LEONARDO MONTEIRO MAZZARIOL

**Representação de estruturas sujeitas a cargas de impacto através de modelos
escalonados: estrutura e modelo feitos de materiais diferentes**

**São Paulo
2017**

LEONARDO MONTEIRO MAZZARIOL

**Representação de estruturas sujeitas a cargas de impacto através de modelos
escalonados: estrutura e modelo feitos de materiais diferentes**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Marcílio Alves

São Paulo

2017

LEONARDO MONTEIRO MAZZARIOL

**Representação de estruturas sujeitas a cargas de impacto através de modelos
escalonados: estrutura e modelo feitos de materiais diferentes**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Ciências

Área de Concentração: Engenharia Mecânica
de Projeto e Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Marcílio Alves

São Paulo

2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 16 de fevereiro de 2017

Assinatura do autor:

Leonardo Monteiro Mazzariol

Assinatura do orientador:

Marcelo Dias

Catálogo-na-publicação

Mazzariol, Leonardo Monteiro

Representação de estruturas sujeitas a cargas de impacto através de modelos escalonados: estrutura e modelo feitos de materiais diferentes / L. M. Mazzariol – versão corr. – São Paulo, 2017.

173 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Estruturas (Impacto; Modelos; Escala) 2.Similaridade I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Aos meus pais,
pelo apoio, incentivo e suporte incondicionais

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Marcílio pela orientação e incentivo por todo o período deste trabalho.

Aos colegas do GMSIE, especialmente Henrique Ramos pelo apoio durante o extenso cronograma de preparação e ensaios experimentais.

Ao Sr. Jorge do Departamento de Minas, pela gentileza em realizar diversos serviços de corte à Jato D'água.

À Sweet e RGB por permitirem descobertas e experiências novas.

Aos amigos Érico Nogueira, Vinícius Durães e Davi Martins. Valiosas amizades que tornaram os últimos quatro anos bem mais descontraídos.

À Cristina, Mônica, Ana e Alessandra, por permitirem que se fosse extraído o melhor que eu poderia oferecer.

Aos cães *Jamais* e Friedrich, por saberem como poucos promover interrupções frutíferas, funcionarem melhor que despertadores e estarem sempre felizes.

Aos meus pais, Alfredino e Aline, por terem fornecido todo o apoio necessário e por me inspirarem diariamente.

À Nadia, esposa e companheira em todos os momentos. Sem sua existência, este trabalho sequer faria sentido.

Por fim, agradeço às forças invisíveis que me guiaram e auxiliaram na execução deste trabalho.

Este trabalho tornou-se possível através do financiamento FAPESP, processo nº 2014/03135-7.

(...) Os meus personagens eram brancos de olhos azuis. Eles brincavam na neve. Comiam maçãs. Eles falavam muito sobre o tempo, em como era maravilhoso o sol ter aparecido. Agora, apesar do fato que eu morava na Nigéria. Eu nunca havia estado fora da Nigéria. Nós não tínhamos neve, nós comíamos mangas. E nós nunca falávamos sobre o tempo porque não era necessário.

Chimamanda Adichie (*The danger of a single story*)

Resumo

Lança-se aqui a hipótese de que é possível reproduzir o comportamento do protótipo a partir de modelos feitos de materiais diferentes dos utilizados na estrutura de referência. A influência de distorção de espessura, de diferentes densidades, tensões de escoamento, encruamento e viscoplasticidade são todas avaliadas através de equações analíticas e simulações das estruturas básicas como viga, placa e o impacto de uma estrutura de chapa dupla. Adicionalmente, são realizadas caracterizações quase-estáticas e dinâmicas de material e experimentos em placas circulares para três escalas diferentes (1/1, 2/3 e 1/3), quatro materiais (Alumínio, Titânio, Aço Inox e Cobre) e duas condições de carregamento: impacto de uma massa a baixa velocidade (3,5 m/s) e um projétil a alta velocidade (130 m/s). Mostra-se que o uso da lei de Johnson-Cook para descrever o comportamento viscoplástico dos materiais permite obter boa aproximação para o cálculo da velocidade de impacto corrigida, sem que sejam necessárias informações adicionais do comportamento da estrutura. Além disso, os resultados revelam a importância de se manter a razão entre massa de impacto e massa da estrutura constante em modelo e protótipo, levando à desejável similaridade das distorções entre ambas. Assim, ao se confirmar a hipótese deste trabalho, mostra-se possível inferir o comportamento de um protótipo com uso de modelos em escala reduzida feitos a partir de materiais diferentes.

Palavras-chaves: impacto, similaridade, escala, escalonamento, estrutura.

Abstract

It is hypothesized that it is possible to reproduce the behaviour of the prototype by using models made of different materials. The influence of thickness distortion, different densities, flow stresses, hardening and viscoplasticity are all evaluated through analytical equations and simulations of basic structures such as beam, plate and the impact of a double plate structure. In addition, quasi-static and dynamic material characterization are conducted, with experiments being performed in circular plates for three different scales (1/1, 2/3 and 1/3), four materials (Aluminum, Titanium, Stainless Steel and Copper) and two conditions impact of a mass (3.5 m/s) and a projectile at high speed (130 m/s). It is shown that the use of Johnson-Cook's law to describe the viscoplastic behaviour of the materials allows a satisfactory approximation to the calculation of the corrected impact velocity, without the need for additional information on the behaviour of the structure. In addition, the results reveal the relevance of maintaining the ratio between impact mass and structure mass constant in model and prototype, leading to the desirable similarity of the distortions between the two. Thus, when confirming the hypothesis of this work, it is possible to infer the behaviour of a prototype using small scale models made from different materials.

keywords: impact, similarity, scale, scaling, structure.

Sumário

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	Hipótese	9
Capítulo 3	Desenvolvimento	11
	3.1 Homogeneidade, análise dimensional, similaridade e Teorema Pi	11
	3.2 Similaridade imperfeita - método existente	13
	3.2.1 Taxa de deformação	14
	3.2.2 Materiais diferentes	16
	3.2.3 Distorção geométrica	17
	3.3 Proposta de método geral aproximado	17
	3.3.1 Aproximação: uma outra ótica	19
	3.3.2 Proposta	20
Capítulo 4	Verificando a hipótese	29
	4.1 Soluções analíticas de estruturas e viscoplasticidade	29
	4.1.1 Carregamento impulsivo de vigas e placas	29
	4.1.2 Impacto transversal de uma massa contra viga	32

4.1.3	Sensibilidade à taxa de deformação	36
4.1.4	Impacto contra estrutura de chapa dupla (ECD)	40
4.2	Análise Numérica	47
4.2.1	Impacto contra placa	47
4.2.2	Impulso contra placa	56
4.2.3	Impacto contra estrutura de chapa dupla (ECD)	58
4.2.4	Resumo etapa numérica	62
4.3	Experimentos	63
4.3.1	Definição e caracterização dos materiais	63
4.3.2	Cálculo dos fatores	73
4.3.3	Descrição do aparato experimental	75
4.3.4	Impacto contra placa - baixa velocidade	85
4.3.5	Impacto contra placa - alta velocidade	100
Capítulo 5	Discussão	109
5.1	Do método proposto	109
5.2	Distorções de massa	111
5.3	Viscoplasticidade	112
5.4	Fator de escala de tensão e encruamento	114
5.5	Distorções geométricas	117
5.6	Materiais reais	119
5.7	Similaridade cíclica	121
5.8	Incerteza dos fatores	128
5.9	Falha de material	129
Capítulo 6	Conclusão	131
	Referências	149

Apêndice A	Obtenção de números adimensionais	155
Apêndice B	Desenhos técnicos	157
Apêndice C	Tratamento via Correlação Digital de Imagem (DIC)	163
Apêndice D	Informações adicionais dos materiais	169
Apêndice E	Incerteza do cálculo dos fatores de escala	171

Prefácio

No início de 2010, reuníamos integrantes do projeto de Colisão de Navios financiado pelo FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos) com o Prof. Carlos Nunes Dias, de modo a discutir eventuais linhas a serem pesquisadas. Ouviu atentamente as recentes leis de similaridade para impacto e formalizou a pergunta:

“Vejo o fator de velocidade... é possível alterá-lo? Na Mecânica dos Fluidos alteramos a velocidade e utilizamos compensações devido à densidade/viscosidade do fluido, quando não são escalonáveis. Funcionaria?”.

Ao final daquele ano a pergunta começou a ser respondida através de um estudo publicado em um simpósio. A ideia central era variar arbitrariamente o fator de velocidade, corrigindo a massa de impacto para se ter a energia adequada. Para fatores de velocidade maiores, obtinha-se resposta como se a estrutura fosse mais rígida, para valores inferiores, o oposto. A técnica parecia permitir pequenas variações desse fator, mas sempre ocasionava desvios do que se era esperado. Na ocasião, este autor escreveu

*“Esse estudo é também um avanço no escalonamento com uso de modelos materiais diferentes, uma vez que o fator de escala de velocidade β_V pode ser escolhido tal a corrigir discrepâncias de massa na estrutura oriundos da densidade do material, definindo a massa de impacto de acordo”.*¹

Essa distorção arbitrária foi usada para contornar limitações experimentais no mestrado do autor, sendo a ideia de materiais diferentes naquela época mais relacionada à curvas de tensão deformação distintas do que materiais propriamente ditos. Somente nesta tese, dedicada à similaridade para modelos construídos a partir de materiais diferentes, é que tal afirmação é revisitada, abordando-se principalmente densidade distintas, tópico até agora inédito. As dificuldades inerentes ao assunto, como encruamento e viscoplasticidade, requereram uma mudança na forma de observar o comportamento das estruturas e os resultados esperados dos modelos quando sujeitos a carregamentos de impacto.

Desta forma, este trabalho desenvolve uma série de linhas de raciocínio e ideias acumuladas ao

¹ This study is also a further step on scaling models made of different materials, since the velocity factor β_V can be set in order to correct structure mass discrepancies due to material density, defining the mass impact accordingly [1].

longo de meia década, reconstruindo e expandindo as primeiras leis de similaridade de impacto estrutural desenvolvidas no GMSIE.

Capítulo 1

Introdução

O uso da ideia de similaridade remonta a tempos antigos, como o cálculo da altura da mais alta pirâmide do Egito, a partir da sombra do objeto e semelhança de razões, solução atribuída a Tales de Mileto [2]. A genial simplicidade ao comparar objetos de grandezas tão distintas e considerar que as sombras ocasionadas pelos raios solares possuíam propriedades similares faz com que, até os dias de hoje, esta seja considerada uma bela e fascinante solução matemática.

Séculos depois, Galileo Galilei investiga as variáveis que influenciam a resistência dos materiais em *Duas Novas Ciências* [3]. Elabora a primeira explicação para a influência das dimensões absolutas em falha. Formula a ideia de que mesmo respeitando a relação entre as dimensões através de um único fator de escala e possuindo o mesmo material, haveria fenômenos que seguiriam uma outra relação, ou um outro fator. Dessa forma, obtém-se resultados distintos, ainda que ambas as estruturas possuam exatamente a mesma razão entre dimensões, material e carregamento proporcional.

Esse desvio de proporcionalidade causada pelas dimensões absolutas é frequentemente denominado “efeitos de tamanho” (do inglês, *size effect*) ou “efeitos de escala”. Na produção de vinhos da região do Porto, Portugal, esses efeitos são usados para se obter diferentes propriedades na bebida. A Fig. 1.1 mostra dois tamanhos de barris para envelhecimento. À esquerda estão barris menores, associados ao tipo “Tawny”, enquanto que os outros ao “Ruby”. Vinhos Ruby são obtidos através de baixa oxidação, ao contrário do outro tipo. Ao tornar o barril maior, a superfície do barril – responsável pela troca gasosa e oxidação – cresce à medida do quadrado da dimensão linear, enquanto que o volume, ao cubo, resultando em maior volume para menor capacidade de oxidação. Para este caso, a maturação do vinho não segue o mesmo fator de dimensão linear, o que equivale dizer que um barril que respeite as razões geométricas e material com o dobro do volume não produzirá o dobro do mesmo vinho que dois barris com metade do volume, mas sim o dobro de vinho com outras características.

A falha em estruturas, assim como discutida por Galileu, é tida como um desses fenômenos que não respeitam a razão geométrica. Galileo observa que ossos de animais pequenos e grandes diferiam em forma e Mariotte [3] apud [5] comenta que não haveria razão para diferença na resistência

Figura 1.1 Barris de envelhecimento de vinho do Porto na Cave Sandeman em Vila Nova de Gaia, Portugal. A razão entre área do barril e volume faz com que a troca gasosa seja mais ou menos intensa, alterando o tipo de vinho obtido. À esquerda “Tawny” e “Ruby” à direita. Fonte: Wikimedia [4].

de componentes de tamanhos diferentes, a menos da existência de Desigualdade na Matéria, ou seja, partes defeituosas ou desiguais que enfraqueceriam a estrutura [3] apud [6]. Mais tarde, essa visão sobre enfraquecimento por partes desiguais foi corroborada por modelos estatísticos e, por fim, modelos mecânicos que incorporam esses efeitos quando há mudança de escala, Fig. 1.2. Podemos inferir, portanto, que estruturas geometricamente maiores possuem resistência relativamente inferior. Um viaduto em escala reduzida resiste relativamente mais do que um em tamanho real se as imperfeições forem similares. É possível observar na Fig. 1.2 quão importante se torna esse desvio conforme percorremos a escala. Conseguir modelar essa quebra de proporcionalidade significa poder caracterizar os materiais para uso em qualquer escala e desenvolver modelos reduzidos representativos.

Figura 1.2 Expansões assintóticas de efeitos de escala para tamanhos grande e pequeno (linha tracejada) e a lei de efeito de escala resultante (curva sólida). Tanto o critério de plasticidade, como a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) são usadas como pontos de apoio. É possível inferir que a maior parte dos ensaios de material ocorrem no regime regido pela Plasticidade, enquanto que o tamanho das estruturas é superior a ele. Adaptado de [3].

Os efeitos de escala também se tornam presentes em eventos de impacto. Além das questões que envolvem falha de material, a sensibilidade à taxa de deformação também pode proporcionar desvios. Para estruturas feitas de materiais sensíveis a essa grandeza (viscoplásticos), a taxa com a qual é solicitada influencia sua resposta. Em geral, quanto maior a taxa, maior a tensão dinâmica. Sendo essa uma grandeza representada pelo inverso da unidade de tempo $[1/s]$, no caso de uma representação cuja escala é reduzida pelo fator β em base tradicional MLT^1 , o valor da grandeza seria dividida por β . Para

¹ Massa, Comprimento e Tempo, do inglês *Mass, Length and Time*.

$\beta < 1$, escala reduzida, teríamos taxas de deformação maiores e, por conseguinte, tensões maiores; ocorrendo o inverso para $\beta > 1$. O desvio da proporcionalidade ocorre ao se verificar os fatores de escala obtidos pela base *MLT*, na qual as tensões deveriam ser iguais independentemente do fator de escala, algo que claramente não ocorre aqui.

A dificuldade de modelar essas discrepâncias fez com que diversos autores realizassem estudos de forma a investigar se elas poderiam ser negligenciadas. Yulong, Yongkang e Pu [7] investigaram numericamente a representação em escala do impacto de aves em estruturas aeronáuticas, concluindo pela quase total representação se os materiais envolvidos forem insensíveis à taxa de deformação. No caso de materiais sensíveis, a redução da escala deveria ser limitada a faixas de escala e velocidade. Duffey, Cheresh e Sutherland [8], por sua vez, estudaram a representatividade do comportamento elastoplástico de placas circulares sob carregamento de impacto através de modelos com metade do tamanho, concluindo que os deslocamentos eram relativamente menores, enquanto proporcionalmente mais energia era absorvida na escala reduzida, Fig.1.3a. Ainda, os autores relatam que as leis tradicionais podem ser usadas, uma vez que as diferenças das grandezas escalonadas estavam em cerca de 10%, aceitável experimentalmente. Resultados parecidos foram obtidos por outros autores [9], ao investigarem a indentação lateral em tubos circulares de material compósito nas escalas 3/4, 1/2 e 1/4, Fig.1.3b, e Wen e Jones [10] em placas impactadas de aço e alumínio, frisando que os resultados estão dentro dos desvios esperados devido aos experimentos.

Figura 1.3 Estudo sobre representatividade de modelos em escala reduzida. (a) Placas circulares sob impacto [8] e (b) indentação lateral de tubos compósitos [9]. A escala reduzida ocasiona em ambos os casos forças mais altas.

Booth, Collier e Miles [11] investigaram minuciosamente dois tipos de estruturas construídas a partir de chapas sujeitas à carregamento de impacto, também com a finalidade de avaliar a representatividade dos modelos em escala. Concluíram pela ausência, Fig.1.4, revelando que o efeito ocorrido em escalas reduzidas não poderia ser justificado pela diferença de material, imperfeições geométricas e outras. Dessa forma, Calladine [12] sugere alterar parâmetros de escala de forma a contornar os efeitos de taxa de deformação. Propõe utilizar os fatores da Tab. 1.1, resultando em velocidades diretamente proporcionais à escala, e taxas de deformação na escala reduzida iguais ao da escala maior, com tensões dinâmicas iguais para ambas escalas. Entretanto, a distorção de massa ocorrida modifica significativamente a representatividade quando a relação entre massa de impacto e massa da estru-

tura é relevante, limitando em demasia a aplicação desse método. Jones [13] indica ser difícil a solução para a questão de escala e sensibilidade à taxa de deformação, comentado anteriormente, e que a possibilidade de usar materiais diferentes em modelo e protótipo então se torna ainda mais remota pois ambos precisariam ter a as mesmas propriedades de encruamento, elasticidade etc.

De forma similar, Jiang et al. [14] estudaram o impacto de projéteis em casca cônica de diferentes materiais em escalas de 1/1, 1/2 e 1/4, variando a velocidade entre 29,5 e 54 m/s. Tanto a estrutura como os projéteis foram escalonados geometricamente segundo os fatores mencionados. As velocidades críticas para se obter fraturas ou perfuração foram mais altas conforme se reduzia a escala, da mesma forma que observado por outros autores comentados anteriormente. Atribuíram esse efeito à taxa de deformação maior na escala reduzida das estruturas de aço, sendo de menor efeito para aquelas feitas em alumínio.

Figura 1.4 Não-escalabilidade dos deslocamentos normalizados para diversos experimentos de impacto [11]. Os resultados experimentais se distanciam da linearidade.

Tabela 1.1 Fatores de escala propostos por Calladine [12], na ocasião dos resultados obtidos por Booth, Collier e Miles [11]. Fator de escala β e o “esquema de altura de queda constante” é atribuído ao cálculo de fatores usando a base *MLT*.

	Esquema proposto (Calladine)	Esquema de Altura de Queda Constante (<i>MLT</i>)
Altura de queda da massa	$\propto \beta^2$	constante
Massa de Impacto	$\propto \beta$	$\propto \beta^3$
Velocidade do Impacto	$\propto \beta$	constante
Energia de Impacto	$\propto \beta^3$	$\propto \beta^3$

Uma solução comumente adotada para o problema de falta de representatividade é preterir experimentos em escala, realizando-os em tamanho real ou mesmo numericamente. O desenvolvimento das ferramentas computacionais para cálculo estrutural certamente tornou mais rápida a avaliação do comportamento de estruturas ainda na fase de projeto. São inúmeras as vantagens de se utilizar tais ferramentas: custo reduzido da alteração ainda em projeto, ciclo mais rápido de avaliação ao evitar pro-

tótipos e experimentos; maior quantidade de informações obtidas se comparada a um experimento instrumentado. Entretanto, a complexidade de modelagem de materiais e até mesmo a compreensão de novos fenômenos não encontra alternativa aos experimentos [15], sendo preferível para alguns autores a realização de ensaios em escala, mesmo sem usar diretamente leis para relacionar a escala reduzida ao objeto de estudo. Somam-se aos supracitados a experimentação de proas por Amdahl [16], Endo et al. [17] e Yamada et al. [18] e painéis reforçados de Alsos e Amdahl [19], Cho e Lee [20] e Wang, Arita e Liu [21]. Embora o uso de estruturas em dimensões reduzidas forneça informações para posterior análise do comportamento em escala maior, é desejável que haja uma relação mais direta.

Quando as leis de similaridade ditas “geométricas” não proporcionam meio para a realização de experimentos em escala, i.e., cujos fenômenos de interesse desrespeitam o fator de escala de geometria linear β , podemos lançar mão de outras técnicas de similaridade. A Indireta faz uso de um modelo cuja resposta, juntamente com fatores de correção, poderá inferir o comportamento de um protótipo. Cho et al. [22] desenvolvem um método a partir desse conceito, inferindo o comportamento de estruturas aplicando fatores de correção à resposta obtidas nos modelos. Essa abordagem prima por exigir que a resposta das estruturas não difiram em modo. Em outras palavras, apenas fatores são suficientes para relacionar através da escala ou material, desde que o modo de colapso da estrutura seja sempre o mesmo. Tais fatores são obtidos através de diversos ensaios experimentais, permutando e combinando as mudanças do modelo, o que dificulta ainda mais sua aplicação.

Uma outra forma de poder relacionar modelos distintos é a partir de similaridade imperfeita, a qual adiciona mais fatores de escala além do geométrico, permitindo portanto, variações mais abrangentes. Nessa linha de similaridade imperfeita [23], Oshiro e Alves [24] propõem o uso de uma base diferente da *MLT*, chamada de *VSG*² tal a contornar o efeito de escala devido à taxa de deformação de uma forma diferente da proposta por Calladine [12]. Em sua proposta, consideram que o acréscimo de tensão oriundo da disparidade da taxa de deformação deve ser corrigido com mais energia, por meio de uma correção de velocidade e obtendo o mesmo campo de deformações tanto no modelo como no protótipo, uma evidente vantagem ao método indireto. Assim sendo, ao se reduzir a escala, tem-se velocidade superior para compensar a maior resistência observada por outros autores, conforme Fig.1.3. Esta nova abordagem levou a bons resultados analíticos e numéricos, quando não há falha e são assumidos modelos rígido-perfeitamente-plásticos ou com pouco encruamento. Entretanto esse equacionamento proposto requer que o material de modelo e protótipo sejam iguais, sem encruamento, com viscoplasticidade seguindo uma equação exponencial, o que limita em muito sua aplicação.

Mazzariol [25] realizou experimentos e simulação para investigar a representatividade de modelos em escala reduzida com uso de leis de similaridade imperfeita propostas em [26, 27]. Nesse estudo, investigou o impacto central de um indentador contra um painel duplo protótipo e seu modelo em escala 1/12, ambos de aço baixo carbono. Embora nominalmente iguais, as diferenças entre as curvas de tensão versus deformação dos materiais revelaram que dificilmente se conseguiria obter materiais em espessuras diferentes que fornecessem curvas idênticas, tal qual comentado por Jones [13], e que dificilmente poderiam ser considerados sem encruamento, Fig. 1.5a. Definir o fator de tensão dinâmica,

²VSG – Velocidade inicial, Tensão dinâmica e Massa de impacto.

portanto, não se mostrara tarefa isenta de implicações. No experimento propriamente dito, Fig. 1.5b, as curvas vermelha e azul claro (escala reduzida) diferem em demasia das curvas verde e azul marinho (protótipo), devido ao modo de colapso em escala maior ter sofrido perfuração, diferentemente do ocorrido nos modelos.

Figura 1.5 Representação do impacto de um indetador contra um painel duplo através de modelos em escala [25]. As diferentes curvas de material (a) foram corrigidas considerando a tensão de escoamento e a taxa de deformação [27]. O resultado experimental de força corrigida no indetador vs. Deslocamento corrigido (b) mostra a grande disparidade de deslocamentos. A curva vermelha retrata o modelo usando leis tradicionais, em azul claro (leis com correção) e em azul e verde a resposta dos dois protótipos. O deslocamento excessivo dos protótipo revela fratura das chapas, o que não ocorreu nos modelos.

Igualmente, ao investigarem experimentalmente a representação da compressão axial em baixa velocidade de tubos protótipos de alumínio com o uso de modelos em escala reduzida feitos a partir de aço-carbono, Mazzariol e Alves [28] chegaram à conclusão que, embora as propriedades mecânicas do material (como tensão de escoamento e viscoplasticidade) pudessem ser relacionadas e compensadas distorcendo-se as leis [25, 26, 29], a resposta da estrutura poderia ser dependente de fatores que não são contemplados pelas correções existentes. Por exemplo, o encruamento do material influencia no comprimento da dobra [30] e proporciona um padrão de deformação distinto, como pode ser observado na Fig. 1.6. Isto viola uma das premissas do procedimento de escalonamento e torna modelo e protótipo não relacionáveis [31]. Ao se obter diferentes modos de flambagem, o estudo dos efeitos de diferentes densidades e tensão de escoamento ficou comprometido. Um estudo sobre impacto de esfera contra placa foi então proposto para comparar as leis de similaridade existentes (*MLT*, *VSG* e *Calladine*) além de uma proposta de correção também através de massa [32]. Concluíram pela importância de se manter a razão entre massa da estrutura e massa impactante constante, diferentemente do proposto por outros autores [12, 26].

Havia, portanto, amplo campo a ser investigado sobre leis de similaridade para estruturas construídas a partir de materiais diferentes, com densidades e curvas tensão versus deformação distintas. Entretanto, a busca por uma solução exata com as restrições como a proposta por Oshiro e Alves [26] mostrou-se rapidamente infrutífera. Se, por um lado, o uso da lei viscoplástica adotada, juntamente com o modelo rígido, relacionavam modelo e protótipo, por outro limitavam sua aplicação. Ao aplicar a lei proposta, Mazzariol [25] optou por aproximar os dados de modo a enquadrá-los nas restrições da

Figura 1.6 Tubos protótipos feitos em alumínio no segundo plano, enquanto no primeiro plano figuram tubos de aço em escala 1:2. Devido à diferença não escalonada entre o comprimento das dobras do modelo e do protótipo, a geometria deformada (à direita e à frente) não é similar à do protótipo (à direita, ao fundo). Nas análises teóricas simplificadas [33, 34], o comprimento de dobra e, por conseguinte, a geometria deformada, independe das propriedades do material.

representação viscoplástica e na consideração de que os materiais diferiam apenas em tensão de escoamento, o que ensejou grande discussão. Para aplicação mais abrangente, alguma aproximação seria necessária, seja para usar as leis existentes ou para propor leis diferentes. Neste sentido, este autor optou por evitar as restrições e buscar uma solução geral aproximada em detrimento de uma exata e restrita, seguindo um pouco a ideia de que “nos casos onde não se tem uma solução exata, nos satisfazemos com uma solução aproximada”. Qualquer que seja o caminho, estudar leis de similaridade requer análise criteriosa das aproximações e resultados obtidos da maneira mais ampla possível.

Dessa forma, este trabalho propõe e investiga leis de similaridade para relacionar protótipo e modelos quando o material de construção de ambos difere. O Capítulo 2 propõe a hipótese central que norteia os passos seguintes. A revisão bibliográfica dos conceitos-base de similaridade e leis existentes é apresentada no Capítulo 3 – Desenvolvimento, juntamente com a proposição das leis. O Capítulo 4 – Verificação da Hipótese se dedica a investigação da representatividade das leis desenvolvidas no capítulo anterior. Abrange estudos teóricos sobre estruturas (vigas, placas e outras), simulações numéricas (de placas e outras) e por fim, experimentos de impacto em baixa e alta velocidade em placas circulares em três escalas distintas e quatro diferentes materiais. O Capítulo 5 contém as discussões gerais das verificações realizadas, enquanto o capítulo 6 conclui os achados deste trabalho.

Capítulo 2

Hipótese

O comportamento de uma estrutura protótipo sujeita a cargas dinâmicas que causam severas deformações plásticas pode ser obtida a partir de ensaios em modelos escalonadas desta mesma estrutura, mesmo quando os materiais isotrópicos do protótipo e dos modelos diferem em curva tensão versus deformação, densidade e propriedades viscoplásticas.

Desenvolvimento

Este capítulo se inicia com uma revisão bibliográfica sobre os princípios da similaridade. Em seguida, uma vertente de similaridade, chamada de *imperfeita*, é apresentada, concentrando-se nas soluções existentes para os problemas apresentados na introdução: taxa de deformação, materiais diferentes e distorção geométrica. Por fim, é proposto um método que proporciona meios para relacionar estruturas de diferentes tamanhos e materiais.

3.1 Homogeneidade, análise dimensional, similaridade e Teorema Pi

O teorema Π , que descreve condições para observação do princípio de similaridade, surgiu a partir de um conjunto de conceitos, ideias e definições sendo, na época de sua formalização, algo que remetia mais ao bom-senso do que a um conjunto de teoremas propriamente ditos [35,36].

O primeiro destes conceitos é o princípio da Homogeneidade das Magnitudes, o qual exprime que somente grandezas do mesmo tipo podem ser somadas ou equacionadas, implicando a impossibilidade de se somar energia e velocidade ou área e volume [37]. Deste surge o conceito de dimensões físicas e a relação de unidade de comprimento com áreas e volumes, em detrimento de sistemas onde unidades de comprimento e área (ou volume) não possuíam relação e; por fim, os sistemas racionalizados de unidades, como o métrico atual [37]. Esse princípio é considerado como um dos dois axiomas da análise dimensional [38].

O segundo axioma descreve que a razão entre magnitudes de duas quantidades parecidas não depende das unidades usadas em sua medição, desde que as mesmas sejam usadas para avaliar ambas, como a razão entre a altura e a largura de um edifício, que será a mesma se as medidas forem em metros ou pés [38]. Assim, podemos descrever a Análise Dimensional como um método de derivação de relações entre quantidades e reconhecer seu caráter qualitativo. Uma decorrência do segundo axioma são as razões entre duas quantidades de mesma unidade (ângulo ou deformação, por ex.) que

não possuem dimensão e por essa característica, são chamadas de quantidades ou números adimensionais [39]. Através da análise dimensional outros números desse tipo podem ser obtidos ao combinar quantidades relevantes para o fenômeno estudado. Esses números ou grupos adimensionais são fundamentais no método de similaridade.

A similaridade, similitude ou semelhança pode ser considerada como uma extensão da similaridade geométrica¹ [39]. Skoglund [31] classifica os sistemas similares como “fisicamente” similares – regidos pela mesma física (por ex. dois sistemas fluidos) ou “análogos”, regidos por físicas diferentes (como elétrico e mecânico). Para a similaridade física, Kline [40] descreve o postulado:

“Se dois sistemas são regidos pelo mesmo conjunto de equações e condições e se os valores de todos os parâmetros dessas equações e condições são iguais, então os dois sistemas deverão exibir comportamento similar, desde que somente uma única solução para o conjunto de equações e condições existe.”

Por sua vez, Skoglund [31] apresenta uma definição mais geral para sistemas similares,

“Dois sistemas são similares se suas variáveis correspondentes são proporcionais em locais e tempos correspondentes.”

Assim, é possível enxergar sistemas similares como “relacionáveis”, i.e., nos quais o comportamento de um deles pode ser inferido a partir da observação de um outro sistema. Dessa forma, não é necessário restringir as condições para que dois sistemas sejam similares, como apresentado por Kline [40], sendo possível encontrar uma relação entre os sistemas se houver conhecimento das variáveis e os efeitos que influenciam o fenômeno estudado. O que surge a partir desse princípio de similaridade é a igualdade de quantidades ou números adimensionais entre sistemas similares [31, 39]. Vaschy [41] foi o primeiro a formular um teorema para similaridade, descrevendo uma “Lei mais geral de similaridade mecânica”:

Seja $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ quantidades físicas tais que as k primeiras sejam expressas em termos de diferentes unidades fundamentais, e as últimas $(n - k)$ quantidades se referem a unidades derivadas das k unidades fundamentais (por exemplo, a_1 pode ser um comprimento, a_2 , uma massa, a_3 , um tempo, enquanto que as outras $(n - 3)$ quantidades seriam forças, velocidades etc. que, nesse caso, $k = 3$. Se entre essas n quantidades existir a relação

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (3.1)$$

que é válida para quaisquer unidades fundamentais escolhidas, essa relação pode ser transformada em outra com não mais de $(n - k)$ parâmetros, ou seja,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-k}) = 0. \quad (3.2)$$

Sendo os parâmetros $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$ funções monomiais de $a_1, a_2, \dots, a_n$ (por exemplo $x_1 = Aa_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}$).

¹Da geometria euclideana, duas figuras planas são similares (ou semelhantes) quando seus ângulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes possuem mesma razão de comprimento [39].

Mais tarde, Buckingham [42] apresenta sua “Forma mais geral de equações físicas”, adicionando ao operador F de Vaschy – Eq. 3.2 – além das quantidades a_n , razões r

$$f_2(a_1, a_2, \dots, a_n, r', r'', \dots) = 0. \quad (3.3)$$

Além disso, Buckingham apresenta um operador no qual os monômios x_n de Vaschy da Eq. 3.1 são adimensionais Π_i , além de incluir todas as razões de quantidades independentes r ,

$$\psi(\Pi_1, \dots, \Pi_i, r) = 0, \quad (3.4)$$

sendo o número de adimensionais suficientes $i = n - k$, o mesmo proposto por Vaschy na Eq. 3.2. Buckingham discorre ainda sobre as transformações que tornam um sistema similar a ele mesmo [42]:

(a) Quaisquer k quantidades de tipos independentes podem ser modificadas em razões arbitrárias, depois da qual devemos

(b) Modificar cada quantidade $(n - k) = i$ remanescente de tal forma que os valores dos adimensionais Π não se alterem; e finalmente

(c) Mudar as quantidades remanescentes de n tipos na mesma proporção que aquela quantidade daquele tipo já mencionado, portanto mantendo as razões r constantes.

A descrição explícita dos adimensionais Π no operador, com provas e aplicações, fizeram com que o teorema apresentado por Buckingham [42] fosse chamado de Teorema-II ou Teorema Π de Buckingham. Há em seu artigo também a descrição do método de se obter adimensionais através da análise dimensional, utilizado nas seções seguintes e exemplificado no Apêndice A.

Quando é possível respeitar todas as condições de Buckingham [42], ou seja, adimensionais iguais no sistema representado (o protótipo) e no representante (modelo), dizemos que a similaridade é perfeita. Quando um ou mais adimensionais não puderem ser respeitados, tem-se a similaridade imperfeita, incompleta [23], distorcida ou com uso de modelos distorcidos [38].

Murphy [38] descreve uma série de razões para o uso de modelos distorcidos, dentre elas a dificuldade em se atender aos mais variados requisitos de construção e mesmo o uso de materiais que não são exatamente iguais aos do protótipo. Assim, caso haja algo que torne os termos do operador da Eq. 3.4 diferentes, temos um modelo distorcido [38] ou um sistema dissimilar [31]. Devido às características construtivas dos modelos, há casos onde a física do problema faz com que os grupos adimensionais comumente escolhidos não permitam que exista similaridade perfeita [11]. Eventos de impacto se enquadram nessa classificação, assunto que será tratado na próxima seção.

3.2 Similaridade imperfeita - método existente

O método de relacionar sistemas através de similaridade tem sido extensivamente estudado [23,31,43,44] e aplicado em diversos trabalhos sobre falha em estruturas [45–47], fragmentação [48], explosões [49–52] e impacto em estruturas [53–57].

Excetuando efeitos de dano, fratura, fragmentação ou mudança de fase, as principais variáveis que regem os eventos de impacto e seus fatores de escala são amplamente conhecidos [58] e encontram-se listados na Tab. 3.1. Para se obter a similaridade perfeita, o teorema II de Buckingham afirma que todos adimensionais II predominantes de um modelo devem ser iguais aos adimensionais II correspondentes do protótipo [42],

$$(\Pi_i)_m = (\Pi_i)_p, \quad (3.5)$$

sendo i o número do adimensional, m e p modelo e protótipo, respectivamente.

Tabela 3.1 Fatores de escala relacionando quantidades do modelo com as do protótipo na base Massa-Comprimento-Tempo (MLT).

Variável	Fator	Variável	Fator
comprimento, L	β	tempo, t	$\beta_t = \beta$
deslocamento, δ	$\beta_\delta = \beta$	velocidade, V	$\beta_V = 1$
massa de impacto, G	$\beta_G = \beta^3$	taxa de deformação, $\dot{\epsilon}$	$\beta_{\dot{\epsilon}} = 1/\beta$
deformação, ϵ	$\beta_\epsilon = 1$	aceleração, a	$\beta_a = 1/\beta$
tensão, σ	$\beta_\sigma = 1$	energia, E'	$\beta_{E'} = \beta^3$
força, F	$\beta_F = \beta^2$	densidade, ρ	$\beta_\rho = 1$

Estruturas sob severos carregamentos dinâmicos usualmente não seguem as leis-padrão de similaridade devido a efeitos como sensibilidade à taxa de deformação, falha de material, temperatura e gravidade. Adiciona-se a esses efeitos dificuldades que surgem de necessidades experimentais como o uso de materiais diferentes e até escolha de espessuras relativamente diferentes na construção dos modelos. Quando um único fator de escala geométrico não é capaz de relacionar um modelo a um protótipo, é necessário definir outros fatores de escala ou razões r , conforme procedimento de *similaridade imperfeita* [23]. Dessa forma, para cada efeito que proporciona um desvio à “regra”, pesquisadores têm buscado definir fatores de escala cuja distorção objetiva trazer a resposta do modelo para a previsibilidade. Nos itens seguintes são apresentados métodos existentes para contornar os efeitos de taxa de deformação, materiais diferentes e distorção geométrica.

3.2.1 Taxa de deformação

O efeito da taxa de deformação surge quando a estrutura está sob carregamento dinâmico e o material é sensível à esta quantidade, fazendo com que a resposta da estrutura – em termos de força – seja superior ao caso quasiestático. As tensões nesse tipo de material são comumente escritas na forma $\sigma = \sigma(\dot{\epsilon}, \dots)$. Na base MLT^2 , o fator de tensão é $\beta_\sigma = 1$, o que é incompatível com o fator de escala da taxa de deformação, $\beta_{\dot{\epsilon}} = 1/\beta$, Tab. 3.1. Ou seja, para uma estrutura construída a partir de um material sensível à taxa de deformação, se $\beta \neq 1$, logo $\beta_\sigma \neq 1$. Para compensar esse efeito, Oshiro e Alves [24] adotaram a base alçada em Velocidade Inicial, Tensão de Escoamento e Massa de Impacto (VSG). Usando análise dimensional e a base VSG , os autores obtiveram os adimensionais

²Usada para descrever um conjunto de quantidades independentes, conforme Ref. [41] e [42].

$$\Pi_1 = \left[\frac{a^3 G}{V_0^4 \sigma_d} \right], \Pi_2 = \left[\frac{t^3 \sigma_d V_0}{G} \right], \Pi_3 = \left[\frac{\delta^3 \sigma_d}{G V_0^2} \right], \Pi_4 = \left[\frac{\dot{\epsilon} G^{1/3}}{(\sigma_d V_0)^{1/3}} \right] \text{ e } \Pi_5 = \left[\frac{\sigma}{\sigma_d} \right] \quad (3.6)$$

em função de aceleração a , tempo t , deslocamento δ , taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ e tensão dinâmica σ_d , respectivamente. Assim, aplicando o Teorema-II, Eq. 3.5 para Π_3

$$\begin{aligned} [\Pi_3]_m &= [\Pi_3]_p \\ \left[\frac{\delta_m^3 \sigma_{dm}}{G_m V_{0m}^2} \right] &= \left[\frac{\delta_p^3 \sigma_{dp}}{G_p V_{0p}^2} \right] \\ \left[\frac{\delta_m^3 \sigma_{dm}}{\delta_p^3 \sigma_{dp}} \right] &= \left[\frac{G_m V_{0m}^2}{G_p V_{0p}^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definindo os fatores de escala de deslocamento igual ao fator $\delta_m / \delta_p = \beta$, os fatores de escala de massa de impacto $G_m / G_p = \beta_G$ e velocidade inicial $V_{0m} / V_{0p} = \beta_{V_0}$ e tensão de escoamento dinâmica $\sigma_{dm} / \sigma_{dp} = \beta_{\sigma_d}$, podemos reescrever a Eq. 3.7 como

$$\beta^3 \beta_{\sigma_d} = \beta_G \beta_{V_0}^2.$$

Assim, obtemos o fator de escala de velocidade,

$$\beta_{V_0} = \sqrt{\frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_G}}. \quad (3.8)$$

Considerando a ausência de distorção geométrica, podemos usar a relação da Tab. 3.1, $\beta_G = \beta^3$,

$$\beta_{V_0}^2 = \beta_{\sigma_d} = \sqrt{\frac{\sigma_{dm}}{\sigma_{dp}}} = \sqrt{\frac{f(\dot{\epsilon}_m)}{f(\dot{\epsilon}_p)}}. \quad (3.9)$$

A Eq. 3.9 não especifica uma lei viscoplástica a ser usada, $f = f(\dot{\epsilon})$, embora Oshiro e Alves [24] tenham utilizado a equação de Cowper-Symonds [58],

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_0} = \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D} \right) \right]^{1/p}, \quad (3.10)$$

sendo σ_0 a tensão de referência, D e p parâmetros viscoplásticos. Escrevendo os fatores de escala de taxa de deformação na base VSG , $\beta_{\dot{\epsilon}} = \beta_V / \beta$, as Eqs. 3.9 e 3.10 fornecem

$$\beta_V = \sqrt{\frac{1 + (\dot{\epsilon}_m / D)^{1/p}}{1 + (\beta \dot{\epsilon}_m / \beta_{V_0} D)^{1/p}}}, \quad (3.11)$$

que requer a taxa de deformação do modelo, $\dot{\epsilon}_m$. A necessidade de saber esta resposta estrutural foi contornada por Oshiro e Alves [26] ao utilizarem a equação de tensão dinâmica de Norton para modelo e protótipo feitos a partir de um mesmo material rígido-perfeitamente-viscoplástico (RPVP),

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^q \quad (3.12)$$

e obtendo

$$\beta_{V_0} = \beta^{q/(q-2)}. \quad (3.13)$$

Esta depende somente do fator de escala β e parâmetros de material q , e se aplica quando modelo e protótipo são construídos do mesmo material.

A vantagem principal da Eq. 3.13 face à Eq. 3.11 é o fato de β_{V_0} não depender da resposta estrutural do modelo ou protótipo, $\dot{\epsilon}$ e ϵ . É somente necessário saber o parâmetro de material q para calcular a velocidade de impacto a ser aplicada no modelo, obtendo resultados sem erros. Entretanto, a aplicação dessa correção por distorção de velocidade β_V está sujeita à limitação de modelo e protótipo serem construídos a partir de materiais RPVP iguais, ou seja, com mesma tensão de escoamento σ_0 e parâmetros viscoplástico de Norton, q .

3.2.2 Materiais diferentes

Alves e Oshiro [29] propuseram uma variação da Eq. 3.9 para investigar casos em que modelo e protótipo são feitos a partir de materiais diferentes. Nesse caso, o material escolhido para o modelo foi o alumínio – baixa sensibilidade à taxa de deformação – e o aço para o protótipo – alta sensibilidade à taxa de deformação. O fator de escala de velocidade foi então escrito como

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\sigma_{0m}}{\sigma_{0p} \left[1 + (\beta \dot{\epsilon}_m / \beta_V D)^{1/p} \right]}}, \quad (3.14)$$

quando se adota Cowper-Symonds como lei viscoplástica. A resposta estrutural do modelo, $\dot{\epsilon}_m$, pode ser obtida numérica ou teoricamente. O intuito dessa proposta era poder desprezar o efeito da taxa de deformação no modelo.

Oshiro et al. [59] apresentam um caso no qual existe diferença nas propriedades mecânicas entre modelo e protótipo. Os aços de modelo e protótipo possuem curvas de tensão vs. deformação distintas que são relacionadas através do fator de escala de tensão de escoamento, β_{σ_0} , que foi calculado a partir de um teste quase-estático com ambas estruturas modelo e protótipo. As propriedades viscoplásticas foram descritas pela Eq. 3.12. Para este caso, β_V é descrito por

$$\beta_V = \beta_{\sigma_0}^{1/(2-q)} \beta^{q/(q-2)}. \quad (3.15)$$

Em sua tese de doutorado, Oshiro [27] apresenta um estudo sobre modelo distorcido, de material diferente do protótipo, fazendo uso de um método de similaridade indireta [22]. Neste, combina as variações – escala e material – visando estabelecer coeficientes que permitam inferir o comportamento do protótipo, Fig. 3.1. Uma característica importante do método apresentado por Cho et al. [22] é a aplicação de fatores de escala em diversas quantidades, incluindo deslocamento (diferente da escala), fazendo com que a geometria deformada possua distorções, mesmo quando as razões geométricas do sistema protótipo são mantidas no modelo.

Figura 3.1 (a) Método de similaridade imperfeita proposto por Cho et al. [22], no qual cada mudança de escala e material é avaliada separadamente, calculando-se fatores para corrigi-las. (b) Oshiro e Alves [60] propõe o mesmo método para lidar com geometria distorcida.

Westine e Mullin [48] apresentam uma solução para o caso de escalonamento de impacto a hipervelocidades. Neste estudo, mostram como os protótipos sujeitos a fenômeno de fragmentação podem ser representados com modelos feitos de materiais diferentes. Uma consequência de seu método é a possível redução da velocidade do ensaio quando se altera o material do modelo.

3.2.3 Distorção geométrica

Com relação à similaridade imperfeita, existem casos onde a distorção dos fatores está na geometria do modelo. Drazetic et al. [47] apresentam uma abordagem de similaridade imperfeita para o estudo do colapso de tubos de seção retangular, utilizando-se de modelos em escala aproximados e com funções que extrapolam os resultados e permitem inferir o comportamento do protótipo. Cho et al. [22] utilizaram modelos de geometria distorcida e materiais diferentes, avaliando o efeito de cada alteração com um modelo específico. Isto é, utilizaram três modelos: um de mesmo material e com geometria distorcida; um de material diferente e geometria distorcida; e um modelo apenas com material diferente, Fig. 3.1a. O comportamento do modelo que combina as duas características é correlacionado a partir da combinação das funções λ_{X1} e ϕ_p , ou λ_{X1} e ϕ_m que descrevem os efeitos.

De maneira análoga, Oshiro e Alves [60] aplicam essa abordagem considerando uma distorção geométrica do modelo, juntamente com o efeito da taxa de deformação e uma mudança de material, conforme Fig. 3.1. Diferentemente de Cho et al. [22], são definidas apenas duas funções ϕ_1 e ϕ_2 , as quais são responsáveis por relacionar a geometria distorcida de $Y_{m2} \rightarrow Y_{p2}$ ou $Y_{m1} \rightarrow Y_{p1}$ e o material diferente $Y_{m2} \rightarrow Y_{m1}$ ou $Y_{p2} \rightarrow Y_{p1}$, respectivamente. Pela natureza do método apresentado para correção da distorção geométrica, os resultados são aproximados, como os de Cho et al. [22]. Importante notar que os efeitos de maior massa e maior volume são tratados indiretamente, através de expoentes e fatores.

3.3 Proposta de método geral aproximado

Os métodos apresentados na seção anterior visando contornar os efeitos da taxa de deformação na escala reduzida [26], as distorções de geometria [22, 47, 60] e material [22, 59] possuem restrições em

suas aplicações. Conforme dito anteriormente, o método apresentado por Oshiro e Alves [26] requer que modelo e protótipo sejam construídos exatamente do mesmo material, rígido perfeitamente plástico com lei viscoplástica de Norton, para que seja possível calcular a distorção β_V sem a necessidade de conhecer a resposta estrutural do modelo ou protótipo. Entretanto, ao se aplicar esse método em ensaios experimentais, ficou clara a dificuldade em se obter chapas de espessuras diferentes com exatamente as mesmas curvas tensão vs. deformação [25, 59].

Figura 3.2 Resultados de deslocamento (a) e resposta da estrutura (b) para ensaios de impacto em vigas de seção T (escala 1:1) e sua representação em escala reduzida (1:4), usando compensação para tensão de escoamento diferentes [59].

Dessa forma, Oshiro et al. [59] apresentaram uma solução visando compensar a diferença nas curvas tensão vs. deformação para o estudo de uma viga de seção T. Realizaram ensaios quase-estáticos de compressão na estrutura e assim definiram um fator que relaciona o comportamento dos materiais, β_{σ_0} , apresentando bons resultados, Fig. 3.2. Assim, pode-se pensar na extensão da definição de β_{σ_0} para curvas que não sejam de materiais RPP, conforme Figs. 3.3a-b.

Mazzariol [25] definiu β_{σ_0} baseado em ensaios quase-estáticos de caracterização de material, fiel à representação do material e não da estrutura, diferentemente do realizado por [59]. Nas Figs. 3.3c-e é possível observar que quando o encruamento e tensão de escoamento de dois materiais diferem, há muitas possibilidades de se definir o fator de tensão quase-estática de referência, β_{σ_0} , podendo serem consideradas todas válidas, dependendo do caso.

Logo, o método proposto por Oshiro e Alves [60] para permitir o uso de modelos com geometria distorcida se torna bastante restritivo, visto que requer a construção de três modelos com permutação de escala e material. É possível usar esse método para lidar com modelos feitos a partir de materiais diferentes, sem que a geometria seja distorcida. Recaímos, entretanto, no inconveniente de obtenção de materiais com propriedades iguais em escalas diferentes, sendo necessário contornar com alguma outra aproximação de material. Tal método, em sua essência, promove uma aproximação com correções dos efeitos passo-a-passo – taxa de deformação e material, diferentemente da solução “exata” obtida com as premissas de [26] e com o uso de β_{σ_0} [59].

Considerando a restrição da aplicação da solução exata [26] e a dificuldade experimental de aproximações [60], mostra-se interessante a proposta e investigação de um método capaz de lidar com

Figura 3.3 Representação da aplicação dos fatores de tensão de referência, β_{σ_0} , para materiais RPP (a), com encruamento e fator ideal (b) e para materiais reais e diferentes critérios (c), (d) e (e) [25].

efeitos da taxa de deformação, de abarcar as diferenças entre materiais, ainda que por meio de solução aproximada, que seja mais geral que o existente, e ainda sim funcional e válido.

3.3.1 Aproximação: uma outra ótica

A chave importante para a busca desse novo método reside em adotar algum procedimento de aproximação. Ao invés de se obter uma solução exata, cuja aplicação carece de aproximação dos parâmetros de entrada, busca-se uma solução aproximada como princípio, sem que sejam necessários experimentos diversos para se obter fatores ou parâmetros. Essa solução se baseia em conceitos de aproximação de Kline [40] e Barenblatt [23], ou seja, assíntotas válidas em uma faixa de interesse, tal qual os contemporâneos corrimãos do Instituto Tomie Ohtake em São Paulo, Fig. 3.4. Flexibilizar as relações entre variáveis existentes, com uso de diferentes materiais, velocidade etc. também constitui agenda importante para tornar o uso de modelos mais prático e abrangente.

Mazzariol et al. [61] apresentam uma discussão sobre a possibilidade de variar livremente o par Velocidade de Impacto V_0 e massa de impacto G , respeitando a energia cinética corrigida. A liberdade de escolher a massa de impacto era motivada por restrições experimentais, visto que a redução de escala a tornava demasiadamente diminuta, por vezes impossibilitando o ensaio controlado. Os desvios ocorridos não eram relevantes quando a inércia da estrutura impactada não era importante. Entretanto, esses efeitos de inércia poderiam ser usados em favor do modelo, quando houvesse densidades diferentes. Essa, sem dúvida, é a semente do método proposto a seguir. Posteriormente, em artigo mais recente, houve tentativa de relacionar uma maior tensão de escoamento σ_0 com uma maior massa de impacto [32]. A continuação desse trabalho [62] concluiu sobre a importância de se respeitar a rela-

Figura 3.4 Corrimãos do Instituto Tomie Othake, São Paulo, e sua relação com aproximação por assíntotas. Ao invés das linhas tradicionais, os corrimãos em curva mostram aproximação similares à assíntotas válidas por uma faixa restrita, os degraus, analogamente ao sugerido por [23].

ção de massas impactante e da estrutura impactada, enquanto as diferenças de resistência poderiam ser compensadas com um fator de velocidade. Além disso, as diferenças de encruamento dos materiais causava efeitos majoritariamente previsíveis como aumento ou perda relativa de rigidez; enquanto as de densidade maior³, em geral, proporcionavam velocidade de impacto reduzidas, algo similar ao estudo de Westine e Mullin [48].

Tais resultados permitiram que se pensasse em leis que fossem capazes de relacionar modelos de materiais diferentes, sob uma diferente perspectiva: a de discutir os efeitos que os diferentes comportamentos dos materiais proporcionam e ainda sim ser capaz de inferir, dentro de uma margem de erro tolerável, o comportamento da estrutura protótipo.

3.3.2 Proposta

Os achados anteriores [28,32,61,62] nortearam a definição de uma nova base e leis de similaridade, por conseguinte, novos adimensionais Π e razões r , capazes de relacionar sistemas construídos a partir de materiais diferentes. Devido à importância da massa em eventos de impacto, a base *VSG* foi substituída pela *VSM* (Velocidade V , Tensão Dinâmica σ_d e Massa M da estrutura), de forma a ser aplicada inclusive à casos onde a estrutura não é solicitada por uma massa de impacto – como carregamentos impulsivos. Às quantidades relevantes para o fenômeno, Tab. 3.1, pode-se incluir o momento para plastificação da seção de uma placa ou viga M_0 e a densidade ρ .

Utilizando o procedimento de obtenção de adimensionais, Apêndice A [42], segue que, para aceleração,

³Na realidade, o que é relevante é a razão resistência por densidade, σ_0/ρ . Valor menores significavam velocidade de impacto menor, algo que será explorado mais adiante.

$$aV^x\sigma_d^yM^z = 1$$

Substituindo as quantidades pelas equivalentes em MLT , obtemos:

$$(LT^{-2}) (LT^{-1})^x (ML^{-1}T^{-2})^y M^z = 1$$

Esta equação dá origem ao sistema:

$$\begin{cases} 0 & +0x & +y & +z & = & 0 & (M) \\ 1 & +x & -y & +0z & = & 0 & (L) \\ -2 & -x & -2y & +0z & = & 0 & (T) \end{cases}$$

que resulta em $(x, y, z) = (-4/3, -1/3, 1/3)$.

Através do mesmo procedimento, os adimensionais Π de tempo t , deslocamento δ , taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, tensão σ , momento para plastificação da seção M_0 , densidade ρ , força F e energia E' podem ser obtidos,

$$\Pi_1 = \left[\frac{a^3 M}{V^4 \sigma_d} \right], \quad (3.16a)$$

$$\Pi_2 = \left[\frac{t^3 \sigma_d V}{M} \right], \quad (3.16b)$$

$$\Pi_3 = \left[\frac{\delta^3 \sigma_d}{MV^2} \right], \quad (3.16c)$$

$$\Pi_4 = \left[\frac{\dot{\epsilon}^3 M}{\sigma_d V} \right], \quad (3.16d)$$

$$\Pi_5 = \left[\frac{\sigma}{\sigma_d} \right], \quad (3.16e)$$

$$\Pi_{6_{\text{placa}}} = \left[\frac{M_0^3}{V^4 \sigma_d M^2} \right], \quad (3.16f)$$

$$\Pi_{6_{\text{viga}}} = \left[\frac{M_0}{V^2 M} \right], \quad (3.16g)$$

$$\Pi_7 = \left[\frac{\rho V^2}{\sigma_d} \right], \quad (3.16h)$$

$$\Pi_8 = \left[\frac{F^3}{V^4 \sigma_d M^2} \right], \quad (3.16i)$$

$$\Pi_9 = \left[\frac{E'}{V^2 M} \right]. \quad (3.16j)$$

Alguns desses adimensionais podem ser claramente obtidos a partir de outros. O adimensional de força Π_8 pode ser obtido através da multiplicação de Π_1 por M^3/M^3 . O mesmo vale para o adimensional de energia $\Pi_9 = \Pi_8^{1/3} \Pi_3^{1/3}$. A descrição explícita desses adimensionais será importante para a geração dos fatores de escala úteis para relacionar resultados de diferentes sistemas. Podemos, assim, reescrever o operador da Eq. 3.4 com os adimensionais obtidos

$$\Lambda(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_9, r) = 0$$

$$\Lambda \left(\frac{a^3 M}{V^4 \sigma_d}, \frac{t^3 \sigma_d V}{M}, \frac{\delta^3 \sigma_d}{M V^2}, \frac{\varepsilon^3 M}{\sigma_d V}, \frac{\sigma}{\sigma_d}, \frac{M_0^3}{V^4 \sigma_d M^2}, \frac{\rho V^2}{\sigma_d}, \frac{F^3}{V^4 \sigma_d M^2}, \frac{E'}{V^2 M}, r \right) = 0, \quad (3.17)$$

sendo r as razões internas ao sistema relevantes para o fenômeno, por exemplo a razão entre massa da estrutura e a massa de impacto $r = M/G$, quando apropriado. A partir dos adimensionais Eqs. 3.16 é possível derivar fatores de escala para as quantidades selecionadas como importantes para caracterizar o fenômeno de impacto. O teorema II de Buckingham descreve que para que modelo e protótipo sejam relacionáveis os adimensionais devem ser iguais para ambos sistemas, conforme Eq. 3.5. Para Π_3

$$(\Pi_3)_m = (\Pi_3)_p$$

$$\left[\frac{\delta_m^3 \sigma_{dm}}{M_m V_{0m}^2} \right] = \left[\frac{\delta_p^3 \sigma_{dp}}{M_p V_{0p}^2} \right] \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\delta_m}{\delta_p} \right)^3 \left(\frac{\sigma_{dm}}{\sigma_{dp}} \right) \left(\frac{M_p}{M_m} \right) \left(\frac{V_{0p}}{V_{0m}} \right)^2 = 1. \quad (3.19)$$

Definindo $\beta_M = M_m / M_p$, o fator de escala da massa da estrutura entre modelo e protótipo, o fator de escala tensão dinâmica $\beta_{\sigma_d} = \sigma_{dm} / \sigma_{dp}$, fator de escala velocidade $\beta_V = V_m / V_p$, e assumindo que os deslocamentos de cada ponto material no modelo serão igualmente proporcionais ao do protótipo, $\beta = \delta_m / \delta_p$, podemos reescrever a Eq. 3.19

$$\beta_M = \frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_V^2} \quad (3.20)$$

ou

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_M}}. \quad (3.21)$$

A Eq. 3.21 pode ser considerada a mais geral onde não há distorções geométricas – todas as dimensões no modelo escalonadas por β , para qualquer densidade e lei de material. Se a massa de impacto G for escalonada tal que $\beta_G = \beta_M$, temos a Eq. 3.21 igual a Eq. 3.8, abrangendo os estudos mencionados na Seção 3.2 [24, 26, 27].

Entretanto, como dito anteriormente, é experimentalmente difícil construir modelos respeitando a mesma escala nas três dimensões. Embora dimensões gerais sejam contornáveis através de um processo controlado de fabricação, o mesmo não ocorre para espessuras de chapas, sendo estas fornecidas por fabricantes. Assim, para aumentar a abrangência do método, foi necessário buscar uma solução para englobar pequenas distorções na espessura. Do adimensional criado baseado em $M_0 = \sigma_0 H^2 / 4$, Eq. 3.16f – característico parâmetro usado em equações analíticas de impacto contra placas circulares [58], podemos escrever

$$(\Pi_6)_m = (\Pi_6)_p$$

$$\frac{M_{0m}^3}{4V_m^4 \sigma_{0m} M_m^2} = \frac{M_{0p}^3}{4V_p^4 \sigma_{0p} M_p^2}$$

$$\frac{(\sigma_{0_m} H_m^2)^3}{V_m^4 \sigma_{0_m} M_m^2} = \frac{(\sigma_{0_p} H_p^2)^3}{V_p^4 \sigma_{0_p} M_p^2} \quad (3.22)$$

sendo H a espessura da placa. Assim

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^3}{\beta_M}}. \quad (3.23)$$

Não obstante, podemos assumir que, no caso dinâmico, M_0 pode ser escrito em função da tensão dinâmica, $M_d = \sigma_d H^2/4$. A Eq. 3.23 se torna, então,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^3}{\beta_M}}. \quad (3.24)$$

Se não houver distorção geométrica na espessura, $\beta_H = \beta$, a Eq. 3.24 retorna à Eq. 3.21. Importante ressaltar que, uma vez que a espessura esteja distorcida, $\beta_H \neq \beta$, os deslocamentos paralelos ao vetor que a representa também serão distorcidos, ou seja

$$\beta_{\delta_H} = \beta_H. \quad (3.25)$$

O mesmo valerá para casos em que as outras dimensões forem distorcidas, assunto que não será abordado neste trabalho⁴.

Figura 3.5 Volume infinitesimal em coordenadas cilíndricas.

Considerando uma placa circular constituída de material homogêneo de densidade ρ , dimensões raio R e espessura H , podemos escrever sua massa em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^R \rho r dr dz d\phi \\ M &= \rho \pi R^2 H \end{aligned} \quad (3.26)$$

⁴Todavia, no caso de uma placa circular, o dobro do R é $\beta = 2$, com metade da espessura, $\beta_H = 1/2$.

sendo ρ constante, e o fator de escala de massa

$$\beta_M = \frac{M_m}{M_p}$$

$$\beta_M = \frac{\rho_m H_m R_m^2}{\rho_p H_p R_p^2} = \beta_\rho \beta_H \beta_R^2. \quad (3.27)$$

Inserindo Eq. 3.27 na Eq. 3.24, obtemos

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^3}{\beta_\rho \beta_H \beta_R^2}}.$$

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}. \quad (3.28)$$

Estes resultados se mostram bastante importantes. Primeiramente, o adimensional obtido a partir da densidade, $\Pi_7 = \rho V^2 / \sigma_d$ é similar ao chamado Número de Dano ou *Damage Number* apresentado por Johnson [63]

$$D_n = \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0}, \quad (3.29)$$

mudando apenas a V_0 como V geral e a tensão de referência, σ_0 , pela tensão dinâmica σ_d . Ademais, Li e Jones [64] apresentam adimensionais, Número de Resposta ou *Response Number* baseados em D_n para descrever o comportamento de vigas

$$R_n = D_n \left(\frac{L}{H} \right)^2, \quad (3.30)$$

sendo L metade do comprimento e H a espessura. Para placas circulares

$$R_n = D_n \left(\frac{R}{H} \right)^2 \text{ e} \quad (3.31)$$

com R o raio e H a espessura. A Eq. 3.28 pode ser obtida, também, através do adimensional proposto por Li e Jones [64], da Eq. 3.31

$$[R_n]_m = [R_n]_p$$

$$\frac{\rho_m V_{0m}^2}{\sigma_{0m}} \left(\frac{R_m}{H_m} \right)^2 = \frac{\rho_p V_{0p}^2}{\sigma_{0p}} \left(\frac{R_p}{H_p} \right)^2$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_{0m}^2}{V_{0p}^2} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 = \frac{\sigma_{0m}}{\sigma_{0p}} \left(\frac{H_m}{H_p} \right)^2$$

$$\beta_\rho \beta_V^2 \beta_R^2 = \beta_{\sigma_0} \beta_H^2$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}$$

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}. \quad (3.32)$$

A menos da tensão dinâmica, σ_d , a Eq. 3.32 mostra as mesmas relações entre as variáveis da Eq. 3.28. Para vigas, da Eq. 3.30 obtém-se

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_L^2}}. \quad (3.33)$$

Fica evidente, portanto, a importância do adimensional relacionado a M_0 , sendo possível reescrever o operador Λ – Eq. 3.17, removendo os adimensionais redundantes. Além disso, ao substituir σ_0 por σ_d , conseguimos incluir os efeitos de taxa de deformação no estudo, algo não abordado tanto no adimensional de Johnson [63], como em Li e Jones [64].

Ao incluir distorções geométricas, precisamos analisar com cuidado o efeito em alguns fatores de escala conforme a direção. O fator de escala de tempo β_t , por exemplo, não pode ser distorcido de forma diferente, tendo de ser igual nas três direções. Com relação às deformações, começamos pelo alongamento de uma direção arbitrária χ

$$\lambda_\chi = \frac{L_{\chi \text{ final}}}{L_{\chi \text{ inicial}}}$$

para o modelo,

$$[\lambda_\chi]_m = \frac{[L_{\chi \text{ final}}]_m}{[L_{\chi \text{ inicial}}]_m}$$

sabendo que $[L_{\chi \text{ inicial}}]_m = \beta_\chi [L_{\chi \text{ inicial}}]_p$ e que os deslocamentos são escalonados por $\beta_{\delta_\chi} = \delta_{\chi_m} / \delta_{\chi_p}$ e, portanto

$$[L_{\chi \text{ final}}]_m = \beta_\chi [L_{\chi \text{ final}}]_p \quad (3.34)$$

$$[\lambda_\chi]_m = \frac{[L_{\chi \text{ final}}]_m}{[L_{\chi \text{ inicial}}]_m} = \frac{\beta_\chi [L_{\chi \text{ final}}]_p}{\beta_\chi [L_{\chi \text{ inicial}}]_p} = [\lambda_\chi]_p.$$

Logo,

$$\beta_{\lambda_\chi} = \frac{[\lambda_\chi]_m}{[\lambda_\chi]_p}$$

$$\beta_{\lambda_\chi} = 1. \quad (3.35)$$

Com as premissas anteriores e a Eq. 3.35, podemos afirmar que, mesmo com distorções geométricas, a deformação em todas as direções do modelo são iguais às do protótipo. Resta investigar a taxa de deformação. Impondo $(\Pi_4)_m = (\Pi_4)_p$, Eq. 3.16d, obtemos

$$\left[\frac{\dot{\epsilon}_m^3 M_m}{\sigma_{d_m} V_m} \right] = \left[\frac{\dot{\epsilon}_p^3 M_p}{\sigma_{d_p} V_p} \right] \quad (3.36)$$

ou

$$\beta_{\dot{\epsilon}} = \left(\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_V}{\beta_M} \right)^{1/3}. \quad (3.37)$$

Inserindo Eq. 3.20 em Eq. 3.37, obtém-se

$$\beta_{\dot{\epsilon}} = \frac{\beta_V}{\beta}. \quad (3.38)$$

Note que a Eq. 3.20, relaciona δ e V sem definir uma direção, embora a Eq. 3.24 esteja em função de β_H . Assumindo que ela poderia ser escrita em função das direções χ , obteríamos

$$\beta_{V_\chi} = \sqrt{\frac{\beta_\chi^3 \beta_{\sigma_d}}{\beta_M}}. \quad (3.39)$$

Isto posto, transformando para as direções χ , a Eq. 3.38 se torna

$$\beta_{\dot{\epsilon}_\chi} = \frac{\beta_{V_\chi}}{\beta_\chi}. \quad (3.40)$$

Partindo de Π_2 , chegamos ao resultado inverso de Π_4 , uma vez que as unidades são inversas

$$\beta_t = \frac{\beta}{\beta_V}. \quad (3.41)$$

Ou, da mesma forma que a Eq. 3.40,

$$\beta_t = \frac{\beta_\chi}{\beta_{V_\chi}}. \quad (3.42)$$

Para que a Eq. 3.42 seja verdadeira, a razão apresentada precisa ser igual para todas as direções, i.e. em coordenadas cartesianas, $\beta_t = \beta_{V_x}/\beta_x = \beta_{V_y}/\beta_y = \beta_{V_z}/\beta_z$. Isto faz com que $\beta_{\dot{\epsilon}_\chi}$, Eq. 3.40, também seja igual para todas as direções, uma vez que

$$\beta_{\dot{\epsilon}_\chi} = \frac{1}{\beta_t}. \quad (3.43)$$

Além disso, concluímos que o fator de velocidade β_{V_χ} e o deslocamento na mesma direção são proporcionais à distorção da espessura. Essa conclusão facilita a obtenção das distorções de velocidade para outras direções em casos isotrópicos e permite que escrevamos $\dot{\epsilon}$ sem nos preocuparmos com a direção.

Os fatores da Tab. 3.1 podem ser reescritos, conforme Tab. 3.2. A relação entre as deformações deve ser utilizada com cautela, uma vez que depende da lei constitutiva do material utilizado. Materiais isotrópicos, por exemplo, tenderão a ter deformações transversas proporcionais à principal em um estado uniaxial de tensão, não sendo independentes como faz supor a Eq. 3.35.

Finalmente, podemos reescrever o operador Λ como

$$\Lambda(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, r) = 0.$$

$$\Lambda \left(\frac{a^3 M}{V^4 \sigma_d}, \frac{t^3 \sigma_d V}{M}, \frac{\delta^3 \sigma_d}{M V^2}, \frac{\dot{\epsilon}^3 M}{\sigma_d V}, \frac{\sigma}{\sigma_d}, D_n^*, R_n^*, r \right) = 0, \quad (3.44)$$

Sendo $D_n^* = \rho V^2 / \sigma_d$, $R_n^* = D_n^* (L/H)^2$ para vigas e $R_n^* = D_n^* (R/H)^2$ para placas circulares, além de $r = M/G$ quando houver massa de impacto.

Tabela 3.2 Fatores de escala relacionando quantidades do modelo com as do protótipo na base Velocidade–Tensão Dinâmica–Massa da Estrutura (VSM). Tanto F como E são obtidas considerando o carregamento na direção χ .

Variável	Fator	Variável	Fator
dimensão, χ	β_χ	tempo, t	$\beta_t = \beta_\chi / \beta_{V_\chi}$
deslocamento em χ , δ_χ	$\beta_{\delta_\chi} = \beta_\chi$	velocidade em χ , V_χ	$\beta_{V_\chi} = \left(\beta_\chi^3 \beta_{\sigma_d} / \beta_M \right)^{1/2}$
massa de impacto, G	$\beta_G = \beta_M^{(1)}$	taxa de deformação, $\dot{\epsilon}$	$\beta_{\dot{\epsilon}} = \beta_\chi / \beta_{V_\chi}$
deformação, ϵ	$\beta_\epsilon = 1^{(2)}$	aceleração, a	$\beta_a = \beta_\chi^2 \beta_{\sigma_d} / \beta_M$
tensão, σ	$\beta_\sigma = \beta_{\sigma_d}$	energia, E'	$\beta_{E'} = \beta_\chi^3 \beta_{\sigma_d}$
força, F	$\beta_F = \beta_\chi^2 \beta_{\sigma_d}$	densidade, ρ	β_ρ

⁽¹⁾ $\beta_M = M_m / M_p$.

Para coordenadas cartesianas e dimensões (L, H, B) ,
 $\beta_M = \beta_\rho \beta_L \beta_H \beta_B$ ou simplesmente, $\beta_M = \beta_\rho \beta^2 \beta_H$.

Para cilíndricas (R, H) , $\beta_M = \beta_\rho \beta_R^2 \beta_H$.

⁽²⁾ O fator de deformação é unitário para o caso uniaxial. Se houver influência da deformação de uma direção em outra, como o caso elástico ou incompressibilidade em plastificação, esse fator só passa a ser correto se não houver distorção em nenhuma direção, $\beta_\chi = \beta$, $\forall \chi$.

A primeira diferença entre o método proposto e os demais é o uso da base VSM, ao invés da tradicional MLT e a VSG proposta por [26,27]. Substituir a massa de impacto, G , pela massa da estrutura, M , faz com que seja possível compensar efeitos de inércia ocasionados por diferentes densidades, $\beta_\rho \neq 1$. Ainda, torna capaz de relacionar explicitamente estruturas cujo carregamento não possui uma massa externa, como aqueles modelados por um impulso. Quando há massa de impacto, seu fator β_G é avaliado a partir da razão $r = M/G$, resultando em $\beta_G = \beta_M$.

Com relação à espessura, incluir M_0 , em termos de Π_6 , Eq. 3.16f-g, permite que sejam calculadas correções para distorção de espessura diretamente, ao contrário do proposto por Cho et al. [22] ou Oshiro e Alves [60], os quais exigem modelos intermediários para compor o cálculo dos fatores de correção. Outra diferença é o perfil de deslocamentos finais de um modelo usando o método de Oshiro e Alves [60], que será aproximadamente igual à referência. No caso presente, os deslocamentos estarão em função da distorção da espessura e, por conseguinte, proporcionará deformações desiguais no modelo e protótipo. Assim sendo, recomenda-se que a distorção de espessura seja reduzida, para evitar que, além de deformações excessivas, esforços de membrana ou cisalhamento se tornem mais relevantes no modelo do que na referência.

Por fim, os métodos propostos se utilizam de leis de viscoplasticidade de Cowper-Symonds e Norton, enquanto que surgem vantagens para materiais diferentes quando se utiliza a lei de Johnson-Cook. A descrição dos efeitos das diferentes leis de viscoplasticidade será apresentada no próximo capítulo.

Verificando a hipótese

A proposta do Capítulo 3 requer análise minuciosa para compreender seus resultados, suas limitações e suas principais indicações de uso. Tendo em vista a complexidade da verificação, esta foi dividida em três partes. A primeira usará descrições analíticas do comportamento de estrutura sob carregamentos típicos de impacto, abordando principalmente efeitos como inércia, taxa de deformação e grandes deformações para estruturas de materiais rígido-perfeitamente-plásticos. A segunda abordará as estruturas estudadas analiticamente com uso de elementos finitos com integração explícita no tempo e materiais com encruamento e viscoplasticidade segundo a equação de Johnson-Cook [65]. Por fim, a terceira e última parte abordará resultados experimentais de impacto de baixa e alta velocidade. Sendo assim, estarão cobertos diversos aspectos importantes para eventos de impacto, como a inércia da estrutura, a sensibilidade à taxa de deformação e também eventuais variações oriundas de experimentos.

4.1 Soluções analíticas de estruturas e viscoplasticidade

4.1.1 Carregamento impulsivo de vigas e placas

A resposta de uma viga de comprimento $2L$, largura B e altura H sujeita a um carregamento impulsivo foi estudada por Jones [58]. Foram desconsiderados efeitos de grandes deformações e sensibilidade à taxa de deformação. Além disso, foi atribuído ao carregamento impulsivo que a pressão aplicada é grande o suficiente para que ela possa ser substituída simplesmente por uma velocidade inicial V_0 em toda a viga, conforme Fig. 4.1. O deslocamento máximo do ponto central para este carregamento é dado por

$$\frac{W_f}{H} = \frac{\lambda^*}{6}, \quad (4.1)$$

Figura 4.1 Viga engastada com carregamento impulsivo uniformemente distribuído.

sendo H a espessura da viga e λ forma adimensional da energia cinética

$$\lambda^* = \frac{\mu V_0^2 L^2}{M_0 H}, \quad (4.2)$$

$\mu = M/L$, $M = \rho BHL$ a massa da viga, e $M_0 = (\sigma_0 B H^2)/4$. Podemos reescrever a Eq. 4.2 como

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{4\rho B H V_0^2 L^2}{\sigma_0 B H^3} \\ \lambda^* &= \frac{4\rho V_0^2 L^2}{\sigma_0 H^2} \\ \lambda^* &= 4D_n \left(\frac{L}{H} \right)^2 \quad \text{ou} \\ \lambda^* &= 4R_n. \end{aligned}$$

Portanto, segundo o teorema II de Buckingham – Eq. 3.5, se R_n for igual no modelo e no protótipo, os sistemas são relacionáveis:

$$\begin{aligned} [R_n]_m &= [R_n]_p \\ \frac{\rho_m V_{0m}^2 L_m^2}{\sigma_{0m} H_m^2} &= \frac{\rho_p V_{0p}^2 L_p^2}{\sigma_{0p} H_p^2} \\ \frac{\rho_m V_{0m}^2 L_m^2}{\rho_p V_{0p}^2 L_p^2} &= \frac{\sigma_{0m} H_m^2}{\sigma_{0p} H_p^2} \\ \beta_\rho \beta_V^2 \beta_L^2 &= \beta_{\sigma_0} \beta_H^2 \\ \beta_V &= \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_L^2}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se este β_V for respeitado, tal qual Eq. 3.33, devemos ter, a partir da Eq. 4.1

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \frac{H_m \lambda_m}{H_p \lambda_p}$$

com β_V da Eq. 4.3, temos $\lambda_m = \lambda_p$, ou seja

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \frac{H_m}{H_p}$$

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \beta_H.$$

$$\beta_{W_f} = \beta_H. \quad (4.4)$$

Isto é, a relação entre os deslocamentos dos dois sistemas está em função do fator de escala na direção do carregamento, mesmo resultado mostrado na seção anterior (Eq. 3.25). É possível inferir a partir da Eq. 4.3 que tanto a distorção na espessura H , $\beta_H \neq \beta$ como a distorção no comprimento L , $\beta_L \neq \beta$, podem ser adotadas em um modelo e ainda sim ser possível relacionar a um protótipo, mediante correção de velocidade. A definição de β_V mostra-se independente da dimensão B , o que se justifica visto que o carregamento é imposto por velocidade, o aumento da dimensão B da viga produz um aumento proporcional da energia.

Jones [58] também apresenta solução para o caso de um carregamento impulsivo de velocidade V_0 em uma placa circular simplesmente apoiada. As dimensões da Fig. 4.1 em função do comprimento L são modificadas para raio R , sendo o eixo x substituído pelo eixo radial com $r \in [0, R]$ e mantida a espessura H . O deslocamento vertical final da placa W_f pode ser escrito em função da posição r

$$\frac{W_f}{H} = \frac{\lambda'}{24} \left[3 - \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right] \quad (4.5)$$

sendo

$$\lambda' = \frac{\mu' V_0^2 R^2}{M'_0 H}.$$

De maneira similar ao apresentado para viga, podemos reescrever λ' sabendo que $\mu' = \rho H$ e $M'_0 = (\sigma_0 H^2)/4$

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{4\rho H V_0^2 R^2}{\sigma_0 H^3} \\ &= \frac{4\rho V_0^2 R^2}{\sigma_0 H^2} \\ &= \frac{4\rho V_0^2 R^2}{\sigma_0 H^2} \\ &= 4D_n \left(\frac{R}{H} \right)^2 \\ \lambda' &= 4R_n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

λ' surge como adimensional dependente de R_n novamente. Avaliando a Eq. 4.5 entre dois sistemas protótipo e modelo

$$\begin{aligned} \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} \frac{H_p}{H_m} &= \frac{\frac{\lambda'_m}{24} \left[3 - \frac{r_m}{R_m} - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^2 - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^3 \right]}{\frac{\lambda'_p}{24} \left[3 - \frac{r_p}{R_p} - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^2 - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^3 \right]} \\ \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} &= \frac{H_m}{H_p} \frac{\lambda'_m}{\lambda'_p} \frac{\left[3 - \frac{r_m}{R_m} - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^2 - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^3 \right]}{\left[3 - \frac{r_p}{R_p} - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^2 - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^3 \right]}. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda'_m = \lambda'_p$, $\beta_H = H_m/H_p$ e sabendo que a variável r da Eq. 4.5 se refere à variável do sistema de coordenadas, $r_m/r_p = R_m/R_p = \beta_R$, logo $r_m/R_m = r_p/R_p$, fazendo com que a divisão dos termos em colchetes seja unitário. Assim,

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \beta_H \frac{\left[3 - \frac{r_m}{R_m} - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^2 - \left(\frac{r_m}{R_m} \right)^3 \right]}{\left[3 - \frac{r_p}{R_p} - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^2 - \left(\frac{r_p}{R_p} \right)^3 \right]}$$

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \beta_H.$$

$$\beta_{W_f} = \beta_H. \quad (4.7)$$

A Eq. 4.7 apresenta os mesmos resultados da Eq. 4.4, isto é, relação entre deslocamento do modelo e protótipo em função do fator de escala de espessura, conforme Eq. 3.25. Se mudarmos as condições de contorno da placa circular para um engastamento, o deslocamento final no centro da placa pode ser escrito como [58]

$$\frac{W_f}{H} = \frac{0.84\lambda'}{12} \quad (4.8)$$

Da mesma forma desenvolvida para a Eq. 4.5 com λ' da Eq. 4.6, podemos escrever a Eq. 4.8

$$\begin{aligned} \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} &= \frac{H_m \lambda'_m}{H_p \lambda'_p} \\ \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} &= \frac{H_m}{H_p}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sendo igual à Eq. 4.7. Para respeitar o adimensional R_n devemos ter β_V descrito por

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}, \quad (4.10)$$

ou pela Eq. 4.3 para vigas, da mesma forma que as Eqs. 3.32 e 3.33, respectivamente, confirmando a validade das equações do método proposto.

4.1.2 Impacto transversal de uma massa contra viga

O comportamento de uma viga engastada ao ser impactada por um objeto em qualquer ponto de seu comprimento, Fig. 4.2, foi estudado por Liu e Jones [66]. Descreveram o deslocamento do ponto de impacto em função dos parâmetros de geometria (B , H , L_1 e L_2), material (σ_0 e densidade linear m') e da velocidade de impacto V_0 da massa G , de acordo com

$$W_f = L \frac{\sqrt{1 + \frac{E\gamma}{ur(1+r)}} - 1}{2\gamma}, \quad (4.11)$$

Figura 4.2 Viga engastada impactada por um objeto de massa G e velocidade V_0 . Adaptado de [66].

sendo

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{3} (1+r) + r \right] \dot{\bar{W}}_{02}^2 + 4u(1+r)r(\bar{W}_{02} + \gamma \bar{W}_{02}^2), \quad (4.12a)$$

$$u = \frac{GV_0^2}{2M_0}, \quad (4.12b)$$

$$\gamma = \frac{L_1}{H}, \quad (4.12c)$$

$$r = \frac{L_1}{L_2}, \quad (4.12d)$$

$$M_0 = \frac{\sigma_d B H^2}{4}, \quad (4.12e)$$

$$g = \frac{m' L_1}{G}, \quad (4.12f)$$

$$\dot{\bar{W}}_{02}^2 = \frac{2u}{1+g}, \quad (4.12g)$$

$$\bar{W}_{02} = \frac{\sqrt{1 + \frac{u\gamma}{3g} \left[\frac{g(2+g)}{1+g^2} - 2 \ln(1+g) \right]} - 1}{2\gamma}, \quad (4.12h)$$

com m' , massa por unidade de comprimento, e $\bar{W}_{02} = W_{02}/L_2$ o deslocamento adimensional no ponto de impacto quando a onda que percorre o vão mais longo da viga atinge o engastamento. Considerando o centro da viga como ponto de impacto, $L_1 = L_2 = L$, logo $\gamma = L/H$, $r = 1$ e $g = M/(2G)$, sendo M a massa da viga. Podemos, então, escrever as Eqs. 4.11–4.12h para o modelo

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{f_m} = L_m \frac{\sqrt{1 + \frac{E_m \gamma_m}{2u_m}} - 1}{2\gamma_m}; \end{array} \right. \quad (4.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m = \left[\frac{g}{3} + \frac{1}{2} \right] \dot{\bar{W}}_{02_m}^2 + 8u_m(\bar{W}_{02_m} + \gamma_m \bar{W}_{02_m}^2); \end{array} \right. \quad (4.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{W}}_{02_m}^2 = \frac{2u_m}{1+g_m}; \end{array} \right. \quad (4.13c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_{02_m}^2 = \frac{\sqrt{1 + \frac{u_m \gamma_m}{3g_m} \left[\frac{g_m(2+g_m)}{1+g_m^2} - 2 \ln(1+g_m) \right]} - 1}{2\gamma_m}; \end{array} \right. \quad (4.13d)$$

e avaliar $(W_f)_m / (W_f)_p$:

$$\frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} = \frac{L_m}{L_p} \frac{2\gamma_p}{2\gamma_m} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{E_m \gamma_m}{2u_m}} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{E_p \gamma_p}{2u_p}} - 1}.$$

Da Eq. 4.12c temos que $\gamma_m = L_m/H_m$ e $\gamma_p = L_p/H_p$, assim

$$\begin{aligned}
 \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} &= \frac{L_m}{L_p} \frac{H_m}{L_m} \frac{L_p}{H_p} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{E_m \gamma_m}{2u_m}} - 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{E_p \gamma_p}{2u_p}} - 1\right)} \\
 &= \frac{H_m}{H_p} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{E_m \gamma_m}{2u_m}} - 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{E_p \gamma_p}{2u_p}} - 1\right)} \\
 \frac{W_{f_m}}{W_{f_p}} &= \beta_H \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{E_m \gamma_m}{2u_m}} - 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{E_p \gamma_p}{2u_p}} - 1\right)}. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Pelo que sabemos da distorção de espessura, $W_{f_m}/W_{f_p} = \beta_H$, assim a fração deverá ter valor unitário. Para que isso aconteça, faz-se necessário

$$\begin{aligned}
 \frac{E_m \gamma_m}{u_m} &= \frac{E_p \gamma_p}{u_p} \\
 \frac{E_m 2M_{0m} L_m}{G_m V_{0m}^2 H_m} &= \frac{E_p 2M_{0p} L_p}{G_p V_{0p}^2 H_p} \\
 \frac{E_m}{E_p} &= \frac{\beta_G \beta_V^2}{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L}
 \end{aligned}$$

com $\beta_G = \beta_M$ da Eq. 3.44, $\beta_G = \beta_\rho \beta_B \beta_H \beta_L$, logo

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{\beta_\rho \beta_V^2}{\beta_{\sigma_d}}. \tag{4.15}$$

Agora, avaliando

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{\left[\frac{g_m}{3} + \frac{1}{2}\right] \dot{\bar{W}}_{02_m}^2 + 8u_m(\bar{W}_{02_m} + \gamma_m \bar{W}_{02_m}^2)}{\left[\frac{g_p}{3} + \frac{1}{2}\right] \dot{\bar{W}}_{02_p}^2 + 8u_p(\bar{W}_{02_p} + \gamma_p \bar{W}_{02_p}^2)}. \tag{4.16}$$

Sendo $g = M/(2G)$, temos que $g_m = g_p$ se $\beta_M = \beta_G$. Partindo da Eq. 4.13c

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{W}}_{02_m}^2 &= \dot{\bar{W}}_{02_p}^2 \\
 \frac{2u_m}{1 + g_m} &= \frac{2u_p}{1 + g_p} \\
 \frac{u_m}{u_p} &= \frac{1 + g_m}{1 + g_p} \\
 u_m &= u_p.
 \end{aligned}$$

Se $u_m = u_p$, então podemos inferir que a porção da Eq. 4.16

$$\bar{W}_{02_m} + \gamma_m \bar{W}_{02_m}^2 = \bar{W}_{02_p} + \gamma_p \bar{W}_{02_p}^2 \text{ ou} \tag{4.17}$$

$$\overline{W}_{02_m} = \overline{W}_{02_p}. \quad (4.18)$$

O que faz sentido, uma vez que $\overline{W}_{02} = W_{02}/L$ é adimensional. Isto resulta em

$$E_m = E_p, \quad (4.19)$$

ou, com a Eq. 4.15

$$\frac{\beta_\rho \beta_V^2}{\beta_{\sigma_d}} = 1$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d}}{\beta_\rho}. \quad (4.20)$$

A partir da Eq. 4.13d,

$$\begin{aligned} \frac{W_{02_m}}{W_{02_p}} &= \frac{L_m}{L_p} \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \frac{\sqrt{1 + \frac{u_m \gamma_m}{3g_m} \left[\frac{g_m(2+g_m)}{1+g_m^2} - 2\ln(1+g_m) \right]} - 1}{\sqrt{1 + \frac{u_p \gamma_p}{3g_p} \left[\frac{g_p(2+g_p)}{1+g_p^2} - 2\ln(1+g_p) \right]} - 1}, \\ &= \beta_H \frac{\sqrt{1 + \frac{u_m \gamma_m}{3g_m} \left[\frac{g_m(2+g_m)}{1+g_m^2} - 2\ln(1+g_m) \right]} - 1}{\sqrt{1 + \frac{u_p \gamma_p}{3g_p} \left[\frac{g_p(2+g_p)}{1+g_p^2} - 2\ln(1+g_p) \right]} - 1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma que na Eq. 4.14, precisamos que a razão das frações maiores seja unitária. Para tal, basta fazer

$$\begin{cases} u_m = u_p \end{cases} \quad (4.21a)$$

$$\begin{cases} g_m = g_p \end{cases} \quad (4.21b)$$

$$\begin{cases} \frac{u_m}{1+g_m} = \frac{u_p}{1+g_p} \end{cases} \quad (4.21c)$$

$$\begin{cases} \frac{u_m \gamma_m}{g_m} = \frac{u_p \gamma_p}{g_p} \end{cases} \quad (4.21d)$$

Ao analisarmos a Eq. 4.21a, obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} u_m &= u_p \\ \frac{G_m V_{0_m}^2}{\sigma_{0_m} B_m H_m^2} &= \frac{G_p V_{0_p}^2}{\sigma_{0_p} B_p H_p^2} \\ \beta_G \beta_V^2 &= \beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2 \\ \beta_V^2 &= \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2}{\beta_G} \\ \beta_V^2 &= \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H}{\beta_\rho \beta_L}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Naturalmente, a Eq. 4.21c é satisfeita com as definições das Eqs. 4.21a e 4.21b. A partir da Eq. 4.21d

$$\frac{u_m \gamma_m}{g_m} = \frac{u_p \gamma_p}{g_p} \quad (4.23)$$

$$\frac{2G_m^2 V_{0m}^2 L_m}{M_m M_{0m}} = \frac{2G_p^2 V_{0p}^2 L_p}{M_p M_{0p}} \quad (4.24)$$

$$\frac{\beta_G^2 \beta_V^2 \beta_L}{\beta_M} = \beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^3 \quad (4.25)$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^3}{(\beta_G^2 / \beta_M) \beta_L} \quad (4.26)$$

sendo $\beta_G = \beta_M = \beta_\rho \beta_B \beta_L \beta_H$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_L^2}. \quad (4.27)$$

A única forma de que as Eqs. 4.20, 4.22 e 4.27 sejam iguais é não existindo distorção na espessura, ou seja, tanto β_L como β_H deverão ser escalonados conforme β . Isso pode ser resumido pelas relações $u_m = u_p$ e $g_m = g_p$, que fazem com que a Eq. 4.21d resuma-se a

$$\gamma_m = \gamma_p \quad (4.28a)$$

$$\frac{L_m}{H_m} = \frac{L_p}{H_p} \quad (4.28b)$$

$$\beta_L = \beta_H. \quad (4.28c)$$

Assim, ao respeitar as Eqs. 4.28 é possível relacionar modelo e protótipo de materiais diferentes (densidade e tensão de escoamento). Para compensar a densidade, é necessário fazer com que a massa de impacto seja modificada na mesma proporção, ou seja, $\beta_G = \beta_M$, que está contido no operador da Eq. 3.44 do método proposto. Com relação à escala, os parâmetros de geometria de espessura H e comprimento L deverão ser escalonados igualmente, sem distorção, $\beta_L = \beta_H = \beta$. Isso ocorre por causa da característica do fenômeno e da formulação utilizada por Liu e Jones [66]. Para grandes deslocamentos, maiores que a espessura da viga, as forças de membrana passam a ser relevantes, fazendo com que o adimensional baseado em M_0 seja importante tal qual N_0 . A única forma de respeitar ambos, é não distorcendo H ou L . Com relação à dimensão B , esta pode ser alterada com compensação em β_G , respeitando $\beta_G = \beta_M$, também englobado pelo método proposto.

4.1.3 Sensibilidade à taxa de deformação

A sensibilidade à taxa de deformação pode propiciar dificuldades para relacionar estruturas em escala distintas quando os materiais usados são sensíveis à essa grandeza. O método de Oshiro e Alves [26] utiliza a Equação de Norton

$$\sigma_d = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^q, \quad (3.12 \text{ revisitada})$$

da qual se pode obter o fator de tensão dinâmica β_{σ_d}

$$[\beta_{\sigma_d}]_{NH} = \frac{\sigma_{d_m}}{\sigma_{d_p}} = \frac{\sigma_{0_m}}{\sigma_{0_p}} \frac{\dot{\epsilon}_m^{q_m}}{\dot{\epsilon}_p^{q_p}} \frac{\dot{\epsilon}_{0_p}^{q_p}}{\dot{\epsilon}_{0_m}^{q_m}}. \quad (4.29)$$

Sabendo que $\dot{\epsilon}_m = \dot{\epsilon}_p \beta_V / \beta$, obtemos

$$[\beta_{\sigma_d}]_{NH} = \beta_{\sigma_0} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{0_p}^{q_p}}{\dot{\epsilon}_{0_m}^{q_m}} \right) \left(\frac{\beta_V}{\beta} \right)^{q_m} \left(\dot{\epsilon}_p^{q_m - q_p} \right). \quad (4.30)$$

A vantagem em usar materiais iguais representados pela Equação de Norton, Eq. 3.12, reside em cancelar o último termo, de $\dot{\epsilon}_p$, uma vez que $q_m = q_p$. O termo do outro parâmetro de material, $\dot{\epsilon}_0$, não depende de outras variáveis e interfere de forma constante no cálculo de β_V . Este, por sua vez, não dependerá da resposta estrutural para relacionar modelo e protótipo, como pode ser observado pela curva tracejada vermelha, constante, da Fig. 4.3a, obtida com os parâmetros da Tab. 4.1. Dessa forma, modelo e protótipo são relacionáveis independentemente da taxa de deformação. Entretanto, ao aplicarmos materiais diferentes, essa vantagem desaparece. Na Fig. 4.3b é possível observar que quando protótipo é de alumínio e o modelo é de aço, ambos representados pela equação de Norton, β_V se torna sensível à taxa de deformação.

Figura 4.3 Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Norton e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.

Ao utilizarmos a equação de Cowper-Symonds,

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_0} = \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D} \right) \right]^{1/p}, \quad (3.10 \text{ revisitada})$$

obtemos

$$[\beta_{\sigma_d}]_{CS} = \beta_{\sigma_0} \frac{\left[1 + \left(\frac{\beta_V \dot{\epsilon}_p}{\beta D_m} \right)^{1/p_m} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{D_p} \right)^{1/p_p} \right]}. \quad (4.31)$$

Equação esta igual à obtida por Oshiro e Alves [24] exceto pelo fator de tensão de referência β_{σ_0} . Importante notar que ao utilizar materiais iguais, ambos representados pela equação de Cowper-Symonds, obtemos β_V bastante sensível à taxa de deformação, conforme Fig. 4.6a. Esta sensibilidade

Tabela 4.1 Parâmetros dos materiais utilizados para o estudo de sensibilidade do fator β_V à taxa de deformação para diferentes leis viscoplásticas.

			Norton		Cowper-Symonds		Johnson-Cook	
	ρ kg/m ³	σ_0 [MPa]	$q[-]$	$\dot{\epsilon}_0$ [1/s]	$p[-]$	D [1/s]	$C[-]$	$\dot{\epsilon}_0$ [1/s]
Alumínio	2700	265	0,034	1,0	4	6500	0,015	1,0
Aço	7890	350	0,077	1,0	5	40,4	0,022	1,0

faz aumentar β_V quando a escala é menor que 1 e o reduz na situação contrária, compensando pelo acréscimo ou decréscimo da $\dot{\epsilon}$ do modelo, visto que $\dot{\epsilon}_m = \dot{\epsilon}_p \beta_V / \beta$. Ao utilizarmos materiais diferentes, alumínio como protótipo e aço como modelo, obtemos curva também sensível. A diferença nos parâmetros dos materiais, sendo o alumínio menos sensível que o aço, faz com que haja aumento mais expressivo de β_V , quando a escala do modelo é reduzida para $\beta = 1/100$, do que redução de β_V quando a escala é aumentada. Certamente, Alves e Oshiro [29] vislumbravam essa solução ao sugerir a escala reduzida em alumínio para representar um protótipo em aço – $\beta = 10/1$ ou $\beta = 100/1$ na Fig. 4.4b.

Figura 4.4 Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Cowper-Symonds e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.

Com relação à lei de constitutiva de Johnson-Cook [65],

$$\sigma_d = (A' + B'\bar{\epsilon}^n) (1 + C \ln \dot{\epsilon}^*) (1 - T^{*m'}) , \quad (4.32)$$

com A' , B' , C e n parâmetros de material, $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0$, sendo comumente $\dot{\epsilon}_0 = 1/s$. Considerando que a curva quase-estática é relacionável por β_{σ_0} , obtemos,

$$[\beta_{\sigma_d}]_C = \beta_{\sigma_0} \frac{\left[1 + C_m \ln \left(\frac{\beta_V \dot{\epsilon}_p}{\beta \dot{\epsilon}_{0m}} \right) \right]}{\left[1 + C_p \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{0p}} \right) \right]} . \quad (4.33)$$

A influência da taxa de deformação em β_V segundo a Eq. 4.33 é mostrada no gráfico da Fig. 4.5a. Considerando materiais iguais, essa influência é maior que a de Norton e menor que a de Cowper-Symonds, Figs. 4.3a e 4.4a, respectivamente. Note que β_V decresce com o aumento de $\dot{\epsilon}$ para escalas reduzidas, $\beta < 1$, ao contrário do que ocorre para a equação de Cowper-Symonds. Ao considerarmos

materiais diferentes, Fig. 4.5b a influência de $\dot{\epsilon}$ se mostra menos impactante em β_V através da equação de Johnson-Cook do que para outras leis.

Comparando as três leis para materiais iguais e diferentes, Figs. 4.6a e 4.6b, fica explícita a vantagem de usar a lei viscoplástica de Johnson e Cook [65] quando há materiais diferentes, proporcionando pequena variação em β_V mesmo para uma grande faixa de $\dot{\epsilon} \in [10^{-4}, 10^4]$. É possível notar, também, que tornar β menor, por exemplo, $\beta = 1/100$, faz com que a curva seja multiplicada por uma constante positiva na equação de Norton, Fig. 4.3b, por um número crescente com $\dot{\epsilon}$ na de Cowper-Symonds, Fig. 4.4b e por um número decrescente na de Johnson-Cook, Fig. 4.5a.

Figura 4.5 Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Johnson-Cook e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.

Figura 4.6 Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para $\beta = 1/10$ e leis viscoplásticas de Norton (NH), Cowper-Symonds (CS) e Johnson-Cook (JC). (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.

Em alguns casos, os materiais candidatos a modelo e protótipo são bem representados por leis constitutivas distintas. Dessa forma, o uso de leis diferentes para modelos e protótipos foi investigada e é apresentada na Fig. 4.7a, para aço como modelo e protótipo, e Fig. 4.7b, para aço como modelo e alumínio como protótipo. Em ambos os gráficos é possível observar que a lei viscoplástica de Johnson-Cook proporciona menores desvios para β_V .

Em suma, além de proporcionar uma variação menor de β_V na faixa de $\dot{\epsilon}$ mostrada, a equação de Johnson-Cook fornece curvas mais estáveis que as das demais leis, mesmo quando combinamos leis

Figura 4.7 Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para $\beta = 1/10$. É verificada a influência em β_V quando o material do protótipo e modelo são descritos por diferentes leis viscoplásticas, Norton (NH), Cowper-Symonds (CS) e Johnson-Cook (JC), usando a nomenclatura “lei do modelo / lei do protótipo”. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.

viscoplásticas diferentes, Figs. 4.6-4.7. Portanto, podemos concluir que o cálculo de β_V com β_{σ_d} segundo a Eq. 3.24 fica simplificado se ambos os materiais de modelo e protótipo forem representados segundo a porção viscoplástica da equação de Johnson-Cook. Além disso, a $\dot{\epsilon}_m$ ou $\dot{\epsilon}_p$ podem ser definidos sem que seja necessário saber exatamente a resposta estrutural do modelo ou protótipo. Por exemplo, definindo $\dot{\epsilon}_p = 1/s$ se obtém boa aproximação de β_V para uma ampla faixa, conforme Fig. 4.5. Propõe-se, portanto,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}} \beta_H^3}{\beta_M}} \quad (4.34)$$

sendo β_{visco} da Eq. 4.33 e $\dot{\epsilon}_p = 1/s$. Assim,

$$\beta_{\text{visco}} = \frac{1 + C_m \ln \left(\frac{\beta_V}{\beta_{\dot{\epsilon}_{0m}}} \right)}{1 + C_p \ln \left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_{0p}} \right)}, \quad (4.35)$$

que é calculado a partir de parâmetros de material e escala, oferecendo boa aproximação, mesmo não dependendo de estimativas de taxa de deformação.

4.1.4 Impacto contra estrutura de chapa dupla (ECD)

Ensaio em estruturas de chapa dupla (ECD) foram realizados por Calladine e English [67] como forma de investigar os efeitos de inércia e taxa de deformação. Tais estruturas quando solicitadas em compressão respondem com um pico inicial de força seguido de queda constante e são chamadas de “tipo II”. As de tipo I, um anel em compressão lateral por exemplo, possuem curva de resposta de força como um plateau, conforme simplificação da Fig. 4.8.

A ECD é composta por duas chapas pré-deformadas de comprimento l , espessura H e profundidade B , unidas por parafusos e fixas numa base de grande massa tal que a compressão da porção superior resulta numa abertura simétrica para os lados, similar ao movimento *plié* do balé, Fig. 4.9a. A pré-deformação imposta resulta numa abertura inicial modelada como w_0 , tal qual Fig. 4.9b. O com-

Figura 4.8 Tipos de estruturas sensíveis à taxa de deformação – Tipo I – e sensível à taxa de deformação e inércia, Tipo II. [67]

portamento dessa estrutura mediante impacto foi estudada por diversos autores [68, 69] e dividida principalmente em duas fases: a primeira de compressão e encurtamento das barras até que a velocidade da porção superior se equivalha à da massa de impacto, exemplificado pela Fig. 4.9b; e a segunda de crescimento do ângulo θ e da distância w .

Figura 4.9 Estrutura de chapa dupla (ECD) proposta por Calladine e English [67] (a) e o esquema da geometria deformada proposto por Tam e Calladine [68] para a primeira fase de compressão e encurtamento das barras (b).

A fase 1 foi estudada por Tam e Calladine [68], os quais estabeleceram uma relação entre a velocidade da massa impactante e a da porção superior da estrutura,

$$V = \frac{4}{l} w \dot{w} + \dot{q}, \quad (4.36)$$

sendo q o encurtamento do comprimento da barra. Escreveram a equação de movimento da estrutura como

$$\left(\frac{m}{3}\right) \ddot{w} = \left(\frac{4\sigma_d A}{l}\right) w, \quad (4.37)$$

sendo $A = 2BH$ e $m = \rho BHL$. Com condições iniciais $w = w_0$ em $t = 0$ para Eq. 4.37, obtém-se

$$w = w_0 \cosh(\gamma t) \quad (4.38)$$

$$\gamma = \left(\frac{12\sigma_d A}{lm} \right)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Considerando uma desaceleração constante proporcionada pela força de resistência da estrutura $A\sigma_d$, e condição inicial V_0 em $t = 0$ podemos escrever a equação da velocidade do indentador

$$V = V_0 - \left(\frac{A\sigma_d}{G} \right) t. \quad (4.40)$$

Quando a taxa do encurtamento da barra se tornar zero, temos o instante t_I do fim da primeira fase, igualando as Eqs. 4.36 e 4.40,

$$V_0 - \left(\frac{A\sigma_d}{G} \right) t_1 = \frac{4}{l} w \dot{w} + \frac{0}{l}. \quad (4.41)$$

Sabendo que $\dot{w} = w_0 \sinh(\gamma t)$, podemos substituir $\dot{w}$ na Eq. 4.41

$$V_0 - \left(\frac{A\sigma_d}{G} \right) t_1 = \frac{2}{l} w_0^2 \gamma \sinh(\gamma t_1)$$

$$V_0 - \left(\frac{A\sigma_d}{G} \right) t_1 - \frac{2}{l} w_0^2 \gamma \sinh(\gamma t_1) = 0. \quad (4.42)$$

Podemos escrever a equação anterior para o sistema protótipo,

$$V_{0_p} - \left(\frac{A_p \sigma_{d_p}}{G_p} \right) t_{1_p} - \frac{2}{l_p} w_{0_p}^2 \gamma_p \sinh(\gamma_p t_{1_p}) = 0 \quad (4.43)$$

$$V_{0_p} - \left(\frac{B_p H_p \sigma_{d_p}}{G_p} \right) t_{1_p} - \frac{2}{l_p} w_{0_p}^2 \gamma_p \sinh(\gamma_p t_{1_p}) = 0, \quad (4.44)$$

com

$$\gamma_p = \left(\frac{12\sigma_{d_p} B_p H_p}{l_p M_p} \right)^{1/2}.$$

A Eq. 4.41 também pode ser escrita em termos dos parâmetros do modelo

$$V_{0_m} - \left(\frac{B_m H_m \sigma_{d_m}}{G_m} \right) t_{1_m} - \frac{2}{l_m} w_{0_m}^2 \gamma_m \sinh(\gamma_m t_{1_m}) = 0,$$

substituindo-se as relações $V_{0_m} = \beta_V V_{0_p}$, $B_m = \beta_B B_p$, $H_m = \beta_H H_p$, $l_m = \beta_L l_p$, $\sigma_{d_m} = \beta_{\sigma_d} \sigma_{d_p}$, $G_m = \beta_G G_p$, $M_m = \beta_M M_p$, $t_{1_m} = \beta_t t_{1_p}$ e finalmente $w_{0_m} = \beta_{w_0} w_{0_p}$. Pela geometria da Fig.4.9b e sabendo que a primeira fase é composta por pequenos deslocamentos, $\beta_{w_0} = \beta_{\theta_0} \beta_L = \beta_L$. Assim,

$$\beta_V V_{0_p} - \left(\frac{\beta_B \beta_H \beta_{\sigma_d} \beta_t}{\beta_G} \right) \left(\frac{B_p H_p \sigma_{d_p}}{G_p} \right) t_{1_p} - \left(\beta_L \gamma_m \right) \frac{2w_{0_p}^2}{l_p} \sinh(\gamma_m \beta_t t_{1_p}) = 0 \quad (4.45)$$

e

$$\gamma_m = \left(\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H}{\beta_L \beta_M} \right)^{1/2} \gamma_p. \quad (4.46)$$

Sabemos pelo princípio da homogeneidade que os três termos da Eq. 4.45 possuem unidades de velocidade. O primeiro deles já está escalonado por β_V . Sendo assim, para que as Eqs. 4.44 e 4.45 sejam iguais, precisamos que os outros termos também sejam escalonados por β_V , enquanto o fator interno à função sinh seja unitário

$$\beta_V = \left(\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_t}{\beta_G} \right) \quad (4.47a)$$

$$\beta_V = \left(\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L}{\beta_M} \right)^{1/2} \quad (4.47b)$$

$$\beta_t = \left(\frac{\beta_L \beta_M}{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H} \right)^{1/2} \quad (4.47c)$$

Inserindo a Eq. 4.47c em 4.47a e elevando ao quadrado, temos

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d}^2 \beta_B^2 \beta_H^2}{\beta_G^2} \frac{\beta_L \beta_M}{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H}$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L \beta_M}{\beta_G^2}. \quad (4.48)$$

Igualando β_V das Eq. 4.47b e 4.48

$$\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L}{\beta_M} = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L \beta_M}{\beta_G^2}$$

$$\beta_G = \beta_M. \quad (4.49)$$

Esse resultado reforça a importância da relação de massas encontrada em outros tipos de estrutura, Seções 4.1.1 e 4.1.2 e também é endossada pela discussão de experimentos de Tam e Calladine [68] e Tam [70] onde comentam a relevância da razão de massa para o comportamento da estrutura impactada. Além disso, tal relação está inserida como razão r no operador da Eq. 3.44.

Para a segunda fase, de desenvolvimento das rótulas plásticas, Zhang e Yu [69] apresentam equacionamento em função das variáveis da Fig. 4.10,

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2 (m + G) \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + M_1 + M_2}{L^2 \left[\frac{m}{3} + (m + G) \sin^2(\theta) \right]} = 0 \quad (4.50)$$

com

$$M_1 = \begin{cases} 0.25BH^2\sigma_d & \text{para } \dot{\theta} > 0 \text{ e } \sigma_d = \sigma_d(\dot{\epsilon} = \dot{\theta}/8) \\ \leq 0.25BH^2\sigma_0 & \text{para } \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

$$M_2 = \begin{cases} 0.25BH^2\sigma_d & \text{para } \dot{\theta} > 0 \text{ e } \sigma_d = \sigma_d(\dot{\epsilon} = \dot{\theta}/4) \text{ [67]} \\ \leq 0.25BH^2\sigma_0 & \text{para } \dot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (4.52)$$

Figura 4.10 Modelo com quatro rótulas plásticas proposto por Zhang e Yu [69] para a ECD na representação da segunda fase, de desenvolvimento das rótulas plásticas. Imagem adaptada de [69].

Escrevendo a equação para o segundo estágio em termo de variáveis do modelo, obtemos

$$\ddot{\theta}_m + \frac{L_m^2 (M_m + G_m) \sin(\theta_m) \cos(\theta_m) \dot{\theta}_m^2 + M_{1m} + M_{2m}}{L_m^2 \left[\frac{M_m}{3} + (M_m + G_m) \sin^2(\theta_m) \right]} = 0. \quad (4.53)$$

Fazendo as mesmas substituições do primeiro estágio, além de considerar que $\theta_m = \theta_p$, $\dot{\theta}_m = \dot{\theta}_p / \beta_t$ e $\ddot{\theta}_m = \ddot{\theta}_p / \beta_t^2$, reescrevemos a Eq. 4.53

$$\frac{\ddot{\theta}_p}{\beta_t^2} + \frac{\beta_L^2 L_p^2 (\beta_M M_p + \beta_G G_p) \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p^2 + M_{1m} + M_{2m}}{\beta_t^2 \beta_L^2 L_p^2 \left[\frac{\beta_M M_p}{3} + (\beta_M M_p + \beta_G G_p) \sin^2(\theta_p) \right]} = 0. \quad (4.54)$$

Conforme princípio da homogeneidade, os termos possuem unidades de rad/s^2 e, portanto, são escalonados por β_t^2 , assim o primeiro termo naturalmente possui tal fator, enquanto que o segundo pode ser escrito como

$$\frac{\beta_L^2 L_p^2 (\beta_M M_p + \beta_G G_p) \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p^2}{\beta_t^2 \beta_L^2 L_p^2 \left[\frac{\beta_M M_p}{3} + (\beta_M M_p + \beta_G G_p) \sin^2(\theta_p) \right]}$$

e fazendo $\beta_G = \beta_M$,

$$\frac{\beta_G (M_p + G_p) \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p^2}{\beta_G \beta_t^2 \left[\frac{M_p}{3} + (M_p + G_p) \sin^2(\theta_p) \right]} = \frac{(M_p + G_p) \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p^2}{\beta_t^2 \left[\frac{M_p}{3} + (M_p + G_p) \sin^2(\theta_p) \right]}. \quad (4.55)$$

Portanto, fazendo $\beta_G = \beta_M$ conseguimos a relação de β_t^{-2} . Resta avaliar M_{1m} e M_{2m} .

$$\frac{M_{1m}}{\beta_L^2 L_p^2 \left[\frac{\beta_M M_m}{3} + (\beta_M M_m + \beta_G G_m) \sin^2(\theta_p) \right]},$$

$$\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2 M_{1_p}}{\beta_L^2 L_p^2 \left[\frac{\beta_M M_p}{3} + (\beta_M M_p + \beta_G G_p) \sin^2 (\theta_p) \right]},$$

com $\beta_G = \beta_M$

$$\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2 M_{1_p}}{\beta_L^2 \beta_M L_p^2 \left[\frac{M_p}{3} + (M_p + G_p) \sin^2 (\theta_p) \right]}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2}{\beta_L^2 \beta_M} = \frac{1}{\beta_t^2}$$

$$\beta_t^2 = \frac{\beta_L^2 \beta_M}{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2}$$

mas $\beta_M = \beta_\rho \beta_B \beta_H \beta_L$

$$\beta_t^2 = \frac{\beta_L^2 \beta_\rho \beta_B \beta_H \beta_L}{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H^2}$$

$$\beta_t^2 = \frac{\beta_\rho \beta_L^3}{\beta_{\sigma_d} \beta_H}.$$

Sabemos que podemos escrever $\beta_t = \beta_L / \beta_V$, pois V_0 da massa de impacto está na direção de L então

$$\frac{\beta_L^2}{\beta_V^2} = \frac{\beta_\rho \beta_L^3}{\beta_{\sigma_d} \beta_H}$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H \beta_L^2}{\beta_\rho \beta_L^3}$$

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H}{\beta_\rho \beta_L}. \quad (4.56)$$

Mas, para que β_V da Eq. 4.56 seja igual à Eq. 4.48

$$\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H}{\beta_\rho \beta_L} = \frac{\beta_{\sigma_d} \beta_B \beta_H \beta_L \beta_M}{\beta_G^2}$$

$$\frac{\beta_\rho \beta_B \beta_L^2 \beta_M}{\beta_G^2} = 1,$$

com $\beta_G = \beta_M$ do primeiro estágio e $\beta_M = \beta_\rho \beta_B \beta_H \beta_L$

$$\frac{\beta_\rho \beta_B \beta_L^2}{\beta_\rho \beta_B \beta_H \beta_L} = 1$$

$$\frac{\beta_L}{\beta_H} = 1, \quad (4.57)$$

que juntamente com a Eq. 4.56 fornecem

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d}}{\beta_\rho}}. \quad (4.58)$$

Ou seja, para que o segundo estágio seja relacionável entre dois sistemas, é necessário que não haja distorção geométrica em L ou H , $\beta_L = \beta_H = \beta$, além de $\beta_G = \beta_M$. Tais resultados são importantes pois mostram que a largura B da chapa não se mostra relevante, a não ser pela massa a ser corrigida através de β_M , fato que pode ser observado por causa do estado plano de deformação do problema. Além disso, a Eq. 4.58 também satisfaz a primeira fase de $\beta_G = \beta_M$, sendo suficiente para relacionar modelo e protótipo em ambas as fases.

Em um estudo sobre similaridade para distorções geométricas, Oshiro e Alves [60] aplicaram um método de aproximação de modo a alterar a velocidade para compensar distorções em B da ECD. Importante notar que o método daria resultados exatos se fosse alterada a massa de impacto na mesma proporção que B , que altera diretamente a massa da estrutura, i.e., $\beta_M = \beta_G$, sem que fosse necessário cálculos de expoentes ou qualquer aproximação em termos de velocidade. Sendo a relação de massas relevante para essa estrutura, basta mantê-la constante, conforme razão r do operador da Eq. 3.44 do Item 3.3.2.

Em estudo anterior sobre o comportamento da ECD, Tam [70] realizou um extenso programa de experimentos, incluindo variação da massa da ECD para investigar o efeito da relação de massas. Entretanto, no método de variar a massa da estrutura foi utilizado um B maior. Se, ao invés de aumentar B , tivesse modificado somente a densidade e mantido as demais propriedades mecânicas (difícil experimentalmente), teria chegado à mesma conclusão da Eq. 4.56, sendo capaz de relacionar diferentes materiais (aço e alumínio, conforme seu trabalho) calculando V_0 e G apropriadamente, permitindo sempre a variação de B .

As modelagens da primeira e segunda fase aqui apresentadas permitem a inclusão dos efeitos da taxa de deformação conforme lei viscoplástica de interesse. Assim, a tensão dinâmica σ_d é escrita em função de $\dot{\epsilon}_{\text{fase I}} = V_0/(2L)$ e se usarmos a lei viscoplástica de Johnson-Cook com β_{σ_d} da Eq. 4.33, obteremos

$$\beta_V^2 = \frac{\beta_{\sigma_0}}{\beta_\rho} \frac{\left[1 + C_m \ln \left(\frac{\beta_V \dot{\epsilon}_p}{\beta \dot{\epsilon}_{0m}} \right)\right]}{\left[1 + C_p \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{0p}} \right)\right]} \quad (4.59)$$

que pode ser resolvido usando $\dot{\epsilon}_{\text{fase I}}$ ou através da aproximação do Item 4.1.3. Quanto à segunda fase, as Eqs. 4.51 e 4.52 nos fornecem as tensões dinâmicas em função de diferentes $\dot{\theta}$. Ainda que possamos estimar o acréscimo de tensão devido a esse efeito, seria necessária uma dupla aproximação, tanto com relação a uma média $\bar{\epsilon}$ para cálculo de $\overline{M_1}$ e depois $\overline{M_2}$ representativo para todo o evento, como um valor de $\bar{\epsilon}$ representando tanto $\overline{M_1}$ como $\overline{M_2}$. Portanto mostra-se bastante interessante o uso da lei de Johnson-Cook e o método aqui proposto, visto que o cálculo de β_V variará pouco em função de $\dot{\epsilon}$ e $\dot{\theta}$, e

minimizará os desvios relacionados à adoção de um valor específico baseado na primeira ou segunda fase e ainda permitindo o uso de materiais diferentes. A influência da aproximação e os efeitos da taxa de deformação serão avaliados através de simulação numérica, item 4.2.3.

4.2 Análise Numérica

Nesta seção serão avaliadas duas estruturas e três carregamentos diferentes. Inicialmente serão apresentados e discutidos os resultados provenientes de simulação numérica de impacto contra uma placa circular. Em seguida, a mesma placa passará a sofrer um carregamento impulsivo. Por fim, a ECD será solicitada para se investigar a representatividade das leis até aqui apresentadas. Para os três casos de carregamento serão realizadas análises nas quais se varia β , β_ρ , β_{σ_0} e $\beta_{H'}$.

4.2.1 Impacto contra placa

A placa circular da Fig. 4.11a foi modelada no código de elementos finitos comercial LS-Dyna. A geometria da placa foi simplificada considerando axissimetria, e discretizada com elementos quadriláteros de integração completa, sendo 300 ao longo do raio e 8 na espessura, totalizando 2400 elementos. Para todos os casos foi utilizada a mesma malha de elementos finitos, com contato entre os elementos modelados por algoritmo de penalidade, sem atrito¹, diferindo apenas pela aplicação dos fatores de escala β e a distorção da espessura dentro da escala $\beta_{H'} = \beta_H / \beta$. Os materiais da placa foram modelados com a lei de Johnson-Cook, cujos parâmetros se encontram na Tab. 4.2. Quanto ao indentador, um cilindro com ponta semiesférica foi considerado como rígido, de massa $G = 120\text{g}$ e $V_0 = 195\text{m/s}$ para o protótipo, cujos fatores possuem o valor intermediário para todos os fatores de escala. A simulação foi realizada considerando integração explícita no tempo. Foi criada uma série de programas em MATLAB para auxiliar o processo. O primeiro deles aplicou os fatores de escala na geometria e condições iniciais para criar os arquivos de entrada do código de elementos finitos. O segundo extraiu as informações dos arquivos de resultado do indentador e das coordenadas dos nós da linha média. Por fim, o último aplicava os fatores de escala aos resultados para então serem criados os gráficos discutidos a seguir.

Tabela 4.2 Parâmetros do material de referência, cujos dados se encontram no Apêndice D.

	ρ [kg/mm ³]	Mód. Elast. [GPa]	σ_Y [MPa]	C [-]	$\dot{\epsilon}_0$ [1/s]
Titânio (sem efeitos de taxa)	4430	142	991	0,000	1e-4
Titânio (com efeitos de taxa)	4430	142	991	0,11	1e-4

A curva do material de referência, Fig. 4.11b, foi obtida a partir de ensaio de caracterização de uma amostra de titânio utilizado nos ensaios experimentais da Seção 4.3. Nos modelos, a espessura e o raio da placa protótipo foram escalonados conforme β_H e β , respectivamente. Quanto ao material, os parâmetros foram alterados conforme Tab. 4.3, ou seja, a densidade foi multiplicada pelo fator β_ρ enquanto que a curva tensão vs. deformação, a porção plástica e o módulo de elasticidade por β_{σ_0} . Dessa forma, definimos casos hipotéticos onde um fator β_{σ_0} escalar é capaz de representar perfeitamente a relação entre diferentes curvas tensão versus deformação. Considerando essas permutações,

¹*CONTACT_2D_AUTOMATIC_SINGLE_SURFACE.

Figura 4.11 (a) Carregamento e condições de contorno para a simulação de impacto contra placa circular, $H = 4,8$ e $\phi = 240\text{mm}$. (b) Curva do material de referência empregado e (c) malha em elementos finitos da placa e indentador.

foram realizadas $3^4 = 81$ simulações para um caso onde não há sensibilidade à taxa de deformação, lado esquerdo das Figs. 4.12-4.14 e o mesmo número onde esse efeito é considerado, lado direito. Os fatores para o caso viscoplástico são apresentados na Tab. 4.4.

Tabela 4.3 Níveis dos fatores utilizados para avaliação de modelos nas análises numéricas. Para as curvas de material dos modelos, β_{σ_0} é aplicado para o Módulo Elástico e para cada valor da curva tensão versus deformação.

Fatores		Níveis	
Escala, β	1	1/100	100
Espessura, $\beta_{H'}$	1	2/3	3/2
Tensão de referência, β_{σ_0}	1	1/5	5
Densidade, β_ρ	1	1/5	5

O primeiro quesito avaliado foi a influência da densidade, variando β_ρ , cujos resultados se encontram nos gráficos da Fig. 4.12. A referência é indicada pela curva sólida em preto. O comportamento da estrutura se altera quando é considerada a influência da taxa de deformação no comportamento do material. Nas Figs. 4.12a e 4.12b, o efeito fica evidente pois as placas realizam a absorção da mesma energia de impacto com menores deslocamentos, por causa das tensões maiores oriundas da formulação da tensão dinâmica. Tanto o modelo com menor massa $\beta_\rho = 1/5$, como aquele de maior massa, fornecem resultados muito próximos da referência, sendo praticamente indistinguíveis.

Nas Figs. 4.12c e 4.12d são mostradas as forças resultantes no indentador em função do deslocamento do mesmo. É possível observar o efeito da taxa de deformação, no gráfico à direita, revelado pela maior força e menor deslocamento, condizente com a ideia de absorção de mesma energia em

Tabela 4.4 Sumário dos fatores de escala para os modelos avaliados numericamente com variação de β , β_H , β_{c_0} e β_ρ , para carregamentos de impacto de alta velocidade ($V = 195\text{m/s}$, $G = 120\text{g}$), impulso ($V_0 = 195\text{m/s}$) e ECD ($V_0 = 7,5\text{m/s}$, $G = 108\text{kg}$).

Modelo	β	$\beta_{H'}$	β_H	β_{c_0}	β_ρ	β_V	β_G	β_σ	β_ε	β_t	β_F
1	1	1	1	1	1	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
2	1	1	1	1	1/5	2,2453E+00	2,000E-01	1,0083E+00	2,2453E+00	4,4538E-01	1,0083E+00
3	1	1	1	1	5	4,4536E-01	5,000E+00	9,9175E-01	4,4536E-01	2,2454E+00	9,9175E-01
4	1	1	1	1/5	1	4,4536E-01	1,000E+00	1,9835E-01	4,4536E-01	2,2454E+00	1,9835E-01
5	1	1	1	1/5	1/5	1,000E+00	2,000E-01	2,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	2,000E-01
6	1	1	1	1/5	5	1,9834E-01	5,000E+00	1,9670E-01	1,9834E-01	5,0418E+00	1,9670E-01
7	1	1	1	5	1	2,2453E+00	1,000E+00	5,0413E+00	2,2453E+00	4,4538E-01	5,0413E+00
8	1	1	1	5	1/5	5,0411E+00	2,000E-01	5,0825E+00	5,0411E+00	1,9837E-01	5,0825E+00
9	1	1	1	5	5	1,000E+00	5,000E+00	5,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	5,000E+00
10	1	2/3	2/3	1	1	6,6528E-01	6,667E-01	9,9584E-01	6,6528E-01	1,0021E+00	4,4260E-01
11	1	2/3	2/3	1	1/5	1,4938E+00	1,3333E-01	1,0041E+00	1,4938E+00	4,4630E-01	4,4626E-01
12	1	2/3	2/3	1	5	2,9629E-01	3,3333E+00	9,8759E-01	2,9629E-01	2,2501E+00	4,3893E-01
13	1	2/3	2/3	1/5	1	2,9629E-01	6,667E-01	1,9752E-01	2,9629E-01	2,2501E+00	8,7785E-02
14	1	2/3	2/3	1/5	1/5	6,6528E-01	1,3333E-01	1,9917E-01	6,6528E-01	1,0021E+00	8,8519E-02
15	1	2/3	2/3	1/5	5	1,3195E-01	3,3333E+00	1,9587E-01	1,3195E-01	5,0525E+00	8,7052E-02
16	1	2/3	2/3	5	1	1,4938E+00	6,667E-01	5,0205E+00	1,4938E+00	4,4630E-01	2,2313E+00
17	1	2/3	2/3	5	1/5	3,3539E+00	1,3333E-01	5,0617E+00	3,3539E+00	1,9878E-01	2,2497E+00
18	1	2/3	2/3	5	5	6,6528E-01	3,3333E+00	4,9792E+00	6,6528E-01	1,0021E+00	2,2130E+00
19	1	3/2	3/2	1	1	1,5031E+00	1,500E+00	1,0042E+00	1,5031E+00	9,9793E-01	2,2594E+00
20	1	3/2	3/2	1	1/5	3,3749E+00	3,000E-01	1,0124E+00	3,3749E+00	4,4446E-01	2,2779E+00
21	1	3/2	3/2	1	5	6,6945E-01	7,500E+00	9,9590E-01	6,6945E-01	2,2407E+00	2,2408E+00
22	1	3/2	3/2	1/5	1	6,6945E-01	1,500E+00	1,9918E-01	6,6945E-01	2,2407E+00	4,4816E-01
23	1	3/2	3/2	1/5	1/5	1,5031E+00	3,000E-01	2,0083E-01	1,5031E+00	9,9793E-01	4,5187E-01
24	1	3/2	3/2	1/5	5	2,9814E-01	7,500E+00	1,9753E-01	2,9814E-01	5,0312E+00	4,4444E-01
25	1	3/2	3/2	5	1	3,3749E+00	1,500E+00	5,0621E+00	3,3749E+00	4,4446E-01	1,1390E+01
26	1	3/2	3/2	5	1/5	7,5771E+00	3,000E-01	5,1033E+00	7,5771E+00	1,9796E-01	1,1482E+01
27	1	3/2	3/2	5	5	1,5031E+00	7,500E+00	5,0208E+00	1,5031E+00	9,9793E-01	1,1297E+01
28	1/100	1	1/100	1	1	1,0233E+00	1,000E-06	1,0472E+00	1,0233E+02	9,7719E-03	1,0472E-04
29	1/100	1	1/100	1	1/5	2,2973E+00	2,000E-07	1,0555E+00	2,2973E+02	4,3530E-03	1,0555E-04
30	1/100	1	1/100	1	5	4,5585E-01	5,000E-06	1,0390E+00	4,5585E+01	2,1937E-02	1,0390E-04
31	1/100	1	1/100	1/5	1	4,5585E-01	1,000E-06	2,0780E-01	4,5585E+01	2,1937E-02	2,0780E-05
32	1/100	1	1/100	1/5	1/5	1,0233E+00	2,000E-07	2,0945E-01	1,0233E+02	9,7719E-03	2,0945E-05
33	1/100	1	1/100	1/5	5	2,0305E-01	5,000E-06	2,0614E-01	2,0305E+01	4,9249E-02	2,0614E-05
34	1/100	1	1/100	5	1	2,2973E+00	1,000E-06	5,2774E+00	2,2973E+02	4,3530E-03	5,2774E-04
35	1/100	1	1/100	5	1/5	5,1569E+00	2,000E-07	5,3187E+00	5,1569E+02	1,9392E-03	5,3187E-04
36	1/100	1	1/100	5	5	1,0233E+00	5,000E-06	5,2361E+00	1,0233E+02	9,7719E-03	5,2361E-04
37	1/100	2/3	1/150	1	1	6,8087E-01	6,667E-07	1,0431E+00	6,8087E+01	9,7914E-03	4,6359E-05
38	1/100	2/3	1/150	1	1/5	1,5285E+00	1,3333E-07	1,0513E+00	1,5285E+02	4,3616E-03	4,6725E-05
39	1/100	2/3	1/150	1	5	3,0329E-01	3,3333E-06	1,0348E+00	3,0329E+01	2,1981E-02	4,5992E-05
40	1/100	2/3	1/150	1/5	1	3,0329E-01	6,667E-07	2,0696E-01	3,0329E+01	2,1981E-02	9,1984E-06
41	1/100	2/3	1/150	1/5	1/5	6,8087E-01	1,3333E-07	2,0861E-01	6,8087E+01	9,7914E-03	9,2717E-06
42	1/100	2/3	1/150	1/5	5	1,3509E-01	3,3333E-06	2,0531E-01	1,3509E+01	4,9349E-02	9,1250E-06

Tabela 4.4

Sumário dos fatores de escala para os modelos avaliados numericamente com variação de β , β_H , β_{v_0} e β_ρ , para os carregamentos de impacto de alta velocidade ($V = 195\text{m/s}$, $G = 120\text{g}$), impulso ($V_0 = 195\text{m/s}$) e ECD ($V_0 = 7,5\text{m/s}$, $G = 108\text{kg}$).

Modelo	β	β_H	β_H	β_{v_0}	β_ρ	β_v	β_G	β_r	β_i	β_t	β_F
43	1/100	2/3	1/150	5	1	1,5285E+00	6,6667E-07	5,2566E+00	1,5285E+02	4,3616E-03	2,3363E-04
44	1/100	2/3	1/150	5	1/5	3,4312E+00	1,3333E-07	5,2979E+00	3,4312E+02	1,9430E-03	2,3546E-04
45	1/100	2/3	1/150	5	5	6,8087E-01	3,3333E-06	5,2154E+00	6,8087E+01	9,7914E-03	2,3179E-04
46	1/100	3/2	3/200	1	1	1,5381E+00	1,5000E-06	1,0514E+00	1,5381E+02	9,7526E-03	2,3656E-04
47	1/100	3/2	3/200	1	1/5	3,4527E+00	3,0000E-07	1,0596E+00	3,4527E+02	4,3445E-03	2,3842E-04
48	1/100	3/2	3/200	1	5	6,8514E-01	7,5000E-06	1,0431E+00	6,8514E+01	2,1893E-02	2,3471E-04
49	1/100	3/2	3/200	1/5	1	6,8514E-01	1,5000E-06	2,0863E-01	6,8514E+01	2,1893E-02	4,6941E-05
50	1/100	3/2	3/200	1/5	1/5	1,5381E+00	3,0000E-07	2,1028E-01	1,5381E+02	9,7526E-03	4,7312E-05
51	1/100	3/2	3/200	1/5	5	3,0519E-01	7,5000E-06	2,0698E-01	3,0519E+01	4,9150E-02	4,6570E-05
52	1/100	3/2	3/200	5	1	3,4527E+00	1,5000E-06	5,2982E+00	3,4527E+02	4,3445E-03	1,1921E-03
53	1/100	3/2	3/200	5	1/5	7,7504E+00	3,0000E-07	5,3395E+00	7,7504E+02	1,9354E-03	1,2014E-03
54	1/100	3/2	3/200	5	5	1,5381E+00	7,5000E-06	5,2569E+00	1,5381E+02	9,7526E-03	1,1828E-03
55	100	1	100	1	1	9,7609E-01	1,0000E+06	9,5276E-01	9,7609E-03	1,0245E+02	9,5276E+03
56	100	1	100	1	1/5	2,1920E+00	2,0000E+05	9,6102E-01	2,1920E-02	4,5619E+01	9,6102E+03
57	100	1	100	1	5	4,3463E-01	5,0000E+06	9,4450E-01	4,3463E-03	2,3008E+02	9,4450E+03
58	100	1	100	1/5	1	4,3463E-01	1,0000E+06	1,8890E-01	4,3463E-03	2,3008E+02	1,8890E+03
59	100	1	100	1/5	1/5	9,7609E-01	2,0000E+05	1,9055E-01	9,7609E-03	1,0245E+02	1,9055E+03
60	100	1	100	1/5	5	1,9352E-01	5,0000E+06	1,8725E-01	1,9352E-03	5,1674E+02	1,8725E+03
61	100	1	100	5	1	2,1920E+00	1,0000E+06	4,8051E+00	2,1920E-02	4,5619E+01	4,8051E+04
62	100	1	100	5	1/5	4,9226E+00	2,0000E+05	4,8464E+00	4,9226E-02	2,0315E+01	4,8464E+04
63	100	1	100	5	5	9,7609E-01	5,0000E+06	4,7638E+00	9,7609E-03	1,0245E+02	4,7638E+04
64	100	2/3	200/3	1	1	6,4931E-01	6,6667E+05	9,4860E-01	6,4931E-03	1,0267E+02	4,2160E+03
65	100	2/3	200/3	1	1/5	1,4582E+00	1,3333E+05	9,5686E-01	1,4582E-02	4,5718E+01	4,2527E+03
66	100	2/3	200/3	1	5	2,8911E-01	3,3333E+06	9,4034E-01	2,8911E-03	2,3059E+02	4,1793E+03
67	100	2/3	200/3	1/5	1	2,8911E-01	6,6667E+05	1,8807E-01	2,8911E-03	2,3059E+02	8,3586E+02
68	100	2/3	200/3	1/5	1/5	6,4931E-01	1,3333E+05	1,8972E-01	6,4931E-03	1,0267E+02	8,4320E+02
69	100	2/3	200/3	1/5	5	1,2873E-01	3,3333E+06	1,8642E-01	1,2873E-03	5,1790E+02	8,2852E+02
70	100	2/3	200/3	5	1	1,4582E+00	6,6667E+05	4,7843E+00	1,4582E-02	4,5718E+01	2,1263E+04
71	100	2/3	200/3	5	1/5	3,2747E+00	1,3333E+05	4,8256E+00	3,2747E-02	2,0358E+01	2,1447E+04
72	100	2/3	200/3	5	5	6,4931E-01	3,3333E+06	4,7430E+00	6,4931E-03	1,0267E+02	2,1080E+04
73	100	3/2	150	1	1	1,4673E+00	1,5000E+06	9,5692E-01	1,4673E-02	1,0223E+02	2,1531E+04
74	100	3/2	150	1	1/5	3,2952E+00	3,0000E+05	9,6517E-01	3,2952E-02	4,5521E+01	2,1716E+04
75	100	3/2	150	1	5	6,5337E-01	7,5000E+06	9,4866E-01	6,5337E-03	2,2958E+02	2,1345E+04
76	100	3/2	150	1/5	1	6,5337E-01	1,5000E+06	1,8973E-01	6,5337E-03	2,2958E+02	4,2690E+03
77	100	3/2	150	1/5	1/5	1,4673E+00	3,0000E+05	1,9138E-01	1,4673E-02	1,0223E+02	4,3061E+03
78	100	3/2	150	1/5	5	2,9092E-01	7,5000E+06	1,8808E-01	2,9092E-03	5,1560E+02	4,2318E+03
79	100	3/2	150	5	1	3,2952E+00	1,5000E+06	4,8259E+00	3,2952E-02	4,5521E+01	1,0858E+05
80	100	3/2	150	5	1/5	7,3997E+00	3,0000E+05	4,8672E+00	7,3997E-02	2,0271E+01	1,0951E+05
81	100	3/2	150	5	5	1,4673E+00	7,5000E+06	4,7846E+00	1,4673E-02	1,0223E+02	1,0765E+05

menor deslocamento. Da mesma forma que o deslocamento, a diferença entre modelos e referência é bem pequena. Por fim, o perfil final da placa é apresentado nas Figs. 4.12e e 4.12f, donde se conclui da excelente representatividade dos modelos, tanto para densidades maiores ou menores que as da referência.

Na sequência foram avaliados os efeitos de escala $\beta = 1/100$, dos três níveis de distorção da espessura $\beta_{H'}$ e de propriedade mecânica do material, β_{σ_0} , Fig. 4.13. Ao analisar os deslocamentos, Fig. 4.13a, nota-se um destacamento das curvas ao redor de $t = 100\mu s$, formando 3 distintos grupos, com concavidades ligeiramente distintas entre si. Estes grupos são compostos pelas diferentes distorções em $\beta_{H'}$, sendo o mais baixo composto por $\beta_{H'} = 1$, o das linhas traço-e-ponto referente à $\beta_{H'}$ maior e, por fim o das linhas tracejadas, menor. Ao considerar a taxa de deformação no material, Fig. 4.13b, o grupo das curvas de $\beta_{H'} = 2/3$ apresentam deslocamentos maiores, enquanto que os outros casos se aproximam da referência, ainda que com tendência levemente distinta, um abaulamento ao redor de $t = 180$. Com relação à variação de β_{σ_0} , não é possível observar qualquer diferença, sendo os três níveis similares.

A distinção entre os três grupos supracitados é mais clara nos resultados de Força vs. deslocamento, Fig. 4.13c e 4.13d. Quando a taxa de deformação não é considerada, modelos com $\beta_{H'} = 2/3$ demonstram resistência relativa menor para pequenos deslocamentos, enquanto se aproximam da referência em torno de metade do deslocamento máximo, instante onde a propagação da onda plástica atinge o suporte. O oposto ocorre para $\beta_{H'} = 3/2$. Embora o pico de força inicial seja um pouco diferente, as curvas são próximas da referência, até que se distanciam na metade do deslocamento máximo.

Quando a força de cisalhamento transversa² é deslizada até o suporte, a placa passa a resistir pela combinação de esforços de membrana³ e o desenvolvimento das rótulas plásticas. Entretanto, a correção considera apenas a rótula plástica, através de M_0 , fazendo com que os esforços sejam superdimensionados para a espessura maior – $\beta_{H'} = 3/2$ e subdimensionados para a menor. Além disso, a contribuição de cada um desses esforços é diferente, exatamente por causa da distorção de espessura, algo que não ocorreria se fosse mantido $\beta_{H'}$ igual à referência.

Quando se considera a taxa de deformação, Fig. 4.13d, observa-se a tendência crescente da força com o deslocamento para a referência, modelos e espessura não distorcida, que é maior ainda para os de espessura menor, $\beta_{H'} = 2/3$. Ocorre, entretanto, uma tendência de queda da força para o caso da distorção que aumenta a espessura. Isso mostra que, ao distorcemos de forma significativa a espessura, obtemos um comportamento distinto da estrutura, compatível com o obtido na Seção 4.1.2 para vigas. Ainda sim, é importante ressaltar que essa variação está em torno de 10%, capaz de capturar tanto a transição do modo dominante de esforços, como as oscilações ocorridas por propagação de onda. Por fim, o perfil deformado para ambos os casos, Fig. 4.13e e 4.13f, mostra maior proximidade com a referência para o caso de espessuras maiores com taxa de deformação, conseguindo capturar a tendência do perfil da referência. $\beta_{H'}$ menores que 1 proporcionaram maiores deslocamentos, incluindo maior sensibilidade à propagação de onda para o caso de material sem taxa de deformação. É

²Cujo valor da força cortante necessária para plastificação total da seção é dado por $Q_0 = \sigma_0 H/2$, em unidades de comprimento.

³ $N_0 = \sigma_0 H$.

Figura 4.12 Impacto de indentador contra placa e modelos com variação do fator de densidade para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f).

Figura 4.13 Impacto de indentador contra placa e modelos com variação do fator de tensão de referência, espessura e escala $\beta = 1/100$ para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f).

possível observar, novamente, que a variação de β_{σ_0} não proporciona diferença significativa.

Ao considerar a influência da variação de propriedade mecânica e física, β_{σ_0} e β_ρ , obtivemos os resultados da Fig. 4.14. Os deslocamentos escalonados para ambos os casos, com e sem taxa de deformação, mostraram bastante proximidade com a referência, Figs. 4.14a e 4.14b. Quanto às forças, seguiram exatamente a mesma tendência, embora mostrem uma pequena defasagem no caso com taxa de deformação, Figs. 4.14c e 4.14d. Com relação ao perfil deformado, 4.14e e 4.14f, os modelos com taxa de deformação se mostraram iguais entre si e um pouco diferente da referência. Isto pode ser justificado pelas diferenças na componente elástica da deformação, diferentemente no que ocorre para o caso sem taxa de deformação. Em todos os casos, pode-se concluir que a combinação entre mudança de ρ e σ_0 é compensada pela lei, uma vez que para a escala escolhida $\beta = 1/100$, os modelos se mostraram bastante similar entre si. Vale ressaltar que o perfil poderia ser avaliado para o caso de deslocamento máximo, mas se preferiu selecionar o mesmo instante de simulação, onde ainda existia velocidade de retorno da placa. Se não fosse considerada a porção elástica do material, os resultados seriam similares às simulações de Mazzariol, Oshiro e Alves [62].

Todos os modelos investigados forneceram resultados bastante satisfatórios ao se aplicar a lei proposta na seção 3.3.2, operador da Eq. 3.44, confirmando, pelo menos para estes casos, a hipótese desta investigação. Quando se considera o efeito de fatores como β_{σ_0} e β_ρ , sem redução de escala ou taxa de deformação, o método proposto fornece resultados exatos. Entretanto, ao se reduzir a escala β surgem pequenos desvios provavelmente ocasionados pela aproximação do fator de viscoplasticidade, β_{visco} . Os perfis deformados também guardam relação com a referência. Contudo, ao se distorcer a espessura surgem desvios, que podem ser atribuídos à efeitos como a força cisalhante e de membrana, os quais são escalonados de forma diferente dos efeitos de rótulas plásticas, regidos pelo momento M_0 .

Figura 4.14 Impacto de indetador contra placa e modelos com variação do fator de tensão de referência, densidade e escala $\beta = 1/100$ para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f).

4.2.2 Impulso contra placa

A investigação dos efeitos dos diferentes fatores de escala β , $\beta_{H'}$, β_{σ_0} , β_ρ segue com o caso de uma placa circular com carregamento impulsivo, similar ao avaliado no Item 4.1.1. As dimensões de referência são as mesmas da placa circular do Item 4.2.1, com o mesmo material – Tab. 4.2 e os mesmos níveis dos fatores da Tab. 4.3. O modelo numérico é também idêntico, somente com a remoção do indentador, Fig. 4.11c.

Para esse caso específico onde não há massa de impacto G , devemos remover a razão r do operador da Eq. 3.44. Contudo, os fatores de escala calculados são iguais aos do item anterior, visto que o cálculo de β_V foi baseado na Eq. 3.28, que depende apenas de variáveis e parâmetros da estrutura solicitada.

A Fig. 4.15 apresenta os perfis deformados ao final da simulação para materiais não sensíveis à taxa de deformação à esquerda e sensíveis à direita. São avaliados modelos com variação de β e β_ρ , nos três níveis da Tab. 4.3. A Fig. 4.15a mostra que quando não há sensibilidade o método proposto é capaz de relacionar perfeitamente modelos à referência. Quando existe sensibilidade surgem pequenas diferenças de deslocamento final para modelos com $\beta = 1/100$, Fig. 4.15b. Ainda assim, é possível dizer que o método proposto é capaz de relacionar esses modelos à referência.

Figura 4.15 Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação do fator de densidade e escala $\beta = 1/100$ desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b).

Em seguida os efeitos da distorção de $\beta_{H'}$ e β_{σ_0} são avaliados considerando modelos com $\beta = 1/100$. Surgem diferenças similares às do item anterior, mais pronunciadas quando são considerados efeitos de taxa de deformação do que quando não, Figs. 4.16b e a, respectivamente. Essas diferenças podem ser atribuídas a efeitos de força cisalhante e membrana, não consideradas no cálculo de β_V , da mesma forma que explicado para viga impactada, no Item 4.2.1. A diferença é um pouco maior quando os materiais são sensíveis à taxa de deformação, para os modelos com $\beta = 1/100$, pois o perfil foi obtido no mesmo instante escalonado t/β_t e a porção elástica das deformações provavelmente é maior, causando maior oscilação e energia interna não convertida – bastante similar à Fig. 4.13f. Entretanto, é possível notar que essa diferença é pequena se comparada à grande distorção da espessura,

mostrando que considerar M_0 como parâmetro principal de geometria para esse caso não induz a erro grande.

Figura 4.16 Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação da espessura, fator de tensão de referência e escala $\beta = 1/100$ desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b).

Considerando a variação somente dos fatores β_{σ_0} e β_ρ com $\beta = 1/100$ e sem distorção de espessura, nota-se que os resultados de perfil são exatos para os modelos com material não sensível à taxa de deformação, e ligeiramente diferentes quando são sensíveis, Figs. 4.17a e b. Da mesma forma que o ocorrido para os resultados da Fig. 4.15b, esses desvios podem ser atribuídos à solução aproximada para compensar os efeitos de taxa de deformação, β_{visco} . Contudo, novamente pode-se ressaltar que modelos que possuem qualquer combinação dos fatores de tensão β_{σ_0} e densidade β_ρ se tornam relacionáveis quando se utiliza o operador da Eq. 3.44.

Figura 4.17 Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação do fator de densidade e tensão de escoamento para escala $\beta = 1/100$ desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b).

4.2.3 Impacto contra estrutura de chapa dupla (ECD)

A estrutura de chapa dupla da Fig. 4.9a foi modelada para o código de elementos finitos comercial LS-Dyna, considerando integração explícita no tempo. A geometria da ECD foi simplificada considerando estado plano de deformação, e discretizada com elementos quadriláteros de integração completa, sendo 4 na espessura e quantos fossem suficientes no comprimento para que a razão de aspecto do elemento fosse 0,8 vezes menor na altura. Para cada caso foi gerada uma malha diferente em elementos finitos, respeitando os fatores de escala β e $\beta_{H'}$. Assim como as placas circulares, os materiais da ECD também foram modelados com a lei de Johnson-Cook, cujos parâmetros se encontram na Tab. 4.2. Entretanto, não foram considerados modelos sem sensibilidade à taxa de deformação. O protótipo de geometria $H = 3,2\text{mm}$, $L = 50\text{mm}$, $B = 100\text{mm}$ e $\theta_0 = 1,6^\circ$ foi impactado por uma massa de $G = 108\text{kg}$ a $V_0 = 7,5\text{m/s}$, cujos fatores possuem o valor unitário. Foi criada uma série de programas em MATLAB para auxiliar no processo de criação, solução e tratamento dos dados. O primeiro deles aplicou os fatores de escala da Tab. 4.3 na geometria e condições iniciais para criar os arquivos de entrada do código de elementos finitos. O segundo extraiu as informações dos arquivos de resultado do indentador e das coordenadas dos nós da linha média. Por fim, o último corrigiu os resultados segundo os fatores de escala para então serem criados os gráficos discutidos a seguir.

De início, a ECD propõe um desafio a mais. Se, para as placas circulares a direção da velocidade da massa de impacto era paralela ao vetor de espessura, para a ECD ela é perpendicular. Mesmo assim, aplicamos os mesmos fatores do Item 4.2.1 β_V e β_G na massa de impacto e avaliaremos os efeitos. Para o primeiro conjunto avaliado, Fig. 4.18, foram variados os parâmetros β e $\beta_{H'}$, sem distorção de espessura. É possível observar nas curvas de deslocamento no tempo e força por deslocamento da massa, que os modelos conseguem representar o comportamento do protótipo, Figs. 4.18a e b. Quando avaliamos o perfil deformado, não é possível observar diferença entre modelos e protótipo.

Em seguida, avaliamos os modelos com geometria distorcida e densidades diferentes. Nota-se que os deslocamentos são relativamente menores quando reduzimos a espessura e maiores quando a aumentamos, Fig. 4.19a. Com relação à força, Fig. 4.19b, sabemos que a primeira fase da ECD é comandada pela relação entre massas, sendo assim, a distorção de velocidade, com $\beta_G = \beta_M$ não interfere de forma significativa no pico de força. Conforme se desenvolve a rótula, a força é aparentemente maior quando $\beta_{H'} = 2/3$ e menor para o outro caso, ainda sim, sendo bastante próxima da referência. Nota-se maior oscilação após o pico, que certamente seria reduzida se fosse aplicado filtro mais intenso.

O perfil dos modelos, Fig. 4.19c, mostra que o método proposto com uso de β_H é capaz de aproximar o deslocamento vertical da ECD, entretanto fornece deslocamentos laterais relativamente maiores para $\beta_{H'} > 1$ e o oposto para a distorção $\beta_{H'} = 2/3$. Note que os fatores β_H e β são aplicados na direção do impacto – eixo Y – e perpendicularmente, eixo X, respectivamente. Isto equivale a dizer que a correção em função de β_H atua na direção do carregamento e não na da espessura, conforme dito anteriormente.

Importante observar que foi necessário maior deslocamento nos modelos com $\beta_{H'} = 3/2$ para se obter a curva de força e deslocamento similar à da referência, e o oposto para $\beta_{H'} = 2/3$. Além disso, o

Figura 4.18 $[\beta \beta_H \beta_{\sigma_0} \beta_\rho]$ Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de densidade e escala na representação da ECD.

Figura 4.19 $[\beta \beta_{H'} \beta_{\sigma_0} \beta_{\rho}]$ Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de densidade e espessura na representação da ECD.

Figura 4.20 Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de tensão de referência e escala na representação da ECD.

raio de curvatura da dobra parece seguir a espessura, menor para o caso de $\beta_{H'} = 2/3$. Ao multiplicar as coordenadas Y da posição da linha média pelo fator $\beta_{H'}$ i.e., invertendo a tendência de maior deslocamento, é possível aproximar as rótulas superiores, afinal o desenvolvimento da rótula central para x positivo exige o deslocamento das barras em y e as dimensões estão interligadas, invariavelmente. É possível dizer que se obtém resultados bastante satisfatórios tanto em deslocamento como em força.

Os resultados ao variar a geometria distorcida e β_{σ_0} , Fig. 4.20, são análogos aos do caso onde se variou β_ρ , Fig. 4.19.

4.2.4 Resumo etapa numérica

Os resultados de simulações para os casos de impacto de uma esfera contra uma placa, carregamento impulsivo e impacto contra ECD foram apresentados nesta seção. Os fatores de escala de densidade, entre $1/5$ e 5 , são capazes de representar boa parte dos materiais de engenharia comumente utilizados. Por exemplo, se for utilizado para o protótipo um material de densidade intermediária, titânio, cujo $\rho = 4400 \text{ kg/m}^3$, $\beta_\rho = 1/5$ faria com que fossem representados modelos de densidade menores do que a água, comumente encontrados em polímeros. No caso de $\beta_\rho = 5$, teríamos materiais de densidade $\rho = 22000 \text{ kg/m}^3$, como platina e urânio, da classe dos metais mais densos existentes. Sendo assim, as escolhas de β_ρ cobrem boa parte das classes de materiais com as quais trabalhamos.

Com relação à β_{σ_0} , considerando as propriedades do material de referência, temos uma faixa entre 200 e 5000 MPa , também capaz de englobar materiais de diversas classes em ampla extensão.

A definição da escala β permitiu avaliar extremos. Para se ter uma ideia, miniaturas de veículos comercializadas pela fabricante estadunidense *Hot-Wheels* possuem escala $\beta = 1/64$. Navios petroleiros possuem chapas de espessura por volta de 30 mm que, ao serem escalonadas por $\beta = 1/100$, requeriam chapas de $0,3 \text{ mm}$ no modelo. Um navio de 100 m , ou o comprimento de um campo de futebol, seria representado em comprimento em apenas um único metro. Dessa forma, os efeitos de escala ocasionados pela taxa de deformação maior na escala reduzida mostram-se cobertos pelas verificações realizadas, mesmo com altos valores para o fator $\beta_{\dot{\epsilon}}$, Tab. 4.4.

Os resultados encontrados, por fim, podem ser considerados bastante satisfatórios, principalmente por terem sido obtidos diretamente, sem que fossem necessárias etapas intermediárias para cálculo de fatores de correção. Deve-se notar que, apesar de a investigação das equações analíticas de impacto contra placa e ECD – seção 4.1 – indicar que distorções de espessura $\beta_H \neq \beta$ forneceriam resultados não relacionáveis, a distorção definida permite que ambos os modelos consigam capturar, em parte, o comportamento da referência. Quanto à ECD, pode-se afirmar que o deslocamento da massa e a curva força por deslocamento são bastante relacionáveis para as distorções testadas.

4.3 Experimentos

Nas Seções 4.1 e 4.2 foi investigado o comportamento de vigas, placas e a ECD com a finalidade de avaliar a representatividade das leis aqui propostas. Na parte teórica, o material foi considerado como rígido-perfeitamente-viscoplástico, desprezando efeitos como falha e temperatura, priorizando a análise qualitativa. Em seguida, numericamente foram adicionadas à análise a lei viscoplástica de Johnson-Cook, além do encruamento de material. Nesta seção, a investigação se torna mais abrangente, visando avaliar as dificuldades de seleção de material, custo, caracterização dos materiais e, por fim, a análise de resultados de modelos com tensão de escoamento, encruamento, sensibilidade à taxa de deformação e deformação de ruptura bastante distintas quando sujeitos à carga de impacto de baixa e alta velocidade.

4.3.1 Definição e caracterização dos materiais

Para avaliar o método proposto representado pela Eq. 3.44 é necessário utilizar materiais que possuam diferentes densidades, que a relação σ_0/ρ não seja igual, para que elas não se anulem no cálculo de β_V . Além disso, as curvas tensão versus deformação preferencialmente deveriam possuir um ponto claro de escoamento, em detrimento de limites superior e inferior. Seria desejável, também, que os materiais escolhidos tivessem sido estudados por outros autores com a finalidade de reduzir a necessidade de ensaios de caracterização. Por fim, deveriam possuir custo bastante variado, justificando o uso de modelos de materiais distintos.

O material seria adquirido em forma de chapas, sendo assim a limitação da menor espessura seria baseada em disponibilidade no mercado e a maior, em custo. Seriam realizados ensaios de impacto de baixa e alta velocidade em placas circulares. Para se obter tendência, seria definida uma escala intermediária.

Com extensa pesquisa na literatura e fornecedores disponíveis, foram definidos os seguintes materiais a serem utilizados:

- Titânio Ti6Al4v
- Alumínio 1100
- Aço Inox 304
- Cobre Eletrolítico

A menor espessura disponível nos fornecedores para os materiais escolhidos era aproximadamente 1 mm. Com o custo elevado do titânio, não seria possível adquirir chapas com espessura maior que 3 mm. Ficaram então definidas as escalas do estudo: 1/1, 2/3 e 1/3. Foram utilizadas chapas de Al2024-T3 aeronáutico de 3,16 mm existentes no GMSIE para a escala 1/1, enquanto que o custo do cobre para a escala maior impediu sua aquisição. O resumo dos materiais escolhidos é apresentado na Tab. 4.5.

Parte do material adquirido seria utilizado para ensaios experimentais, enquanto a outra para a caracterização de material. As chapas foram então encaminhadas para corte à laser, tanto para con-

Tabela 4.5 Materiais adquiridos em forma de chapas para os ensaios experimentais.

Escala	Material	H [mm]	ρ [kg/m ³]	Custo [R\$]	R\$/cm ³	R\$/kg	Custo Placa (R\$)
1/1	Ti (Ti6Al4v)	3	4340	6044,40	2,08	475,0	607,4
	Al (Al2024-T3)	3	2700	⁽¹⁾ 864,14	⁽¹⁾ 0,33	⁽¹⁾ 120,6	⁽¹⁾ 100,6
	St (ASTM 304)	3	7890	610,00	0,24	31,3	71,40
2/3	Ti (Ti6Al4v)	2	4340	1914,00	1,95	447,3	169,12
	Al (Al1100-h14)	2	2700	200,00	0,10	37,3	8,63
	St (ASTM 304)	2	7890	210,00	0,30	39,1	26,25
	Cu (CC11000)	2	8500	69,00	1,11	125,5	95,63
1/3	Ti (Ti6Al4v)	1	4340	565,25	2,68	616,6	28,99
	Al (Al1100-h14)	1	2700	28,00	0,14	52,7	1,53
	St (ASTM 304)	1	7890	70,00	0,35	45,4	3,82
	Cu (CC11000)	1	8900	184,00	0,93	105,8	10,03

¹ Custo estimado do Alumínio para escala 1/1, liga 2024-T3, espessura 3,175 mm e US\$1,00 = R\$3,50, desconsiderando o frete [71].

fecção de espécimes como para realizar os furos das chapas a serem impactadas. Devido ao custo excessivo deste processo para o Cobre, as placas deste material foram encaminhadas para o corte por jato d'água⁴. Devido à alta resistência da liga de titânio, os espécimes baseados na norma ASTM E8 [72] tiveram sua seção alterada por causa do limite na máquina de tração existente no GMSIE, sendo que conforme se alterava a espessura da chapa, mudava-se também as dimensões gerais, conforme Tab. 4.6, Fig. 4.21 e Apêndice B.

Tabela 4.6 Dimensões dos espécimes para caracterização. Taxa de deformação aproximada pretendida: 10⁻⁴/s para o quase-estático e 10/s para o espécime menor.

Quase-estático					Médias Taxas			
Escala	w_1 [mm]	L_1 [mm]	R_1 [mm]	V_c [mm/min]	w_2 [mm]	L_2 [mm]	R_2 [mm]	V_c [mm/s]
1/1	9	57	3	0,342	3	5	1	50
2/3	6	38	2	0,171	2	5	1	50
1/3	3	19	1	0,114	1	5	1	50

Figura 4.21 Formato geral dos espécimes quase-estáticos, à esquerda, e para médias taxas, à direita. As dimensões utilizadas se encontram na Tab. 4.6 e com $W_p = 25$ mm. Os desenhos detalhados dos espécimes são apresentados no Apêndice B.

Nos primeiros ensaios de tração os espécimes de titânio mostraram extrema fragilidade, provavelmente por alterações na estrutura ocasionadas pelo excesso de calor do processo de corte à laser. Dessa forma, foram confeccionados novos espécimes para todas as escalas dessa liga, desta vez utilizando máquina de comando numérico de corte por jato d'água. Assim, os novos espécimes foram tracionados em uma máquina de ensaios universal⁵, Fig. 4.23a, adquirindo os dados de deslocamento

⁴Equipamento disponível no Departamento de Engenharia de Minas da EPUSP.

⁵Fabricante: Instron, modelo 3365. Limite de 50 kN e 500 mm/s.

Figura 4.22 Espécimes utilizados para caracterização de materiais. (a) Quase-estáticos, de cima para baixo: 1/1 Titânio, 2/3 Alumínio e 1/3 Cobre. (b) Espécimes para caracterização em médias taxas, da esquerda para a direita: Al 1/1, Ti 2/3 e Aço 1/3.

do cabeçote e força da célula de carga. De forma a permitir posterior análise e correlação digital de imagem, o espécime foi pintado com spray branco como fundo e um padrão randômico de gotículas pretas, Fig. 4.24, iluminado com arranjos de LEDs⁶ e fotografado⁷ com frequência entre 1 e 10 fotos/s. Para realizar a análise do padrão de deformação, correlação digital de imagem, foi utilizado programa de MATLAB⁸. Estes resultados foram utilizados para se obter as deformações logarítmicas na direção axial e transversal, fornecendo a variação na largura do espécime. Assumindo que a deformação na direção da espessura seria igual à da transversal foi possível estimar a área instantânea que, juntamente com os dados de força na célula de carga, resultaram em curvas de tensão por deformação logarítmica – procedimento pormenorizado no Apêndice C.

O mesmo procedimento foi utilizado para os ensaios dos espécimes de médias taxas de deformação, realizados em máquina biaxial⁹, Fig. 4.23b. Entretanto, a velocidade do cabeçote não era estável

⁶Visual Instrumentation Corp. Modelo 900445, quatro unidades.

⁷Câmera fotográfica monocromática de 5MPixels modelo Prosilica M2450 da Allied Visions.

⁸NCORR 2D, programa em código aberto criado em MATLAB por pesquisadores do *Georgia Institute of Technology*.

⁹Instron Eletropuls 10000.

Figura 4.23 Máquinas para ensaios de caracterização quase estática (a) e dinâmica (b). Espécimes foram pintados com padrão randômico para posterior análise via correlação digital de imagem.

Figura 4.24 Detalhe de um espécime após ensaio quase-estático para obtenção da curva tensão vs. deformação. O padrão randômico é criado com tintas spray visando registrar o padrão de deformação por meio de fotografia e analisá-lo posteriormente via correção digital de imagem.

como a quase-estática, dificultando a sincronia manual entre ensaio e registro de imagem. A questão foi solucionada com a sincronização da gravação da câmera de alta velocidade¹⁰ através de uma das saídas analógicas, permitindo registrar entre 7000 e 10000 quadros/s.

Foram realizados ensaios destrutivos de tração com cinco réplicas de espécime escalonado para

¹⁰Photron SA5.

cada escala, exceto para o Titânio escala 1/1, Alumínio 1/1 e 2/3, onde foram utilizados quatro espécimes; enquanto que o Titânio 2/3, dois. As curvas tratadas a partir do MATLAB se transformaram em curva média, conforme Figs. 4.25a-e. Para ensaios dinâmicos com o espécime de taxas de deformação intermediárias, a média de ensaios foi de três por escala, exceto Al 1/1 e 1/3. As curvas de tensão dinâmica versus deformação plástica foram comparadas às curvas médias da Fig. 4.25, conforme procedimento apresentado no Apêndice C. Por fim, as curvas de acréscimo de tensão em função da taxa de deformação se encontram na Fig. 4.26, confrontadas com ajustes às leis viscoplásticas de Cowper-Symonds, Norton e Johnson-Cook.

As curvas quase-estáticas médias das amostras de Titânio escalas 1/1, 2/3 e 1/3 são apresentadas na Fig. 4.25a. É possível observar que as três são próximas entre si e possuem deformação de ruptura $\epsilon_u \approx 0,3$. Quanto ao Alumínio 1/1, este possui tensão de escoamento condizente com a literatura [65, 73], com alto encruamento e falha em $\epsilon_u \approx 0,17$, Fig. 4.25b. Com relação às outras escalas, Al 2/3 e 1/3, nota-se tendência próxima à literatura [74] com $\epsilon_u > 0,5$, Fig. 4.25c. Com relação aos aços, Fig. 4.25d seguindo a mesma nomenclatura e sufixo "St", observamos tensões de escoamento e encruamentos bastante próximos entre si. Com relação à ϵ_u , mostrou-se superior à 0,7, para todas as escalas. Por fim, as curvas dos Cobre, Fig. 4.25e, mostraram-se um pouco diferentes entre si. Atenção principal à escala menor, Cu 1/3, que fornece encruamento negativo para $\epsilon > 0,2$, provavelmente devido ao modo de obtenção da chapa de 1mm. Ainda sim, obtém-se alta ductilidade para ambas as espessuras. As tabelas com os dados dos materiais apresentados na Fig. 4.25 se encontram no Apêndice D.

A Fig. 4.26a apresenta os dados da caracterização dinâmica para o material Ti 1/1, com os diferentes pontos de referência como marcadores $\triangle$ em preto e os resultados dos espécimes dinâmicos, como outros marcadores coloridos. É possível notar que a lei viscoplástica de Cowper-Symonds resulta em alta sensibilidade a altas $\dot{\epsilon}$, enquanto os parâmetros de Norton e Johnson-Cook resultam em curvas bastante similares e menos sensíveis à $\dot{\epsilon}$. Os titânios de escala 2/3 e 1/3 se mostram um pouco menos sensíveis à $\dot{\epsilon}$ se comparado à escala 1/1, Figs. 4.26b-c. Os resultados do Al 1/1, Fig. 4.26d, forneceram decréscimo da tensão dinâmica com o aumento da taxa e, considerando a impossibilidade de realizar ensaios em taxas mais elevadas, foi adotado $C = 0,083$ conforme [65]. Quanto às outras escalas de Alumínio, Figs. 4.26e-f, estas se mostraram mais sensíveis que a literatura para a lei de Johnson-Cook [74].

Os aços se mostraram sensíveis à $\dot{\epsilon}$. Os ajustes de Norton e Johnson-Cook são tão próximos que se torna difícil distingui-los, Figs. 4.26g-i. Para os Cobre, Fig. 4.26j-k, os parâmetros que melhor descrevem os dados aparecem tão sensíveis quanto os aços. A informação de todos os materiais, a distorção dentro da escala $\beta_{H'} = \beta_H / \beta$, a tensão de referência σ_0 , seu fator de escala β_{σ_0} e os parâmetros viscoplástico para a lei de Johnson-Cook, C e $\dot{\epsilon}_0$, são apresentados na Tab. 4.7, com as curvas dos materiais antes e após aplicação do fator β_{σ_0} na Fig. 4.27. Importante ressaltar que há pequena distorção de espessura dentro da escala, $\beta_{H'}$ de, no máximo, 10% para o Al 1/3, enquanto que há grande variação de β_{σ_0} , chegando a dez vezes menor, para o mesmo material e escala. Os erros desses parâmetros se mostraram pequenos face ao reduzido número de ensaios, mostrando homogeneidade das propriedades dos materiais.

A propriedade física faltante, a densidade ρ , pode ser obtida por dois métodos: através da propagação de onda ou através do princípio de Arquimedes. Considerando o custo do primeiro e a gratuidade

Figura 4.25 Caracterização quase-estática dos material adquiridos. As curvas sólidas representam a média das curvas σ vs. ϵ para cada escala. A taxa de deformação para todos os ensaios foi de, aproximadamente, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}/s$.

Figura 4.26 Caracterização dinâmica dos material adquiridos. $\triangle$ pretos representam pontos da curva quase estática média, próximo à $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$, enquanto que outros marcadores, diversos pontos das curvas dinâmicas dos espécimes de média taxa de deformação. Curvas sólidas representam ajustes às leis viscoplásticas de Norton, Cowper-Symonds e Johnson-Cook.

Figura 4.26 (Continuação) Caracterização dinâmica dos material adquiridos. $\triangle$ pretos representam pontos da curva quase estática média, próximo à $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$, enquanto que outros marcadores, diversos pontos das curvas dinâmicas dos espécimes de média taxa de deformação. Curvas sólidas representam ajustes às leis viscoplásticas de Norton, Cowper-Symonds e Johnson-Cook.

Tabela 4.7 Propriedades mecânicas dos materiais adquiridos segundo caracterização estática e dinâmica. Parâmetros viscoplásticos C e ϵ_0 conforme lei viscoplástica de Johnson-Cook [65].

Escala β	Material	H [mm]	$\beta_{H'}$ [-]	σ_0 [MPa]	β_{σ_0} [-]	C [-]	ϵ_0 [10 ⁻⁴ /s]
1/1	Ti	3,2	1	990,48 ± 4,48	1,000	0,011 ± 0,002	1,0
	Al	3,163	0,9884	317,75 ± 5,74	0,321 ± 0,073	0,083	1,0
	St	3,2	1,006	343,60 ± 2,46	0,347 ± 0,004	0,010 ± 0,003	1,0
2/3	Ti	2,11	0,9891	932,18 ± 7,81	0,941 ± 0,013	0,004 ± 0,002	1,0
	Al	2,07	0,9703	126,91 ± 2,49	0,128 ± 0,003	0,005 ± 0,001	1,0
	St	2,05	0,9609	285,63 ± 7,72	0,288 ± 0,010	0,016 ± 0,002	1,0
	Cu	2,13	0,9984	237,73 ± 0,78	0,240 ± 0,002	0,009 ± 0,001	1,0
1/3	Ti	1,06	0,9938	902,59 ± 4,89	0,911 ± 0,008	0,005 ± 0,001	1,0
	Al	0,98	0,9188	101,10 ± 1,53	0,102 ± 0,002	0,016 ± 0,003	1,0
	St	0,95	0,8906	307,11 ± 8,03	0,310 ± 0,010	0,014 ± 0,003	1,0
	Cu	1,05	0,9844	184,95 ± 4,11	0,187 ± 0,005	0,012 ± 0,002	1,0

O valor da quantidade ψ , σ_0 por exemplo, é considerado como $\psi = \bar{\psi} \pm \frac{\zeta}{\sqrt{n-1}}$. Ou seja, a média de $\bar{\psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i}{n}$ dos n espécimes com o erro em função do desvio padrão ζ . Não foram propagadas as incertezas da medição da seção dos espécimes ou da célula de carga. O parâmetro C e seu erro padrão foram fornecidos pela função de ajuste *fit* do Matlab, sendo considerado n todos os pontos de acréscimo fornecidos.

Figura 4.27 Curvas dos materiais para cada escala (a) e com aplicação do fator $\beta_{\sigma_0} = \sigma_{0m}/\sigma_{0p}$ (b). O início de todas as curvas se sobrepõe à da referência, Titânio 1/1, enquanto que os diferentes encruamentos proporcionam curvas relativas próximas Cu e Al em escalas 2/3 e 1/3 e distantes, aços e Al 1/1.

Figura 4.28 Arranjo para cálculo das densidades. (a) Balança de precisão montada com aparato experimental de medição de empuxo. (b) Esquema da medição realizada e (c) diagrama de forças.

do segundo, optou-se pelo último, com balança de alta resolução e um arranjo para submergir a amostra e avaliar a diferença entre peso e empuxo Figs. 4.28a-b. Assim, foi necessário ter duas medições de força – o peso seco P e a diferença entre peso e empuxo F_E , além do valor da densidade do líquido, ρ_{liq} . O diagrama de corpo livre da Fig. 4.28c indica a necessidade de isolar a força de empuxo. Subtraindo a segunda da primeira medição

$$P - (P - F_E) = F_E. \quad (4.60)$$

Sabemos pelo princípio de Arquimedes que a força de empuxo é função do peso do volume deslocado de líquido v , i.e., $F_E = v\rho_{\text{liq}}g$. Portanto, podemos escrever

$$v = \frac{F_E}{\rho_{\text{liq}}g}. \quad (4.61)$$

Usamos o peso seco para calcular a densidade,

$$\begin{aligned} \rho_{\text{calc}} &= \frac{M}{v} \quad \text{ou} \\ \rho_{\text{calc}} &= \frac{P}{g} \frac{\rho_{\text{liq}}g}{F_E} \\ \rho_{\text{calc}} &= \frac{P\rho_{\text{liq}}}{F_E}. \end{aligned}$$

Para cada material em sua escala foram realizados o procedimento de medição¹¹ do peso seco e peso submerso em uma média de 5 amostras para cada material, cujos resultados são apresentados na Tab. 4.8. O número de amostras foi suficiente para resultar em pequeno erro. Na mesma tabela encontram-se os valores do fator de densidade β_ρ , juntamente com a razão entre resistência e densidade, σ_0/ρ . Importante mostrar que a diferença nas densidades não são compensadas pelas tensões de escoamento, proporcionando fatores de velocidade β_V diferente da unidade, como implica a Eq. 3.32.

Tabela 4.8 Resultados do cálculo da densidade utilizando o princípio de Arquimedes para os materiais adquiridos. Densidade da água 994g/cm³.

Escala	Material	Densidade ρ [kg/m ³]	β_ρ [-]	$(\sigma_0/\rho)/(\sigma_{0\text{Ti}}/\rho_{\text{Ti}})$
1/1	Ti	4379,0 ± 3,4	1	1
	Al	2732,7 ± 1,2	0,6240 ± 0,0006	0,514
	St	7801,0 ± 7,9	1,7814 ± 0,0023	0,195
2/3	Ti	4370 ± 13	0,9977 ± 0,0032	0,944
	Al	2670,3 ± 7,6	0,6098 ± 0,0018	0,210
	St	7763,2 ± 3,4	1,7728 ± 0,0016	0,163
	Cu	8804 ± 25	2,0105 ± 0,0059	0,119
1/3	Ti	4347 ± 16	0,9928 ± 0,0038	0,924
	Al	2678,9 ± 8,4	0,6118 ± 0,0020	0,167
	St	7764 ± 39	1,7729 ± 0,0090	0,175
	Cu	8763 ± 40	2,0010 ± 0,0093	0,093

¹¹Balança Mettler Toledo modelo XP205 Classe I resolução de 0,01mg e erro de 1mg para o peso seco e modelo AB204 com resolução de 0,1mg e erro 1mg para o peso submerso.

4.3.2 Cálculo dos fatores

Em posse de todos os valores necessários para se calcular o fator β_V para a placa,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^2}{\beta_M}}, \quad (3.24 \text{ revisitada})$$

considerando o operador da Eq. 3.44, e lembrando $\beta_M = \beta_\rho \beta \beta_H^2$ e $\beta_{\sigma_d} = \beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}}$,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta^2}}. \quad (4.62)$$

Esta é a Eq. 3.32 escrita considerando tensões dinâmicas. Sabendo que $\beta_R = \beta$,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta^2}}. \quad (4.63)$$

Assim, podemos calcular o fator de velocidade β_V a partir da Eq. 4.63. Como lei viscoplástica foi usada a de Johnson-Cook – pela vantagem apresentada na página 36 – com parâmetros C e $\dot{\epsilon}_0$ apresentados na Tab. 4.7. A mesma tabela fornece os fatores $\beta_H = \beta_{H'} \beta$, β_{σ_0} , que juntamente com β e β_ρ da Tab. 4.8 permitem a solução iterativa que resulta nos β_V da Tab. 4.9 e os outros fatores de escala associados, Tab. 4.10. A título de discussão, a parcela correspondente a β_{visco} foi explicitada. Os valores próximos à unidade significam que os efeitos de taxa de deformação são pequenos, provavelmente por causa da pequena variação de escala. Além disso, a menor resistência aliada à densidade, fazem com que os fatores de velocidade β_V tenham de ser reduzidos se comparado ao Ti 1/1 – referência, justificado pela última coluna da Tab. 4.8, resultando também em pequena influência em β_{visco} . Considerando a característica aproximada do método proposto no Item 3.3.2, os cálculos de β_V contemplaram a propagação da incerteza das grandezas utilizadas, procedimento pormenorizado no Apêndice E. E sobre este assunto, é possível notar que a incerteza associada a todos os fatores β_V é pequena.

Tabela 4.9 Fatores de escala e o cálculo de β_V para todos os materiais e escalas. A parcela β_{visco} foi inferida a partir de β_V calculado. O Titânio na escala 1/1 foi definido como referência por ser o material mais custoso e de densidade intermediária – objeto principal de estudo deste trabalho. Uma vez que o cálculo independe da resposta da estrutura, os fatores são válidos tanto para os ensaios de baixa, como para os de alta velocidade.

Escala	Material	β	$\beta_{H'}$	β_ρ	β_{σ_0}	β_{visco}	β_V
1/1	Ti	1,000	1,0000	1	1	1	1
	Al	1,000	0,9884	0,6240	0,32080	$1,0002 \pm 0,0157$	$0,6730 \pm 0,0094$
	St	1,000	1,0006	1,7814	0,34690	$0,9917 \pm 0,0229$	$0,4375 \pm 0,0056$
2/3	Ti	0,667	0,9591	0,9977	0,94114	$1,0012 \pm 0,0144$	$0,9296 \pm 0,0092$
	Al	0,667	0,9703	0,6098	0,12813	$0,9979 \pm 0,0148$	$0,4322 \pm 0,0063$
	St	0,667	0,9609	1,7728	0,28838	$0,9887 \pm 0,0236$	$0,4034 \pm 0,0083$
	Cu	0,667	0,9984	2,0105	0,24001	$0,9942 \pm 0,0009$	$0,3401 \pm 0,0014$
1/3	Ti	0,333	0,9938	0,9928	0,91127	$1,0051 \pm 0,0405$	$0,9286 \pm 0,0193$
	Al	0,333	0,9188	0,6118	0,10207	$1,0022 \pm 0,0147$	$0,3831 \pm 0,0047$
	St	0,333	0,8906	1,7729	0,31006	$1,0017 \pm 0,0074$	$0,3765 \pm 0,0064$
	Cu	0,333	0,9844	2,0010	0,18673	$0,9987 \pm 0,0306$	$0,3030 \pm 0,0063$

Tabela 4.10 Sumário dos fatores de escala calculados para os modelos avaliados experimentalmente. Para os carregamentos de impacto de baixa ($V_0 = 3,5\text{ m/s}$) e alta velocidade ($V_0 = 130\text{ m/s}$).

Modelo	β	$\beta_{H'}$	β_H	β_{v_0}	β_ρ	β_V	β_G	β_σ	β_ε	β_I	β_F
1/1 Ti	1	1	1	1	1	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
1/1 Al	1	0,9884	0,9884	0,3208	1	6,730E-01	6,168E-01	2,893E-01	6,730E-01	1,469E+00	2,826E-01
1/1 St	1	1,001	1,001	0,3469	0,624	4,375E-01	1,783E+00	3,406E-01	4,375E-01	2,287E+00	3,410E-01
2/3 Ti	2/3	0,9891	0,6594	0,9411	1,781	9,296E-01	2,924E-01	8,814E-01	1,394E+00	7,093E-01	3,832E-01
2/3 Al	2/3	0,9703	0,6469	0,1281	0,9977	4,322E-01	1,753E-01	1,210E-01	6,483E-01	1,497E+00	5,063E-02
2/3 St	2/3	0,9609	0,6406	0,2884	0,6098	4,034E-01	5,048E-01	3,124E-01	6,051E-01	1,588E+00	1,282E-01
2/3 Cu	2/3	0,9984	0,6656	0,24	1,773	3,401E-01	5,948E-01	2,333E-01	5,101E-01	1,957E+00	1,033E-01
1/3 Ti	1/3	0,9938	0,3312	0,9113	2,01	9,286E-01	3,654E-02	8,669E-01	2,786E+00	3,567E-01	9,512E-02
1/3 Al	1/3	0,9187	0,3062	0,1021	0,9928	3,831E-01	2,082E-02	1,064E-01	1,149E+00	7,994E-01	9,977E-03
1/3 St	1/3	0,8906	0,2969	0,3101	0,6118	3,765E-01	5,848E-02	3,168E-01	1,130E+00	7,885E-01	2,792E-02
1/3 Cu	1/3	0,9844	0,3281	0,1867	1,773	3,030E-01	7,295E-02	1,896E-01	9,091E-01	1,083E+00	2,042E-02

4.3.3 Descrição do aparato experimental

Os suportes para fixação das placas de escalas 1/1 e 2/3 seguiram a geometria do suporte existente de diâmetro interno 80 mm usado para escala 1/3, Fig. 4.29a, com 8 parafusos M6, janela frontal inferior para iluminação e visualização, além de pinos laterais para fixação. Os parafusos foram escalonados conforme escala, M12 e M18. Nas escalas maiores, os cilindros laterais foram substituídos por aberturas, com a mesma função de fixação do suporte. A distância da face inferior da chapa à bigorna foi mantida constante nos três suportes, enquanto o diâmetro interno, assim como o externo, seguiu β , conforme desenho e dimensões apresentados no Apêndice B. Esses suportes foram utilizados para ambos os casos de baixa e alta velocidade.

(a) Suporte escala 1/3.

(b) Suporte escala 2/3.

Figura 4.29 Suportes de fixação para as placas circulares. A superfície externa fora coberta com adesivo vinílico semi-fosco preto de modo a evitar que a iluminação fosse refletida e capturada pelas câmeras de alta velocidade. Já a superfície interna foi coberta com adesivo branco, distribuindo a luz uniformemente na chapa.

O elemento que faz a interface entre massa de impacto e a placa é denominado indentador. Para os ensaios de baixa velocidade, foram usinados três indentadores de aço 7075 com geometria cilíndrica e arredondada em sua extremidade impactante, como uma semiesfera, Fig. 4.30. Na outra, uma rosca permitia fixação adequada à massa de impacto, impedindo seu movimento relativo. Para a maior escala, o diâmetro definido foi de 3/4" ou 19,05 mm, seguindo 12,7 e 6,35 mm para as outras. Por fim, os indentadores foram cementados para garantir dureza superficial e não sofrerem mudanças de forma após sucessivos ensaios.

Nos ensaios de alta velocidade, o indentador – aqui chamado de projétil – seguiu a mesma geometria, sem as abas ou rosca para fixação. A partir de uma barra de aço 1045 foram usinados os projéteis, sendo a ponta semiesférica construída a partir de uma contra-ferramenta. Para os materiais mais densos – Aço e Cobre – o projétil foi alongado, sendo que para o Alumínio foi feito um furo cego na extremidade posterior. Cada projétil teve sua massa medida durante a usinagem, em processo

Figura 4.30 Indentadores para os ensaios de baixa velocidade, escalas 1/1, 2/3 e 1/3

iterativo para assegurar a proximidade das massas. O número de projéteis usinados acompanhou o número de placas.

Figura 4.31 Projéteis utilizados para os ensaios de velocidade. Da esquerda para a direita, escala 1/1 Ti, Al e Aço até a escala 1/3. A geometria é similar à dos indentadores de baixa velocidade. O comprimento foi ajustado para se obter massa adequada para cada condição.

Duas condições de ensaio foram estipuladas de forma a variar a razão entre as massas da estrutura e a de impacto, $r = M/G$. Os ensaios de baixa velocidade $V_0 = 3,5 \text{ m/s}$ e $G = 32 \text{ kg}$, requereram o uso de dois martelos de impacto diferentes, o de alta e o de baixa energia, Figs. 4.32a e b, respectivamente. O Martelo de Impacto (MI) foi empregado nos ensaios das escalas 1/1 e 2/3, com uso de diferentes arranjos de fixação do indentador de forma a adequar as massas aos fatores calculados da Tabs. 4.9, 4.11 e 4.12. A massa de impacto foi içada por sistema elétrico e solta por operação de um solenóide em gancho especial. A velocidade durante a descida e evento de impacto foi medida por vibrômetro a laser¹² montado em estrutura paralela às guias do martelo, com fita reflexiva na parte

¹²Polytec OFV 3020 com sensor laser Polytec OFV 323, taxa de amostragem 100 kHz.

superior da massa. O sinal obtido foi então amplificado¹³ e adquirido¹⁴ em um computador para posterior tratamento. Para a escala 1/3, a única possibilidade foi usar o martelo de impacto de baixa energia (MIBE), uma vez que as sapatas das guias lineares eram significativamente mais leves que as do MI, permitindo utilizar massas menores que 1kg, conforme calculado – Tab. 4.11. Da mesma forma, o vibrômetro foi fixado paralelamente à estrutura, com fita reflexiva aderida ao perfil que unia as duas sapatas das guias lineares. Um acelerômetro¹⁵ foi fixado em cada massa, visando à redundância no caso de perda do sinal do laser.

Figura 4.32 (a) Martelo de Impacto (MI) em ensaio do AI em escala 1/1. A massa reduzida exigiu montagem com cilindro prolongador visando reduzir a rotação da massa e indentador no plano das guias. O deslocamento lateral foi controlado mediante ajuste de buchas de latão. (b) Martelo de Impacto de Baixa Energia (MIBE).

Os ensaios de alta velocidade foram realizados usando a estrutura do MI, com o posicionamento do reservatório de ar comprimido acima da casa de máquinas. Uma mangueira de 2" de diâmetro conectou o reservatório de ar ao tubo que, com uma conexão em ângulo e uma membrana, permitiu que os projéteis fossem posicionados e se movimentassem somente quando a válvula de descarga era liberada. Foram usados tubos de PVC de 25mm como guias para a maior escala e tubos de aço de diâmetro interno 13,5 e 7,1 mm para escalas 2/3 e 1/3, respectivamente. A fixação do tubo nas guias do martelo permitiu que se alinhasse o conjunto adequadamente. Foi acoplado na saída do tubo um dispositivo com dois sensores de presença – LEDs emissores e receptores – a uma distância conhecida. O sinal emitido foi adquirido com osciloscópio¹⁶, fornecendo o tempo necessário para percorrer

¹³Amplificador diferencial de corrente contínua Fylde FE-351-UA.

¹⁴National Instruments, PCI 6110

¹⁵Piezoelétrico marca Brüel & Kjaer modelo 4370, aceleração máxima 20 km/s², frequência de ressonância próxima a 20 kHz, sendo amplificada acima de 5 kHz.

¹⁶Tektronik DPO 2014.

a distância que, aliado ao comprimento, forneceu a velocidade. Variando a pressão do reservatório se conseguiu controlar a velocidade para cada caso. Por ser um ensaio realizado a altas velocidades e pequenas massas, uma gaiola de proteção foi colocada evitar danos aos equipamentos de filmagem e iluminação.

Figura 4.33 Arranjo para disparador de projéteis a ar comprimido utilizado nos ensaios de alta velocidade.

Todos os ensaios foram registrados com duas câmeras de alta velocidade, uma perpendicular¹⁷ à direção do indentador ou projétil e a outra em ângulo¹⁸, conforme arranjo mostrado na Fig. 4.32a. Nos ensaios de alta velocidade, a câmera passou do lado direito para o esquerdo. A qualidade do vídeo e o número de quadros por segundo pôde ser aumentado devido à utilização de iluminação especial¹⁹. Nos ensaios de alta velocidade, o deslocamento foi obtido por rastreamento do projétil imagem a imagem, com uso de programa comercial²⁰.

¹⁷Photron modelo SA5.

¹⁸Câmera de alta velocidade Photron modelo APX-RS.

¹⁹Visual Instrumentations, Modelo 900445, 6000 lúmens.

²⁰Xcitex ProAnalyst com módulo de rastreamento 2-D, 2-D Feature tracking.

Tabela 4.11 Sumário dos parâmetros de ensaio de baixa velocidade para os diversos modelos e suas escalas.

Escola	Material	β_V	V_0 ideal[m/s]	G_m ideal [kg]	Réplica	G_m real [kg]	V_0 real[m/s]
1/1	Ti	1	3,50	51,93	1	51,93	3,49
					2		3,49
					3		3,49
	Al	0,673	2,36	32,03	1	32,07	2,62
					2		2,35
					3		2,35
	St	0,438	1,53	92,57	1	92,57	1,56
					2		1,55
					3		1,56
	Ti	0,930	3,25	15,18	1	15,21	3,24
					2		3,23
					3		3,21
2/3	Al	0,432	1,51	9,10	1	9,105	1,52
					2		1,52
					3		1,42
	St	0,403	1,41	26,21	1	26,28	1,39
					2		1,40
					3		1,40
	Cu	0,340	1,19	30,89	1	30,90	1,23
					2		1,20
					3		1,19
	Ti	0,929	3,25	1,897	1	1,879	3,24
					2		3,23
					3		3,25
1/3	Al	0,383	1,34	1,081	1	1,081	1,32
					2		1,34
					3		1,35
	St	0,377	1,32	3,037	1	3,037	1,31
					2		1,31
					3		1,30
	Cu	0,303	1,06	3,788	1	3,788	1,09
					2		1,08
					3		1,09

Tabela 4.12 Sumário dos parâmetros de ensaio de alta velocidade para os diversos modelos e suas escalas.

Escala	Material	β_v	V_0 Ideal[m/s]	G_m Ideal [g]	Réplica	G_m real [g]	V_0 real[m/s]
	Ti	1	130,0	82,22	1 2 3	82,1727 82,2118 82,2641	131,0 130,0 82,30
	Al	0,673	87,48	50,71	1 2 3	50,4963 50,5282 50,7914	89,01 88,52 88,05
	St	0,438	56,88	146,6	1 2 3 4	146,7073 146,538 146,490 146,707	57,26 57,04 55,00 57,46
	Ti	0,930	120,9	24,04	1 3	24,6360 24,1955	121,1 115,4
	Al	0,432	56,19	14,41	1 3	14,6155 14,3708	53,76 58,23
	St	0,403	52,44	41,50	1 2	40,9234 41,0288	51,30 52,74
2/3	Cu	0,340	44,21	48,90	1 2 3	49,3165	59,12 49,63 46,25
	Ti	0,929	120,7	3,004	1 2 3	2,9276	114,5 121,3 119,5
	Al	0,383	49,80	1,711	3 4	1,7128	50,4 57,46
1/3	St	0,377	48,95	4,808	1 2 3	4,7617	48,74 50,70 49,03
	Cu	0,303	39,40	5,998	1 2 3 4 5	5,9765	38,40 37,99 39,75 42,86 42,10

Figura 4.34 Aparato experimental do ensaio de baixa velocidade para escala 1/1.

Figura 4.35 Ensaio de baixa velocidade Ti 1:1, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d).

Figura 4.36 Ensaio de baixa velocidade Al 2:3, réplica 2. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d).

(a)

(b)

Figura 4.37 Ensaio de baixa velocidade Cu 1:3, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a). Instante após o impacto (b).

4.3.4 Impacto contra placa - baixa velocidade

Os dados de velocidade do laser dos ensaios realizados nos modelos, de condições iniciais conforme Tab. 4.11, foram integrados para se ter o deslocamento δ da massa de impacto e derivados para se obter a aceleração. Multiplicando esta última por G , obtivemos a força instantânea. Estes foram filtrados²¹ de forma a reduzir a influência de componentes de alta frequência. Os resultados de δ no tempo foram comparados com simulação numérica, Fig. 4.39. A representação numérica utilizou a mesma malha em elementos finitos do item 4.2.1, com as condições da Tab. 4.11 e materiais modelados conforme caracterização, Tab. 4.7, e encruamento em forma de tabela de dados, tal Fig. 4.25 e Apêndice D.

A forma das curvas de deslocamento indicam que a massa de impacto permaneceu em contato com a placa durante todo o evento de impacto, sendo similares tanto nas simulações quanto nos experimentos. Para o Titânio escala 1/1, Fig. 4.39a, é possível notar que os deslocamentos experimentais são de 15 a 30% maiores que os numéricos. Ao analisar essas placas ensaiadas foi possível notar trincas – Fig. 4.38 – que não foram consideradas no modelo numérico. O mesmo ocorreu para as placas de Alumínio 1/1, Fig. 4.39b com o agravante da velocidade da réplica R-1 estar mais de 20% acima do considerado ideal, Tab. 4.11. Para o Aço 1/1, ensaios e simulação numérica forneceram resultados bastante próximos, indicativos de que a consideração de ausência de fratura permanece válida, Fig. 4.39c.

Na escala 2/3, o titânio também apresentou trincas, embora menores que as da escala 1/1, resultando em curvas de deslocamento vs. tempo mais próximas da simulação, Fig. 4.39d. É possível notar que o retorno elástico – a partir de 4ms – é mais duradouro, provavelmente pelos danos causados e a consequente menor capacidade de transferência de energia. Quanto ao alumínio, as réplicas são próximas entre si, com diferença entre torno de 5% no deslocamento máximo, Fig. 4.39e. Com relação ao retorno elástico, nota-se bastante similaridade na inclinação da curva a partir de 6ms. Houve bastante repetibilidade no ensaio do aço 2/3, Fig. 4.39f embora tenha se distanciado da simulação numérica. As réplicas de cobre 2/3 mostraram resultados consistentes e bem próximos da simulação numérica, Fig. 4.39g.

O ensaios de titânio para escala 1/3, Fig. 4.39h apresentam deslocamentos próximos da simulação e trincas significativamente menores do que as ocorridas nas escalas maiores, Fig. 4.38. Para o alumínio 1/3 os deslocamentos são menores e bastante consistentes nas três réplicas, Fig. 4.39i. Tanto os modelos da menor escala em aço, como os de cobre, mostraram repetibilidade e resultados próximos da simulação numérica.

O distanciamento das curvas experimentais de deslocamento – Fig. 4.39a – com relação aos resultados numéricos para o titânio 1/1 ficam mais evidentes ao analisar os resultados de Força vs. Deslocamento, Fig. 4.40a. A partir de $\delta = 7$ mm as curvas experimentais se destacam, atingindo um valor máximo em um platô ao redor de 3,5 kN, provavelmente devido à falha que deve ter ocorrido próximo de $\delta = 9$ mm. Para o alumínio 1/1, Fig. 4.40b, é possível notar o mesmo distanciamento, também provavelmente associado à falha ocorrida. A força máxima difere significativamente, assim como o deslocamento, uma vez que as forças nas réplicas são menores e necessitam de maior deslocamento para a dissipação da mesma energia. Quanto aos aços 1/1 – Fig. 4.40c – a proximidade das curvas de

²¹Versão robusta do filtro de regressão local com uso de mínimos quadrados linear e polinômio de segunda ordem disponível no Matlab. O número de pontos utilizados na regressão é igual a 12% do número total de pontos.

Figura 4.38 Falha de material para uma réplica de Ti 1/1, baixa velocidade (a), Al 1/1 alta velocidade (b), Ti 2/3 alta velocidade (c) e Ti 1/3 baixa velocidade (d).

deslocamento revelam resposta em força das réplicas próximas da simulação numérica, indicativo de que as assunções do modelo numérico se confirmaram nos experimentos.

Embora tenham ocorrido pequenas trincas nas réplicas de Ti 2/3, é possível observar que o comportamento da curva F vs. δ guarda bastante relação com os resultados numéricos, fornecendo força máxima bastante próxima, além de tendências similares – Fig. 4.40d. O mesmo ocorre para o Al 2/3, o qual apesar do pequeno distanciamento dos experimentos com relação à simulação, mostra força máxima e descarregamento bastante similar, Fig. 4.40e. Os ensaios dos aços e cobs para a escala 2/3 forneceram resposta em F vs. δ bastante próximos dos resultados numéricos, Figs. 4.40f-g.

O titânio de escala 1/3 também apresenta diferenças dos resultados experimentais para o numérico, provavelmente devido às trincas. Os outros materiais, alumínio, aço e cobre mostram curvas de força bastante similares entre si e à simulação, Figs. 4.40h-k.

Figura 4.39 Comparativo de resultados experimentais de deslocamento no tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.

Figura 4.39 (Continuação) Comparativo de resultados experimentais de deslocamento no tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.

Figura 4.40 Comparativo de resultados experimentais de força por deslocamento com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.

Figura 4.40 (Continuação) Comparativo de resultados experimentais de força por deslocamento com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.

Em posse das curvas das réplicas foram obtidas novas curvas médias, com desvio padrão associado. Na Fig. 4.41a são apresentados as curvas médias sólidas, tracejadas e pontilhada para escalas 1/1, 2/3 e 1/3, respectivamente. O desvio padrão é apresentado em cor mais clara. Com exceção dos titânios que tiveram falha e o Al 1/3, os outros modelos se mostram bastante próximos, principalmente os de aço. Ao avaliar a resposta das estruturas, Fig. 4.41b nota-se que os modelos de aço, juntamente com o de Al 1/3 são bastante relacionáveis, seguido dos de cobre e Al 2/3. As trincas ocorridas nos modelos de Al 1/1 e titânios mostram difícil comparação a partir do deslocamento escalonado $\delta = 5\text{mm}$.

Para auxiliar na interpretação dos resultados e excluindo os efeitos de falha de material, a resposta das simulações numéricas são apresentadas na Fig. 4.42. Nota-se que os deslocamentos relativos são mais altos para os modelos de titânio em preto, enquanto que menores para o aço 2/3 e Al 1/1. Ao avaliar as curvas de material quando se aplica β_{v_0} , Fig. 4.27b, é possível notar que estes materiais possuem encruamento bastante superior aos dos outros materiais. Os outros materiais, aço 1/1 e 1/3, cobres e Al 2/3 e 1/3, possuem encruamento no início da curva, abaixo de $\varepsilon_p = 0.05$, superior ao do titânio, o que explica os menores deslocamentos. Conforme discutido no item. 4.2.1, se as curvas relativas fossem sobrepostas, a diferença seria bastante reduzida.

As curvas de força versus deslocamento, Fig. 4.42b resumem a resistência relativa maior para o aço 2/3 e alumínio 1/1, enquanto que o encruamento relativo dos titânios proporcionam uma inclinação menor para a curva. Novamente é possível notar a proximidade dos modelos de aço 1/1 e 1/3, cobres e os alumínios restantes. É possível afirmar que esses materiais nessas escalas são relacionáveis, com essas curvas e esses parâmetros.

O perfil deformado das chapas ensaiadas foi mensurado em máquina CNC de medição tridimensional. Esses perfis são comparados com os resultados numéricos, Fig. 4.44. Na escala 1/1, o descarregamento calculado numericamente (curvas tracejadas) é superestimado se comparado aos obtidos experimentalmente, curvas sólidas. Para as placas de alumínio e titânio, isto se explica pelas trincas comentadas anteriormente. Para o aço, os deslocamentos máximos também são diferentes, entretanto é possível notar que o aspecto da curva é bastante próximo, como se um escalar fosse capaz de relacionar ambas.

Para as placas de escala 2/3, Fig. 4.44b, nota-se que o deslocamento máximo do titânio no experimento é muito próximo do da simulação, entretanto o restante do perfil difere em demasia, provavelmente por causa da trinca. Quanto aos outros materiais, comportam-se como o aço 1/1. Diferem em cerca de 20% no deslocamento máximo, embora a curva experimental aparentemente siga a mesma tendência da numérica, apenas sendo multiplicada por algum fator, provavelmente por causa do retorno elástico superestimado na simulação. Importante notar que os perfis obtidos numericamente se mostram bastante próximos entre si, algo que não fora coberto pelo método aqui proposto. Para a escala menor, Fig. 4.44c, a mesma discussão é válida para todos os materiais. Aplicando os fatores para uma réplica de cada ensaio em escala, é possível observar que os perfis após retorno elástico diferem apenas em aproximadamente 10%, Fig. 4.45a, exceto aqueles que sofreram trincas – titânios e Al 1/1. Avaliando somente os perfis obtidos através de simulações, Fig. 4.45b, nota-se a grande diferença do Al 1/1 com relação aos demais, enquanto que o Aço 2/3 proporciona perfil com deslocamentos maiores em todo o diâmetro, exceto no centro.

Figura 4.41 Resultados experimentais para os modelos com aplicação dos fatores de escala. As áreas de coloração clara indicam o desvio padrão. (a) Deslocamento no tempo e (b) força vs. deslocamento. Nos gráficos (c) e (d) são removidos as escalas e materiais nos quais ocorreram trincas, Ti 1/1, 2/3 e 1/3 e Al 1/1.

Figura 4.42 Resultados numéricos para os modelos com aplicação dos fatores de escala. (a) Deslocamento no tempo e (b) força vs. deslocamento.

Comparar os perfis experimentais e numéricos permite que se infira a partir de simulações outros estados que não foram possíveis de se obter com os métodos disponíveis. Sendo as placas ensaiadas medidas após retorno elástico, algo não coberto pelo método proposto, resta saber qual seria o perfil do último estado nas quais as leis foram propostas. Assim, o perfil da placa no instante de deslocamento máximo foi extraído, assumindo como sendo este o final da fase de carregamento. Aplicando-se os fatores necessários, Fig. 4.45c, é possível notar que os perfis máximos refletem os deslocamentos do indetador, Fig. 4.42a. De uma maneira geral, nota-se boa tendência de capturar o comportamento em termos de curvatura, ainda que os valores de deslocamento sejam multiplicados por um fator. Apenas o Al 1/1 demonstra curvatura que destoa das demais. Se β_{σ_0} fosse capaz de relacionar inclusive a porção elástica, não haveria diferenças significativas nesses perfis.

Nas Figs. 4.43a-b são apresentados os deslocamentos máximos normalizados para os experimentos e simulações de baixa velocidade, respectivamente, para cada escala. É possível notar que o comportamento esperado, linha tracejada, está próximo das réplicas, com exceção dos titânio e Al 1/1, por causa das falhas ocorrida. Numericamente, o maior deslocamento dos titânios é associado à curva com menor encruamento relativo. Ainda, há uma clara tendência nos resultados de simulação de aproximar os deslocamentos máximos dos alumínio, aço e cobre por uma outra linha, como o observado na Fig. 4.42a.

Figura 4.43 Deslocamento máximo normalizado para os experimentos de cada réplica de baixa velocidade (a) e simulações (b) em função da escala adotada. Cada réplica é plotada com um marcador diferente, com as cores dos materiais conforme legenda. Para o caso experimental, a referência de deslocamento máximo se torna o St 1:1 devido às falhas. Para os resultados numéricos, o Ti 1:1 segue como referência. Para ambos os gráficos é mostrada a linha tracejada que indica os valores esperados.

Figura 4.44 Comparativo do perfil final entre experimento (linhas sólidas) e simulação (tracejadas) para as escalas 1/1 (a), 2/3 (b) e 1/3 (c).

Figura 4.45 Perfis finais experimentais dos modelos selecionados comparados à referência para o caso de baixa velocidade (a). Perfil final numérico após retorno elástico (b) e provável perfil de deslocamento máximo obtido via simulação (c).

Figura 4.46 Fixação da placa circular e iluminação interna do suporte para ensaio de alta velocidade na escala 1/1. Vista interna à gaiola de proteção.

Figura 4.47 Ensaio de alta velocidade St 1:1, réplica 3. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem.

Figura 4.48 Ensaio de alta velocidade Ti 2:3, réplica 3. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem.

Figura 4.49 Ensaio de alta velocidade Al 1:3, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem.

4.3.5 Impacto contra placa - alta velocidade

A curta duração do evento de impacto para os ensaios de alta velocidade e as restrições de iluminação para filmagem fizeram com que fossem gravados poucos quadros para cada réplica. Além disso, o método de rastreamento de pontos das imagens se mostrou limitado ao reduzir sua acurácia em pleno instante de impacto, visto que neste momento os deslocamentos se tornam reduzidos, ocorrendo redução de velocidade, até atingir a reversão do movimento, e altas acelerações. Ambas variáveis dependem de derivadas do deslocamento que, com os dados adquiridos se mostraram pouco úteis. Assim, da mesma forma que no item 4.3.4, resultados obtidos por simulação numérica serão comparados com os deslocamentos experimentais para posteriormente se inferir as outras respostas.

Nas Figs. 4.50a, b, d e h é possível observar que as trincas ocasionadas nas placas de titânio para as três escalas e de Al 1/1, assim como no caso de baixa velocidade, fazem com que os projéteis percorram deslocamento maior se comparadas à simulações, que não consideram esse efeito. Para os aços, Figs. 4.50c, f e j, nota-se uma aderência maior da simulação aos resultados para as três escalas, principalmente para a maior e a menor. Além disso, a curva de deslocamento para o St 1/1 possui dois pontos de inflexão, em torno de 400 e 900 μ s. Isto pode ser observado pelas imagens capturadas dos experimentos e simulações, as quais mostraram que, no primeiro instante, o centro da placa passa a se deslocar com velocidade superior ao projétil, enquanto este quase para. No segundo instante, a placa retorna e impacta o projétil, fazendo com que ele ganhe velocidade de afastamento. Este efeito ocorre para todos os casos ensaiados em que não ocorreram trincas. O alumínio de escala 2/3, Fig. 4.50e, se mostrou um pouco mais resistente que a simulação, enquanto que na escala 1/1 o inverso aconteceu, Fig. 4.50i. Os cobs, Fig. 4.50g e k, se mostraram próximos da simulação.

Há diferença na inclinação da curva entre os pontos de inflexão, negativa nas escalas 1/1 e 1/3 e positiva na 2/3. A inclinação negativa se mostra um pouco exacerbada na simulação ao avaliarmos a Fig. 4.50c, visto que as réplicas experimentais demonstram inclinação positiva pequena, ocorrendo o mesmo para o alumínio e cobre nas escalas 1/3 e quase nula para o aço 1/3, Figs. 4.50i, k e j, respectivamente.

As curvas de deslocamento no tempo das réplicas foram utilizadas para se criar a média e erro para cada material e escala, Fig. 4.51a. É possível notar a dispersão dos dados devido a fatores como o impacto descentralizado e a medição de deslocamento afetada pela rotação do projétil. Logicamente, essa dispersão poderia ter sido reduzida com maior controle desses parâmetros e maior número de exemplares ensaiados. Também é possível observar o deslocamento maior das placas de titânio, provavelmente devido às trincas ocorridas. Nota-se a proximidade entre os modelos de Alumínio e Cobre 1/3, além do destacamento do Al 1/1 e uma nuvem que engloba os outros modelos. Essa proximidade dos modelos de 1/3 é também observada na Fig. 4.51c, resultados de simulação. A tendência de dois pontos de inflexão é preservada para todos os materiais em todas as escalas, como pode ser observado nos resultados numéricos da Fig. 4.51c. A curva mais alta de deslocamento, a de referência – Ti 1/1, é acompanhada do titânio em outras escalas e a de cobre 1/3. Se englobarmos uma margem de 5%, podemos incluir também o cobre 2/3 e os aluminios 2/3 e 1/3. Os deslocamentos maiores são associados a encruamentos relativos menores do que a referência, enquanto que os menores significam maior encruamento relativo, conforme pode ser observado nas curvas dos materiais, Fig. 4.27b. A dis-

Figura 4.50 Comparativo de resultados experimentais de deslocamento por tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de alta velocidade.

Figura 4.50 (Continuação) Comparativo de resultados experimentais de deslocamento por tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de alta velocidade.

cussão fica mais simples ao se avaliar os modelos de Al 1/1 e os modelos de aço para todos as escalas. A chave para entender o comportamento dos modelos está no início da curva plástica, para pequenos valores de ε_p . Embora para $\varepsilon = 0.2$ as tensões relativas do modelo Al 2/3 se apresentem menores que a referência, quando $\varepsilon_p \rightarrow 0$, elas são maiores tornando o modelo mais resistente do que a referência. Comparando somente os deslocamentos de modelos sem falha, Fig.4.51b, é possível notar que as leis propostas são capazes de aproximar os resultados de materiais distintos.

A resposta desses modelos pode ser observada com maior clareza nas curvas escalonadas de força vs. deslocamento, Fig. 4.51d. A forma com a qual as curvas de tensão relativa se apresentam revela se a resposta dos modelos estarão próximos ou não da referência, Fig. 4.27b. Os titânios, cobres e alumínio de escala 2/3 e 1/3 revelam resposta bastante próximas entre si, com as curvas das escalas menores de titânio levemente abaixo do Ti 1/1 enquanto que as demais estão acima. Nota-se que a tendência de crescimento dos valores de força são capturados por todos os modelos. A tendência da curva de tensão do cobre 2/3 de interceptar a do Ti 1/1, se mostra presente nas curvas de força, reduzindo a diferença existente entre o pico inicial e o começo da oscilação, ao redor de $\delta = 8\text{mm}$. Para as curvas dos modelos de aço, essa diferença no valor de força é crescente, também justificado pelas curvas relativas dos materiais.

Os perfis deformados para as placas ensaiadas foram adquiridos em máquina tridimensional de medição. Foram comparados com os resultados numéricos para posteriormente se inferir o perfil de deslocamento máximo. Na Fig. 4.52a são comparados os perfis após retorno elástico para a escala 1/1. Nota-se os deslocamentos maiores para os perfis experimentais de titânio e alumínio, linha contínua, se comparado às simulações, linhas tracejadas. Justifica-se a diferença pelas trincas. Para o aço, o perfil deformado mostrou-se menor que o da simulação. O cruzar das linhas representativas do titânio mostra que as considerações realizadas nas simulações não foram válidas, i.e., negligenciar possíveis falhas.

Para a escala 2/3, Fig. 4.52b, os perfis experimentais apresentam deslocamento transversal máximo menor do que os obtidos numericamente. Para o titânio 2/3, deve-se considerar que o comportamento em falha torna a comparação imprópria. As simulações sugerem resultados praticamente idênticos para alumínio e cobre, o que não ocorreu para as réplicas selecionadas, em parte devido ao impacto descentralizado. A simulação do aço se mostra bastante próxima do perfil obtido experimentalmente. Na menor escala, Fig. 4.52c, o cobre e o aço experimentais mostram boa correlação com os resultados numéricos. O alumínio se mostra um pouco distante, o mesmo ocorrendo para o titânio e sua tendência de falha.

Podemos comparar as réplicas de cada modelo usando os fatores de escala empregados, Fig. 4.53a. Nota-se que todos os modelos possuem perfil com a mesma curvatura, diferentes por um escalar, exceto para os titânio e o Al 1/1. Ainda, os titânios de escala 2/3 e 1/3 apresentam perfil que diferem somente no centro, sendo bastante similares no restante. Há proximidade dos resultados de cobre, alumínio exceto 1/1 e os demais de aço. Avaliando somente os resultados numéricos, a Fig. 4.53b mostra que o retorno elástico, aliado ao maior encruamento, torna o Al 1/1 pouco relacionável aos demais. Os outros casos se mostram bastante similares com relação à curvatura, diferindo um pouco no caso dos titânios.

Figura 4.51 Resultados de deslocamento no tempo com fatores de escala para os experimentos (a), excluindo os modelos com trincas (b), simulações (c) e resposta para as simulações (d) para o caso de alta velocidade.

Figura 4.52 Comparativo do perfil final do caso de alta velocidade entre experimento – linhas sólidas – e simulação – tracejadas – para as escalas 1/1 (a), 2/3 (b) e 1/3 (c).

Figura 4.53 Perfis finais experimentais dos modelos selecionados comparados à referência para o caso de alta velocidade (a). Perfil final numérico após retorno elástico (b) e provável perfil de deslocamento máximo obtido via simulação (c).

Na Fig. 4.53c são apresentados os perfis no instante do deslocamento máximo, que não possuem relação β_t entre si. Nota-se ondulações causadas por propagação de onda que dificultam bastante a comparação. Entretanto, é possível observar o comportamento distinto do Al 1/1, enquanto os demais possuem deslocamento máximo menor que os do titânio, ainda que bastante próximos. O perfil do Al 2/3 se aproxima bastante do Ti 1/1, ainda que saibamos que o instante que esses perfis ocorrem não são similares, conforme Fig. 4.51c. Os perfis da escala 1/3 para cobre, aço e alumínio se mostram bastante próximos e facilmente relacionáveis. A dificuldade em comparar os perfis poderia ser contornada se fosse considerada porção elástica rígida o suficiente para que não houvesse oscilação ou retorno elástico. Entretanto, experimentalmente isto não é factível e nos distanciáramos de avaliar os efeitos reais do emprego de modelos representativos de materiais reais.

Por fim, o deslocamento máximo do projétil de cada réplica é normalizado com relação à média dos deslocamentos máximos do St 1:1 para o caso experimental, Figs. 4.54a e do Ti 1/1 para as simulações numéricas, Figs. 4.54b. Comparadas à linha tracejada que determina os valores esperados, nota-se boa correlação experimental entre os modelos para os casos onde não há falha – Cobre, Aços e Al 2/3 e 1/3. Quanto às simulações, o maior encruamento faz com que os deslocamentos dos aços sejam menores do que os valores esperados com relação ao Ti 1/1, da mesma forma que foi observado na Fig. 4.51c. Considerando a diferença dos materiais, pode-se dizer que o método apresentado é capaz de proporcionar resultados dentro da previsibilidade quando não há falha.

Figura 4.54 Deslocamento máximo normalizado para os experimentos de cada réplica em alta velocidade (a) e simulações (b) em função das escalas utilizadas. Cada réplica é plotada com um marcador diferente, com as cores dos materiais conforme legenda. Para os experimentos, a referência de deslocamento máximo foi definida como o St 1/1 devido às falhas ocorridas no Ti 1/1. Para os resultados numéricos, o Ti 1/1 segue como referência. Para ambos os gráficos é mostrada a linha tracejada que indica os valores esperados.

Capítulo 5

Discussão

"The Answer to the Great Question... Of Life, the Universe and Everything... Is... Forty-two," said Deep Thought, with infinite majesty and calm."

Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

5.1 Do método proposto

Os estudos realizados anteriormente sobre leis de similaridade para impacto esbarravam notoriamente em questões relativas à taxa de deformação. Esses efeitos atribuídos à sensibilidade da taxa de deformação na resistência dos materiais – apresentados no item 3.2.1 – se tornam mais evidentes quando são utilizados modelos em escala reduzida. Em um estudo experimental sobre a validade de leis de similaridade, Booth, Collier e Miles [11] encontraram dificuldades em relacionar modelos em escala reduzida à referência utilizada, Fig. 1.4. Sendo os materiais iguais e a qualidade construtiva controlada, restou a explicação da taxa de deformação. Em discussão posterior, Calladine [12] apresenta uma possível solução para o problema: uma distorção de velocidade proporcional à escala e a certeza de se obter $\dot{\epsilon}$ iguais em modelo e protótipo, independentemente da escala. Ora, esta proposta se torna razoável somente se não houver efeitos inerciais, limitando bastante sua aplicação.

Jones [13] comenta sobre os resultados de [11]

"(...) Assim, a tensão dinâmica, σ_d , não é escalonada de forma apropriada posto que é maior no modelo. Claramente, o escalonamento geométrico estrito e a igualdade das velocidades iniciais¹ levam à impossibilidade de se escalonar os efeitos de taxa de deformação para um material sensível à taxa de deformação. A possibilidade de se contornar essa dificuldade ao selecionar material diferentes para a estrutura em escala maior e o modelo geometricamente similar é bastante remota, visto que

¹Equivalente a dizer que $\beta_V = 1$.

ambos devem possuir as mesmas características de encruamento etc.”

Essas afirmações são verdadeiras ao considerarmos o uso da base $MLT - \beta_V = 1$ – e se desejarmos obter respostas idênticas no protótipo e modelo para todas as variáveis. Entretanto, se permitirmos distorções de fatores de escala, podemos encontrar soluções aproximadas para o problema. A definição de uma base em função de velocidade de impacto, tensão de escoamento e massa de impacto – VSG – torna modelos e protótipos de materiais iguais relacionáveis se o acréscimo de tensão dinâmica na escala reduzida for compensada com aumento de velocidade [26]. Esta proposta reside em acrescentar energia, contornando o aumento de resistência devido à tensão dinâmica e desprezando a deformação elástica que aumentará quão maior for a tensão dinâmica. De forma a simplificar o cálculo do fator de velocidade, β_V , é utilizado em [26] a lei viscoplástica de Norton, Eq. 3.12, a qual requer apenas os parâmetros de material e a escala β .

As propostas se tornam menos eficazes quando almejamos o uso de materiais diferentes. O uso da base VSG fornece solução para diferentes tensões de escoamento de materiais perfeitamente plásticos, por meio de β_{σ_0} , enquanto que a viscoplasticidade é deixada de lado ou contornada por particularidades como no emprego de um material menos sensível à taxa de deformação no modelo em escala reduzida [29]. A diferença de material compensada é restrita à curva tensão vs. deformação, não sendo citada solução para diferentes densidades. Outro método [22, 60] seria utilizar aproximações sucessivas com uso de três modelos: mesma escala com mudança de material, escala menor e material igual ao do protótipo e finalmente escala menor e material diferente, Fig. 3.1. O infortúnio deste método é a necessidade de um número ao menos três vezes maior de modelos e experimentos para se englobar todos os efeitos de escala e material diferente, sem comentar as dificuldades de obtenção de material nas espessuras e com as propriedades mecânicas necessárias.

Dessa maneira, uma solução direta, ainda que aproximada, podia ser proposta. No item 3.3.2 é apresentada solução aproximada que engloba os efeitos de taxa de deformação, diferentes curvas tensão vs. deformação e pequenas variações de espessura. O método proposto é constituído pela base VSM – velocidade, tensão dinâmica e massa da estrutura – e se baseia em uma distorção conjunta de massa e velocidade, sendo que a primeira contorna os efeitos relativos à inércia da estrutura (geometria e densidade) e a segunda aproxima a resistência estrutural, tanto por compensar o efeito de taxa de deformação e mudança de espessura, como pelas diferenças nas curvas de tensão e deformação. Além disso, os adimensionais propostos nas Eqs. 3.16a-j e que integram o operador na Eq. 3.17 são transformados em um operador mais simples, Eq. 3.44, em função de uma ligeira mudança nos adimensionais já existentes: o Número de Dano D_n [63] e o Número de Resposta R_n [64]. Uma vez que ambos os números não contemplam sensibilidade à taxa de deformação, estes foram reescritos substituindo a tensão de escoamento de referência, σ_0 , pela tensão dinâmica, σ_d , englobando assim efeitos viscoplásticos.

Por fim, tem-se um conjunto de adimensionais que surgiram da reflexão sobre a influência da distorção de massa [61], das dificuldades em se ensaiar modelos de materiais diferentes [25, 28, 59] e de discrepâncias devido à inércia de diferentes materiais [32], além das limitações surgidas da correção somente por velocidade [32, 62]. Quando esses adimensionais são respeitados, tem-se um método capaz de fornecer relação entre protótipo e modelo, mesmo quando existem diferenças em escala,

material e pequenas distorções geométricas. Isto dá crédito à confirmação da hipótese ensejada nesta pesquisa.

5.2 Distorções de massa

Na proposta do item 3.3.2, a base *VSG* dá lugar à base *VSM*, em função da Velocidade, Tensão Dinâmica e Massa da estrutura. Ao substituir na base a massa de impacto G pela massa da estrutura M cria-se o fator de escala de massa da estrutura, β_M , que deverá ser relacionado de alguma forma com o de massa de impacto, β_G , já discutido anteriormente [26,27]. Oshiro [27] comenta que $\beta_G \neq \beta^3$ implica erros, uma vez que o método não distingue variáveis de mesma unidade e, portanto, β_G imposto não poderia ser acompanhado por uma alteração na massa da estrutura. Deveria ser usado, portanto, em casos particulares que se deseja manter a velocidade constante, $\beta_V = 1$, ou quando a massa de impacto fosse muito maior que a da estrutura $G \gg M$. Esses desvios foram investigados especificamente ao se alterar β_V de forma arbitrária por Mazzariol et al. [61], concluindo que a especificação de β_V elevados poderia fornecer resultados adequados se a massa da estrutura fosse alterada, como se usado um outro material. Desvios à parte, a flexibilidade da combinação de β_G e β_V foi explorada em Mazzariol [25] por necessidade de contornar restrições experimentais.

Na apresentação do método não há uso de G ou β_G nas deduções, a não ser para comparar o presente aos métodos anteriores, como as Eqs. 3.8 e 3.21, que resulta na razão r do operador da Eq. 3.44. Se $\beta_G = \beta_M$, o método proposto retorna os resultados dos anteriores. Mostra-se mais interessante o uso de β_M como chave, visto que ele pode ser aplicado diretamente para estruturas cujo carregamento não envolvam massa de impacto.

No item 4.1.1 são apresentados resultados teóricos de impulso contra placas e vigas, cujo carregamento não possui uma massa de impacto G , somente uma velocidade V_0 . Comparando a solução de [58] para modelo e protótipo, é necessário manter R_H igual em ambos para que sejam relacionáveis. Desconsiderando efeitos viscoplásticos, a distorção β_V necessária para placas circulares e vigas, Eqs. 4.3 e 4.10, é igual à obtida a partir de M_0 , Π_6 Eqs. 3.16f-g e 3.28. Se fosse utilizado método de correção unicamente por velocidade [26], Eq. 3.15, e os materiais diferentes possuíssem a mesma relação de resistência e densidade², fica claro que β_V seria alterado de forma diferente do que, por exemplo, a Eq. 3.28.

O comportamento de modelos e as leis propostas para representação de uma placa circular sob carregamento impulsivo foi investigado no item 4.2.2. Quando são excluídos os efeitos de taxa de deformação e, por conseguinte, a aproximação da componente viscoplástica, é possível notar que o perfil deformado nos modelos são idênticos ao da referência, Fig. 4.15a. Ao incluir efeitos de taxa de deformação, surgem pequenas variações.

Ao considerar um caso onde existe uma massa de impacto G , item 4.1.2, faz-se uso da razão $r = M/G$ colocada no operador da Eq. 3.44, o que implica $\beta_M = \beta_G$. A análise teórica para modelo e protótipo mostra que, mantida essa razão constante e não havendo distorção geométrica, os resultados de deslocamento obtidos são relacionáveis, mesmo havendo diferenças em densidade, tensão

² σ_0/ρ .

de escoamento e escala. Numericamente, os resultados de deslocamento no tempo, força e perfil deformado podem ser considerados idênticos, mesmo com grande variação da densidade, conforme Figs. 4.12a, (c) e (e).

Noutra estrutura, a ECD do item 4.1.4, o comparativo do equacionamento da primeira fase fornece a condição necessária igual à razão r , Eq. 4.49. Para a segunda fase obtemos distorção de velocidade β_V , Eq. 4.58 igual à proposta, Eq. 3.24, se não houver distorção geométrica. Numericamente foi investigado o efeito de se alterar a massa da estrutura, por meio de ρ , cujos resultados são apresentados no item 4.2.3. A Fig. 4.18 mostra que mesmo para grandes variações de densidade, $\beta_\rho = 5$ e $\beta_\rho = 1/5$, associadas à variação na escala β , tem-se resultado dos modelos bastante próximo da referência. Além disso, vale recordar o comentado ao fim do item 4.1.4 que, a massa diferente da ECD ao usar uma largura de chapa maior como estudado por Tam e Calladine [68] e Oshiro e Alves [60] pode ser facilmente compensada se considerado $\beta_M = \beta_G$. O mesmo vale para vigas com profundidade maior e a mesma consideração de estado plano de tensão.

Mazzariol, Oshiro e Alves [62] apresentam simulações comparando os fatores do operador da Eq. 3.44, desconsiderando distorções de material, para placas circulares impactadas por uma massa ou carregadas impulsivamente, com o método que utiliza somente distorções de velocidade. Comenta-se que há casos particulares quando a relação entre resistência e densidade são iguais porém, para as outras condições, os resultados fornecem deslocamento menores para o caso de impacto e maiores no caso de impulso quando somente a velocidade é alterada e $\beta_\rho > 1$.

Isto posto, há razões suficientes para se utilizar a base em função da massa da estrutura M e definir $\beta_M = \beta_G$ sempre que houver uma massa de impacto envolvida. Essa solução torna qualquer alteração da massa da estrutura passível de correção sem desvios, algo não obtido por outros autores. Confirma-se assim, uma vez mais, a hipótese motivadora deste trabalho.

5.3 Viscoplasticidade

A diferença na taxa de deformação quando se reduz o tamanho da estrutura é responsável por tornar mais difícil a relação entre modelo e protótipo quando se utilizam materiais sensíveis à essa variável. O método proposto por Oshiro e Alves [26] lida com materiais iguais e usa a lei viscoplástica de Norton, Eq. 3.12, a qual permite compensar o acréscimo de tensão dinâmica na escala reduzida com aumento de velocidade, Eq. 3.13. Tem como principal vantagem não depender da taxa de deformação para se calcular o acréscimo e sua limitação, a necessidade de um material igual. A Eq. 3.15 permite uma flexibilização maior, mantendo os parâmetros viscoplásticos iguais nos materiais e atribuindo um fator de escala para a tensão de referência, β_{σ_0} [59]. Ambos fornecem β_V insensível à variação da taxa de deformação, independentemente da escala β , conforme apresentado na Fig. 4.3a. A vantagem com relação à lei de Cowper-Symonds, Eq. 3.10, utilizada por Oshiro e Alves [24], Fig. 4.3a vs 4.4a, desaparece quando os materiais são diferentes, Figs. 4.3b e Fig. 4.4b.

A solução ideal, β_V invariante com a taxa de deformação, se mostra difícil de se obter para materiais diferentes usando ambas as leis, sendo possível casos particulares como a escala $\beta = 100/1$ da Fig. 4.4b, similar à ideia proposta por outros autores [29]. Utilizando a lei de Johnson-Cook, Eq. 4.32,

Figura 5.1 Fator de escala de velocidade β_V calculado para os materiais e escalas dos experimentos da Seção. 4.3.

obtemos resultados de variação de β_V tanto para materiais iguais como para materiais diferentes, Figs. 4.5a-b. Entretanto, nota-se que, tanto para materiais diferentes, quanto para materiais iguais, a variação de β_V é pequena. Principalmente se comparadas às outras leis, Figs. 4.6a-b. Nesse sentido, o uso desta lei fornece um resultado aproximado que varia pouco para qualquer que seja a taxa de deformação.

Quando avaliamos os materiais utilizados para os ensaios experimentais, nota-se uma variação grande de parâmetros viscoplásticos, Tab. 4.7. Entretanto, em função da pouca redução de escala, a componente de $\beta_{\sigma_{visco}}$ se mostra próxima da unidade e, mesmo para uma faixa grande de taxa de deformação, a variação de β_V é pequena, Fig. 5.1.

Figura 5.2 Evolução da taxa de deformação no tempo para a simulação do impacto contra a placa para a escala Ti 1/1 em baixa velocidade (a), alta velocidade (b). Os pontos avaliados residem na linha média, com distância ao centro em mm conforme (c).

Um outro ponto importante sobre a definição de β_V está no quanto um valor aproximado médio de taxa de deformação é capaz de representar de forma satisfatória o evento estudado. Na Fig. 5.2 são apresentadas a evolução da taxa de deformação ao longo do tempo para cinco pontos da placa circular estudada na Seção 4.3. Os resultados da simulação indicam que há maior concentração da taxa de deformação para pontos próximos do impacto em ambas as velocidades, com queda mais acentuada para baixa velocidade ao se distanciarem do centro. Como era de se esperar, os valores de taxa de deformação para alta velocidade também são mais altos. Nota-se que um valor médio de taxa de deformação tenderia a subestimar os altos valores obtidos para ambos os casos, sendo uma possível fonte de erros. Todavia, ao se utilizar a lei de Johnson-Cook e definir um β_V em função de um valor de taxa de deformação intermediário, por ex. $\dot{\epsilon} = 1/s$, o erro embutido se torna bastante reduzido, visto que não há variação expressiva de β_V como para outras leis.

5.4 Fator de escala de tensão e encruamento

Determinar o fator de escala de tensão, β_{σ_0} , não é tarefa simples. Nos casos teóricos investigados na Seção 4.1, os materiais são definidos como rígidos, perfeitamente plásticos, tornando a representação do material possível via uma única constante, σ_0 . Assim, o fator de escala $\beta_{\sigma_0} = \sigma_{0m}/\sigma_{0p}$ é capaz de relacionar diretamente o material de modelo e protótipo, independentemente do valor de deformação. Quando consideramos o encruamento, podemos ter duas condições distintas: a que um único escalar é capaz de relacionar os materiais de modelo e protótipo, e quando um único escalar apenas aproxima as duas curvas.

Para os casos numéricos – Seção 4.2 – foram criados materiais para os modelos que eram relacionados à referência por um único fator. Módulo elástico, tensão de escoamento e encruamento foram multiplicados por fatores 1/5 e 5, conforme Tab. 4.3. Os resultados para o impacto de uma esfera em uma placa circular excluindo efeitos viscoplásticos, Figs. 4.14a, (c) e (e), mostram que o fator escolhido é capaz de relacionar os modelos à referência. Os mesmos bons resultados são obtidos para uma placa circular com carregamento impulsivo, Fig. 4.17a. Embora não mostrado no item 4.2.3, a variação de β_{σ_0} resulta em modelos similares à referência, algo que também pode ser inferido pela variação de β_ρ , visto que são inversamente proporcionais.

Quando um único escalar não é capaz de relacionar perfeitamente modelo e protótipo, temos os casos mais próximos do que ocorre na realidade. Na Fig. 3.3, são apresentadas curvas que são relacionadas com diversos β_{σ_0} , com detalhe da região do escoamento, Fig. 5.3. O critério a ser utilizado deve considerar a distribuição de deformação na estrutura a ser representada. Mazzariol [25] discute que o carregamento localizado de um painel duplo para os materiais da Fig. 3.3 foi mais bem relacionado considerando a tensão de escoamento, $\sigma_0 = \sigma_y$. Contudo, para um caso onde a deformação era grande e uniformemente distribuída, considerar a tensão média proporcionou melhores resultados, Fig. 5.4.

A partir das curvas de material com aplicação do fator de escala é possível inferir o que ocorrerá na resposta dos modelos. Para os materiais reais da Seção 4.3, Fig. 4.27a, β_{σ_0} foi definido como em função da transição elastoplástica, i.e., $\sigma_0 = \sigma_y$. Ao aplicar o fator às propriedades dos materiais, obtemos as curvas escalonadas da Figs. 4.27b e 5.3. De imediato é possível notar que os encruamentos relativos

Figura 5.3 Curvas dos materiais corrigidos usados nos experimentos. Deformações totais, onde se omitiu a parte elástica para melhor visualização. Ao implicar o fator de escala, os materiais dos modelos se plastificam e passam a absorver energia para deformações menores do que os titânios.

Figura 5.4 Chapa retangular de largura 200mm por 800mm de comprimento e espessura 3mm, engastada nas extremidades menores, impactada por uma massa de 957kg a 5m/s no centro. Com o deslocamento, a deformação na estrutura foi bastante homogênea e ao redor de 50% [25].

do Al 1/1 e dos aços são maiores que os da referência, o Ti 1/1. Dessa forma, o fator escolhido subestima o comportamento dos materiais e o mesmo carregamento nos modelos resultará na absorção da mesma energia relativa com deformação menor. Em suma, os modelos aparentam ser mais rígidos. De fato, isso ocorre nos impactos de alta e baixa velocidade, Figs. 4.42 e 4.51. Essa aparência mais rígida também é obtida nos experimentos. Todavia, devido à falha da referência, esta comparação fica comprometida. Para os outros materiais, as curvas se cruzam próximo do escoamento, fazendo crer que os deslocamentos serão maiores, juntamente com forças relativas menores. Não é o que ocorre. A deformação obtida para a região próxima do impacto indica que há localização de deformações para ambas as velocidades de impacto, Figs 5.5a-b. Ou seja, menos de 10% da placa (raio de 8mm, menor que o indentador – 9,5mm) possui $\epsilon_p > 0.05$. Assim, para o restante da estrutura, fatores β_{σ_0} baseados em deformações inferiores à essas possuem maior chance de proporcionar resultados adequados. Contudo, para todos os materiais, exceto os quatro supramencionados, as curvas de tensão deforma-

ção se cruzam para $\dot{\epsilon}_p$ entre 0 e 0.1. Isto faz com que eles aparentem ser mais rígidos, conforme pode ser observado para todas as simulações, Figs. 4.42 e 4.51. Esse efeito dos materiais, por fim, pode ser facilmente observado na Fig. 5.5, na qual o aço 2/3 mais rígido deforma menos que o 1/1, ao contrário do que acontece para o Cobre 1/3.

Figura 5.5 Deformações plásticas na região próxima ao impacto para simulação de baixa (a) e alta velocidade (b).

Importante ressaltar que o fator discutido influencia também a quantidade de deformação elástica. Se for considerado que as deformações plásticas comandam o comportamento da estrutura e, na verdade, forem as elásticas, a resposta poderá ser satisfatória ou não. Dependerá de como os módulos de elasticidade entre modelo e protótipo se relacionam ao ser aplicado o fator de escala, da mesma forma que a discussão sobre o encruamento. Se o fator de escala de módulo elástico for igual à $\beta_E = E_m/E_p = \beta_{\sigma_0}$, temos que a resposta do carregamento, em força, será igual em ambas as estruturas, apesar de que, por causa da viscoplasticidade, haveria valores maiores de deformação elástica em uma das duas estruturas. E isto ocasionaria um retorno elástico diferente para ambas as estruturas. Se β_E relaciona as transições elastoplásticas, as deformações de escoamento, sendo iguais em ambas e o restante da curva for perfeitamente relacionável por $\beta_\sigma = \beta_{\sigma_0}\beta_{\text{visco}}$, teríamos carregamento e descarregamento iguais em modelo e protótipo. Mais precisamente sobre a resposta em termos da curva do material, Kachanov [75,76] apud Novozhilov [77] mostra que um corpo de material elastoplástico, na fase de carregamento, se comporta igualmente a um corpo elástico ideal, com a mesma curva tensão vs. deformação. Desta forma, corrobora a ideia de que, se as curvas de material forem bem representadas por β_{σ_0} , as respostas das estruturas para um carregamento monotônico serão similares até o instante no qual se iniciar o descarregamento.

Além de materiais distintos, podem ser considerados efeitos que alteram a resposta do material. De uma maneira geral, o aumento de temperatura reduz os valores de tensão vs. deformação de material. Para citar um exemplo, a lei de material de Johnson-Cook, Eq. 4.32, contém porção dedicada aos efeitos de temperatura, o termo final, $1 - T^{*m'}$, sendo a temperatura homóloga

$$T^* = \frac{T - T_{\text{amb}}}{T_{\text{fusão}} - T_{\text{amb}}}. \quad (5.1)$$

Podemos considerar duas situações bem distintas. A primeira, um carregamento que proporciona taxas de deformação tão baixas que a dissipação da energia no material faz com que a temperatura do

material permaneça constante, isotérmica. E a outra em que o carregamento é rápido e faz com que não exista troca de calor e aquece o material, adiabática. Considerando que o material permanece com temperatura constante, podemos considerar realizar ensaios com modelos a uma temperatura diferente, também constante. Por exemplo, considere um caso de uma estrutura feita com componentes poliméricos que deve ser ensaiada a baixas temperaturas, sendo notória a variação das propriedades mecânicas deste tipo de material com a variação da temperatura. É possível considerar realizar o ensaio a uma temperatura diferente, relacionando as curvas dos materiais com uso de β_{σ_0} . Considerando a mesma equação de Johnson-Cook e os materiais iguais, o fator β_{σ_0} estaria em função de $1 - T^{*m'}$

$$\beta_{\sigma_0} = \frac{\left[1 - T^{*m'}\right]_m}{\left[1 - T^{*m'}\right]_p} = \frac{1 - \left(\frac{T_m - T_{amb}}{T_{fusão} - T_{amb}}\right)^{m'}}{1 - \left(\frac{T_p - T_{amb}}{T_{fusão} - T_{amb}}\right)^{m'}}. \quad (5.2)$$

Quando não se tem a caracterização considerando alguma lei específica, a discussão anterior sobre como definir β_{σ_0} também é válida. No caso em que não se pode desprezar o acréscimo de temperatura devido à deformação plástica, a solução se torna bem mais complexa. Seria necessário encontrar um caso particular no qual a conversão de deformação plástica em calor e o consequente acréscimo de temperatura proporcione a mesma queda relativa de tensão. Ou seja, β_{σ} deveria englobar os efeitos estáticos β_{σ_0} , dinâmicos β_{visco} e de temperatura β_T e ainda ser válido para a duração do evento estudado. E, nesse caso específico, existiriam duas variáveis sensíveis à taxa de deformação, a porção viscoplástica e de temperatura, que entrariam no cálculo de β_V . Seria mais um tipo de aproximação que poderia ser estudada.

5.5 Distorções geométricas

Mencionamos no item 3.2.3 a existência de distorções geométricas quando ao menos uma dimensão χ é escalonada segundo um fator diferente, ou seja, $\beta_\chi \neq \beta$. Em casos experimentais, utilizar uma espessura distorcida $\beta_H \neq \beta$ pode ser a única solução para viabilizar um ensaio, visto que podemos definir os fatores de escala das outras dimensões, como largura, profundidade ou raio. Na Seção. 4.3 dentre os diversos materiais escolhidos para ensaios experimentais, nenhum dos modelos em qualquer escala dispensou distorção na espessura, conforme mostra a Tab. 4.7. Isto mostra que, ainda que pequena a distorção em alguma dimensão, ela se mostrará presente em muitos ensaios. Considerando que as outras dimensões podem ser definidas – como comprimento, raio etc. – a espessura poderá ser a dimensão a ser compensada.

Na proposta de método apresentada no item 3.3.2, a dimensão da espessura ou altura H surge com a obtenção de adimensionais baseado em M_0 , o momento para plastificação total de uma seção de viga ou placa, Eqs. 3.16f-g. Na dedução subsequente, a distorção é limitada à espessura, atribuindo fatores de deslocamento e velocidade em função dessa distorção, Eqs. 3.24 e 3.25. A partir do fator de escala de tempo é possível obter que as deformações são iguais no modelo e no protótipo independentemente da distorção, Eq. 3.35. Escreve-se o fator de taxa de deformação para cada direção concluindo que o fator de taxa de deformação também não varia conforme a direção, Eq. 3.43. Dessa forma, tem-se que, para que isso seja correto, o fator de velocidade de uma direção é proporcional à

distorção da dimensão β_χ/β .

Definir que $\beta_\delta = \beta_H$ difere bastante do obtido por [60], em seu método aproximado, que vislumbra obter o fator de deslocamento em função da escala, $\beta_\delta = \beta$. Dessa forma, a estrutura no método aqui proposto terá aspecto deformado, porém similar à estrutura, podendo ser relacionada ponto a ponto, e não somente valores deslocamento máximo, por exemplo. Para equações analíticas de estrutura, seção 4.1.1, considerando o fator de deslocamento em função de β_H e respeitando as relações propostas, obtém-se representação exata entre modelos e protótipo, mesmo quando há distorções de espessura. Explica-se a exatidão dos resultados por elas estarem descritas em função do adimensional de resposta, R_n . Quando a solução depende de mais parâmetros, como uma viga impactada por uma massa – item 4.1.2 – e a ECD – 4.1.4, não é possível obter os mesmos resultados exatos. Explica-se o primeiro caso pela consideração de grandes deformações e as forças de cisalhamento, que dependem da força de membrana para plastificação total da seção [66]

$$N_0 = BH\sigma_0, \quad (5.3)$$

e da força de cisalhamento para plastificação total

$$Q_0 = \frac{BH\sigma_0}{2}. \quad (5.4)$$

Comparando ao R_n , em função de $M_0 = \sigma_0 BH^2/4$, fica claro a impossibilidade de distorcer H e ainda sim ser capaz de respeitar os três parâmetros M_0 , N_0 e Q_0 . Assim, a única forma de se obter resultados totalmente relacionáveis é não definindo distorção da espessura. Numericamente, para placas circulares com carregamento impulso, distorção relativa pequena de 2/3 ou 3/2 e razão $R/H = 25$, obteve-se bons resultados, ainda que exista um perfil um pouco diferente para os modelos, especialmente os de menor espessura Fig. 4.16, mesmo quando desconsideramos efeitos viscoplásticos. Para o impacto de esfera contra uma placa, os resultados dos modelos se tornam ainda mais distantes da referência, Fig. 4.13. Quando a espessura é distorcida para menos, tem-se uma força relativa menor no início, que se torna crescente com o deslocamento. Para distorção que aumenta a espessura, ocorre o inverso. Ainda sim, para os dois carregamentos, temos desvios do perfil menores que 10%, sendo bastante aceitáveis se considerarmos que somente os efeitos de M_0 foram incluídos.

Ao avaliarmos o comportamento da ECD, obtemos resultados distintos. Para a ECD temos o deslocamento da massa de impacto e força relacionáveis, enquanto que o perfil requer distorção diferente da empregada para os outros casos, Fig. 4.19. Do ponto de vista da massa, a correção empregada é correta, visto que primeira fase está em função da relação de massas e a segunda por M_0 , composta pelos esforços de inércia e de rótulas plásticas. Entretanto, a correção subestima os deslocamentos do modelo de espessura aumentada, proporcionando maiores deslocamentos relativos para fora do plano, Figs. 4.19c. Ocorre o oposto quando se reduz a espessura. A distorção da espessura faz com que o deslocamento da massa, que está na direção vertical, seja distorcido e induza a maiores deslocamentos, pelo aumento da energia ao β_V considerar β_H . Além disso, o aumento da espessura altera o comportamento da rótula, proporcionando maiores deformações na superfície que, aliada ao material com encruamento, faz com que ela tenha raio de curvatura diferente. Novamente, removendo a

distorção de espessura ou definindo-a como pequena, não ocorreriam tais desvios.

No método proposto, o equacionamento considera a independência das direções para se obter as deformações para cada dimensão, obtendo valores iguais no modelo e protótipo, Eq.3.35. Entretanto, para estruturas onde uma direção de carregamento influencia outra, temos que as deformações não serão iguais no modelo e no protótipo se houver distorções geométricas. Para o caso de uma placa circular, as deformações estão em função do deslocamento vertical e não somente da relação deste com a espessura, resultando em valores maiores quão maiores forem os deslocamentos, conforme resultados de simulação do item 4.2.1, Fig. 5.6. Ao aplicar os fatores $\beta_{H'} = \beta_H / \beta$ nas deformações, curvas tracejada azul e rosa, obtemos resultados mais próximos da referência em preto. Ou seja, temos deformações 1,5 vezes maior se este for o valor utilizado para a distorção da espessura. Ao avaliarmos as taxas de deformação nos pontos A, B e C, Figs. 5.2c e 5.6b, notamos que elas são inversamente proporcionais à mudança de espessura, sendo que deveriam ser iguais, Eq. 3.40. Assim, é necessário cuidado ao se distorcer excessivamente a espessura, pois fará com que o acréscimo de deformação devido à distorção possa incorrer em falha de material, alterar o perfil deformado do modelo e até mesmo invalidar considerações com relação à viscoplasticidade. Além disso, alterar a espessura significa modificar o parâmetro R/H que norteia a composição de esforços entre momento, membrana e cisalhamento.

Para os ensaios experimentais realizados, a distorção de espessura foi pequena, não fornecendo maiores problemas. Houve a tentativa de utilizar dois modelos distorcidos, Al2024-T3 (3mm) e Ti6Al4v (2mm) com as dimensões da escala 1/3, sendo ambos descartados pela falha ocorrida. Se na escala 1/1 e 2/3 trincas se mostravam críticas, tornaram-se mais ainda ao considerar o triplo e o dobro da deformação.

Figura 5.6 Deformações plásticas equivalentes em linhas sólidas, e tracejadas quando aplicado fator de escala $\beta_{H'}$ (a); taxas de deformação (b) para a simulação de alta velocidade do item 4.2.1 com $\beta = 1$, $\beta_p = 1$, $\beta_{\sigma_0} = 1$ com variações de espessura.

5.6 Materiais reais

Realizar ensaios experimentais com modelos apresenta diversas dificuldades. Em primeiro lugar devemos pensar no custo, passando pela disponibilidade do material na espessura desejada e os equi-

pamentos disponíveis para ensaio. Entretanto, as particularidades de cada material como densidade, tensão de escoamento, encruamento etc. podem ser utilizadas em favor do pesquisador. Por exemplo, ao realizar ensaios do titânio como referência, a velocidade utilizada nos experimentos se mostrou um fator limitante do aparato experimental. Entretanto, seria possível utilizar os modelos de alumínio Al 2/3 e 1/3 e ainda sim ser capaz de inferir o que ocorreria na referência. Mas, a baixa densidade do alumínio pode tornar a massa de impacto ou projétil bastante reduzida, dificultando o ensaio. Assim, podemos utilizar aços carbono ou mesmo o cobre, de densidade alta e baixa resistência por densidade. Dessa forma, temos um ensaio a ser realizado com massa de impacto maior – mais fácil de controlar – e com a possibilidade de usar velocidades relativas superiores às do titânio. Seguindo os fatores β_V da Tab. 4.12, poderíamos representar ensaios de placas de titânio impactadas acima da velocidade do som, com uso de modelos em escala reduzida de Cobre ou Aço, com projéteis viajando a velocidades subsônicas.

Mesmo para materiais nominalmente iguais, podemos ter curvas tensão vs. deformação um pouco diferentes, Fig. 4.27a. Essa diferença, por si só, justifica a aplicação de leis de similaridade que consideram os efeitos de tensão de escoamento, β_{σ_0} , discutido no item 5.4 e avaliar criteriosamente os efeitos do encruamento relativo, Fig. 4.27b. Existirão casos que um material diferente proporcionará curvas mais próximas do que um nominalmente igual, como o Cobre 2/3 e o Al 1/3 com relação à referência, se comparado ao Titânio 1/3.

Deve-se estar atento às propriedades de falha dos materiais. Escolher um material menos dúctil como o Al2024-T3, pode tornar qualquer relação com outros materiais imprópria, quando na presença de falha, vide resultados do item 4.3.5. Entretanto, um material com alta ductilidade não será capaz de reproduzir uma trinca na mesma deformação que a referência. Assim, segue a limitação de representar o comportamento de um protótipo quando o carregamento não o torna sujeito à falhas.

Outro ponto importante sobre materiais e ensaios consiste no custo, Tab. 4.5. A escala do ensaio β faz com que o volume seja reduzido em β^3 . As placas ensaiadas para a referência possuíam dimensões $312 \times 312 \times 3,2$ mm, resultando em aproximadamente R\$608/chapa. Para a menor escala, uma placa de titânio custa apenas R\$29. Se utilizados materiais diferentes, podemos chegar ao valor ínfimo de R\$1,53 por chapa. Indubitavelmente, o fator custo pode ser preponderante para aumentar o conhecimento sobre uma estrutura antes de, finalmente, realizar o ensaio com o material na escala definitiva.

Além da aquisição dos materiais, o custo do aparato experimental não pode ser desprezado. Os suportes de fixação das chapas possuíam custo proporcional à escala. Não obstante, o custo de construção de um Martelo de Impacto para massas de 1000 kg é muito superior ao de um para massas de 10 kg, por exemplo. Os outros equipamentos de medição foram compartilhados, não oferecendo vantagens. Entretanto, não se deve esquecer de que, por causa do fator de escala de tempo β_t ser alterado conforme escala e velocidade, Tab. 3.2, a duração do ensaio na escala reduzida passa a ser menor. Assim, para que se tenha uma aquisição de dados apropriada, é necessário utilizar maior frequência de aquisição. Para a gravação, mais quadros/s significam menor resolução e necessidade de maior iluminação concentrada na menor área. Mesmo assim, de uma maneira geral, é mais fácil e rápido preparar e controlar os parâmetros do ensaio em escala reduzida do que o de escala maior.

5.7 Similaridade cíclica

Os pequenos desvios devido ao encruamento discutidos na Seção 5.4 se tornam mais significativos ao considerar um padrão de deformação repetitivo, como o ocorrido para flambagem progressiva. Não somente são atingidas deformações mais altas por causa das rótulas plásticas, como a geometria de menor energia – a mais provável de ocorrer – é impulsionada pela relação de módulo elástico e encruamento. Ao se utilizar materiais diferentes, tem-se grande chance de haver dobras de formas e comprimento diferentes que dificultam relacioná-las.

Resultados publicados em artigo [28] e apresentados na Fig. 5.7 mostram que o comprimento da dobra e sua forma não são somente função da geometria, diferentemente das aproximações teóricas [33,58].

Mazzariol e Alves [28] investigaram a aplicação de leis de similaridade sem distorção geométrica em estudo de flambagem progressiva de tubos de seção circular em três escalas e materiais diferentes (1/1 alumínio, 3/4 aço e 1/2 alumínio e aço). Considerando a aplicação dos fatores β_{σ_0} nos materiais, Fig. 5.7a, foi possível notar proximidade das curvas corrigidas (linhas tracejadas). Um martelo de impacto com guias e indetador plano foi utilizado para realizar os ensaios, Fig. 5.7b. Os tubos de alumínio protótipo, de 50,8 mm de diâmetro, 2 mm de espessura e comprimento 200 mm, em sua maioria colapsaram em flambagem progressiva com dobra axissimétricas, conforme Fig.5.7c. Para os tubos de aço em escala 1/2, em duas velocidades calculadas distintas, a flambagem foi prioritariamente no modo diamante, com apenas um exemplar em modo axissimétrico, Figs. 5.7d-e.

Este único exemplar axissimétrico na escala reduzida, Fig. 5.7e, leva a diversas questões, principalmente se compará-lo com os tubos de alumínio, Fig. 5.8. Ainda que o modo de flambagem fosse igual para todos os modelos, haveria diferenças consideráveis na geometria deformada, visto que o protótipo contém as mesmas seis dobras que o modelo em escala reduzida, mas com uma porção superior do tubo não deformado, à esquerda, que inexiste no modelo, à direita. Ou seja, as dobras ocorridas no modelo possuem comprimento relativo maior que as do protótipo, que provavelmente está relacionada ao material. Neste ponto surge o cerne do problema: haveria influência significativa do material na geometria deformada? Se sim, a consideração dos campos de deformação iguais no modelo e protótipo seria inválida, uma vez que as dobras não seria iguais, e seria necessário assumir algo diferente.

Parece ser possível enxergar uma característica, um padrão que é típico para cada conjunto de parâmetros para esses tubos sob compressão. Seria a similaridade “elementar”. Assim, a estrutura criaria uma resposta relacionável se essa similaridade elementar fosse respeitada. Esse padrão de deformação relacionável está ligado ao comprimento de dobra, comprimento característico para os tubos. Dessa forma, a geometria possível de se atingir em modelos é o comprimento elementar e não a geometria deformada. Ter-se-ia o mesmo padrão em outras representações se essa condição fosse respeitada. Seria um outro tipo de distorção geométrica.

A possível existência desse comprimento característico faria com que as distorções geométricas assumissem outro papel, o de compensar diferentes encruamentos – aos quais se atribuem as diferenças no comprimento de dobra. E tanto os métodos apresentados anteriormente [22, 60], assim como

Figura 5.7 (a) As curvas sólidas dos materiais dos modelos, vermelha, azul e verde se mostram bastante diferentes dos material protótipo, em preto. Entretanto, ao aplicar o fator β_{σ_0} , as curvas corrigidas (linhas tracejadas) se aproximam bastante da referência, inclusive com encruamento similar. (b) Aparato experimental do impacto axial. (c) Tubos protótipos (diâmetro 50,8mm, parede de 2mm e comprimento 200mm.), (d) e (e) de aço com $\beta = 0.5$.

Figura 5.8 Apesar de possuírem o mesmo padrão de dobra axissimétrica, o tubo protótipo em alumínio – esquerda – flamba com comprimento de dobra relativamente menor do que o tubo de aço com $\beta = 0.5$ [28].

o aqui proposto, item 3.3.2, não serviriam, visto que eles compensariam deslocamentos globais da estrutura e não efeitos locais, cíclicos, como os existentes na flambagem progressiva. Cada pequeno desvio no padrão deformado é acumulado, gerando diferenças importantes no aspecto final, como mostrado na Fig. 5.8. Na literatura se encontra informações sobre comprimento de dobras [33], bem como comentários sobre a influência do encruamento da curva plástica nesses comprimentos [78], não havendo solução ou fórmula direta que relacione ambas quantitativamente. Outras abordagens que estudam formatos de dobras excluem a influência do encruamento [79, 80], não permitindo análise direta.

Figura 5.9 (a) Curvas dos materiais empregados como protótipo – titânio – e modelo – latão modificado. Ambos são representados pela lei de Johnson-Cook, com parâmetros $A = 1104$ MPa, $B = 1036$ MPa e $n = 0.635$ e $A = 112$ MPa, $B = 1220$ MPa e $n = 0.420$. (b) o modelo numérico com as dimensões apresentadas é restrito na superfície inferior em deslocamento vertical e rotações, enquanto que na superior há deslocamento vertical imposto e rotações restritas.

Assim sendo, foram realizadas simulações visando o estudo individual de cada meia dobra, para os parâmetros geométricos e de material escolhidos. O comprimento da meia dobra seria variado até que sua compressão quase-estática atingisse o ponto mínimo de energia. Cada análise numérica é axissimétrica, iniciando pelo deslocamento dos nós da face superior e sendo interrompida quando

houver contato entre os elementos e uma das duas linhas imaginárias paralelas às superfícies superior e inferior, conforme condições de contorno da Fig. 5.9a. A geometria de referência e o modelo possuem a mesma escala 1/1, visto que o estudo é quase-estático e não existem efeitos locais do material. Dois materiais diferentes, titânio de liga Ti6Al4v [81] e um latão [65] com encruamento padrão quadruplicado, foram usados como referência e modelo, Fig. 5.9b. Na primeira análise para ambos, de diâmetro 50,8 mm e espessura 2,0 mm, as simulações forneceram comprimento de menor energia distintos, Fig. 5.10a. Em seguida, a espessura do modelo foi alterada visando atingir comprimento de dobra $L_m \approx L_p$, gerando os modelos com espessura $H = 1,65$ e $H = 1,60$ mm em azul e rosa, respectivamente, na Fig. 5.10a. Entretanto, uma outra forma de avaliar os comprimentos mínimos é utilizando o deslocamento efetivo, i.e., o quanto a porção superior se desloca até o final da dobra. Na Fig. 5.10b são apresentadas as relações de energia para o comprimento efetivo L_{eff} . Constata-se que o valor efetivo é inferior ao nominal, como se pode esperar, e uma certa dispersão dos dados para L grandes, fazendo com que as curvas formem um caracol, principalmente para a referência. Isto é um indicativo de que o L escolhido era grande o suficiente para quase se obter duas dobras, fato esse claro ao se observar os dados em função de L_{eff} .

Figura 5.10 Gráficos de energia total absorvida (a) em função do comprimento inicial da geometria e (b) do deslocamento imposto, o comprimento efetivo L_{eff} . Os valores do eixo ordenado estão em função da energia absorvida para o primeiro comprimento avaliado, $L = 19,18$ mm.

São mostradas na Fig. 5.11 os perfis obtidos para a referência, modelo de mesma geometria e modelo com espessura reduzida para 1,65 mm. É possível notar que para o mesmo comprimento inicial $L = 19,18$ mm tem-se perfil bastante diferente para a referência, Fig. 5.11a e modelo de mesma geometria, Fig. 5.11b. Nota-se que, para a referência, o maior comprimento de dobra da simulação resulta em uma dobra similar à mínima, porém acrescida de uma porção vertical quase não deformada, enquanto que no modelo de mesma geometria, a dobra é alongada, com menor curvatura. Uma possível explicação seria o encruamento. Quanto menor for, menor a energia para realizar curvaturas pequenas, permitindo a localização de deformações sem que resulte em aumento excessivo de energia. Ao utilizar um encruamento maior, Latão*, as curvaturas acabam sendo maiores, ainda que o perfil de comprimento mínimo tenha aparência bastante próxima. Entretanto, as curvas de minimização da energia, Fig. 5.10, mostram parábolas diferentes, com comprimento mínimo maior para o Latão*, sugerindo que raios de curvatura ainda menores absorveriam mais energia se comparada a outras configurações com comprimento maior, raio menor e maior porção “retilínea” plastificada. No limite sem encruamento,

Figura 5.11 (a) Perfis de dobra para o titânio de espessura $H = 2.00$ mm para os comprimentos $L = 19.18$ mm, 10.348 mm e 7.348 mm. (b) Modelo $H = 2.00$, $L = 19.18$ mm, 11.878 e 7.318 mm e (c) $H = 1.65$, $L = 19.18$ mm, 10.438 mm e 7.318 mm. (d) Sobreposição das dobras da referência, em vermelho, e modelos $H = 2.00$ e $H 1.65$ mm, em verde e azul, respectivamente.

teríamos as verdadeiras rótulas plásticas, com raio de curvatura tendendo a zero.

Ao reduzir a espessura para $H = 1.65$ mm, tem-se resultado bastante distinto, com o L maior proporcionado uma dobra completa, Fig. 5.11c. O gráfico da Fig. 5.10 sugere que o pico de energia indica uma mudança de modo de flambagem, ao redor de $H = 18$ mm. Assim, ao reduzir o comprimento de dobra migra-se da análise de uma dobra completa para a avaliação de uma meia dobra com excesso de material. A dobra de valor mínimo de energia possui aspecto similar às demais de $H = 2.00$ mm e materiais diferentes. Os perfis de energia mínima foram sobrepostos na Fig. 5.11d, com as linhas verticais representando o comprimento de tubo não deformado. Nota-se que o perfil da referência,

em vermelho, move-se um pouco para o centro – à esquerda – se comparado aos modelos, verde e azul. Quando a espessura é reduzida no modelo, em azul, o deslocamento horizontal é menor tanto ao centro como na direção oposta.

Esses resultados de comprimento de dobra nominal se mostram interessantes ao avaliarmos duas aproximações para L , Alexander [82]

$$L = R1.76 \left(\frac{H}{2R} \right)^{1/2} = 8.87 \quad (5.5)$$

e Abramowicz e Jones [33]

$$L = R1.905 \left(\frac{H}{2R} \right)^{1/2} = 9.60, \quad (5.6)$$

visto que os valores mínimos de L obtidos para os materiais escolhidos — 10,348mm para a referência e 11,878mm para o material modelo, Fig. 5.11 — são maiores aos obtidos pelas Eqs. 5.5 e 5.6. Reduzindo a espessura para $H = 1.65\text{mm}$ teríamos $L_{\text{Abra}} = 8.06\text{mm}$ e $L_{\text{Ale}} = 8.72\text{mm}$, também inferiores ao valor obtidos, $L = 10,438\text{mm}$.

Figura 5.12 Curvas da resposta dos tubos em termos de força escalonada por deslocamento adimensionalizado pelo comprimento de um dobra completa (a) e pelo comprimento efetivo de uma dobra completa (b). As curvas de força são apresentadas em cores sólidas para cada tubo e tracejada para a média de força calculada. A redução da espessura para o Latão* permite atingir uma força média escalonada bastante próxima da referência.

Na Fig. 5.12 são apresentadas as curvas de F vs. δ para um tubo longo $L = 200\text{mm}$, para as dimensões da referência, em preto, com mesma geometria e material diferente, em verde, e dos modelos de espessuras reduzidas, $H = 1.65\text{mm}$ e $H = 1.60\text{mm}$ – em azul e rosa. O resultado de força de compressão foi adimensionalizado pela força média para formação de uma meia dobra, calculada a partir da energia e do L_{eff} , Fig. 5.10b para formação da dobra de menor energia. Quanto aos deslocamentos, foram comparados ao dobro de L e L_{eff} , ou seja, o equivalente ao que se desloca para se ter uma dobra completa. O início da curva dos modelos são bem distintos da referência, com um pico claro para a referência enquanto que para os modelos existem dois pontos: um similar ao escoamento próximo ao valor 1 de força e o outro tão alto quanto à referência. Ao analisar as forças médias, linhas tracejadas, constata-se os valores acima da unidade. Isto significa dizer que a força obtida a partir de uma meia-dobra subestima o que acontece em tubos mais longos. Talvez um tubo ainda mais comprido

faria com que a força média se tornasse mais próxima do obtido. Entretanto, um aumento excessivo poderia proporcionar outro modo de flambagem, como a global, algo não capturado em sua plenitude pela consideração de simetria axial.

Ao reduzir a espessura de $H = 2,00$ mm para $H = 1,60$ mm atingiu-se força média menor do que a da referência, indicando que um H entre 1,60 e 1,65 proporcionaria força média relacionáveis. Pelo gráfico de energia, Fig. 5.10 o comprimento de dobra L ou L_{eff} igual ao da referência também estaria entre os valores de espessura supracitados.

Figura 5.13 Tubo referência de comprimento 200mm em flambagem progressiva axissimétrica, em vermelho. Em verde encontra-se a mesma geometria porém com material diferente e em azul com espessura reduzida para 1,60mm.

O aspecto dos tubos ao final da simulação são apresentados na Fig. 5.13. Foram obtidas para a referência 15 dobras completas, com as bordas um pouco mais compridas que a média. Para os modelos foram obtidas 13, 16 e 16 dobras para os modelos de $H = 2,00$ mm, 1,65mm e 1,60mm. Importante ressaltar que o número de dobras é um valor objetivo, entretanto o comprimento de dobra é alterado conforme a disponibilidade de material ainda não deformado. Se o comprimento fosse diminuto – para uma única dobra completa – ou infinito – suficiente para quantas dobras fossem necessárias, os L_{eff} se aproximariam daqueles obtidos em simulação controlada e, acredita-se, do comprimento da referência. Essas diferenças entre uma e outra dobra ficam evidentes na comparação dos tubos longos, especialmente para a referência, com comprimentos menores na porção central e para o modelo $H = 1,60$ mm, com comprimento maior, também na porção central.

O método numérico proposto para avaliar o menor comprimento de dobra se mostra bastante frutífero, ainda que necessite de uma investigação mais profunda. No estudo teórico é necessário

estabelecer o tipo de dobra que ocorrerá, se plana [82], curvas [33], parcialmente curvas ou interna e externa [79, 83], considerando variação na espessura [80]. Em contrapartida, neste método numérico, boa parte desses parâmetros não carecem de definição, pois são avaliados pelo programa em elementos finitos, sendo necessário apenas variar o H e, posteriormente, a espessura. Materiais com encruamento também são considerados de forma natural, sem que seja impeditivo ou haja aumento da complexidade.

Embora possa ser atribuída o padrão característico como sendo em função de L , mais útil é considerar o parâmetro L_{eff} visto que para uma compressão axial que proporcione dobras axissimétricas, será este o valor que proporcionará força média e deslocamento de compressão máximos relacionáveis. Portanto, para utilizar leis de similaridade para tubos deve-se considerar a redução ou aumento relativo de espessura conforme o comprimento L_{eff} mínimo sugerir, em método que é iterativo para obtenção dos valores e parâmetros, porém não necessita diversos ensaios para se calcular fatores aproximados como proposto em [60]. Na indisponibilidade da espessura exata, devem ser utilizadas espessuras maior e menor com a finalidade de se estabelecer valores superior e inferior. O fator de força deverá ser obtido através da energia e comprimento efetivo da dobra de menor energia. Efeitos de velocidade relacionados à inércia poderão ser corrigidos a partir da massa de impacto, conforme proposto no item 3.3.2, enquanto que os de taxa de deformação poderão ser obtidos a partir de modelos teóricos e incluídos à energia necessária para cada dobra, em função da velocidade de impacto.

Assim sendo, surge uma possível solução para as diferenças encontradas nas dobras apresentadas. A similaridade consistiria não na igualdade do campo de deformações, no qual se espera $\beta_\epsilon = 1$ e sim no número de dobras. Cada dobra, por sua vez, será função da geometria e material. Para se obter uma relação entre um tubo sob flambagem progressiva é necessário avaliar o comprimento de dobra mínima e obter o deslocamento efetivo, i.e., a diferença entre o comprimento inicial e o deformado ou, ainda, o quanto se deslocou para concluir uma dobra. Para o modelo candidato, inicialmente se obtém a dobra de menor energia com a geometria inicial e se decide pela redução ou aumento da espessura. No caso investigado, a espessura é reduzida, diminuindo o comprimento de dobra e o deslocamento efetivo, Fig. 5.10. Podemos obter, assim, valores de deslocamento efetivo iguais para protótipo e modelo com geometria distorcida. Ao comprimi-los, ter-se-á deslocamento máximo próximos, uma vez que foi exatamente esse o critério respeitado. A curva de força vs. deformação e mais especificamente a força média, podem ser relacionadas utilizando a energia mínima para a dobra, que fornece excelentes resultados, Fig. 5.12.

Por fim, dificilmente se terá o mesmo aspecto de dobra, entretanto pode ser observada a tendência de se obter número de dobras bastante similar e um comprimento efetivo próximo para ambos os tubos, diferentemente do que ocorre ao não considerar a distorção geométrica da espessura, Fig. 1.6.

5.8 Incerteza dos fatores

Considerando o caráter aproximado do método, fez-se necessário avaliar o quanto os parâmetros utilizados influenciam o cálculo dos fatores. Na Fig. 5.14a são mostrados os fatores β_V , juntamente com a incerteza, Tab. 4.9. Nota-se que estas são pequenas se comparadas ao valor calculado. As compo-

nentes da incerteza, Fig. 5.14b, indicam que o fator de densidade influencia pouco, enquanto que os parâmetros de resposta do material – estática e dinâmica – são os que mais influenciam. Considerando que os materiais respeitem as ligas nominais, a incerteza da caracterização poderia ser reduzida amplamente se aumentado o número de espécimes. Os aspectos geométricos, β_H e β_R , foram definidos como determinísticos, embora pudessem também participar da incerteza. É possível obter as incertezas para todos os fatores da Tab. 3.2. Conforme Ap. E, para $\beta_F = \beta_\chi^2 \beta_{\sigma_0} \beta_{visco}$,

$$\left(\frac{\varsigma_{\beta_F}}{\beta_F}\right)^2 = \left(\beta_{visco} \beta_\chi^2\right)^2 \varsigma_{\beta_{\sigma_0}}^2 + (2\beta_\chi \beta_{\sigma_0} \beta_{visco})^2 \varsigma_{\beta_\chi}^2 + \left(\beta_{\sigma_0} \beta_\chi^2\right)^2 \varsigma_{\beta_{visco}}^2. \quad (5.7)$$

Calculando para a maior incerteza de β_V , Ti 1/3, obtemos $\beta_F = 0,100 \pm 0,0002$ ou 0,2%. Assim, é possível afirmar que a incerteza obtida por aplicar os fatores é significativamente menor do que o desvio padrão experimental, Figs.4.41 e 4.51a. Isto posto, a incerteza do cálculo dos fatores pode ser desprezada, se comparado aos experimentais.

Há modelos de materiais implementados em programa de elementos finitos comercial que lidam com propriedades de materiais estocásticas [84]. Mais do que o cálculo dos fatores, pode ser realizado estudo para avaliar o quanto as incertezas nas propriedades dos materiais influenciam a resposta esperada. Tal abordagem seria bastante interessante no caso da similaridade cíclica. Entretanto, tal verificação está além do escopo deste trabalho.

Figura 5.14 (a) Incertezas do fator de velocidade β_V calculado a partir dos desvios das propriedades dos materiais. (b) Composição da incerteza em função dos diferentes fatores de escala. A parcela viscoplástica, β_{visco} contribui com a maior parte do erro.

5.9 Falha de material

Uma das condições para a validade do método proposto no item 3.3.2, é a ausência de falha de material. Ou seja, se houver qualquer fissura, trinca ou descontinuidade do material causada pelo carregamento, as leis se tornam impróprias. Entretanto, podemos considerar casos particulares. Um critério de falha simples, baseado em deformação máxima, ϵ_{max} , independente da triaxilidade, histórico do carregamento, temperatura ou taxa de deformação. Se for possível encontrar um material para construir modelos que também possuam falha caracterizada dessa forma, bastaria encontrar ϵ_{max} igual em

modelo e protótipo. Entretanto, essa condição torna a aplicação bastante restritiva. Se os materiais forem tão diferentes como os utilizados na Seção 4.3, é bem provável que não seja possível casar as condições para falha.

Entretanto, existem critérios que abrigam outros efeitos e permitem uma representação mais abrangente. Johnson e Cook [85] apresentam um critério que engloba diversas variáveis para a Eq. 4.32, adicionando fratura ao considerar a deformação para ocorrência de falha

$$\varepsilon_f = [D_1 + D_2 \exp D_3 \sigma^*] [1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}^*] [1 + D_5 T^*], \quad (5.8)$$

para valores constantes de σ^* , $\dot{\varepsilon}^*$ e T^* . O termo adimensional de tensão é definido como a razão entre a pressão hidrostática e a de von Mises, $\sigma^* = \sigma_h / \sigma_{eq}$. As outras duas constantes são iguais às das Eqs. 4.32 e 5.1. Os parâmetros $D_1 \dots D_5$ são conhecidos como os representativos do material.

Isto posto, poderíamos estender o conceito de deformação equivalente máxima, associando os efeitos apresentados na Eq. 5.8 e encontrando materiais que, para as condições de ensaio e β_V calculado segundo a Tab. 3.2, forneçam deformações iguais ou muito próximas. A tarefa se torna mais difícil se considerarmos que o termo relativo à taxa de deformação está em função de β_V e β . Porém, se a falha de um material depender da temperatura, esta poderia ser usada como parâmetro de correção da deformação de falha, assim como a massa de impacto β_G para a densidade ou massa da estrutura. Não obstante, alterar a temperatura modificaria β_{σ_0} , conforme mencionado na Seção 5.4, alterando a velocidade e a taxa de deformação etc. Somente uma análise ampla de materiais candidatos e todas essas variáveis permitiriam encontrar alguma solução aproximada para a questão.

Há modelos constitutivos que consideram que a escala influencia suas propriedades mecânicas, como o denominado Zerilli-Armstrong [86]. Contudo, essa particularidade pode ser minimizada ao realizar ensaios com espécimes compatíveis com tamanho da estrutura, ou até mesmo escalonados conforme realizado no item 4.3.1. Outro aspecto importante de variar a escala reside na falha propriamente dita. Conforme se reduz as dimensões do espécime ou estrutura, os valores de deformação de ruptura tendem a aumentar, fenômeno bastante estudado para materiais com comportamento quase-frágil [3]. Dessa forma, obtemos mais um fator a ser considerado. Para obter falhas similares, temos de considerar realizar caracterização que varie as dimensões gerais e assim obter o efeito da escala nesse fenômeno.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi investigada a hipótese de ser possível inferir o comportamento de uma estrutura protótipo sujeita a cargas dinâmicas que proporcionam severas deformações plásticas com o uso de modelos desta mesma estrutura, de escala e materiais diferentes. No Capítulo 3 – Desenvolvimento, são apresentados diversos métodos para relacionar modelos e protótipo propostos por outros autores. Tendo em vista que o uso de materiais diferentes – tensão de escoamento σ_0 , densidade ρ e viscoplasticidade – não estavam contemplados em tais métodos, houve espaço para proposição de um procedimento próprio.

A base utilizada por Oshiro e Alves [26], constituída por Velocidade, Tensão e Massa de Impacto, VSG, mostrou-se insuficiente para relacionar modelos feitos de materiais de diferentes densidades. Além disso, o uso da lei de viscoplasticidade de Norton sugerida não ofereceu vantagens, conforme apresentado na Seção 4.1.3. Assim, foi decidido que a base geradora dos adimensionais fosse constituída por massa da estrutura, ao invés da de impacto, gerando a VSM – Velocidade, Tensão Dinâmica e Massa da Estrutura. Tendo em vista a possibilidade de contornar pequenas distorções de espessura, foram inseridos adimensionais baseados no momento de plastificação total de uma seção de viga ou placa, M_0 . Tais considerações resultaram no adimensional

$$\Pi_7 = \left[\frac{\rho V^2}{\sigma_d} \right]. \quad (3.16h \text{ revisitada})$$

bastante similar ao Número de Dano, ou *Damage Number* [63],

$$D_n = \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0}, \quad (3.29 \text{ revisitada})$$

Quanto ao adimensional de M_0 , este fornece fatores de escala de velocidade para o impacto em uma placa circular

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}. \quad (3.28 \text{ revisitada})$$

o qual muito se assemelha ao fator obtido a partir de outro adimensional, o número de resposta, R_n [64]

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}} \quad (3.32 \text{ revisitada})$$

novamente com a diferença somente na interpretação da tensão dinâmica. Dessa forma, apresentamos o cálculo do fator de correção por velocidade aqui proposto, considerando uma distorção na espessura, $\beta_H \neq \beta$,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^3}{\beta_M}}. \quad (3.24 \text{ revisitada})$$

A Eq. 3.24 retorna à proposta por Oshiro e Alves [26] – Eq. 3.15 – se não houver diferenças de densidade e a lei viscoplástica for a de Norton. Se houver massa de impacto, o fator à ela relacionado deverá ser igual à distorção imposta pela massa da estrutura, conforme razão r do operador proposto, Eq.3.44

$$\beta_M = \beta_G.$$

O operador e adimensionais propostos foram aplicados a equações analíticas de carregamento de impacto em estruturas na Seção 4.1. Foi mostrado que, quando não há distorção na espessura, o fator de velocidade proposto relaciona perfeitamente modelos e protótipos, obtendo-se perfis idênticos para ambos, mesmo quando existe diferença nas tensões de escoamento e densidade dos materiais. Em todos os casos mostrou-se necessário igualar os fatores β_G e β_M , conforme proposto. Ao adicionar a distorção de espessura β_H , as equações indicam que os deslocamentos são proporcionais à esta distorção para o impulso em uma placa circular ou viga, mas com desvios que precisam ser quantificados *a posteriori* no caso do impacto de massa contra uma viga ou contra uma estrutura de chapas duplas (ECD).

Seguiu-se a verificação ao estudar via elementos finitos o comportamento de uma placa circular sob o carregamento de impacto de uma massa em alta velocidade e um impulso, Seção 4.2. Para esses casos passaram a ser consideradas propriedades de um material hipotético, com a porção elástica, o encruamento e viscoplasticidade. Os resultados de ambos os carregamentos mostraram a importância da base VSM em associar o fator de velocidade β_V à combinação da tensão dinâmica, σ_d , e massa, β_M . Mesmo para grande variação da densidade de 1/5 a 5, fator de tensão de referência, de 1/5 a 5, e escala de 1/100 a 100, os fatores calculados segundo o método proposto visando corrigir essas diferenças forneceram resultados bem próximos da referência, sendo o perfil dos modelos capaz de capturar todos os aspectos. A influência da aproximação do fator de viscoplasticidade, β_{visco} , pode ser observada na diferença dos resultados numéricos quando esse efeito é considerado, Fig.4.14. Quando a viscoplasticidade não é considerada e a curva dos materiais referência e dos modelos são perfeitamente relacionáveis por somente um escalar, β_{σ_0} , ocorre a perfeita similaridade, sem diferenças entre modelos e protótipo.

Ao se incluir a distorção na espessura de 2/3 e 3/2, surgem diferenças significativas que são justificadas por efeitos de membrana e forças transversas, não consideradas nos adimensionais. Vale lembrar que, conforme comentado no Capítulo 5 – Discussão – se esses feitos forem tão influentes quanto o momento de plastificação total, M_0 , a única solução possível é descartar a distorção de espessura, $\beta_H = \beta$, exatamente o obtido por vias teóricas. Todavia, os resultados também sugerem que pequenas distorções, como as utilizadas na parte experimental, não proporcionam grandes desvios.

Para o impacto contra estrutura de chapas dupla, Item 4.2.3, além dos bons resultados para as mesmas mudanças de material aplicadas para as placas circulares, a correção fornece curvas de deslocamento e força bastante similares à da referência, sendo quase indistinguíveis, Fig. 4.18. Ao aplicar distorção de espessura, entretanto, o perfil da estrutura, a curvatura e as deformações se mostram diferentes, mostrando que a distorção de espessura é algo que deve ser utilizado com cautela, Fig. 4.19.

Experimentos foram propostos para avaliar o efeito de diferentes encruamentos e dificuldades típicas da seleção de materiais. Foram definidas três escalas – 1/1, 2/3 e 1/3, quatro materiais, titânio, alumínio, aço inox e cobre, e duas condições de ensaio, baixa e alta velocidade. Por causa da grande diferença das curvas tensão vs. deformação dos materiais, não foi possível relacioná-las somente com um escalar, sendo necessário definir a transição elastoplástica. As espessuras dos materiais requereram a aplicação de pequenas distorções, menores que 10%. A viscoplasticidade foi considerada utilizando a lei de Johnson-Cook, proporcionando fatores de velocidade com pouca variação para grande faixa de taxa de deformação. A forma com a qual as correções de tensão de escoamento, densidade, viscoplasticidade e espessura foram aplicadas dispensaram o uso de modelos intermediários – vantagem do método proposto.

Alguns materiais e escalas – titânios e alumínio escala 1/1 – sofreram fraturas quando sob carregamento, violando a premissa do método proposto de ausência de falha. Todavia, para os outros materiais, mesmo com grande diferença nas curvas de material, os resultados se mostram relacionáveis para ambos os carregamentos. Avaliando numericamente os resultados para todos os modelos desconsiderando falhas, foi possível inferir o comportamento deles a partir da curva do material corrigida por β_{σ_0} , demonstrando a importância dessas curvas relativas e a adequação de β_{σ_0} conforme carregamento. Todavia, desconhecendo o campo de deformação que ocorreria, estabelecer β_{σ_0} em função da transição elastoplástica se mostrou decisão acertada, propiciando resultados relacionáveis. Além da boa representatividade, a escolha de um material diferente permite realizar ensaios experimentais por uma fração do custo da referência, Tab. 4.5. Com relação aos erros envolvidos na obtenção dos fatores, a propagação de incertezas mostrou que os desvios calculados são menores do que as variações obtidas nos experimentos.

Na Seção 5.7 são discutidos efeitos do uso de materiais diferentes para representação de eventos em que ocorre repetição do padrão de deformação, como o caso de uma flambagem progressiva axissimétrica. Uma pequena variação no padrão de deformação causada pela diferença de material se multiplica, tornando a geometria deformada difícil de relacionar com uma referência. Outros autores [33, 82] propõe equação de comprimento de dobra, entretanto não descrevem a influência do encruamento do material. Assim, é proposta uma forma diferente de enxergar a similaridade para esse caso, aplicando uma distorção geométrica – redução de espessura – visando compensar as di-

ferências nas curvas tensão vs. deformação dos materiais. O procedimento utiliza elementos finitos, variando iterativamente o comprimento de dobra para cada espessura escolhida, tal a encontrar o perfil deformado e o comprimento de dobra que proporcionam a mínima energia. Importante ressaltar que os perfis de energia mínimo, Fig. 5.11d, ainda que possuam comprimento de dobra similar, não são iguais. Ao aplicar essa distorção, foi possível aproximar o número de dobras ocorridas no modelo e no protótipo, além de permitir relacionar a força média para flambagem progressiva.

Para estruturas onde a inércia é relevante, como as aqui estudadas, deve-se sempre ter em mente que um eventual aumento de densidade, que aumentaria a inércia, tem de ser corrigido também por aumento da massa de impacto, e não somente por velocidade. Isto pode contrariar a ideia de simplesmente adicionar energia para compensar o aumento da inércia. Dessa forma, o comportamento de uma estrutura não está somente relacionada à energia imposta, e sim pela combinação de velocidade e massa. A importância dessa relação é enfatizada na Eq. 3.24, além da razão $r = M/G$, que requer distorções iguais da massa da estrutura e da massa de impacto. Escolher materiais para modelos onde a razão entre resistência e densidade, σ_d/ρ , são menores que a referência permite realizar ensaios em velocidades mais baixas, com claros benefícios experimentais.

Com o método proposto e as verificações analíticas, numéricas e experimentais, além das discussões apresentada, é possível confirmar a hipótese, lançada neste estudo e aqui repetida:

O comportamento de uma estrutura protótipo sujeita a cargas dinâmicas que causam severas deformações plásticas pode ser obtida a partir de ensaios em modelos escalonados desta mesma estrutura, mesmo quando os materiais isotrópicos do protótipo e dos modelos diferem em curva tensão versus deformação, densidade e propriedades viscoplásticas.

Com a ressalva da validade das leis durante o carregamento da estrutura e na ausência de falha.

Lista de Figuras

1.1	Similaridade e barris de envelhecimento de vinho do Porto.	2
1.2	Expansões assintóticas de efeitos de escala, segundo critério de plasticidade e mecânica da fratura linear elástica.	2
1.3	Estudos sobre representatividade de modelos em escala reduzida.....	3
1.4	Não-escalabilidade dos deslocamentos normalizados para diversos experimentos de impacto.	4
1.5	Representação do impacto de um indentador contra um painel duplo através de modelos em escala.	6
1.6	Representação de flambagem progressiva com uso de modelos em escala reduzida de materiais diferentes.....	7
3.1	Método de similaridade imperfeita proposto por Cho et Al.	17
3.2	Resultados experimentais de deslocamento e resposta de modelos com correção considerando tensão de escoamento.	18
3.3	Curvas de materiais e a correção por β_{σ_0}	19
3.4	Corrimãos do Instituto Tomie Othake, São Paulo, e sua relação com aproximação por assíntotas.....	20
3.5	Volume infinitesimal em coordenadas cilíndricas.....	23
4.1	Viga engastada com carregamento impulsivo uniformemente distribuído.	30
4.2	Viga engastada impactada por um objeto de massa G e velocidade V_0 . Adaptado de [66].	33
4.3	Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Norton e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.....	37

4.4	Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Cowper-Symonds e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.	38
4.5	Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para a equação viscoplástica de Johnson-Cook e diversas escalas. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.	39
4.6	Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para $\beta = 1/10$ e leis viscoplásticas de Norton (NH), Cowper-Symonds (CS) e Johnson-Cook (JC). (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.	39
4.7	Sensibilidade do fator de velocidade β_V à taxa de deformação para $\beta = 1/10$. É verificada a influência em β_V quando o material do protótipo e modelo são descritos por diferentes leis viscoplásticas, Norton (NH), Cowper-Symonds (CS) e Johnson-Cook (JC), usando a nomenclatura “lei do modelo / lei do protótipo”. (a) modelo e protótipo de aço e (b) modelo em aço e protótipo em alumínio.	40
4.8	Tipos de estruturas sensíveis à taxa de deformação - Tipo I - e sensível à taxa de deformação e inércia, Tipo II.	41
4.9	Estrutura de chapa dupla (ECD) proposta por Calladine e English [67] (a) e o esquema da geometria deformada proposto por Tam e Calladine [68] para a primeira fase de compressão e encurtamento das barras (b).	41
4.10	Modelo da com quatro rótulas plásticas para a ECD na representação da segunda fase.	44
4.11	(a) Carregamento e condições de contorno para a simulação de impacto contra placa circular, $H = 4,8$ e $\phi = 240\text{mm}$. (b) Curva do material de referência empregado e (c) malha em elementos finitos da placa e indentador.	48
4.12	Impacto de indentador contra placa e modelos com variação do fator de densidade para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f)	52
4.13	Impacto de indentador contra placa e modelos com variação do fator de tensão de referência, espessura e escala 1/100 para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f)	53
4.14	Impacto de indentador contra placa e modelos com variação do fator de densidade, tensão de referência e escala 1/100 para caso sem viscoplasticidade (a,c,e) e com viscoplasticidade (b,d,f)	55
4.15	Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação do fator de densidade e escala 1/100 desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b)	56
4.16	Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação do fator de densidade e escala 1/100 desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b)	57

4.17	Perfis dos modelos representativo das placas circulares sujeitas a carregamento impulsivo com variação do fator de densidade e tensão de escoamento para escala 1/100 desconsiderando efeitos viscoplásticos (a) e quando são considerados (b).....	57
4.18	Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de densidade e escala na representação da ECD.	59
4.19	Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de densidade e espessura na representação da ECD.	60
4.20	Resultados de deslocamento (a), força (b) e perfil final da linha média (c) dos modelos com variação do fator de tensão de referência e escala na representação da ECD.	61
4.21	Formato geral dos espécimes quase-estáticos, à esquerda, e para médias taxas, à direita. As dimensões utilizadas se encontram na Tab. 4.6 e com $W_p = 25$ mm. Os desenhos detalhados dos espécimes são apresentados no Apêndice B.	64
4.22	Espécimes utilizados para caracterização de materiais. (a) Quase-estáticos, de cima para baixo: 1/1 Titânio, 2/3 Alumínio e 1/3 Cobre. (b) Espécimes para caracterização em médias taxas, da esquerda para a direita: Al 1/1, Ti 2/3 e Aço 1/3.	65
4.23	Máquinas para ensaios de caracterização quase estática (a) e dinâmica (b). Espécimes foram pintados com padrão randômico para posterior análise via correlação digital de imagem.	66
4.24	Detalhe de um espécime após ensaio quase-estático para obtenção da curva tensão vs. deformação. O padrão randômico é criado com tintas spray visando registrar o padrão de deformação por meio de fotografia e analisá-lo posteriormente via correção digital de imagem.	66
4.25	Caracterização quase-estática dos material adquiridos. As curvas sólidas representam a média das curvas σ vs. ϵ para cada escala. A taxa de deformação para todos os ensaios foi de, aproximadamente, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$ /s.	68
4.26	Caracterização dinâmica dos material adquiridos. $\triangle$ pretos representam pontos da curva quase estática média, próximo à $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$, enquanto que outros marcadores, diversos pontos das curvas dinâmicas dos espécimes de média taxa de deformação. Curvas sólidas representam ajustes à leis viscoplásticas de Norton, Cowper-Symonds e Johnson-Cook.	69
4.26	(Continuação) Caracterização dinâmica dos material adquiridos. $\triangle$ pretos representam pontos da curva quase estática média, próximo à $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$, enquanto que outros marcadores, diversos pontos das curvas dinâmicas dos espécimes de média taxa de deformação. Curvas sólidas representam ajustes à leis viscoplásticas de Norton, Cowper-Symonds e Johnson-Cook.	70

4.27	Curvas dos materiais para cada escala (a) e com aplicação do fator $\beta_{\sigma_0} = \sigma_{0_m} / \sigma_{0_p}$ (b). O início de todas as curvas se sobrepõe à da referência, Titânio 1/1, enquanto que os diferentes encruamentos proporcionam curvas relativas próximas Cu e Al em escalas 2/3 e 1/3 e distantes, aço e Al 1/1.	71
4.28	Arranjo para cálculo das densidades. (a) Balança de precisão montada com aparato experimental de medição de empuxo. (b) Esquema da medição realizada e (c) diagrama de forças.	71
4.29	Suportes de fixação para as placas circulares. A superfície externa fora coberta com adesivo vinílico semi-fosco preto de modo a evitar que a iluminação fosse refletida e capturada pelas câmeras de alta velocidade. Já a superfície interna foi coberta com adesivo branco, distribuindo a luz uniformemente na chapa.	75
4.30	Indentadores para os ensaios de baixa velocidade, escalas 1/1, 2/3 e 1/3.	76
4.31	Projéteis utilizados para os ensaios de velocidade. Da esquerda para a direita, escala 1/1 Ti, Al e Aço até a escala 1/3. A geometria é similar à dos indentadores de baixa velocidade. O comprimento foi ajustado para se obter massa adequada para cada condição.	76
4.32	(a) Martelo de Impacto (MI) em ensaio do Al em escala 1/1. A massa reduzida exigiu montagem com cilindro prolongador visando reduzir a rotação da massa e indentador no plano das guias. O deslocamento lateral foi controlado mediante ajuste de buchas de latão. (b) Martelo de Impacto de Baixa Energia (MIBE).	77
4.33	Arranjo para disparador de projéteis a ar comprimido utilizado nos ensaios de alta velocidade.	78
4.34	Aparato experimental do ensaio de baixa velocidade para escala 1/1.	81
4.35	Ensaio de baixa velocidade Ti 1:1, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d).	82
4.36	Ensaio de baixa velocidade Al 2:3, réplica 2. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d).	83
4.37	Ensaio de baixa velocidade Cu 1:3, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a). Instante após o impacto (b).	84
4.38	Falha de material para uma réplica de Ti 1/1, baixa velocidade (a), Al 1/1 alta velocidade (b), Ti 2/3 alta velocidade (c) e Ti 1/3 baixa velocidade (d).	86
4.39	Comparativo de resultados experimentais de deslocamento no tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.	87
4.39	(Continuação) Comparativo de resultados experimentais de deslocamento no tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.	88
4.40	Comparativo de resultados experimentais de força por deslocamento com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.	89

4.40 (Continuação) Comparativo de resultados experimentais de força por deslocamento com as simulações numéricas correspondentes para o caso de baixa velocidade.	90
4.41 Resultados experimentais para os modelos com aplicação dos fatores de escala. As áreas de coloração clara indicam o desvio padrão. (a) Deslocamento no tempo e (b) força vs. deslocamento. Nos gráficos (c) e (d) são removidos as escalas e materiais nos quais ocorreram trincas, Ti 1/1, 2/3 e 1/3 e Al 1/1.	92
4.42 Resultados numéricos para os modelos com aplicação dos fatores de escala. (a) Deslocamento no tempo e (b) força vs. deslocamento.	93
4.43 Deslocamento máximo normalizado para os experimentos de cada réplica de baixa velocidade (a) e simulações (b) em função da escala adotada. Cada réplica é plotada com um marcador diferente, com as cores dos materiais conforme legenda. Para o caso experimental, a referência de deslocamento máximo se torna o St 1:1 devido às falhas. Para os resultados numéricos, o Ti 1:1 segue como referência. Para ambos os gráficos é mostrada a linha tracejada que indica os valores esperados.	94
4.44 Comparativo do perfil final entre experimento (linhas sólidas) e simulação (tracejadas) para as escalas 1/1 (a), 2/3 (b) e 1/3 (c).	95
4.45 Perfis finais experimentais dos modelos selecionados comparados à referência para o caso de baixa velocidade (a). Perfil final numérico após retorno elástico (b) e provável perfil de deslocamento máximo obtido via simulação (c).	96
4.46 Fixação da placa circular e iluminação interna do suporte para ensaio de alta velocidade na escala 1/1. Vista interna à gaiola de proteção.	97
4.47 Ensaio de alta velocidade St 1:1, réplica 3. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem... ..	98
4.48 Ensaio de alta velocidade Ti 2:3, réplica 3. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem.	98
4.49 Ensaio de alta velocidade Al 1:3, réplica 4. Instante de deslocamento máximo para vista em ângulo (a) e frontal (b). Instante após o impacto (c) e (d). A imagem frontal serviu para obter o deslocamento em função do tempo por meio de correlação digital de imagem.	99
4.50 Comparativo de resultados experimentais de deslocamento por tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de alta velocidade.	101
4.50 (Continuação) Comparativo de resultados experimentais de deslocamento por tempo com as simulações numéricas correspondentes para o caso de alta velocidade.	102

4.51	Resultados de deslocamento no tempo com fatores de escala para os experimentos (a), excluindo os modelos com trincas (b), simulações (c) e resposta para as simulações (d) para o caso de alta velocidade.	104
4.52	Comparativo do perfil final do caso de alta velocidade entre experimento - linhas sólidas - e simulação - tracejadas - para as escalas 1/1 (a), 2/3 (b) e 1/3 (c).	105
4.53	Perfis finais experimentais dos modelos selecionados comparados à referência para o caso de alta velocidade (a). Perfil final numérico após retorno elástico (b) e provável perfil de deslocamento máximo obtido via simulação (c).	106
4.54	Deslocamento máximo normalizado para os experimentos de cada réplica em alta velocidade (a) e simulações (b) em função das escalas utilizadas. Cada réplica é plotada com um marcador diferente, com as cores dos materiais conforme legenda. Para os experimentos, a referência de deslocamento máximo foi definida como o St 1/1 devido às falhas ocorridas no Ti 1/1. Para os resultados numéricos, o Ti 1/1 segue como referência. Para ambos os gráficos é mostrada a linha tracejada que indica os valores esperados.	107
5.1	Fator de escala de velocidade β_V calculado para os materiais e escalas dos experimentos da Seção. 4.3.	113
5.2	Evolução da taxa de deformação no tempo para a simulação do impacto contra a placa para a escala Ti 1/1 em baixa velocidade (a), alta velocidade (b). Os pontos avaliados residem na linha média, com distância ao centro em mm conforme (c).	113
5.3	Curvas dos materiais corrigidos usados nos experimentos. Deformações totais, onde se omitiu- a parte elástica para melhor visualização. Ao implicar o fator de escala, os materiais dos modelos se plastificam e passam a absorver energia para deformações menores do que os titânios.	115
5.4	Chapa retangular de largura 200mm por 800mm de comprimento e espessura 3mm, engastada nas extremidades menores, impactada por uma massa de 957kg a 5m/s no centro. Com o deslocamento, a deformação na estrutura foi bastante homogênea e ao redor de 50% [25].	115
5.5	Deformações plásticas na região próxima ao impacto para simulação de baixa (a) e alta velocidade (b).	116
5.6	Deformações plásticas equivalentes em linhas sólidas, e tracejadas quando aplicado fator de escala $\beta_{H'}$ (a); taxas de deformação (b) para a simulação de alta velocidade do item 4.2.1 com $\beta = 1$, $\beta_p = 1$, $\beta_{\sigma_0} = 1$ com variações de espessura.	119

- 5.7 (a)** As curvas sólidas dos materiais dos modelos, vermelha, azul e verde se mostram bastante diferentes dos material protótipo, em preto. Entretanto, ao aplicar o fator β_{σ_0} , as curvas corrigidas (linhas tracejadas) se aproximam bastante da referência, inclusive com encruamento similar. **(b)** Aparato experimental do impacto axial. **(c)** Tubos protótipos (diâmetro 50,8mm, parede de 2mm e comprimento 200mm.), **(d)** e **(e)** de aço com $\beta = 0.5$122
- 5.8** Apesar de possuírem o mesmo padrão de dobra axissimétrica, o tubo protótipo em alumínio - esquerda - flamba com comprimento de dobra relativamente menor do que o tubo de aço com $\beta = 0.5$ [28].123
- 5.9 (a)** Curvas dos materiais empregados como protótipo - titânio - e modelo - latão modificado. Ambos são representados pela lei de Johnson-Cook, com parâmetros $A = 1104 \text{ MPa}$, $B = 1036 \text{ MPa}$ e $n = 0.635$ e $A = 112 \text{ MPa}$, $B = 1220 \text{ MPa}$ e $n = 0.420$. **(b)** o modelo numérico com as dimensões apresentadas é restrito na superfície inferior em deslocamento vertical e rotações, enquanto que na superior há deslocamento vertical imposto e rotações restritas.123
- 5.10** Gráficos de energia total absorvida **(a)** em função do comprimento inicial da geometria e **(b)** do deslocamento imposto, o comprimento efetivo L_{eff} . Os valores do eixo ordenado estão em função da energia absorvida para o primeiro comprimento avaliado, $L = 19,18 \text{ mm}$124
- 5.11 (a)** Perfis de dobra para o titânio de espessura $H = 2.00 \text{ mm}$ para os comprimentos $L = 19,18 \text{ mm}$, $10,348 \text{ mm}$ e $7,348 \text{ mm}$. **(b)** Modelo $H = 2,00$, $L = 19,18 \text{ mm}$, $11,878$ e $7,318 \text{ mm}$ e **(c)** $H = 1,65$, $L = 19,18 \text{ mm}$, $10,438 \text{ mm}$ e $7,318 \text{ mm}$. **(d)** Sobreposição das dobras da referência, em vermelho, e modelos $H = 2,00$ e $H1,65 \text{ mm}$, em verde e azul, respectivamente.125
- 5.12** Curvas da resposta dos tubos em termos de força escalonada por deslocamento adimensionalizado pelo comprimento de um dobra completa **(a)** e pelo comprimento efetivo de uma dobra completa **(b)**. As curvas de força são apresentadas em cores sólidas para cada tubo e tracejada para a média de força calculada. A redução da espessura para o Latão* permite atingir uma força média escalonada bastante próxima da referência.126
- 5.13** Tubo referência de comprimento 200mm em flambagem progressiva axissimétrica, em vermelho. Em verde encontra-se a mesma geometria porém com material diferente e em azul com espessura reduzida para 1,60mm.127
- 5.14 (a)** Incertezas do fator de velocidade β_V calculado a partir dos desvios das propriedades dos materiais. **(b)** Composição da incerteza em função dos diferentes fatores de escala. A parcela viscoplástica, β_{visco} contribui com a maior parte do erro.129
- B.1** Espécimes para caracterização do material através de ensaios quase estático.157
- B.2** Espécimes para caracterização do material através de ensaios quase estático.158

C.1	Padrão pintura randômica utilizada em ensaios de caracterização quase estáticos. (a) Espécime St 1/1 no início e (b) ao final do ensaio.	163
C.2	Programa de tratamento via DIC NCORR (a) e dados de deformação longitudinal para um espécime de aço 1/1.	164
C.3	Fluxo do código escrito em MATLAB para tratamento dos dados obtidos a partir do programa de análise de imagens NCORR.	166
C.4	Curva do material St 1 : 1 obtida pela análise de diversas seções transversais de um ensaio quase-estático. A mais espessa e alta é tida como a curva tratada do material. As seções que passam a sofrer descarregamento fornecem as quedas de tensão, formando as franjas do gráfico.	167

Lista de Tabelas

1.1	Fatores de escala propostos por Calladine, na ocasião da não representatividade de modelos sob carregamento de impacto.....	4
3.1	Fatores de escala relacionando quantidades do modelo com as do protótipo na base Massa-Comprimento-Tempo (<i>MLT</i>).....	14
3.2	Fatores de escala relacionando quantidades do modelo com as do protótipo na base Velocidade-Tensão Dinâmica-Massa da Estrutura (<i>VSM</i>). Tanto <i>F</i> como <i>E</i> são obtidas considerando o carregamento na direção χ.	27
4.1	Parâmetros dos materiais utilizados para o estudo de sensibilidade do fator β_V à taxa de deformação para diferentes leis viscoplásticas.	38
4.2	Parâmetros do material de referência, cujos dados se encontram no Apêndice D.	47
4.3	Níveis dos fatores utilizados para avaliação de modelos nas análises numéricas. Para as curvas de material dos modelos, β_{σ_0} é aplicado para o Módulo Elástico e para cada valor da curva tensão versus deformação.	48
4.4	Sumário dos fatores de escala para os modelos avaliados numericamente com variação de β, $\beta_{H'}$, β_{σ_0} e β_ρ, para carregamentos de impacto de alta velocidade ($V = 195\text{m/s}$, $G = 120\text{g}$), impulso ($V_0 = 195\text{m/s}$) e ECD ($V_0 = 7,5\text{m/s}$, $G = 108\text{kg}$).	49
4.4	Sumário dos fatores de escala para os modelos avaliados numericamente com variação de β, $\beta_{H'}$, β_{σ_0} e β_ρ, para os carregamentos de impacto de alta velocidade ($V = 195\text{m/s}$, $G = 120\text{g}$), impulso ($V_0 = 195\text{m/s}$) e ECD ($V_0 = 7,5\text{m/s}$, $G = 108\text{kg}$).	50
4.5	Materiais adquiridos em forma de chapas para os ensaios experimentais.	64
4.6	Dimensões dos espécimes para caracterização. Taxa de deformação aproximada pretendida: $10^{-4}/\text{s}$ para o quase-estático e $10/\text{s}$ para o espécime menor.	64

4.7	Propriedades mecânicas dos materiais adquiridos segundo caracterização estática e dinâmica. Parâmetros viscoplásticos C e ε_0 conforme lei viscoplástica de Johnson-Cook [65].	71
4.8	Resultados do cálculo da densidade utilizando o princípio de Arquimedes para os materiais adquiridos. Densidade da água 994 g/cm^3.	72
4.9	Fatores de escala e o cálculo de β_V para todos os materiais e escalas. A parcela β_{visco} foi inferida a partir de β_V calculado. O Titânio na escala 1/1 foi definido como referência por ser o material mais custoso e de densidade intermediária - objeto principal de estudo deste trabalho. Uma vez que o cálculo independe da resposta da estrutura, os fatores são válidos tanto para os ensaios de baixa, como para os de alta velocidade.	73
4.10	Sumário dos fatores de escala calculados para os modelos avaliados experimentalmente. Para os carregamentos de impacto de baixa ($V_0 = 3,5 \text{ m/s}$) e alta velocidade $V_0 = 130 \text{ m/s}$.	74
4.11	Sumário dos parâmetros de ensaio de baixa velocidade para os diversos modelos e suas escalas.	79
4.12	Sumário dos parâmetros de ensaio de alta velocidade para os diversos modelos e suas escalas.	80
D.1	Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 1/1.	169
D.2	Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 2/3.	170
D.3	Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 1/3,	170

Lista de Símbolos

$(X)_m$	variável X do modelo, variável X do protótipo
$(X)_p$	
a	aceleração
$A', B' C, n$	Parâmetro de material da equação de Johnson-Cook
A_0	Área inicial de um espécime de tração
A_i	Área instantânea de um espécime de tração
β	Fator de escala de comprimento
β_X	Fator de escala da variável X
β_H	Fator de escala de distorção intraescala, β_H / β
B	Profundidade de uma viga
δ	Deslocamento
D	Parâmetro da lei viscoplástica de Cowper-Symonds
$D_1 \dots D_5$	Parâmetro de falha do modelo de Johnson-Cook
D_n	<i>Damage number</i> , número adimensional de dano $\rho V_0^2 / \sigma_0$
$\dot{\epsilon}_0$	Parâmetro da lei viscoplástica de Norton
ϵ	Deformação
ϵ_{eng}	Deformação de engenharia ou de Cauchy
ϵ_{eqv}	Deformação equivalente de Von Mises
ϵ_f	Deformação para falha do modelo de Johnson-Cook
ϵ_{green}	Deformação de Green
ϵ_{ln}	Deformação logarítmica ou verdadeira
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação equivalente
E	Módulo de elasticidade
E'	Energia

ECD	Estrutura de Chapa Dupla
F	Força
G	Massa de impacto
H	Espessura de uma placa ou altura de uma viga
VSG	Base Velocidade, Tensão Dinâmica e Massa de Impacto
λ_χ	Alongamento de uma fibra na direção χ
λ^*	Adimensional de energia cinética de uma viga sob impulso
λ'	Adimensional de energia cinética de uma placa circular simplesmente apoiada
L	Variável de comprimento. Comprimento de viga, estrutura de chapa dupla e de meia dobra por flambagem progressiva
L_1, L_2	Comprimento do pescoço do espécime de tração quase-estático e médias taxas
L	Comprimento efetivo de meia dobra por flambagem
M	Massa da estrutura
M_0	Momento para plastificação total de uma seção de material RPP. $\sigma_0 BH^2/4$ para viga e $\sigma_0 H^2/4$ para placas
M_d	Momento para plastificação total de uma seção de material RPP em função de tensões dinâmicas. $\sigma_d BH^2/4$ para viga e $\sigma_d H^2/4$ para placas
MLT	base Massa, Comprimento e Tempo
N_0	Força de membrana para plastificação total da seção de um material RPP. $BH\sigma_0$
Π_i	Conjunto ou número adimensional i .
p	Parâmetro da lei viscoplástica de Cowper-Symonds
q	Parâmetro da lei viscoplástica de Norton
Q_0	Força de cisalhamento para plastificação total da seção de um material RPP. $BH\sigma_0/2$
ρ	Densidade
R	Raio de uma placa ou tubo circular
r	Razão do operador de Pi-Buckingham. No método proposto, M/G
R_1, R_2	Raios dos espécimes de tração quase-estáticos e médias taxas
R_n	<i>Response number</i> , número adimensional de resposta $D_n(L/H)^2$ para vigas e $D_n(R/H)^2$
σ	Tensão (utilizada para dedução dos adimensionais)
σ_0	Tensão de escoamento de um material rígido-perfeitamente-plástico
σ_d	Tensão dinâmica
σ_{eng}	Tensão de engenharia ou de Cauchy
σ_{ln}	Tensão logarítmica ou verdadeira
σ_U	Tensão verdadeira de ruptura
σ_y	Tensão de escoamento de uma material com encruamento
ς_X^2	Variância de X
t	Tempo

T^*	Temperatura homóloga, $(T - T_{\text{amb}})/(T_{\text{fusão}} - T_{\text{amb}})$
θ	ângulo de evolução de rótula plástica da Estrutura de Chapa Dupla
V	Velocidade
V_0	Velocidade Inicial
v	volume
w_0	Imperfeição inicial da Estrutura de Chapa Dupla
w	Afastamento horizontal da rótula central com relação ao plano de simetria da Estrutura de Chapa Dupla
w_1, w_2	Largura do pescoço do espécime de tração quase-estático e médias taxas
w_1, w_2	Largura do pescoço do espécime de tração quase-estático e médias taxas
W_f	deslocamento final de uma viga ou placa
$\bar{X}$	Média de X

Referências

- [1] MAZZARIOL, L. M.; OSHIRO, R. E.; CALLE, M. A. G.; ALVES, M. Scaling of stiffened panels subjected to impact load. In: DVORKIN, E. N.; GOLDSCHMIDT, M. B. (Ed.). **MECOM-CILAMCE**. Buenos Aires: AMCA, 2010. p. 1275–1289.
- [2] REDLIN NGO VIET, S. W. L. Thales' shadow. **Mathematics Magazine**, Mathematical Association of America, v. 73, n. 5, p. 347–353, 2000. ISSN 0025570X, 19300980. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2690810>>.
- [3] BAZANT, Z. P.; CHEN, E. Scaling of structural failure. **Applied Mechanics Reviews**, v. 50, n. 10, p. 593 – 627, 1997. ISSN 0003-6900.
- [4] WIKIMEDIA. **Imagem dos barris de envelhecimento de vinhos do tipo Porto, Cave Sandeman, Porto, Portugal**. 2011. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cave_Porto_Sandeman.jpg>.
- [5] MARIOTTE, E.; HIRE, P. de L. **Traite du mouvement des eaux et des autres corps fluides: Divise en v. parties**. [S.l.]: E. Michallet, 1686.
- [6] GALILEI, G.; CREW, H.; SALVIO, A. de. **Dialogues Concerning Two New Sciences**. Macmillan, 1914. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=SPhnaiERbWcC>>.
- [7] YULONG, L.; YONGKANG, Z.; PU, X. Study of similarity law for bird impact on structure. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 21, n. 6, p. 512 – 517, 2008. ISSN 1000-9361. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936108601685>>.
- [8] DUFFEY, T.; CHERESH, M.; SUTHERLAND, S. Experimental verification of scaling laws for punch-impact-loaded structures. **International Journal of Impact Engineering**, v. 2, n. 1, p. 103 – 117, 1984. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X84900186>>.
- [9] HAFEEZ, F.; ALMASKARI, F. Experimental investigation of the scaling laws in laterally indented filament wound tubes supported with v shaped cradles. **Composite Structures**, v. 126, p. 265 – 284, 2015. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315001610>>.
- [10] WEN, H.-M.; JONES, N. Experimental investigation of the scaling laws for metal plates struck by large masses. **International Journal of Impact Engineering**, v. 13, n. 3, p. 485 – 505, 1993. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X9390120V>>.
- [11] BOOTH, E.; COLLIER, D.; MILES, J. Impact scalability of plated steel structures. In: JONES, N.; WIERZBICKI, T. (Ed.). **Structural Crashworthiness**. London: Butterworths & Co. Publishers, 1983. p. 136–174.
- [12] CALLADINE, C. R. An investigation of impact scaling theory. In: JONES, N.; WIERZBICKI, T. (Ed.). **Structural Crashworthiness**. London: Butterworths & Co. Publishers, 1983. p. 169–174 (Ap.6.III).

- [13] JONES, N. Structural aspects of ship collisions. In: JONES, N.; WIERZBICKI, T. (Ed.). **Structural Crashworthiness**. London: Butterworths & Co. Publishers, 1983. p. 308–337.
- [14] JIANG, P.; TIAN, C.; XIE, R.; MENG, D. Experimental investigation into scaling laws for conical shells struck by projectiles. **International Journal of Impact Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1284 – 1298, 2006. ISSN 0734-743X.
- [15] SINGER, J.; ARBOCZ, J.; WELLER, T. **Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures**. 1st. ed. England: John Wiley & Sons, 1998. 621 p.
- [16] AMDAHL, J. **Energy Absorption in Ship-Platform Impact**. Trondheim, Noruega, 1983.
- [17] ENDO, H.; YAMADA, Y.; KITAMURA, O.; SUZUKI, K. Model test on the collapse strength of the buffer bow structures. **Marine Structures**, v. 15, n. 4-5, p. 365 – 381, 2002. ISSN 0951-8339. <ce:title>Ship Collisions and Grounding</ce:title>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951833902000084>>.
- [18] YAMADA, Y.; ENDO, H.; KAWANO, H.; HIRAKATA, M. Collapse mechanism of the buffer bow structure on axial crushing. In: CHUNG, J. S.; PRINSENBERG, S. (Ed.). **Proceeding of the Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference**. Honolulu: ISOPE, 2003. p. 534–541.
- [19] ALSOS, H. S.; AMDAHL, J. On the resistance to penetration of stiffened plates, part i - experiments. **International Journal of Impact Engineering**, v. 36, n. 6, p. 799 – 807, 2009. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X08002753>>.
- [20] CHO, S.-R.; LEE, H.-S. Experimental and analytical investigations on the response of stiffened plates subjected to lateral collisions. **Marine Structures**, v. 22, n. 1, p. 84 – 95, 2009. ISSN 0951-8339. <ce:title>Selected papers from the 3rd International Conference on Collision and Grounding of Ships</ce:title>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951833908000270>>.
- [21] WANG, G.; ARITA, K.; LIU, D. Behavior of a double hull in a variety of stranding or collision scenarios. **Marine Structures**, v. 13, n. 3, p. 147 – 187, 2000. ISSN 0951-8339. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951833900000368>>.
- [22] CHO, U.; DUTSON, A. J.; WOOD, K. L.; CRAWFORD, R. H. An advanced method to correlate scale models with distorted configurations. **Journal of Mechanical Design**, v. 127, n. 1, p. 78 – 85, 2005. Disponível em: <<http://mechanicaldesign.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1448369>>.
- [23] BARENBLATT, G. **Scaling**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 978-0-521-53394-2.
- [24] OSHIRO, R. E.; ALVES, M. Scaling impacted structures. **Archive of Applied Mechanics**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 74, p. 130–145, 2004. ISSN 0939-1533. 10.1007/s00419-004-0343-8. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00419-004-0343-8>>.
- [25] MAZZARIOL, L. M. **Escalonamento de painéis reforçados sujeitos a cargas de impacto**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2012.
- [26] OSHIRO, R.; ALVES, M. Scaling of structures subject to impact loads when using a power law constitutive equation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 18-19, p. 3412–3421, 2009. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768309002212>>.
- [27] OSHIRO, R. E. **Estudo da similaridade imperfeita em estruturas sujeitas a carregamentos de impacto**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — EPUSP, Sao Paulo, 2010. In Portuguese.
- [28] MAZZARIOL, L. M.; ALVES, M. Experimental study on scaling of circular tubes subjected to dynamic axial crushing using models of different materials. In: **Proceedings of 22nd International Congress of Mechanical Engineering**. Ribeirão Preto, SP, Brasil: ABCM, 2013. p. 8065–8074.
- [29] ALVES, M.; OSHIRO, R. E. Scaling the impact of a mass on a structure. **International**

Journal of Impact Engineering, v. 32, n. 7, p. 1158 – 1173, 2006. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X04001939>>.

[30] KARAGIOZOVA, D.; JONES, N. On dynamic buckling phenomena in axially loaded elastic-plastic cylindrical shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 37, n. 7, p. 1223 – 1238, 2002. ISSN 0020-7462. Nonlinear Dynamic Instability of Structures. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746201001469>>.

[31] SKOGLUND, V. **Similitude: theory and applications**. [S.l.]: International Textbook Co., 1967.

[32] MAZZARIOL, L. M.; ALVES, M. Scaling the impact of a mass on a plate using models of different materials. In: **Programme & Abstract book, 4th International Conference on Impact Loading of Lightweight Structures (ICILLS 2014)**. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014. p. 225–228.

[33] ABRAMOWICZ, W.; JONES, N. Dynamic axial crushing of circular tubes. **International Journal of Impact Engineering**, v. 2, n. 3, p. 263 – 281, 1984. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X84900101>>.

[34] _____. Dynamic progressive buckling of circular and square tubes. **International Journal of Impact Engineering**, v. 4, n. 4, p. 243 – 270, 1986. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X86900175>>.

[35] BUCKINGHAM, E. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 4, p. 345–376, Oct 1914. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.4.345>>.

[36] MACAGNO, E. O. Historico-critical review of dimensional analysis. **Journal of the Franklin Institute**, v. 292, n. 6, p. 391 – 402, 1971. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003271901608>>.

[37] MARTINS, R. D. A. The origin of dimensional analysis. **Journal of the Franklin Institute**, v. 311, n. 5, p. 331 – 337, 1981. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003281904750>>.

[38] MURPHY, G. **Similitude in engineering**. [S.l.]: Ronald Press Co., 1950.

[39] DUNCAN, W. **Physical Similarity and Dimensional Analysis: An Elementary Treatise**. [S.l.]: Arnold, 1953.

[40] KLINE, S. **Similitude and approximation theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1965.

[41] VASCHY, A. Sur les lois de similitude en physique. **Annales Telegraphiques**, v. 19, p. 28 – 28, 1892.

[42] BUCKINGHAM, E. Model experiments and the forms of empirical equations. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, American Physical Society, p. 263–296, Sep 1915.

[43] BAKER, W. E.; WESTINE, P. S.; DODGE, F. T. **Similarity Methods in Engineering Dynamics: Theory and Practice of Scale Modeling**. 1st. ed. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1991. 348 p.

[44] DECIUS, J. Dimensional analysis: An approach from transformation theory and a criterion for scaling model experiments. **Journal of the Franklin Institute**, v. 245, n. 5, p. 379 – 387, 1948. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003248900027>>.

[45] ATKINS, A. Scaling laws for elastoplastic fracture. **International Journal of Fracture**, Kluwer Academic Publishers, v. 95, n. 1-4, p. 51–66, 1999. ISSN 0376-9429.

[46] BAZANT, Z. P. Size effect. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 1-2, p. 69–80, 2000. ISSN 0020-7683.

[47] DRAZETIC, P.; RAVALARD, Y.; DACHEUX, F.; MARGUET, B. Applying non-direct similitude technique to the dynamic bending collapse of rectangular section tubes. **International Journal of Impact Engineering**, v. 15, n. 6, p. 797 – 814, 1994. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X9490066T>>.

- [48] WESTINE, P. S.; MULLIN, S. A. Scale modeling of hypervelocity impact. **International Journal of Impact Engineering**, v. 5, n. 1-4, p. 693 – 701, 1987. ISSN 0734-743X. Hypervelocity Impact Proceedings of the 1986 Symposium. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X87900844>>.
- [49] NEUBERGER, A.; PELES, S.; RITTEL, D. Scaling the response of circular plates subjected to large and close-range spherical explosions. part i: Air-blast loading. **International Journal of Impact Engineering**, v. 34, n. 5, p. 859 – 873, 2007. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X0600073X>>.
- [50] _____. Scaling the response of circular plates subjected to large and close-range spherical explosions. part ii: Buried charges. **International Journal of Impact Engineering**, v. 34, n. 5, p. 874 – 882, 2007. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X06000741>>.
- [51] NOAM, T.; DOLINSKI, M.; RITTEL, D. Scaling dynamic failure: A numerical study. **International Journal of Impact Engineering**, v. 69, n. 0, p. 69 – 79, 2014. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X14000505>>.
- [52] SNYMAN, I. Impulsive loading events and similarity scaling. **Engineering Structures**, v. 32, n. 3, p. 886 – 896, 2010. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029609003988>>.
- [53] FERGUSON, G. L. Replica model scaling for high strain-rate events. **International Journal of Impact Engineering**, v. 16, n. 4, p. 571–583, 1995. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X94000655>>.
- [54] ME-BAR, Y. A method for scaling ballistic penetration phenomena. **International Journal of Impact Engineering**, v. 19, n. 9-10, p. 821–829, 1997. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X97000201>>.
- [55] MIZUTANI, H.; TAKAGI, Y.; KAWAKAMI, S.-I. New scaling laws on impact fragmentation. **Icarus**, v. 87, n. 2, p. 307–326, 1990. ISSN 0019-1035. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001910359090136W>>.
- [56] HOLSAPPLE, K. A. The scaling of impact phenomena. **International Journal of Impact Engineering**, v. 5, n. 1-4, p. 343 – 355, 1987. ISSN 0734-743X. Hypervelocity Impact Proceedings of the 1986 Symposium. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X87900510>>.
- [57] CHRISTOFOROU, A. P.; YIGIT, A. S. Scaling of low-velocity impact response in composite structures. **Composite Structures**, v. 91, n. 3, p. 358 – 365, 2009. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822309002062>>.
- [58] JONES, N. **Structural Impact**. 1st. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 1997. 575 p.
- [59] OSHIRO, R. E.; CALLE, M. A. G.; MAZZARIOL, L. M.; ALVES, M. Experimental study of scaled t cross-section beams subjected to impact load. In: **Proceedings of 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering**. Natal, RN, Brasil: ABCM, 2011. p. 10p. ISSN 2176-5480.
- [60] OSHIRO, R.; ALVES, M. Predicting the behaviour of structures under impact loads using geometrically distorted scaled models. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 60, n. 7, p. 1330 – 1349, 2012. ISSN 0022-5096. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509612000592>>.
- [61] MAZZARIOL, L. M.; OSHIRO, R. E.; CALLE, M. A. G.; MOURA, R. T.; ALVES, M. Evaluating velocity and mass correction on scaling of structures subjected to impact loading. In: FANCELLO, E.; TARÇO, P. de; MENDONÇA, R.; ALVES, M. (Ed.). **Proceedings of the International Symposium on Solid Mechanics. Florianopolis**. Florianopolis, SC, Brazil: ABCM, 2011. p. 353–366.
- [62] MAZZARIOL, L.; OSHIRO, R.; ALVES, M. A method to represent impacted structures using scaled models made of different materials. **International Journal of Impact Engineering**, v. 90, p. 81 – 94, 2016. ISSN 0734-743X. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X15300105>>.

[63] JOHNSON, W. **Impact Strength of Materials**. Edward Arnold, 1972. ISBN 9780713132663. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VdeYQgAACAAJ>>.

[64] LI, Q. M.; JONES, N. On dimensionless numbers for dynamic plastic response of structural members. **Archive of Applied Mechanics**, Springer-Verlag, v. 70, n. 4, p. 245–254, 2000. ISSN 0939-1533. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s004199900072>>.

[65] JOHNSON, G. R.; COOK, W. H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures. In: **Proc. 7th Int. Symp. On Ballistics**. Hague, Netherlands: [s.n.], 1983.

[66] LIU, J.; JONES, N. Dynamic response of a rigid plastic clamped beam struck by a mass at any point on the span. **International Journal of Solids and Structures**, v. 24, n. 3, p. 251 – 270, 1988. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768388900327>>.

[67] CALLADINE, C.; ENGLISH, R. Strain-rate and inertia effects in the collapse of two types of energy-absorbing structure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 26, n. 11-12, p. 689 – 701, 1984. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740384900213>>.

[68] TAM, L.; CALLADINE, C. Inertia and strain-rate effects in a simple plate-structure under impact loading. **International Journal of Impact Engineering**, v. 11, n. 3, p. 349 – 377, 1991. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X9190044G>>.

[69] ZHANG, T.; YU, T. A note on a velocity sensitive energy-absorbing structure. **International Journal of Impact Engineering**, v. 8, n. 1, p. 43 – 51, 1989. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X89900304>>.

[70] TAM, L. L. **Strain-rate and inertia effects in the collapse of energy-absorbing structures**. Tese (Doctoral Thesis) — Darwin College, University of Cambridge, Cambridge, Inglaterra, 1990.

[71] ONLINE METALS.COM. **Online Metals.com: Custom Metal & Plastics Supply**. 2016. Disponível em: <<http://www.onlinemetals.com/>>.

[72] ASTM. **ASTM E 8/E 8M-08 - Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials**. [S.l.]: ASTM, 2008.

[73] LESUER, D. R. **Experimental investigations of material models for Ti-Al-4V Titanium and 2024-T3 Aluminum**. [S.l.], 2000.

[74] IQBAL, M.; KHAN, S.; ANSARI, R.; GUPTA, N. Experimental and numerical studies of double-nosed projectile impact on aluminum plates. **International Journal of Impact Engineering**, v. 54, p. 232 – 245, 2013. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X12002308>>.

[75] KACHANOV, L. M. On the mechanics of plastic solids. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Akad, NaukSSSR, Prikl, Mat, Mekh.)**, v. 4, n. 2, p. 37 – 42, 1940. Russo, resumo em inglês.

[76] _____. Elastico-plastic condition of hard bodies. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Akad, NaukSSSR, Prikl, Mat, Mekh.)**, v. 5, n. 2, p. 431 – 438, 1941. Russo, resumo em inglês.

[77] NOVOZHILOV, V. **Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity**. Graylock Press, 1953. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LJG0nQEACAAJ>>.

[78] KARAGIOZOVA, D.; ALVES, M. Transition from progressive buckling to global bending of circular shells under axial impact-part i: Experimental and numerical observations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 5-6, p. 1565 – 1580, 2004. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303005870>>.

[79] GUPTA, N.; VELMURUGAN, R. Consideration of internal folding and non-symmetric

fold formation in axisymmetric axial collapse of round tubes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 34, n. 20, p. 2611 – 2630, 1997. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768396001175>>.

[80] TYAGI, B.; ABBAS, H.; ARIF, M.; GUPTA, N. Change in thickness in curved fold model for axial crushing of tubes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 24-25, p. 7129 – 7153, 2004. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076830400304X>>.

[81] KHAN, A. S.; SUH, Y. S.; KAZMI, R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys. **International Journal of Plasticity**, v. 20, n. 12, p. 2233 – 2248, 2004. ISSN 0749-6419. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641904000841>>.

[82] ALEXANDER, J. An approximate analysis of the collapse of thin cylindrical shells under axial loading. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 13, p. 10 – 15, 1960. ISSN 00335614.

[83] ABBAS, H.; TYAGI, B.; ARIF, M.; GUPTA, N. Curved fold model analysis for axisymmetric axial crushing of tubes. **Thin-Walled Structures**, v. 41, n. 7, p. 639 – 661, 2003. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823103000090>>.

[84] LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION. **LS-DYNA Keyword User's Manual. Livermore Software Technology Corporation**. version 971, revision 1. Livermore, California, EUA, 2007. 2206 p.

[85] JOHNSON, G. R.; COOK, W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 21, n. 1, p. 31 – 48, 1985. ISSN 0013-7944. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013794485900529>>.

[86] ZERILLI, F. J.; ARMSTRONG, R. W. Dislocation-mechanics based constitutive relations for material dynamics calculations. **Journal of Applied Physics**, v. 61, n. 5, p. 1816–1825, 1987. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/61/5/10.1063/1.338024>>.

[87] TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987. (Engineering mechanics series).

[88] BEVINGTON, P.; ROBINSON, D. **Data reduction and error analysis for the physical sciences**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003. 36-50 p. (McGraw-Hill Higher Education). ISBN 9780072472271.

Apêndice A

Obtenção de números adimensionais

O procedimento para se obter os adimensionais se inicia com a ideia dos monômios apresentados por Vaschy [41], apresentados na Eq. 3.2. Para iniciar o procedimento é necessário estabelecer uma base constituída por quantidades independentes, que não conseguem ser escritas pelas demais descritoras do fenômeno [23]. Definimos a base velocidade V (MT^{-1}), tensão S ($ML^{-1}T^{-2}$) e densidade ρ (ML^{-3}). Logo no início nota-se que as três variáveis estão em função da massa M . Tentaremos escrever uma delas em função da outra:

$$[\rho] = [V]^x [\sigma]^y$$

$$ML^{-3} = [LT^{-1}]^x [ML^{-1}T^{-2}]^y.$$

Igualando os expoentes de M , L e T , obtemos o seguinte sistema de equação

$$\begin{cases} +0x & +y & = & 1 & (M) \\ +1x & -y & = & -3 & (L) \\ -x & -2y & = & 0 & (T) \end{cases}$$

Dessa forma, temos que $y = 1$, na primeira equação e inserindo-a nas outras duas, obtemos $x = -2$. Isto mostra que V , S e ρ não são quantidades independentes. Ao substituir ρ por M , obtemos três quantidades independentes que serão utilizadas para formar uma base.

A lei proposta por Vaschy [41] revela que ao, escolher n quantidades físicas que representam um fenômeno, sendo que k delas sejam expressas como quantidades independentes, é possível obter $n - k$ monômios ou números adimensionais. Para força F , obtemos o adimensional

$$[F] [V]^x [\sigma]^y [M]^z = 1 \quad (A.1)$$

$$MLT^{-2} [LT^{-1}]^x [ML^{-1}T^{-2}]^y [M]^z = 1 \text{ logo} \quad (A.2)$$

$$\begin{cases} 1 & +0x & +y & +z & = & 0 & (M) \\ 1 & +x & -y & +0z & = & 0 & (L) \\ -2 & -x & -2y & +0z & = & 0 & (T) \end{cases}$$

obtemos $(x, y, z) = (-4/3, 1/3, -2/3)$ e assim

$$[\Pi]_F = \frac{F^3}{V^4 \sigma M^2}. \quad (A.3)$$

Seguindo o mesmo procedimento, os outros adimensionais podem ser obtidos. Inclusive, é possível obtê-los a partir da combinação de outros, como o caso do de aceleração e força.

$$\begin{aligned} [\Pi]_a &= \frac{a^3 M}{V^4 \sigma} \\ [\Pi]_F &= \frac{a^3 M^3 M}{V^4 \sigma M^3} \\ [\Pi]_F &= \frac{F^3}{V^4 \sigma M^2} \end{aligned}$$

Este procedimento foi repetido para cada variável, gerando os adimensionais apresentados no item 3.3.2.

Apêndice B

Desenhos técnicos

(Dimensões em mm)

Figura B.1 Espécimes para caracterização do material através de ensaios quase estático.

Figura B.2 Espécimes para caracterização do material através de ensaios quase estático.

Apêndice C

Tratamento dos ensaios de caracterização por meio de Correlação Digital de Imagem (DIC)

O método de correlação digital de imagem – DIC¹ – surge como uma importante ferramenta que permite extrair mais informações de um ensaio do que seria possível com uso de *glip-gauges*. Programas discretizam áreas de interesse de um ensaio e fornecem análise do padrão de deslocamentos de pontos de referência através de fotos sucessivas. A partir desse padrão de deslocamentos têm-se as deformações para cada direção e, por posterior tratamento, as taxas de deformação.

Para esses ensaios, os espécimes são pintados com tinta esmaltada em spray branca e borrifados com tinta similar preta tal a formar um padrão de pontos randômicos, necessário para os cálculos do programa, Fig. C.1. Ainda com ambas as tintas frescas, o espécime é fixado tal qual qualquer outro ensaio de tração. O registro fotográfico requer nitidez, sendo atingida com uso de iluminação fria, tripé, câmera fotográfica e lente, todos de alta qualidade.

Figura C.1 Padrão pintura randômica utilizada em ensaios de caracterização quase estáticos. (a) Espécime St 1/1 no início e (b) ao final do ensaio.

¹Do inglês *Digital Image Correlation*.

A foto de referência, a região de interesse (ROI) e as demais fotos do ensaio são importadas no programa NCORR, Fig.C.2a. O tratamento resulta em matrizes com as deformações de Euler ou Green-Lagrange para as direções no plano, xx , yy e xy , para a discretização dos subconjuntos em função dos pixels da imagem. Nos ensaios presentes, foram definidos cerca de um subset para cada 4 pixels, resultando em uma matriz de 35 elementos na largura do espécime e 125 no comprimento para um ensaio de St 1/1, por quantas fotos forem utilizadas para o tratamento, Fig. C.2b.

(a)

(b)

Figura C.2 Programa de tratamento via DIC NCORR (a) e dados de deformação longitudinal para um espécime de aço 1/1.

É necessário transformar as deformações de Green-Lagrange em logarítmicas para então se calcular as tensões verdadeiras.

$$\varepsilon_{green} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (C.1)$$

sendo $\lambda = L_i / L_0$, o alongamento de uma fibra de comprimento instantâneo L_i e inicial L_0 [87],

$$\varepsilon_{green} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (C.2)$$

donde se obtém a deformação logarítmica,

$$\varepsilon_{ln} = \ln(\lambda) = \ln(\sqrt{2\varepsilon_{Green} + 1}) \quad (C.3)$$

Esse cálculo é realizado tanto para as deformações longitudinais ao ensaio de tração, como para as transversais. Quanto às tensões, a de engenharia é obtida a partir de

$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0} , \quad (C.4)$$

sendo F a força da célula de carga do ensaio de tração e A_0 a área inicial da seção do corpo de prova de largura l_0 e espessura e_0 .

Para o cálculo da tensão verdadeira, σ_{ln} , é necessário saber a área instantânea, A_i , além da carga aplicada:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{A_i} \quad (C.5)$$

sendo

$$A_i = l_i \cdot e_i \quad (C.6)$$

onde l_i e e_i são a largura instantânea e a espessura instantânea, respectivamente. Pela definição de alongamento,

$$\lambda_{trans} = \frac{l_i}{l_0} , \quad (C.7)$$

é possível escrever a largura instantânea como:

$$l_i = l_0 \cdot \lambda_{trans} , \quad (C.8)$$

e, através da definição de deformação de engenharia:

$$l_i = l_0 \cdot (1 + \varepsilon_{trans,eng}) , \quad (C.9)$$

sendo $\varepsilon_{trans,eng}$ a deformação transversal de engenharia.

Da mesma forma, a espessura instantânea

$$e_i = e_0 \cdot (1 + \varepsilon_{esp,eng}) . \quad (C.10)$$

Assim, é possível inserir as Eqs. C.9 e C.10 na Eq. C.5:

$$\sigma_{ln} = F \frac{1}{l_0 (1 + \varepsilon_{trans,eng})} \frac{1}{e_0 (1 + \varepsilon_{esp,eng})} = \frac{\sigma_{eng}}{(1 + \varepsilon_{trans,eng}) (1 + \varepsilon_{esp,eng})} , \quad (C.11)$$

ou seja, tensão verdadeira em função de deformações de engenharia e tensão de engenharia.

Como durante o ensaio foram tiradas somente fotos 2D, no plano X-Y, i.e., longitudinal-transversal, Fig. C.2, não há informações de deformação ao longo da espessura. Assim, se a deformação na espessura for assumida como igual à transversal, i.e., $\varepsilon_{esp,eng} = \varepsilon_{transv,eng}$, a Eq. C.11, pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{l_0 e_0} \frac{1}{(1 + \varepsilon_{transv,eng})^2}, \quad (C.12)$$

ou ainda, em função da saída do programa, ou seja, deformações transversais de Green:

$$\sigma_{ln} = \frac{F}{l_0 e_0} \frac{1}{(2\varepsilon_{transv,green} + 1)} = \frac{\sigma_{eng}}{2\varepsilon_{trans,Green} + 1} \quad (C.13)$$

Em resumo, os dados provenientes do programa de DIC, são tratados conforme fluxograma da Fig. C.3, utilizando as Eqs. C.1–C.13, resultando em curvas como as apresentadas na Fig. C.4.

Figura C.3 Fluxo do código escrito em MATLAB para tratamento dos dados obtidos a partir do programa de análise de imagens NCORR.

O tratamento gera, portanto, uma curva de tensão vs. deformação para cada seção. No caso mencionado, são criadas 35 curvas. A curva característica do espécime é tida como aquela das seções que não sofrem descarregamento, conforme curva espessa da Fig. C.4. Quanto às taxas de deformação, são obtidas diferenciando a curva de deformação vs. tempo, sabendo que o vetor de tempo está em

função do intervalo entre fotos.

Figura C.4 Curva do material St 1 : 1 obtida pela análise de diversas seções transversais de um ensaio quase-estático. A mais espessa e alta é tida como a curva tratada do material. As seções que passam a sofrer descarregamento fornecem as quedas de tensão, formando as franjas do gráfico.

Os ensaios dinâmicos tiveram tratamento similar ao aqui apresentado. O acréscimo de tensão dinâmica foi obtido comparando as tensões dinâmicas associadas à taxa de deformação de cada espécime dinâmico com a curva do mesmo material obtida por ensaio quase estático. Estas tensões foram avaliadas entre 2 e 15%, em avanços de 0,5%. Os acréscimos foram utilizados, então, para se obter os parâmetros viscoplásticos, conforme Fig. 4.26.

Apêndice D

Informações adicionais dos materiais

A caracterização dos materiais por correlação digital de imagem gerou as curvas da Fig. 4.25. Os dados que geraram tais gráficos são apresentados nas Tabs. D.1-3,

Tabela D.1 Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 1/1.

1/1 Ti (Ti6Al4v)		1/1 Al (Al2024)		1/1 St (Inox 304)	
ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]
0,0000	990,48	0,0000	317,75	0,0000	343,60
0,0112	1023,76	0,0061	345,56	0,0271	414,26
0,0224	1054,76	0,0121	365,21	0,0542	461,74
0,0336	1080,04	0,0182	380,72	0,0813	505,34
0,0448	1102,51	0,0242	395,63	0,1083	555,60
0,0559	1121,69	0,0303	409,17	0,1354	616,63
0,0671	1139,48	0,0363	421,63	0,1625	690,05
0,0783	1155,75	0,0424	433,17	0,1896	773,84
0,0895	1170,12	0,0484	443,10	0,2167	873,63
0,1007	1183,73	0,0545	452,38	0,2438	947,12
0,1119	1197,39	0,0605	460,87	0,2709	1031,25
0,1231	1209,64	0,0666	468,82	0,2979	1100,36
0,1343	1222,25	0,0726	476,32	0,3250	1171,05
0,1455	1233,27	0,0787	483,07	0,3521	1219,04
0,1567	1244,79	0,0847	489,44	0,3792	1266,17
0,1678	1255,53	0,0908	495,49	0,4063	1310,01
0,1790	1265,45	0,0968	500,98	0,4334	1354,83
0,1902	1275,96	0,1029	506,39	0,4605	1398,73
0,2014	1285,47	0,1089	511,25	0,4876	1441,04
0,2126	1296,09	0,1150	515,75	0,5146	1481,70
0,2238	1305,86	0,1210	519,95	0,5417	1519,43
0,2350	1316,24	0,1271	523,82	0,5688	1555,04
0,2462	1326,03	0,1331	527,55	0,5959	1586,84
0,2574	1336,08	0,1392	530,98	0,6230	1615,95
0,2686	1346,15	0,1452	533,85	0,6501	1640,45
0,2797	1355,53	0,1513	536,36	0,6772	1659,29
0,2909	1368,08	0,1573	538,06	0,7042	1676,18
0,3021	1378,27	0,1634	543,57	0,7313	1686,86
0,3133	1388,12	0,1694	546,50	0,7584	1679,22
0,3245	1396,83	0,1755	549,22	0,7855	1685,74

Tabela D.2 Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 2/3.

2/3 Ti (Ti6Al4v)		2/3 Al (Al1100h14)		2/3 St (Inox 304)		2/3 Cu (CC11000)	
ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]
0,0000	932,47	0,0000	126,91	0,0000	285,63	0,0000	237,73
0,0090	980,85	0,0203	140,48	0,0289	376,34	0,0305	255,25
0,0181	1009,04	0,0406	142,35	0,0578	442,37	0,0610	267,05
0,0271	1027,64	0,0609	144,09	0,0867	501,36	0,0914	277,42
0,0361	1042,47	0,0812	145,87	0,1157	555,93	0,1219	286,60
0,0452	1056,15	0,1016	147,49	0,1446	610,36	0,1524	295,29
0,0542	1067,02	0,1219	148,93	0,1735	667,43	0,1829	303,70
0,0632	1076,29	0,1422	150,19	0,2024	728,35	0,2134	312,34
0,0723	1084,93	0,1625	151,19	0,2313	793,21	0,2439	321,03
0,0813	1091,95	0,1828	152,14	0,2602	860,64	0,2743	330,17
0,0903	1098,55	0,2031	152,90	0,2891	928,72	0,3048	339,03
0,0994	1104,07	0,2234	153,55	0,3181	995,22	0,3353	347,16
0,1084	1108,68	0,2437	154,09	0,3470	1058,59	0,3658	354,38
0,1174	1112,78	0,2640	154,41	0,3759	1117,19	0,3963	360,27
0,1265	1117,33	0,2843	154,68	0,4048	1175,54	0,4268	365,77
0,1355	1121,78	0,3047	154,63	0,4337	1224,23	0,4572	369,35
0,1446	1126,58	0,3250	154,80	0,4626	1273,76	0,4877	369,66
0,1536	1131,15	0,3453	154,51	0,4915	1322,88	0,5182	368,10
0,1626	1136,24	0,3656	154,10	0,5204	1370,67	0,5487	365,50
0,1717	1141,12	0,3859	153,73	0,5494	1417,22	0,5792	360,46
0,1807	1145,70	0,4062	153,10	0,5783	1461,65	0,6097	352,04
0,1897	1150,09	0,4265	154,00	0,6072	1503,47	0,6401	340,64
0,1988	1153,79	0,4468	153,37	0,6361	1541,31	0,6706	328,56
0,2078	1157,31	0,4671	152,86	0,6650	1573,34	0,7011	315,09
0,2168	1160,76	0,4874	152,33	0,6939	1600,23	0,7316	294,71
0,2259	1164,06	0,5078	152,19	0,7228	1620,49	0,7621	248,47
0,2349	1167,06	0,5281	151,91	0,7518	1627,71	0,7926	205,04
0,2439	1172,83	0,5484	150,78	0,7807	1621,58	0,8230	188,48
0,2530	1176,05	0,5687	148,88	0,8096	1599,29	0,8535	285,60
0,2620	1178,89	0,5890	149,86	0,8385	1715,04	0,8840	258,40

Tabela D.3 Dados das curvas quase-estáticas dos materiais utilizados na escala 1/3,

1/3 Ti (Ti6Al4v)		1/3 Al (Al1100h14)		1/3 St (Inox 304)		1/3 Cu (CC11000)	
ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]	ε_p [-]	σ [MPa]
0,0000	908,94	0,0000	101,10	0,0000	307,11	0,0000	184,95
0,0123	960,59	0,0260	111,73	0,0270	391,67	0,0169	193,34
0,0246	995,10	0,0520	114,88	0,0540	458,39	0,0337	195,90
0,0368	1023,11	0,0781	117,29	0,0810	518,01	0,0506	197,63
0,0491	1047,33	0,1041	119,61	0,1080	574,62	0,0674	198,98
0,0614	1070,28	0,1301	122,07	0,1350	630,67	0,0843	200,30
0,0737	1091,84	0,1561	124,58	0,1620	689,05	0,1012	201,42
0,0859	1112,70	0,1821	126,97	0,1890	749,54	0,1180	202,29
0,0982	1134,08	0,2081	129,49	0,2160	814,64	0,1349	202,86
0,1105	1154,53	0,2342	131,78	0,2430	882,22	0,1518	202,89
0,1228	1174,94	0,2602	133,70	0,2700	944,36	0,1686	202,74
0,1350	1195,08	0,2862	135,58	0,2970	1012,28	0,1855	202,00
0,1473	1215,58	0,3122	137,14	0,3240	1081,10	0,2023	201,02
0,1596	1235,74	0,3382	138,41	0,3510	1146,39	0,2192	199,82
0,1719	1256,29	0,3642	139,44	0,3780	1214,41	0,2361	198,26
0,1841	1276,81	0,3903	139,97	0,4050	1261,68	0,2529	196,49
0,1964	1297,34	0,4163	140,30	0,4320	1316,68	0,2698	194,51
0,2087	1318,08	0,4423	140,27	0,4590	1367,78	0,2867	192,33
0,2210	1340,26	0,4683	139,92	0,4860	1417,92	0,3035	190,06
0,2332	1360,93	0,4943	139,19	0,5130	1467,08	0,3204	187,91
0,2455	1383,75	0,5203	138,04	0,5400	1513,54	0,3372	185,43
0,2578	1406,90	0,5464	136,77	0,5670	1558,51	0,3541	182,83
0,2701	1429,66	0,5724	135,32	0,5940	1599,19	0,3710	180,51
0,2823	1451,69	0,5984	132,89	0,6210	1634,88	0,3878	178,21
0,2946	1473,07	0,6244	131,99	0,6480	1665,05	0,4047	174,85
0,3069	1492,56	0,6504	129,67	0,6750	1688,16	0,4216	171,91
0,3192	1510,24	0,6764	126,62	0,7020	1703,88	0,4384	169,04
0,3314	1542,84	0,7025	123,36	0,7290	1706,48	0,4553	166,25
0,3437	1561,49	0,7285	131,96	0,7560	1765,73	0,4721	168,74
0,3560	1584,67	0,7545	129,54	0,7830	1802,10	0,4890	165,59

Apêndice E

Incerteza do cálculo dos fatores de escala

Neste apêndice está contido o desenvolvimento do estudo de propagação das incertezas das grandezas utilizadas para obtenção dos fatores de escala. Serão derivados os erros dos fatores individualmente para, então, concluir pela estimativa da incerteza do fator de velocidade β_V .

Conforme Eq. 3.24,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^3}{\beta_M}}. \quad (3.24 \text{ revisitada})$$

Temos β_V em função dos fatores β_{σ_d} , β_H e β_M . Este último depende do tipo da estrutura e, para ilustrar usaremos uma placa circular. Assim, β_V se torna,

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_d} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}. \quad (3.28 \text{ revisitada})$$

Tradicionalmente, desvio padrão e variância são representados pelos símbolos σ e σ^2 . De forma a não confundir com as variáveis relativas à tensão, será usada a alternativa ς . Sendo x a variável medida em função em outras variáveis $u, v, \dots$

$$x = f(u, v, \dots) \quad (E.1)$$

sabendo que medições individuais i muito provavelmente seguem a mesma função f

$$x_i = f(u_i, v_i, \dots) \quad (E.2)$$

No limite de infinitas medições i , teremos x se aproximando da média $\bar{x}$, usamos a definição para escrever a variância de x [88]

$$\varsigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right] \quad (\text{E.3})$$

É possível escrever o desvio de x em função das outras variáveis e suas derivadas parciais avaliadas na média das outras variáveis [88]

$$x_i - \bar{x} \simeq (u_i - \bar{u}) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_{\bar{v} \dots} + (v_i - \bar{v}) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{\bar{u} \dots} + \dots \quad (\text{E.4})$$

Combinando as Eqs. E.3 e E.4 escritas para as variáveis $u, v, \dots$ e desconsiderando os termos cruzados, isto é, assumindo que as variáveis $u, v, \dots$ não são correlacionadas,

$$\varsigma_x^2 \simeq \varsigma_u^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_{\bar{v} \dots}^2 + \varsigma_v^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{\bar{u} \dots}^2 + \dots \quad (\text{E.5})$$

chegamos à uma aproximação razoável. Aplicando-a para o fator $\beta_{\sigma_0} = \sigma_{0m}/\sigma_{0p}$

$$\begin{aligned} \varsigma_{\beta_{\sigma_0}}^2 &\simeq \varsigma_{\sigma_{0m}}^2 \left(\frac{\partial \beta_{\sigma_0}}{\partial \sigma_{0m}} \right)^2 + \varsigma_{\sigma_{0p}}^2 \left(\frac{\partial \beta_{\sigma_0}}{\partial \sigma_{0p}} \right)^2 \\ \frac{\varsigma_{\beta_{\sigma_0}}^2}{\beta_{\sigma_0}^2} &\simeq \frac{\varsigma_{\sigma_{0m}}^2}{\sigma_{0m}^2} + \frac{\varsigma_{\sigma_{0p}}^2}{\sigma_{0p}^2} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

De maneira similar é possível obter os desvios para $\beta_H, \beta_\rho, \beta_R$. Para β_R e β_H , assumimos que a variância é nula, i.e., que o diâmetro dos suportes são exatamente o valor nominal e que a relação entre as espessuras é determinística. Substituindo $\beta_{\sigma_d} = \beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}}$ na Eq. 3.24, obtemos

$$\beta_V = \sqrt{\frac{\beta_{\sigma_0} \beta_{\text{visco}} \beta_H^2}{\beta_\rho \beta_R^2}}. \quad (\text{E.7})$$

Considerando a propagação de incertezas [88] e assumindo que o quadrado do desvio padrão da média $\bar{\varsigma}_i^2 = \varsigma_i^2 / \sqrt{n-1}$, sendo n o número de amostras, se propaga como as variâncias ς_i^2

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varsigma_{\beta_V}}{\beta_V} \right)^2 &\simeq \left(\frac{\partial \beta_V}{\partial \beta_{\sigma_0}} \right)^2 \varsigma_{\beta_{\sigma_0}}^2 + \left(\frac{\partial \beta_V}{\partial \beta_{\text{visco}}} \right)^2 \varsigma_{\beta_{\text{visco}}}^2 + \left(\frac{\partial \beta_V}{\partial \beta_H} \right)^2 \varsigma_{\beta_H}^2 + \left(\frac{\partial \beta_V}{\partial \beta_\rho} \right)^2 \varsigma_{\beta_\rho}^2 + \left(\frac{\partial \beta_V}{\partial \beta_R} \right)^2 \varsigma_{\beta_R}^2 \\ \left(\frac{\varsigma_{\beta_V}}{\beta_V} \right)^2 &\simeq \frac{\varsigma_{\beta_{\sigma_0}}^2}{4\beta_{\sigma_0}^2} + \frac{\varsigma_{\beta_{\text{visco}}}^2}{4\beta_{\text{visco}}^2} + \frac{\varsigma_{\beta_H}^2}{\beta_H^2} + \frac{\varsigma_{\beta_\rho}^2}{4\beta_\rho^2} + \frac{\varsigma_{\beta_R}^2}{\beta_R^2} \end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\frac{\bar{\varsigma}_{\beta_V}}{\beta_V} \right)^2 \simeq \frac{\bar{\varsigma}_{\beta_{\sigma_0}}^2}{4\beta_{\sigma_0}^2} + \frac{\bar{\varsigma}_{\beta_{\text{visco}}}^2}{4\beta_{\text{visco}}^2} + \frac{\bar{\varsigma}_{\beta_H}^2}{\beta_H^2} + \frac{\bar{\varsigma}_{\beta_\rho}^2}{4\beta_\rho^2} + \frac{\bar{\varsigma}_{\beta_R}^2}{\beta_R^2} \quad (\text{E.8})$$

Fazendo a raiz quadrada da Eq. E.8 é possível obter aproximadamente a incerteza combinada β_V , $\bar{\varsigma}_{\beta_V}$. Somente o cálculo de β_{visco} necessita de maior atenção. No caso do uso da equação de Johnson-Cook,

$$\beta_{\text{visco}} = \frac{1 + C_m \ln\left(\frac{\beta_V}{\beta_H} \dot{\epsilon}_p\right)}{1 + C_p \ln(\dot{\epsilon}_p)} \quad (\text{E.9})$$

Assumindo que somente os parâmetros do material C_m e C_p são variáveis com incerteza, podemos obter as derivadas parciais

$$\frac{\partial \beta_{\text{visco}}}{\partial C_m} = \frac{\ln(\beta_V \dot{\epsilon}_p / \beta)}{1 + C_p \ln(\dot{\epsilon}_p)}$$

e

$$\frac{\partial \beta_{\text{visco}}}{\partial C_p} = \frac{-\ln(\dot{\epsilon}_p) \left(1 + C_m \ln\left(\frac{\beta_V}{\beta_H} \dot{\epsilon}_p\right)\right)}{1 + C_p \ln(\dot{\epsilon}_p)^2}$$

então

$$\varsigma_{\beta_{\text{visco}}}^2 \simeq \left(\frac{\partial \beta_{\text{visco}}}{\partial C_m}\right)^2 \varsigma_{C_m}^2 + \left(\frac{\partial \beta_{\text{visco}}}{\partial C_p}\right)^2 \varsigma_{C_p}^2$$

Se for utilizado $\dot{\epsilon}_p = 1/s$ como referência para obtenção de β_V , conforme cálculos do Cap. 4, temos

$$\varsigma_{\beta_{\text{visco}}}^2 \simeq \ln\left(\frac{\beta_V^2}{\beta^2}\right) \varsigma_{C_m}^2$$

ou

$$\overline{\varsigma_{\beta_{\text{visco}}}} \simeq \left[\ln\left(\frac{\beta_V^2}{\beta^2}\right) \overline{\varsigma_{C_m}^2} \right]^{1/2}.$$