contato. Outra vantagem desse redutor é que ele é coaxial com a aplicação, reduzindo custos de base civil do conjunto. As letras “E” e “F” ilustram redutores planetários, sendo que o primeiro possui porta planetas fixo e engrenagem de dentes internos móvel e o segundo possui porta planetas móvel e engrenagem de dentes internos fixa. Por fim, o último redutor dessa cadeia evolutiva é o planetário com dentes bi-helicoidais (letra “G”), que necessita do menor espaço para transmitir um mesmo torque.

Note que cada redutor da Figura 1 possui uma série de vantagens e desvantagens, sendo que nem sempre o melhor redutor para certa aplicação é o representado pela “letra G”. Dessa forma, é muito importante aprimorar e compactar os outros modelos de redutor, mesmo que eles sejam maiores.

Com base no discutido nos parágrafos anteriores, é possível afirmar que no cenário atual das fábricas de redutores de velocidade é necessário cada vez mais aprimorar o produto final, deixando-o mais compacto. Porém, alguns dos efeitos que reduzem o tempo de vida útil do engrenamento não são, até a presente data, completamente compreendidos; fato este que abre espaço para um estudo mais aprofundado sobre o assunto. Um desses efeitos é a correção de hélice, que será explicada a seguir.

O torque transmitido (T) por uma engrenagem é transferido a ela através de uma de suas laterais, sendo transferido à outra engrenagem no contato (t), conforme mostra a Figura 2. A Figura 3 mostra o diagrama de torque para este eixo. Quando as engrenagens entram em contato seus dentes se deslocam, assim como os eixos nos quais elas estão montadas / usinadas. Esse deslocamento altera o perfil de contato do engrenamento, concentrando carga em uma região do dentado, diferente do previsto inicialmente. Essa concentração de carga diminui a vida útil do engrenamento, uma vez que a engrenagem é dimensionada para a pressão média no flanco de trabalho.

Figura 2 - Caminho do torque em um eixo. O torque “ T ” é transmitido ao eixo por uma de suas laterais e é transferido à outra engrenagem no contato “ t ”.

Figura 3 – Diagrama de torque do eixo mostrado na Figura 2.

Ao se admitir uma situação ideal, em que não existem concentradores de cargas e o perfil de distribuição de torque é constante ao longo do dentado, pode-se afirmar que o deslocamento do pinhão será superior ao da coroa, sendo que o pinhão é a menor das engrenagens e a coroa é a maior. Este fato se deve às suas características físicas, pois, como a coroa é maior que o pinhão, o seu momento de inércia polar será maior, resultando em um menor deslocamento frente a um mesmo carregamento – força do dentado. Este fenômeno está exemplificado na Figura 4.

Este fato, no entanto, não condiz com a condição de contato que afirma que, desprezando o escorregamento entre as engrenagens, a somatória dos deslocamentos no perfil de contato deve ser igual a zero.

Figura 4 – Exemplo da diferença de flexão entre o pinhão e a coroa frente ao mesmo carregamento (força no dentado).

Assim, deve-se usar o perfil da engrenagem com uma correção de hélice, que nada mais é do que uma compensação desse deslocamento, de forma que,

quando o dentado for solicitado, a distribuição de pressão na face do dente seja uniforme. Dessa forma, o redutor fica mais compacto, reduzindo o seu custo e aumentando a competitividade do produto final no mercado.

Este efeito pode ser visualizado na Figura 5. Nela estão representadas três linhas de flanco do dente do redutor – para uma explicação sobre o que é uma linha de flanco, consultar a seção 2.2, Figura 13. A linha “a” representa o dente sem nenhuma correção de hélice, fabricado completamente reto. No entanto, quando a carga é aplicada, ele se desloca e o seu perfil fica parecido com o representado na linha “b”. Nesta condição existe uma concentração de carga na extremidade do dente, que fará com que esta região falhe mais rapidamente. Usinar a correção de hélice é o equivalente a usinar o flanco de dente igual ao indicado na linha “c”, de forma que quando a carga for aplicada, o perfil se desloca e passa a apresentar uma distribuição de carga constante ao longo do dente.

Figura 5 – (a) linha de flanco do dente descarregado sem correção de hélice. (b) linha de flanco do dente sem correção de hélice após a aplicação da carga. (c) linha de flanco do dente descarregado com correção de hélice.

A correção de hélice pode ser visualizada tridimensionalmente (3D) na Figura 6. Nela, o dente está representado como um sólido opaco e a correção de hélice como um sólido semitransparente. Neste caso, a correção de hélice é linear.

Figura 6 - Visualização da correção de hélice em 3D.

Outras vantagens de se fazer uma correção de hélice podem ser encontradas nas referências de [1] a [7]. Entre as vantagens defendidas por essas referências estão: a redução da temperatura de contato, a redução do ruído de engrenamento e a redução do erro na relação de transmissão (que induz vibrações no equipamento).

Um dos possíveis efeitos causados pela falta da usinagem da correção de hélice pode ser visualizado na Figura 7 [8]. Nestes casos o “*pitting*” ocorreu em uma das extremidades da engrenagem - aquela que mais necessita da correção de hélice. Em casos extremos, o “*pitting*” pode levar à fratura do dente e à falha do equipamento.

Figura 7 – Possíveis consequências da falta da usinagem da correção de hélice [8].

A questão científica abordada neste trabalho contempla o estudo detalhado do contato entre duas engrenagens com o auxílio das equações de flexão / torção da literatura. O modelo proposto é validado, na sequência, por intermédio do uso do método dos elementos finitos e comparação com a literatura e com um *software* comercial.

Por fim, cabe informar que o foco da presente dissertação é as engrenagens de dentes retos com aplicação em redutores industriais de baixa velocidade. Nestes casos o torque é grande, aumentando a importância da correção de hélice. Além disso, boa parte dos redutores industriais no Brasil possui dentes retos e baixas rotações, de forma que o presente trabalho abrange uma parcela significativa do mercado de redutores nacional.

2. Revisão Bibliográfica

Inicialmente, é necessário fazer uma apresentação dos principais parâmetros importantes para o engrenamento.

2.1. Evolvente de círculo

O primeiro parâmetro a ser apresentado é a “Evolvente de Círculo” (mostrada na Figura 8). É ela que determina a geometria do flanco da engrenagem. Esse perfil foi escolhido pelos fabricantes de engrenagens por possuir uma série de propriedades que são interessantes para o correto funcionamento do engrenamento. Os parágrafos abaixo apresentam conceitos básicos sobre a evolvente. Mais informações podem ser encontradas em [9], [10] e [11].

A evolvente de círculo pode ser obtida ao se desenrolar um barbante ao redor de um cilindro. Dessa forma, qualquer ponto da curva evolvente é perpendicular a uma reta que tangencia a circunferência de base. O único parâmetro necessário para definir a evolvente é o raio da circunferência de base [9].

As principais características da evolvente que justificam o seu uso para o engrenamento são:

- O engrenamento ocorre na reta de trabalho “ rt ”, mostrada na Figura 9, que é definida como uma reta tangente às duas circunferências de base das engrenagens;
- Todos os pontos do engrenamento, desde o seu início até o seu fim, estão contidos nesta reta que está angularmente defasada da reta tangente a ambos os diâmetros de trabalho por um ângulo denominado “ângulo de pressão” (Figura 9);

Figura 8 – Representação da evolvente de círculo [12].

- Este ângulo de pressão é constante durante o engrenamento. Dessa forma, a direção das forças do engrenamento não varia conforme as engrenagens giram;
- A relação de transmissão é constante com o tempo, ou seja, não há o surgimento de vibrações inerentes ao engrenamento como ocorre em um eixo cardã, por exemplo;
- Erros na distância entre centros são tolerados modificando-se apenas o ângulo de pressão do engrenamento (e, portanto, a direção das forças);
- O “raio de curvatura instantâneo” da evolvente muda ao longo da face do dente. Ele começa como sendo nulo no raio de base e aumenta indefinidamente conforme o ponto P de interesse vai se afastando da circunferência de base (Figura 8);
- Um ponto negativo deste perfil é que existe um deslizamento específico entre as faces das engrenagens. Este efeito é mais acentuado no início e no fim do engrenamento e é responsável por alguns mecanismos de danos nas superfícies das engrenagens.

Figura 9 - Ilustração da reta de trabalho [13].

A equação desse perfil, em função dos outros parâmetros do engrenamento, pode ser encontrada em [14] e está descrita na seção 5.2.1.

2.2. Parâmetros básicos do engrenamento

Com a evolvente de círculo definida, pode-se definir alguns dos outros parâmetros do engrenamento, que estão contidos na Figura 10. O significado de cada um deles se encontra na lista de símbolos.

Figura 10 – Principais parâmetros de um engrenamento reto [11].

O equacionamento dos parâmetros ilustrados na Figura 10 pode ser encontrado em [11] e está resumido abaixo:

$$h_z = h_k + h_f \quad (1)$$

$$h_k = m \quad (2)$$

$$h_f = 1,2m \quad (3)$$

$$h = 2m \quad (4)$$

$$d_i = d_p - 2h_f \quad (5)$$

$$d_a = d_p + 2h_k \quad (6)$$

$$s_p = \frac{t_p}{2} = \frac{m \pi}{2} \quad (7)$$

$$d_{base} = d_{primitivo} \cdot \cos(\alpha_0) \quad (8)$$

Além dos parâmetros da Figura 10, deve-se definir também o deslocamento de perfil de uma engrenagem (Figura 11).

Figura 11 – Representação do deslocamento de perfil em uma engrenagem [15].

Na Figura 11 estão definidas a circunferência primitiva da engrenagem e a reta média da ferramenta utilizada para usiná-la. A reta primitiva tangencia o círculo primitivo da engrenagem e é paralela à reta média da ferramenta. Na usinagem das peças, a ferramenta vai se aproximando da engrenagem e gerando os dentes. No entanto, ao término da usinagem, não existe a necessidade de a reta média da ferramenta ser coincidente com a reta primitiva da engrenagem. Essa distância entre as retas, que é definida como positiva no sentido de afastamento da ferramenta em relação à engrenagem, ao ser adimensionalizada através da sua divisão pelo módulo do engrenamento, é denominada deslocamento de perfil (parâmetro “x” na Figura 11).

Note que esse deslocamento de perfil não altera nenhum dos parâmetros básicos do engrenamento, tais como: ângulo de pressão, ângulo de hélice, número de dentes, módulo e raio de base. Ele altera a geometria do dentado, reforçando a base do dente e alterando o seu diâmetro. Alteram-se, portanto, o momento de inércia da engrenagem e a sua rigidez equivalente. A diferença entre vários perfis com distintos deslocamentos de perfil pode ser vista na Figura 12.

Figura 12 - Comparação entre distintos deslocamentos de perfil [16]. Perfil da esquerda possui $x=-0,2$. O do meio não tem deslocamento de perfil ($x=0$) e o da direita possui $x=0,5$.

Assim, o pinhão geralmente possui um deslocamento de perfil maior que o da coroa, a fim de aumentar a sua resistência, já que, como a sua rotação é maior que a da coroa, ele sofre mais ciclos de carga. Dessa forma, ambas as engrenagens apresentam aproximadamente a mesma vida total, melhorando o uso do material no conjunto.

As duas principais equações que utilizam os parâmetros das Figura 10 e Figura 11, e são utilizadas no decorrer desta revisão, estão descritas abaixo:

$$d_{trabalho_{pinhão}} = \frac{a}{1+i} \quad (9)$$

$$a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \cos(\beta_0)} \cdot \frac{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan(\alpha_0)}{\cos(\beta_0)}\right)\right)}{\cos\left(\operatorname{inv}^{-1}\left(\frac{2 \cdot \tan(\alpha_0) \cdot (x_1 + x_2)}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{inv}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\tan(\alpha_0)}{\cos(\beta_0)}\right)\right)\right)} \quad (10)$$

$$\operatorname{inv}(\alpha) = \tan(\alpha) - \alpha \quad (\alpha \text{ em rad}) \quad (11)$$

Outras equações relativas a engrenagens podem ser obtidas na referência [9], na referência [14] e na seção 5.2.

Outro conceito importante é a definição da linha de flanco. “A linha de flanco é definida como a curva de interseção do flanco da engrenagem com um cilindro concêntrico ao seu eixo.” Para uma engrenagem de dentes retos, essa interseção será uma linha reta. Para uma engrenagem de dentes helicoidais, será uma curva helicoidal (Figura 13).

Figura 13 – Representação da linha de flanco de uma engrenagem [17].

2.3. Correção de hélice

São objeto de estudo da presente dissertação os quatro principais efeitos que podem afetar a correção de hélice:

- Torção do eixo;
- Flexão do eixo;
- Flexão do dente da engrenagem;
- Deslocamento da superfície do dente da engrenagem devido à pressão de contato.

A Figura 14 ilustra os efeitos citados acima.

Figura 14 – Ilustração em uma engrenagem dos quatro efeitos que podem afetar a correção de hélice. A torção e a flexão da engrenagem estão esquematizadas nas vistas laterais das mesmas.

Estes efeitos podem ser separados em duas linhas: uma mais global, que abrange os deslocamentos devido à flexão e à torção do eixo, e uma mais focada no engrenamento, que abrange os deslocamentos do dente em si, como a sua flexão e o deslocamento devido à pressão de contato. É importante ressaltar que todos os deslocamentos analisados nesta dissertação estão no regime elástico e são, portanto, reversíveis.

Não foi encontrada uma referência que abordasse todos esses efeitos de uma vez, de forma que cada um será abordado separadamente neste capítulo e unidos, posteriormente, na seção 5.

Esta falta de referências foi, inclusive, um dos desafios deste trabalho, uma vez que a correção de hélice não é amplamente abordada pela literatura. Os livros

de elementos de máquinas mais utilizados, como os das referências [10], [18] e [19], os livros especializados em engrenagens, como os das referências [9], [11], [20] e [21] e mesmo as normas de cálculo de engrenagem alemã [14] e americana [22] não abordam o assunto diretamente. O usual nestas referências é a adoção de um fator de correção de hélice, que será posteriormente multiplicado pela carga aplicada ao engrenamento, a fim de determinar a sua resistência. Note que com este procedimento o que está sendo feito é um superdimensionamento da carga aplicada, aumentando o tamanho das engrenagens e, portanto, o seu custo.

Outra abordagem comumente utilizada é a adoção de uma correção previamente definida para então estudar o seu impacto no contato do engrenamento via elementos finitos, conforme retratado em [23], [24], [25], [26] e [27]. Além disso, um dos trabalhos ignora completamente o deslocamento da engrenagem nos casos em que a sua largura é muito inferior ao seu diâmetro [28].

A Tabela 1 contém uma distribuição percentual dos assuntos abordados em uma amostra (39 artigos) da literatura que estuda correções de perfis em engrenagens, não fazendo distinção se a correção é de hélice, de evolvente, abaulamento (ver Figura 23), etc.

Tabela 1 – Porcentagem de artigos científicos que estudam correção em engrenagens que aborda cada um dos assuntos listados na tabela.

Assunto	%
Análise de elementos finitos	31%
Estudo de uma correção pré-definida	23%
Estudo do ruído das engrenagens	15%
Modificação de cabeça e pé de dente (Modificação da evolvente)	13%
Estudo do erro de transmissão	10%
Estudo da usinagem das engrenagens (erros, melhorias, etc)	10%
Análise experimental	8%
Cálculo da rigidez do dente com trinca no pé do dente	8%
Modificação de addendum e dedendum (tamanho do dente)	5%
Otimização do cálculo de engrenagens	5%
Estudo de engrenagens cônicas	5%
Desenvolvimento de outro perfil de engrenagens	5%
Análise de fadiga	5%
Estudo do deslocamento de perfil	5%
Estudo da temperatura de contato	2%
Outros	17%

Vale ressaltar que se um artigo possui dois ou mais temas mencionados na tabela, ele foi contado em ambos os campos. Dessa forma, o somatório da coluna de porcentagens não precisa ser 100%.

Pode-se notar que a maior parte da literatura confia no método dos elementos finitos para analisar correções em engrenagens. A segunda abordagem mais comumente utilizada é assumir certa correção e estudar o seu impacto nas engrenagens, seja através do método dos elementos finitos, de métodos analíticos ou até mesmo experimentais. Outros focos da literatura são o estudo do ruído, dos erros de transmissão (vibrações) e da temperatura de contato nas engrenagens.

Por fim, é importante frisar que a correção de hélice deve ser calculada para o torque de operação do redutor e não para o torque máximo para o qual ele foi projetado. A correção de hélice visa evitar efeitos de longo prazo no engrenamento como o “*pitting*” ou a ruptura do pé do dente. Como o mecanismo que rege esses efeitos é a fadiga – dano acumulado – deve-se evitar a concentração de carga na maior parte da vida do equipamento, ou seja, na sua condição de operação cotidiana. Dessa forma, se houver uma modificação da carga à qual o equipamento é submetido, é necessário reusinar a correção de hélice do engrenamento para a nova condição de trabalho.

Nas seções abaixo, é explorada uma literatura específica que estima essa correção, seja para redutores em geral [29], seja para planetários [30].

2.3.1. Estudo da torção e da flexão da engrenagem

Conforme discutido na Introdução, a correção de hélice auxilia na redução da concentração de carga do engrenamento, melhorando o projeto do dentado e prolongando a vida do equipamento.

A referência [29] aborda esse assunto com maior profundidade. O foco do texto da referência, no entanto, é a determinação da correção de hélice em função da variação estatística dos erros de usinagem e montagem dos rolamentos, eixos e engrenamentos e do valor determinístico da flexão e da torção dos eixos e engrenagens.

Dessa forma, o texto [29] define um novo conceito de linha de flanco: “a linha de flanco é definida como a curva de interseção do flanco da engrenagem com um cilindro concêntrico ao seu eixo em sua posição **nominal**”. Note que, dessa forma, erros de usinagem e montagem dos componentes do redutor, assim como os deslocamentos dos rolamentos devido à aplicação de carga, serão considerados, já que um desvio angular, entre um eixo e outro, afetará a sua linha de flanco. É este conceito, definido por [29], que é utilizado nesta dissertação.

O modelo abordado no trabalho [29] é simples, composto de três eixos e dois engrenamentos, como pode ser visualizado na Figura 15.

Figura 15 – Modelo de um multiplicador de velocidades utilizado pela referência para ilustrar o cálculo da correção de hélice (para o autor, o número I indica o eixo estudado, e o número II os demais eixos) [29].

Note que o caso estudado aborda um multiplicador de velocidades, que é idêntico a um redutor, com a exceção de que o maior torque com menor rotação entra no equipamento e o menor torque com maior rotação sai.

O trabalho [29] afirma que, para cada condição de carga, os erros estatísticos permanecem os mesmos, por se tratarem de erros de usinagem / montagem. Dessa forma, para cada torque aplicado, existirá uma correção de hélice ideal que irá maximizar a vida do redutor.

Assim, ao invés de calcular a correção de hélice ideal para um determinado torque, o texto [29] visa priorizar a vida total do equipamento. Para tanto, ele determina a distribuição de torque no tempo e constrói um histograma. Posteriormente é definida apenas uma correção de hélice que, durante a vida do redutor, será submetida a todos os torques calculados anteriormente. Para cada um desses torques, é calculada a concentração de pressão de contato no dentado devido à correção de hélice estimada acima. Usando a regra de Miner [29], executa-se um cálculo da vida teórica que o engrenamento apresentará. Posteriormente, desenvolve-se um algoritmo que consegue calcular a correção de hélice ideal que maximiza a vida do redutor de acordo com esse critério de cálculo.

A influência das variações estatísticas das posições dos rolamentos e do engrenamento não será abordada nesta revisão bibliográfica, por não fazer parte do escopo da presente dissertação. No entanto, mais informações podem ser encontradas em [29].

Outro ponto importante de ser ressaltado é que a referência [29] estuda apenas a flexão e torção dos eixos e engrenagens. Nem a flexão do dente, nem o deslocamento devido à pressão de contato e tampouco a geometria do perfil do dente foram objeto deste estudo.

Antes de começar a descrever as análises feitas, vale ressaltar que uma forte hipótese adotada pelo autor [29] é a consideração de que apenas os deslocamentos perpendiculares ao contato (Figura 39, seção 5.2.8) das engrenagens são importantes. Deslocamentos paralelos a esse contato não são levados em

consideração. Dessa forma, todos os deslocamentos calculados a seguir devem ser projetados neste plano perpendicular ao contato.

Inicialmente, na análise da torção, o texto da referência [29] admite que o deslocamento devido à torção do pinhão é muito maior que o da coroa (uma vez que seu momento de inércia é muito menor) e, portanto, só o pinhão precisa ser estudado. Como exceção a essa simplificação, é citada a situação em que as coroas possuem uma alma muito esbelta (ver Figura 16), em cujo caso é necessário calcular a torção de ambos os componentes. Note que o autor não considera como exceção os casos em que a coroa possui um tamanho próximo ao do pinhão.

Além disso, o autor [29] define que a distribuição de carga em função da distância ao início do dentado é regida por uma função “ $w(z)$ ” e que o contato todo ocorre em um raio fixo “ $r_{contato}$ ”, de forma que o torque total, em cada seção do pinhão, é definido por

$$T_{pinhão(z)} = T_{total} - r_{contato} \int_0^{largura} w(z) dz. \quad (12)$$

Nestas condições, o deslocamento do pinhão no flanco do dentado vale

$$u_{dentado(z)} = r_{contato} \cdot \int_0^{largura} \frac{T_{pinhão(z)}}{GI_t} dz. \quad (13)$$

Figura 16 – Coroa com alma esbelta [29].

Como GI_t é geralmente constante ao longo da engrenagem, tem-se

$$u_{dentado(z)} = \frac{r_{contato}}{GI_t} \int_0^{largura} \left(T_{total} - r_{contato} \left(\int_0^{largura} w(z) dz \right) \right) dz. \quad (14)$$

O autor também afirma que existe uma relação direta entre o deslocamento do dente e a distribuição de carga ao longo deste, e que essa relação não é passível de ser solucionada analiticamente. Dessa forma, a fim de resolver esse problema, o autor sugere dividir o dentado em “ n ” pedaços de tamanho Δz e iniciar o processo de iteração com um valor de distribuição de carga constante ao longo do dente com valor igual à sua média. Com essa entrada, é possível calcular os deslocamentos das engrenagens, dos eixos e, portanto, do dente. Com esse deslocamento, calcula-se novamente a distribuição de carga no dentado. Esse processo iterativo deve ser repetido até a convergência dos valores encontrados.

No entanto, para atingir o objetivo do trabalho, que é encontrar a correção de hélice do dentado, o autor apenas assume que a distribuição de força no dentado é constante [29]. Com isso, o dente assumirá a forma que ele teria caso não houvesse concentrações de carga no dentado. Ou seja, ao assumir distribuição de força constante no dentado, o autor afirma que os deslocamentos encontrados são iguais aos deslocamentos do dente quando a correção de hélice for usinada.

Dessa forma, a função $w(z)$ torna-se uma constante de valor

$$w(z) = w = \frac{T_{total}}{largura \cdot r_{contato}}. \quad (15)$$

E pode-se calcular a torção no dentado analiticamente

$$u_{dentado(z)} = \frac{T_{total} \cdot largura \cdot r_{contato}}{GI_t} \left(\frac{z}{largura} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{largura} \right)^2 \right). \quad (16)$$

A equação acima descreve uma parábola com máximo definido em $z = largura$. O valor máximo da correção neste ponto vale

$$u_{dentado_{m\acute{a}ximo}} = \frac{T_{total} \cdot lagura \cdot r_{contato}}{2GI_t}. \quad (17)$$

Essa correção pode ser visualizada na Figura 17.

Figura 17 – Correção de hélice devido à torção do pinhão [29].

O segundo fator analisado pelo autor é a flexão do eixo [29]. Para tanto, calculam-se os momentos fletores devido a todas as cargas (inclusive peso, se este for relevante). Em uma primeira aproximação, pode-se assumir que a carga distribuída no dentado é constante, conforme feito anteriormente. Como condição de contorno nos rolamentos, deve-se considerar que estes possuem uma rigidez (definida em catálogo) e se deslocam elasticamente. Dessa forma, pode-se garantir que a flexão encontrada ficará muito próxima da real. De posse de todas as forças atuantes no eixo, deve-se calcular a forma final de sua deflexão. Vale a pena ressaltar que, apesar do autor descrever o passo a passo de como realizar esse cálculo, as fórmulas não são fornecidas em [29].

Após determinada a flecha de cada seção do eixo em função do seu comprimento, analisa-se o deslocamento na região dos dentados. Esse valor é o que deve ser corrigido pela correção de hélice.

Figura 18 – Soma de vários efeitos em apenas uma correção, abordado pela referência [29]. (a) Folga do rolamento. (b) Deslocamento no rolamento. (c) Torção da engrenagem. (d) Flexão da engrenagem. (e) Deslocamento elástico da carcaça. (f) somatório de todos os efeitos (a+b+c+d+e).

Por fim, o trabalho [29] afirma que, para juntar todos os efeitos estudados (neste caso, torção e flexão), é necessário apenas somar os deslocamentos encontrados. Além disso, todos os deslocamentos devem ser transmitidos para uma peça, a fim de facilitar a usinagem da correção de hélice no dentado. Esses efeitos podem ser visualizados na Figura 18. É importante ressaltar que a presente

dissertação considera em seus cálculos apenas variáveis determinísticas, de forma que outras variáveis com variação estatística – presentes na Figura 18 – não são abordadas. Dentre essas variáveis encontram-se a variação da posição dos rolamentos devido a erros de montagem e erros de usinagem dos colos de mancais e variação dos diâmetros de eixos e engrenagens.

A referência [30], por sua vez, aborda a correção de hélice das engrenagens de um conjunto planetário. Como hipótese simplificadora, é considerado que o pinhão solar está sujeito apenas à torção, já que as forças radiais das engrenagens planetas, que causariam a flexão, se anulam por estarem simetricamente dispostas. Da mesma forma, a engrenagem planeta está submetida apenas a cargas de flexão, pois a torção neste componente é anulada pelo pinhão solar e pela engrenagem de dentes internos.

Outra hipótese do trabalho [30] é que não existem erros de usinagem / montagem no conjunto e que os pesos dos componentes são desprezíveis. Além disso, é considerado que a engrenagem de dentes internos não sofre deslocamento e não precisa ser analisada, uma vez que seu momento de inércia rotacional é muito superior ao das outras engrenagens.

De acordo com o artigo [30], a torção na engrenagem solar obedece a seguinte equação

$$u_{solar} = n_{planetas} \frac{8 F_{dentado} / b}{\pi 0,39E} \left(\frac{b}{d}\right)^2 \left(\frac{z}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{b}\right)^2\right). \quad (18)$$

Esta equação é igual à da literatura anterior (Eq. (16) [29]), desde que usemos $coef_{Poisson} = 0,3$ e desenvolvamos os seus termos.

Para o caso típico de rolamentos dentro da engrenagem planeta, conforme mostrado na Figura 19, a equação da flexão da engrenagem vale

Figura 19 – Engrenagem planeta típica apoiada internamente por rolamentos [30].

$$u_{planeta} = 2 \frac{64 F_{dentado}/b}{\pi d_{sh}^4 E} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{b \cdot x^3}{12} - \frac{bx^2 \left(3l - 6b + \frac{b^2}{l} \right)}{48} + \frac{b^2 x \left(3l - 4b + \frac{b^2}{l} \right)}{48} \right). \quad (19)$$

Na Equação **(19)**, não é levada em consideração nem o deslocamento dos rolamentos, nem a flexão da própria engrenagem.

Por fim, é importante ressaltar que neste caso não se pode passar toda a correção do engrenamento para o pinhão solar, uma vez que as engrenagens planetas possuem dois pontos de contato, um com o pinhão solar e outro com a coroa de dentes internos. Assim, pode-se passar a correção do pinhão solar para as planetas, a fim de corrigir um número inferior de peças.

2.3.2. Estudo dos deslocamentos do dente da engrenagem

A referência [31], por sua vez, não tem por foco o cálculo da correção de hélice do dentado. No entanto, nela calcula-se o valor da rigidez do dente à flexão e o valor da rigidez do dente para o deslocamento devido à pressão de contato.

Para o primeiro fator (flexão do dente), a rigidez é calculada transformando o dentado em uma viga prismática equivalente. Um ponto importante de ressaltar é que este método vale apenas no caso de o contato ocorrer em um mesmo diâmetro de engrenamento, ou seja, para engrenagens de dentes retos. O desafio desta aproximação é encontrar as propriedades desta viga equivalente em função dos dados de engrenamento.

Um dos métodos pesquisados para calcular esses parâmetros utiliza a aproximação da viga equivalente com a engrenagem por intermédio do volume do dentado. Porém, segundo o autor da referência [31], essa abordagem resulta em um erro muito grande da rigidez do dente e não pode ser utilizada. O autor, então, propõe um novo método de aproximação que será utilizado neste trabalho e está brevemente descrito abaixo.

Figura 20 - Parâmetros da viga equivalente ao dentado descritos em [31].

Os parâmetros da viga à qual o dentado será aproximado estão dispostos na Figura 20. A Figura 21, por sua vez, mostra a aproximação do dentado real pela viga prismática equivalente. Note que o volume do dentado não é mantido nesta abordagem.

Figura 21 – Aproximação do dentado pela viga equivalente [31].

O equacionamento destes efeitos pode ser mais bem visualizado na seção 5.2.5 e 5.2.6.

Existem outros autores que também investigam a rigidez do dentado. A referência [32], por exemplo, calcula a rigidez do dente devido à flexão e à pressão de Hertz. No entanto, as equações lá descritas estão grosseiramente simplificadas, negligenciando vários parâmetros de engrenamento importantes. A referência [33], por sua vez, faz uma análise bem mais completa e detalhada de como calcular a rigidez do dentado devido à pressão de contato. No entanto, o método de cálculo utilizado só é preciso para ângulos de pressão entre 10° e 18° , sendo que equipamentos industriais – que são o foco desta dissertação – possuem ângulos de pressão maiores que ou iguais a 20° .

2.4. Outras referências

A referência [34] também não possui como objetivo o cálculo da correção de hélice, mas sim criar uma nova função de forma para elementos finitos, específica para engrenagens, a ser implantada em um *software* que considere alguns erros do engrenamento. Dessa forma, são estudadas apenas as consequências de erro na montagem / usinagem do engrenamento e não a correção necessária para diminuir o seu impacto na vida do redutor.

Figura 22 – Possíveis erros em engrenamentos abordados pela referência [34].

Os erros estudados em [34] se encontram na Figura 22. A letra “a” mostra o erro devido a um distanciamento normal ao contato entre as duas engrenagens. Um pequeno valor deste erro não traz consequências negativas ao redutor, pois ele é automaticamente corrigido com a rotação de corpo rígido da engrenagem. A letra “b” mostra um erro devido à rotação de uma das engrenagens, concentrando o contato em um dos lados do engrenamento. A letra “c” mostra um erro de montagem axial, tendo como única consequência uma perda pequena de largura útil de contato. A letra “d” mostra um erro devido a um distanciamento tangencial ao contato entre as duas engrenagens. Um pequeno valor deste erro não traz consequências negativas ao redutor, pois ele é automaticamente corrigido com a rotação de corpo rígido da engrenagem. Finalmente, a letra “e” mostra um erro devido à rotação de uma das engrenagens, afastando um dos extremos e aproximando o outro. Este erro, devido ao perfil da evolvente, também irá concentrar o contato em um dos lados da engrenagem.

No decorrer do texto da referência [34] é defendida a hipótese de que os erros mais severos para o engrenamento devido à usinagem, montagem, entre outros, são os que atuam na direção normal ao contato das engrenagens; sendo o mais severo deles o mostrado no quadro “b”, seguido pelo mostrado no quadro “e”.

Essa conclusão mostra que há uma coerência entre as fontes estudadas, uma vez que ela vai ao encontro das discussões observadas na referência [29] que considera apenas deslocamentos perpendiculares ao contato entre as engrenagens, desprezando os deslocamentos paralelos.

Figura 23 – Usinagem do abaulamento. a) Apenas em uma direção (da evolvente). b) Nas duas direções (evolvente e largura).

Outra referência utilizada pela indústria automotiva [35] visa o cálculo de uma correção dupla para o pinhão com forma predefinida. Esta correção consiste de um abaulamento (correção parabólica e simétrica, conforme mostra a Figura 23) usinado na direção da largura e na direção do perfil evolvente. No entanto, o foco desta correção é evitar erros de transmissão em engrenagens, que geram ruído e vibrações, e não está no escopo desta dissertação.

3. Objetivo

O objetivo do presente trabalho é definir a correção de hélice que deverá ser usinada no pinhão de um contato engrenado, a fim de se compensar os efeitos do deslocamento do eixo devido à sua flexo-torção e os efeitos do deslocamento do dentado devido à sua flexão e ao seu deslocamento devido à pressão de contato.

4. Metodologia

O objetivo será alcançado por meio da elaboração de um modelo analítico de correção de hélice. Esse modelo fornecerá resultados que serão comparados aos obtidos por intermédio do modelo analítico definido pela literatura, de simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos e dos obtidos por intermédio de um *software* comercial.

O método analítico será descrito na seção 5, enquanto que a análise através do método dos elementos finitos será descrita na seção 6.

Serão simulados três modelos analíticos de engrenamentos em situações distintas, a fim de verificar a abrangência do modelo proposto na seção 5. As engrenagens estudadas estão dispostas no centro (engrenamento 1) na extremidade próxima à entrada do torque no pinhão (engrenamento 2) e na extremidade oposta à do engrenamento 2 (engrenamento 3). Os dados de engrenamentos estudados estão dispostos na Tabela 2, enquanto que as Tabela 3 e Tabela 4 contêm os diâmetros e comprimentos das seções dos eixos, assim como a posição dos rolamentos e o local de entrada e de saída do torque.

Tabela 2 - Dados do engrenamento estudado.

Dados do engrenamento			
Parâmetro	Pinhão	Coroa	Unidade
Número de dentes	20	87	-
Módulo	12		mm
Distância entre centros dos eixos	650		mm
Largura	270		mm
Deslocamento de perfil	0,38516	0,30154	-
α_0	23		graus
β_0	0		graus
Potência	1300		kW
Rotação	400	91,95	rpm
Material	17CrNiMo6		-
Módulo de elasticidade	205		GPa
Coeficiente de Poisson	0,3		-

Tabela 3 – Informações do eixo pinhão utilizadas no estudo analítico.

Pinhão									
Seção	Diâmetro externo (mm)			Comprimento da seção (mm)			Rolamento	Engrenamento	Torque
	Engren. 1	Engren. 2	Engren. 3	Engren. 1	Engren. 2	Engren. 3			
1	200			40	40	40	X		
2	200			40	40	40			
3	230			80	5	80			
4	272			150	50	150		Não estudado	Entrada
5	280			130	5	620			
6	310			30	5	30			
7	270			5	5	5			
8	280			270	270	270		Estudado	Saída
9	270			5	5	5			
10	310			420	745	5			
11	230			80	80	5			
12	200			40	40	40			
13	200			40	40	40	X		

Tabela 4 - Informações do eixo coroa utilizadas no estudo analítico.

Coroa									
Seção	Diâmetro externo (mm)			Comprimento da seção (mm)			Rolamento	Engrenamento	Torque
	Engren. 1	Engren. 2	Engren. 3	Engren. 1	Engren. 2	Engren. 3			
1	250			80	80	80	X		
2	250			80	80	80			
3	280			50	5	50			
4	290			250	5	850			
5	300			200	50	50		Não estudado	Saída
6	400			10	5	5			
7	1070			270	270	270		Estudado	Entrada
8	400			10	5	5			
9	300			200	50	50		Não estudado	Saída
10	290			250	850	5			
11	280			50	50	5			
12	250			80	80	80			
13	250			80	80	80	X		

Note que apesar de existirem outros engrenamentos no eixo, que não foram estudados, é necessário modelá-los a fim de encontrar as inércias, flexões e torções dos eixos corretamente.

As Figura 24, Figura 25 e Figura 26 contém uma representação visual dos eixos dispostos nas Tabela 3 e Tabela 4.

Figura 24 – Perfil do engrenamento 1.

Figura 25 – Perfil do engrenamento 2.

Figura 26 – Perfil do engrenamento 3.

Posteriormente, este modelo é simulado em elementos finitos por meio do software ANSYS®, com o objetivo de verificar se as correções de hélice são eficazes ou não em mitigar a concentração de tensão ocasionada pelo efeito da flexo-torção.

Além disso, também será feita uma análise de sensibilidade na seção 7, com o objetivo de verificar o quão importante a flexão do dente da engrenagem e o deslocamento devido à pressão de contato realmente são para o cálculo da correção de hélice.

5. Método Analítico

O desenvolvimento do modelo analítico será dividido em várias etapas, sendo que em cada uma será estudado um efeito que afeta o contato do engrenamento.

Os principais efeitos que serão estudados são:

- Equação da evolvente;
- Torção do eixo;
- Flexão do eixo;
- Flexão do dente da engrenagem;
- Deslocamento da superfície do dente da engrenagem devido à pressão de contato.

Porém, antes de começar a elaboração do modelo analítico, devem ser feitas algumas hipóteses simplificadoras.

5.1. Hipóteses Simplificadoras

A lista com as hipóteses e o porquê do uso de cada uma está apresentada abaixo.

5.1.1. Não é considerada a presença de lubrificante no engrenamento

O propósito desta hipótese é um só: desprezar o efeito hidrodinâmico do fluido (lubrificante) durante o contato das engrenagens.

O efeito do lubrificante no engrenamento e como ele afeta a distribuição de pressão no contato depende do seu tipo (sintético/mineral), dos tipos de aditivos utilizados, da sua viscosidade, da sua contaminação por água/ar/outras particulados, etc. Para a consideração do lubrificante, seriam adicionadas à modelagem muitas variáveis que fogem do escopo deste trabalho. Além disso, como a velocidade dos engrenamentos que utilizam dentes retos é baixa (devido a restrições de vibração e ruído), o filme de óleo é reduzido à camada de lubrificação de extrema pressão podendo-se, portanto, desconsiderar o lubrificante no contato.

5.1.2. São desprezadas as forças de atrito no engrenamento

Apesar da adoção da hipótese acima, ainda assim será considerado que a força de atrito de deslizamento no engrenamento é baixa, de forma que ela pode ser desconsiderada. Com isso, apenas forças atuantes na direção perpendicular ao contato serão consideradas [36].

Essa hipótese é necessária para possibilitar o uso do modelo de deslocamento do dente devido à pressão de contato definido em [31].

5.1.3. São estudadas apenas engrenagens cilíndricas de dentes retos

Aqui são definidos dois pontos importantes.

O primeiro restringe o estudo a engrenagens cilíndricas. A maior parte do mercado de redutores especiais de velocidade no Brasil não utiliza engrenagens com dentes cônicos. Além disso, o perfil de um dente cônico é muito diferente do perfil de um dente cilíndrico, o que justificaria fazer um estudo direcionado apenas para engrenagens cônicas (que não é o foco da presente dissertação).

O segundo ponto abordado na hipótese é que serão estudados apenas dentes retos. Os dentes helicoidais apresentam engrenamento em várias partes da superfície do dente ao mesmo tempo. Da mesma forma, existem dentes entrando e saindo de contato a todo o momento. Estas considerações adicionariam uma grande dificuldade à modelagem analítica, de forma que o trabalho será limitado apenas a dentes retos. Outro ponto importante desta hipótese é o fato de as equações de deslocamento do dente devido à sua flexão e à pressão de contato só serem válidas para dentes retos, de forma que o estudo de dentes helicoidais necessitaria de outro equacionamento.

5.1.4. O contato entre duas engrenagens pode ser aproximado por um contato cilindro-cilindro.

Esta é outra hipótese importante para utilizar as equações de Hertz [37]. As duas superfícies das engrenagens podem ser aproximadas, nas regiões próximas ao contato, por dois cilindros devido às propriedades do perfil evolvente.

Vale ressaltar que, ao variar a altura do engrenamento, os diâmetros desses cilindros equivalentes mudam, mas, para cada instante, os dentes sempre poderão ser aproximados por dois cilindros.

5.1.5. Engrenamento ocorre no diâmetro de trabalho

O contato entre as engrenagens pode ocorrer em qualquer região do dente, desde o seu pé até a sua cabeça. No entanto, será considerado que apenas um dente se encontra em contato no diâmetro de trabalho do engrenamento [14]. Esta é uma boa hipótese em redutores com poucos dentes e baixa rotação, que é o escopo do trabalho, pois o grau de recobrimento (número de dentes simultâneos em contato) é baixo e durante o contato pleno realmente apenas um dente estará engrenado. Essa condição pode ser mais bem visualizada na Figura 27.

Figura 27 - À esquerda, apenas um par de dentes está engrenado. À direita, dois pares estão engrenados.

5.1.6. Análise estática

A rotação das engrenagens a ser estudada é baixa, de forma que o contato entre as engrenagens pode ser estudado de forma estática. Isso significa que o dente de uma engrenagem possui tempo para se deslocar e estabelecer contato pleno com a outra engrenagem.

5.2. Dedução das fórmulas analíticas

O modelo analítico abrange os quatro efeitos distintos do engrenamento, que são: flexão da engrenagem, torção da engrenagem, flexão do dente da engrenagem e deslocamento do dente da engrenagem devido à pressão de contato.

A correção de hélice pode ser calculada e usinada em ambas as engrenagens. No entanto, a fim de reduzir custos de fabricação, define-se a correção apenas para o pinhão, que possui um número inferior de dentes.

Dessa forma, é necessário calcular os deslocamentos do flanco da coroa a fim de, posteriormente, calcular a correção de hélice do pinhão, ou seja, o deslocamento necessário para o pinhão manter 100% de contato ao longo de todo o perfil do dente quando submetido ao torque nominal.

Além disso, o método leva em consideração que a carga está uniformemente distribuída ao longo de toda a superfície do dente. Isto é válido no caso de a correção de hélice já existir. Neste caso, o que se está fazendo é uma engenharia reversa. Ao invés de calcular a distribuição de carga para cada correção de hélice no pinhão e iterar para encontrar a correção que garanta uma distribuição de carga perfeita, assume-se que a distribuição é perfeita e calculam-se os deslocamentos nas engrenagens. Dessa forma, sem nenhuma iteração, consegue-se definir a correção de hélice do pinhão. Caso seja de interesse descobrir a distribuição de carga no dentado em função de uma determinada correção de hélice, a referência [38] possui uma metodologia de cálculo para tal.

5.2.1. Equação da evolvente de círculo

O primeiro item a ser modelado são as equações da evolvente de círculo. Deve-se parametrizar o raio de contato ($r_{contato}$) em função de um ângulo de referência (θ). A Figura 28 mostra esses parâmetros. Por conveniência, será assumido que o sistema de coordenadas global ($Oxyz$) está localizado no centro do eixo da coroa em sua posição nominal não deformada - sem a aplicação de cargas. Esse sistema de coordenadas pode ser visualizado na Figura 29.

Figura 28 – Parâmetros importantes para o cálculo da equação da evolvente.

No entanto, a fim de facilitar o uso das equações de evolvente, é conveniente definir um novo centro de coordenadas ($Ox'y'z'$) com mesma direção e sentido que o outro, mas centrado em cada seção do eixo após o seu deslocamento. Esse sistema é auxiliar e será utilizado para calcular o novo ponto de contato da engrenagem coroa mais facilmente. Posteriormente, uma mudança de variáveis

garantirá que o eixo seja trazido de volta para o primeiro centro de coordenadas. Uma comparação entre o antigo e o novo centro de coordenadas se encontra na Figura 30.

Figura 29 – Sistema de coordenadas das equações de deslocamento dos eixos e das engrenagens.

Com o auxílio da Figura 28 e das referências [9], [10] e [11] é possível deduzir as seguintes equações

$$\frac{r_{cilindro_{evolvente}}}{r_{contato}} = \sin(\alpha), \quad (20)$$

$$\frac{r_{base}}{r_{evolvente}} = \cos(\alpha), \quad (21)$$

$$r_{base} = \frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2}, \quad (22)$$

$$r_{evolvente} = \frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2.\cos(\alpha)}. \quad (23)$$

Figura 30 – Mudança de coordenadas a ser efetuada em cada plano devido ao deslocamento dos eixos. O centro do sistema de coordenadas X, Y é fixo, enquanto que o centro do sistema X', Y' varia ao longo da engrenagem.

Assim, o ângulo a partir do contato é o $\theta_0 - \theta$, que vale, coincidentemente, $inv(\alpha)$, sendo que

$$inv(\alpha) = \theta_0 - \theta, \quad (24)$$

$$\alpha = inv^{-1}(\theta_0 - \theta), \quad (25)$$

e, portanto

$$r_{evolvente}(\theta) = \frac{m \cdot z \cdot \cos(\alpha_0)}{2 \cdot \cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta))}. \quad (26)$$

O ângulo θ_0 é o ponto de início da evolvente da engrenagem que está em contato com a sua circunferência de base. Apesar de a equação matemática da evolvente ser sempre a mesma, a espessura do dente, e consequentemente o seu ponto de início na circunferência de base, varia em função dos parâmetros de engrenamento e em função da torção da engrenagem.

Um exemplo dessa afirmação se encontra na Figura 31.

Figura 31 – Comparação de dois deslocamentos de perfil distintos.

Na Figura 31 existem dois perfis de engrenagens distintos. O perfil externo corresponde a uma engrenagem com maior deslocamento de perfil ($x_{perfil} = 0,4$) enquanto que o interno possui um deslocamento menor ($x_{perfil} = 0,2$). Note que o raio de base de ambas é o mesmo, assim como a equação e o formato de ambas. A diferença é a defasagem angular de um perfil em relação à outra.

A equação da espessura do dente da engrenagem em função do raio da evolvente está disposta abaixo [14]

$$Espessura_{dente}(r_{evolvente}) = \frac{2 \cdot r_{evolvente} \cdot \sin(\varphi_y \cdot \cos^3(\beta_y))}{\cos^2(\beta_y)} \quad (27)$$

sendo que

$$\beta_y = \tan^{-1} \left(\tan(\beta_0) \cdot \frac{r_{evolvente}}{r_{primitivo}} \right), \quad (28)$$

$$\varphi_y = \frac{\pi + 4 \cdot x_{perfil} \cdot \tan(\alpha_0)}{2 \cdot z} + \text{inv}(\alpha_t) - \text{inv}(\alpha_{yt}), \quad (29)$$

$$\alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\alpha_0)}{\cos(\beta_0)} \right), \quad (30)$$

$$\alpha_{yt} = \cos^{-1} \left(\cos(\alpha_t) \frac{r_{primitivo}}{r_{evolvente}} \right), \quad (31)$$

com isso,

$$\begin{aligned} & Espessura_{dente}(\theta) \\ &= \frac{1}{\cos(\text{ev}^{-1}(\theta_0 - \theta)) \cdot \cos^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\tan(\beta_0)}{\cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta))} \right) \right)} \left\{ m \cdot z \cdot \cos(\alpha_0) \sin \left[\left(\frac{\pi + 4 \cdot x_{perfil} \cdot \tan(\alpha_0)}{2 \cdot z} \right) \right] \right. \\ &+ \text{ev} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\tan(\alpha_0)}{\cos(\beta_0)} \right) \right) \\ &\left. - \text{ev} \left(\cos^{-1} \left(\cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{\tan(\alpha_0)}{\cos(\beta_0)} \right) \right) \cdot \cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta)) \right) \right) \cdot \cos^3 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\tan(\beta_0)}{\cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta))} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Como simplificação deste modelo matemático está sendo adotado $\beta_0 = 0$ (seção 5.1.3) de forma que

$$\begin{aligned}
& Espessura_{dente}(\theta) \\
&= \frac{1}{\cos(inv^{-1}(\theta_0 - \theta))} \left\{ m.z.\cos(\alpha_0).sen \left[\frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2z} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + inv(\alpha_0) - ev(\cos^{-1}(\cos(\alpha_0).\cos(inv^{-1}(\theta_0 - \theta)))) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Para encontrar a espessura do dente no diâmetro de base deve-se fazer $\theta = \theta_0$. Assim

$$Espessura_{dente}(\theta = \theta_0) = m.z.\cos(\alpha_0)sen \left(\frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2z} \right). \tag{34}$$

O ângulo θ_0 vale, portanto:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \frac{\pi}{2} + asen \left(\frac{Espessura_{dente}(\theta = \theta_0)}{2.r_{base}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} + asen \left(\frac{m.z.\cos(\alpha_0).sen \left(\left(\frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2.z} \right) \right)}{2 \frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2}} \right) \\
\theta_0 &= \frac{\pi}{2} + asen \left(sen \left(\left(\frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2.z} \right) \right) \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2.z} \\
\theta_0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi + 4.x_{perfil}.\tan(\alpha_0)}{2.z}.
\end{aligned} \tag{35}$$

De posse desse ângulo (θ_0) e do raio de base todo o perfil evolvente do dente da engrenagem está definido.

5.2.2. Equação da linha de engrenamento

De posse da equação da evolvente deve-se encontrar a linha de engrenamento de cada seção das engrenagens. Como já discutido previamente, esta linha contém todos os pontos do engrenamento, desde o seu início até o seu fim. Dessa forma, é correto afirmar que o novo ponto de engrenamento, após o deslocamento dos eixos e engrenagens, estará contido nessa mesma linha.

No entanto, esta linha sofrerá uma pequena mudança por conta dos deslocamentos dos eixos e engrenagens (d_{xp} , d_{yp} , d_{xc} , d_{yc}).

Figura 32 – Representação da linha do engrenamento.

Esta linha pode ser determinada em função do novo centro dos eixos, uma vez que ela é tangente às duas circunferências de base do pinhão e da coroa. Para definir a sua equação basta encontrar estes dois pontos de tangência. A representação da linha de engrenamento pode ser visualizada na Figura 32.

É possível notar que existe uma semelhança de triângulos entre as retas mostradas em negrito na Figura 32. O detalhe desta semelhança de triângulos está registrado na Figura 33.

Figura 33 – Detalhe da Figura 32, mostrando a semelhança de triângulos e o novo ângulo de trabalho do engrenamento.

A partir da Figura 33 pode-se determinar

$$\frac{r_{trabalho_pinhão}}{r_{base_pinhão}} = \frac{r_{trabalho_coroa}}{r_{base_coroa}} \quad (36)$$

$$r_{trabalho_pinhão} + r_{trabalho_coroa} = distância_{entrecetros} \quad (37)$$

$$\cos(\alpha_t) = \frac{r_{base_pinhão}}{r_{trabalho_pinhão}} \quad (38)$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
r_{trabalho_{coroa}} &= r_{trabalho_{pinhão}} \cdot \frac{r_{base_{coroa}}}{r_{base_{pinhão}}} \\
r_{trabalho_{pinhão}} + r_{trabalho_{pinhão}} \cdot \frac{r_{base_{coroa}}}{r_{base_{pinhão}}} &= distância_{entrecentros} \\
r_{trabalho_{pinhão}} &= \frac{distância_{entrecentros}}{1 + \frac{r_{base_{coroa}}}{r_{base_{pinhão}}}} \\
\cos(\alpha_t) &= \frac{r_{base_{pinhão}} \cdot \left(1 + \frac{r_{base_{coroa}}}{r_{base_{pinhão}}}\right)}{distância_{entrecentros}} = \frac{r_{base_{pinhão}} + r_{base_{coroa}}}{distância_{entrecentros}} \\
\alpha_t &= \arccos\left(\frac{r_{base_{pinhão}} + r_{base_{coroa}}}{distância_{entrecentros}}\right). \tag{39}
\end{aligned}$$

Note também que

$$\alpha_{ref} = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{(a + dy_p) - dy_c}{dx_p - dx_c}\right). \tag{40}$$

Com essas equações, é possível determinar os dois pontos de tangência da reta de engrenamento com as circunferências de base, que são:

Ponto de contato com a coroa

$$xt_c = dx_c + r_{base_{coroa}} \cdot \cos(\alpha_{ref} - \alpha_t), \tag{41}$$

$$yt_c = dy_c + r_{base_{coroa}} \cdot \sin(\alpha_{ref} - \alpha_t). \tag{42}$$

Ponto de contato com o pinhão

$$xt_p = dx_p + r_{base_{pinhão}} \cdot \cos\left(\pi + (\alpha_{ref} - \alpha_t)\right), \tag{43}$$

$$yt_p = a + dy_p + r_{base_{pinhão}} \cdot \sin\left(\pi + (\alpha_{ref} - \alpha_t)\right). \tag{44}$$

Onde xt_i e yt_i são os pontos de tangência das respectivas engrenagens.

É conveniente, neste momento, fazer a mesma mudança de coordenadas feita anteriormente para a evolvente. Dessa forma, temos que

$$xt'_c = xt_c - dx_c,$$

$$xt'_p = xt_p - dx_c,$$

$$yt'_c = yt_c - dy_c,$$

$$yt'_p = yt_p - dy_c,$$

$$xt'_c = r_{base_{coroa}} \cdot \cos(\alpha_{ref} - \alpha_t), \quad (45)$$

$$yt'_c = r_{base_{coroa}} \cdot \sin(\alpha_{ref} - \alpha_t), \quad (46)$$

$$xt'_p = dx_p - dx_c + r_{base_{pinhão}} \cdot \cos(\pi + (\alpha_{ref} - \alpha_t)), \quad (47)$$

$$yt'_p = a + dy_p - dy_c + r_{base_{pinhão}} \cdot \sin(\pi + (\alpha_{ref} - \alpha_t)). \quad (48)$$

A equação de reta, portanto, vale

$$\frac{y - yt'_c}{yt'_p - yt'_c} = \frac{x - xt'_c}{xt'_p - xt'_c}. \quad (49)$$

Neste ponto, é importante fazer uma nova mudança de coordenadas: de cartesianas para polar. A equação da evolvente se encontra neste segundo sistema e será mais fácil resolvê-lo se ambas as equações estiverem usando o mesmo sistema. Dessa forma,

$$y = r \cdot \sin(\theta), \quad (50)$$

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad (51)$$

$$\frac{r \cdot \sin(\theta) - yt'_c}{yt'_p - yt'_c} = \frac{r \cdot \cos(\theta) - xt'_c}{xt'_p - xt'_c}. \quad (52)$$

Simplificando, chegamos a

$$r_{(\theta)} = \frac{yt'_c - xt'_c \cdot \left(\frac{yt'_p - yt'_c}{xt'_p - xt'_c} \right)}{\text{sen}(\theta) - \left(\frac{yt'_p - yt'_c}{xt'_p - xt'_c} \right) \cos(\theta)}. \quad (53)$$

Vale a pena retomar a equação (26) da evolvente deduzida acima, que era

$$r_{(\theta)} = \frac{m.z.COS(\alpha_0)}{2.\cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta))}.$$

No entanto, nesta equação da evolvente não está sendo considerada a torção da engrenagem coroa, nem o deslocamento do seu dente devido à sua flexão e à pressão de contato. Dessa forma, deve ser alterado o ângulo de início de engrenamento na equação acima para compensar estes efeitos. Como o torque que o pinhão aplica na coroa se encontra no sentido anti-horário e a força que o pinhão exerce na coroa é positiva, esse ângulo deve ser descontado da equação acima. Nomeando este ângulo de $\theta_{\text{deslocamento coroa}}$, tem-se

$$\theta_{\text{deslocamento coroa}} = \theta_{\text{torção pinhão}} + \theta_{\text{flexão dente}} + \theta_{\text{deslocamento pressão contato}}, \quad (54)$$

$$r_{(\theta)} = \frac{mz\cos(\alpha_0)}{2.\cos(\text{inv}^{-1}(\theta_0 - \theta_{\text{deslocamento coroa}} - \theta))}. \quad (55)$$

De posse do ângulo de engrenamento (θ_{eng}) e, portanto, do raio de contato (r_{contato}), podemos encontrar o ponto de contato no sistema de coordenadas original com o auxílio das equações

$$x_c = dx_c + r_{\text{contato}} \cdot \cos(\theta_{\text{eng}}), \quad (56)$$

$$y_c = dy_c + r_{\text{contato}} \cdot \text{sen}(\theta_{\text{eng}}). \quad (57)$$

Essas são as coordenadas do novo ponto de contato da coroa. Dessa forma, juntamente com as coordenadas do novo centro do pinhão, é possível encontrar o novo raio de contato do pinhão

$$r_{contato_{pinhão}} = \sqrt{(dx_p - x_c)^2 + (a + dy_p - y_c)^2}. \quad (58)$$

Os ângulos de deslocamento do pinhão para calcular a correção de hélice podem ser visualizados na Figura 34.

Figura 34 – Definição dos ângulos de deslocamento do pinhão.

O ângulo do pinhão vale

$$\theta_{pinhão} = \pi + \theta_{0pinhão} - \theta_{deslocamento_{pinhão}} - \theta_{diâmetro_{contato}}. \quad (59)$$

O ângulo $\theta_{0pinhão}$ é determinado através da equação abaixo

$$\theta_{0pinhão} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi + 4 \cdot x_{perfil_{pinhão}} \cdot \tan(\alpha_0)}{2 \cdot z_{pinhão}}. \quad (60)$$

O ângulo $\theta_{deslocamento_{pinhão}}$ depende da torção do pinhão e do deslocamento do dente devido à flexão e à pressão de contato. Cada componente será determinado posteriormente.

Finalmente, o $\theta_{diâmetro_{contato}}$ vale

$$r_{contato_{pinhão}} = \frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2.\cos\left(inv^{-1}\left(\theta_{0_{pinhão}} - \theta_{diâmetro_{contato}}\right)\right)}, \quad (61)$$

$$\theta_{diâmetro_{contato}} = \theta_{0_{pinhão}} - inv\left(\cos\left(\frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2.r_{contato_{pinhão}}}\right)\right). \quad (62)$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \theta_{pinhão} &= \pi + \theta_{0_{pinhão}} - \theta_{deslocamento_{pinhão}} \\ &\quad - \left(\theta_{0_{pinhão}} - inv\left(\cos\left(\frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2.r_{contato_{pinhão}}}\right)\right) \right), \\ \theta_{pinhão} &= \pi - \theta_{deslocamento_{pinhão}} + inv\left(\cos\left(\frac{m.z.\cos(\alpha_0)}{2.r_{contato_{pinhão}}}\right)\right). \end{aligned} \quad (63)$$

De posse desse ângulo de contato para cada seção do engrenamento, é possível determinar a correção de hélice do redutor levando em conta a flexão e a torção das engrenagens e o deslocamento dos dentes devido à sua flexão e pressão de contato.

A correção de hélice pode ser mais bem visualizada nas Figura 35 e Figura 36. O ponto inicial de contato do engrenamento está marcado ao centro na Figura 35. De posse do novo lugar geométrico no qual a evolvente da coroa está situada, e de posse da linha de engrenamento, é possível calcular o novo ponto de contato do engrenamento (uma vez que a correção de hélice é usinada no pinhão). Com esse ponto de contato, pode-se calcular o raio de contato do pinhão e, com o novo lugar geométrico da evolvente do pinhão, é possível definir o seu novo ponto de contato.

Figura 35 – Determinação dos novos pontos de contato do engrenamento.

A distância entre ambos os novos pontos de contato é definida como a correção de hélice deste engrenamento e pode ser vista na Figura 36.

Figura 36 – Visualização da correção de hélice.

5.2.3. Determinação dos deslocamentos devido à flexão

Como passo seguinte, é necessário determinar o deslocamento dos eixos e engrenagens em função das cargas externas, geometrias e propriedades dos eixos.

Os parâmetros que foram utilizados nas equações dispostas em 5.2.2 e que ainda não foram definidos são:

- Valor das novas posições dos centros das engrenagens;
- Valor do ângulo de torção para cada engrenagem.

Para encontrar esses valores outra metodologia de cálculo teve que ser desenvolvida. Nesta etapa, deve-se encontrar a equação da linha elástica do eixo assim como a torção de cada seção. Para tanto, foi necessário dividir os eixos em várias seções, cada uma das quais com diâmetro constante.

Essa divisão pode ser mais bem visualizada na Figura 37.

Figura 37 – Representação da divisão de um eixo genérico em várias seções de diâmetros constantes.

A equação de flexão de um eixo qualquer é

$$E_{(z)}I_{(z)}y''_{(z)} = M_{(z)}. \quad (64)$$

Como o eixo é constituído de um material com módulo de elasticidade uniforme, $E_{(z)} = E$, assim

$$EI_{(z)}y''_{(z)} = M_{(z)},$$

$$y''_{(z)} = \frac{M_{(z)}}{EI_{(z)}}.$$

$$y_{(z)} = \int \int \frac{M_{(z)}}{EI_{(z)}} d^2z + K'_1 \cdot z' + K'_2. \quad (65)$$

No entanto, a função $I_{(z)}$ é discreta, não sendo facilmente integrável em todo o domínio. Dessa forma, é conveniente dividir o eixo em regiões de diâmetro constante conforme mostrado na Figura 37.

Com isso, para cada região, a variável $I_{(z)}$ é constante ($I_{(z)} = I_i$). Logo

$$y_{i(z)} = \frac{1}{EI_i} \int \int M_z d^2z + K'_{i1} \cdot z + K'_{i2}. \quad (66)$$

As constantes K_{ij} e o valor do momento $M_{(z)}$ são encontradas em função das condições de contorno do problema.

Neste caso, as condições de contorno são as forças de reação dos dois rolamentos, as forças distribuídas das “ n ” engrenagens (o modelo é genérico e pode ser utilizado para um número qualquer de engrenagens) e os deslocamentos e folgas dos rolamentos.

No entanto, a fim de facilitar a resolução dessas equações, é mais fácil assumir que todas as seções do eixo estão sujeitas a um momento e uma força pontual em sua extremidade esquerda e a uma força distribuída na seção conforme ilustrado na Figura 38. Além disso, é introduzida uma variável z'_i que, ao contrário de z , possui valor nulo no início de cada segmento do eixo.

Figura 38 – Ilustração das cargas definidas para cada elemento do eixo disposto na Figura 37.

Dessa forma, a equação do momento para cada segmento do eixo vale

$$M_{(z')} = M_i + (F_i + m_i) \cdot z' + q_i \cdot \frac{z'^2}{2}. \quad (67)$$

Com isso, a equação do deslocamento do eixo é

$$y_{i(z)} = \frac{M_i \cdot \frac{z'^2}{2} + (F_i + m_i) \cdot \frac{z'^3}{6} + q_i \cdot \frac{z'^4}{24}}{EI_i} + K_{i1}' \cdot z' + K_{i2}'. \quad (68)$$

Além disso, sabe-se que o deslocamento no fim de uma seção do eixo é igual ao deslocamento do início da seção seguinte, assim como o ângulo de inclinação da linha elástica. Assim

$$y_{i(z'=L_i)} = y_{i+1(z'=0)}, \quad (69)$$

$$y_{i(z'=L_i)}' = y_{i+1(z'=0)}'. \quad (70)$$

Assim, pode-se chegar às equações das constantes de cada seção do eixo

$$\frac{K_{i+12}}{EI_{i+1}} = \frac{K_{i2} + K_{i1} \cdot L_i + M_i \cdot \frac{L_i^2}{2} + (F_i + m_i) \cdot \frac{L_i^3}{6} + q_i \cdot \frac{L_i^4}{24}}{EI_i}, \quad (71)$$

$$\frac{K_{i+11}}{EI_{i+1}} = \frac{K_{i1} + M_i \cdot L_i + (F_i + m_i) \cdot \frac{L_i^2}{2} + q_i \cdot \frac{L_i^3}{6}}{EI_i}. \quad (72)$$

Depois de algum tratamento matemático, pode-se deduzir a seguinte equação entre seções genéricas (Figura 37) denominadas ' mm' ' e ' nn' ', com $nn > mm$.

$$\begin{aligned} \frac{K_{nn2}}{EI_{nn}} = & \frac{K_{mm2}}{EI_{mm}} + \frac{K_{mm1}}{EI_{mm}} \cdot \sum_{i=mm}^{nn-1} (L_i) + \sum_{i=mm}^{nn-2} \left[\frac{\left(M_i \cdot L_i + (F_i + m_i) \cdot \frac{L_i^2}{2} + q_i \cdot \frac{L_i^3}{6} \right)}{EI_i} \cdot \sum_{j=i+1}^{nn-1} (L_j) \right] \\ & + \sum_{i=mm}^{nn-1} \left(\frac{M_i \cdot \frac{L_i^2}{2} + (F_i + m_i) \cdot \frac{L_i^3}{6} + q_i \cdot \frac{L_i^4}{24}}{EI_i} \right), \end{aligned} \quad (73)$$

$$\frac{K_{nn_1}}{EI_{nn}} = \frac{K_{mm_1}}{EI_{mm}} + \sum_{i=mm}^{nn-1} \left(\frac{M_i \cdot L_i + (F_i + m_i) \cdot \frac{L_i^2}{2} + q_i \cdot \frac{L_i^3}{6}}{EI_i} \right). \quad (74)$$

Nas equações acima, as variáveis que devem ser encontradas são as constantes K_{ij} das seções ' mm ' e ' nn '. Dessa forma, para um eixo com um número "s" de seções, existem 2*s incógnitas. O sistema acima providencia 2*s-2 equações. As últimas duas equações são obtidas nos rolamentos

$$Força_{rolamento} = -Rigidez_{rolamento+carcaça} \cdot \left(\frac{K_{rol_2}}{EI_{rol}} - folga_{rolamento} \right). \quad (75)$$

Note que o valor da folga do rolamento pode ser positivo ou negativo dependendo da direção da força do rolamento.

Adotando a seção do rolamento um como sendo a seção ' nn ' e a do rolamento dois como sendo ' mm ', podem-se encontrar as outras duas equações do sistema

$$\frac{K_{nn_2}}{EI_{nn}} = -\frac{Força_{rolamento1+carcaça}}{Rigidez_{rolamento1+carcaça}} + folga_{rolamento1}, \quad (76)$$

$$\frac{K_{mm_2}}{EI_{mm}} = -\frac{Força_{rolamento2+carcaça}}{Rigidez_{rolamento2+carcaça}} + folga_{rolamento2}. \quad (77)$$

Sendo que as forças dos rolamentos um e dois são encontradas através das equações de equilíbrio estático

$$\sum_y F = 0, \quad (78)$$

$$\sum_z M = 0. \quad (79)$$

As constantes K_{ij} das demais seções do eixo são encontradas aplicando as equações acima e substituindo ' nn ' e ' mm ' pelos números das seções desejadas.

5.2.4. Determinação dos deslocamentos devido à torção

O valor da torção das engrenagens é calculado de acordo com a equação

$$G_{(z)}J_{(z)}\theta'_{(z)} = T_{(z)}. \quad (80)$$

Da mesma forma, G pode ser assumido como constante ao longo do eixo, J_i pode ser calculado para as várias seções do eixo já divididas no cálculo apresentado no item anterior e o torque é considerado como contendo uma componente pontual e uma componente distribuída ($T_{(x)} = T_i + t_i \cdot z$). Assim

$$\begin{aligned} \theta_{(z)} &= \frac{1}{GJ_i} \int (T_i + t_i \cdot z) dz, \\ \theta_{(z)} &= \frac{T_i \cdot z + t_i \cdot \frac{z^2}{2}}{GJ_i} + K'_{i3}. \end{aligned} \quad (81)$$

Considerando que o ângulo entre o final de uma seção do eixo e o início da outra é igual, tem-se:

$$\frac{K_{i+13}}{GJ_{i+1}} = \frac{K_{i3} + T_i \cdot L_i + t_i \cdot \frac{L_i^2}{2}}{GJ_i}. \quad (82)$$

Neste caso, a única consideração que deve ser feita para facilitar os cálculos, é considerar que, para cada engrenagem, K_3 vale zero no início do engrenamento.

5.2.5. Determinação dos deslocamentos do dente da engrenagem devido ao efeito da sua flexão

Conforme foi dito na seção 2.3.2, o modelo elaborado para descrever os deslocamentos do dente da engrenagem devido à sua flexão e pressão de contato estão descritas nesta seção e na próxima.

Para determinar o deslocamento à flexão é necessário aproximar o dente por uma viga equivalente [31] (Figura 19). As equações abaixo determinam as

propriedades da viga em função das características do dentado. Essas propriedades podem ser observadas nas Figura 20 e Figura 21.

$$\gamma = tg^{-1} \left(\frac{S_n - S_a}{2H_a} \right) \quad (83)$$

$$S_n = \frac{2a_n}{i+1} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4.x.\tan(\alpha_0)}{2.z} + \operatorname{inv}(\alpha_t) - \operatorname{inv} \left(\operatorname{acos} \left(\frac{d_p(i+1)}{2a_n} \cos(\alpha_t) \right) \right) \right) \quad (84)$$

$$S_a = d_a \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4.x.\tan(\alpha_0)}{2.z} + \operatorname{inv}(\alpha_t) - \operatorname{inv} \left(\operatorname{acos} \left(\frac{d_p}{d_a} \cos(\alpha_t) \right) \right) \right) \quad (85)$$

$$H_a = \frac{\left(d_a - \frac{2a_n}{i+1} \right)}{2} \quad (86)$$

$$\frac{d_a}{2} \cos(\alpha_a) = \frac{d_p}{2} \cos(\alpha_0) \quad (87)$$

$$\gamma = tg^{-1} \left(\frac{1}{H_a} \left(\frac{\pi}{2z} \left(\frac{a_n}{i+1} - \frac{d_a}{2} \right) - \frac{d_a}{2} (\operatorname{inv}(\alpha_t) - \operatorname{inv}(\alpha_a)) \right) \right) \quad (88)$$

$$a_d = \frac{S_n}{2 \tan(\gamma)} \quad (89)$$

$$L = a_d + H_d \quad (90)$$

$$S_d = \frac{\pi.a_n}{(i+1).z} + 2H_d \tan(\gamma) \quad (91)$$

De posse dos valores desses parâmetros, é possível calcular o deslocamento tangencial à flexão [31]. Para tanto, pode-se considerar, como uma aproximação, que a rigidez do dente é constante ao longo de toda a sua largura [38], de forma que

$$\delta_f = \frac{4F_0 \cos(\alpha_0)}{Eb} \left(3 \left(\frac{L}{S_d} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \left(3 - \frac{a_d}{L} \right) \left(\frac{a_d}{L} - 1 \right) + \ln \left(\frac{L}{a} \right) \right) + \frac{(1+\nu)(L-a_d)}{S_d \left(1 + \frac{a_d}{L} \right)} \right). \quad (92)$$

No entanto, o que é importante para o equacionamento previamente calculado é o ângulo que esse deslocamento causa no dentado. Dessa forma, tem-se

$$\theta_{flexão\ dente} = \frac{\delta_f}{r_{contato}}. \quad (93)$$

5.2.6. Determinação dos deslocamentos do dente da engrenagem devido à pressão de contato

O segundo fator calculado é a rigidez de contato da engrenagem [31]. Da mesma forma que o efeito anterior pôde ser simplificado, também esta rigidez pôde ser adaptada de outro cálculo (neste caso, da equação de Hertz) [31] para valer apenas para engrenagens.

Dessa forma, a equação do deslocamento devido à rigidez de contato vale

$$\delta_s = \frac{2(1 - \nu^2)F_0}{\pi Eb} \left(\frac{2}{3} + \ln \left(\frac{1,731Eb a_n \sin(\alpha_0)}{F_0} \right) \right). \quad (94)$$

Esse deslocamento ocorre na direção da força de contato e é o deslocamento total que ocorre devido à pressão entre as engrenagens. O deslocamento tangencial em cada componente vale

$$\delta_h = \frac{\delta_s \cos(\alpha_t)}{2}. \quad (95)$$

Com esse valor, é possível determinar o ângulo do deslocamento que este efeito causa nas engrenagens

$$\theta_{deslocamento_{pressão\ contato}} = \frac{\delta_h}{r_{contato}}. \quad (96)$$

5.2.7. União de todos os efeitos previamente estudados a fim de determinar a correção de hélice final do engrenamento

A união dos quatro efeitos previamente definidos traduz-se na seguinte fórmula

$$Correção_{hélice} = \frac{d_{primitivo}}{2} \theta_{pinhão}. \quad (97)$$

Todos os parâmetros da equação acima foram definidos em equações anteriores, sendo as mais importantes as de número: (54), (58), (63), (73), (74), (82), (93) e (96).

5.2.8. Modelo analítico proposto pela literatura [29]

Por fim, será apresentado o modelo proposto pela literatura [29]. Este modelo é simplificado se comparado com o proposto nesta dissertação e para utilizá-lo, deve-se projetar todos os deslocamentos no plano perpendicular ao contato conforme mostrado na Figura 39.

Dessa forma, ao utilizar os mesmos referenciais do modelo proposto neste trabalho, será possível comparar os resultados dos dois modelos. Inicialmente, devem ser determinados os deslocamentos devido à flexão e devido à torção. Assumindo que a seção do eixo que está em contato possui o subscrito “c”, tem-se

$$\delta_{c_{torção}}(z') = d_{contato}(z') \cdot \theta_{c_{torção}}(z') \rightarrow \theta_{c_{torção}}(z') = \frac{T_c \cdot z' + t_c \cdot \frac{z'^2}{2}}{GJ_c}, \quad (98)$$

$$\delta_{c_{flexão_x}}(z') = \frac{M_{c_x} \cdot \frac{z'^2}{2} + F_{c_x} \cdot \frac{z'^3}{6} + q_{c_x} \cdot \frac{z'^4}{24}}{EI_c} + K_{c_{x1}}' \cdot z' + K_{c_{x2}}', \quad (99)$$

$$\delta_{c_{flexão_y}}(z') = \frac{M_{c_y} \cdot \frac{z'^2}{2} + F_{c_y} \cdot \frac{z'^3}{6} + q_{c_y} \cdot \frac{z'^4}{24}}{EI_c} + K_{c_{y1}}' \cdot z' + K_{c_{y2}}'. \quad (100)$$

Com os deslocamentos definidos, é necessário somente projetá-los no plano perpendicular ao contato.

Figura 39– Deslocamento perpendicular ao contato: modelo da literatura.

Atenção especial deve ser dada aos fatores dispostos antes de cada componente, pois eles variam para cada eixo e para cada deslocamento analisado, graças ao referencial adotado. A fim de facilitar esse processo, a Tabela 5 mostra os fatores utilizados para cada componente do deslocamento e para cada peça.

$$\delta_{c_{literatura}} = \sum_{i=1}^6 fator_i \cdot \delta_{componente_i} \quad (101)$$

Tabela 5 – Fator de correção dos componentes do cálculo da correção de hélice da literatura.

Deslocamento	Componente	
	Pinhão	Coroa
$\delta_{c_{torção}}$	$-\cos(\alpha_n)$	$-\cos(\alpha_n)$
$\delta_{c_{flexão_x}}$	$-\cos(\alpha_n)$	$+\cos(\alpha_n)$
$\delta_{c_{flexão_y}}$	$+\sin(\alpha_n)$	$-\sin(\alpha_n)$

6. Método dos Elementos Finitos

Nesta seção será mostrada a metodologia utilizada para simular os perfis mostrados anteriormente por meio do método dos elementos finitos.

No entanto, deve-se tomar cuidado para que a simulação feita não mascare nenhum dos efeitos que se deseja estudar. Para tanto, o pré-processamento do par engrenado que será estudado deve ser feito com cuidado.

Primeiramente, deve-se definir o que deve ser simulado. Em um redutor real, os eixos tem liberdade para fletir (geralmente os rolamentos utilizados permitem um pequeno deslocamento angular sem restrições) e rotacionar. Além disso, um dos rolamentos de cada eixo tem liberdade para se deslocar axialmente. Por fim, o torque é transmitido a uma das engrenagens através do seu eixo, sendo transmitido ao outro eixo pro meio do contato entre os dentes das engrenagens (Figura 41).

6.1. Pré-processamento

Nesta seção é descrito, individualmente, cada elemento que deve ser considerado no pré-processamento do modelo.

6.1.1. Rolamentos

Uma maneira de garantir que o rolamento permita que o eixo flexione é simular uma esfera cujo centro está na linha do eixo. Dessa forma, qualquer rotação ao redor de qualquer um de seus eixos será permitida. Além disso, um dos suportes dos rolamentos deve possuir liberdade axial de forma a reproduzir a liberdade real do rolamento.

A Figura 40 abaixo mostra melhor esta simplificação do rolamento.

Figura 40 – Modelagem do rolamento (O raio R deve ser o mesmo raio da pista externa do rolamento).

Além disso, a rigidez do rolamento deve ser a mesma que a utilizada no modelo analítico.

6.1.2. Elementos de contato

O *software* ANSYS Workbench® será utilizado para fazer as análises por intermédio do método dos elementos finitos. O modelo simulado será um modelo tridimensional utilizando os elementos tetragonais de 10 nós, SOLID187. Além disso, os elementos de contato utilizados serão os elementos “*Frictionless*”, uma vez que, de acordo com as hipóteses simplificadoras, o atrito será desconsiderado.

No âmbito dos elementos de contato não lineares, serão utilizados os elementos do tipo “*Normal Lagrange*”. Este tipo de elemento garante que não haverá penetração de uma superfície na outra, o que, por outro lado, leva a um tempo maior de processamento.

6.1.3. Modelos simulados

A fim de aumentar a confiabilidade dos resultados, será utilizado o recurso de “*Submodeling*” do ANSYS® durante as simulações. Com este recurso, são necessários dois modelos: Um geral, exposto na Figura 41 e outro da região de interesse, mostrado na Figura 42. Dessa forma, primeiro é simulado o modelo geral, e os resultados deste modelo são exportados para o segundo como condições de contorno. Assim, para uma mesma capacidade de cálculo, é possível obter resultados mais confiáveis.

6.1.3.1. Modelo geral

Figura 41 – Aplicação das condições de contorno no modelo.

Conforme dito no início da seção, o torque deve ser aplicado no lugar correspondente à engrenagem do eixo de entrada e removido através das engrenagens do eixo de saída. Neste caso, ele é aplicado como uma força na região do engrenamento com o outro eixo (não representado). As configurações do eixo e das engrenagens se encontram nas Tabela 2, Tabela 3 e Tabela 4. As condições de contorno descritas podem ser visualizadas na Figura 41.

6.1.3.2. Modelo apenas do dentado

A modelagem exclusiva do dentado deve ser feita à parte. O modelo utilizado pode ser visualizado na Figura 42.

Figura 42 – Modelagem apenas da região de interesse.

6.1.4. Geometria dos perfis das engrenagens

Os perfis das engrenagens seguem a norma DIN3960 [14]. A fim de garantir que o perfil fique conforme especifica a norma, foi utilizada uma rotina de geração de perfis descrita em [16]. Com essa rotina, o perfil da engrenagem é traçado em função dos seus dados geométricos, tais como número de dentes, módulo, deslocamento de perfil, ângulo de pressão, etc.

De posse dessa geometria, foram modeladas três engrenagens em 3D. Uma de dentes puramente retos, uma com a correção encontrada na literatura e uma com a correção definida por esta dissertação. Estas três engrenagens serão simuladas posteriormente.

6.1.5. Refino da malha

Por fim, foi feito o adensamento da malha em ambos os modelos. O fato de o modelo do dentado (Figura 42) possuir um número maior de elementos para

representar o contato faz com que a confiabilidade dos resultados seja maior do que a dos obtidos com o modelo geral (Figura 41).

A malha do modelo geral (Figura 41) está representada na Figura 43. A malha do modelo do dentado (Figura 42) está representada na Figura 44.

Figura 43 - Malha do modelo geral, com aproximadamente 890.000 nós e 620.000 elementos.

Figura 44 - Malha do modelo do dentado com aproximadamente 7.500.000 nós e 5.400.000 elementos.

6.2. Pós-processamento

Neste caso, o interesse da análise de elementos finitos reside em averiguar se as correções de hélice usinadas surtiram efeito na distribuição de pressão na face do dente. Espera-se que as pressões dos modelos corrigidos sejam mais bem distribuídas que a do modelo original. Esses dados se encontram na seção 7.2.

7. Resultados Obtidos e Discussões

Nesta seção serão apresentados todos os resultados obtidos com o modelo analítico da literatura apresentado na seção 2.3, o modelo analítico desenvolvido na seção 5 e o de elementos finitos da seção 6 por meio da metodologia descrita na seção 4.

7.1. Modelo analítico

Depois de aplicado o modelo analítico discutido na seção 5, utilizando principalmente as equações (58), (63), (73), (74) e (82), foi possível calcular a flexão e torção do eixo e a flexão e deslocamento do dente devido à pressão de contato. Os valores absolutos desses parâmetros para o engrenamento 1 se encontram na Figura 45.

Figura 45 – Valores da flexão dos eixos e engrenamentos.

No entanto, o que é importante para o valor da correção de hélice são os deslocamentos ao longo do comprimento da engrenagem, uma vez que um parâmetro que não se desloca pode ser corrigido por uma rotação de corpo rígido. Por exemplo: Supondo o deslocamento total disposto na Figura 46 a, é possível dividir este deslocamento em dois: um que pode ser corrigido por rotações de corpo

rígido (linha reta e fina na Figura 46 b) e outro relativo, que é significativo para a correção de hélice (linha curva e grossa na Figura 46 b). Essa correção significativa está novamente mostrada na Figura 46 c.

Figura 46 – Deslocamentos significativos para a correção de hélice. (a) deslocamento total do engrenamento. (b) deslocamento é dividido em dois, um de corpo rígido (linha fina) e outro relativo (linha grossa). (c) único deslocamento significativo para a análise é o relativo.

Dessa forma, a Figura 47 mostra apenas o deslocamento relativo que deverá ser levado em conta para o cálculo da correção de hélice.

Analisando a Figura 47, é possível observar que apenas o pinhão sofre deslocamento durante o contato. A coroa, por possuir um diâmetro 3,8 vezes maior que o do pinhão, possui um momento polar de inércia 210 vezes maior. Dessa forma, frente à mesma força de contato, ela se desloca muito menos que o pinhão. O que ocorre é que a flexão do eixo no qual a coroa está montada faz com que ela trabalhe desalinhada com o eixo da contra peça. A contribuição da flexão e da torção do eixo da coroa, neste caso, será linear, enquanto que a correção do pinhão possui um perfil próximo do parabólico.

Figura 47 – Valores da flexão e da torção relativas dos eixos e engrenamentos.

Além disso, foi feita uma análise de sensibilidade para o deslocamento do dente devido à sua flexão e à pressão de contato.

Foi calculado o deslocamento do dentado no diâmetro de contato teórico. Ao se variar o diâmetro de contato com os dados obtidos na Figura 45, viu-se que não houve variação significativa dos deslocamentos do dente perante a sua flexão e a pressão de contato – a ordem de grandeza dessa variação é duas ou três vezes menor que a variação dos outros parâmetros. Com isso, como a variação relativa desses parâmetros é desprezível, eles não serão considerados no cálculo da correção de hélice dos casos analisados neste trabalho.

Os valores encontrados nesta análise de sensibilidade estão na Tabela 6.

Tabela 6—Análise de sensibilidade da flexão dos dentes e deslocamento devido à pressão de contato.

	Diâmetro teórico	Diâmetro corrigido	Erro (%)
Flexão do dente do pinhão (μm)	5,11	5,13	0,39%
Flexão do dente da coroa (μm)	18,32	18,41	0,49%
Deformação pressão contato (μm)	13,937	13,938	0,01%

Os gráficos mostrados na Figura 48 mostram a espessura do material que deve ser removida do dente da engrenagem ao longo da sua largura para o engrenamento 1. Dessa forma, uma maior correção implica em uma maior remoção de massa.

O sinal de “x” mostra a correção de hélice obtida com o *software* comercial RIKOR®. O valor inicial da correção é de 55 μm , o valor nulo ocorre em uma largura de aproximadamente 160 mm e o valor final da correção, no fim do dentado, é de 28 μm .

O sinal de “+” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto pela literatura. O valor inicial da correção é de 54 μm , o valor nulo ocorre em uma largura de aproximadamente 160 mm e o valor final da correção, no fim do dentado, é de 28 μm .

Por fim, o sinal de “•” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto nesta dissertação. O valor inicial da correção é de 60 μm , o valor nulo ocorre em uma largura de aproximadamente 160 mm e o valor final da correção, no fim do dentado, é de 30 μm .

Figura 48 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 1).

Os gráficos mostrados na Figura 49 mostram a espessura do material que deve ser removida do dente da engrenagem ao longo da sua largura para o engrenamento 2.

O sinal de “x” mostra a correção de hélice obtida com o *software* comercial RIKOR®. O valor inicial da correção é de 292 μ m, o valor nulo ocorre no fim do dentado.

O sinal de “+” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto pela literatura. O valor inicial da correção é de 293 μ m, o valor nulo ocorre no fim do dentado.

Por fim, o sinal de “•” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto nesta dissertação. O valor inicial da correção é de 315 μ m, o valor nulo ocorre no fim do dentado.

Figura 49 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 2).

Os gráficos mostrados na Figura 50 mostram a espessura do material que deve ser removida do dente da engrenagem ao longo da sua largura para o engrenamento 3.

O sinal de “x” mostra a correção de hélice obtida com o *software* comercial RIKOR®. O valor inicial da correção é nulo e vale 238µm no fim do dentado.

O sinal de “+” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto pela literatura. O valor inicial da correção é nulo e vale 244µm no fim do dentado.

Por fim, o sinal de “•” mostra a correção de hélice obtida com o modelo analítico proposto nesta dissertação. O valor inicial da correção é nulo e vale 257µm no fim do dentado.

Figura 50 – Comparação da correção de hélice dos três modelos expostos (Engrenamento 3).

Ao analisar as Figura 48, Figura 49 e Figura 50, é possível visualizar que a correção de hélice obtida com o *software* comercial RIKOR® é muito parecida com aquela obtida com o modelo proposto pela literatura. Os valores dos extremos das correções são parecidos e os valores de máximo ocorrem no mesmo comprimento da engrenagem. Este é um indício de que o modelo utilizado no *software* comercial pode ser o mesmo da literatura, que considera apenas deslocamentos normais ao plano de contato.

No entanto, ao se considerar o perfil evolvente do dentado, modelo proposto nesta dissertação, a correção de hélice aumenta. Como a flexão das engrenagens é mais acentuada nas extremidades do dentado, a distância entre as engrenagens também será maior nesta região. Com esse maior distanciamento, deslocamentos tangenciais ao contato passam a se tornar importantes, uma vez que a separação entre as engrenagens aumenta. Esse fator é o responsável pelo aumento da correção de hélice nestes locais. A diferença percentual entre os modelos é de aproximadamente 8%.

Este fator pode ser visualizado na Figura 51. Como o deslocamento tangencial ao plano de contato é desprezada, assume-se que o perfil do dente é uma reta. No entanto, ao nos afastarmos da região de contato inicial, há o

surgimento de uma separação que deve ser levada em conta na correção de hélice. Ele é o responsável pela diferença entre o modelo analítico da literatura e o proposto nesta dissertação.

Figura 51 – Gap responsável pela diferença entre os modelos analíticos propostos pela literatura e por esta dissertação.

Vale a pena ressaltar que o formato da correção de hélice que deve ser fornecido à retífica de dentes deve ser uma equação de primeiro (reta) ou segundo grau (parábola). Todas as correções propostas nesta dissertação podem ser aproximadas por uma equação de segundo grau. As correlações dos perfis com a equação de uma parábola estão dispostas na Tabela 7. Dessa forma, apesar de os efeitos que regem a correção de hélice serem não lineares, o resultado final pode ser aproximado por uma parábola, o que garante a sua capacidade de manufatura.

Tabela 7 – Correlação dos perfis estudados com uma equação de parábola

Modelo	Correlação com equação de segundo grau (R^2)
RIKOR	1,0000
Literatura	0,9990
Proposto	0,9988

7.2. Modelo dos elementos finitos

A Figura 52 mostra a distribuição de pressão na face do dente obtida por meio do método dos elementos finitos para o modelo simulado sem nenhuma correção de hélice.

Figura 52 – Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo sem correção de hélice.

A Figura 53 mostra a distribuição de pressão encontrada com a correção de hélice obtida por meio do modelo da literatura / RIKOR®.

Figura 53 - Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo com correção de hélice da literatura.

A Figura 54 mostra a distribuição de pressão encontrada com a correção de hélice proposta nesta dissertação.

Figura 54 - Distribuição de pressão ao longo da face do dente – modelo com correção de hélice proposta nesta dissertação.

A Figura 55 contém um gráfico com os valores máximos obtidos com os elementos finitos para cada seção do dentado. Pode-se perceber que para o modelo sem correção, a distribuição de pressão ao longo do dentado não é constante, sendo maior no início do engrenamento, diminuindo ao longo do mesmo e aumentando novamente no fim. Isto vai ao encontro das correções de hélice encontradas para o engrenamento 1, que afirmam que deve ser feito um alívio no dentado nas extremidades, sendo que esse alívio deve ser maior na região do dentado através da qual o torque é transmitido ao engrenamento e menor na região oposta.

Figura 55 – Pressão de contato ao longo da largura.

Com a correção de hélice proposta na literatura / RIKOR®, é possível perceber que há uma melhor distribuição de carga ao longo da face do dente se comparada com o modelo simulado sem nenhuma correção. No entanto, nas extremidades do dentado ainda há uma concentração de tensão (menor que a do modelo sem correção). Analisando as correções de hélice propostas pela literatura e por esta dissertação (Figura 48) é possível visualizar que o modelo proposto por esta dissertação possui correções um pouco maiores que o da literatura.

Com a correção de hélice proposta nesta dissertação, é possível visualizar que a distribuição de carga, apesar de não ser perfeita, é melhor que a encontrada pela correção de hélice proposta pela literatura.

7.3. Comparação entre modelo analítico e MEF

As discrepâncias entre os resultados encontrados com o modelo analítico (7.1) e com os elementos finitos (7.2) podem vir de vários fatores. Apesar de todo o cuidado para manter as mesmas condições de contorno entre modelo analítico e métodos dos elementos finitos, o modelo analítico é bidimensional enquanto que o método dos elementos finitos é tridimensional. Dessa forma, é esperado que existam algumas diferenças entre os resultados. Por exemplo, o método analítico considera que as engrenagens inteiras são solicitadas (toda a seção transversal delas é solicitada) enquanto que nos elementos finitos esse não é o comportamento visualizado ao se analisar os resultados obtidos. A falta de simetria axial no caso tridimensional pode ser observada na Figura 56.

Outro ponto de divergência entre os modelos se encontra nos rolamentos. No modelo analítico eles são pontuais, enquanto que no modelo tridimensional eles possuem uma área de contato com o eixo. Essa área de contato aumenta o momento de inércia dessa região fazendo com que o deslocamento do eixo, ao se utilizar o MEF, seja inferior ao calculado no modelo analítico.

Figura 56 – Tensão de von Mises no material em uma seção transversal da coroa. Apenas a região próxima ao engrenamento trabalha. A região oposta não é solicitada.

Analisando os dados de elementos finitos encontrados na seção 7.2 pode-se calcular o concentrador de carga de cada um dos métodos de cálculo de correção de hélice. O valor desse concentrador é encontrado ao se dividir a pressão máxima de contato pelo valor da pressão média na seção. Os valores encontrados estão dispostos na Tabela 8.

Tabela 8 – Valores dos concentradores de tensão encontrados por meio dos elementos finitos.

Modelo	Concentrador	Dif. relação ao sem correção
Sem correção	1,58	-
Correção literatura	1,25	57%
Correção desta dissertação	1,23	60%

Analisando a Tabela 8, pode-se concluir que o modelo formulado nesta dissertação, ao ser comparado com os outros por meio do método dos elementos

finitos, melhora em 3% a distribuição de pressão ao longo do dentado. Usando a metodologia de cálculo exposta em [38], uma redução de 3% na concentração de carga no dentado permite uma redução aproximada de 3% na largura das engrenagens. Essa redução, quando aplicada a todas as engrenagens de uma caixa redutora, reduz o seu custo em 1%. Note que esta redução de custo é alcançada apenas mudando a metodologia de cálculo da correção de hélice, sem necessidade de investimentos em máquinas operatrizes, *softwares*, mudança de material, etc.

As dificuldades do cálculo, no entanto, são grandes. O modelo da literatura [29] é linear e pode ser resolvido sem nenhum conhecimento da geometria e propriedades das engrenagens que estão em contato. É necessário apenas saber a relação de transmissão, os diâmetros das engrenagens e o torque transmitido entre os eixos.

Com o modelo proposto é necessário possuir um profundo conhecimento das engrenagens em contato, sendo necessários vários parâmetros de engrenamento para conseguir calcular a correção de hélice. Porém, o fabricante do redutor de velocidades possui esses dados, sendo necessário, portanto, apenas mais tempo para calcular a correção.

8. Conclusões

No decorrer deste trabalho, foi desenvolvido um modelo analítico para cálculo da correção de hélice em um par engrenado cilíndrico de dentes retos. Este modelo foi comparado com o modelo da literatura e do *software* RIKOR®.

Ao observar as Figuras da seção 7.1, é possível afirmar que o modelo analítico apresentado nesta dissertação possui resultados próximos aos do modelo atual da literatura e do RIKOR®, com valores da correção de hélice ligeiramente maiores, principalmente nas extremidades da engrenagem.

Analisando a Tabela 8, é possível visualizar que a concentração de tensão no dentado é 3% menor no modelo desenvolvido nesta dissertação se comparado com o modelo da literatura. Esse ganho é responsável por uma redução do custo do redutor em aproximadamente 1%.

Dessa forma, é possível concluir que considerar o efeito do perfil evolvente da engrenagem no cálculo da correção de hélice aprimora a distribuição de pressão no contato, reduzindo o custo do redutor e aumentando a competitividade do equipamento no mercado.

9. Propostas de trabalhos futuros

Tendo em vista os resultados obtidos com esta dissertação, é possível ampliá-los por intermédio de três caminhos distintos.

O primeiro deles é considerar a correção de hélice para dentados helicoidais. A restrição ao uso de engrenagens de dentes retos foi adotada nesta dissertação e, se removida, pode ampliar os resultados para qualquer redutor de velocidade que utiliza engrenagens de dentes cilíndricos.

O segundo caminho é modelar o aquecimento das engrenagens em funcionamento. Conforme o redutor funciona, calor é dissipado no contato por várias razões, tais como atrito no contato entre as engrenagens, histerese do material, etc. Essa dissipação de energia aquece o dentado de uma forma que pode ser não linear dependendo das posições dos chuveiros que injetam o óleo necessário para refrigerá-lo. Este efeito em engrenagens que possuem grandes dimensões ou grandes rotações é mais pronunciado e pode afetar a correção de hélice.

Por fim, o último caminho é modelar dois ou mais dentes em contato. Nesta modelagem, assume-se que existe uma distribuição de carga entre os vários dentes em contato, fato este que diminui a correção de hélice necessária.

10. Referências Bibliográficas

- 1 GUENTHER, A. **Interpretation of bevel gear topography measurements.** CIRP Annals - Manufacturing Technology, Nova York, v. 60, p. 551-554, 2011.
- 2 MERMOZ, E. et al. **A new methodology to optimize spiral bevel gear topography.** CIRP Annals - Manufacturing Technology, Marignane, v. 62, p. 119-122, 2013.
- 3 MAO, K. **Gear tooth contact analysis and its application in the reduction of fatigue wear.** Wear, Uxbridge, v. 262, p. 1281-1288, 2006.
- 4 SHIH, Y. P.; CHEN. S. D. **A flank correction methodology for a five-axis CNC gear profile grinding machine.** Mechanism and Machine Theory, Taipei, v. 47, p. 31-45, 2011.
- 5 GABICINI, M.; BRACCI, A.; BATTAGLIA. E. **On the estimation of continuous mappings from cradle-style do 6-axis machines for face-milled hypoid gear generation.** Mechanism and Machine Theory, Pisa, v. 46, p. 1492-1506, 2011.
- 6 HUANG, C. L. et al. **Profile correction of a helical gear shaping cutter using the lengthwise-reciprocating grinding method.** Mechanism and Machine Theory, Hsinchu, v. 44, p. 401-411, 2008.
- 7 ARTONI, A.; GABICINI, M.; KOLIVAND. M. **Ease-off based compensation of tooth surface deviations for spiral bevel and hypoid gears: Only the pinion needs correction.** Mechanism and Machine Theory, Pisa, v. 61, p. 84-101, 2012.
- 8 RADZEVICH, S. P. **Dudley's Handbook of practical gear design and manufacture.** 2ª.Ed. Nova York: CRC Press, 2012. 878 p.
- 9 BUCKINGHAM, E. **Analytical Mechanics of Gears.** New York - Toronto - London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949. 546 p.

- 10 NIEMANN, G. **Elementos de Máquinas**: Vol. 2. Ed. Edgard Blucher, 2002. 224 p.
- 11 STIPKOVIC, M. F. **Engrenagens: Geometria, dimensionamento, controle, geração**. São Paulo: McGraw-Hill, 1978.
12. http://pfc.danielmnez.es/wp-content/uploads/2009/05/generacion_evolutiva.png. Acesso em: 04 de Março de 2015.
13. <http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAAAD3EAL-7.png>. Acesso em: 04 de Março de 2015.
- 14 DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 3960**: Definitions, parameters and equations for involute cylindrical gears and gear pairs. Alemanha, 1987.
- 15 GEMAQUE, M. J. **Abordagem para solução de um problema metrológico na indústria - Medição de engrenagens**. Dissertação – Florianópolis, 2004.
- 16 SILVEIRA, A. R. G. **Estudo da pressão de contato e da tensão no pé do dente de uma engrenagem**. Trabalho de Conclusão de Curso, São Paulo, 2011.
17. http://dc159.4shared.com/doc/xBeDJHOq/preview_html_45a9e869.png. Acesso em: 21 de Novembro de 2014.
- 18 BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de Máquinas de Shigley**. New York: McGraw-Hill, 2011. 1084 p.
- 19 NORTON, L. R. **Projeto de Máquinas, uma abordagem integrada**. São Paulo: ARTMED EDITORA S. A, 2000. 931 p.
- 20 OLIVEIRA, N. C. **Engrenagens**. São Paulo: Departamento de Livros e Publicações do Grêmio Politécnico, USP, 1961. 194 p.
- 21 STIPKOVIC, M. F. **Parâmetros informativos sobre custos de projeto e fabricação de sistemas engrenados**. São Paulo, 1997.

22 AMERICAN GEAR MANUFACTURERS ASSOCIATION. **AGMA 226.01:** Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth. EUA, 1989.

23 LI, S. **Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears.** Mechanism and Machine Theory, Japan, v. 42, p. 698-726, 2006.

24 LI, S. **Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications.** Mechanism and Machine Theory, Japan, v. 42, p. 88-114, 2006.

25 LI, S. **Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears.** Mechanism and Machine Theory, Japan, v. 43, p. 1557-1584, 2008.

26 MAO, K. **An approach for power train gear transmission error prediction using the non-linear finite element method.** Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers v. 220 Part D: J. Automobile Engineering. Middlesex, p. 1455-1463, 2006.

27 VELEX, P. **A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behavior.** Journal of Sound and Vibration, Villeurbanne Cédex, v. 191, p. 629-660, 1995.

28 BRUYÈRE, J. **A simplified multi-objective analysis of optimum profile modifications in spur and helical gears.** Mechanism and Machine Theory, Villeurbanne Cédex, v. 80, p. 70-83, 2014.

29 DINAMARCA. The Danish Energy Authority. **Recommendation to comply with the technical criteria of the Danish wind turbine certification scheme.** Copenhagen, 2005. 174 p.

30 LINKE, H. et al. **Analysis on the Stress of Toothings of Planetary Gearings**. Munich: VDI Berichte. p. 345-355, 2005.

31 MAGALHÃES, F. L. **Amplificação do choque torcional em trens de acionamento**. Dissertação - Rio de Janeiro, 1990.

32 PANDYA, Y. **Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique**. Engineering Failure Analysis, Indore, v. 34, p. 488-500, 2013.

33 SÁNCHEZ, M. B. **Contact stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gear teeth**. Mechanism and Machine Theory, Madrid, v. 64, p. 93-110, 2013.

34 PALERMO, A. et al. **Multibody element for spur and helical gear meshing based on detailed three-dimensional contact calculations**. Mechanism and Machine Theory, Rende, v. 62, p. 13-30, 2012.

35 LITVIN, F. L.; FUENTES. A. **Gear Geometry and Applied Theory**. 2^o.Ed. Cambridge: Cambridge, 2004. 818 p.

36 SAINOT. **A static and dynamic analysis of misaligned gears with partial contact areas**. Tribology Series, v. 14, p. 167-172, 1989.

37 JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics**. UK: Cambridge, 2003. 468 p.

38 DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 3990**: Calculation of load capacity of cylindrical gears; introduction and general influence factors. Alemanha, 1987.