ANDRÉ FERRARA CARUNCHIO

**ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE JUNTAS
AERONÁUTICAS REBITADAS SOB SOLICITAÇÃO ESTÁTICA**

São Paulo

2015

ANDRÉ FERRARA CARUNCHIO

**ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE JUNTAS
AERONÁUTICAS REBITADAS SOB SOLICITAÇÃO ESTÁTICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Ciências

São Paulo
2015

ANDRÉ FERRARA CARUNCHIO

**ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE JUNTAS
AERONÁUTICAS REBITADAS SOB SOLICITAÇÃO ESTÁTICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Ciências

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica de Projeto e
Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

São Paulo
2015

Carunchio, André Ferrara

**Análise numérica e experimental de juntas aeronáuticas
rebitadas sob solicitação estática / A.F. Carunchio. -- São Paulo,
2015.**

115 p. + Anexos

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1.Método dos elementos finitos 2.Juntas rebitadas 3.Ensaios
experimentais I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.**

Aos meus pais, Laura e Raffaele, com amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Ramos Jr., pela enorme paciência, vontade de ensinar, e por ter estado sempre disposto a me ajudar a encontrar os caminhos certos no rumo deste trabalho.

À Prof^a. Dr^a. Larissa Driemeier, pela valorosa ajuda nessa pesquisa e durante o meu ingresso no programa de pós graduação.

Ao meu grande amigo, Dr. Rynaldo Zanotele Hemerly de Almeida, pela convivência dos últimos anos e pelas críticas e boas ideias que ajudaram no meu desenvolvimento e na melhoria do projeto.

Aos amigos e colegas do Instituto de Pesquisas Tecnológicas, pelo estímulo a pesquisa, companheirismo e boas risadas.

À Embraer e todo pessoal técnico e administrativo pelo bom intercâmbio de conhecimentos durante a execução desse trabalho.

Aos meus pais, Raffaele e Laura, pelo apoio e incentivo que me deram durante meus estudos e por toda a minha vida.

Aos meus avós, Ernesta, Giovanni, Rosa e Orlando, por terem sempre me incentivado nos estudos.

Às minhas irmãs, Beatriz e Claudia, pelos momentos de descontração e bagunça!

À Priscila Casari, pelo amor e companhia, e pela compreensão nos meus momentos de ausência.

A todos os meus amigos, sendo impossível citar o nome de todos, por terem me dado ainda mais energia para viver a vida.

“(...) mas retornavam trazendo-lhe apenas oráculos ambíguos, com obscuras fórmulas, difíceis de concatenar e de entender. Depois de muito tempo ele recebeu uma resposta inteligível.”

Ésquilo

RESUMO

Uniões por prenedores são elementos amplamente utilizados na indústria aeronáutica para a união de partes constituintes da aeronave. Contudo, devido à sua geometria e aos carregamentos sofridos, estes elementos estão frequentemente sujeitos a falhas por fadiga. Assim, para um projeto e dimensionamento bem executado dessas juntas, é necessário conhecer seu comportamento mecânico e o campo de tensões ao qual estão sujeitas. O método dos elementos finitos certamente atende a estas necessidades; porém, o uso de elementos sólidos tridimensionais para a representação destas uniões pode levar a análises demasiadamente demoradas e custosas, sendo desejável o uso de modelos mais simplificados. Nesse trabalho, juntas de topo assimétricas são modeladas pelo método dos elementos finitos, utilizando tanto elementos sólidos tridimensionais quanto elementos de casca, com o objetivo de encontrar um modelo relativamente simples que apresente resultados satisfatórios e requeira um menor tempo de solução. Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais, que utilizam extensômetros e fotoelasticidade.

Palavras chave: juntas rebitadas, elementos finitos, fotoelasticidade, estruturas aeronáuticas.

ABSTRACT

Riveted joints are structural elements widely used in the aeronautic industry to connect different parts of the aircraft. However, due to their geometry and working load, they are frequently subjected to fatigue failure. Therefore, to a well executed project of this type of joint, it is necessary to understand the mechanical behavior and the stress field to which they are subjected. The finite element method can certainly answer those needs; however, the use of tridimensional elements to represent this type of joint can lead to time consuming and expensive analysis, being desirable the use of simpler models. In this work, asymmetric butt joints are modeled using the finite element method using both, tridimensional and shell elements, with the objective of finding a model that provides satisfactory results at smaller solution time. The numerical results obtained are compared with experimental results using strain gage and photoelastic procedures.

Key words: Riveted joints, finite elements, photoelasticity, aeronautic structures.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	6
1.1.OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES.....	8
1.2. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....	9
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1.TRANSFERÊNCIA DE CARGA.....	14
2.2.MOMENTO SECUNDÁRIO.....	17
2.3.INFLUÊNCIA DE FATORES GEOMÉTRICOS.....	19
2.4.FLEXIBILIDADE DO PRENDEDOR.....	20
3 DESCRIÇÃO DOS CORPOS DE PROVA.....	22
3.1.DESCRICÃO DAS GEOMETRIAS.....	22
3.2.MATERIAIS.....	24
4 ENSAIOS EXPERIMENTAIS.....	25
4.1.JUNTAS ESTREITAS.....	25
4.2.JUNTAS LARGAS.....	27
4.3. ENSAIO DE CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS.....	35
4.3.1. Alumínio 2524.....	35
4.3.2. Alumínio 2117.....	36
5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	38
5.1.JUNTA ESTREITA.....	38
5.2.JUNTA LARGA.....	41
5.2.1. Resultados de extensometria.....	42
5.2.2. Resultados de fotoelasticidade.....	50
5.3.CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS.....	53
5.3.1. Alumínio 2524.....	53
5.3.2. Alumínio 2117.....	55
6 MODELOS NUMÉRICOS.....	57

6.1. MODELAGEM DOS MATERIAIS.....	57
6.2. DESCRIÇÃO DO MODELO PARA JUNTA ESTREITA COM ELEMENTOS SÓLIDOS	58
6.3. TRANSFERÊNCIA DE CARGA POR CONTATO.....	60
6.3.1. Ferramenta de contato analítico.....	60
6.3.2. Aplicação a corpos de prova estreitos	61
6.4. INFLUÊNCIA DAS CURVAS DOS MATERIAIS DA JUNTA.....	65
6.4.1. Propriedades do material dos prendedores.....	65
6.4.2. Encruamento da cabeça conformada dos prendedores	66
6.5. TRANSFERÊNCIA DE CARGA POR ATRITO	69
6.5.1. Modelos de atrito	69
6.5.2. Influência do valor do coeficiente de atrito	70
6.5.3. Identificação da seção crítica da junta sob tração	71
6.6. DESCRIÇÃO DO MODELO PARA JUNTA LARGA COM ELEMENTOS SÓLIDOS	73
6.7. RESULTADOS DO MODELO JLES	74
6.8. DESCRIÇÃO DO MODELO DE JUNTA LARGA COM ELEMENTOS DE CASCA	87
6.9. RESULTADOS DO MODELO JLEC	91
6.9.1. Formulação de Swift.....	91
6.9.2. Formulação de Huth	101
7 CONCLUSÕES.....	110
REFERÊNCIAS.....	113
ANEXO A.....	116
ANEXO B.....	127
ANEXO C.....	135

1 INTRODUÇÃO

Juntas rebitadas são elementos amplamente utilizados em diversos setores da indústria para a produção de uniões fixas entre dois ou mais componentes. Esse tipo de junta apresenta certas vantagens sobre outros tipos de uniões, como por exemplo: melhor resistência térmica (em relação a juntas por meio de adesivos) e melhor desempenho sob esforços de cisalhamento (em relação às juntas parafusadas). Na indústria aeronáutica, em particular, essas uniões são empregadas em diversas partes das aeronaves, como asas, fuselagem, enrijecedores, entre outras.

Apesar de sua importância, as juntas rebitadas originam diversos pontos de concentração de tensões e, quando submetidas a cargas cíclicas – sejam elas provenientes dos esforços de voo ou devido à pressurização da cabine – podem ocasionar falha por fadiga. Um exemplo disso é o acidente ocorrido com um Boeing 737 da Aloha Airlines, em 1988, em que parte da fuselagem se desprendeu da aeronave durante o voo, como ilustrado na Figura 1.1. De acordo com a NTSB (1989), após 89680 voos, os repetidos ciclos de pressurização e despressurização causaram o surgimento e a propagação de trincas em uma junta sobreposta, que coalesceram e levaram à falha, conhecida por MSD (*Multiple Site Damage*).

Figura 1.1 – Acidente aéreo envolvendo Boeing 737.

Fonte: Mosinyi (2007)

Por razões como essa o projeto e dimensionamento de uniões por prendedores devem ser bem realizados, já que deles depende a vida útil da junta. Estudos sobre essas juntas existem desde a primeira metade do século XX (como, por exemplo, os trabalhos de Rettew e Thumin (1923), Tate e Rosenfeld (1946), e Brueggeman (1936)) quando, em alguns casos, a interação entre seus componentes constituintes ainda não era bem compreendida. Tais modelos foram se desenvolvendo no decorrer dos anos, até abordarem mecanismos importantes como o momento secundário e a flexibilidade do rebite. Apesar disso, os modelos analíticos geralmente são simplificados e não contemplam todos os fenômenos que ocorrem nas juntas, como o atrito entre as partes constituintes e a interferência entre os prendedores e chapas, por exemplo.

Uma das formas consagradas de se obter informações acerca do comportamento mecânico de uma estrutura, ou parte dela, com relativa fidelidade, é através de ensaios experimentais. A principal desvantagem, nestes casos, é o tempo gasto na execução dos mesmos e o alto custo envolvido na fabricação dos corpos de prova, instrumentação e uso de equipamentos. Ademais, nem sempre é possível instrumentar os pontos de interesse. Um exemplo disso é o caso de juntas de topo rebitadas, onde a área mais solicitada encontra-se na interface entre as chapas e a chapa de união.

Para contornar estes problemas, métodos numéricos como o método dos elementos finitos tornaram-se alternativas interessantes para esse tipo de estudo. Porém, mesmo com a grande disseminação de softwares comerciais de elementos finitos, análises mal elaboradas podem apresentar resultados ruins ou serem mais demoradas que o necessário, aumentando de forma significativa a relação custo-benefício.

Modelos simplificados, utilizando elementos de casca para representar as chapas, e elementos de mola ou de viga para representar os prendedores, são normalmente utilizados na indústria para o estudo de juntas rebitadas. Essa técnica possibilita a elaboração de modelos com menor número de graus de liberdade e fornece boa precisão do estado de tensões da junta, sendo úteis para o dimensionamento de grandes painéis com uniões por rebites. O ponto chave para o sucesso de um modelo desse tipo são os elementos e parâmetros utilizados na modelagem da transferência de carga entre as chapas e os prendedores. Por outro

lado, modelos com elementos sólidos tridimensionais fornecem informações mais detalhadas do comportamento mecânico das juntas, mas são inviáveis para a utilização em estruturas grandes, e mesmo no dia-a-dia da indústria.

1.1. OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

Esse trabalho tem como objetivo realizar um estudo comparativo entre modelos de elementos finitos para a análise de juntas de topo assimétricas utilizadas na indústria aeronáutica sob carregamento estático. Inicialmente, modelos mais elaborados (hierarquicamente superiores), que utilizam elementos sólidos tridimensionais tanto para as chapas quanto para os rebites, serão utilizados para se obter dados sobre as juntas, e servirão de paradigma para os resultados obtidos através de modelos de elementos finitos simplificados (ou hierarquicamente inferiores). Naturalmente, espera-se que o modelo simplificado possa garantir resultados igualmente confiáveis e com tempos de processamento significativamente menores (quando comparados com aqueles associados aos modelos com elementos sólidos tridimensionais).

Além das análises por elementos finitos, resultados experimentais obtidos por meio de ensaios estáticos de várias juntas rebitadas, instrumentadas com extensômetros e utilizando também técnicas de fotoelasticidade, serão utilizados para validar as simulações numéricas. Estes resultados permitirão determinar tanto o comportamento global da junta (como, por exemplo, através do levantamento da curva Carga $\times$ Deslocamento) quanto o valor dos alongamentos em determinados pontos (e direções) das chapas, os quais serão comparados com os resultados numéricos obtidos pelas simulações com elementos finitos, como forma de validação. Deve-se registrar que as análises apresentadas nesse trabalho foram feitas com os softwares MSC Patran, MSC Nastran e MSC Marc, versão 2010. As várias estratégias e ferramentas utilizadas no processo são apresentadas e discutidas no decorrer do trabalho.

Por fim é importante observar que, embora não seja parte do escopo deste trabalho, futuras análises de fadiga de alto ciclo de juntas rebitadas também poderão se beneficiar dos resultados aqui obtidos uma vez que os campos de tensões e deformações, bem como a determinação dos fatores de concentração de tensões nas juntas são, naturalmente, fundamentais para estas análises.

1.2. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos. O capítulo 1, que aqui se encerra, tratou de introduzir o problema, fornecendo motivações para o estudo a ser desenvolvido e apresentando de forma clara os objetivos principais a serem perseguidos.

O capítulo 2 apresentará uma revisão do estado-da-arte acerca do tema, destacando as contribuições de diversos pesquisadores na análise estrutural de juntas rebitadas, com maior ênfase nos estudos desenvolvidos nos últimos vinte anos.

Na sequência, o capítulo 3 apresentará os dados de entrada das juntas de topo que serão objeto de estudo, sendo as informações divididas em duas partes: a primeira destacando as informações acerca da geometria das juntas, e a segunda tratando dos materiais utilizados nas chapas e nos prendedores.

O capítulo 4 apresentará a metodologia empregada na execução dos ensaios experimentais, sendo dividido em três seções: a seção 4.1 abordará a metodologia empregada nos ensaios de juntas estreitas; idem para a seção 4.2 no tocante aos ensaios de juntas largas. Já a seção 4.3 discutirá a metodologia empregada em alguns ensaios de caracterização dos materiais das juntas.

O capítulo 5 apresentará os resultados experimentais provenientes dos ensaios estáticos realizados nas juntas, sendo também dividido em três seções (de forma análoga com a divisão proposta para o capítulo 4). Assim, as seções 5.1 e 5.2 apresentarão, respectivamente, os resultados experimentais obtidos para as juntas estreitas e para as juntas largas, sendo ainda apresentadas em cada uma destas seções as curvas Carga $\times$ Deslocamento das juntas, alguns resultados de deformações, obtidos por extensometria, e alguns resultados obtidos pelas técnicas de fotoelasticidade. A seção 5.3 apresenta os resultados dos ensaios de caracterização dos materiais.

Em seguida, o capítulo 6 tratará da apresentação dos modelos de elementos finitos sendo subdividido em nove seções, a saber: a seção 6.1 explica a forma como os materiais foram modelados, para sua aplicação nos modelos seguintes; a seção 6.2 descreve o modelo de junta estreita que faz uso de elementos sólidos tridimensionais em termos da malha utilizada, condições de contorno e cargas aplicadas. A seguir, na seção 6.3, são mostrados ferramentas e parâmetros

utilizados para a representação do esforço de contato entre as partes constituintes da junta, e quais os impactos na resposta do modelo. A influência nos resultados das simulações devidas às propriedades dos materiais e às propriedades de atrito introduzidas no modelo são mostradas respectivamente nas seções 6.4 e 6.5. O modelo de junta larga, que utiliza elementos sólidos tridimensionais, é explicado na seção 6.6, que é sucedida pelos seus resultados, na seção 6.7, e analogamente para o modelo de junta larga que utiliza elementos de casca, nas seções 6.8 e 6.9.

Finalmente o capítulo 7 apresentará as conclusões do trabalho, ressaltando os principais pontos de interesse nas análises executadas, sendo também indicadas algumas propostas de continuidade para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estudos sobre uniões por prendedores têm sido feitos desde o início do século XX. Isso, porém, não esgota o tema, já que sempre existe a possibilidade de incluir melhorias no projeto e análise dessas estruturas. A seguir serão comentados alguns trabalhos semelhantes ao tema tratado nessa dissertação e, em seguida, são explicados alguns assuntos relevantes para um bom entendimento do trabalho.

Spinelli (2004) realizou um estudo sobre o método de fotoelasticidade aplicado a juntas rebitadas e, através da análise das franjas¹ geradas no processo, investigou formas para se calcular tensões e deformações em peças sob solicitação mecânica. Esses conhecimentos foram aplicados para se obter a tensão de cisalhamento em juntas rebitadas submetidas a esforços de tração, mostrando a aplicabilidade dessa técnica para, por exemplo, validar modelagens feitas em softwares de elementos finitos. Foi observado que, em geral, os valores de deformação de cisalhamento obtidos pelos modelos de elementos finitos de casca foram muito menores do que os obtidos experimentalmente.

Skorupa *et al.* (2010) investigaram os efeitos das variáveis de produção em juntas de topo rebitadas, tais como material e geometria do rebite, força de rebitagem (*squeeze force*) e a consequente deformação das chapas. Foi observado que, entre os benefícios de uma maior força de rebitagem está a expansão do furo, cujas principais contribuições são: menor possibilidade de inclinação dos rebites; menor influência do acabamento superficial do furo; indução de tensões residuais nos arredores, o que facilita a transmissão da carga. Após ensaios dinâmicos, os autores relacionaram a vida em fadiga da junta com a força aplicada no rebite durante sua montagem, tendo encontrado diferenças de até 4 vezes no número de ciclos necessários para a falha.

Xavier (2006) estudou o comportamento mecânico de juntas rebitadas. Utilizou no decorrer de seu trabalho dois tipos diferentes de elementos de casca (quadriláteros, com 4 e 8 nós) e, para a modelagem dos rebites, elementos de viga, além de uma combinação de elementos de viga e de mola. Também foi testado um modelo mais completo da junta, utilizando-se elementos tridimensionais e considerando o atrito existente entre as partes. Ao comparar os resultados

¹ Padrão de cores formado na resina fotoelástica, a qual reveste o corpo de prova, que está associado ao campo de deformações dos pontos do sólido.

numéricos encontrados com ensaios de tração e dados obtidos por meio de extensômetros, verificou-se que o modelo que utiliza elementos de casca com 8 nós foi o que apresentou melhor relação custo-benefício para representar o comportamento da junta. O autor também afirma que alguns parâmetros não considerados nas simulações computacionais, como grau de interferência e tensões residuais, melhorariam o resultado final das análises. Também foram utilizados métodos analíticos para a determinação da transferência de carga entre as fileiras baseadas nos trabalhos de Schijve (1972) e Rijck (2005).

Müller (1995) realizou uma ampla análise de juntas sobrepostas rebitadas quando submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos, utilizando alumínio 2024-T3 e Glare3 como materiais. Seus estudos contemplaram variáveis como a força de rebite (*squeeze force*), flexibilidade do rebite, momento secundário e imperfeições ocorridas durante a fabricação no comportamento da junta. Foram feitas ainda observações sobre fenômenos como o efeito de borda, transmissão da carga pela junta e sua distribuição pelas fileiras de rebites. Müller (1995) também elaborou diversos modelos de elementos finitos para estudar o efeito da força de conformação dos prendedores nas tensões residuais decorrentes da montagem no campo de tensões.

A contribuição do momento secundário para a ocorrência de fadiga em estruturas foi amplamente estudada por Schijve, Campoli e Monaco (2009). A excentricidade presente nas juntas sobrepostas (que pode ser entendida como uma mudança de plano da linha neutra) resulta em deslocamentos fora do plano médio da junta, e consequentemente induz um momento fletor nas chapas, que é prejudicial à vida em fadiga do componente. Após análises feitas por elementos finitos, os autores observaram uma não linearidade entre o momento secundário e a carga aplicada. Também foi descrito um método analítico para o cálculo desse momento, o método da linha neutra, mostrando que alguns fatores, como o espaçamento entre rebites, estão relacionados com a intensidade do momento secundário.

Bedair e Eastaugh (2007) fazem uma descrição detalhada dos modelos numéricos de uniões por prendedores que utilizam elementos de casca para mostrar a diferença no estado de tensões das chapas ao se considerar, ou não, o momento fletor secundário. A validação dessas simulações é feita através de ensaios

experimentais utilizando métodos fotoelásticos, com os quais os autores relatam os resultados obtidos e descrevem as dificuldades encontradas com essa técnica.

Skorupa *et al.* (2014) estudaram o efeito de variáveis de projeto e de produção no comportamento a fadiga de juntas rebitadas sobrepostas de alumínio de diferentes espessuras. Foi observado que existe uma dependência entre o ponto em que ocorre a nucleação da trinca e de sua trajetória com a força de conformação do prendedor (*squeeze force*) e o tipo de prendedor utilizado. O autor também afirma que juntas que utilizam chapas de menor espessura são mais suscetíveis a nucleação de trincas, devido a deformação local embaixo da cabeça do prendedor durante sua instalação. Os efeitos desse tipo de imperfeição podem se sobrepor aos benefícios de um momento secundário de menor intensidade (que ocorre em pequenas espessuras). O aumento da força de conformação, durante a montagem das juntas, também é apontado como um dos fatores benéficos para o aumento da vida em fadiga do componente.

Jiang *et al.* (2011) investigaram a influência da espessura da chapa e a tolerância de ajuste no fator de concentração de tensões de juntas pinadas pelo método dos elementos finitos. Foi demonstrado que o fator de concentração de tensões de tração aumenta significativamente com o quociente entre largura da chapa e raio do furo. Também foi concluído que o módulo de elasticidade dos materiais da chapa e do pino e o coeficiente de atrito influenciam o fator de concentração de tensões, que também varia em função da carga aplicada.

Rans, Alderliesten e Straznicky (2009) estudaram a influência da força de rebiteamento (*squeeze force*) no comportamento à fadiga de uniões por prendedores. Como o comportamento da trinca dentro da zona de tensões residuais de compressão geradas pela força de rebiteamento é complexo e, considerando que no momento em que as trincas atingem a superfície da junta elas já estão fora dessa área, foram empregadas técnicas de fractografia nos corpos de prova após ocorrer a falha. Foi observado que o aumento da força de rebiteamento, além de melhorar o desempenho à fadiga das juntas, faz com que o ponto em que a trinca se inicia tenda a ser mais afastado dos furos que alojam os rebites. Isso ocorre devido a dois fatores: as tensões residuais compressivas geradas nas chapas pela expansão dos prendedores durante a conformação; e ao aumento da força de contato entre as chapas (devida a forças de rebiteamento altas), o que intensifica o atrito entre as partes constituintes da junta (locais onde a falha inicia).

Rans (2007) elaborou modelos de elementos finitos e utilizou ensaios experimentais para analisar a influência do processo de montagem dos prendedores no comportamento em fadiga de juntas rebitadas, fabricadas em alumínio e glare. O objetivo era identificar os aspectos que se mostravam vantajosos durante a montagem da união, para que fosse possível utilizá-los na manufatura de juntas rebitadas com maior vida útil. Foi observado que, em uniões com prendedores de cabeça chanfrada, as tensões residuais decorrentes da montagem variaram ao longo da espessura das chapas, e em função do comprimento da área chanfrada do prendedor. Nas juntas que utilizam rebites sem cabeça chanfrada, por outro lado, as tensões residuais de compressão foram identificadas apenas na chapa em que o prendedor sofre conformação.

2.1. TRANSFERÊNCIA DE CARGA

A função do prendedor em uma união é, conforme Skorupa e Skorupa (2012), transferir carga de uma chapa para outra na região em que ocorre a sobreposição. Essa transferência de carga ocorre gradativamente pela ação de cada uma das fileiras de rebites, além de haver uma parcela transmitida por meio do atrito entre as chapas.

A figura 2.1 ilustra de maneira esquemática o mecanismo de transferência de carga em uma junta. A força de tração aplicada (F) pode ser dividida em duas partes: uma parcela da força (F_t) é transferida de uma chapa para outra enquanto outra parcela (F_p) permanece na mesma chapa para ser transmitida pelas próximas fileiras de prendedores. A força transferida (F_t), por sua vez, também pode ser decomposta em duas parcelas: uma força de contato, F_c , que ocorre pela ação direta das chapas nos prendedores, e uma força de atrito, F_{at} .

Figura 2.1 – Representação esquemática da transferência de carga (Adaptado de Skorupa e Skorupa, 2012)

Swift (1990) relacionou, por meio de modelos analíticos, as espessuras das chapas utilizadas em juntas sobrepostas com a quantidade de carga transferida pela primeira fileira de prendedores, como é mostrado na figura 2.2. Em seus estudos foram utilizadas três fileiras de rebites de 3/16" e ligas de alumínio para as chapas e os prendedores. Analisando o gráfico da figura 2.2, pode-se afirmar que as espessuras das chapas influem na distribuição da carga entre as fileiras, sendo que para chapas mais finas a porcentagem de carga transmitida na primeira fileira é menor. É possível notar ainda que parece existir uma relação linear entre a parcela de carga transferida pela primeira fileira de prendedores e as espessuras das chapas que constituem a junta, desde que a razão entre as espessuras (t_1/t_2) seja mantida constante.

Figura 2.2 – Influência da espessura das chapas na transferência de carga na primeira fileira de prendedores de uma junta sobreposta. Adaptado de Swift (1990)

A chamada *clamping force* é a força de aperto entre as chapas, na direção axial do prendedor, decorrente da montagem do conjunto. Ela é de grande importância no comportamento da junta, já que está relacionada com outros fenômenos como a transferência de carga por atrito, por exemplo. Quando uma junta é tracionada, forças de atrito são geradas nas regiões de contato entre a cabeça do prendedor e a chapa, e entre as duas chapas. A tensão normal na junta, atuante na seção transversal da chapa, sem considerar a área dos orifícios, abaixo da qual a transferência de carga ocorre exclusivamente por atrito (já que durante o atrito estático não ocorre deslocamento) é, segundo Hahn, Iyer e Rubin (2005), calculada conforme a equação 2.1, para juntas de topo assimétricas, onde: μ é o coeficiente de atrito entre as chapas; F_{cl} é a *clamping force*; t é a espessura da chapa; e W é a largura da junta.

$$\sigma = \frac{\mu \cdot F_{cl}}{t \cdot W} \quad (2.1)$$

Segue, na figura 2.3, uma representação esquemática da ação da *clamping force* e sua importância no mecanismo de transferência de carga por atrito, onde os prendedores foram ocultados para facilitar a visualização.

Figura 2.3 – Representação esquemática de junta rebitada com ação da *clamping force* e atrito

Para valores menores ou iguais a σ , a carga é transmitida quase que exclusivamente por atrito (alguns modelos idealizados consideram 100% da carga transferida por atrito nessa situação). Quando a tensão aplicada supera esse valor, as chapas escorregam entre si e a carga adicional passa a ser transmitida pelo contato entre os prendedores e as chapas.

2.2. MOMENTO SECUNDÁRIO

Quando as juntas são carregadas, devido às excentricidades presentes em algumas configurações (figura 2.4) ocorre um fenômeno conhecido como momento secundário, que está associado aos deslocamentos transversais da junta. Schijve *et al.* (2009) avaliam a influência das tensões geradas por esse momento dividindo a máxima tensão normal devida à flexão pela tensão normal média aplicada na junta, razão essa que é denominada k_b .

Segundo Müller (1995) o momento secundário e o parâmetro k_b variam com a carga aplicada de forma não linear, como indicado na figura 2.5, criada com base

em cálculos analíticos feitos para juntas de alumínio 2024-T3 com duas fileiras de prendedores e chapas de mesma espessura (1 mm).

Schijve *et al.* (2009) também afirmam que as deformações plásticas que ocorrem localmente nas proximidades dos furos contribuem para a redução do momento secundário, já que causam um pequeno desvio na linha neutra. A redução do momento também é causada pelo aumento no comprimento da zona de sobreposição das chapas.

A importância do estudo do momento secundário é, ainda segundo Schijve *et al.* (2009), devida à sua influência no fator de concentração de tensões da junta, k_t . Por consequência disso, quanto maior for a influência do momento nas solicitações sofridas pela junta (ou seja, quanto maior for o valor de k_b), mais afetado será o desempenho da junta a fadiga.

Figura 2.4 – Variação da linha neutra em juntas rebitadas
FONTE: Schijve *et al.* (2009)

Figura 2.5 – Variação da tensão gerada pelo momento secundário e do fator k_b em função da tensão aplicada no conjunto. FONTE: Müller (1995)

2.3. INFLUÊNCIA DE FATORES GEOMÉTRICOS

A geometria da junta rebitada exerce grande influência sobre a transferência de carga e campos de tensões afetando, conseqüentemente, a vida em fadiga do componente.

Um maior número de fileiras de rebites, por exemplo, afeta a intensidade da carga sob a qual cada uma delas estará sujeita, já que as forças serão divididas por mais prendedores. Apesar disso, deve ser lembrado que o esforço não é homogeneamente distribuído entre as fileiras (exceto para juntas compostas por uma ou duas fileiras de prendedores), sendo ele, normalmente, mais crítico nos prendedores mais externos. Dessa forma, dificilmente o desempenho de uma junta é melhorado adicionando-se mais de três fileiras de prendedores na união, apesar dessa condição ser utilizada em alguns casos, como no Boeing 747-400, por exemplo, como afirma Skorupa e Skorupa (2012).

A quantidade de fileiras de rebites, porém, dificilmente tem algum significado se avaliada individualmente. Um aumento no número de prendedores está normalmente associado a uniões projetadas para suportar cargas maiores, onde em geral são necessárias chapas de maior espessura. Tal aumento de espessura ocasionará também um aumento do momento secundário. Por outro lado, prendedores adicionais vão requerer uma chapa de união com maior comprimento (caso a distância entre os prendedores seja mantida a mesma), que por sua vez tende a amenizar os efeitos do momento secundário, conforme citado anteriormente.

Outro efeito importante que deve ser discutido é o chamado efeito de borda, ilustrado na figura 2.6 e estudado por Müller (1995) em análises por elementos finitos. Ao se tracionar um corpo de prova em uma direção, ocorre uma contração na direção transversal devido ao efeito de Poisson. Deve-se notar, porém, que a força axial em uma mesma chapa não é constante ao longo da região de sobreposição, já que cada fileira de prendedores transfere uma parcela da carga. Dessa forma, a intensidade da contração tende a diminuir conforme se avança pela zona de sobreposição. Pelo fato dessa contração ser, em uma mesma seção, diferente nas duas chapas, uma força de cisalhamento é criada nos prendedores com magnitude maior nos prendedores mais próximos às bordas.

Os modelos numéricos de Müller (1995) também mostraram que corpos de prova mais longos estão sujeitos a um efeito de borda significativamente mais

intenso. Isso se explica pelo fato de as extremidades das juntas estarem fixadas nas garras da máquina de tração, o que impede deslocamentos transversais. O efeito de borda também é influenciado pela largura do corpo de prova.

Figura 2.6 – Efeito de borda: a) deformação lateral das chapas; b) direção da força resultante entre os prendedores e chapas. Fonte: Müller (1995)

2.4. FLEXIBILIDADE DO PRENDEDOR

O deslocamento total δ que uma junta rebitada sofre quando submetida a um esforço de tração F pode ser dividido em duas parcelas. A primeira delas, denominada δ_1 , é numericamente igual ao deslocamento sofrido por uma chapa de mesmo material, comprimento, e área de seção transversal da junta, quando sujeita a uma força de tração de igual intensidade. A segunda parcela, δ_2 , é o deslocamento que ocorre devido à flexão e demais deformações sofridas pelo rebite e pela chapa nas vizinhanças do furo. Esses deslocamentos são apresentados esquematicamente na figura 2.7.

Figura 2.7 – Representação esquemática dos deslocamentos δ_1 e δ_2 : a) deformação de uma chapa uniforme; b) deformação de um prendedor

A flexibilidade do prendedor (f) pode ser definida como a influência do prendedor na flexibilidade total do conjunto, como mostra a equação 2.2. Segundo Hahn, Iyer e Rubin (2005), essa grandeza é importante, pois pode ser utilizada para a elaboração de modelos simplificados de junta rebitada, como o que é mostrado na figura 2.8. Nesse caso uma mola foi utilizada para representar a interação rebite/furo e outra para representar a rigidez das chapas que compõem a junta. Usar valores coerentes de rigidez das molas nesse tipo de modelo é importante para se obter dados corretos sobre a quantidade de carga distribuída em cada prendedor, deslocamento sofrido pela junta e campo de tensões.

$$f = \frac{\delta - \delta_1}{F} \quad (2.2)$$

Figura 2.8 – modelagem de junta rebitada sobreposta utilizando molas
Fonte: Hahn, Iyer e Rubin (2005)

3 DESCRIÇÃO DOS CORPOS DE PROVA

Os corpos de prova (CDPs) utilizados nesse trabalho representam juntas rebitadas comumente utilizadas na manufatura de aeronaves. Dessa forma, seus materiais, geometrias, processos de fabricação, e outras características estão de acordo com as técnicas atualmente empregadas na indústria aeronáutica.

3.1. DESCRIÇÃO DAS GEOMETRIAS

A união estudada nesse trabalho consiste em uma junta de topo com 30 prendedores de diâmetro nominal de 5/32" que fazem a união de duas chapas de 1,6 mm de espessura e uma chapa de união de 2 mm, como representado nas figuras 3.1 e 3.2. O comprimento total da junta larga é de 500,1 mm, e ela apresenta na parte central uma largura de 112 mm. Em suas extremidades, a largura é um pouco maior (150 mm) para possibilitar uma melhor fixação na máquina de tração e distribuição dos esforços. O material utilizado nas chapas é a liga AA 2524 T3.

Foram utilizados três corpos de prova largos (denominados JL-1 a JL-3), que possuem três fileiras de cinco prendedores em cada chapa. Adicionalmente foram utilizados dois corpos de prova estreitos (JE-01 e JE-05, conforme a figura 3.3), com três fileiras de um prendedor em cada chapa, que apresentam cerca de um quinto da largura das juntas maiores. Os CDPs estreitos foram utilizados em ensaios de tração preliminares, que tiveram como objetivo entender melhor o comportamento da junta e estimar as capacidades de carga dos corpos de prova largos. Ademais, durante a etapa de simulação numérica, foram primeiramente construídos modelos dos CDPs estreitos que, por serem menores, levaram a um menor tempo de análise.

Figura 3.1 – Junta rebitada larga

Figura 3.2 – Detalhe da área próxima aos prendedores

Figura 3.3 – Junta estreita

Os prendedores utilizados para a montagem das juntas, os rebites Briles, são fabricados em alumínio 2117-T4, de acordo com a norma NASM 14218 AD – 5/32”, e têm sua geometria apresentada na figura 3.4. O diâmetro da parte cilíndrica, a qual fica em contato com as chapas, tem diâmetro de 3,96 mm, e o diâmetro máximo é de 5,33 mm (quando não conformado). Nota-se que a cabeça do prendedor apresenta uma espécie de chanfro, que fica alojado na chapa que será unida. Essa configuração permite, de acordo com Skorupa e Skorupa (2012), que a superfície externa da aeronave seja plana, obtendo-se assim ganhos aerodinâmicos.

O processo de união consiste em fazer a montagem do conjunto e conformar uma segunda cabeça na outra extremidade do prendedor por meio de impactos de intensidade controlada.

Figura 3.4 – Geometria do prendedor Briles

FONTE: AEROSPACE INDUSTRIES ASSOCIATION OF AMERICA, 2010

Durante o processo de montagem é aplicado o selante MIL-PRF-81733 na interface entre as chapas e a chapa de união e no prendedor, para servir de barreira contra as causas comuns de corrosão em ligas de alumínio.

3.2. MATERIAIS

Na tabela 3.1 encontram-se as propriedades dos materiais que constituem as juntas.

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas dos materiais que compõem os corpos de prova

Grandeza	Al 2524-T3¹	Al 2117-T4²
Módulo de elasticidade (GPa)	68,2	71,0
Tensão de escoamento (MPa)	340,9	124,1
Alongamento na ruptura (%)	15,0	18,0
Tensão de ruptura (MPa)	435,9	262,0
Coefficiente de Poisson	0,350	0,330

¹ matweb.com

² NASM 14218

4 ENSAIOS EXPERIMENTAIS

4.1. JUNTAS ESTREITAS

Os corpos de prova estreitos foram ensaiados com o objetivo de conhecer melhor o comportamento das juntas e estimar as cargas de ruptura dos corpos de prova largos. Para o ensaio de tração foi utilizada uma máquina servo-hidráulica MTS 312.21 montada com uma célula de carga calibrada de 100 kN com garras hidráulicas.

Foram utilizados os seguintes parâmetros de ensaio:

- abordagem de controle: velocidade constante do atuador;
- velocidade do atuador: 0,1 mm/s;
- critério de parada: ruptura do corpo de prova.

Além dos dados obtidos por meio dos transdutores da máquina de ensaios, optou-se por instrumentar alguns dos corpos de prova com resina fotoelástica, para estudar os procedimentos de colagem descritos pelo fabricante em Vishay (2010). Nenhum resultado numérico foi obtido por meio da fotoelasticidade; apenas foram feitas avaliações qualitativas do campo de deformações e da eficiência da colagem.

Foram testadas duas formas de colagem da resina fotoelástica: um corpo de prova recebeu placas de resina fotoelástica contínua, como mostra a figura 4.1, enquanto outra junta (que não é idêntica as que estão sendo estudadas nesse trabalho, mas tem uma geometria semelhante) recebeu uma das placas com furos na posição em que se encontravam os rebites, apresentada na figura 4.2. Essa diferença na aplicação foi feita para verificar se existe influência do movimento de corpo rígido que os prendedores sofrem nas deformações indicadas pela resina, e apurar outras diferenças que os resultados possam apresentar.

Figura 4.1 – Colagem da resina fotoelástica contínua sobre o corpo de prova estreito

Figura 4.2 – Colagem da resina fotoelástica, com furos nas regiões dos prendedores, sobre o corpo de prova estreito

Os furos foram feitos com uma folga radial de 1,5 mm em relação à cabeça do prendedor pois, de acordo com o fabricante, essa folga evita um descolamento prematuro da resina. Óleo mineral foi utilizado para lubrificar a resina durante o processo de usinagem, evitando assim aquecimentos excessivos e uma possível degradação da resina. Ademais, tentativas anteriores de furação sem óleo mineral induziram tensões residuais nas bordas dos furos, conforme mostra a figura 4.3 obtida com o auxílio de um polariscópio.

(a)

(b)

Figura 4.3 – Verificação das tensões residuais na furação da resina fotoelástica: a) sem óleo mineral; b) com óleo mineral

Seguem as especificações do sistema de medição de deformações por fotoelasticidade e dos materiais utilizados:

- Fabricante e modelo: Vishay Precision Group / Micro-Measurements – LF/Z2;
- resina fotoelástica: placa pré-moldada Vishay PS-1 de 3 mm de espessura
- adesivo: Vishay PC-1 (resina e catalisador).

4.2. JUNTAS LARGAS

As três juntas largas foram ensaiadas utilizando uma máquina de ensaios servo-hidráulica MTS 311.31 montada com uma célula de carga calibrada de 500 kN. Além do monitoramento de forças e deslocamentos obtidos dos transdutores da máquina de ensaio, os corpos de prova foram instrumentados com resina fotoelástica e extensômetros posicionados em pontos específicos das juntas, conforme mostrado nas figuras 4.4 e 4.5, onde as cores representam instrumentação dos seguintes tipos:

- Azul: extensômetros de 3 mm de comprimento de grade;
- Vermelho: extensômetros de 1 mm de comprimento de grade;
- Laranja: extensômetro com 5 grades de 1 mm de comprimento, dispostos lado a lado com passo de 2 mm;
- Verde: resina fotoelástica.

A posição de cada um dos extensômetros teve como objetivo monitorar diferentes fenômenos, e assim ser possível uma comparação mais completa com o modelo de elementos finitos. As localizações foram determinadas com base em trabalhos similares disponíveis na literatura, como Kumar *et al.* (2012), Xavier (2006), Spinelli (2004), Vlieger e Ottens (1998), e suas funções são listadas a seguir:

- S1 e S2: verificação do alinhamento da fixação dos CDPs;
- S3 e S14: medição do momento fletor secundário.
- S4 a S6: medição de deformações de compressão próximas ao furo dos rebites (possuem grid menor, pois tratam-se de regiões de maiores gradientes de deformação);

- S7 a S12, S15 a S23: medição de deformações de tração em regiões com baixos gradientes de deformação ao longo da superfície;
- S13: medição de deformações de tração próximas ao furo dos prendedores, região com alta probabilidade de falha por fadiga;

Figura 4.4 – Disposição dos extensômetros para o CDP JL-2

Após a execução do primeiro ensaio de junta larga, houve uma mudança na disposição de instalação de alguns extensômetros sobre os corpos de prova. A primeira disposição, indicada na figura 4.4, foi aplicada ao corpo de prova JL-2 (cronologicamente o primeiro a ser executado). A segunda, indicada nas figuras 4.5 e 4.6, foi aplicada aos corpos de prova JL-1e JL-3.

A principal alteração ocorreu na posição dos extensômetros de 1 mm de grid que haviam sido inicialmente colados com a tentativa de medição de deformações compressivas na borda superior dos furos das chapas. Os primeiros ensaios indicaram, na realidade, deformações correspondentes a esforços de tração. De fato, modelagens preliminares por elementos finitos indicaram que há uma grande variação das deformações ao longo das espessuras das chapas e da chapa de união, e nas proximidades das bordas dos furos na face superior da chapa podem ocorrer deformações correspondentes a esforços de tração, em função do complexo

estado tridimensional de deformações nessas regiões. Assim, os extensômetros de 1 mm de grid foram reposicionados para uma região, ainda nas proximidades dos furos de instalação de prendedores, em que eram esperadas deformações mais significativas para servirem de base de validação de modelos em elementos finitos. Além disso, o strip gage foi reposicionado para a região central do corpo de prova, por ser uma região menos suscetível a desvios de deformação por desalinhamento na fixação dos corpos de prova.

Comparando as figuras 4.4 e 4.5, observa-se também que o CDP JL-2 não foi instrumentado com resina fotoelástica, pois esse sistema ainda não estava disponível na data de execução do ensaio de tração.

Figura 4.5 – Disposição dos extensômetros para os CDPs JL-1 e JL-3

Figura 4.6 – Instrumentação com resina fotoelástica e extensometria

Os pontos R8, R9, R11, R12 e seus pares simétricos, indicados na figura 4.5, correspondem aos pontos nos quais foi medida a ordem de franja de interferência, e estão relacionados às posições dos extensômetros S8, S9, S11 e S12.

Figura 4.7 – Conjunto instrumental: máquina servo-hidráulica de 500kN, sistema de condicionamento e aquisição de sinais.

Figura 4.8 – Detalhe: fixação do CDP na máquina de ensaios

Na figura 4.7 é mostrado o conjunto instrumental para extensometria utilizado nos ensaios, enquanto a fixação do corpo de prova na máquina de ensaios é exibida em detalhe na figura 4.8.

Foram utilizados os seguintes parâmetros de ensaio:

- abordagem de controle: patamares de carga constante intercalados por rampas de incremento constante de carga;
- incremento de carga: 716,8 N/s;
- patamares de carga constante: 7168 N, 14336 N, 21504N, 28672 N;
- rampas entre patamares disparadas por acionamento manual;
- critério final de parada: ruptura do corpo de prova.

Esses patamares foram estabelecidos com base nos resultados obtidos com as juntas estreitas, estando eles contidos na zona de comportamento linear da junta larga e antes do descolamento da resina fotoelástica.

Durante a fixação das juntas na máquina observou-se que o aperto das garras, feito manualmente por meio de parafusos, aplicava um esforço de tração nos corpos de prova. Essa situação foi aproveitada para verificar se o alinhamento

estava satisfatório, utilizando a leitura dos extensômetros S1 e S2. O procedimento completo de fixação adotado foi:

- 1) Inicialização da leitura dos extensômetros;
- 2) Alinhamento do corpo de prova (utilizando um nível) e fixação inicial na garra superior por aperto dos parafusos centrais de suas castanhas;
- 3) Aperto completo dos parafusos das castanhas da garra superior (dos centrais para os periféricos);
- 4) Fixação inicial da extremidade inferior do corpo de prova por aperto dos parafusos centrais das castanhas da garra inferior;
- 5) Aperto dos demais parafusos, dos centrais para os periféricos, de forma a balancear as medições de deformação dos extensômetros S1 e S2;
- 6) Alívio de carga (limitando a carga a no máximo 10kN): essa etapa foi necessária já que, ao apertar os parafusos das garras, esforços de tração eram induzidos nos CDPs;
- 7) Repetição dos passos 5 e 6 até o aperto completo dos parafusos das castanhas da garra superior.
- 8) Verificação da simetria de deformações detectadas pelos extensômetros S1 e S2 para os níveis de carga de 10 kN e 5 kN.

No CDP JL-2, a oitava etapa foi feita apenas para a carga de 2kN. Devido a desalinhamentos observados nos resultados obtidos no ensaio deste CDP¹, o procedimento foi então alterado para cargas maiores, de 5 kN e 10 kN.

Para se obter os alívios de carga da etapa 6, a garra inferior (solidária ao atuador da máquina) foi movimentada de forma a compensar o deslocamento vertical, sofrido por seus mordentes durante o aperto de seus parafusos.

Uma vez que o corpo de prova já estava adequadamente fixado, foi dado início ao ensaio, com variação constante de carga até os patamares anteriormente citados. Para exemplificar o carregamento aplicado, a figura 4.9 mostra a variação na força de tração com o tempo. Nota-se que, após o último patamar, a carga é elevada até a ruptura do corpo de prova.

¹ Conforme será apresentado na figura 5.8.

Figura 4.9 - Exemplo de carregamento com quatro patamares de cargas constantes (neste caso aplicado ao corpo de prova JL-1)

Observa-se que a duração dos patamares não é necessariamente a mesma. O disparo da rampa seguinte ao patamar é feito manualmente, pois as cargas devem permanecer constantes tanto tempo quanto necessário para a operação do polariscópio.

Para cada patamar de carga, foram capturadas imagens da superfície recoberta com resina, evidenciando as franjas de interferência causadas pelo fenômeno de birrefringência da resina fotoelástica. Foi também feita a medição da ordem de franja de interferência obtida sobre pontos R8, R9, R11, R12, R8', R9', R11', R12' da figura 4.5.

Enquanto a extensometria resulta diretamente num valor de deformação em uma determinada direção, a técnica de fotoelasticidade fornece como resultados de medição a diferença entre as deformações principais (ou distorção máxima) e a orientação da deformação principal. A equação 4.1, extraída de Vishay (2010), indica que a distorção máxima é proporcional ao valor de ordem de franja obtido no uso do polariscópio com o compensador de birrefringência.

$$\gamma_{max} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{\lambda}{2t_c K} N = cN \quad (4.1)$$

Nessa equação, γ_{max} trata da distorção máxima (igual à diferença entre as deformações principais ϵ_1 e ϵ_2), λ do comprimento de onda característico da luz branca (considerado igual a 575 nm), t_c da espessura do revestimento composto pela resina fotoelástica, K do coeficiente característico da resina fotoelástica que relaciona interferência óptica com deformação, N da ordem de franja medida (utilizando-se o compensador de birrefringência) e c do coeficiente de proporcionalidade entre ordem de franja e distorção máxima.

Assim, conhecendo-se as propriedades do material fotoelástico e a espessura do revestimento fotoelástico aplicado ao corpo de prova, pode-se calcular a distorção máxima em função da ordem de franja luminosa criada por interferência. Porém, devem ser compensados dois efeitos inerentes ao processo de medição por fotoelasticidade: reforço estrutural causado pela aplicação de resina e desvio do valor medido, quando a placa fotoelástica é submetida à flexão.

O reforço estrutural pode parecer irrelevante à primeira vista. No entanto, a fim de se obter boa resolução na detecção das deformações, foi selecionada uma placa pré-moldada de 3 mm de espessura fabricada em material fotoelástico modelo PS-1 da Vishay. Como o módulo de elasticidade do material da placa fotoelástica é de 2,5 GPa, sua rigidez com 3 mm de espessura representa 6,9% da rigidez de uma chapa de liga de alumínio de 68,2 GPa de módulo de elasticidade e 1,6 mm de espessura.

Quanto ao caso de placas fotoelásticas submetidas à flexão, a medição fica alterada devido ao reforço estrutural e a não uniformidade das deformações ao longo da espessura da chapa, como ilustrado na figura 4.10.

Figura 4.10 – Desvio de medição devido à flexão do revestimento fotoelástico: (a) distribuições de deformações sem a resina, (b) alteração da distribuição de deformações e desvio de medição Fonte: Vishay (2011).

Para compensar esses efeitos, o valor de ordem de franja medido deve ser corrigido multiplicando-se esse por um coeficiente C_B calculado conforme as equações 4.2 a 4.4, segundo Vishay (2011).

$$C_B = \frac{1 + E^*(4t^* + 6t^{*2} + 4t^{*3}) + E^{*2}t^{*4}}{1 + t^*} \quad (4.2)$$

$$E^* = \frac{E_c}{E} \quad (4.3)$$

$$t^* = \frac{t_c}{t} \quad (4.4)$$

Onde E_c é o módulo de elasticidade da resina fotoelástica, E é o módulo de elasticidade do material da chapa em análise, t_c é a espessura do revestimento fotoelástico e t é a espessura da chapa em análise.

Entretanto, essas equações são válidas apenas em casos de flexão pura. Para casos de carregamentos combinados de tração e flexão, como os ocorrentes nos corpos de prova em análise, pode-se fazer uma aproximação admitindo-se a superposição linear das deformações correspondentes a cada tipo de carregamento e aplicar a correção com o coeficiente C_B apenas sobre a parcela oriunda da flexão.

4.3. ENSAIO DE CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS

Com o intuito de verificar se as propriedades mecânicas dos materiais dos corpos de prova condiziam com as encontradas na literatura, foram executados ensaios de caracterização dos materiais que constituem os corpos de prova. As curvas tensão × deformação obtidas nos ensaios foram também utilizadas nas análises de elementos finitos, conforme será explicado na seção 6.

4.3.1. Alumínio 2524

A verificação das propriedades mecânicas do alumínio 2524 foi feita com o uso de três corpos de prova, sendo eles barras chatas de 1,6 mm de espessura, 21,5 mm de largura e 240 mm de comprimento. Vale lembrar que essa geometria

não é o padrão indicado pela norma ASTM E8 – *Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials*.

O ensaio foi realizado em uma máquina servo hidráulica MTS 312.21 com célula de carga de 100kN, utilizando ainda um extensômetro do tipo clip gage de 25 mm de comprimento (que foi removido antes da ruptura dos CDPs).

4.3.2. Alumínio 2117

Considerando que os prendedores são pequenos demais para a realização de ensaios de tração, optou-se pela realização de ensaios de dureza Vickers. Os objetivos dessa investigação foram: i) fazer uma comparação entre a dureza do prendedor e das chapas; e ii) verificar o encruamento sofrido pelo rebite durante o processo de montagem.

Foram retiradas amostras dos corpos de prova estreitos que passaram por ensaios de fadiga em baixa carga (o que não faz parte desse trabalho). Para tanto, foi realizado corte transversal dos corpos de prova, próximos ao centro dos prendedores, de forma a permitir a medição de dureza no interior dos rebites, nas regiões indicadas na figura 4.11, que correspondem a aproximadamente 1 mm da extremidade superior (cabeça pré-fabricada), 1/4 da altura, 1/2 da altura, 3/4 da altura e 1 mm da extremidade inferior (cabeça conformada durante a instalação do prendedor). Uma das amostras ensaiadas pode ser observada na Figura 4.12.

Figura 4.11 – Localização dos pontos de medição de dureza Vickers.

Figura 4.12 – Exemplo de amostra utilizada na medição de dureza: (a) amostra embutida; (b) detalhe das indentações.

Além da medição de dureza dos prendedores, foram realizadas também medições de dureza das chapas da junta para posterior comparação.

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

5.1. JUNTA ESTREITA

Os dois corpos de provas estreitos submetidos a ensaios de tração romperam devido à falha nos prendedores. Um resumo dos resultados consta na tabela 5.1, e o modo de falha é mostrado na figura 5.1

Tabela 5.1 – Cargas de ruptura dos corpos de prova estreitos

CDP	Carga ruptura [N]	Deslocamento [mm]	Modo de falha
JE-01	9995	4,19	cisalhamento prendedores
JE-05	10557	4,83	cisalhamento prendedores

Figura 5.1 – Falha por cisalhamento de prendedores Briles em junta de topo (CDP JE-01)

Na figura 5.2 podem ser observados os gráficos de carga em função do deslocamento do atuador para os corpos de prova. Nota-se que existe grande similaridade entre o comportamento das juntas, sobretudo na parte em que o comportamento é linear, até cerca de 7 kN.

Ademais, observando-se que a carga de ruptura dos CDPs estreitos é de cerca de 10 kN, e sendo a largura destes da ordem de um quinto da largura dos CDPs largos, podemos estimar que a carga de ruptura das juntas largas deve ser da ordem de 50 kN.¹

¹ Conforme os resultados que serão mostrados na tabela 5.2

Figura 5.2 – Carga em função do deslocamento (juntas estreitas)

Na figura 5.3 observa-se o corpo de prova JE-05, instrumentado com resina fotoelástica, sob três condições de carga: sem carga, início de carregamento (em torno de 250 N) e carregamento desenvolvido (em torno de 2500 N).

Figura 5.3 – Resina fotoelástica: (a) sem carga, (b) início do carregamento, (c) carregamento desenvolvido.

Pode-se notar que, na condição de início de carregamento, as franjas começam a aparecer nos prendedores que estão mais próximos do centro da junta, e conforme o ensaio avança, elas se propagam para a extremidade da junta. Existe, para o carregamento desenvolvido, uma diferença no padrão das franjas da parte

superior e inferior do corpo de prova, que pode possivelmente ser atribuída a um desalinhamento no CDP ou à colagem da resina fotoelástica, que pode ter sido desigual.

Percebe-se ainda que não há coloração da resina fotoelástica no estado de carga igual a zero. Caso houvesse, essa coloração inicial seria decorrente do processo de aplicação da resina e deveria ser compensada, considerando-a como estado inicial com carga equivalente e deformações iguais a zero.

Quanto à fixação da resina fotoelástica, constatou-se que ela descolou no instante em que a carga atinge entre 60% a 80% da carga de ruptura. Esse valor é considerado satisfatório, pois engloba grande parte do comportamento elástico do corpo de prova.

Não foram observadas, no decorrer destes ensaios, franjas relacionadas à concentração de tensões nos furos. Atribui-se este fato à continuidade da resina fotoelástica, que acabou por mascarar o real comportamento das chapas.

Da figura 5.4 é possível perceber certa semelhança entre o comportamento da resina sem furo e furada, mas o efeito da concentração de tensão é mais evidente no último caso. Destarte, para os ensaios dos corpos de prova largos, foi feita a furação da resina fotoelástica nas regiões que ficam sobre os prendedores. Não houve diferenças quanto à aderência da resina entre os dois casos.

Figura 5.4 – Resina fotoelástica furada: (a) sem carga, (b) início do carregamento, (c) carregamento desenvolvido.

5.2. JUNTA LARGA

Os resultados obtidos com os transdutores de força e deslocamento da máquina de ensaios são mostrados na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Cargas máximas e de ruptura dos corpos de prova largos.

CDP	Carga Máxima		Ruptura		Modo de falha
	Carga [N]	Deslocamento [mm]	Carga [N]	Deslocamento [mm]	
JL-1	55061	4,03	55006	4,08	cisalhamento prendedores
JL-2	56772	4,16	56305	4,53	
JL-3	53419	3,23	51112	3,57	

A tabela 5.2 mostra que todos os corpos de prova romperam devido ao cisalhamento dos prendedores, o que já era esperado, já que o mesmo modo de falha ocorreu com as juntas estreitas. A figura 5.5 mostra um dos corpos de prova rompidos.

Figura 5.5 – Falha por cisalhamento de prendedores (corpo de prova JL-2).

As curvas carga × deslocamento para os três CDPs largos, obtidas pelos transdutores da máquina de ensaios, encontram-se na figura 5.6.

Figura 5.6 – Curvas cargas × deslocamento do atuador

As curvas de carga × deslocamento mostram que os CDPs largos se comportaram de forma linear até uma carga de aproximadamente 30 kN. De uma maneira geral todas as juntas apresentaram um comportamento bem semelhante, com exceção do final do ensaio, quando a carga já supera 50 kN e ocorre uma dispersão considerável.

5.2.1. Resultados de extensometria

O alinhamento dos corpos de prova durante o ensaio pode ser avaliado ao se verificar as respostas dos extensômetros S1 e S2. Deve ser lembrado que os CDPs JL-1 e JL-3 passaram por um procedimento de alinhamento diferente do CDP JL-2, que teve a pré verificação de alinhamento feita com um valor de carga mais baixo, de 2kN, conforme descrito na seção 4.2. As diferenças entre os dois procedimentos ficam claras ao se observar as figuras 5.7 a 5.9.

Figura 5.7 – Deformação ao longo do tempo dos extensômetros S1 e S2 para o CDP JL-1

Figura 5.8 – Deformação ao longo do tempo dos extensômetros S1 e S2 para o CDP JL-2

Figura 5.9 – Deformação ao longo do tempo dos extensômetros S1 e S2 para o CDP JL-3

Na tabela 5.3 é possível observar o desvio percentual entre as leituras dos extensômetros S1 e S2 nos quatro patamares de carga, para os três corpos de prova ensaiados. Confirmando o que foi exposto nas figuras 5.7 a 5.9, o desvio foi maior no CDP JL-2 para cargas mais altas. Esse desvio foi calculado conforme a equação 5.1, em relação a um valor médio esperado, onde $\epsilon_{x,Si}$ é a média das leituras do extensômetro i durante cada patamar.

$$Desvio = 100 \left| \frac{\epsilon_{x,S1} - \epsilon_{x,S2}}{\epsilon_{x,S1} + \epsilon_{x,S2}} \right| \quad (5.1)$$

Tabela 5.3 – Desvios nas deformações dos extensômetros S1 e S2

CDP	Erro entre leituras de S1 e S2 [%]			
	Patamar 1	Patamar 2	Patamar 3	Patamar 4
JL-1	4,5	3,1	2,3	2,2
JL-2	0,5	3,3	7,9	11,1
JL-3	1,6	1,7	0,9	0,1

O momento fletor secundário ocorre nesse tipo de união devido ao desalinhamento do eixo central da junta, na região de sobreposição das chapas, em relação ao plano de aplicação da carga, e não é constante ao longo da junta. Com base nos resultados obtidos pelos extensômetros S3 e S14, que se encontram na mesma posição, mas um em cada face da chapa, é possível estimar o valor do momento fletor secundário nesta seção transversal. Para isso considerou-se a parcela de deformação causada pela flexão (ϵ_b) como sendo dada pela semi-diferença de leitura nesses dois extensômetros. A parcela correspondente à tração (ϵ_a) foi calculada como a média aritmética da leitura dos dois extensômetros. A figura 5.10 ilustra a ideia para o cálculo descrito.

Figura 5.10 – Perfil de deformações em seção da chapa, próxima aos extensômetros S3 e S14.

Em posse desses dois valores, é possível obter a proporção entre a deformação causada pelo momento fletor e pela força de tração, denominado k_{ch} (que é calculado da mesma forma que o fator k_b , apresentado na seção 2.2, mas em termos de deformação). A equação 5.2 indica o cálculo de k_{ch} . E os resultados são apresentados na figura 5.11.

$$k_{ch} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \frac{(\varepsilon_{x,S14} - \varepsilon_{x,S3})/2}{(\varepsilon_{x,S14} + \varepsilon_{x,S3})/2} \quad (5.2)$$

Figura 5.11 – Valor de k_{ch} em função da tensão nominal

O efeito de k_{ch} é, a princípio, desprezível, mas cresce rapidamente até atingir seu valor máximo, antes dos 50 MPa. Em seguida ele passa a diminuir gradativamente, até se tornar pouco relevante para tensões nominais altas. Esse decréscimo de k_{ch} pode ser explicado pela deformação global sofrida pela junta, que a alinha e diminui o braço do momento.

A região central da junta só pode ser instrumentada em uma das faces da chapa de união, como mostrado nas figuras 4.4 e 4.5, tendo sido necessária uma mudança no cálculo de k_{ch} . Devido à simetria dos corpos de prova, a seção transversal da chapa de união na metade da junta não sofre rotação, permanecendo normal à direção da força aplicada durante todo o carregamento. Dessa forma, para que o equilíbrio ocorra, a tensão normal média nessa seção deve ser igual ao quociente F/A (força de tração aplicada pela área da seção transversal). O cálculo para o fator k_{chu} é ilustrado na figura 5.12, e mostrado nas equações 5.3 a 5.5, onde ε_t é o alongamento total nas fibras, ε_a é o alongamento devido à força normal, e ε_b é o alongamento devido à flexão.

$$k_{chu} = \frac{|\bar{\varepsilon}_b|}{|\bar{\varepsilon}_a|} = \frac{\bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_t}{\bar{\varepsilon}_a} \quad (5.3)$$

Onde:

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_{x,s15} + \varepsilon_{x,s16} + \varepsilon_{x,s17}}{3} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_a = \frac{F}{E \cdot A} \quad (5.5)$$

Figura 5.12 – Perfil de deformações em seção da chapa de união, próxima aos extensômetros S15, S16 e S17.

Os símbolos F, E e A tratam, respectivamente, da força de tração no atuador, do módulo de elasticidade do material das chapas e da área nominal da seção transversal da chapa de união. Os resultados obtidos para o coeficiente k_{chu} podem

ser observados na figura 5.13. Ressalta-se que os valores de k_{chu} foram apresentados para tensões nominais nas chapas iguais ou superiores a 1 MPa, pois para menores tensões houve certa instabilidade numérica nos valores calculados para esse coeficiente.

Figura 5.13 – Coeficiente k_{chu} em função da tensão nominal (conforme equação 5.3)

Como comportamento geral, o valor de k_{chu} é bastante alto para baixas cargas, da ordem de 10, e decresce rapidamente com o aumento da carga. Novamente, a deflexão e a rotação sofridas pelas seções das juntas colaboram para que o momento fletor secundário diminua com o aumento da carga. Observa-se, porém, que apenas para tensões nominais superiores a 200 MPa o coeficiente k_{chu} fica menor que um, o que reforça a importância do efeito de flexão secundária para essa seção da junta.

Modelos analíticos, para a determinação da distribuição de esforços ao longo da junta, foram propostos nos anexos A, B e C, a partir dos quais foi possível determinar a variação dos coeficientes k_{ch} e k_{chu} em função da tensão nominal.

Os resultados obtidos por meio do extensômetro do tipo strip gage apresentaram grande dispersão, conforme é mostrado nas figuras 5.14, 5.15 e 5.16,

onde as linhas tracejadas representam as bordas dos furos próximos. Considerando que o extensômetro S13 apresenta um posicionamento diferente no corpo de prova JL-2, os pontos da figura 5.15 encontram-se em uma posição diferente em relação as figuras 5.14 e 5.16. A origem adotada para o eixo das abscissas é o centro do furo a esquerda do *strip gage*.

Figura 5.14 – Resultados do extensômetro S13 para o corpo de prova JL-1.

Figura 5.15 – Resultados do extensômetro S13 para o corpo de prova JL-2

Figura 5.16 – Resultados do extensômetro S13 para o corpo de prova JL-3

A figura 5.14 e 5.15 mostram, para o patamar 4, um padrão perto do esperado, com deformações maiores nas proximidades do furo, que decrescem ao se afastarem. Ocorreu, porém, que no CDP JL-3 as deformações medidas foram pouco consistentes, considerando que os valores obtidos próximos ao furo (ponto de coordenada 4,6 mm) foram bem menores que nos demais pontos. Atribui-se esses valores fora do esperado a problemas durante o processo de colagem do extensômetro, de forma que as deformações medidas por alguns dos extensômetros não representam a real deformação da chapa no ponto em questão. Os resultados para os demais extensômetros serão apresentados no capítulo 6.

5.2.2. Resultados de fotoelasticidade

Com a instrumentação por fotoelasticidade foi possível obter resultados qualitativos da distorção nas chapas. As figuras 5.17 e 5.18 mostram, a título de exemplo, o segundo patamar de carga nos CDPs JL-1 e JL-3 para uma comparação. Observa-se que as franjas nas duas imagens são bem semelhantes entre si, mostrando que a técnica apresenta considerável repetibilidade.

Figura 5.17 – Corpo de prova JL-1, segundo patamar de carga.

Figura 5.18 – Corpo de prova JL-3, segundo patamar de carga.

Além dos resultados qualitativos, foram coletados os valores de orientação da deformação principal e ordem de franja de interferência, proporcionais a distorção, apresentados na tabela 5.4 e 5.5. Com os pontos na mesma localização nos dois corpos de prova e seus pares simétricos foram calculados as médias e desvios padrões, mostrados na tabela 5.6.

Tabela 5.4 – Medições por fotoelasticidade, CDP JL-1, ordem de franja e orientação de deformação principal.

CARGA	TIPO	R8	R9	R11	R12	R8'	R9'	R11'	R12'
Sem Carga	Ordem de franja	0	0	0	0	0	0	0	0
(0 N)	Ângulo [°]	-	-	-	-	-	-	-	-
1º Patamar	Ordem de franja	0,87	0,77	0,62	0,61	0,93	0,79	0,67	0,63
(7168 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
2º Patamar	Ordem de franja	1,42	1,31	1,33	1,26	1,56	1,41	1,29	1,32
(14336 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
3º Patamar	Ordem de franja	1,94	1,84	2,01	1,95	2,12	1,99	1,85	1,97
(21504 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
4º Patamar	Ordem de franja	2,66	2,51	2,86	2,78	2,83	2,86	2,75	2,86
(28672 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90

Tabela 5.5 – Medições por fotoelasticidade, CDP JL-3, ordem de franja (correspondente à distorção) e orientação de deformação principal.

CARGA	TIPO	R8	R9	R11	R12	R8'	R9'	R11'	R12'
Sem Carga	Ordem de franja	0	0	0	0	0	0	0	0
(0 N)	Ângulo [°]	-	-	-	-	-	-	-	-
1º Patamar	Ordem de franja	0,95	0,79	0,59	0,64	1,00	0,87	0,54	0,57
(7168 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
2º Patamar	Ordem de franja	1,58	1,26	1,39	1,40	1,40	1,39	1,26	1,32
(14336 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
3º Patamar	Ordem de franja	2,07	1,75	2,13	2,19	2,14	1,91	2,04	2,12
(21504 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90
4º Patamar	Ordem de franja	2,81	2,48	3,10	3,18	2,83	2,65	2,90	3,00
(28672 N)	Ângulo [°]	90	90	90	90	90	90	90	90

Tabela 5.6 – Valores médios de medições de ordem de franja por fotoelasticidade

	Média				Desvio Padrão				Desvio Padrão / Média			
	R8	R9	R11	R12	R8	R9	R11	R12	R8	R9	R11	R12
1º Patamar	0,94	0,81	0,61	0,61	0,05	0,04	0,05	0,03	5,7%	5,5%	9,0%	5,1%
2º Patamar	1,49	1,34	1,32	1,33	0,09	0,07	0,06	0,06	6,2%	5,2%	4,3%	4,3%
3º Patamar	2,07	1,87	2,01	2,06	0,09	0,10	0,12	0,12	4,4%	5,5%	5,8%	5,7%
4º Patamar	2,78	2,63	2,90	2,96	0,08	0,17	0,15	0,18	3,0%	6,6%	5,0%	5,9%

Os resultados numéricos obtidos foram aparentemente consistentes, considerando que o desvio padrão representa em torno de 5,4% dos valores médios. Apesar disso, não seria possível calcular a distorção a partir dos valores de ordem de franja obtidos, já que existem na junta deformações provenientes da flexão secundária agindo junto com as deformações decorrentes da tração, ocorrendo assim um desvio na medição da ordem de franja (conforme comentado na seção 4.2). Esse desvio pode ser corrigido, mas para isso é necessário conhecer o valor do momento fletor, que varia ao longo da área instrumentada por fotoelasticidade.

Por outro lado, ao calcularmos o valor do coeficiente C_B (conforme a equação 4.2) obtém-se o valor 1,054, ou seja, a ordem de franja relacionada com esforços de flexão variaria em 5,4%. Destarte, considerando que o valor da correção é relativamente baixo, optou-se por ignorar a correção por meio do coeficiente C_B , e calcular as distorções, que serão comparadas com o modelo de elementos finitos na seção 6.7.

5.3. CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS

5.3.1. Alumínio 2524

Os resultados dos ensaios executados sobre três corpos de prova, bem como uma curva bilinear baseada nos dados do MMPDS – *Metallic Materials Properties Development and Standardization* (DOT/FAA/AR, 2010), disponíveis na tabela 5.7, estão apresentados na figura 5.19.

Tabela 5.7 – Propriedades mecânicas da liga AA 2524 conforme MMPDS (DOT/FAA/AR, 2010)

σ_u [MPa]	σ_e [MPa]	E [GPa]	Alongamento [%]
427,5	324,1	67,6	15

Figura 5.19 – Curvas tensão×deformação para o alumínio 2524 (MMPDS).

Os ensaios das amostras 2 e 3 apresentaram rompimento em uma zona próxima à garra da máquina, porém, até onde foi possível coletar dados, levaram a módulos de elasticidade bem próximos ao da amostra 1. Com os resultados obtidos até uma tensão de 200 MPa, foi calculado o módulo de elasticidade para as 3 amostras, como indicado na tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Módulos de elasticidade obtidos para a liga AA 2524.

Corpo de prova / Referência	Módulo de elasticidade [GPa]
Amostra 1	67,5
Amostra 2	68,5
Amostra 3	68,2
Média	68,1

Observa-se que os valores de módulo de elasticidade condizem com os fornecidos pelo MMPDS, mas para tensões acima do limite de escoamento o modelo bilinear não representa bem o comportamento do material.

Nos modelos de elementos finitos apresentados na seção 6, a curva bilinear será usada a princípio, e após uma análise dos resultados obtidos com as simulações numéricas iniciais, a curva obtida com a amostra 1 passará a ser utilizada.

5.3.2. Alumínio 2117

Os resultados para os ensaios de dureza são mostrados na tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Durezas Vickers obtidas em regiões variadas dos prendedores e nas chapas.

Região aproximada de medição	Corpo de prova de origem da amostra		
	Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3
1mm da extremidade superior	100,5	105,4	112,1
1/4 da altura	115,6	117,9	105,4
1/2 da altura	121,1	119,8	108,8
3/4 da altura	129,7	133,2	126,1
1 mm da extremidade inferior	153,1	163,6	156,6
Dureza da chapa	115,0	132,2	131,3

Observa-se que quanto mais próximo da extremidade inferior, maiores são os valores de dureza do material do prendedor, devido ao encruamento causado pelas grandes deformações durante o processo de montagem das juntas. Na parte em que o prendedor sofre cisalhamento, na interface entre chapa e chapa de união, (entre metade e um quarto da altura do rebite), a dureza média encontrada é de 114,8 Vickers.

De acordo com a Callister (2001), a resistência à tração de um material está relacionada à sua dureza. Em diversos casos essa relação é de proporcionalidade direta (por exemplo, para ligas de aços carbono, cobre e latão), mas essa relação não é tão simples para ligas de alumínio. De qualquer modo, percebe-se que a dureza média de 114,8 HV1 na região central dos prendedores representa 87% da

dureza média de 131,8 HV1 das chapas (desprezando-se o resultado de 115,0 HV1 da chapa da amostra 1), enquanto a resistência à tração de 262 MPa, apresentada na norma dos prendedores Briles corresponde a apenas 61% da resistência à tração de 427,5 MPa do material das chapas. Assim, acredita-se que o valor de resistência à tração dos prendedores Briles indicado pela norma deva ser entendido como um valor conservativo para ser utilizado em projeto, mas não representa um valor médio adequado para ser utilizado numa análise comparativa entre resultados experimentais e modelos de elementos finitos.

6 MODELOS NUMÉRICOS

O software utilizado para a modelagem em elementos finitos foi o MSC Patran 2010, para pré e pós-processamento, e o MSC Marc 2010 como solver. Além de ser um programa voltado para análises não lineares, o MSC Marc ainda tem como vantagem a possibilidade de solucionar o problema com processamento paralelo (devido ao tipo de licença disponível no IPT), o que reduz significativamente o tempo de processamento.

A estratégia empregada na modelagem foi primeiramente construir modelos mais elaborados, que utilizam elementos sólidos tridimensionais, para se obter uma representação fiel do comportamento da junta. Os resultados obtidos foram então utilizados para fazer comparações com os modelos simplificados, que são constituídos de elementos de casca.

Antes de partir para a modelagem dos corpos de prova largos, foram feitos modelos de corpos de prova estreitos. Com isso, foi possível verificar nesses modelos, de menor custo computacional, a forma de utilização de algumas das ferramentas, como as de modelagem de contato entre componentes das juntas.

6.1. MODELAGEM DOS MATERIAIS

Os materiais utilizados nas juntas, alumínio 2524-T3 nas chapas e 2117-T4 nos prendedores, foram, a princípio, modelados como isotrópicos e apresentando relação bilinear entre tensão e deformação. As informações dadas como entrada ao Patran são apresentadas na figura 6.1, que reproduz os dados apresentados na tabela 3.1.

Figura 6.1– Curvas tensão×deformação das ligas de alumínio 2524-T3 e 2117-T4.

Após a execução dos ensaios descritos na seção 4.3, observou-se que os dados apresentados na figura 6.1 não representavam tão bem os materiais das juntas. Dessa forma, utilizando os resultados dos ensaios de caracterização de materiais, foi feita uma mudança no material definido para as modelagens, que será explicada na seção 6.4.

6.2.DESCRICÃO DO MODELO PARA JUNTA ESTREITA COM ELEMENTOS SÓLIDOS

O modelo para junta estreita com elementos sólidos (JEES) aproveita a existência de planos de simetria geométrica da união, de forma que foi realizada apenas a modelagem de um quarto da junta. As dimensões utilizadas no modelo são as mesmas mostradas na seção 3, com exceção do comprimento total da junta: como a parte de maior largura (utilizada para a fixação do corpo de prova na máquina) não foi representada no modelo largo, optou-se por também fazer essa redução no modelo estreito, resultando em um comprimento de 382,1 mm. Para geração das malhas da chapa e da chapa de união, foram utilizados elementos hexaédricos de 8 nós. Em função da modelagem da transferência de carga por ferramentas de contato e da existência de concentração de tensões, a malha foi refinada nas regiões dos furos de instalação de prendedores que apresentavam

chanfros. Para regiões afastadas dos furos, foi possível utilizar uma malha menos refinada. Assim, os comprimentos das arestas dos elementos hexaédricos variaram de 0,19 mm a 3,18 mm ao longo das chapas, além da malha ter sido gerada de forma a se obter uma transição gradual entre a geometria cilíndrica dos furos e hexaédrica das bordas das chapas. As malhas dos prendedores foram geradas utilizando-se elementos tetraédricos de 4 nós, pois testes preliminares com elementos hexaédricos apresentaram problemas de convergência. No total, o modelo de um quarto de corpo de prova estreito ficou com 24092 nós. Além das condições de contorno necessárias para a representação dos planos de simetria da junta, foi aplicada uma carga distribuída na extremidade da chapa, na direção longitudinal do corpo de prova, com magnitude de 10kN (próxima à carga de ruptura dos corpos de prova). Na figura 6.2 é possível observar o detalhe da malha do modelo na extremidade em que foram definidas as condições de contorno de simetria para a chapa de união.

Figura 6.2 – Detalhe da malha do modelo JEES

As simulações não lineares são executadas por incrementos de carga até que a carga final seja alcançada. Para todos os casos apresentados a seguir, a sequência de passos de carga foi criada mantendo as configurações padrão, com exceção do parâmetro “*global contact detection*”, que foi alterada de padrão para “automática”. De acordo com os manuais da MSC (2010), essa opção faz com que a ordem dos corpos nos quais o contato é detectado seja automaticamente definida (começando com os de malhas mais refinadas), e independa da ordem em que os corpos estão dispostos na tabela de contato.

Diversas análises foram feitas com base no modelo JEES, com variações de diversos parâmetros como os relacionados à definição de contatos, curvas características dos materiais dos componentes da junta e modelagem do fenômeno de atrito. As seções 6.3 a 6.5 tratarão destes aspectos.

6.3. TRANSFERÊNCIA DE CARGA POR CONTATO

6.3.1. Ferramenta de contato analítico

O contato entre componentes é o principal mecanismo de transferência de carga através das juntas por prendedores. Assim, foram utilizadas ferramentas de modelagem de contato nos modelos de elementos sólidos. Porém, os primeiros modelos elaborados, utilizando as ferramentas padrão de contato disponíveis no MARC, resultaram em má distribuição dos esforços nas superfícies em contato. Observou-se que as tensões nessas áreas estavam concentradas pontualmente, como ilustradas na figura 6.3, muitas vezes seguindo o padrão da malha empregada, ao invés de terem uma distribuição contínua, com variação gradual de intensidade.

Figura 6.3 – Tensões pontuais no prendedor, resultantes de modelos preliminares.

Em busca de uma solução para esse problema, foi utilizada uma ferramenta disponível no software Patran que define analiticamente a geometria da superfície de contato. Para que as forças e deslocamentos resultantes do contato entre duas superfícies sejam calculados, uma das informações necessárias é o vetor normal a essas superfícies, que é obtido a partir dos elementos nos quais foram divididas.

Dessa forma, imprecisões podem ocorrer, já que o vetor normal será sempre constante ao longo de um determinado segmento, enquanto a real geometria pode ser curva e, conseqüentemente, ter variação na direção do vetor normal. Com a utilização de uma ferramenta denominada “contato analítico”, uma superfície é ajustada com os nós que compõem a malha de um corpo e essa superfície é utilizada na obtenção do vetor normal, melhorando assim a representação da geometria, conforme é mostrado na figura 6.4.

Figura 6.4 – Vetores normais para definição do contato.

6.3.2. Aplicação a corpos de prova estreitos

Com base no modelo de corpo de prova estreito descrito no item 6.2, foram executadas simulações variando-se o tipo de contato (parâmetro *boundary type*) como discreto ou analítico, forma de aplicação do contato e tolerância de contato.

A aplicação do contato pode ser feita tanto diretamente nas malhas dos componentes em contato quanto nas entidades geométricas que foram base para a geração da malha. Na tabela 6.1, podem ser observados os parâmetros utilizados nas simulações identificadas como A1 a A5. Na simulação A4, em especial, foi ainda utilizada uma ferramenta denominada “contato inicial”, recomendada, segundo os manuais da MSC (2010), para alguns casos em que o contato já existe no instante inicial. Em todas essas simulações, as curvas dos materiais das chapas e dos prendedores foram definidas como bilineares, conforme os valores de módulo de

elasticidade, tensão de escoamento, tensão última e alongamento de seus materiais (AA 2524 para chapas e AA 2117 para prendedores), mostrados na figura 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros das simulações e tempos de processamento (modelo JEES).

Simulação	Contato		Tempo de processamento [s]
	Boundary type	Ponto de aplicação	
A1	Discreto	Malha	7319
A2	Analítico	Malha	4155
A3	Discreto	Geometria	3492
A4*	Discreto	Geometria	3908
A5	Analítico	Geometria	Não convergiu

* Difere da simulação A3 por utilizar a ferramenta “contato inicial”

Além de se fazer a comparação entre simulações, conforme a variada definição de parâmetros de contato, os resultados das simulações foram confrontados com os resultados experimentais. Como ensaios estáticos de corpos de prova estreitos não foram instrumentados com extensômetros ou resina fotoelástica (a não ser para testes de colagem), os únicos resultados disponíveis para comparação foram aqueles obtidos através dos transdutores da máquina de ensaios: carga e deslocamento do atuador. Na figura 6.5, podem ser observados os resultados de simulações numéricas sobrepostos aos resultados experimentais de ensaios estáticos de corpos de prova.

Figura 6.5 – Comparação dos resultados experimentais e numéricos para os CDPs estreitos

Observa-se que os modelos são representativos para cargas baixas, até 2500N aproximadamente, intervalo no qual apresentaram comportamento semelhante entre eles. Para cargas mais altas, ocorreu divergência entre resultados de simulações e experimentais, mas que são oriundos, principalmente, da definição das curvas características dos materiais, como será explanado adiante. De qualquer forma, foi possível perceber que o *boundary type* escolhido não teve grande influência no comportamento global da junta, ao contrário do comportamento local (distribuição de tensões nas superfícies de contato). Nota-se também que os resultados das simulações A3 e A4, com contato definido na geometria, ficaram ligeiramente mais próximos dos resultados experimentais, mas não são significativamente diferentes dos resultados das simulações A1 e A2 obtidos com definição do contato nas malhas. Além disso, a simulação A5, com definição de contato analítico sobre a geometria do modelo, não convergiu. Assim, recomenda-se que seja utilizada a ferramenta de contato analítico diretamente sobre as malhas dos componentes da junta.

Outro parâmetro analisado é a tolerância de contato, que corresponde a uma faixa de distância entre nó e superfície na qual se considera que ocorre contato. Caso a tolerância seja muito pequena, a detecção do contato pode se tornar numericamente difícil, e eventualmente, não identificada mesmo quando há contato entre componentes. Por outro lado, caso a tolerância seja muito grande, uma aproximação entre superfícies pode ser identificada falsamente como contato, comprometendo os resultados.

Foram feitas simulações baseadas no modelo apresentado no item 6.2 utilizando-se diferentes valores de tolerância de contato para se averiguar sua influência nos resultados, e buscar melhorias na representação do contato. Os valores adotados foram: o padrão calculado pelo programa ($3,1 \times 10^{-3}$ mm), 10^{-2} mm, 10^{-3} mm e 10^{-4} mm. Ressalta-se que o valor padrão é definido pelo Patran como uma função do menor tamanho de elemento utilizado em um modelo.

Os resultados de comportamento global da junta podem ser observados na figura 6.6. Pode-se verificar que para todos os valores de tolerância de contato houve praticamente a mesma resposta na curva força $\times$ deslocamento. Um comportamento semelhante também é notado nos campos de tensões nas chapas, como é mostrado na figura 6.7.

Figura 6.6– Gráfico força × deslocamento para diversos valores de tolerância de contato

Figura 6.7– Tensão de von Mises na chapa para duas tolerâncias: a) 10^{-3} mm; b) 10^{-4} mm

Por outro lado, o tempo de solução, mostrado na tabela 6.2, foi significativamente diferente para cada caso. Com a diminuição da tolerância de contato foi preciso um maior número de ciclos para completar a execução da simulação.

Tabela 6.2 – Tempo de solução das simulações com tolerâncias de contato diferentes

Tolerância empregada	Tempo [s]
10^{-2} mm	3830
$3,1 \times 10^{-3}$ mm	3593
10^{-3} mm	4026
10^{-4} mm	10447

Dessa forma, considera-se que o valor de tolerância de contato padrão, calculado pelo Patran com base no tamanho dos menores elementos das malhas do modelo, é adequado pois apresenta resultados consistentes sem aumentar desnecessariamente o tempo de simulação.

6.4. INFLUÊNCIA DAS CURVAS DOS MATERIAIS DA JUNTA

6.4.1. Propriedades do material dos prendedores

A fim de melhorar os resultados de simulação, notadamente para cargas mais altas, foi investigada a influência da curva do material dos prendedores no comportamento global da junta. Conforme anteriormente explicado, nas simulações apresentadas na seção 6.3.2 foi utilizada uma curva bilinear para caracterizar o material dos prendedores. Para aprimorar os resultados, foram feitas simulações com uma curva com discretização mais refinada. Porém, na falta de disponibilidade de uma curva específica para o alumínio 2117 e na impossibilidade de se realizar ensaios de tração nos diminutos prendedores, e considerando a proximidade dos resultados de dureza encontrados para prendedores e chapas na seção 5.3.2, foi definida, para todos os elementos da junta, a curva tensão-deformação do material das chapas (alumínio 2524) obtida por meio dos ensaios de caracterização de materiais. Ou seja, foram tomados pares $\sigma \times \varepsilon$ da curva “Amostra 1” da figura 5.19, mostrados na tabela 6.3 e usados como dados de entrada para a análise “AL 2524”. Na figura 6.8, são apresentados os resultados de simulação utilizando curva bilinear (a simulação A2) e curva obtida pelos ensaios experimentais (a simulação AL 2524), sobrepostos aos resultados de tração nos CDPs estreitos.

Tabela 6.3 – Pares $\sigma \times \epsilon$ obtidos da curva “Amostra 1” (figura 5.19), utilizados para modelar o material da análise “AL 2524”.

σ (MPa)	ϵ (mm/mm)
0	0
200	0,00294
270	0,00425
298,5	0,0052
306	0,006
320	0,0095
353	0,025
381	0,044
402	0,064
420	0,091

Figura 6.8 – Comparação entre resultados experimentais e numéricos para os CDPs estreitos

Nota-se que a alteração da curva característica do material dos prendedores modificou significativamente o comportamento global da junta na simulação e fez com que os resultados da simulação se aproximassem bastante dos resultados experimentais.

6.4.2. Encruamento da cabeça conformada dos prendedores

Nos resultados de medição de dureza dos prendedores Briles, apresentados no item 5.3.2, constatou-se que há significativo aumento da dureza do material do prendedor na região de sua cabeça conformada durante sua instalação. Assim,

foram feitos modelos em que foi modificada a curva tensão-deformação de modo a contemplar o encruamento do material.

Na figura 6.9 pode-se observar a curva original, obtida nos ensaios de caracterização de materiais, e duas curvas que corresponderiam ao material que tivesse sido previamente encruado ao atingir deformações de 2,5% e 4,5%, seguindo um modelo de encruamento apresentado na figura 6.10. Os pares de tensão e deformação usados para a construção das curvas são mostrados nas tabelas 6.4 e 6.5.

Figura 6.9 – Curvas tensão deformação utilizadas nos modelos de elementos finitos.

Figura 6.10 – Encruamento do material (extraído de CALLISTER, 2001).

Tabela 6.4 – Pares $\sigma \times \epsilon$ da curva Encruamento 2.

σ (MPa)	ϵ
0	0
353	0,00519
381	0,02419
402	0,04419
420	0,07119

Tabela 6.5 – Pares $\sigma \times \epsilon$ da curva Encruamento 1.

σ (MPa)	ϵ
0	0
381	0,0056
402	0,0256
420	0,0526

Empregando-se essas três diferentes curvas de materiais, apenas para a cabeça dos prendedores conformadas durante suas instalações, mantendo-se a curva de material sem encruamento para o restante do corpo dos prendedores, foram obtidos os resultados apresentados na figura 6.11.

Figura 6.11 – Resultados de simulações com variadas curvas tensão x deformação.

Observa-se que, apesar da modificação das propriedades do material da cabeça conformada dos prendedores, não houve significativa alteração nos resultados de simulação. Assim, julga-se que seja possível utilizar a mesma curva de material para toda a extensão do prendedor, sem prejuízo aos resultados de simulação.

6.5. TRANSFERÊNCIA DE CARGA POR ATRITO

6.5.1. Modelos de atrito

O MSC Marc conta com diversos algoritmos para a representação do atrito, e assim, foram realizadas simulações para avaliar o comportamento desses algoritmos aplicados à junta em análise. Para isso, um coeficiente de atrito de 0,6 foi arbitrado para o contato entre todos os corpos que fazem parte do conjunto. Apesar de ser um valor alto de coeficiente de atrito para o contato alumínio-alumínio, esse valor foi escolhido para que seus efeitos fossem mais visíveis no modelo de elementos finitos. Os três modelos de atrito testados foram: “*stick-slip*”, “*shear*”, e “*coulomb bilinear*”.

O modelo “*coulomb bilinear*” estabelece que um corpo, sujeito a uma força tangencial (F_t) e uma força normal (F_n) à superfície na qual está apoiado, permanecerá em repouso até que F_t supere o produto de F_n pelo coeficiente de atrito (μ) entre os corpos. Como existe uma descontinuidade no modelo de Coulomb, instabilidades podem ocorrer ao utilizá-lo, enquanto os modelos “*stick-slip*” e “*shear*” adicionam certa tolerância ao movimento relativo do corpo que está sujeito ao atrito, como mostra a figura 6.12.

Figura 6.12 – Relação entre força tangencial e deslocamento de um corpo sob uma superfície com atrito: (a) Coulomb bilinear, (b) *stick-slip* e *shear*. Fonte: MSC (2010)

Os resultados de simulações com esses modelos de atrito são mostrados na figura 6.13, onde o modelo A2 não conta com nenhuma forma de atrito

implementado. Nota-se que as simulações desta seção foram realizadas previamente ao aprimoramento na curva do material dos prendedores. Assim, foi utilizada a curva bilinear do alumínio 2117 mostrada na figura 6.1 para definir a relação tensão×deformação desse material.

Figura 6.13– Resultado de elementos finitos com utilização do atrito ($\mu=0,6$)

Pode-se observar que, para um mesmo valor de carga, o modelo que utiliza o algoritmo “*shear*” apresenta maior deslocamento, sendo inclusive maior que o do modelo A2, o que não é o real efeito esperado pela fricção. Os outros dois modelos tiveram respostas semelhantes entre si, porém, o algoritmo “*coulomb bilinear*” apresentou certa instabilidade em seu comportamento. Dessa forma, considera-se que o modelo “*stick-slip*” foi o que apresentou melhores resultados.

6.5.2. Influência do valor do coeficiente de atrito

Para verificar a influência do valor do coeficiente de atrito, foram executadas simulações nas quais foram atribuídos diversos valores para esse parâmetro. Nesta etapa, os materiais das chapas e do prendedor foram modelados com a curva do alumínio 2524 obtida nos ensaios de caracterização de materiais.

O atrito foi modelado com o algoritmo “*stick-slip*”, que se mostrou mais adequado nos testes apresentados na seção anterior. Foram utilizados coeficientes

de atrito de 0,2 a 3. Esse último valor, não possível fisicamente, foi utilizado para explicitar a influência do coeficiente de atrito. Os resultados das simulações podem ser observados na figura 6.14.

Figura 6.14– Resultados de simulação utilizando-se variados coeficientes de atrito.

Nota-se que há certa diferença no comportamento global da junta quando o coeficiente de atrito é alterado de zero para 0,2. Mas, para valores maiores, as diferenças são cada vez menos significativas. Isso pode estar relacionado com a menor importância do atrito como mecanismo de transferência de carga, quando comparado à transferência de carga pelos prendedores. Porém, ressalta-se que não foi inserido no modelo o efeito de pré-tensão de aperto entre chapas e chapa de união (usualmente denominada como *clamping force*), que favoreceria a transferência de carga por atrito.

6.5.3. Identificação da seção crítica da junta sob tração

Com base no modelo de corpo de prova estreito, foi feita a identificação da tensão máxima de tração (em valor algébrico) na direção longitudinal do corpo de prova tanto na chapa quanto na chapa de união, em função da carga aplicada. Esse dado é importante já que as tensões de tração são responsáveis pela nucleação e propagação de trincas, que estão fortemente relacionadas com a vida em fadiga do componente.

A figura 6.15 mostra as tensões obtidas por simulação, onde a tensão nominal, no eixo das abscissas, é igual a força de tração aplicada ao CDP dividida pela área da seção transversal. O número do elemento e a posição em que essas tensões ocorreram são apresentados na figura 6.16.

Figura 6.15– Tensões máximas na direção longitudinal, obtidas por simulação.

Figura 6.16– Número do elemento e posição em que ocorreram as tensões longitudinais máximas.

Os resultados de simulação indicam que, para baixas cargas, as tensões máximas na chapa de união são maiores que as tensões máximas nas chapas. Com o incremento de carga, há uma inversão dessas tendências e as tensões máximas nas chapas passam a ser superiores às tensões máximas na chapa de união. Esses resultados estão de acordo com resultados obtidos por ensaios de fadiga nesse tipo de junta, conforme consta em IPT (2014).

O mesmo processo foi feito para as tensões de von Mises, estando o maior valor encontrado em cada passo de carga na chapa e chapa de união apresentados na figura 6.17, e os pontos em que essas tensões foram registradas na figura 6.18.

Figura 6.17– Tensões máximas de von Mises, obtidas por simulação.

Figura 6.18– Número do elemento e posição em que ocorreram as tensões de von Mises máximas.

6.6. DESCRIÇÃO DO MODELO PARA JUNTA LARGA COM ELEMENTOS SÓLIDOS

O modelo para junta larga com elementos sólidos (JLES) foi feito utilizando como base o modelo JEES. Foram combinadas as ferramentas *translate* e *mirror* para gerar as geometrias e malhas de um quarto de junta (novamente explorando os planos de simetria). Dessa forma a malha do modelo largo apresenta as mesmas características que a do modelo JEES. A força teve sua intensidade alterada para o equivalente a uma carga de 60 kN, valor próximo à carga de ruptura obtida nos ensaios de tração. Na figura 6.19 pode ser observada a geometria do modelo e as linhas de referência para a geração das malhas.

Figura 6.19 – Geometria para o modelo JLES

Considerando o modelo JEES que apresentou melhor desempenho foi o que utilizou a curva do alumínio 2524, obtida nos ensaio de caracterização de materiais, o modelo JLES também fez uso dela. O mesmo vale para a ferramenta de contato analítico, empregada no modelo largo.

Durante as primeiras simulações, observou-se uma tendência de rotação dos prendedores em torno do seu próprio eixo, o que dificultou a convergência do modelo. Para resolver esse problema, foi aplicado um coeficiente de atrito igual a 0,2 entre todas as partes constituintes da junta. Novamente, baseado nos resultados obtidos com o modelo JEES, foi escolhido o algoritmo *stick-slip*, devido ao seu melhor desempenho quando comparado com outros algoritmos (conforme a seção 6.5.1).

6.7.RESULTADOS DO MODELO JLES

O modelo proposto apresentou boa convergência, tendo concluído a análise até o final com sucesso. A seguir, na figura 6.20 é mostrada a relação entre carga e deslocamento para o modelo numérico e para o ensaio de tração do cdp JL-2. É possível perceber que as duas curvas começam a divergir pouco depois da carga de 10 kN, até o momento em que, já no regime plástico, se interceptam próximo a carga de 50kN.

Figura 6.20 – Relação entre carga e deslocamento para o modelo de elementos finitos e o cdp JL-2.

A seguir, nas figuras 6.21 a 6.28, são mostradas comparações dos valores de deformação entre o modelo numérico e os resultados obtidos experimentalmente. Foram gerados gráficos em que o eixo das abscissas corresponde aos resultados numéricos de deformação (alongamento ε_x) sobre regiões de instalação de extensômetros, e o eixo das ordenadas, aos valores experimentais efetivamente obtidos por meio dos extensômetros, posicionados conforme ilustram as figuras 4.4 e 4.5. Uma reta de referência, a 45°, corresponde ao ponto em que os resultados numéricos e experimentais coincidem ($\varepsilon_{\text{numérico}} = \varepsilon_{\text{experimental}}$), e as linhas tracejadas correspondem a um desvio de 10% para cada lado.

Os resultados para os extensômetros que tiveram sua posição alterada no decorrer dos ensaios experimentais são mostrados para a configuração final de colagem (figura 4.5) e, portanto, existem apenas dois pontos que correlacionam os extensômetros S5 e S6. Considerando que os resultados para o extensômetro S13 foram em sua maioria inconsistentes, devido a problemas durante o processo de colagem, esse ponto não foi incluído nas comparações que seguem.

Figura 6.21 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 15kN

Figura 6.22 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 15kN

Figura 6.23 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 30kN

Figura 6.24 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 30kN

Figura 6.25 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 40kN

Figura 6.26 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 40kN

Figura 6.27 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 50kN

Figura 6.28 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 50kN

Nota-se nas figuras 6.21 a 6.28 que alguns extensômetros tiveram desvios bastante elevados em relação aos resultados experimentais, entre eles destacam-se os extensômetros S5, S6, S15, S16 e S17, sendo que os três últimos apresentaram inclusive, para alguns níveis de carga, mudança de sinal. Para compreender melhor o comportamento desses pontos conforme o carregamento se desenvolve, seguem nas figuras 6.29 a 6.35 a deformação experimental e numérica dos extensômetros que se encontram mais próximos ao centro da junta (conforme referência da figura 4.5).

Figura 6.29 – Deformação do extensômetro S3 no decorrer do carregamento

Figura 6.30 – Deformação do extensômetro S6 no decorrer do carregamento

Figura 6.31 – Deformação do extensômetro S9 no decorrer do carregamento

Figura 6.32 – Deformação do extensômetro S12 no decorrer do carregamento

Figura 6.33 – Deformação do extensômetro S15 no decorrer do carregamento

Figura 6.34 – Deformação do extensômetro S18 no decorrer do carregamento

Figura 6.35 – Deformação do extensômetro S21 no decorrer do carregamento

Pode-se observar que, no geral, houve boas correlações nas leituras dos extensômetros S3, S9 e S12, mas para outros pontos, como no caso dos extensômetros S6 e S15, os desvios foram maiores. Destaca-se que, no caso do extensômetro S6, as curvas podem, em um primeiro momento, parecer próximas, mas como se trata de uma zona de alto gradiente de deformações, como indicado na figura 6.16, essa proximidade representa um valor razoável em termos de deformação. No caso do extensômetro S15, que apresentou sinais opostos para os resultados experimentais e numéricos para alguns patamares de carga, observa-se na figura 6.33 que, apesar de haver valores de deformações com sinais opostos, a tendência das curvas experimentais e numéricas é a mesma, existindo um afastamento entre elas. O resultado mais inesperado ficou com o extensômetro S21, mostrado na figura 6.35. No início do carregamento há uma coerência com os dados experimentais, mas divergências acabam por ocorrer até que, próximo à carga de 40 kN, nota-se uma instabilidade nos valores de deformação. Mas, nota-se também uma queda acentuada nos valores de deformação registrado nos três ensaios realizados.

As distorções obtidas com o modelo JLES para os pontos R8, R9, R11 e R12 (mostrados na figura 4.5) foram comparadas com os resultados obtidos pelo método de fotoelasticidade. Os resultados são apresentados nas figuras 6.36 a 6.39, onde os valores experimentais de R_i correspondem a uma média aritmética com seus respectivos pares simétricos, já que o modelo de elementos finitos foi elaborado para apenas um quarto de junta.

Figura 6.36 – Distorção experimental e numérica para o ponto R8

Figura 6.37 – Distorção experimental e numérica para o ponto R9

Figura 6.38 – Distorção experimental e numérica para o ponto R11

Figura 6.39 – Distorção experimental e numérica para o ponto R12

É possível observar nas figuras 6.36 a 6.39, além da boa repetibilidade do método fotoelástico, que houve uma melhor aderência para os pontos R8 e R9, mais próximos do centro da junta (conforme a figura 4.5).

6.8. DESCRIÇÃO DO MODELO DE JUNTA LARGA COM ELEMENTOS DE CASCA

Com o objetivo de obter modelos com menor custo computacional, foram desenvolvidos modelos em elementos finitos que são constituídos de elementos de casca (JLEC) para a representação das chapas e unidimensionais para os prendedores.

As chapas foram modeladas com a mesma geometria das apresentadas pelos corpos de prova, com exceção da seção de maior largura utilizada para fixação dos corpos de prova nas garras da máquina de ensaios, e dos escareados que alojam as cabeças dos prendedores, tendo sido, de fato, utilizado um diâmetro constante nos furos, de 3,96 mm.

As figuras 6.40 e 6.41 ilustram os modelos descritos e os sistemas de coordenadas adotados.

Figura 6.40– Modelo de casca (chapa)

Figura 6.41 – Modelo de casca em perspectiva e coordenadas adotadas

Assim como nos modelos com elementos sólidos desenvolvidos no decorrer do projeto, foi utilizada simetria na direção transversal da junta (plano YZ), que

impede o deslocamento dos pontos dessa seção na direção X, bem como as rotações em torno dos eixos Y e Z. Optou-se, porém, por não utilizar simetria na direção longitudinal imaginando-se que ela poderia influir na modelagem dos prendedores. Uma força de tração próxima ao valor da ruptura obtido nos ensaios foi distribuída por todos os nós da borda mais afastada dos prendedores. As cargas e apoios são mostrados na figura 6.42.

Figura 6.42 – Cargas e apoios para o modelo de elementos finitos

Foram utilizados elementos de casca de quatro nós para a malha, tendo sido feito, para sua geração, o uso da ferramenta “Paver”, que é utilizada para a construção de malhas em superfícies não elementares, como a apresentada na figura 6.43. Essa ferramenta, apesar de não gerar malhas estruturadas é de utilização mais simples, o que torna o processo mais ágil.

Figura 6.43 – Detalhe da malha do modelo

Os prendedores foram modelados utilizando o elemento *cbush*, uma espécie de elemento de mola para o qual é possível atribuir seis valores diferentes de rigidez, um para cada direção e rotação, de forma que a rigidez será constante para cada uma das direções. A rigidez axial do prendedor foi calculada conforme a equação 6.1, onde E_p é o módulo de elasticidade do material do prendedor (71 GPa); A_p é a área da seção transversal do prendedor (12,3 mm²); L o comprimento do prendedor (3,6 mm). Obteve-se, para esses dados de entrada, uma rigidez axial de $2,43 \cdot 10^5$ N/mm.

$$K_{Axial} = \frac{E_p A_p}{L} \quad (6.1)$$

Já a rigidez transversal foi calculada como sendo o inverso da flexibilidade obtida por meio das formulações apresentadas em (SWIFT, 1971) e (HUTH, 1985; apud XAVIER, 2006), mostradas nas Equações 6.2 e 6.3, respectivamente, onde: f é a flexibilidade; E é o módulo de elasticidade das chapas (68,1 GPa); D_0 é o diâmetro dos prendedores (3,96 mm); t_1 a espessura da chapa (1,6); e t_2 a espessura da chapa de união (2mm).

$$f = \frac{1}{E \cdot D_0} \cdot \left[5,0 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{D_0}{t_1} + \frac{D_0}{t_2} \right) \right] \quad (6.2)$$

$$f = \frac{11}{E} \cdot \left[\frac{4}{t_1} + \frac{3}{t_2} \right] \cdot \left[\frac{t_1 + t_2}{2 \cdot D_0} \right]^{2/5} \quad (6.3)$$

Por terem sido obtidos valores significativamente diferentes de rigidez para os prendedores com as duas equações, sendo $3,15 \times 10^4$ N/mm com Swift e $2,12 \times 10^3$ N/mm com Huth, optou-se por utilizar as duas opções, e comparar a influência da rigidez nos resultados.

Para conectar as chapas ao prendedor, foi feito o uso do elemento RBE2, classificado no MSC Patran como um MPC (*Multi-Point Constraint*). O RBE2 estabelece uma ligação rígida entre um número arbitrário de nós (chamados nós dependentes) e um único nó independente, que estarão conectados apenas pelos graus de liberdade especificados pelo usuário. Dessa forma, a conexão foi feita em duas etapas: primeiramente conectaram-se todos os nós da borda do furo ao nó localizado no centro do furo (pertencente ao elemento *cbush*) pelo grau de liberdade Z (direção axial do prendedor). A segunda etapa consistiu em ligar o nó do centro do furo apenas aos nós das bordas do furo que estariam em compressão, pelos graus de liberdade X e Y como mostra a figura 6.44. Optou-se por utilizar dois MPCs concomitantemente, pois, em testes anteriores nos quais todos os nós da borda dos furos eram conectados ao nó central pelos três graus de liberdade, verificou-se que a parte da chapa que perde contato com o prendedor (figura 6.45) estava sujeita a

esforços de tração. A figura 6.46 mostra o detalhe da conexão entre chapa e prendedor para o modelo JLEC.

Nós da chapa posicionados em áreas sujeitas a compressão (nós dependentes)
Nó localizado no centro do furo, pertencente ao prendedor (nó independente)

Figura 6.44 – Segunda etapa da ligação das chapas ao prendedor: nós conectados nos graus de liberdade X e Y

Figura 6.45 – Perda de contato entre chapa e prendedor (resultado do modelo JEES)

Figura 6.46 – Conexão entre chapa e prendedor

6.9. RESULTADOS DO MODELO JLEC

O modelo descrito na seção 6.8 apresentou convergência até 51,6 kN, ou seja, 86% do total da carga de 60kN aplicada. É mostrada a relação entre força e deslocamento para este modelo e os resultados experimentais na figura 6.47. Observa-se que o modelo numérico apresenta similaridade aos resultados experimentais até uma carga de cerca de 35 kN, a partir de onde se inicia um comportamento não linear dos CDPs. Nota-se que os modelos numéricos também apresentam, a partir dessa carga, um comportamento não linear, porém mais rígido que os corpos de prova.

Figura 6.47 – Força×deslocamento para o modelo JLEC

6.9.1. Formulação de Swift

Seguem, nas figuras 6.48 a 6.56, algumas imagens dos resultados obtidos com o modelo que utiliza a formulação de Swift, sendo eles a tensão σ_x (na direção do carregamento), a tensão de von Mises a configuração deformada. A carga aplicada para esses resultados é de 51,6 kN, correspondendo a uma tensão nominal de 288 MPa na chapa.

Figura 6.48 – Tensão σ_x , em MPa, na face superior da chapa (detalhe)

Figura 6.49 – Tensão σ_x , em MPa, na interface da chapa (detalhe)

Figura 6.50 – Tensão σ_x , em MPa, na interface da chapa de união

Figura 6.51 – Tensão σ_x , em MPa, na face externa da chapa de união

Figura 6.52 – Tensão de von Mises na face superior da chapa (detalhe)

Figura 6.53 – Tensão de von Mises, em MPa, na interface da chapa (detalhe)

Figura 6.54 – Tensão de von Mises, em MPa, na interface da chapa de união

Figura 6.55 – Tensão de von Mises, em MPa, na face externa da chapa de união

Figura 6.56 – Configuração deformada da chapa (escala de deformação 10:1)

Com esses resultados pode se observar que as tensões e deformações não são tão bem representadas nas proximidades dos furos, o que se evidencia pelas tensões compressivas na região em que o prendedor deveria perder contato com a chapa (ver figura 6.48). Ademais, as zonas com maiores tensões compressivas na chapa (em azul escuro), em sua interface, não apresentam uma distribuição homogênea conforme era esperado, mas se divide em duas áreas distintas. A configuração deformada mostra, nas vizinhanças dos furos, deformações para fora do plano da chapa, que ocorrem devido à rigidez dos elementos RBE2.

A seguir, nas figuras 6.57 a 6.64, são mostradas comparações dos valores de deformação entre o modelo numérico e os resultados obtidos experimentalmente por meio de extensômetros, posicionados conforme ilustram as figuras 4.4 e 4.5. Os extensômetros que tiveram sua posição alterada no decorrer dos ensaios experimentais não foram incluídos nessa comparação. Uma reta de referência, a 45°, corresponde ao ponto em que os resultados numéricos e experimentais coincidem ($\epsilon_{\text{numérico}} = \epsilon_{\text{experimental}}$), e as linhas tracejadas correspondem a um desvio de 10% para cada lado.

Figura 6.57– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 15kN (formulação de Swift)

Figura 6.58– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 15kN (formulação de Swift)

Figura 6.59– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 30kN (formulação de Swift)

Figura 6.60– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 30kN (formulação de Swift)

Figura 6.61– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 40kN (formulação de Swift)

Figura 6.62– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 40kN (formulação de Swift)

Figura 6.63 – Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 50kN (formulação de Swift)

Figura 6.64– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 50kN (formulação de Swift)

Observa-se que alguns extensômetros tiveram desvios bastante elevados, apresentando inclusive situações onde ocorre a inversão do sinal da deformação. Por essa razão, são mostrados respectivamente nas figuras 6.65 e 6.66 os comportamentos individuais dos extensômetro S8 e S16 em relação à carga aplicada. É possível perceber que o comportamento do modelo numérico para o extensômetro S16 apresenta a mesma tendência dos resultados experimentais, apesar dos desvios nos resultados. O extensômetro S8, por outro lado, teve deformações muito menores na análise numérica do que nos ensaios de tração.

Figura 6.65– Deformação do extensômetro S8 (formulação de Swift)

Figura 6.66– Deformação do extensômetro S16 (formulação de Swift)

6.9.2. Formulação de Huth

Analogamente, seguem os resultados do modelo de casca para a formulação de Huth, nas figuras 6.67 a 6.76.

Figura 6.67– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 15kN (formulação de Huth)

Figura 6.68– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 15kN (formulação de Huth)

Figura 6.69– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 30kN (formulação de Huth)

Figura 6.70– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 30kN (formulação de Huth)

Figura 6.71– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 40kN (formulação de Huth)

Figura 6.72– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 40kN (formulação de Huth)

Figura 6.73– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa de união na carga de 50kN (formulação de Huth)

Figura 6.74– Comparação entre deformação experimental e numérica para os extensômetros da chapa na carga de 50kN (formulação de Huth)

Figura 6.75– Deformação do extensômetro S8 (formulação de Huth)

Figura 6.76– Deformação do extensômetro S16 (formulação de Huth)

As duas formulações utilizadas para o cálculo da rigidez dos prendedores apresentaram resultados bastante semelhantes quando comparadas com os dados experimentais, apesar da grande diferença numérica entre a rigidez obtida pela formulação de Swift e pela formulação de Huth.

Nos resultados apresentados, observa-se que, para o patamar de carga mais baixo, os valores de deformação experimental e numérico ficam mais próximos entre si. Conforme é adicionada carga, o desvio aumenta até que, no último patamar (50kN), a maior parte dos pontos fica fora da região de 10% de erro. Esses resultados podem ser em parte explicados pelo comportamento não linear que a junta apresenta para esse valor de força, que é visível até mesmo no comportamento macroscópico da junta.

Os extensômetros que apresentaram um maior desvio, para todos os patamares de carga, foram o S7, S8 e S9, para a chapa, e S15, S16 e S17 para a chapa de união. Ao se verificar suas posições nas figuras 4.4 e 4.5, observa-se que são os extensômetros mais próximos da linha de simetria do modelo (metade da junta).

A transferência de carga realizada por cada uma das fileiras, (ou seja, a força realizada por cada fileira de prendedores na direção x) é mostrada na figura 6.77 e na tabela 6.6, onde a fileira 1 é a mais próxima da seção de simetria da junta, e a fileira 3 é a mais próxima da borda do CDP presa à máquina. Nota-se que os valores negativos na tabela 6.6 indicam sentido oposto ao da carga externa aplicada na chapa (ocorrendo assim o equilíbrio). Observa-se que a quantidade de carga transferida não é uniforme para baixas cargas e tende a valores mais uniformes para altas cargas. Os resultados obtidos para as duas formulações de cálculo de rigidez dos prendedores foram similares entre si, então são apenas apresentados os resultados para a formulação de Swift.

Figura 6.77– Transferência de carga entre as fileiras (formulação de Swift)

Tabela 6.6 – Transferência de carga por fileira

F Externa (N)	Fileira 1		Fileira 2		Fileira 3	
	Fx (N)	%	Fx (N)	%	Fx (N)	%
1500	-775,2	51,7%	-321,3	21,4%	-403,5	26,9%
10000	-4061,7	40,7%	-2584,0	25,8%	-3353,8	33,5%
20000	-7493,6	37,5%	-5628,4	28,1%	-6878,1	34,4%
30000	-10795,9	36,0%	-8931,8	29,8%	-10272,3	34,2%
40000	-14018,2	35,0%	-12461,8	31,1%	-13520,3	33,8%
50000	-17180,6	34,4%	-16098,8	32,2%	-16720,4	33,4%

A tensão longitudinal máxima no corpo de prova, que está relacionada com a falha por fadiga, é mostrada na figura 6.78 para a chapa e a chapa de união em função do carregamento. Assim como no modelo JEES (ver figura 6.15), para baixas cargas, as tensões máximas na chapa de união são maiores que as tensões máximas nas chapas e, conforme o carregamento externo aumenta, as tensões máximas passam a ocorrer na chapa. São mostrados apenas os resultados para a formulação de Huth, tendo em vista a proximidade entre os resultados das duas formulações. A tensão nominal, no eixo das abscissas, equivale à força de tração aplicada pela máquina de ensaios dividida pela área da seção transversal do corpo de prova.

Figura 6.78 – Tensões principais (σ_1) nas chapas em função da tensão média atuante na chapa (modelo JLEC utilizando a formulação de Huth)

7 CONCLUSÕES

Juntas rebitadas voltadas para aplicações aeronáuticas foram submetidas a ensaios de tração com instrumentação por extensometria e fotoelasticidade, tendo os resultados contribuído para um melhor entendimento do seu comportamento mecânico quando solicitadas. Pôde ser observado que o momento secundário, que ocorre devido à sobreposição das chapas, tem papel importante nas deformações causadas na chapa e na chapa de união, mas decresce em importância conforme a força de tração aumenta. Esse resultado está de acordo com informações disponíveis na literatura. Notou-se ainda, durante a preparação e execução dos ensaios, a importância de um alinhamento meticuloso do corpo de prova, e de um método rigoroso para a realização desse alinhamento, considerando que os desalinhamentos podem se intensificar conforme a carga é aplicada.

O método fotoelástico mostrou razoável repetibilidade nos corpos de prova que utilizaram essa técnica; porém, devido às recomendações do fabricante e o movimento dos prendedores, não foi possível obter a distorção e a direção das tensões principais nas proximidades dos rebites. Ademais, a intensidade do momento fletor precisa ser conhecida para corrigir os valores medidos pelo sistema fotoelástico, o que limitou o emprego dessa técnica.

A modelagem pelo método dos elementos finitos utilizando elementos sólidos permitiu observar o complexo estado de tensões nas juntas e a influência de uma série de fatores no comportamento do modelo como, por exemplo, o atrito. Destacou-se a necessidade de se utilizar dados acurados dos materiais, e as dificuldades atreladas a isso, como no caso dos prendedores, que sofrem encruamento durante o processo de montagem da junta. Por outro lado, verificou-se que o encruamento da cabeça do prendedor (externa à junta) não tem grande influência no comportamento do modelo. Alguns pontos, como aqueles com maiores gradientes de deformações, tiveram desvios maiores dos resultados experimentais, mostrando a necessidade de aprimoramento dos modelos.

As simulações que utilizaram elementos de casca apresentaram um bom custo-benefício, com resultados razoáveis para tempos de solução bem menores do que os modelos com elementos sólidos. A proximidade dos resultados que utilizaram a formulação de Huth e a formulação de Swift para a rigidez do prendedor revela que, apesar do comportamento do modelo variar em função desse parâmetro, tal

variação não é tão sensível às mudanças feitas, ao contrário do que inicialmente se imaginava.

Apesar dos resultados obtidos, melhorias ainda são necessárias para uma melhor representação de uniões por prendedores. Como sugestões para trabalhos futuros ficam os seguintes tópicos:

- Inclusão da clamping force nos modelos de elementos finitos e investigação da sua influência no comportamento das juntas;
- Modelagem das juntas rebitadas incluindo a parte da seção de largura variável da chapa (próxima à garra da máquina), para verificar os impactos dessa simplificação;
- Modelagem numérica e analítica de juntas rebitadas escalonadas, tais como a da figura 7.1, por exemplo.

Figura 7.1 – Vista lateral de junta escalonada

- Modelagem de juntas rebitadas que utilizam o prendedor tipo HST11 (ver figura 7.2), bem como a modelagem do próprio prendedor;

Figura 7.2 – Junta rebitada de topo com prendedores HST11

- Adaptação e uso de modelos analíticos, nos moldes do apresentado por Radi (2011), que consiste em determinar as tensões em uma chapa infinita com furos carregados com pressão interna;
- Investigação do comportamento de uniões rebitadas em superfícies curvas (como, por exemplo, uma fuselagem de aeronave), destacando as principais diferenças para as juntas planas;
- Ensaaios de fadiga nesse tipo de união, e construção de gráficos S×N;
- Estudo dos processos de nucleação e propagação de trincas em juntas rebitadas, bem como dos fatores que os influenciam;
- Estudo de projetos de juntas rebitadas, com ênfase na otimização da vida útil desse tipo de componente.

REFERÊNCIAS

AEROSPACE INDUSTRIES ASSOCIATION OF AMERICA. **NASM 14218**. Arlington, 2010.

BEDAIR, O. K.; EASTAUGH, G.F. A numerical model for analysis of riveted splice joints accounting for secondary bending and plates/rivet interaction. **Thin-Walled Structures**, v. 45, p. 251-258, 2007.

BRUEGGEMAN, W. C. **Mechanical properties of aluminum-alloy rivets**. NACA, 1936. 37p. Technical Note 585.

DOT/FAA/AR, U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Office of Aviation Research, "MMPDS – Metallic Materials Properties Development and Standardization", 2010

HAHN, G.; IYER, K.; RUBIN, C. **Structural shear joints**: Analyses, properties and design for repeated loading. New York: ASME, 2005.

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Novas Tecnologias de Juntas por Prendedores**: relatório técnico. São Paulo: IPT, 2014. 252 p.

JIANG, Y. et al. Three-dimensional stress concentrations at circular pin holes in clearance-fit lugs. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.34, p. 573-580, 2011.

KUMAR, D. V. T. G. P. et al. Further numerical and experimental failure studies on single and multi-row riveted lap joints. **Engineering failure analysis**, v. 20, p. 9-24, 2011.

MATWEB. Disponível em: < <http://www.matweb.com>>. Acesso em: 22 ago. 2013

MOSINYI, B.R. **Fatigue Damage Assessment of High-Usage In-Service Aircraft Fuselage Structure**. 2007. 422f. Tese de Doutorado – Drexel University, Philadelphia, 2007.

MÜLLER, R.P.G. **An experimental and analytical investigation on the fatigue behavior of fuselage riveted joints, the significance of the rivet squeeze force and a comparison of 2024-t3 and glare 3**. 1995. 516f. Tese de Doutorado - Delft University of Technology, Delft, 1995.

MSC.SOFTWARE CORPORATION. **Marc 2010: Theory and User Information**, 2010.

NATIONAL TRANSPORTATION SAFETY BOARD. **Aircraft Accident Report - Aloha Airlines, Flight 243, Boeing 737-200, N73711, near Maui, Hawaii, April 28, 1988**. Washington, D.C.: NTSB, 1989. 262 p. Relatório técnico.

RADI, E. Path-independent integrals around two circular holes in an infinite plate under biaxial loading conditions. **International Journal of Engineering Science** v.49, p.893-914, 2011.

RANS, C. D.; ALDERLIESTEN, R. C.; STRAZNICKY, P. V. Assessing the effects of riveting induced residual stresses on fatigue crack behaviour in lap joints by means of fractography. **International Journal of Fatigue** v. 31, p.300–308, 2009.

RANS, C.D. **The role of rivet installation on the fatigue performance of riveted lap joints**. 2007. 205f. Tese de Doutorado - Carleton University, Ottawa, 2007.

RETTEW, H.F.; THUMIN G. **Tests in riveted joints in sheet duralumin**. NACA, 1923. 8p. Technical Note 165.

RIJCK, J.J.M. **Stress analisys of fatigue crack in mechanically fastened joints - na analytical and experimental investigation**. 2005. 315 f. Tese de Doutorado - Delft University of Technology, Delft, 2005.

SCHIJVE, J. **Some Elementary Calculations on Secondary Bending in Simple Lap Joints**: relatório técnico. Amsterdam: National Aerospace Laboratory, 1972.

SCHIJVE, J.; CAMPOLI, G.; MONACO, A. Fatigue of structures and secondary bending in structural elements. **International Journal of Fatigue** v. 31, p.1111–1123, 2009.

SKORUPA, A. et al. Fatigue crack location and fatigue life for riveted lap joints in aircraft fuselage. **International Journal of Fatigue**, v. 58, p. 209-217, 2014.

SKOROPA, A.; SKORUPA, M. **Riveted lap joints in aircraft fuselage**: design, analysis and properties. London: Springer, 2012.

SKORUPA, M. et al. Effect of production variables on the fatigue behavior of riveted lap joints, **International Journal of Fatigue**, v. 32 p. 996–1003, 2010.

SPINELLI, H. A. **Aplicação da fotoelasticidade na análise estrutural de uma junta rebitada de uso aeronáutico**. 2004. 152 f. Dissertação de Mestrado – Unesp, Guaratinguetá, 2004.

SWIFT, T. **Repairs to damage tolerant aircraft**. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON STRUCTURAL INTEGRITY OF AGING AIRPLANES, 1990, Atlanta. **Anais...** Atlanta, 1990.

TATE, M.B.; ROSENFELD, S.J. **Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints**. NACA, 1946. 69p. Technical Note 1051.

VLIEGER, H., OTTENS, H. H., "Uniaxial and biaxial tests on riveted fuselage lap joint specimens", US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, 1998.

VISHAY PRECISION GROUP. **Application Note B-233-H, "Instructions for Bonding Flat and Contoured PhotoStress Sheets"**, 2010.

VISHAY PRECISION GROUP, **Tech Note TN 702-1, "Introduction to Stress Analysis by the PhotoStress Method"**, 2010

VISHAY PRECISION GROUP, **Tech Note TN 706-1, "Corrections to Photoelastic Coatings Fringe-Order Measurements"**, 2011

XAVIER, A. C. B. **Considerações para a Análise de Juntas Aeronáuticas Unidas Mecanicamente**. 2006. 150 f. Dissertação de Mestrado - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2006.

A. CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS EM UMA JUNTA DE TOPO REBITADA COM UMA FILEIRA DE PRENEDEDORES

Consideremos uma junta de topo assimétrica formada por duas chapas de espessura t_1 unidas por meio de uma chapa de união de espessura t_2 e uma única fileira de prenedores, como indicado esquematicamente na figura A.1. Na figura também estão indicados os esforços solicitantes existentes nas extremidades A e B da junta, sendo F a intensidade da força de tração a qual a junta está submetida.

Figura A.1 – Junta de topo com uma fileira de prenedores

Desconsiderando os esforços distribuídos ao longo do comprimento (como o peso próprio da junta) e levando em conta as condições de simetria, temos do equilíbrio de forças na direção vertical que:

$$V_A = V_B = 0 \quad (\text{A.1})$$

Conclui-se do exposto que não haverá força cortante no plano de simetria (já que temos uma estrutura simétrica sob carregamento simétrico) e, portanto, considerando o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa à esquerda e porção superior do rebite à esquerda” os únicos esforços solicitantes que existirão são os indicados na figura A.2 (força horizontal de intensidade F e momento fletor de intensidade M_0 , ambos atuantes na seção transversal do rebite).

Figura A.2 – Diagrama de corpo livre da chapa na configuração de referência

Utilizando um raciocínio análogo, a figura A.3 mostra o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa de união e porção inferior do rebite à esquerda”, onde, naturalmente, apenas metade da chapa de união está sendo considerada. Pelo princípio da ação e reação os mesmos esforços, de magnitudes F e M_0 , indicados na figura A.2 comparecem na figura A.3, porém com sentidos opostos. Note também que pode haver um momento fletor, de intensidade M_c , atuando no plano de simetria da junta.

Figura A.3 – Diagrama de corpo livre da chapa de união na configuração de referência

Contudo, para a determinação dos deslocamentos transversais dos eixos centrais da chapa e da chapa de união é necessário considerar os momentos de 2ª ordem (momentos secundários) decorrentes dos esforços axiais aplicados às chapas. Em outras palavras, é necessário que o equilíbrio seja feito na configuração deformada das chapas. A Figura A.4 mostra como fica o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa à esquerda e porção superior do rebite à esquerda” na configuração deformada. Note que, neste caso, a força horizontal F foi “transportada” da face inferior até o eixo central da chapa, gerando o momento de transporte $Ft_1/2$ que é superposto ao momento M_0 . Além disso, consideramos que o deslocamento transversal da chapa na posição $x_1 = a$ vale δ_1 (valor a ser determinado).

Figura A.4 – Diagrama de corpo livre da chapa na configuração deformada

Impondo o equilíbrio de momentos na chapa, teremos:

$$M_A + M_0 + \frac{Ft_1}{2} = F\delta_1 \quad (\text{A.2})$$

Ou, de forma análoga:

$$M_A = F\delta_1 - \frac{Ft_1}{2} - M_0 \quad (\text{A.3})$$

De forma análoga, a figura A.5 mostra o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa de união e porção inferior do rebite à esquerda”, na configuração deformada. Note que, neste caso, um sistema de coordenadas $O_2x_2y_2$, com origem na interseção do plano de meia espessura da chapa de união com o eixo central do prendedor, está sendo utilizado. Deve-se observar também que o deslocamento transversal do eixo central da chapa de união na posição $x_2 = b$ vale δ_2 (valor a ser determinado).

Figura A.5 – Diagrama de corpo livre da chapa de união na configuração deformada

Impondo o equilíbrio de momentos na chapa de união, teremos:

$$-M_c + \frac{Ft_2}{2} - M_0 = F\delta_2 \quad (\text{A.4})$$

Ou, de forma análoga:

$$M_0 = \frac{Ft_2}{2} - F\delta_2 - M_c \quad (\text{A.5})$$

A equação da linha elástica para a chapa superior, considerando os momentos de 2ª ordem, fica dada por:

$$EI_1 v_1''(x_1) = -M_A + Fv_1(x_1) \quad (\text{A.6})$$

Ou seja:

$$v_1''(x_1) - \frac{F}{EI_1} v_1(x_1) = -\frac{M_A}{EI_1} \quad (\text{A.7})$$

Se denominarmos:

$$k_1^2 = \frac{F}{EI_1} \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.7) fica rescrita na forma:

$$v_1''(x_1) - k_1^2 v_1(x_1) = -\frac{M_A}{EI_1} \quad (\text{A.9})$$

Cuja solução é:

$$v_1(x_1) = C_1 e^{k_1 x_1} + C_2 e^{-k_1 x_1} + \frac{M_A}{F} \quad (\text{A.10})$$

E sua primeira derivada é:

$$v_1'(x_1) = C_1 k_1 e^{k_1 x_1} - C_2 k_1 e^{-k_1 x_1} \quad (\text{A.11})$$

- As condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_1(x_1 = 0) = 0 \text{ (deslocamento nulo no apoio)} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{cases} v_1'(x_1 = 0) = 0 \text{ (rotação nula no apoio)} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Desenvolvendo chegamos a:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{M_A}{F} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

E resolvendo o sistema formado por (A.14) e (A.15), obtemos:

$$C_1 = C_2 = -\frac{M_A}{2F} \quad (\text{A.16})$$

Portanto:

$$v_1(x_1) = \frac{M_A}{F} \left(1 - \frac{1}{2} e^{k_1 x_1} - \frac{1}{2} e^{-k_1 x_1} \right) \quad (\text{A.17})$$

Ou ainda:

$$v_1(x_1) = \frac{M_A}{F} [1 - \cosh(k_1 x_1)] \quad (\text{A.18})$$

Determinando, agora, a equação da linha elástica para a chapa de união, teremos:

$$EI_2 v_2''(x_2) = M_0 - \frac{Ft_2}{2} + Fv_2(x_2) \quad (\text{A.19})$$

Ou:

$$v_2''(x_2) - \frac{F}{EI_2} v_2(x_2) = \frac{2M_0 - Ft_2}{2EI_2} \quad (\text{A.20})$$

Denominando:

$$k_2^2 = \frac{F}{EI_2} \quad (\text{A.21})$$

Podemos rescrever (A.21) na forma:

$$v_2''(x_2) - k_2^2 v_2(x_2) = \frac{2M_0 - Ft_2}{2EI_2} \quad (\text{A.22})$$

Cuja solução é:

$$v_2(x_2) = A_1 e^{k_2 x_2} + A_2 e^{-k_2 x_2} + \frac{(Ft_2 - 2M_0)}{2F} \quad (\text{A.23})$$

E sua primeira derivada é:

$$v_2'(x_2) = k_2 A_1 e^{k_2 x_2} + k_2 A_2 e^{-k_2 x_2} \quad (\text{A.24})$$

- As condições de contorno são:

1) Deslocamento igual a δ_2 no plano de simetria da chapa de união:

$$v_2(b) = \delta_2 \quad (\text{A.25})$$

Assim:

$$\delta_2 = A_1 e^{k_2 b} + A_2 e^{-k_2 b} + \frac{(Ft_2 - 2M_0)}{2F} \quad (\text{A.26})$$

Porém, da equação (A.5):

$$\frac{Ft_2 - 2M_0}{2F} = \delta_2 + \frac{M_C}{F} \quad (\text{A.27})$$

Então, de (A.26) e (A.27), resulta:

$$A_1 e^{k_2 b} + A_2 e^{-k_2 b} = -\frac{M_C}{F} \quad (\text{A.28})$$

2) Rotação nula no plano de simetria:

$$v_2'(b) = 0 \quad (\text{A.29})$$

Levando a:

$$A_1 e^{k_2 b} - A_2 e^{-k_2 b} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Assim, com as duas condições de contorno já definidas, é possível obter as constantes A_1 e A_2 que ficam dadas por:

$$A_1 = -\frac{M_C}{2F} e^{-k_2 b} \quad (\text{A.31})$$

e

$$A_2 = -\frac{M_C}{2F} e^{k_2 b} \quad (\text{A.32})$$

Logo:

$$v_2(x_2) = -\frac{M_C}{2F} e^{-k_2 b} e^{k_2 x_2} - \frac{M_C}{2F} e^{k_2 b} e^{-k_2 x_2} + \delta_2 + \frac{M_C}{F} \quad (\text{A.33})$$

Ou ainda, de forma análoga:

$$v_2(x_2) = \frac{M_C}{F} \left[1 - \frac{1}{2} e^{k_2(x_2-b)} - \frac{1}{2} e^{-k_2(x_2-b)} \right] + \delta_2 \quad (\text{A.34})$$

ou

$$v_2(x_2) = \frac{M_C}{F} [1 - \cosh(k_2(x_2 - b))] + \delta_2 \quad (\text{A.35})$$

Neste ponto temos as expressões $v_1(x_1)$ e $v_2(x_2)$, que fornecem os deslocamentos transversais dos pontos pertencentes aos eixos centrais de cada uma das chapas em função das coordenadas x_1 ou x_2 . É necessário agora encontrar as seguintes incógnitas que ainda restam nestas expressões: M_A , M_C e δ_2 .

Compatibilidade de rotações:

Partindo da premissa de que o prendedor é rígido, chapa e chapa de união terão a mesma rotação no ponto de conexão entre as chapas, ou seja:

$$v'_1|_{x_1=a} = v'_2|_{x_2=0} \quad (\text{A.36})$$

Levando a:

$$\frac{M_A k_1}{F} \frac{1}{2} [-e^{k_1 a} + e^{-k_1 a}] = \frac{M_C k_2}{F} \frac{1}{2} [-e^{-k_2 b} + e^{k_2 b}] \quad (\text{A.37})$$

Ou:

$$-M_A k_1 \sinh(k_1 a) = M_C k_2 \sinh(k_2 b) \quad (\text{A.38})$$

Agora, se substituirmos $\delta_1 = v_1|_{x_1=a}$ na equação de equilíbrio de momentos da chapa (equação A.3), teremos:

$$M_A = M_A[1 - \cosh(k_1 a)] - \frac{F t_1}{2} - M_0 \quad (\text{A.39})$$

Já o mesmo raciocínio para $\delta_2 = v_2|_{x_2=b}$ na equação A.4 não funciona, pois chegaríamos ao resultado $\delta_2 = \delta_2$ (veja também que esta condição já foi imposta em A.25) Assim, utilizamos a expressão $(v_2|_{x_2=0}) = 0$ (ou seja, o deslocamento transversal na origem, em relação à própria origem, é igual a zero). Então:

$$\frac{M_C}{F} [1 - \cosh(k_2 b)] + \delta_2 = 0 \quad (\text{A.40})$$

Ou seja:

$$\delta_2 = \frac{M_C}{F} [\cosh(k_2 b) - 1] \quad (\text{A.41})$$

Substituindo a equação A.41 na equação A.4, virá:

$$M_C = -M_C [\cosh(k_2 b) - 1] + \frac{F t_2}{2} - M_0 \quad (\text{A.42})$$

Rescrevendo, agora, as equações A.39 e A.42 na forma:

$$\begin{cases} \frac{F t_1}{2} + M_0 = -M_A \cosh(k_1 a) \\ \frac{F t_2}{2} - M_0 = +M_C \cosh(k_2 b) \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$\quad \quad \quad \begin{cases} \frac{F t_2}{2} - M_0 = +M_C \cosh(k_2 b) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Somando as equações (A.43) e (A.44):

$$\frac{F t_1}{2} + \frac{F t_2}{2} = M_C \cosh(k_2 b) - M_A \cosh(k_1 a) \quad (\text{A.45})$$

E substituindo a equação (A.38) em (A.45), virá:

$$\frac{F(t_1 + t_2)}{2} = M_C \left[\cosh(k_2 b) + \frac{k_2 \sinh(k_2 b)}{k_1 \sinh(k_1 a)} \cosh(k_1 a) \right] \quad (\text{A.46})$$

Ou ainda:

$$M_C = \frac{F(t_1 + t_2)}{2} \left(\frac{k_1 \sinh(k_1 a)}{k_1 \sinh(k_1 a) \cosh(k_2 b) + k_2 \sinh(k_2 b) \cosh(k_1 a)} \right) \quad (\text{A.47})$$

E usando (A.47) novamente em (A.38):

$$M_A = -\frac{F(t_1 + t_2)}{2} \left(\frac{k_2 \sinh(k_2 b)}{k_1 \sinh(k_1 a) \cosh(k_2 b) + k_2 \sinh(k_2 b) \cosh(k_1 a)} \right) \quad (\text{A.48})$$

Desta forma, o momento M_0 decorre diretamente das equações A.44 e A.47.

Finalmente, é preciso relacionar os deslocamentos transversais da chapa, expressos em termos de v_1 , com os deslocamentos transversais da chapa de união, expressos em termos de v_2 . Analisando a geometria da figura A.6, é possível perceber que, em relação à origem O_1 do sistema de coordenadas $O_1 x_1 y_1$, o deslocamento da origem O_2 do sistema de coordenadas $O_2 x_2 y_2$ é igual a Δ (valor a ser determinado).

Figura A.6 – Relação entre os sistemas de coordenadas.

Considerando o prendedor rígido e desprezando as variações de espessura das chapas, pode-se afirmar que, de forma aproximada, temos:

$$\delta_1 = \Delta + \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \cos \varphi_1 \cong \Delta + \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \quad (\text{A.49})$$

Utilizando os resultados encontrados anteriormente, teremos então (ver equações (A.18), (A.48) e (A.49)):

$$\Delta \cong -\frac{(t_1 + t_2)}{2} \left(1 + \frac{k_2 \sinh(k_2 b) [1 - \cosh(k_1 a)]}{k_1 \sinh(k_1 a) \cosh(k_2 b) + k_2 \sinh(k_2 b) \cosh(k_1 a)} \right) \quad (\text{A.50})$$

Ainda, com o objetivo de possibilitar uma melhor visualização dos deslocamentos na região de interface entre a chapa e a chapa de união, podemos determinar, de forma aproximada, as equações paramétricas das curvas que formam as superfícies superior e inferior de cada uma das chapas.

Assim, as coordenadas dos pontos que formam a curva associada à superfície da face superior da chapa são dadas pelos pares (x_{1s}, y_{1s}) , tais que:

$$x_{1s} = x_1 - \frac{t_1}{2} \sin \varphi_1 \cong x_1 - \frac{t_1}{2} \varphi_1 \cong x_1 - \frac{t_1}{2} v'_1(x_1) \quad (\text{A.51})$$

e

$$y_{1s} = v_1(x_1) + \frac{t_1}{2} \cos \varphi_1 \cong v_1(x_1) + \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - (v'_1(x_1))^2} \quad (\text{A.52})$$

Já as coordenadas dos pontos que formam a curva associada à superfície da face inferior da chapa são dadas pelos pares (x_{1i}, y_{1i}) , tais que:

$$x_{1i} \cong x_1 + \frac{t_1}{2} v'_1(x_1) \quad (\text{A.53})$$

e

$$y_{1i} = v_1(x_1) - \frac{t_1}{2} \cos \varphi_1 \cong v_1(x_1) - \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - [v'_1(x_1)]^2} \quad (\text{A.54})$$

Analogamente para a face superior da chapa de união temos os pares:

$$x_{2s} \cong x_2 - \frac{t_2}{2} v'_2(x_2) \quad (\text{A.55})$$

$$y_{2s} \cong v_2(x_2) + \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - (v'_2(x_2))^2} \quad (\text{A.56})$$

E para a face inferior da chapa de união, temos os pares:

$$x_{2i} \cong x_2 + \frac{t_2}{2} v'_2(x_2) \quad (\text{A.57})$$

$$y_{2i} \cong v_2(x_2) - \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - (v'_2(x_2))^2} \quad (\text{A.58})$$

O modelo analítico descrito neste Anexo foi implementado em uma planilha do MS Excel, utilizando as propriedades e dimensões da junta estreita. A distância a utilizada foi a distância da garra da máquina até a segunda fileira de prendedores ($a = 160,9$ mm), enquanto a distância b foi a distância entre o plano de simetria e a segunda fileira de prendedores da junta ($b = 30,15$ mm).

A figura A.7 mostra os deslocamentos sofridos pelos pontos dos eixos centrais da chapa e da chapa de união (dados pelas funções $v_1(x_1)$ e $v_2(x_2)$) bem como as curvas associadas às superfícies superior e inferior destas chapas, conforme equações (A.51) a (A.58), considerando uma força de tração $F = 10$ kN.

Figura A.7 – Deslocamentos transversais da chapa e da chapa de união na região próxima ao prendedor (considerando uma única fileira de prendedores) para $F = 10$ kN.

A figura A.8 mostra a variação dos deslocamentos transversais $\delta_1 = v_1(a)$ (deslocamento máximo na chapa) e $\delta_2 = v_2(b)$ (deslocamento máximo na chapa de união) em função da carga aplicada.

Finalmente a Figura A.9 mostra os deslocamentos transversais dos pontos que formam os eixos centrais da chapa e da chapa de união calculados analiticamente e pelo método dos elementos finitos (modelo JEES) para uma força de tração de 10 kN. Como é possível observar, os resultados são bastante próximos, mesmo considerando que o modelo analítico apresentou apenas uma fileira de prendedores. Isto motiva a utilização de modelos analíticos melhorados (considerando mais fileiras de prendedores) para a comparação com o modelo de elementos finitos.

Figura A.8 – Deslocamentos transversais δ_1 e δ_2 em função da carga aplicada

Figura A.9 – Deslocamentos transversais na chapa e na chapa de união comparados com os deslocamentos obtidos por elementos finitos (modelo JEES) para $F = 10$ kN.

B. CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS EM UMA JUNTA DE TOPO REBITADA COM DUAS FILEIRAS DE PRENDEDORES

Dando continuidade ao estudo iniciado no Anexo A, consideremos agora a junta de topo assimétrica formada pelas duas chapas de espessura t_1 unidas por meio da chapa de união de espessura t_2 e duas fileiras de prenedores, como indicado esquematicamente na figura B.1. Na figura também estão indicados os esforços solicitantes existentes nas extremidades A e B da junta, sendo F a intensidade da força de tração a qual a junta está submetida.

Figura B.1 – Junta rebitada com duas fileiras de prenedores

Como já visto no Anexo A, desconsiderando os esforços distribuídos ao longo do comprimento (como o peso próprio da junta) e levando em conta as condições de simetria, temos do equilíbrio de forças na direção vertical que:

$$V_A = V_B = 0 \quad (\text{B.1})$$

Conclui-se do exposto que não haverá força cortante no plano de simetria (já que temos novamente uma estrutura simétrica sob carregamento simétrico) e, portanto, considerando o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa à esquerda e porção superior dos rebites à esquerda” os únicos esforços solicitantes que existirão são os indicados na figura B.2. Note que, diferentemente do modelo utilizado no Anexo A, neste caso podemos ter também a existência de forças verticais na região dos rebites (forças V_1 e V_2) que representam as forças normais internas atuantes nas seções transversais dos prenedores. Os deslocamentos transversais dos pontos do eixo central da chapa, nas coordenadas $x_1 = a$ e $x_1 = a + b$, ambos medidos em relação ao sistema de coordenadas $O_1x_1y_1$, são denominados respectivamente por δ_1 e δ_2 .

Figura B.2 – Diagrama de corpo livre da chapa na configuração deformada

A figura B.3 mostra o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa de união e porção inferior dos rebites à esquerda”, onde apenas metade da chapa de união está sendo representada (uso da simetria). Pelo princípio da ação e reação, os mesmos esforços indicados na figura B.2 comparecem também na figura B.3, porém com sentidos opostos. Note também que pode haver um momento fletor, de intensidade M_C , atuando no plano de simetria da junta. Os deslocamentos transversais dos pontos do eixo central da chapa de união, nas coordenadas $x_2 = b$ e $x_2 = b + c$, ambos medidos em relação ao sistema de coordenadas $O_2x_2y_2$, são denominados respectivamente por δ_4 e δ_5 .

Figura B.3 – Diagrama de corpo livre da chapa de união na configuração deformada

Impondo inicialmente o equilíbrio de forças horizontais e verticais para a chapa (ver figura B.2), teremos (já considerando o resultado encontrado pela equação B.1):

$$F = F_1 + F_2 \quad (\text{B.2})$$

e

$$V_1 + V_2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

O equilíbrio de momentos na chapa é dado por:

$$M_A + \left(M_1 + \frac{F_1 t_1}{2}\right) + \left(M_2 + \frac{F_2 t_1}{2}\right) - F_1 \delta_1 - F_2 \delta_2 - V_1 a - V_2 (a + b) = 0 \quad (\text{B.4})$$

E na chapa de união:

$$-M_C + \left(\frac{F_2 t_2}{2} - M_2\right) + \left(\frac{F_1 t_2}{2} - M_1\right) + F_2 \delta_4 - F \delta_5 + V_2 b = 0 \quad (\text{B.5})$$

Equação da linha elástica da chapa no intervalo $0 \leq x_1 \leq a$:

$$EI_1 v''_{11}(x_1) = -M_A + F v_{11}(x_1) + V_A x_1 \quad (\text{B.6})$$

ou

$$v''_{11}(x_1) - \frac{F}{EI_1} v_{11}(x_1) = \frac{-M_A + V_A x_1}{EI_1} \quad (\text{B.7})$$

Chamando:

$$K_1^2 = \frac{F}{EI_1} \quad (\text{B.8})$$

A solução da equação diferencial B.7 fica:

$$v_{11}(x_1) = A_1 e^{K_1 x_1} + A_2 e^{-K_1 x_1} + \frac{M_A - V_A x_1}{F} \quad (\text{B.9})$$

As condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_{11}(x_1 = 0) = 0 \\ v'_{11}(x_1 = 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{cases} v_{11}(x_1 = 0) = 0 \\ v'_{11}(x_1 = 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Equação da linha elástica da chapa no intervalo $a \leq x_1 \leq a + b$:

$$EI_1 v''_{12}(x_1) = -M_A - \left(M_1 + \frac{F_1 t_1}{2}\right) + F v_{12}(x_1) - F_1 [v_{12}(x_1) - \delta_1] - V_1(x_1 - a) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Ou ainda:

$$v''_{12}(x_1) - \frac{(F - F_1)}{EI_1} v_{12}(x_1) = - \left[M_A + M_1 + F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1 \right) + V_1(x_1 - a) \right] \frac{1}{EI_1} \quad (\text{B.13})$$

Designando:

$$K_2^2 = \frac{F - F_1}{EI_1} \quad (\text{B.14})$$

A solução da equação diferencial B.13 é:

$$v_{12}(x_1) = B_1 e^{K_2 x_1} + B_2 e^{-K_2 x_1} + \left[M_A + M_1 + F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1 \right) + V_1 (x_1 - a) \right] \frac{1}{(F - F_1)} \quad (\text{B.15})$$

As condições de continuidade devem garantir que:

$$\begin{cases} v_{11}(x_1 = a) = v_{12}(x_1 = a) \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{cases} v'_{11}(x_1 = a) = v'_{12}(x_1 = a) \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Equação da linha elástica da chapa de união no intervalo $b \leq x_2 \leq b + c$:

$$EI_2 v''_{22}(x_2) = F[v_{22}(x_2) - \delta_5] - M_C \quad (\text{B.18})$$

ou

$$v''_{22}(x_2) - \frac{F}{EI_2} v_{22}(x_2) = \frac{-F\delta_5 - M_C}{EI_2} \quad (\text{B.19})$$

Designando:

$$K_3^2 = \frac{F}{EI_2} \quad (\text{B.20})$$

A solução da equação diferencial (B.19) fica:

$$v_{22}(x_2) = C_1 e^{K_3 x_2} + C_2 e^{-K_3 x_2} + \delta_5 + \frac{M_C}{F} \quad (\text{B.21})$$

- Condições de contorno:

$$\begin{cases} v'_{22}(x_2 = b + c) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{cases} v_{22}(x_2 = b + c) = \delta_5 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Equação da linha elástica da chapa de união no intervalo $0 \leq x_2 \leq b$:

$$EI_2 v''_{21}(x_2) = F_1 v_{21}(x_2) + V_1 x_2 - \left(\frac{F_1 t_2}{2} - M_1 \right) \quad (\text{B.24})$$

ou

$$v''_{21}(x_2) - \frac{F_1}{EI_2} v_{21}(x_2) = \frac{1}{EI_2} \left[V_1 x_2 - \left(\frac{F_1 t_2}{2} - M_1 \right) \right] \quad (\text{B.25})$$

Designando:

$$K_4^2 = \frac{F_1}{EI_2} \quad (\text{B.26})$$

A solução da equação diferencial B.25 fica:

$$v_{21}(x_2) = D_1 e^{K_4 x_2} + D_2 e^{-K_4 x_2} + \left[\left(\frac{F_1 t_2}{2} - M_1 \right) - V_1 x_2 \right] \frac{1}{F_1} \quad (\text{B.27})$$

- Condições de contorno:

$$\begin{cases} v_{21}(x_2 = 0) = \delta_3 = 0 \\ v_{21}(x_2 = b) = \delta_4 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

$$(\text{B.29})$$

A figura B.4 relaciona os sistemas de coordenadas utilizados em função do parâmetro Δ (distância entre eixos horizontais), e apresenta os ângulos de rotação β_1 e β_2 .

Figura B.4 – Relação entre sistemas de coordenadas e ângulos de rotação

Dessa forma, podemos escrever (de forma simplificada):

$$\delta_1 - |\Delta| \cong \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{B.30})$$

Analogamente para o segundo prendedor:

$$\delta_2 - (\delta_4 + |\Delta|) \cong \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{B.31})$$

Como deve haver compatibilidade de deslocamentos e de rotações ao longo da chapa de união temos que:

$$v_{21}(b) = v_{22}(b) \quad (\text{B.32})$$

e

$$v'_{21}(b) = v'_{22}(b) \quad (\text{B.33})$$

E, considerando o prendedor rígido:

$$v'_{11}(a) = v'_{21}(0) \quad (\text{B.34})$$

$$v'_{12}(a+b) = v'_{21}(b) \quad (\text{B.35})$$

Temos ainda duas equações que fornecem os deslocamentos dos pontos do eixo central da chapa nas coordenadas $x_1 = a$ e $x_1 = a + b$:

$$v_{11}(a) = \delta_1 \quad (\text{B.36})$$

$$v_{12}(a+b) = \delta_2 \quad (\text{B.37})$$

Por fim, devido à compatibilidade de deslocamentos na direção x , tal como indica a figura B.5:

Figura B.5 – Compatibilidade de deslocamentos em x .

$$L_1 + \Delta_1 + \delta_b = L_2 + \Delta_2 + \delta_a \quad (\text{B.38})$$

Se o prendedor é rígido, $\delta_a = \delta_b = 0$, e como $L_1 = L_2$, fica:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad (\text{B.39})$$

Ou seja:

$$\frac{(F - F_1)L_1}{E(t_1b)} = \frac{F_1L_2}{E(t_2b)} \Leftrightarrow \frac{(F - F_1)}{t_1} = \frac{F_1}{t_2} \quad (\text{B.40})$$

Logo, resultam diretamente de (B40) e (B.2):

$$F_1 = \frac{F t_2}{(t_1 + t_2)} \quad (\text{B.41})$$

E

$$F_2 = \frac{F t_1}{(t_1 + t_2)} \quad (\text{B.42})$$

Com os valores de F_1 e F_2 dados acima, é possível resolver facilmente o sistema linear formado pelas equações B.3, B.4, B.5, B.30, B.31, B.32, B.33, B.34, B.35, B.36 e B.37 para a determinação das onze incógnitas do problema, a saber:

$$V_1, M_1, V_2, M_2, M_A, M_C, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_5 \text{ e } \Delta.$$

Deve-se observar que as condições de contorno ou de compatibilidade de deslocamentos dadas por B.10, B.11, B.16, B.17, B.22, B.23, B.28 e B.29 são utilizadas para determinar as oito constantes de integração das quatro funções que fornecem os deslocamentos transversais dos pontos dos eixos centrais da chapa e da chapa de união.

O modelo analítico para junta com duas fileiras de prendedores também foi implementado em uma planilha do MS Excel, utilizando as propriedades e dimensões da junta estreita. O valor do parâmetro a utilizado foi a distância da garra da máquina até a primeira fileira de prendedores ($a = 142,9 \text{ mm}$), o valor do parâmetro b foi a distância entre a primeira e a terceira fileira de prendedores ($b = 36 \text{ mm}$), enquanto o valor do parâmetro c foi a distância entre o plano de simetria e a terceira fileira de prendedores ($c = 12,15 \text{ mm}$). A força de tração considerada foi de 10 kN.

A figura B.6 mostra uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico aqui desenvolvido e os resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos usando o modelo JEES (junta estreita com elementos sólidos). Como é possível observar a aderência parece ser bastante satisfatória.

Figura B.6 – Comparação entre modelo analítico e modelo numérico JEES

C. CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS EM UMA JUNTA DE TOPO REBITADA COM TRÊS FILEIRAS DE PRENDEDORES

Seguindo o que foi exposto no Anexo B, avaliaremos agora uma junta de topo assimétrica formada pelas duas chapas de espessura t_1 unidas por meio da chapa de união de espessura t_2 e três fileiras de prendedores, tal como é mostrado esquematicamente na figura C.1. Na figura também são apresentados os esforços solicitantes nas extremidades da junta, sendo F a intensidade da força de tração a qual a junta está sujeita.

Figura C.1 – Junta de topo rebitada com três fileiras de prenedores.

Novamente, tal como explicado nos anexos A e B, são desconsiderados os esforços distribuídos ao longo do comprimento (como o peso próprio da junta) e as forças verticais nas extremidades são consideradas nulas, ou seja:

$$V_A = V_B = 0 \quad (\text{C.1})$$

Dessa forma, pode ser concluído que não haverá força cortante no plano de simetria (já que temos novamente uma estrutura simétrica sob carregamento simétrico) e, portanto, considerando o diagrama de corpo livre do conjunto “chapa à esquerda e porção superior dos rebites à esquerda” os únicos esforços solicitantes que existirão são os indicados na figura C.2.

Figura C.2 – Diagrama de corpo livre da chapa na configuração deformada.

O conjunto “chapa de união e porção inferior dos rebites à esquerda” é mostrado na figura C.3, utilizando a condição de simetria, onde é possível observar os mesmos esforços presentes na figura C.2 com sentidos opostos e um momento M_c no plano de simetria da junta. Nota-se ainda que os deslocamentos transversais $\delta_4 = 0$, δ_5 , δ_6 e δ_7 são medidos em relação ao sistema de coordenadas $O_2x_2y_2$.

Figura C.3 – Diagrama de corpo livre da chapa de união na configuração deformada.

Impondo o equilíbrio de forças horizontais e verticais, e considerando a equação (C.1):

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \quad (\text{C.2})$$

e

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \quad (\text{C.3})$$

O equilíbrio de momentos na chapa fornece:

$$M_A + \left(M_1 + \frac{F_1 t_1}{2}\right) + \left(M_2 + \frac{F_2 t_1}{2}\right) + \left(M_3 + \frac{F_3 t_1}{2}\right) - F_1 \delta_1 - F_2 \delta_2 - F_3 \delta_3 - V_1 a - V_2(a + b) - V_3(a + 2b) = 0 \quad (\text{C.4})$$

E na chapa de união:

$$-M_c + \left(\frac{F_3 t_2}{2} - M_3\right) + \left(\frac{F_2 t_2}{2} - M_2\right) + \left(\frac{F_1 t_2}{2} - M_1\right) + F_3 \delta_6 + F_2 \delta_5 - F \delta_7 + 2V_3 b + V_2 b = 0 \quad (\text{C.5})$$

Equação da linha elástica da chapa no intervalo $0 \leq x_1 \leq a$:

$$EI_1 v''_{11}(x_1) = -M_A + F v_{11}(x_1) \quad (\text{C.6})$$

Ou:

$$v''_{11}(x_1) - \frac{F}{EI_1} v_{11}(x_1) = -\frac{M_A}{EI_1} \quad (\text{C.7})$$

Chamando:

$$K_1^2 = \frac{F}{EI_1} \quad (\text{C.8})$$

A solução da equação C.7 fica:

$$v_{11} = A_1 e^{K_1 x_1} + A_2 e^{-K_1 x_1} + \frac{M_A}{F} \quad (\text{C.9})$$

As condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_{11}(x_1 = 0) = 0 \\ v'_{11}(x_1 = 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{C.10}) \\ (\text{C.11}) \end{matrix}$$

Equação da linha elástica da chapa no intervalo $a \leq x_1 \leq a + b$:

$$EI_1 v''_{12}(x_1) = -M_A - \left(M_1 + \frac{F_1 t_1}{2} \right) + F v_{12}(x_1) - F_1 [v_{12}(x_1) - \delta_1] - V_1 (x_1 - a) \quad (\text{C.12})$$

Ou ainda:

$$v''_{12}(x_1) - \frac{(F - F_1)}{EI_1} v_{12}(x_1) = \frac{\left[-M_A - M_1 - F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1 \right) - V_1 (x_1 - a) \right]}{EI_1} \quad (\text{C.13})$$

Chamando:

$$K_2^2 = \frac{F - F_1}{EI_1} \quad (\text{C.14})$$

A solução da equação C.13 é dada por:

$$v_{12}(x_1) = B_1 e^{K_2 x_1} + B_2 e^{-K_2 x_1} + \frac{\left[M_A + M_1 + F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1 \right) + V_1 (x_1 - a) \right]}{F - F_1} \quad (\text{C.15})$$

E as condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_{11}|_{x_1=a} = v_{12}|_{x_1=a} \\ v'_{11}|_{x_1=a} = v'_{12}|_{x_1=a} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{C.16}) \\ (\text{C.17}) \end{matrix}$$

Equação da linha elástica da chapa no intervalo $a + b \leq x_1 \leq a + 2b$

$$EI_1 v''_{13}(x_1) = -M_A - \left(M_1 + \frac{F_1 t_1}{2}\right) - \left(M_2 + \frac{F_2 t_1}{2}\right) + F v_{13} - F_1(v_{13} - \delta_1) - F_2(v_{13} - \delta_2) - V_1(x_1 - a) - V_2(x_1 - a - b) \quad (\text{C.18})$$

Ou:

$$v''_{13}(x_1) - \frac{(F - F_1 - F_2)}{EI_1} v_{13}(x_1) = [-M_A - M_1 - M_2 - F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1\right) - F_2 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_2\right) - V_1(x_1 - a) - V_2(x_1 - a - b)] \frac{1}{EI_1} \quad (\text{C.19})$$

Designando:

$$K_3^2 = \frac{F - F_1 - F_2}{EI_1} \quad (\text{C.20})$$

A solução da equação C.19 é dada por:

$$v_{13}(x_1) = C_1 e^{K_3 x_1} + C_2 e^{-K_3 x_1} + [M_A + M_1 + M_2 + F_1 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_1\right) + F_2 \left(\frac{t_1}{2} - \delta_2\right) + V_1(x_1 - a) + V_2(x_1 - a - b)] \frac{1}{F - F_1 - F_2} \quad (\text{C.21})$$

E as condições de contorno devem garantir que:

$$\begin{cases} v_{13}|_{x_1=a+b} = v_{12}|_{x_1=a+b} \\ v'_{13}|_{x_1=a+b} = v'_{12}|_{x_1=a+b} \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

$$(\text{C.23})$$

Equação da linha elástica da chapa de união no intervalo $2b \leq x_2 \leq 2b + c$:

$$EI_2 v''_{23}(x_2) = F[v_{23}(x_2) - \delta_7] - M_C \quad (\text{C.24})$$

Ou:

$$v''_{23}(x_2) - \frac{F}{EI_2} v_{23}(x_2) = -\frac{F\delta_7 + M_C}{EI_2} \quad (\text{C.25})$$

Designando:

$$K_4^2 = \frac{F}{EI_2} \quad (\text{C.26})$$

A solução da equação C.25 fica:

$$v_{23} = D_1 e^{K_4 x_2} + D_2 e^{-K_4 x_2} + \delta_7 + \frac{M_C}{F} \quad (\text{C.27})$$

E as condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_{23}(x_2 = 2b + c) = \delta_7 \\ v'_{23}(x_2 = 2b + c) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

$$v'_{23}(x_2 = 2b + c) = 0 \quad (\text{C.29})$$

Equação da linha elástica da chapa de união no intervalo $b \leq x_2 \leq 2b$:

$$EI_2 v''_{22}(x_2) = -M_C - M_3 + \frac{F_3 t_2}{2} - F[\delta_7 - v_{22}(x_2)] + F_3[\delta_6 - v_{22}(x_2)] + V_3(2b - x_2) \quad (\text{C.30})$$

Ou:

$$v''_{22}(x_1) - \frac{F - F_3}{EI_2} v_{22}(x_2) = \frac{[-M_C - M_3 + F_3 \left(\frac{t_2}{2} + \delta_6\right) - F\delta_7 + V_3(2b - x_2)]}{EI_2} \quad (\text{C.31})$$

Chamando:

$$K_5^2 = \frac{F - F_3}{EI_2} \quad (\text{C.32})$$

A solução da equação C.31 é dada por:

$$v_{22}(x_2) = E_1 e^{K_5 x_2} + E_2 e^{-K_5 x_2} + \frac{[M_C + M_3 - F_3 \left(\frac{t_2}{2} + \delta_6\right) + F\delta_7 - V_3(2b - x_2)]}{F - F_3} \quad (\text{C.33})$$

E as condições de contorno devem garantir que:

$$\begin{cases} v_{22}|_{x_2=2b} = v_{23}|_{x_2=2b} \\ v'_{22}|_{x_2=2b} = v'_{23}|_{x_2=2b} \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

$$v'_{22}|_{x_2=2b} = v'_{23}|_{x_2=2b} \quad (\text{C.35})$$

Equação da linha elástica da chapa de união no intervalo $0 \leq x_2 \leq b$:

$$EI_2 v_{21}''(x_2) = M_1 - \frac{F_1 t_2}{2} + F_1 v_{21}(x_2) + V_1 x_2 \quad (\text{C.36})$$

ou

$$v_{21}''(x_2) - \frac{F_1}{EI_2} v_{21}(x_2) = \left[M_1 - \frac{F_1 t_2}{2} + V_1 x_2 \right] \frac{1}{EI_2} \quad (\text{C.37})$$

Designando

$$K_6^2 = \frac{F_1}{EI_2} \quad (\text{C.38})$$

A solução da equação C.37 é dada por:

$$v_{21}(x_2) = G_1 e^{K_6 x_2} + G_2 e^{-K_6 x_2} + \left[-M_1 + \frac{F_1 t_2}{2} - V_1 x_2 \right] \frac{1}{F_1} \quad (\text{C.39})$$

E as condições de contorno são:

$$\begin{cases} v_{22}|_{x_2=b} = v_{21}|_{x_2=b} \\ v_{22}'|_{x_2=b} = v_{21}'|_{x_2=b} \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

$$(\text{C.41})$$

A figura C.4 relaciona os sistemas de coordenadas utilizados em função do parâmetro Δ (distância entre eixos horizontais) e dos deslocamentos δ_i indicados.

Figura C.4 – Relação entre sistemas de coordenadas.

Dessa forma, podemos escrever, de forma simplificada:

$$\delta_1 - |\Delta| \cong \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{C.42})$$

Analogamente para o segundo e terceiro prendedor, respectivamente:

$$\delta_2 - (\delta_5 + |\Delta|) = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{C.43})$$

e

$$\delta_3 - (\delta_6 + |\Delta|) = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (\text{C.44})$$

Devido à compatibilidade de deslocamentos na direção x, conforme a figura C.5, e procedendo de forma análoga ao que foi feito no Anexo B, temos:

Figura C.5 – Transmissão de carga pelos prendedores

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad (\text{C.45})$$

$$\frac{(F - F_1)l_1}{E(bt_1)} = \frac{F_1 l_2}{E(bt_2)} \quad (\text{C.46})$$

$$F_1 = \frac{F t_2}{t_1 + t_2} \quad (\text{C.47})$$

Com mesmo raciocínio para a zona entre o segundo e o terceiro prendedor:

$$F_3 = \frac{(F_1 + F_2)t_1}{t_2} \quad (\text{C.48})$$

Destarte, é possível determinar as forças F_2 e F_3 com as equações C.2, C.47 e C.48, obtendo-se, finalmente:

$$F_2 = 0 \quad (\text{C.49})$$

e

$$F_3 = \frac{F t_1}{t_1 + t_2} \quad (\text{C.50})$$

Definindo o deslocamento das chapas em alguns pontos vem:

$$\delta_1 = v_{11}|_{x_1=a} \quad (\text{C.51})$$

$$\delta_2 = v_{12}|_{x_1=a+b} \quad (\text{C.52})$$

$$\delta_3 = v_{13}|_{x_1=a+2b} \quad (\text{C.53})$$

$$\delta_4 = v_{21}|_{x_2=0} = 0 \quad (\text{C.54})$$

$$\delta_5 = v_{21}|_{x_2=b} \quad (\text{C.55})$$

$$\delta_6 = v_{22}|_{x_2=2b} \quad (\text{C.56})$$

E considerando os prendedores rígidos, temos que:

$$v'_{11}|_{x_1=a} = v'_{21}|_{x_2=0} \quad (\text{C.57})$$

$$v'_{12}|_{x_1=a+b} = v'_{22}|_{x_2=b} \quad (\text{C.58})$$

$$v'_{13}|_{x_1=a+2b} = v'_{23}|_{x_2=2b} \quad (\text{C.59})$$

Com a solução do sistema linear formado pelas equações C.3, C.4, C.5, C.42, C.43, C.44, e C.51 a C.59, é possível determinar as quinze incógnitas do problema, que são:

$$V_1, M_1, V_2, M_2, V_3, M_3, M_A, M_C, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_5, \delta_6, \delta_7 \text{ e } |\Delta|$$

O modelo analítico para junta com três fileiras de prendedores também foi implementado em uma planilha do MS Excel, utilizando as propriedades e dimensões da junta estreita. O valor do parâmetro a utilizado foi a distância da garra da máquina até a primeira fileira de prendedores ($a = 142,9$ mm), o valor do parâmetro b foi a distância entre a primeira e a terceira fileira de prendedores ($b = 36$ mm), enquanto o valor do parâmetro c foi a distância entre o plano de simetria e a terceira fileira de prendedores ($c = 12,15$ mm). A força de tração considerada foi de 5 kN. Os resultados são mostrados na figura C.6, onde os resultados do modelo

analítico são comparados com os resultados do modelo de elementos finitos JEES (junta estreita com elementos sólidos), mostrando uma aderência também satisfatória.

Figura C.6 – Comparação entre modelo analítico e numérico (modelo JEES)

Ao aplicar o modelo analítico descrito para os corpos de prova largos, é possível calcular o fator K_{ch} conforme as equações C.60 a C.62 e K_{chu} , conforme as equações C.63 a C.65, onde A_{ch} é a área da seção transversal da chapa, E é o módulo de elasticidade do material da chapa e A_{chu} é a área da seção transversal da chapa de união.

$$K_{ch} = \frac{\varepsilon_{b_{ch}}}{\varepsilon_{a_{ch}}} \quad (C.60)$$

$$\varepsilon_{a_{ch}} = \frac{F}{A_{ch}E} \quad (C.61)$$

$$\varepsilon_{b_{ch}} = v''_{11}(x_1 = 115,8) \frac{t_1}{2} \quad (C.62)$$

$$K_{chu} = \frac{\varepsilon_{b_{chu}}}{\varepsilon_{a_{chu}}} \quad (C.63)$$

$$\varepsilon_{a_{chu}} = \frac{F}{A_{chu}E} \quad (C.64)$$

$$\varepsilon_{b_{chu}} = v_{23}''(x_2 = 48,15) \frac{t_2}{2} \quad (\text{C.65})$$

Os resultados encontrados são mostrados nas figuras C.7 e C.8, juntamente com os resultados obtidos nos ensaios experimentais por meio dos extensômetros (apresentados nas figuras 5.11 e 5.13). Observa-se uma razoável aderência entre as curvas experimentais e analíticas, sobretudo para cargas superiores a 15 kN, tanto para K_{ch} quanto para K_{chu} .

Figura C.7 – Comparação entre K_{ch} calculado analiticamente e obtidos experimentalmente.

Figura C.8 – Comparação entre K_{chu} calculado analiticamente e obtidos experimentalmente.