Flamínio Alves Fávero Maranhão

Estudo Comparativo entre Modelos na Análise Local de Tubos Flexíveis

São Paulo – SP

Junho / 2011

Flamínio Alves Fávero Maranhão

Estudo Comparativo entre Modelos na Análise Local de Tubos Flexíveis

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo – SP

Junho / 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Maranhão, Flamínio Alves Fávero
Estudo comparativo entre modelos analíticos, numéricos e resultados experimentais na análise local de tubos flexíveis / F.A.F. Maranhão. -- São Paulo, 2011.
154 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Tubos flexíveis 2.Análise estrutural 3.Atrito 4.Método dos elementos finitos 5.Modelos analíticos 6.Mecânica offshore I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Flamínio Alves Fávero Maranhão

Estudo Comparativo entre Modelos na Análise Local de Tubos Flexíveis

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Roberto Ramos Junior

São Paulo – SP

Junho / 2011

Agradecimentos

A Deus;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Ramos Junior, pela sua dedicação, pela sua atenção cuidadosa e pela sua maestria nos conselhos fornecidos;

À minha esposa, Viviane, por ter me apoiado e incentivado nesta empreitada;

À CAPES e ao CNPq, pelo fomento fornecido para este trabalho;

Ao Prof. Dr. Guenther Carlos Krieger Filho, por gentilmente conceder os recursos computacionais necessários para o estudo;

À Escola Politécnica da USP e ao CCE, por concederem as licenças de uso dos programas utilizados nesta dissertação.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre resultados obtidos através de um modelo analítico-numérico, um modelo em elementos finitos e resultados experimentais na análise estrutural local de tubos flexíveis utilizados na explotação de petróleo. Em particular, o modelo em elementos finitos proposto considera efeitos de não-linearidade decorrentes do contato e das forças de atrito entre as camadas concêntricas do tubo, de forma a reproduzir curvas de histerese típicas obtidas em ensaios em escala real. Tais curvas não podem ser obtidas pelos modelos simplificados tradicionais, de maneira que sua obtenção por modelos em elementos finitos traz novas informações sobre o comportamento estrutural dos dutos

Tomando como base e elemento motivacional os resultados de ensaios experimentais de um tubo flexível de 2,5", realizados no Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo, são estudados um modelo analítico e um modelo em elementos finitos, ambos representando o tubo ensaiado experimentalmente, de maneira a apontar, de forma qualitativa e quantitativa, quais são os pontos fortes e fracos de cada abordagem. O modelo analítico-numérico simplificado, obtido de um campo de deslocamentos compatível com os carregamentos axissimétricos aplicados e de um conjunto de equações que envolvem equilíbrio de forças e equações constitutivas lineares, é capaz de fornecer rapidamente valores aproximados para a rigidez axial do conjunto, bem como uma estimativa das tensões médias atuantes em cada uma das camadas que compõem o tubo flexível, considerando ainda a possibilidade de afastamento entre as camadas. O modelo em elementos finitos é composto somente por elementos sólidos e considera a presença de atrito entre as camadas. As simulações não lineares, executadas pelo MSC.Marc, permitiram recuperar as curvas de histerese para os vários casos estudados, bem como a distribuição de tensões ao longo do comprimento e da seção transversal dos tendões.

Abstract

This work presents a comparative study among an analytical-numerical model, a finite element model and experimental results related to the local structural analysis of flexible risers used in oil exploitation. In particular, the proposed finite element model considers nonlinearity effects caused by the contact and frictional forces between the concentric layers of the riser so that typical hysteresis curves obtained in full scale experiments could be reproduced. These curves can not be obtained by traditional simplified models, so that their reproduction by finite element models brings new information about the local structural behavior of risers.

Based on and motivated by the results of experiments of a 2.5” flexible riser carried out at IPT, the São Paulo Technogical Research Institut, an analytical model and a finite element model are proposed , both of them representing the flexible riser tested experimentally, in order to point out, in a qualitative and quantitative way, the strengths and weaknesses of each approach. The simplified analytical-numerical model, obtained from a displacement field, consistent with the axisymmetric loads applied to the pipe, and from a set of equations involving equilibrium and linear constitutive equations, is able to quickly provide approximate values for the riser equivalent axial stiffness, as well as estimates for the average stresses acting in each of the layers that make up the flexible riser. Besides, the possibility of gap formation between the layers is also considered. The finite element model is composed entirely of solid elements and considers the presence of friction between the layers. The nonlinear simulations, using the MSC.Marc finite element package, allowed the reproduction of hysteresis curves for the several studied cases, as well as the stresses distribution along the length and cross section of the armour layers.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de siglas

CCE - Centro de computação e eletrônica da Universidade de São Paulo

IPT - Instituto de pesquisas tecnológicas

MEF - Método dos Elementos Finitos

USP - Universidade de São Paulo

Lista de símbolos

Alfabeto romano

A: Área;

A_t: Área da seção transversal de uma barra prismática;

b: Largura de um tendão;

E: Módulo de elasticidade de um material;

F_t: Força de tração;

G: Módulo de cisalhamento de um material;

J: Momento de inércia;

L: Comprimento de um segmento de tubo flexível ou de uma de suas camadas;

M_t: Momento torçor;

N: Número de camadas em um tubo flexível;

n: Número de tendões em uma camada;

p_{int}: pressão interna;

p_{ext}: pressão externa;

p_m: pressão média em uma camada;

R: Raio médio de uma camada;

R_i, R_{int}: Raio interno;

R_e, R_{ext}: Raio externo;

t: Espessura de uma camada;

Alfabeto grego

α: Ângulo de assentamento de um tendão;

χ: Curvatura de uma barra;

ΔL: Variação no comprimento de um segmento de tubo;

ΔR: Variação do raio médio;

ΔR_i: Variação do raio interno;

ΔR_e: Variação do raio externo;

Δp: Variação da pressão;

Δt: Variação da espessura;

$\Delta \phi$: Variação do ângulo de torção;

ε_i: Deformação na direção i;

ϕ: Ângulo de torção;

γ_{ij}: Deformação atuante no plano ij;

λ: Constante elástica de um material;

μ: Coeficiente de atrito;

ν: Coeficiente de Poisson de um material;

σ_i: Tensão normal na direção i;

τ: Tortuosidade de uma barra;

τ_{ij}: Tensão de cisalhamento atuante no plano ij;

Sumário

1 Introdução

Tubos flexíveis, também chamados de risers flexíveis, são utilizados em grande escala na indústria petrolífera em aplicações de extração de petróleo em águas profundas, em particular no Brasil. Tais tubos são utilizados, basicamente, para o transporte de óleo e gás extraídos de perfurações submarinas, geralmente sob alta pressão, até alguma unidade flutuante, onde o produto extraído é armazenado e/ou processado. A figura 1.1 ilustra um exemplo de sistema flutuante de produção que utiliza tubos flexíveis em sua operação.

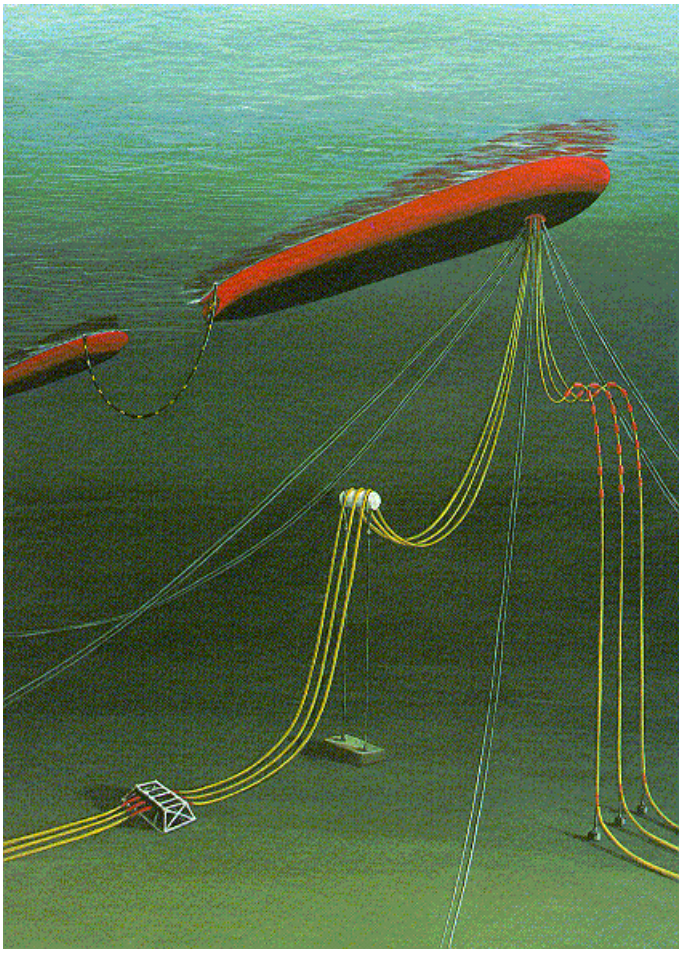

Figura 1.1: Linhas flexíveis em um sistema flutuante.

Dada a natureza de sua utilização, estes tubos estão constantemente submetidos aos mais variados esforços, entre os quais pode-se citar: pressão interna do material transportado, pressão externa causada pela pressão hidrostática da água do mar, esforços de tração (ou compressão), torção e flexão, devido à movimentação da unidade flutuante ou pelas correntezas oceânicas e pelo peso próprio. Além destes esforços, existem outros efeitos, tais como corrosão, vibração induzida por vórtices, etc.

Para resistir à esta natureza variada de esforços, estes tubos flexíveis são formados por diversas camadas tubulares de reforço e de proteção, dispostas concentricamente, cada uma com uma função específica. As figuras 1.2 e 1.5 mostram alguns detalhes de um riser típico. Os tubos flexíveis podem ser classificados em aderentes ("bonded"), onde as camadas que o constituem são, de alguma forma, unidas entre si, formando um bloco único, ou não aderentes ("unbonded"), onde as camadas são independentes e podem deslizar entre si.

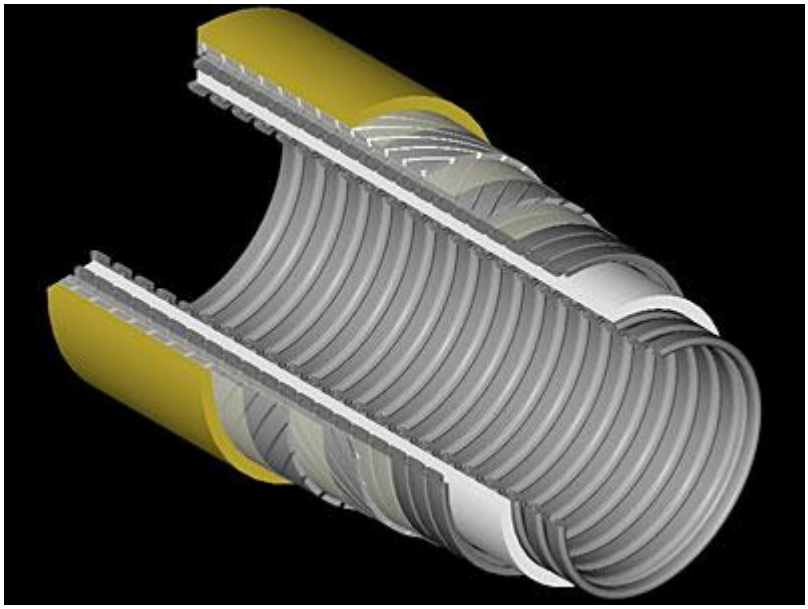

Figura 1.2: Estrutura interna de um tubo flexível não aderente típico.

A camada mais interna de um riser típico é a carcaça intertravada, que tem por objetivo principal evitar o colapso do duto devido à pressão externa, seja pela pressão hidrostática da água, ou pela pressão de esmagamento ("squeezing") causada pelas armaduras internas e externas. A carcaça é formada por uma tira de aço de perfil em "S", enrolada helicoidalmente com um ângulo de assentamento alto, de maneira que o perfil se trave nele mesmo (daí o nome "intertravado"). A figura 1.3 mostra um exemplo de um perfil de uma carcaça intertravada. Esta camada é fundamentalmente estrutural, não provendo a estanqueidade necessária para os fluidos de trabalho que passam em seu interior.

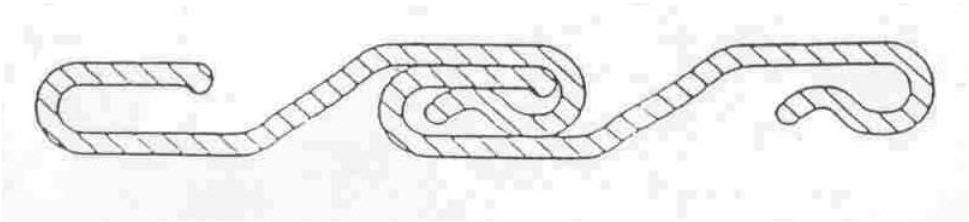

Figura 1.3: Exemplo de uma carcaça intertravada (Wellstream).

Envolvendo a carcaça intertravada, existe uma camada plástica interna, a qual é basicamente uma camada de proteção. Tal camada provê estanqueidade ao fluido de trabalho e permite uma distribuição de pressão mais uniforme sobre a carcaça intertravada. Em geral, esta camada plástica é fabricada a partir de um material termoplástico extrudado sobre a carcaça.

Em tubos que irão trabalhar sob alta pressão interna é utilizada ainda uma camada circunferencial de pressão, também chamada de barreira de pressão ou camada "zeta", de maneira a dar suporte estrutural à camada plástica. Para tubos que irão trabalhar sob baixa pressão, tal função pode ser exercida eficientemente pelas armaduras de tração, e neste caso não há a necessidade de se introduzir a barreira de pressão no tubo. Em geral, esta camada é fabricada em aço de baixo carbono, e pode apresentar perfis variados, de acordo com sua aplicação. Alguns exemplos de perfis estão mostrados na figura 1.4.

Por cima destas camadas vêm as armaduras de tração. Uma armadura de tração é formada por um conjunto de fios metálicos, também chamados de tendões, dispostos de forma helicoidal e enrolados em conjunto. Os tubos flexíveis possuem, na sua maioria, duas armaduras de tração, uma interna e uma externa, enroladas em sentidos opostos. Este conjunto confere grande resistência mecânica ao tubo, especialmente à tração e torção, sendo responsável pela maior parte da resistência estrutural do conjunto. Dada a sua importância estrutural e sua complexidade construtiva, esta camada tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores. Os tendões em geral são fabricados em aço de alto carbono ou baixo carbono e podem apresentar diversos perfis transversais, em sua grande maioria retangulares.

Eventualmente existem ainda, envolvendo a armadura externa, uma camada de fios de kevlar, com o propósito de evitar problemas de instabilidade das armaduras sob compressão (efeito conhecido como "gaiola de passarinho", ou "birdcaging"), e algumas camadas anti-atrito, colocadas entre camadas helicoidais adjacentes, formada por fitas de pequena espessura, que por não oferecerem nenhuma contribuição estrutural são geralmente desprezadas nos modelos de cálculo.

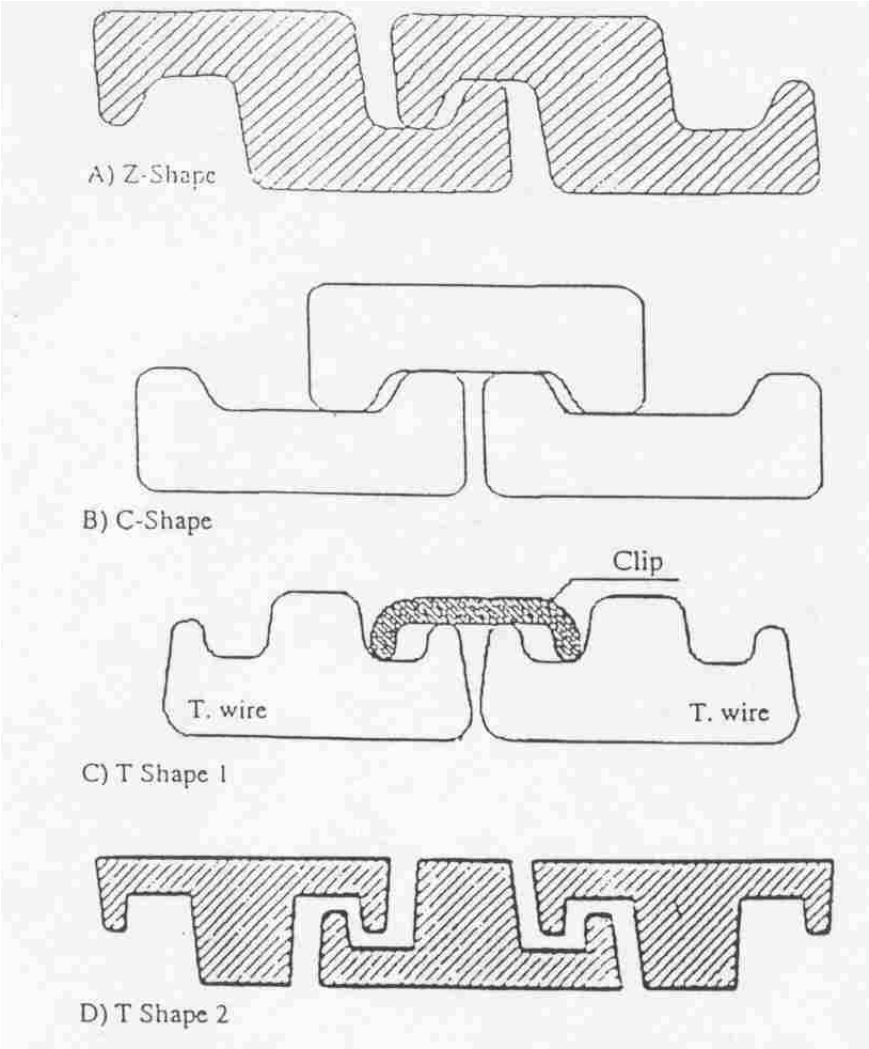

Figura 1.4: Exemplo de perfis da barreira de pressão

Finalmente, envolvendo todas as camadas anteriores, vem a camada plástica externa. Sua função principal é garantir que as armaduras externas permaneçam em suas posições corretas, e proteger todo o conjunto interno de danos externos, como por exemplo, abrasão, corrosão, entre outros. Assim como a camada interna, a capa externa é feita de um material termoplástico extrudado, em geral um polietileno de alta densidade.

Uma etapa fundamental no projeto de um riser flexível é a análise estrutural, que consiste na determinação da distribuição de esforços em todas as camadas que compõem a estrutura, dados os esforços aplicados. Através desta análise, é possível determinar quais são os pontos mais solicitados em cada camada do tubo, um resultado necessário para a previsão de vida útil da estrutura, associado à fadiga. Obtém-se também resultados de deslocamentos relativos máximos entre tendões de camadas helicoidais adjacentes, resultado essencial para a avaliação do desgaste destas camadas. Também é possível obter valores de rigidez axial, flexional e torcional equivalentes para toda a estrutura, que são dados importantes para uma análise global

Figura 1.5: Camadas de um Riser.

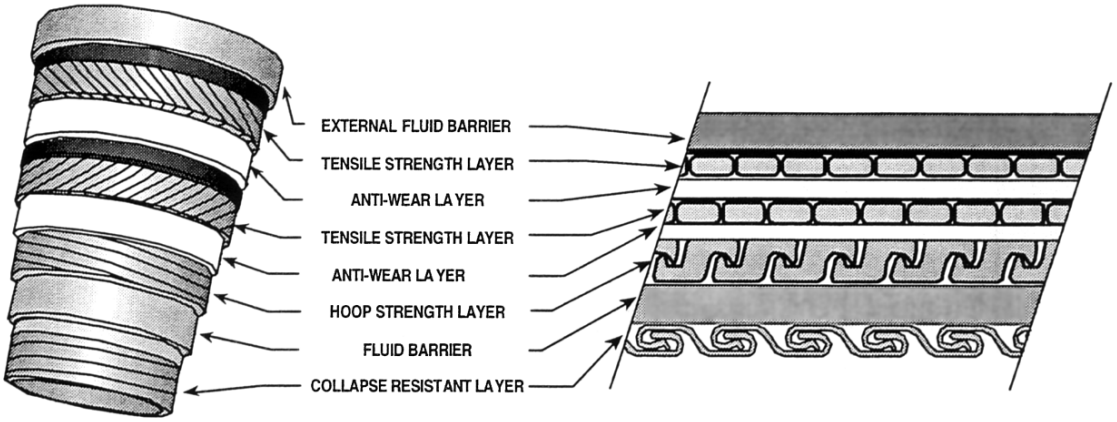

Figura 1.6: Ilustração dos perfis das diversas camadas de um tubo flexível (Wellstream)

mais refinada, sendo também imprescindíveis para a análise de estabilidade global da linha (ver, por exemplo, Aranha et al. [1] ou Ramos; Pesce [28]).

Dada a complexidade destas estruturas, para a análise da distribuição de esforços são empregados modelos de cálculo simplificados, que permitem uma análise mais rápida, porém incompleta. Diversos modelos são propostos na literatura, os quais são apresentados no

Capítulo 2 deste trabalho. Deve-se observar que muitos destes modelos analíticos disponíveis não permitem uma análise envolvendo carregamentos axissimétricos e flexão simultaneamente, dividindo-se basicamente em modelos para carregamentos axissimétricos (p. ex. Féret; Bournazel [13], Witz; Tan [35]), envolvendo tração, torção, pressão interna e pressão externa, e modelos para flexão pura (p. ex. Witz; Tan [36], Souza [33]), que também podem considerar pressão interna e externa. Existem também alguns modelos para carregamentos que envolvam simultaneamente esforços axissimétricos e flexão (p. ex. McIver [22], Ramos; Pesce [28]).

As simplificações existentes em alguns modelos tradicionais acabam por não levar em conta as não-linearidades presentes no problema. Tais não-linearidades são devidas, por exemplo, à existência de atrito entre os elementos estruturais, que gera um amortecimento estrutural do conjunto (conforme Fang; Lyons [12]), e à pré-existência ou à formação de folgas entre as camadas após a aplicação de algum carregamento.

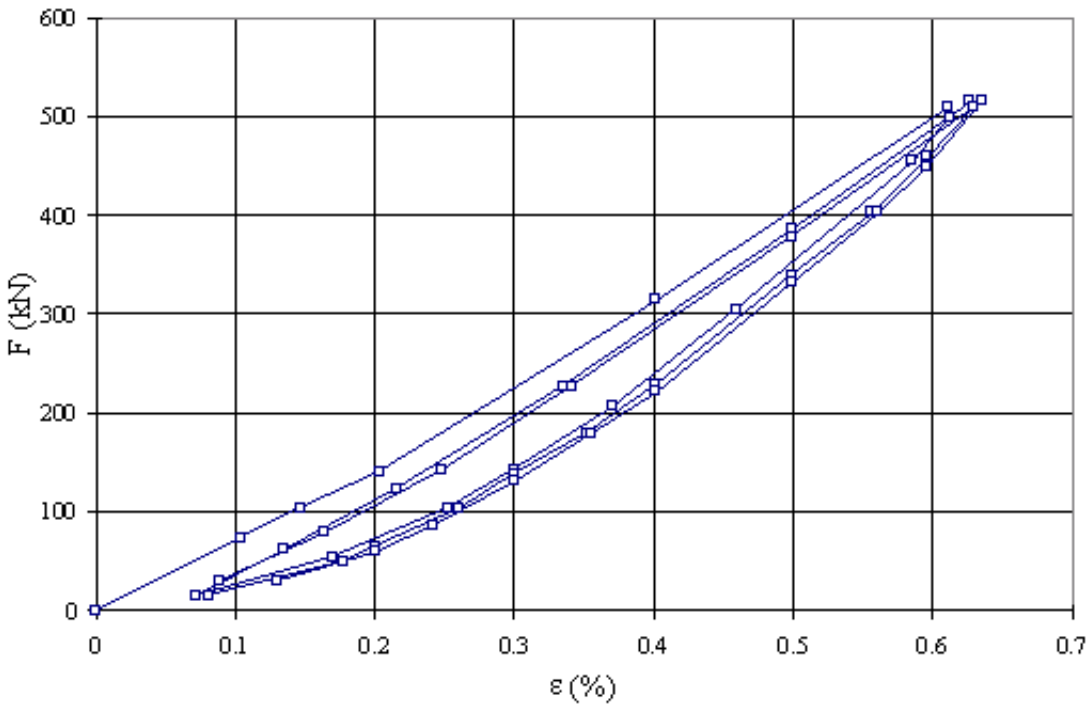

Figura 1.7: Curva *Tração x Alongamento*, tubo flexível de 2,5”.

As figuras 1.7, 1.8 e 1.9, extraídas de Witz [37], mostram as curvas *Tração x Alongamento* e *Momento Fletor x Curvatura* obtidas em ensaios experimentais de um tubo flexível de 2,5”, fabricado pela Coflexip. A figura 1.10, extraída de Ramos et al. [29], mostra uma curva de *Torque x Deslocamento Axial* obtida em um ensaio experimental de um tubo semelhante. Observa-se claramente, nestes casos, o comportamento não-linear destas estruturas, sendo

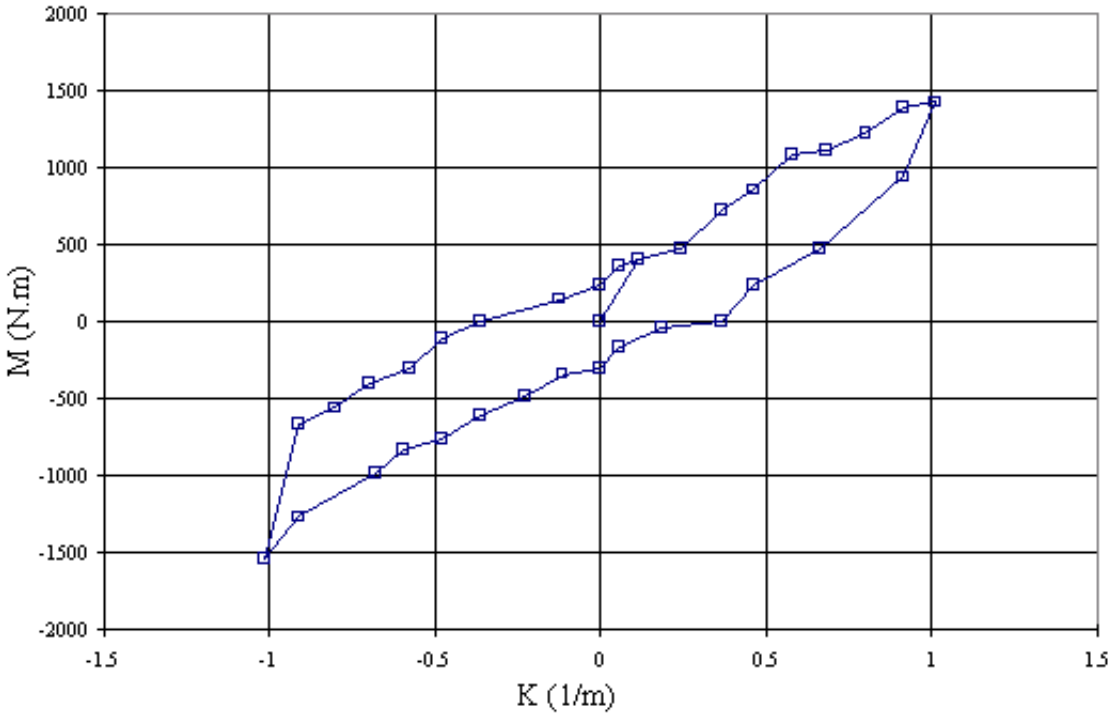

Figura 1.8: Curva *Momento Fletor x Curvatura*, tubo flexível de 2,5”, p_{int} = 0.

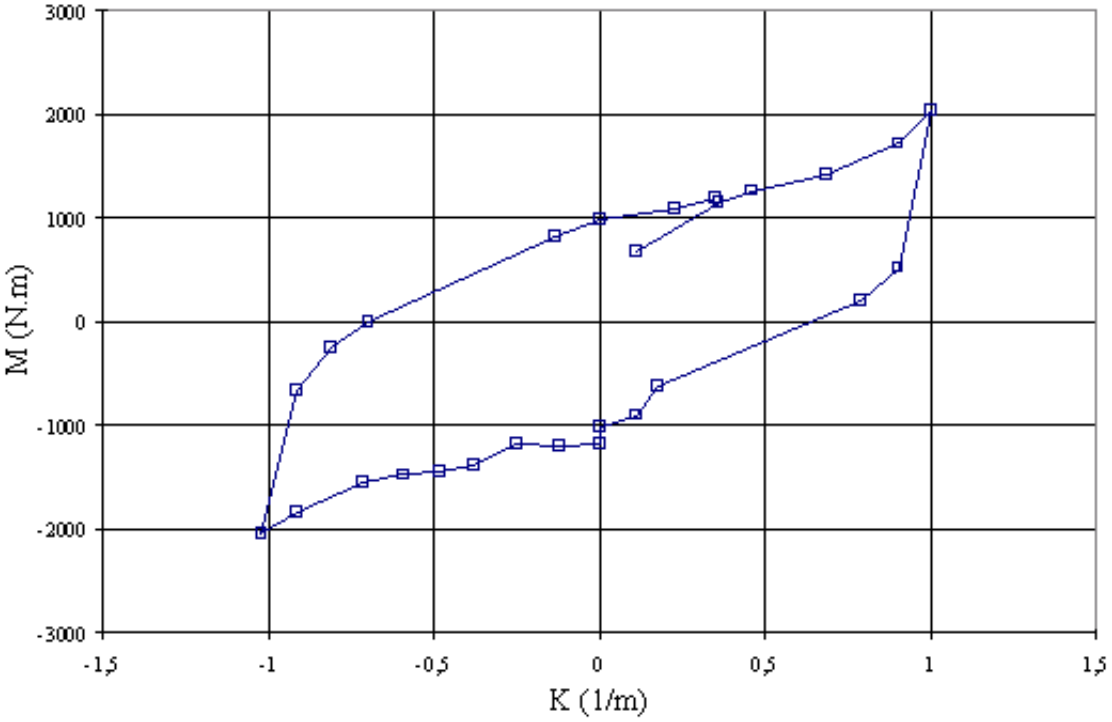

Figura 1.9: Curva *Momento Fletor x Curvatura*, tubo flexível de 2,5”, p_{int} = 30 MPa.

imediato concluir que modelos que não levam em conta as não-linearidades do problema não conseguem prever corretamente tal comportamento. Para um cálculo estrutural mais preciso nestes dutos é necessária, portanto, a utilização de modelos não-lineares, ainda que suficientemente simples para que sua implementação possa ser viável.

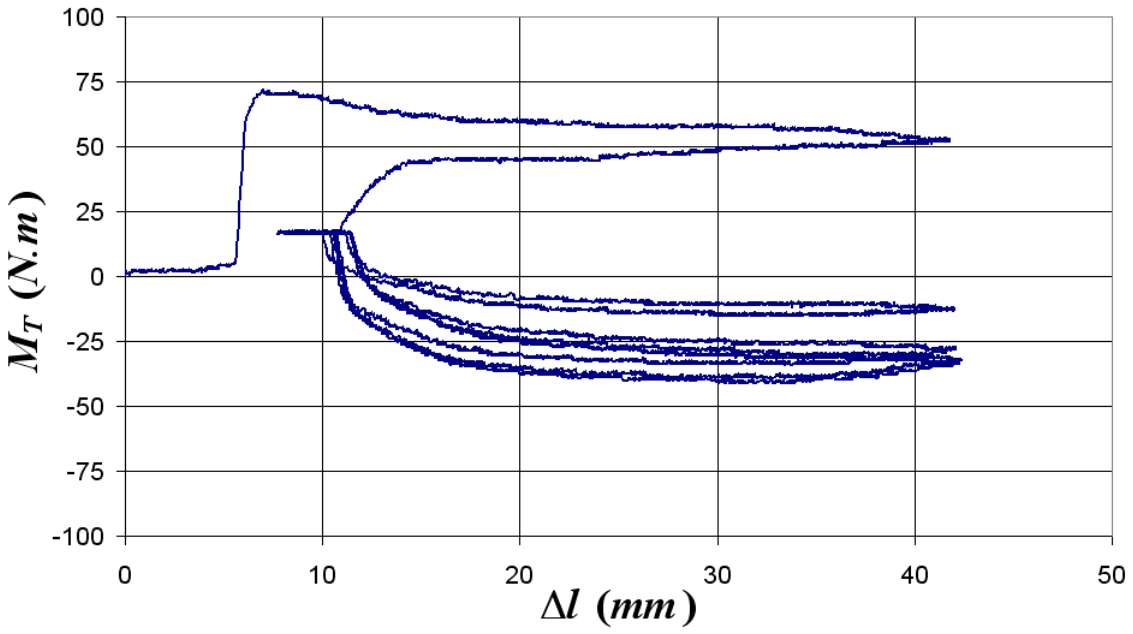

Figura 1.10: Curva *Torque x Deslocamento axial*, tubo flexível de 2,5", p_{int} = 6,9 MPa.

Uma análise mais completa pode ser feita através do método dos elementos finitos. A figura 1.11 mostra um exemplo de modelo por elementos finitos, o qual foi utilizado neste trabalho, mostrando uma camada plástica (em azul) e uma camada de armaduras internas (em amarelo), com alguns tendões retirados para visualização.

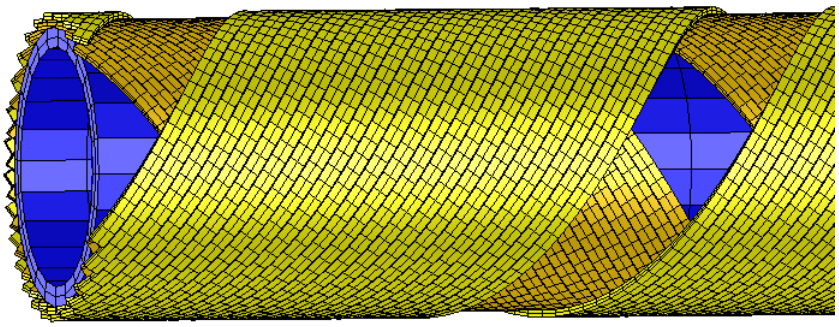

Figura 1.11: Detalhe de uma malha em elementos finitos de um tubo flexível.

O método dos elementos finitos envolve outras dificuldades, como por exemplo o modelamento correto das geometrias das camadas, a imposição correta de condições de contorno, entre outras particularidades inerentes ao método. Além disso o tempo computacional cresce conforme aumenta a complexidade do modelamento (especialmente se for considerada a presença de forças de atrito), podendo levar uma análise a várias horas ou até mesmo a alguns dias de simulação numérica em um computador doméstico. Assim como nos modelos analíticos, a qualidade dos resultados obtidos está intimamente ligada ao modelamento realizado. Na figura 1.12, retirada do trabalho de Bahtui [4], observamos o resultado de uma simulação pelo método dos elementos finitos, onde foi simulado um carregamento cíclico de torção.

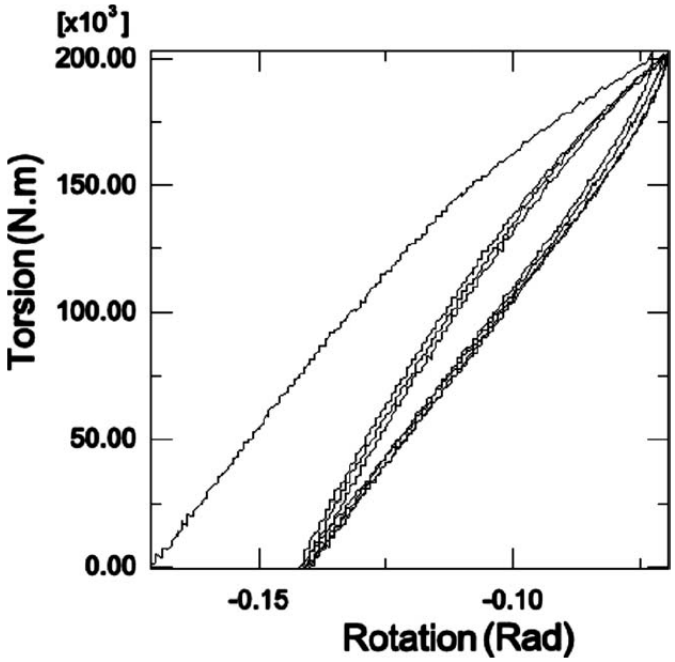

Figura 1.12: Curva *Momento Torçor x Ângulo de giro* obtida pelo método dos elementos finitos.

O objetivo principal deste trabalho é comparar resultados obtidos através de modelos analíticos (os quais serão detalhados no capítulo 3) e numéricos, através do método elementos finitos (os quais serão detalhados no capítulo 4), com resultados experimentais (apresentados no capítulo 5) na análise estrutural local de tubos flexíveis. O estudo proposto alia portanto as três vertentes que embasam o método científico: modelos analíticos e modelos numéricos comparados a resultados experimentais, os quais irão corroborar ou invalidar as hipóteses estabelecidas e admitidas nos modelos propostos.

São realizadas análises em tubos do tipo não-aderentes ("unbonded"), pois são mais comumente encontrados (conforme Moore [24]) e sua modelagem é mais complexa devido à possibilidade de formação de abertura entre as camadas. Efeitos de não-linearidade decorrentes

das condições de contato e atrito entre as diversas camadas são considerados de tal forma a permitir a recuperação das curvas de histerese obtidas em ensaios realizados em tubos flexíveis. Deve-se ressaltar que somente os carregamentos de natureza axissimétrica são considerados, como tração/compressão, torção e pressões interna e/ou externa. Não serão considerados carregamentos de flexão.

Entre os resultados obtidos através das simulações, destacam-se:

- Efeitos de histerese em carregamentos cíclicos;
- Cálculo dos valores de rigidez equivalente do conjunto;
- Cálculo da distribuição de esforços nos tendões das camadas helicoidais.

Além da análise local, os resultados permitem estabelecer valores utilizados na análise global do riser, os quais também serão comparados entre os diversos modelos estudados. Por fim, os resultados obtidos por cada modelo são analisados criticamente, evidenciando a influência das hipóteses estabelecidas em cada modelo na qualidade e consistência do resultado obtido. Espera-se que, através da análise crítica dos resultados obtidos, este trabalho também sirva como ponto de partida para a elaboração de modelos mais robustos, sejam eles analíticos ou numéricos.

Os modelos analítico-numéricos são simulados no Maple® versão 9.3. Para os modelos em elementos finitos foram utilizados o MSC.Patran® 2010 para o modelamento e o MSC.Marc® 2008r2 para as análises não-lineares. As licenças destes softwares foram fornecidas pelo CCE/USP e pela Escola Politécnica da USP.

Este trabalho está dividido em 6 Capítulos. No Capítulo 1, são apresentadas as motivações e objetivos deste trabalho, bem como um detalhamento das camadas de um riser típico. No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica atualizada sobre tubos flexíveis e estruturas correlatas, analisando criticamente as contribuições de cada trabalho para o tema. O Capítulo 3 apresenta os resultados de um ensaio em um tubo flexível em escala real, realizado no IPT, cujos resultados são utilizados para comparação com os modelos analíticos e numéricos apresentados. O Capítulo 4 apresenta alguns modelos analíticos de distribuição de esforços em tubos flexíveis sob carregamentos axissimétricos utilizados para o estudo, as suas hipóteses, formulações e finalmente os resultados de simulações numéricas do modelo adotado. O Capítulo 5 apresenta a modelagem realizada pelo método dos elementos finitos e seus resultados. Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões do trabalho e as considerações finais.

2 *Revisão Bibliográfica*

A análise de elementos estruturais, como vigas por exemplo, é baseada nos princípios da mecânica, os quais foram formalmente estabelecidos no decorrer dos séculos XVII e XVIII. Neste tempo, ainda não existiam a maioria das ferramentas matemáticas necessárias para uma análise completa de uma estrutura, como equações diferenciais e tensores. Tais ferramentas também foram surgindo ao longo do tempo, muitas delas impulsionadas justamente por questões de análise estrutural.

Nomes importantes, como Galilei, Newton, Bernoulli, Euler, Cauchy, Navier, Castigliano, Poisson, Saint-Venant, entre muitos outros, contribuíram significativamente para o estudo das tensões e deformações em uma estrutura. Ao longo do século XX, a teoria da elasticidade generalizou o estudo de forças e deslocamentos em um sólido elástico, baseando-se em três pilares: (i) equilíbrio de forças, (ii) relações constitutivas, e (iii) relações cinemáticas, trazendo soluções analíticas para a maioria das estruturas simples. Com o advento da computação, os métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, permitiram estudar estruturas bastante complexas em um tempo factível.

O estudo de tubos flexíveis teve um grande avanço com o aumento na demanda mundial de petróleo. A partir do momento em que a produção de petróleo em terra e em águas rasas já não era suficiente para o suprimento mundial do mundo contemporâneo, as exploradoras passaram a procurá-lo em águas profundas, onde os tubos flexíveis têm sido utilizados intensivamente para o transporte de fluídos. Nestas condições de operação, os tubos flexíveis devem apresentar, simultaneamente, estanqueidade, resistência e flexibilidade, sendo assim estruturas bastante complexas.

Observa-se aqui a importância de tentar prever o comportamento dos tubos flexíveis em condições de operação: qualquer tipo de falha nestas estruturas traz enormes prejuízos de ordem econômica e ambiental, podendo atualmente trazer até danos políticos. Muitos autores vêm dedicando suas pesquisas exclusivamente nesta área.

Os modelos analíticos propostos quase sempre se baseiam em conceitos da teoria da

elasticidade: estabelecer o equilíbrio de forças, estabelecer um modelo constitutivo para o material e estabelecer a cinemática do problema. Os diversos modelos disponíveis diferem entre si nas hipóteses levantadas na formulação de cada uma destas etapas: quais esforços serão, ou não, considerados, qual é o comportamento esperado dos materiais, e quais deslocamentos e deformações serão considerados na análise (e como eles se relacionam entre si). A princípio, hipóteses similares devem provocar resultados similares.

Um modelo analítico é um modelo "bom" se os resultados obtidos por ele são condizentes com o que se espera: para uma análise global do tubo sob carregamentos moderados, um modelo com muitas simplificações pode ser adequado, no entanto este mesmo modelo pode ser inadequado para o estudo da vida útil de um tendão, por exemplo. A utilização correta dos modelos, naturalmente, é uma questão para o engenheiro responsável por estas estruturas lidar, cabendo à ciência propor modelos cada vez mais completos de maneira a se obter mais detalhes que poderão aumentar a confiabilidade das estruturas produzidas.

O modelos baseados no método dos elementos finitos são em geral mais genéricos, devido à própria maneira em que o método é formulado. No entanto, ainda é necessário estabelecer hipóteses sobre o comportamento do material utilizado, e dos esforços considerados, além de algumas considerações inerentes ao método, como por exemplo a correta aplicação das condições de contorno no modelo analisado. Novamente, um modelo em elementos finitos será "bom" se os resultados por ele obtidos forem condizentes com o que se espera, cabendo ao engenheiro estrutural avaliar a aplicabilidade deste. De uma maneira geral, modelos em elementos finitos têm um custo computacional muito alto, porém podem trazer uma quantidade de informações maior.

Naturalmente, existe uma vasta disponibilidade de artigos científicos sobre este assunto. Nesta revisão bibliográfica são apresentados somente os trabalhos que contribuíram diretamente para o desenvolvimento desta dissertação, sejam eles trabalhos voltados especificamente para o estudo de dutos flexíveis ou trabalhos de áreas correlatas

Lanteigne (1985) [18] realiza um estudo em cabos condutores de alumínio reforçados com aço. Neste estudo, são considerados esforços de tração/compressão, torção e flexão, que podem ser aplicados simultaneamente. São observados variações no comprimento do cabo, na curvatura e no ângulo de rotação por unidade de comprimento.

Através de relações cinemáticas e constitutivas, obtém-se uma expressão para a energia potencial, e através da minimização desta energia, é possível obter uma matriz de rigidez para um cabo composto de diversas camadas helicoidais. O autor faz algumas simplificações importantes, dentre as principais pode-se citar: (i) não são permitidas variações no raio médio de

um tendão; (ii) as equações de deformação são linearizadas; (iii) os tendões tem seção circular. Tais simplificações são úteis para o estudo de cabos condutores, porém não se aplicam bem para o estudo de tubos flexíveis, em especial a consideração (i), uma vez que a simples presença de pressão interna e/ou externa pode causar variações no raio de um tendão. Ainda assim, este é um trabalho importante, pois foi um dos primeiros a tratar a condição de carregamentos combinados (flexão e carregamentos axissimétricos).

Neste trabalho, o autor também demostra outras propriedades importantes, como por exemplo: (i) as falhas em alguns elementos que compõem o cabo podem aumentar os efeitos de acoplamento; (ii) observam-se também reduções nos valores de rigidez axial, à torção e à flexão quando há falhas em alguns elementos; (iii) a rigidez à flexão também é reduzida quando ocorre deslizamento entre as camadas.

Féret e Bournazel (1987) [13] apresentam um modelo para o cálculo de tensões nas camadas estruturais de tubos flexíveis. São apresentados dois modelos distintos, um deles considerando somente os carregamentos de natureza axissimétrica, e outro considerando flexão pura. Um ponto interessante neste trabalho é o método de resolução que os autores utilizam para a resolução do problema, separando e enumerando as incógnitas de cada camada do tubo flexível e colocando a mesma quantidade de equações linearmente independentes relacionando as incógnitas com valores conhecidos.

No modelo para carregamentos axissimétricos, são levados em conta quatro tipos de carregamentos externos: força axial, momento torsor, pressão interna e pressão externa. É permitido um número arbitrário de camadas. São consideradas também algumas hipóteses simplificadoras: (i) É admitida linearidade geométrica, (ii) As camadas plásticas não contribuem para a resistência do tubo, (iii) As camadas plásticas transmitem pressão, (iv) As camadas permanecem em contato durante o carregamento.

Através destas hipóteses, somando-se a outras usualmente utilizadas pela teoria da elasticidade (como, por exemplo, o material trabalha no regime elástico-linear), obtém-se um sistema linear correlacionando todos os carregamentos, deslocamentos e tensões consideradas no modelo, chegando-se a expressões simples que permitem calcular diretamente as tensões nas camadas a partir dos carregamentos aplicados.

Os autores estabelecem também os conceitos de rigidez axial e torcional do tubo, como é usualmente estabelecido na resistência dos materiais, enfatizando porém duas limitações deste conceito: (i) estes valores de rigidez não podem ser considerados no caso de o tubo estar pressurizado, e (ii) a rigidez torcional pode apresentar assimetrias devido à formação de abertura entre as camadas, invalidando assim uma hipótese utilizada para estabelecer o valor

da rigidez torcional. Outra relação importante apresentada é a que correlaciona o alongamento axial de um tendão (admitindo que este alongamento é uniforme ao longo da seção transversal do tendão) com as variáveis de deslocamento da camada, sendo observada em diversos trabalhos posteriores.

Witz e Tan (1992a) [35] apresentam um modelo para o estudo de *risers*, tratando somente de esforços de natureza axissimétrica, onde é permitido um número arbitrário de camadas, que podem ser classificadas como cilíndricas ou helicoidais.

As camadas cilíndricas são consideradas tubos de parede fina, e através das equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de um tubo, juntamente com as equações constitutivas de um material elástico-linear e algumas definições para as deformações, obtém-se fórmulas para o cálculo das tensões atuantes nesta camada, bem como relações envolvendo os carregamentos externos e os deslocamentos. Observa-se neste modelo que a força de tração e as pressões possuem um acoplamento de efeitos, porém o momento de torção não.

Para as camadas helicoidais, é admitida a hipótese de deformação uniaxial dos tendões. Os autores utilizam as equações de equilíbrio de Love (que na realidade são as equações de Clebsh, apresentadas no trabalho de Love) para a modelagem de um tendão da camada helicoidal. É obtida então uma equação não-linear nas variáveis de deslocamento e deformações para a equação de equilíbrio de um tendão. Ao contrário do ocorrido nas camadas cilíndricas, observa-se um acoplamento total de efeitos, onde qualquer carregamento causa variações em todas as variáveis de deslocamento consideradas na análise. É apresentada também uma equação para o cálculo da variação do ângulo de assentamento de um tendão, bem como algumas equações para o cálculo dos momentos de flexão e torção de um tendão.

Além das equações de equilíbrio de cada camada, a montagem do sistema representando o tubo completo ainda inclui as pressões de contato e as mudanças de espessura e raio médio de uma camada, que também são tomadas como variáveis livres e são consideradas incógnitas, permitindo assim prever a ocorrência de formação de aberturas entre as camadas.

Através da compatibilidade de pressões e deslocamento entre as camadas, os autores obtém uma "equação governante" do problema, que é resolvida numericamente através do método de *Newton-Rhapson* por ser uma equação não-linear. No caso de separação entre camadas, que é detectada no caso de uma pressão de contato apresentar algum valor negativo, o problema é dividido em duas sub-estruturas com o mesmo eixo central, e as condições da interface são introduzidas como as novas condições externas de cada sub-estrutura.

Apesar das não-linearidades das relações obtidas, os resultados analíticos e experimentais

demonstram uma grande linearidade, sugerindo que o comportamento axissimétrico de um tubo flexível possa ser representado por valores de rigidez constantes para valores relativamente grandes de deslocamentos. Também é observado que a formação de abertura entre as camadas reduz drasticamente estes valores de rigidez, e que estas aberturas podem ser causadas por uma escolha incorreta do ângulo de assentamento dos tendões, podendo ocorrer mesmo com pequenas deformações.

O modelo final apresentado pelos autores é bastante completo, sendo possível calcular as tensões nos elementos estruturais de um tubo flexível, as variações na espessura, as variações no raio médio, as aberturas formadas entre as camadas (quando houver), as pressões de contato e as variações dos ângulos de assentamento das camadas helicoidais, a partir dos carregamentos externos aplicados na estrutura. Este é um dos principais trabalhos da área, sendo citado por diversos trabalhos posteriores.

Fang e Lyons (1992) [12] estudaram experimentalmente os efeitos de amortecimento estrutural em dutos não pressurizados. Através da construção de um equipamento adequado para a medição dos fatores de amortecimento de um tubo flexível, foram testados alguns tubos em diversas configurações.

São apresentadas algumas formulações analíticas para o cálculo da energia dissipada, afirmando que a energia dissipada em um ciclo é proporcional à energia máxima de deformação de flexão. Através dos ensaios experimentais, são obtidos valores para estes modelos, e os resultados são apresentados com curvas típicas de decaimento logarítmico e tabelas de frequência natural para vários casos.

Os autores enfatizam que os resultados obtidos nesta análise possuem um caráter qualitativo e não devem ser aplicados diretamente a tubos de produção, devido à uma série de fatores apontados no artigo, mas que basicamente se resumem na dificuldade de levantar parâmetros confiáveis em condições de operação devido às incertezas do comportamento interno do tubo flexível. Apesar disso, as conclusões apresentadas trazem diversas informações importantes para o estudo destas estruturas.

A principal conclusão do estudo é que a presença de forças de atrito entre as camadas e o amortecimento do material são os principais efeitos dissipadores de energia. Também é mostrado que escorregamento dos tendões não só reduz a rigidez à flexão, fato que é comumente relatado por predições analíticas, como também reduz as frequências naturais de vibração. Com isso as medidas de frequência natural podem ser utilizadas para detectar a ocorrência de deslizamento. Também são apontadas algumas conclusões específicas sobre como o amortecimento influencia os modos de vibrar.

Outra observação importante apontada é que o aumento da temperatura aumenta significativamente o amortecimento e as frequências naturais do tubo flexível. Nesta condição, ocorre uma expansão volumétrica em vários componentes do tubo, aumentando assim a pressão de contato, que apesar de causar uma redução nos efeitos de escorregamento, faz com que as forças de atrito sejam maiores devido à maior pressão normal atuante.

McNamara e Harte (1992) [23] formulam um modelo analítico tridimensional para tubos aderentes, partindo de algumas hipóteses simplificadoras: (i) as espessuras das camadas cilíndricas são pequenas o suficiente para se utilizar o modelo de tubo de parede fina, (ii) todos os materiais possuem comportamento elástico-linear, (iii) os tendões das camadas helicoidais possuem seção circular, (iv) os tendões se deformam somente na direção axial (considerando-se também que as deformações são uniformes ao longo da seção transversal), (v) todas as camadas do tubo permanecem em contato durante o carregamento.

Neste modelo é permitida a combinação de carregamentos axissimétricos e de flexão. No entanto, a combinação é feita por superposição de efeitos (pois as deformações axiais dos tendões são calculadas separadamente para cada caso e depois somadas), sendo válida somente se forem consideradas as hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

As camadas cilíndricas são modeladas como tubo de parede fina e podem ser isotrópicas ou ortotrópicas. Os autores utilizam o modelo ortotrópico para uma camada de borracha e o modelo isotrópico para um tubo de aço, como exemplo de uso. Já o modelo para as armaduras helicoidais é retirado de estudos feitos em cabos de transmissão, com algumas adaptações para incluir os efeitos de variação de raio de um tendão, obtendo uma expressão para a deformação axial bastante utilizada na literatura. É permitida uma montagem em qualquer ordem e qualquer quantidade destes três tipos de camada.

A metodologia de modelagem de cada camada é a mesma: a partir da equação da energia interna da camada e da equação do potencial dos carregamentos externos, obtém-se um sistema linear correlacionando os esforços e os deslocamentos daquela camada através de uma matriz de rigidez. Além das matrizes de rigidez de cada camada, são necessárias algumas equações de compatibilidade de deslocamentos entre as camadas, que são bastante simplificadas graças à hipótese (v). É construída então uma única matriz de rigidez para o tubo completo. Apesar do sistema obtido ser linear, alguns termos ficam em função de variáveis desconhecidas e por isso é utilizado um processo iterativo, que segundo os autores converge rapidamente para a solução.

É construído um modelo virtual para aplicar a metodologia apresentada no trabalho, utilizando porém valores de carregamento obtidos em dutos de produção utilizados em águas rasas. Os autores mostram como é possível obter valores importantes para o pré-projeto de tubos, e

ainda concluem que as armaduras helicoidais respondem pela maior parte da carga suportada pelo tubo flexível.

McIver, D.B (1995) [22] apresenta um método detalhado para a modelagem das camadas de um *riser*, considerando inclusive flexão e variações de temperatura. Considerações sobre o atrito entre as camadas também são feitas, utilizando um modelo simples de atrito seco de Coulomb.

É apresentado um estudo detalhado da geometria de uma hélice, utilizando as relações de *Frenet-Seret* para o cálculo das componentes de curvatura e tortuosidade. Os carregamentos considerados também são bastante genéricos, incluindo efeitos de variação de temperatura, pré-torção e empenamento da barra, e os esforços distribuídos nesta, o que inclui as forças de atrito e contato entre tendões de uma mesma camada. As camadas cilíndricas são tratadas como tubo de parede espessa, porém não é apresentado um detalhamento do modelamento utilizado.

As expressões para a força normal e momento torsor nos tendões são obtidas de um outro trabalho e são estendidas pelo autor para conseguir uma generalização maior no seu estudo. O autor também ressalta que as equações são válidas somente para seções transversais com dupla simetria, o que ocorre no caso dos tendões retangulares, mas não para a carcaça intertravada ou para as barreiras de pressão, mas ainda assim estas últimas podem fazer uso daquelas equações devido aos seus altos ângulos de assentamento.

É imposto o equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal do tendão e o princípio dos trabalhos virtuais é utilizado para se obter as equações governantes do problema, que são resolvidas pela técnica de minimização de um funcional, feita de maneira incremental.

O modelo apresentado é bastante detalhado, incluindo efeitos de atrito e variação de temperatura, e permite obter as tensões, deformações e deslocamentos em todas as camadas (incluindo a formação de aberturas entre as camadas), e valores de rigidez globais para o tubo completo. No entanto há uma ressalva em relação aos carregamentos de flexão, uma vez que os resultados são bastante sensíveis ao coeficiente de atrito utilizado, sugerindo ainda que o modelo de Coulomb utilizado pode não ser o mais adequado.

Witz (1996) [37] apresentou um estudo de caso de um tubo flexível não aderente. Neste trabalho o autor compila os resultados da análise estrutural completa de um tubo, obtidos por dez institutos de pesquisa, cada qual utilizando um determinado modelo para análise, para comparar com resultados experimentais disponíveis. São fornecidos os principais dados aos participantes, que ficaram a cargo de determinar os dados extras necessários para alguns modelos, como por exemplo valores de coeficiente de atrito, utilizando a metodologia que

julgassem adequada.

Os resultados foram mostrados em gráficos e tabelas, contendo a média e o desvio padrão de cada caso ao final. Para os carregamentos puramente axiais, todos os participantes apresentaram resultados próximos entre si e satisfatoriamente próximos ao resultado experimental. Para os carregamentos torcionais, os resultados também foram muito próximos entre si e ao experimental, com exceção dos modelos que não consideram os efeitos entre as camadas. Já o resultado para o carregamento de flexão mostrou uma enorme discrepância entre os resultados, a qual fica mais evidente no caso do tubo ser pressurizado.

O autor se satisfez com a qualidade dos resultados dos modelos para carregamentos axissimétricos, relevando o fato de o tubo flexível ser uma estrutura bastante complexa, e observa ainda que a qualidade dos resultados está diretamente relacionada com a possibilidade destes modelos levarem em conta as iterações entre as camadas, mostrando que os modelos que não fazem esta consideração podem fornecer resultados errôneos, particularmente no caso de torção. Para os resultados dos ensaios de flexão, apenas alguns modelos avançados obtiveram resultados razoáveis em relação aos testes, enquanto outros apontam uma enorme discrepância, mesmo com algumas ressalvas em relação à obtenção dos resultados experimentais. Por fim, é apontada a necessidade de maiores investigações para o estudo de carregamentos combinados.

Kraincanic e Kebatze (2001) [17] estudaram o efeito do deslizamento de tendões helicoidais e suas implicações na rigidez à flexão do tubo. Tradicionalmente, o estudo da flexão de tubos flexíveis é limitado a determinar a rigidez flexural na condição de não-escorregamento e de escorregamento total dos tendões, além do cálculo de uma medida de "curvatura crítica", K_{cr}, na qual a condição de não-escorregamento se torna uma condição de escorregamento total. Na condição de não-escorregamento, a força de atrito entre a camada plástica e os tendões impede o movimento destes, podendo-se admitir que as camadas estão "coladas" durante o carregamento. Na condição de escorregamento total, todo o momento fletor aplicado ao tubo é utilizado para deslizar os tendões.

Neste artigo, os autores propõem um modelo onde a curvatura não é uniforme ao longo do tubo, mas varia ciclicamente ao longo do comprimento de um tendão, permitindo que o deslizamento dos tendões não ocorra uniformemente. Com este modelo, os autores estudam o deslizamento de um segmento de um tendão equivalente a um passo. O deslizamento inicia-se após a curvatura local atingir um valor K_{cr}^{min}, onde deslizamento ocorre parcialmente, até uma curvatura dada por $(\pi/2)K_{cr}^{min}$, a partir da qual o deslizamento é total. Através deste modelo os autores concluem, entre outras coisas, que algumas regiões nunca escorregam, e que o escorregamento sempre inicia-se no eixo neutro do tubo. Estas predições teóricas são

amparadas por resultados experimentais citados no trabalho.

Naturalmente existem algumas hipóteses simplificadoras no desenvolvimento deste modelo, dentre as quais destacam-se: (i) o deslizamento ocorre somente na direção do eixo do tendão, (ii) a pressão de contato entre as camadas é constante, (iii) o coeficiente de atrito estático e dinâmico são iguais. Apesar destas hipóteses parecerem um pouco restritivas, em especial a hipótese (i), uma vez que não há nenhum impedimento físico para que o deslizamento ocorra também na direção transversal ao eixo central do tendão, os autores mostram um comparativo do modelo proposto com alguns resultados experimentais para carregamentos de flexão, onde é possível observar uma boa correlação entre os resultados, incluindo efeitos de histerese.

Por fim é apresentada uma formulação para o cálculo da rigidez à flexão como função da curvatura aplicada, das pressões de contato e dos coeficientes de atrito envolvidos.

Custódio e Vaz (2002) [11] apresentam uma formulação analítica não-linear para carregamentos axissimétricos monotônicos em tubos flexíveis. São considerados três tipos distintos de camadas: homogêneas, helicoidais e funcionais. O modelamento das camadas homogêneas é baseado nas equações de Lamé, enquanto as camadas helicoidais são modeladas utilizando as equações de Clebsh. Os autores apontam a ausência de modelos analíticos adequados ao modelamento dos núcleos de transmissão de cabos umbilicais, sendo necessário o uso de modelos empíricos para tal.

Algumas hipóteses levantadas pelos autores são utilizadas em muitos modelos, muitas vezes implicitamente, como: (i) os tendões em sua configuração deformada também formam uma hélice de passo constante, (ii) todos os tendões apresentam o mesmo estado de tensões, (iii) os tendões apresentam espaçamento uniforme, (iv) não são considerados esforços de campo, como por exemplo o peso próprio. Outras hipóteses levantadas também são bastante comuns na análise de tubos flexíveis sob carregamentos axissimétricos, como linearidade de material e geométrica, uniformidade do elongamento e do ângulo de torção por unidade de comprimento do tubo, as camadas homogêneas podem ser consideradas como parede fina. Os autores observam que a maioria dos modelos considera somente as tensões e deformações médias ao longo dos tendões, e afirmam que apesar desta hipótese não representar perfeitamente o carregamento local, o erro é insignificante, exceto para o caso de grandes variações de curvatura ou grandes tensões de contato.

É permitido o afastamento entre as camadas (formação de *gap*), e ainda a possibilidade de contato entre as armaduras de uma mesma camada, sem considerar no entanto a presença de forças de atrito. O modelo analítico resultante apresenta não-linearidades e integrais sem solução analítica, portanto é aplicado um método iterativo para sua resolução. O algoritmo

incremental detecta se algumas condições geométricas são alteradas, como por exemplo se houve contato entre os tendões e, se necessário, refaz o último passo com as novas restrições geométricas.

Através dos resultados obtidos, os autores apontam que o modelo permitiu observar um comportamento não-linear da estrutura quando submetida a altos carregamentos. Apesar desta não-linearidade detectada, os autores apontam que, sob carregamentos moderados, o comportamento da estrutura pode se aproximado por uma função linear, como é geralmente observado na literatura.

Ramos e Pesce (2004) [28] apresentam um modelo analítico linear que permite a aplicação combinada de flexão, torção e tração ou compressão, bem como pressão interna e externa, porém sem considerar alguns efeitos não-lineares, como, por exemplo, a existência de atrito entre as camadas adjacentes.

Uma preocupação constante neste trabalho é evidenciar como as hipóteses estabelecidas se refletem nas formulações propostas. Como já foi exposto nesta revisão bibliográfica, muitos trabalhos citam as hipóteses utilizadas porém não evidenciam a formulação obtida. Os autores deste trabalho citam este fato e tomaram o cuidado de evidenciar todas as equações utilizadas, que levam em consideração a maioria das hipóteses observadas na literatura, por exemplo: (i) todas as camadas apresentam os mesmos valores de alongamento axial e torção por unidade de comprimento, (ii) não há aberturas entre as camadas na configuração indeformada do tubo, (iii) não há contato entre os tendões de uma mesma camada helicoidal, (iv) nenhum carregamento é capaz de ovalizar o tubo.

É feito um estudo de caso para um tubo flexível submetido a carregamentos combinados de flexão, tração, torção, pressão interna e pressão externa, adicionando ainda a hipótese de deslizamento total dos tendões. Os autores concluem que o bom correlacionamento do modelo proposto com os resultados experimentais apresentados se devem em maior parte à esta hipótese estabelecida. Por fim são sugeridas algumas melhorias para modelos futuros, tais como incluir efeitos de atrito entre as camadas ou analisar como a pressão interna pode interferir na rigidez à flexão do tubo flexível.

Sousa (2005) [32], em sua tese de doutorado, faz um extenso trabalho sobre cargas de colapso em dutos utilizando o método dos elementos finitos. Na modelagem são levantadas diversas hipóteses focadas no estudo de cargas de colapso, mas que ainda assim são bastante úteis para outras análises.

A modelagem da carcaça intertravada e das barreiras de pressão é feita por elementos

de casca ortotrópicos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, que são mais adequadas à abordagem utilizada em relação à teoria de Kirchhoff para placas, segundo o autor. No entanto, para aplicar a teoria de placas, foi necessário desprezar os efeitos de atrito e desprezar a resistência à cargas axiais, hipóteses que são comumente assumidas para esta camada.

As camadas poliméricas são modeladas como a carcaça intertravada, mas utilizando um material ortotrópico.

Os tendões que compõe as armaduras são representados por elementos de viga, baseadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, para análises que consideram linearidade de material, ou na teoria de vigas de Timoshenko, para as análises que consideram as não-linearidades de material.

O contato entre as diversas camadas é representado por elementos de contato nó a nó (semelhante à metodologia utilizada por Cruz [9]), por isso é necessária uma congruência das malhas das camadas que estarão em contato. A metodologia utilizada permite a modelagem de forças de atrito e formação de aberturas entre as camadas, desde que sejam considerados pequenos deslocamentos relativos entre elas.

Não-linearidades de material também são incluídas, através do modelo de Ramberg-Osgood. O autor ainda apresenta um programa elaborado para a geração automática da malha de um tubo flexível utilizando a modelagem proposta.

O modelo em elementos finitos é utilizado para realizar praticamente todas os tipos de análise necessários para o projeto de um tubo flexível, incluindo colapso da carcaça intertravada sob compressão, formação de "gaiola de passarinho" nas armaduras de tração, colapso hidrostático por pressão externa, entre outros.

Por fim, todos os casos estudados pelo autor são comparados com diversos modelos analíticos disponíveis na literatura e com alguns resultados experimentais, quando disponíveis.

Ramos et al. (2008) [29] estudam experimentalmente um tubo flexível em escala real, submetido somente à carregamentos axissimétricos, de maneira a comparar os resultados obtidos com predições analíticas visando verificar a aplicabilidade de algumas hipóteses usualmente levantadas nos modelos analíticos. É apresentado um bom detalhamento do tubo estudado, incluindo algumas propriedades mecânicas obtidas experimentalmente.

Os autores apresentam uma matriz de rigidez "estendida" para a análise global do tubo, correlacionando as forças axiais e torcionais e as pressões interna e externa com a variação no comprimento, ângulo de rotação, e nos raios interno e externo. São levantadas então algumas questões interessantes a respeito dos coeficientes desta matriz, como por exemplo se a matriz deve ser simétrica ou se os valores destes coeficientes dependem das pressões aplicadas. Estas

questões são respondidas ao longo do artigo, baseadas nos resultados obtidos. É citada uma metodologia para o cálculo analítico dos valores desta matriz, mas somente os resultados numéricos são apresentados.

Os ensaios experimentais foram separados em quatro grupos, combinando a presença ou ausência de pressão interna e liberdade ou restrição de giro nas extremidades do tubo. Cada um destes quatro grupos foi ensaiado duas vezes a fim de verificar a repetibilidade dos resultados, a qual acabou sendo observada. Foi aplicado um carregamento cíclico de tração para todos os oito casos. Algumas medições de deformações foram realizadas através de extensômetros uniaxiais, introduzidos em alguns tendões da armadura externa em locais determinados do tubo através de "janelas" feitas na capa plástica externa, de onde foi possível obter os resultados de tensão e deformação nos tendões.

A despeito dos efeitos de histerese, é observada uma boa correlação entre a predição analítica e a medição experimental de força de tração por deslocamento axial, no entanto os modelos analíticos não foram capazes de predizer corretamente os resultados para o torque reativo e ângulo de giro em função do deslocamento axial. Apesar destas discordâncias, a magnitude destas grandezas observadas é muito pequena se comparada à magnitude dos esforços axiais atuantes no ensaio, portanto estas discordâncias eventualmente não são significativas para uma análise detalhada do tubo flexível.

Por fim, é apontado que a hipótese de uniformidade de deformações em um tendão, a qual é geralmente admitida em carregamentos axissimétricos, não foi completamente observada na prática, havendo diferenças significativas de deformações entre os tendões de uma mesma armadura, bem como a presença de deformações no sentido transversal, ainda que com uma magnitude cerca de uma ordem de grandeza inferior às deformações axiais. Os autores propõe então um fator de segurança a ser aplicado em valores obtidos analiticamente para as predições de tensões nos tendões, baseado no erro relativo calculado entre os modelos utilizados e os resultados observados.

Bahtui, Bahai e Alfano (2008) [5] apresentam uma análise detalhada, utilizando o método dos elementos finitos, de um tubo flexível contendo cinco camadas: 1) Camada anti-atrito; 2) Armadura interna; 3) Camada anti-atrito; 4) Armadura externa; 5) Capa plástica externa. A carcaça intertravada foi desconsiderada neste estudo, que tratou somente de esforços de torção, incluindo também pressão interna e pressão externa, para analisar a rigidez torcional do conjunto.

Todas as camadas são modeladas com elementos sólidos, utilizando elementos hexaédricos de interpolação linear, de maneira a representar com maior precisão os efeitos causados pela

presença de forças de atrito entre as camadas. Algumas considerações são feitas na formulação dos elementos, como integração reduzida e controle de *hourglass*. Os autores ainda destacam a qualidade geométrica dos elementos, relatando que todos possuem valores aceitáveis de razão de aspecto, Jacobiano e empenamento.

As terminações de cada lado do tubo são conectadas rigidamente a dois nós de referência, localizados no centro de cada seção transversal da extremidade tubo. No entanto, não é apresentado um detalhamento desta ligação rígida nas extremidades dos tendões, deixando a entender que a seção transversal de um tendão não pode ter seu ângulo de assentamento, na extremidade, alterado durante a simulação, tratando-se portanto de uma hipótese adicional não descrita no trabalho. As condições de contorno são aplicadas nestes dois nós de referência: um possui uma restrição completa de deslocamentos, enquanto o outro pode se movimentar livremente e recebe os esforços.

São levados em conta os efeitos de contato e atrito entre as camadas, utilizando o modelo de Coulomb de atrito seco, onde o coeficiente de atrito foi obtido de uma referência que realizou um trabalho experimental para obtê-lo. Devido ao alto número de superfícies de contato, optou-se por um *solver* explícito com incremento temporal fixo.

Também é proposta uma simulação utilizando um modelo analítico, de maneira a confrontar os resultados obtidos entre estes dois modelos. No entanto, o modelo analítico não é explicitado no trabalho, e os autores limitaram-se a citar duas fontes utilizadas e um pequeno conjunto de hipóteses adicionais para unificar os modelos destas fontes.

Utilizando um carregamento cíclico de torção, após uma pressurização interna e externa do tubo, observa-se pelos resultados apresentados uma boa aderência de resultados entre o modelo em elementos finitos e o modelo analítico utilizado. Adicionalmente, o modelo em elementos finitos foi capaz de detectar efeitos de histerese, evidenciando a não-linearidade causada pela presença de forças de atrito.

Maranhão e Ramos (2009) [20] estudam a influência do efeito de atrito em carregamentos axissimétricos em tubos concêntricos, considerando somente força de tração, pressão interna e pressão externa. Apesar destas estruturas diferirem bastante dos tubos flexíveis, uma vez que não contém as camadas helicoidais, a metodologia utilizada neste trabalho também pode ser aplicadas ao estudo destes últimos.

É proposto um modelo analítico, contendo algumas simplificações, como: (i) Os tubos permanecem em contato durante o carregamento, (ii) são desprezados os efeitos de borda, (iii) O atrito é desprezível, entre outras hipóteses simplificadoras usuais neste tipo de estudo. Em

seguida são propostos alguns modelos em elementos finitos, cada um retirando alguma hipótese considerada anteriormente.

O comportamento da estrutura é modelado por uma matriz de rigidez correlacionando as variações de raio interno e externo e o deslocamento axial com as pressões interna, externa e a força axial. É proposta ainda uma medida para a rigidez axial equivalente, utilizando os valores da matriz de rigidez, em contraponto à medida usualmente feita somando-se as contribuições individuais de rigidez axial de cada tubo, modelo o qual não consegue incluir os efeitos que ocorrem entre as camadas.

Para cada caso estudado, os autores obtém uma matriz de rigidez diferente, visando estudar como as hipóteses consideradas em cada caso interferem nos valores de cada termo desta matriz. As simplificações que geram modelos estritamente lineares levam a uma matriz de rigidez simétrica, enquanto nos modelos que permitem algum tipo de não-linearidade, como aqueles que permitem a formação de abertura entre as camadas, é possível observar uma assimetria significativa. No entanto, apesar dos diferentes resultados de cada modelo, a diferença na medida de rigidez axial equivalente é desprezível em todos os casos, apontando que estes efeitos em nada interferem na rigidez axial do conjunto.

Os autores concluem por fim que, nas condições estudadas, as hipóteses simplificadoras utilizadas podem ser utilizadas sem prejuízo aos resultados.

Bahtui, Bahai e Alfano (2009) [6] apresentam um comparativo de resultados entre modelos analíticos e por elementos finitos para a análise de um tubo flexível. O modelo em elementos finitos é basicamente uma melhoria do trabalho anterior e não será detalhado.

O modelo analítico apresentado é baseado em três trabalhos distintos e permite combinação de esforços axissimétricos e flexão, formação de abertura entre as camadas e escorregamento dos tendões. Por conta destas duas últimas considerações, o modelo é não-linear. Para resolver esta questão, os autores utilizam uma abordagem iterativa: partindo da hipótese inicial que todas as camadas permanecem em contato, é calculada uma solução e as equações de compatibilidade de deslocamentos e pressões são verificadas. Caso alguma destas condições seja violada em uma dada interface, as equações de compatibilidade desta interface são trocadas e o sistema é reavaliado. Este ciclo permanece até que se encontre uma solução sem violações destas condições.

São realizados três ensaios, um de tração, um de torção e um de flexão, todos submetidos à pressão interna. É observada uma boa correlação entre o modelo analítico e o modelo por elementos finitos nas análises de tração e torção. O resultado da análise de flexão apresenta um

ciclo de histerese, e o modelo analítico considera somente um ciclo de carregamento, onde a correlação com os resultados numéricos é mais evidente no segundo ciclo de carregamento da estrutura.

Os autores apontam por fim que os efeitos da força de atrito são bastante significantes para os carregamentos de flexão e para altos carregamentos de torção.

3 *Resultados Experimentais*

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta, de forma resumida, a metodologia e os resultados de um ensaio de um tubo flexível em escala real, realizado no IPT, os quais podem ser encontrados em Ramos et al. [29].

3.2 Descrição do tubo flexível ensaiado

O tubo de 2,5” (63,5 mm) de diâmetro nominal é composto por 5 camadas estruturais:

- Carcaça intertravada
- Barreira plástica de pressão
- Armadura interna
- Armadura externa
- Capa plástica externa

O comprimento total do tubo é de 5m, porém, descontando-se o comprimento dos encaixes da extremidade, o seu comprimento efetivo é de 4660 mm.

A tabela 3.1 resume as propriedades geométricas das camadas do tubo flexível ensaiado. Cada uma das duas camadas de armaduras é composta por 29 tendões de seção transversal retangular, medindo 5mm x 2mm, com ângulos de assentamentos de +55,5°(armadura interna) e -55,5°(armadura externa). A carcaça intertravada é formada a partir de uma única chapa de 0,7mm de espessura, com um ângulo de assentamento de +85,8°, e está mostrada com mais detalhes na figura 3.1.

Tabela 3.1: Descrição da geometria do tubo flexível

Camada	D_i (mm)	D_e (mm)	n	α (°)
1 - Carcaça intertravada	63,5	70	1	+85,8
2 - Barreira plástica de pressão	70	82	N/A	N/A
3 - Armadura interna	82	86	29	+55,5
4 - Armadura externa	86	90	29	-55,5
5 - Capa plástica externa	90	100	N/A	N/A

As especificações do fabricante não estavam disponíveis, portanto não foi possível identificar precisamente os materiais utilizados na fabricação deste. As propriedades mecânicas das camadas plásticas foram obtidas através de ensaios em corpos de prova extraídos do tubo flexível. No entanto, devido à geometria das armaduras de tração, não foi possível obter as propriedades elásticas dos materiais por ensaios padronizados. Assim, a tabela 3.2 apresenta somente as propriedades obtidas para as camadas plásticas.

Tabela 3.2: Descrição das propriedades das camadas do tubo flexível

Camada	E (MPa)
2 - Barreira plástica de pressão	280
5 - Capa plástica externa	320

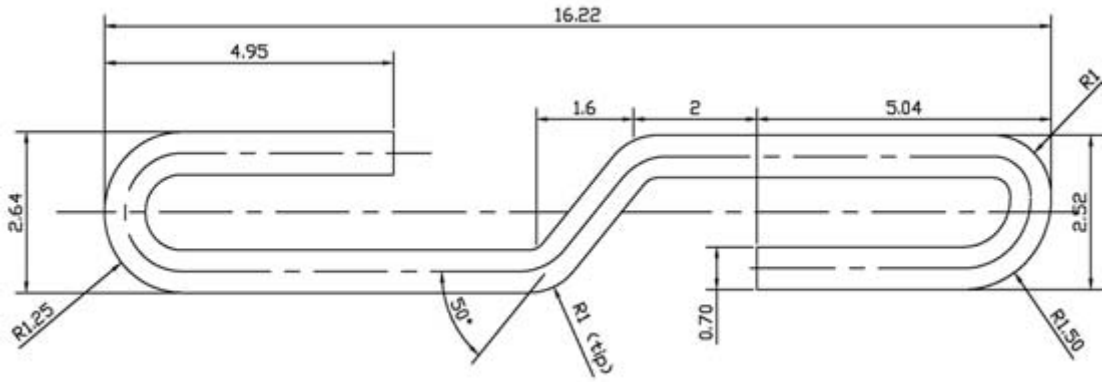

Figura 3.1: Especificações da carcaça intertravada do tubo flexível ensaiado

3.3 Descrição do ensaio realizado

Os ensaios realizados envolveram esforços de tração em vários ciclos de carregamento e descarregamento. Para diminuir os efeitos de flexão sobre o corpo de prova, foram utilizados

calços ao longo do comprimento, conforme ilustrado na figura 3.2.

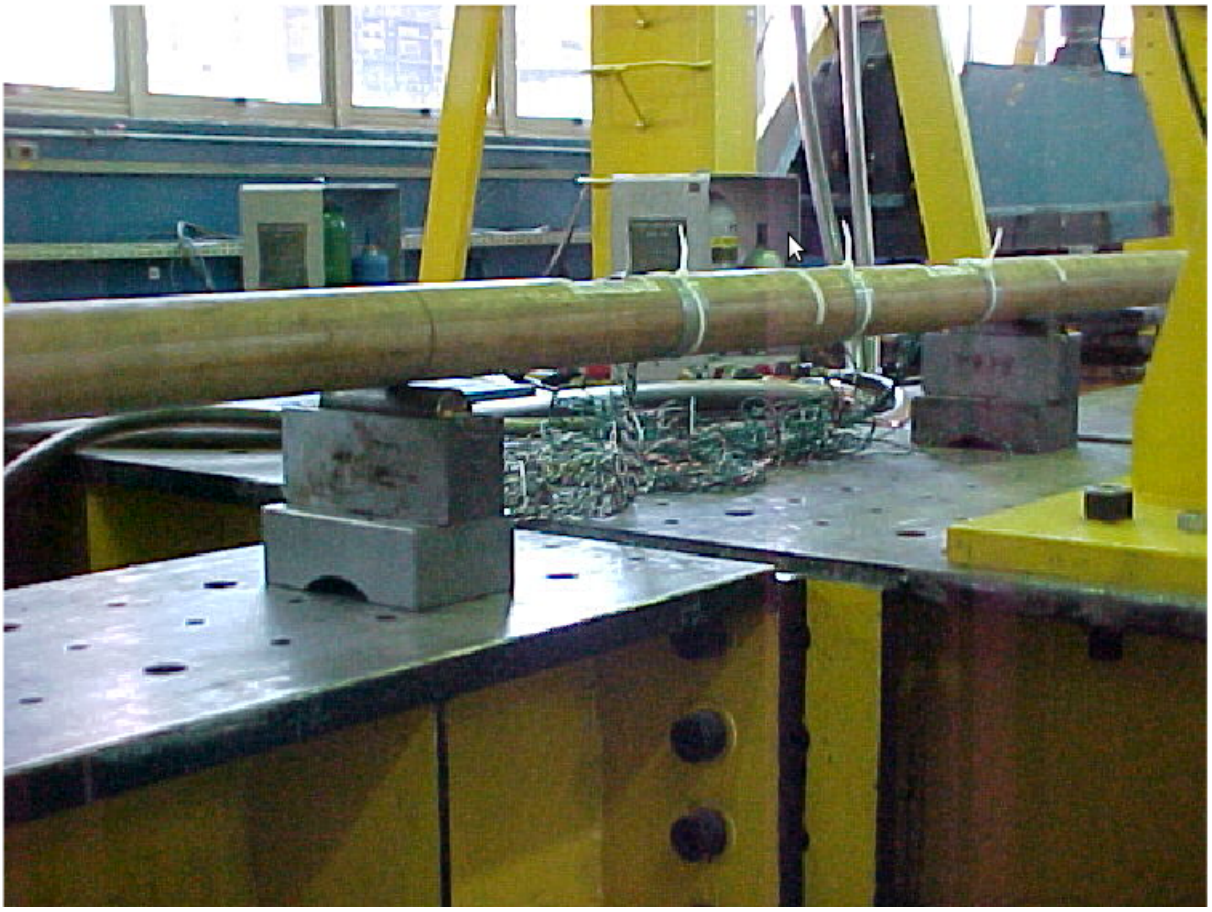

Figura 3.2: Fotografia do aparato experimental.

3.3.1 Casos de carregamento

Todos os experimentos foram realizados duas vezes, a fim de se observar a repetibilidade do processo. Os casos dividem-se em 2 grupos combinados, a saber: com ou sem pressão interna, e com as extremidades livres para girar em torno do eixo central ou restritas à esse giro. Nos casos em que o tubo foi pressurizado, a pressão interna utilizada foi de aproximadamente 6,89MPa (1000psi). A tabela 3.3 resume os carregamentos aplicados.

Foi aplicada uma força de tração variando ciclicamente de 0N até cerca de 40kN, a uma taxa de 100N/s. Em cada caso foram aplicados 5 ciclos de carregamento. A figura 3.3 mostra a variação da força no tempo observada no caso A1.

Tabela 3.3: Casos de carregamento utilizados no ensaio

Caso	Pressão Interna	Extremidade
A1 / A2	Não	Fixa
B1 / B2	Não	Livre para girar
C1 / C2	Sim	Fixa
D1 / D2	Sim	Livre para girar

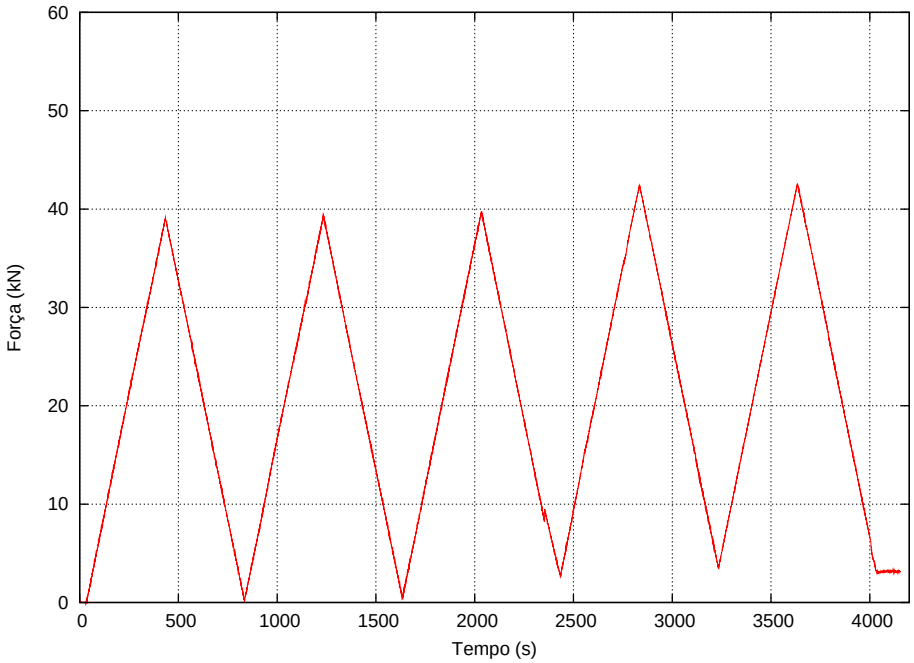

Figura 3.3: Força de tração medida no caso A1

3.3.2 Obtenção de resultados

Nos casos A e C, que possuem as extremidades restritas para rotação, foi medido o torque de reação; já nos casos B e D, que possuem as extremidades livres para rodar, foi medido o ângulo de giro. Em todos os casos também foi monitorado o valor da força aplicada e o deslocamento correspondente.

A hipótese de deformação constante ao longo do tubo, geralmente admitida na maioria dos modelos analíticos, foi monitorada através de extensômetros colocados nos tendões que compõem a armadura externa. Para obter acesso a esta camada, foram abertas três janelas na camada plástica externa. A primeira janela foi feita na seção central do tubo, medindo 75mm x 60mm, na qual foram colocados 4 extensômetros, sendo três na direção axial dos fios e um

na direção transversal. As outras duas janelas foram abertas à uma distância de 340mm da janela central, uma para cada lado, ainda com uma rotação de 90 graus em relação à esta. Estas janelas medem 110mm x 60mm e em cada uma delas foram colocados 8 extensômetros, sendo 5 na direção axial dos fios e três na direção transversal. As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 mostram a disposição das janelas e dos extensômetros colocados.

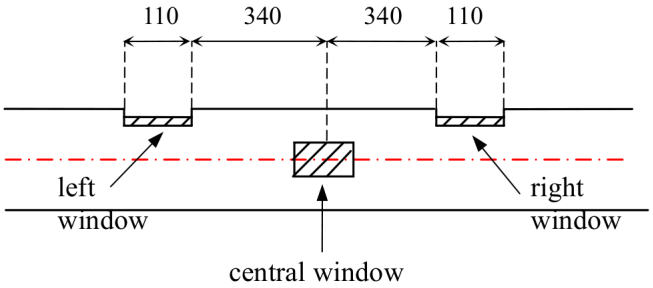

Figura 3.4: Visualização esquemática da disposição das janelas (Ramos et al. [29]).

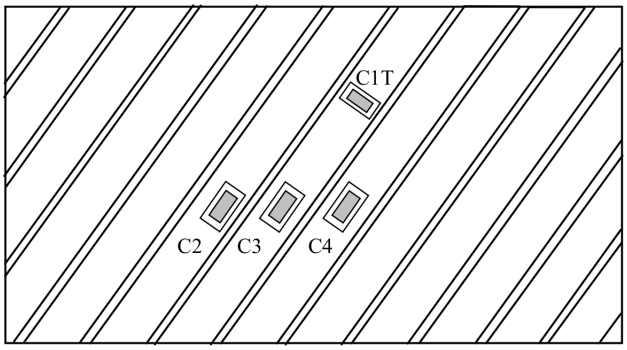

Figura 3.5: Disposição dos extensômetros na janela central (Ramos et al. [29]).

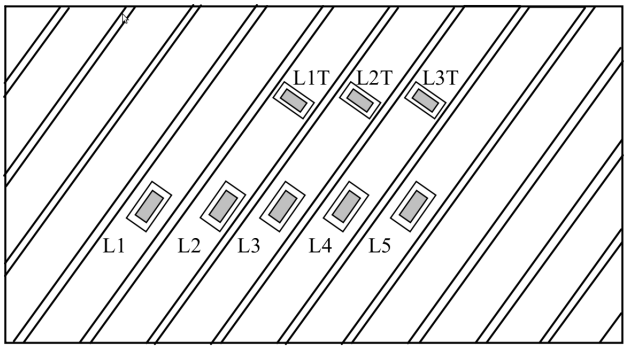

Figura 3.6: Disposição dos extensômetros nas janelas laterais (Ramos et al. [29]).

3.4 Resultados do ensaio

Em todos os casos ensaiados foi observada a repetibilidade do processo, ou seja, em todas as medições de um mesmo caso as diferenças obtidas foram desprezíveis. São apresentados, portanto, somente um dos resultados de cada conjunto de medições semelhantes.

3.4.1 Análise global

Caso A

As figuras 3.7 e 3.8 mostram, respectivamente, os resultados experimentais de *Força de tração x Deformação* e *Momento Torsor x Deformação* do caso A1 (sem pressão interna e com as extremidades fixas). Percebe-se, na primeira figura, um efeito de histerese causado pelo carregamento cíclico, e que este é muito pequeno. Observa-se também um comportamento aproximadamente linear. Na segunda figura, observa-se um comportamento altamente não-linear na resposta, porém a magnitude do valor medido é muito pequena se comparada ao carregamento aplicado.

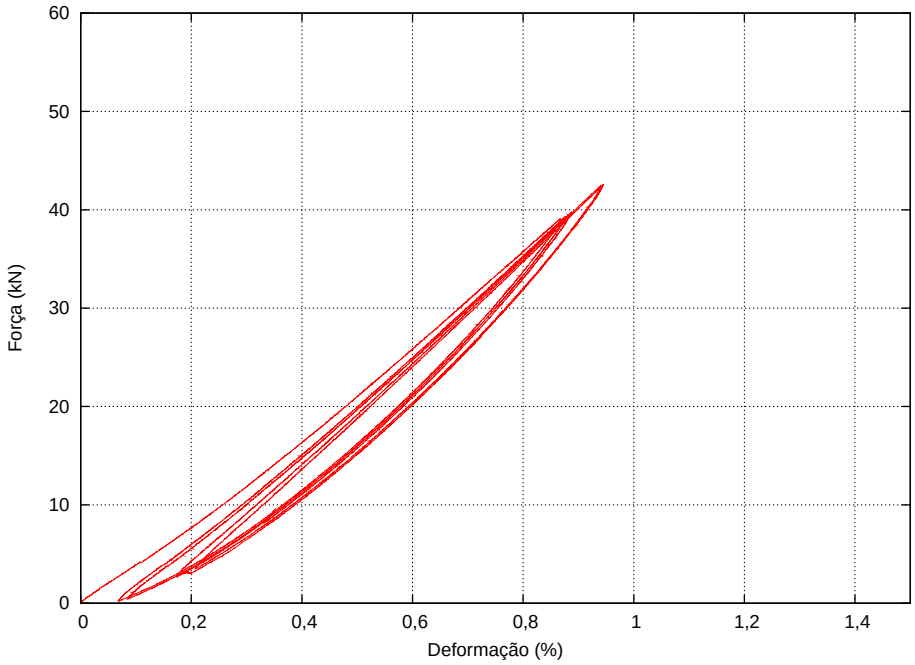

Figura 3.7: Curva *Força x Deformação* para caso A1

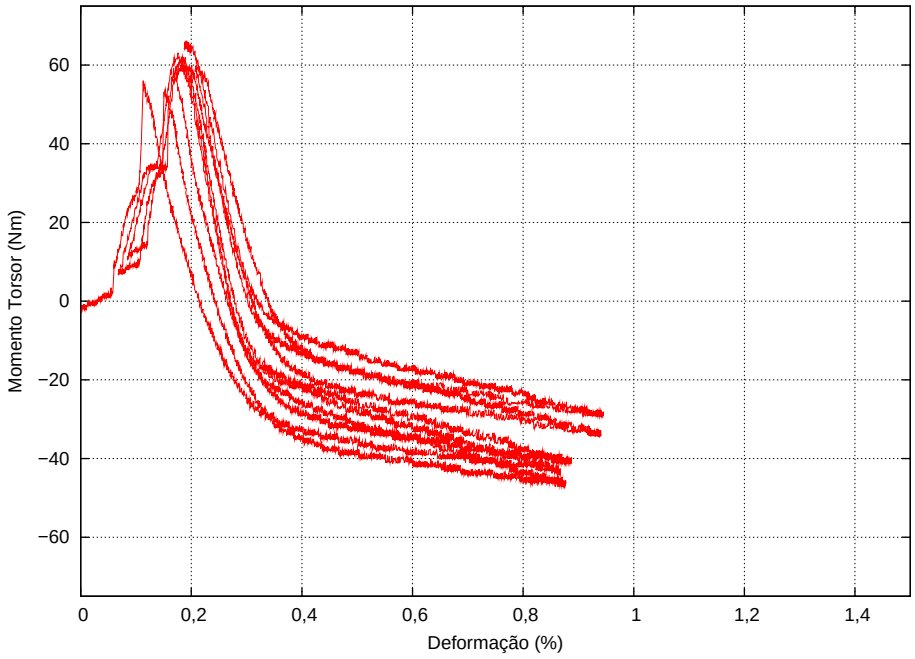

Figura 3.8: Curva *Momento Torsor x Deformação* para o caso A1

Caso B

As figuras 3.9 e 3.10 apresentam respectivamente os resultados de *Força x Deformação* e *Ângulo de Giro x Deformação* do caso B1 (sem pressão interna e com as extremidades livres para girar). Percebe-se que o comportamento axial é semelhante ao caso A1, apresentando uma boa linearidade e um pequeno efeito de histerese. O ângulo de giro observado apresenta uma pequena não-linearidade, porém seu valor máximo é bem pequeno (menos de 3°).

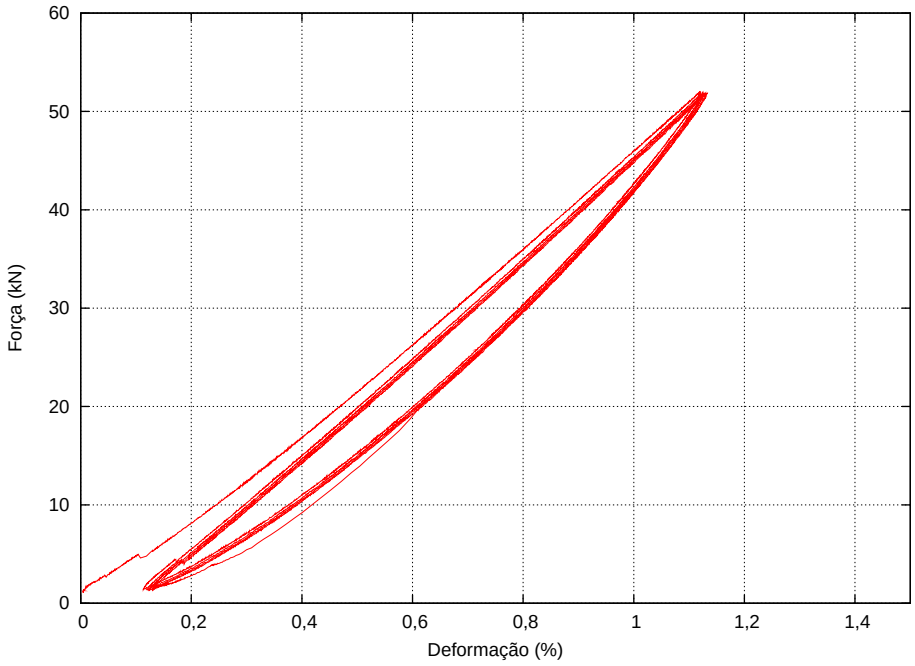

Figura 3.9: Curva *Força x Deformação* para o caso B1

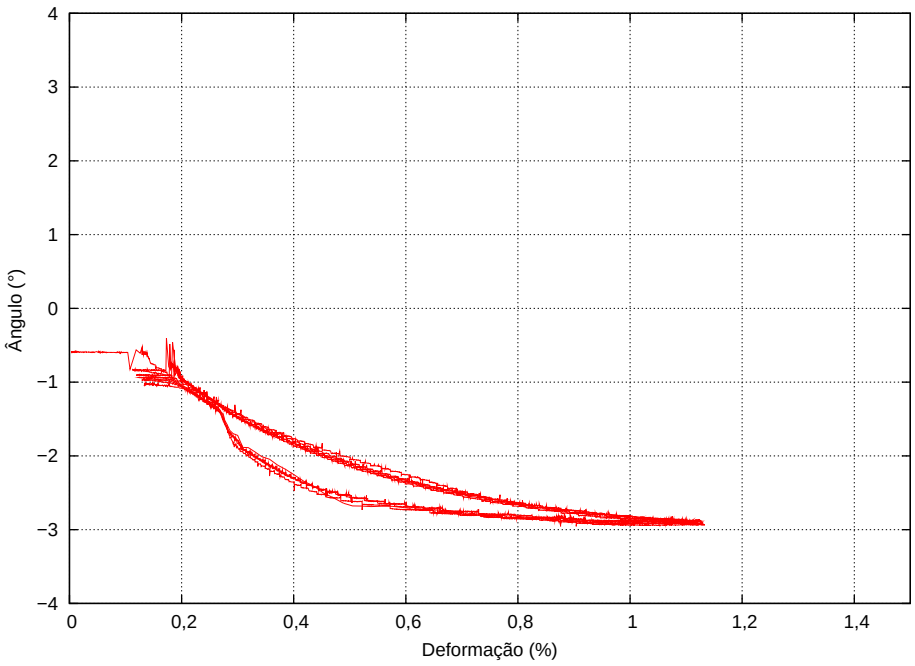

Figura 3.10: Curva *Ângulo de Giro x Deformação* para o caso B1

Caso C

As figuras 3.11 e 3.12 apresentam os resultados do caso C1 (com pressão interna e com as extremidades fixas). Mais uma vez, o comportamento mecânico do tubo, quando submetido a um esforço axial, mostrou-se similar aos outros casos. No entanto, a resposta de momento de torção reativo em função do alongamento apresentou uma não-linearidade muito grande, mudando inclusive o comportamento do tubo após o primeiro ciclo de carregamento. Este comportamento foi também observado no caso C2, indicando que não se tratou de um erro de medição.

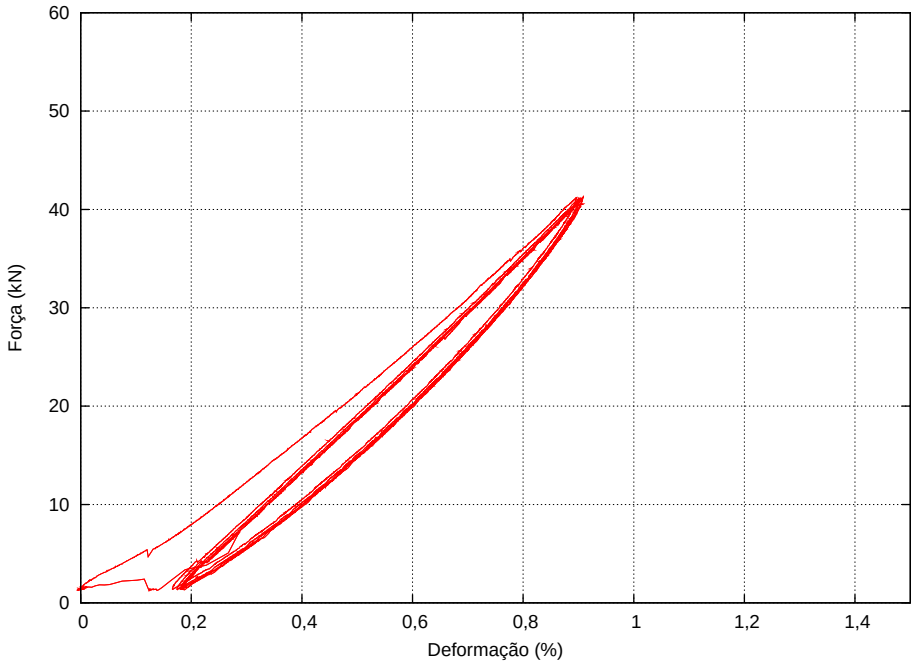

Figura 3.11: Curva *Força de Tração x Deformação* para o caso C1

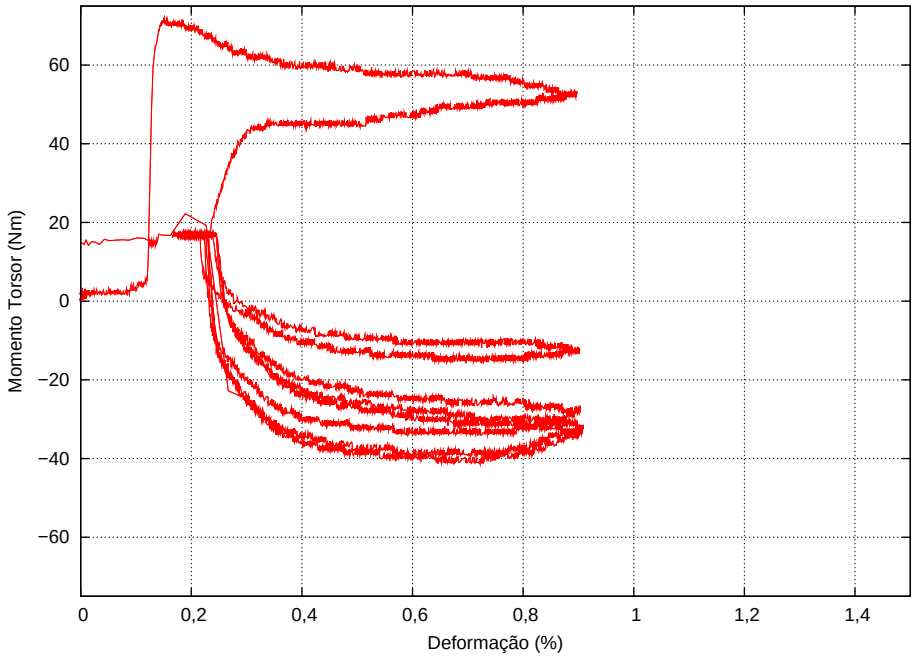

Figura 3.12: Curva *Momento Torsor x Deformação* para o caso C1

Caso D

Finalmente, a figura 3.13 mostra o resultado de *Força de tração x Deformação* do caso D1 (com pressão interna e com as extremidades livres para girar), indicando um comportamento semelhante às demais curvas já apresentadas. Na figura 3.14 nenhuma alteração é observada no ângulo de giro do tubo ao longo de todo o carregamento, indicando que o duto ensaiado é bem balanceado ao torque quando pressurizado.

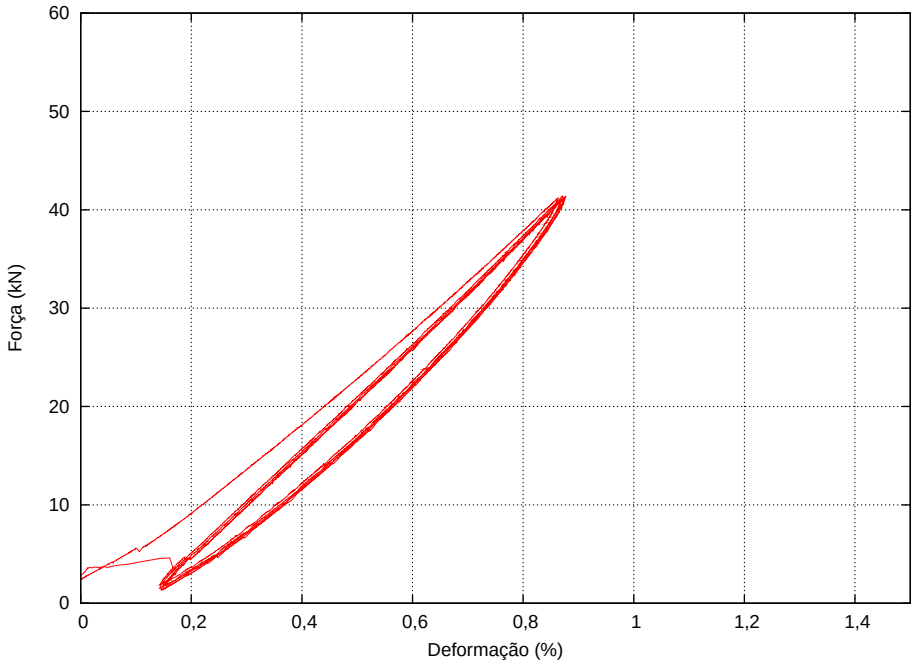

Figura 3.13: Curva *Força de Tração x Deformação* para o caso D1

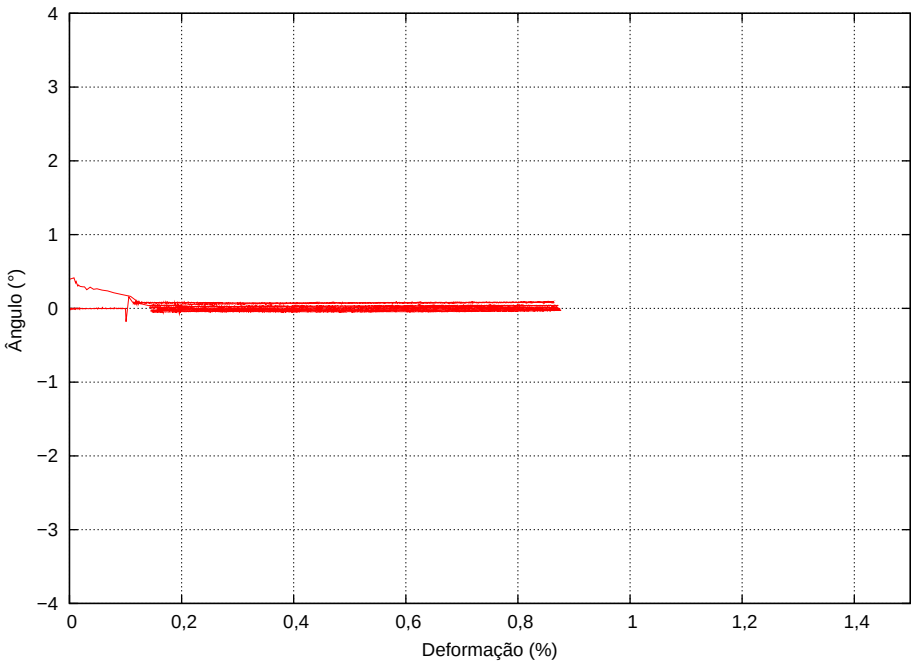

Figura 3.14: Curva *Ângulo de Giro x Deformação* para o caso D1

3.4.2 Deformações nos tendões

As figuras 3.15 a 3.20 mostram as deformações dos extensômetros no caso A1. Percebe-se claramente que as deformações axiais nos tendões não são uniformes, apresentando grandes diferenças inclusive entre tendões adjacentes. Observa-se também que a deformação na direção binormal de um tendão, medida pelos extensômetros colocados nas direções transversais, é muito pequena em comparação à deformação na direção axial.

3.4.3 Conclusões

Através dos ensaios experimentais foram obtidas diversas curvas para o tubo flexível submetido à carregamentos axissimétricos. Os capítulos a seguir apresentarão um modelo analítico e um modelo em elementos finitos, ambos representando o tubo ensaiado experimentalmente, e os resultados experimentais servirão como base de comparação para os resultados previstos pelos modelos propostos.

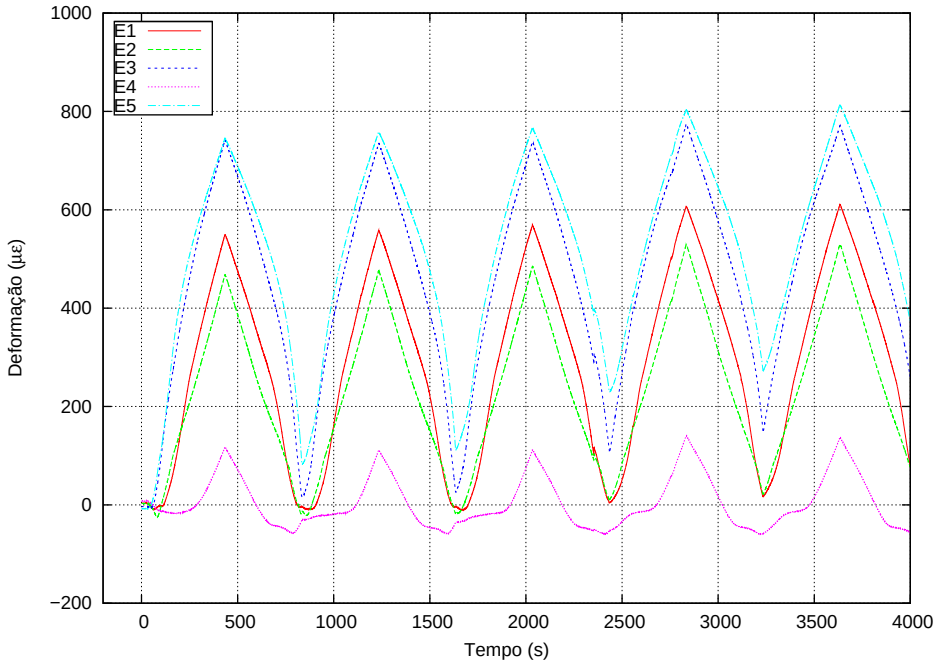

Figura 3.15: Deformação axial dos tendões da janela esquerda (Caso A1).

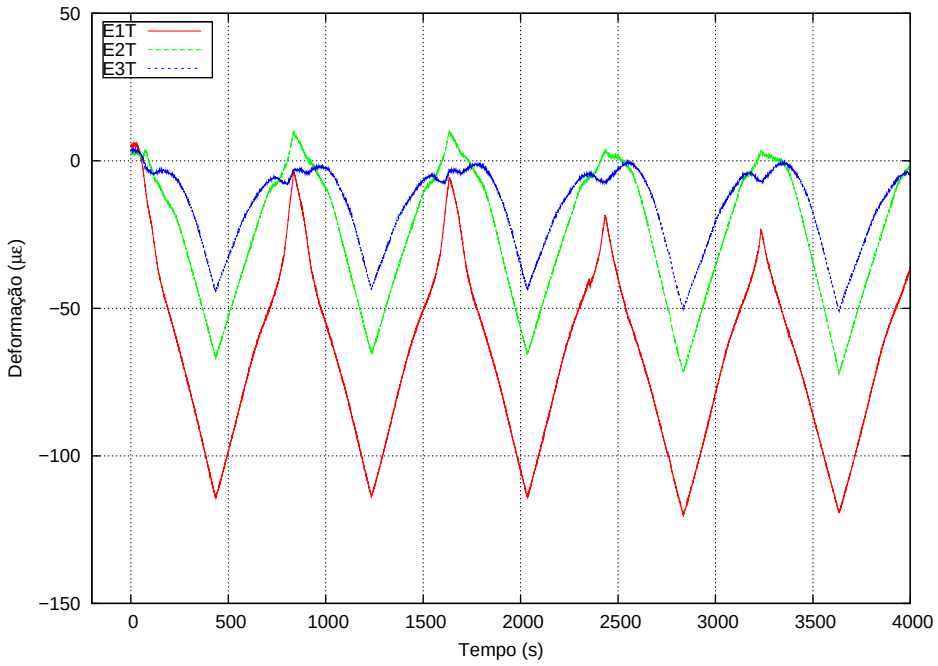

Figura 3.16: Deformação transversal dos tendões da janela esquerda (Caso A1).

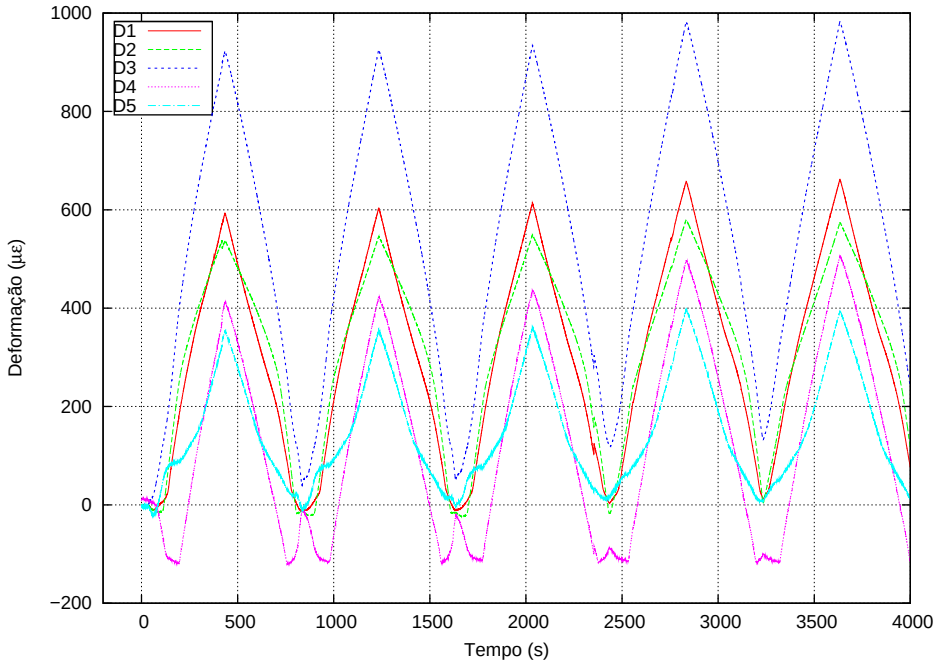

Figura 3.17: Deformação axial dos tendões da janela direita (Caso A1).

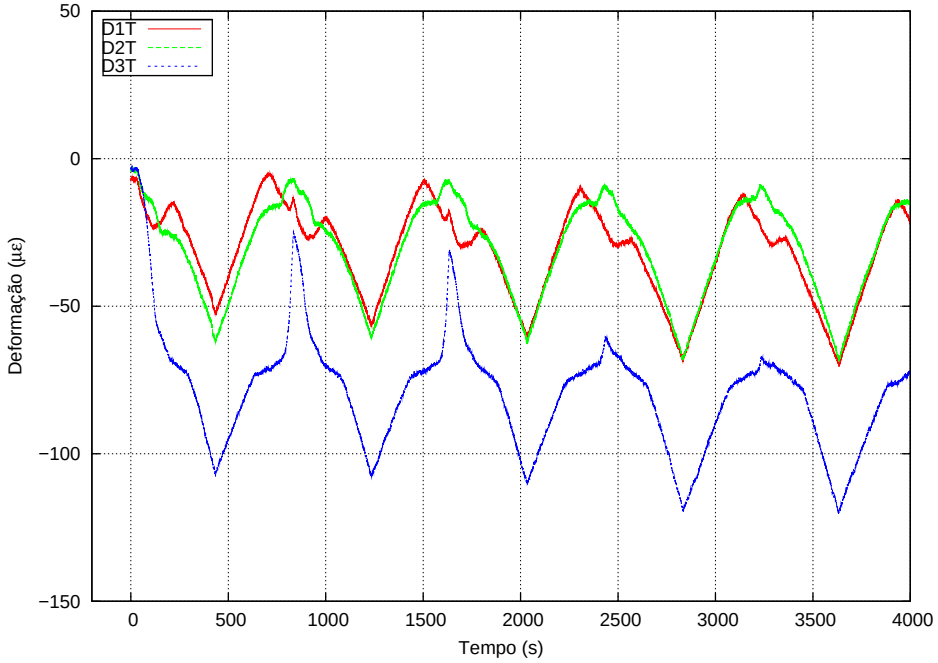

Figura 3.18: Deformação transversal dos tendões da janela direita (Caso A1).

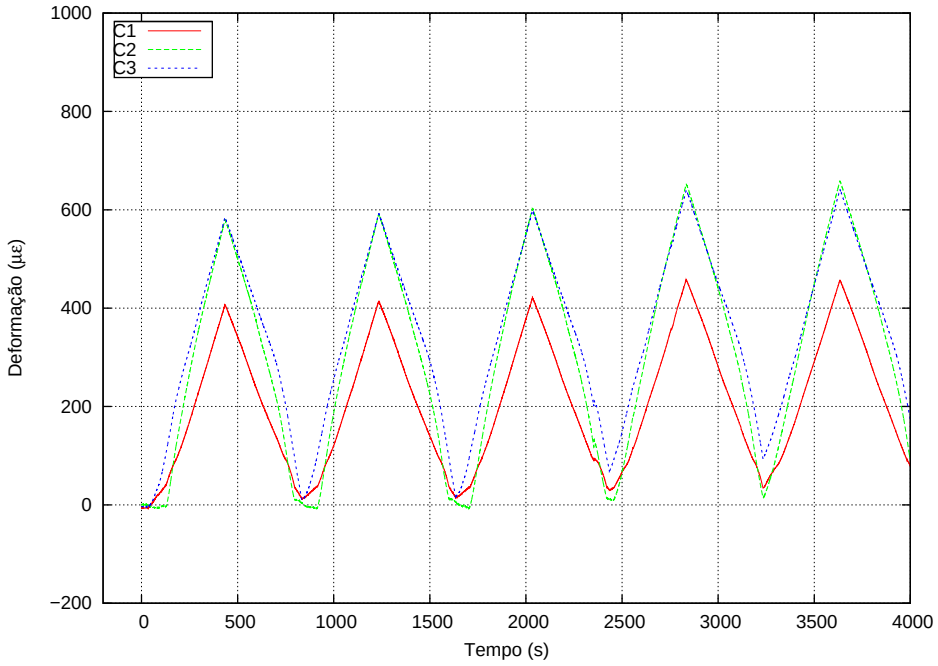

Figura 3.19: Deformação axial dos tendões da janela central (Caso A1).

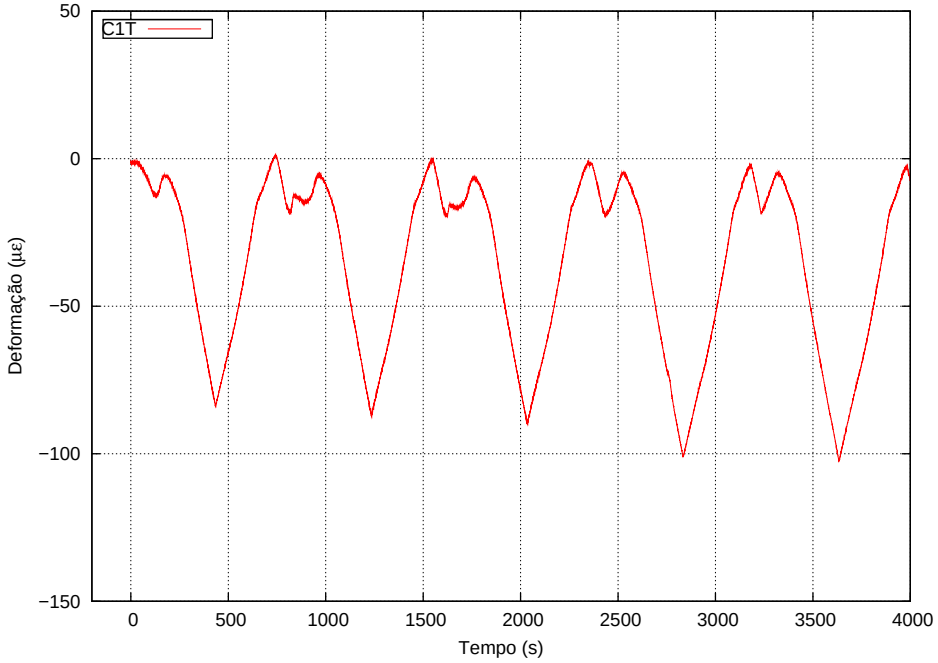

Figura 3.20: Deformação transversal dos tendões da janela central (Caso A1).

4 *Modelos Analíticos*

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o modelo analítico desenvolvido para a análise de distribuição de esforços e deslocamentos de cada camada de um riser, considerando somente esforços de natureza axissimétrica. A partir de um conjunto de hipóteses simplificadoras, são desenvolvidos modelos específicos para cada camada do riser, e por fim é feita uma modelagem do tubo considerando todas as camadas e as interações que ocorrem entre elas. v

4.2 Considerações gerais e hipóteses

Uma importante consideração que será feita ao longo de todo este trabalho é que a análise local é feita admitindo-se que o comprimento L do tubo num determinado trecho, medido ao longo de seu eixo central, é bem pequeno se comparado ao comprimento total da linha, porém suficientemente grande se comparado ao diâmetro externo da linha, de tal modo que as variações dos esforços de tração, torção e pressão interna e/ou externa ao longo deste comprimento possam ser consideradas desprezíveis em relação aos valores atuantes numa seção qualquer neste trecho. Sendo D o diâmetro externo da linha, admite-se que $O(L/D) \approx 10$ é um valor para o qual esta hipótese possa ser considerada razoável.

Antes de dar prosseguimento às deduções, é necessário estabelecer algumas hipóteses gerais, que serão utilizadas ao longo deste estudo:

1. Todos os materiais constituem meios contínuos, homogêneos e isótropos, e seu comportamento pode ser modelado como elástico-linear;

2. Admite-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos, em outras palavras, considera-se a hipótese de linearidade geométrica;

3. O alongamento médio axial (ε_z) e o ângulo de rotação por unidade de comprimento

($\Delta\phi/L$) são considerados constantes ao longo do comprimento do tubo e iguais para todas as camadas;

4. O eixo central do tubo permanece reto, independentemente dos carregamentos aplicados;

5. Os carregamentos aplicados nos contornos de cada camada são considerados constantes e uniformemente distribuídos;

6. Os efeitos de atrito, bem como todos os demais efeitos dissipativos, são desconsiderados, de maneira a considerar o sistema como conservativo.

Tais hipóteses são encontradas com frequência no estudo de linhas flexíveis sob carregamentos axissimétricos e simplificam consideravelmente a análise. Outras hipóteses adicionais serão consideradas quando oportuno, levando sempre em conta que estas não podem ser conflitantes com aquelas já estabelecidas.

4.3 Modelagem dos componentes de um tubo flexível

Neste item serão apresentadas as formulações analíticas para os componentes de um tubo flexível. Cada camada do tubo será analisada independentemente das outras. Apesar de todas as camadas compartilharem o mesmo alongamento axial e ângulo de torção por unidade de comprimento, o que representa uma espécie de "aderência" nestes deslocamentos, as variações de raio interno e externo não são necessariamente iguais, seja para uma mesma camada, em virtude da variação de espessura desta camada, seja para a interface entre camadas adjacentes, em virtude de um possível afastamento entre as camadas.

Cada camada irá contribuir com um conjunto de equações que, graças às hipóteses simplificadoras, é sempre linear em suas incógnitas [1]. A matriz dos coeficientes deste sistema linear pode ser chamada de "matriz de rigidez", uma vez que o vetor de incógnitas contém somente variáveis de deslocamento e o vetor das constantes contém os esforços. Esta abordagem matricial é vista, por exemplo, em Bahtui [4] e McNamara; Harte [23], neste último porém sem permitir a formação de aberturas.

Após a modelagem de cada componente do riser, serão apresentadas as equações adicionais que introduzem as interações entre as camadas e o equilíbrio global do conjunto.

[1] O modelo de cada camada é linear, porém, conforme será apresentado posteriormente, o modelo para o tubo completo apresenta uma não-linearidade decorrente do efeito de contato entre as camadas.

4.3.1 Balanço de energia

Considerando uma camada (plástica ou helicoidal) retirada de um tubo flexível sob ação dos seguintes carregamentos externos de natureza axissimétrica:

- Força de tração (F_t);
- Momento torçor (M_t);
- Pressão interna (p_{int});
- Pressão externa (p_{ext});

O potencial das forças externas W é o trabalho realizado por estas forças externas para levar um corpo de sua configuração deformada até a sua configuração original. Considerando somente estes esforços de natureza axissimétrica, o potencial W é dado por:

$$W = -\left[\iint_{A_{int}} p_{int}\, dA_{int}\right] \cdot \Delta R_i - \left[\iint_{A_{ext}} p_{ext}\, dA_{ext}\right] \cdot (-\Delta R_e) - F_t \cdot \Delta L - M_t \cdot \Delta\phi \tag{4.1}$$

Designemos de força decorrente da pressão interna (F_{Pi}) e força decorrente da pressão externa (F_{Pe}):

$$F_{Pi} = \iint_{A_{int}} p_{int}\, dA_{int} \quad ; \quad F_{Pe} = -\iint_{A_{ext}} p_{ext}\, dA_{ext}$$

Tomando-se agora a variação de W obtemos:

$$\delta W = -F_{Pi} \cdot \delta\Delta R_i - F_{Pe} \cdot \delta\Delta R_e - F_t \cdot \delta\Delta L - M_t \cdot \delta\Delta\phi \tag{4.2}$$

Pode-se mostrar que a energia interna U de um sistema é dada por (ver apêndice A):

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}\, dV \tag{4.3}$$

Onde, conforme veremos adiante, $\vec{\sigma}$ é um vetor com as componentes de tensão e $\vec{\varepsilon}$ é um vetor com as componentes de deformações, ambos convenientemente definidos para cada camada do riser, de acordo com as hipóteses estabelecidas para tal. A equação acima inclui, em sua definição, que as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações são

satisfeitas, portanto não é necessária nenhuma consideração adicional ao utilizar a equação da energia para realizar a análise estrutural de um segmento. A dedução completa da equação 4.3 está mostrada em detalhes no item A.4.

Uma vez que não serão considerados efeitos dissipativos de energia neste modelo, pode-se afirmar que todo o trabalho realizado é acumulado em energia interna, e toda energia interna liberada realiza trabalho. Portanto, a soma destas grandezas deve permanecer constante, ou seja:

$$U + W = \text{constante} \tag{4.4}$$

Diferenciando a equação acima, obtemos:

$$\delta(U + W) = 0 \leftrightarrow \delta U = -\delta W \tag{4.5}$$

A equação acima, apesar de simples, contempla todos os elementos necessários para se realizar o modelamento analítico de qualquer camada do riser, seguindo as hipóteses estabelecidas para isso.

4.3.2 Modelo para as camadas plásticas

Os modelos analíticos utilizados para as camadas plásticas do riser são retirados de modelos de tubos de parede espessa derivados da teoria da elasticidade linear, podendo ser observados em Love [19] ou Timoshenko [34]. Também são encontrados com frequência na literatura modelos de tubo de parede fina, quando se considera que a espessura da camada é suficientemente pequena se comparada ao raio médio (ou seja, $t/R \ll 1$, onde t é a espessura e R é o raio médio da camada plástica). Este modelo é, naturalmente, simplificado, pois não trata da variação de tensões tangenciais ao longo da espessura, porém pode fornecer bons resultados em relação ao modelo de tubo de parede espessa, com um erro da ordem de t/R (ver, por exemplo, Ramos [27]). No entanto, para efeitos de generalização, nesta dissertação as camadas plásticas serão tratadas exclusivamente como um tubo de parede espessa.

Campo de deslocamentos e deformações

A solução analítica para o campo de deslocamento radial de um tubo de parede espessa no plano, em coordenadas cilíndricas, sujeito somente a pressões interna e externa, é dada por (ver,

por exemplo, Timoshenko [34]):

$$\begin{cases} u_r(r) = C_1 \cdot r + \dfrac{C_2}{r} \\ u_\theta(r) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes que dependem das condições de contorno e da geometria do tubo, lembrando que a equação acima é válida se considerarmos as hipóteses estabelecidas em 4.2 (em particular, o carregamento deve ser constante, o material é elástico-linear e são considerados somente pequenos deslocamentos). Estas equações podem ser estendidas para definir um campo de deslocamentos que inclui variações no ângulo de giro e no comprimento do segmento, como visto em Ramos [27]:

$$\begin{cases} u_r(r,z) &= \dfrac{1}{R_e^2 - R_i^2}\left[-\left(r - \dfrac{R_e^2}{r}\right)\cdot R_i \cdot \Delta R_i + \left(r - \dfrac{R_i^2}{r}\right)\cdot R_e \cdot \Delta R_e\right] \\ u_\theta(r,z) &= z \cdot r \cdot \dfrac{\Delta\phi}{L} \\ u_z(r,z) &= z \cdot \dfrac{\Delta L}{L} \end{cases} \tag{4.7}$$

Pode-se obter os campos de deformações ε e distorções γ utilizando-se das relações deslocamento-deformação descritas no anexo A.4 no campo de deslocamentos apresentado em 4.7, ressaltando que desta maneira as equações de compatibilidade de deformações são

automaticamente satisfeitas:

$$\begin{cases} \varepsilon_r(r,z) &= \dfrac{1}{R_e^2 - R_i^2}\left[-\left(1+\dfrac{R_e^2}{r^2}\right)\cdot R_i\Delta R_i + \left(1+\dfrac{R_i^2}{r^2}\right)\cdot R_e\Delta R_e\right] \\ \varepsilon_\theta(r,z) &= \dfrac{1}{R_e^2 - R_i^2}\left[-\left(1-\dfrac{R_e^2}{r^2}\right)\cdot R_i\Delta R_i + \left(1-\dfrac{R_i^2}{r^2}\right)\cdot R_e\Delta R_e\right] \\ \varepsilon_z(r,z) &= \dfrac{\Delta L}{L} \\ \gamma_{r\theta}(r,z) &= 0 \\ \gamma_{\theta z}(r,z) &= r\dfrac{\Delta\phi}{L} \\ \gamma_{zr}(r,z) &= 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Energia interna do sistema

São válidas as seguintes relações constitutivas, descritas em coordenadas cilíndricas, para um material elástico-linear, aplicando-se a lei de Hooke (de acordo com a equação A.7):

$$\begin{cases} \sigma_r &= \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_r \qquad \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \\ \sigma_\theta &= \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_\theta \qquad \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_z \qquad \tau_{zr} = G\gamma_{zr} \end{cases} \tag{4.9}$$

Pode-se definir um vetor de tensões $\vec{\sigma}$ e um vetor de deformações $\vec{\varepsilon}$ a partir de suas componentes:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Utilizando as equações constitutivas dadas em 4.9, a equação da energia interna 4.3 para

uma camada plástica pode ser expressa somente em função das deformações e distorções:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left[(\lambda+2G)(\varepsilon_r^2+\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_z^2)+2\lambda(\varepsilon_r\varepsilon_\theta+\varepsilon_\theta\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_r)+G(\gamma_{r\theta}^2+\gamma_{\theta z}^2+\gamma_{zr}^2)\right] dV \quad (4.11)$$

Tomando-se a variação de U, chega-se a:

$$\begin{aligned}\delta U = \iiint_V \Big[&(\lambda+2G)(\varepsilon_r\delta\varepsilon_r+\varepsilon_\theta\delta\varepsilon_\theta+\varepsilon_z\delta\varepsilon_z)+\lambda[\delta\varepsilon_r(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+\delta\varepsilon_\theta(\varepsilon_r+\varepsilon_z)+\delta\varepsilon_z(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)]+\\ &G(\gamma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta}+\gamma_{\theta z}\delta\gamma_{\theta z}+\gamma_{zr}\delta\gamma_{zr})\Big]\, dV\end{aligned} \quad (4.12)$$

A equação 4.12 pode ser escrita na forma matricial:

$$\delta U = \iiint_V \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_r \\ \delta\varepsilon_\theta \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{r\theta} \\ \delta\gamma_{\theta z} \\ \delta\gamma_{zr} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r_\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} dV \quad (4.13)$$

É necessário portanto calcular as variações das deformações apresentadas em 4.8:

$$\begin{cases} \delta\varepsilon_r(r,z) &= \dfrac{1}{R_e^2-R_i^2}\left[-\left(1+\dfrac{R_e^2}{r^2}\right)\cdot R_i\,\delta\Delta R_i+\left(1+\dfrac{R_i^2}{r^2}\right)\cdot R_e\,\delta\Delta R_e\right] \\ \delta\varepsilon_\theta(r,z) &= \dfrac{1}{R_e^2-R_i^2}\left[-\left(1-\dfrac{R_e^2}{r^2}\right)\cdot R_i\,\delta\Delta R_i+\left(1-\dfrac{R_i^2}{r^2}\right)\cdot R_e\,\delta\Delta R_e\right] \\ \delta\varepsilon_z(r,z) &= \dfrac{\delta\Delta L}{L} \\ \delta\gamma_{r\theta}(r,z) &= 0 \\ \delta\gamma_{\theta z}(r,z) &= r\dfrac{\delta\Delta\phi}{L} \\ \delta\gamma_{zr}(r,z) &= 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Finalmente, utilizando as relações dadas em 4.8 e 4.14 na equação da energia interna 4.12, obtém-se para o variacional δU de uma camada cilíndrica:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \delta\Delta R_i \\ \delta\Delta R_e \\ \delta\Delta L \\ \delta\Delta\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta R_e \\ \Delta L \\ \Delta\phi \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Onde:

$$k_{11} = 2\pi L\cdot\left[(\lambda+2G)\cdot\frac{R_e^2+R_i^2}{R_e^2-R_i^2}-\lambda\right] \qquad k_{12}=k_{21}=-4\pi L\cdot\frac{R_e\cdot R_i}{R_e^2-R_i^2}\cdot(\lambda+2G)$$

$$k_{13}=k_{31}=-2\pi R_i\cdot\lambda \qquad k_{14}=k_{41}=0$$

$$k_{22} = 2\pi L\cdot\left[(\lambda+2G)\cdot\frac{R_e^2+R_i^2}{R_e^2-R_i^2}+\lambda\right] \qquad k_{23}=k_{32}=2\pi R_e\cdot\lambda$$

$$k_{24}=k_{42}=0 \qquad k_{33}=\pi\cdot(\lambda+2G)\cdot\frac{(R_e^2-R_i^2)}{L}$$

$$k_{34}=k_{43}=0 \qquad k_{44}=\pi G\cdot\frac{R_e^4-R_i^4}{2L}=\frac{GJ}{L}$$

Sistema completo

Utilizando-se dos resultados de 4.5, 4.2 e 4.15, define-se um conjunto de equações relacionando os deslocamentos e os esforços atuantes em uma camada cilíndrica:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & 0 \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta R_e \\ \Delta L \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Pi} \\ F_{Pe} \\ F_t \\ M_t \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

4.3.3 Modelo para a camada helicoidal

Energia interna do sistema

Considerando que, em um tendão arbitrário, existam somente tensões de tração σ_t e tensões normais σ_n, podemos obter as equações constitutivas novamente através das equações de Hooke:

$$\begin{cases} E \cdot \varepsilon_t = \sigma_t - \nu \cdot \sigma_n \\ E \cdot \varepsilon_n = \sigma_n - \nu \cdot \sigma_t \end{cases} \tag{4.17}$$

Os versores $\vec{t}$ e $\vec{n}$ são os versores tangente e normal da curva formada pelo eixo central de um tendão, conforme ilustra a figura 4.1 (Ver também o anexo B.1). Podemos agora definir um vetor de tensões $\vec{\sigma}$ e um vetor de deformações $\vec{\varepsilon}$ a partir de suas componentes:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Utilizando as relações da equação constitutiva 4.17, a equação da energia interna 4.3 para um tendão pode ser expressa somente em função das deformações:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_t^2 + \varepsilon_n^2 + 2\nu \cdot \varepsilon_t \cdot \varepsilon_n \right] dV \tag{4.19}$$

Tomando-se a variação de U, chega-se a:

$$\delta U = \frac{E}{1-\nu^2} \iiint_V \left[\varepsilon_t \cdot \delta\varepsilon_t + \varepsilon_n \cdot \delta\varepsilon_n + \nu \cdot (\varepsilon_t \cdot \delta\varepsilon_n + \varepsilon_n \cdot \delta\varepsilon_t) \right] dV \tag{4.20}$$

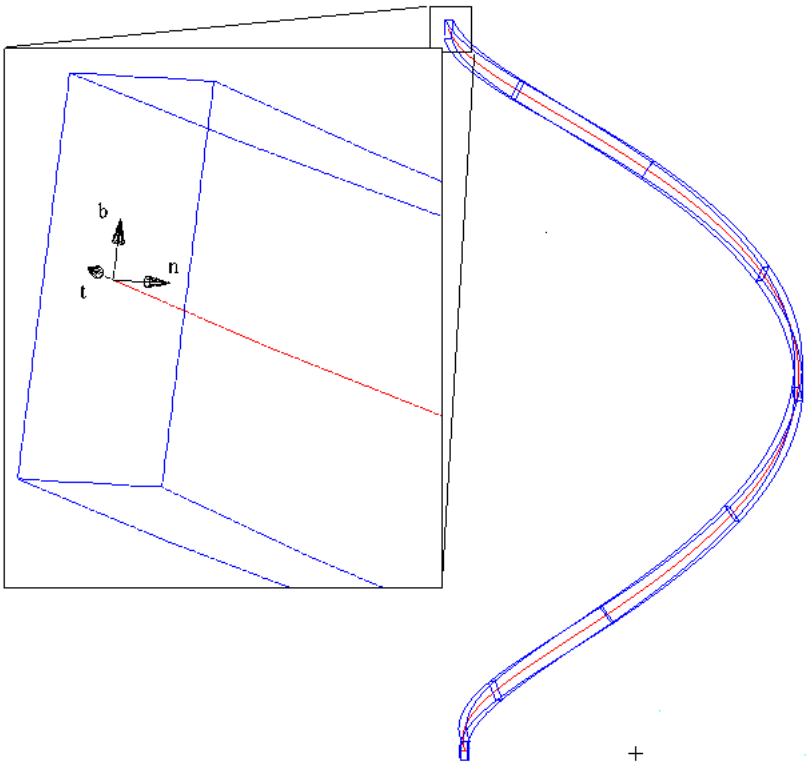

Figura 4.1: Sistema de coordenadas em um tendão.

A equação 4.20 pode ser escrita na forma matricial:

$$\delta U = \frac{E}{1-\nu^2} \iiint_V \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_t & \delta\varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} dV \tag{4.21}$$

Para dar continuidade às deduções, é necessário relacionar as componentes de deformação apresentadas na equação 4.20 com as variáveis de deslocamentos utilizadas no modelamento de uma camada, obedecendo, naturalmente, as hipóteses previamente estabelecidas no item 4.2. Tais relações são encontradas com frequência na literatura, (por exemplo, Knapp [16] ou Ramos [27]) e sua dedução simplificada está mostrada no anexo B.2, relevando aqui apenas o fato de que tais deduções levam em conta as hipóteses levantadas no início do capítulo, permitindo assim seu uso neste modelamento sem a necessidade de grandes adaptações. As deformações de um tendão sob um carregamento axissimétrico podem ser descritas utilizando as equações

B.17 e B.13:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \left(\dfrac{\Delta R_e + \Delta R_i}{R_e + R_i}\right)\sin^2(\alpha) + \left(\dfrac{\Delta\phi}{L}\dfrac{R_e + R_i}{2}\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \dfrac{\Delta L}{L}\cos^2(\alpha) \\ \\ \varepsilon_n = \dfrac{\Delta R_e - \Delta R_i}{R_e - R_i} \end{cases} \tag{4.22}$$

Introduzindo estas relações na equação 4.20, a equação da energia para uma camada contendo n tendões de largura b se torna:

$$\delta U = \frac{E\,n\,b}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} \delta\Delta R_i \\ \delta\Delta R_e \\ \delta\Delta L \\ \delta\Delta\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta R_e \\ \Delta L \\ \Delta\phi \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Onde:

$$k_{11} = \frac{1}{\xi}(\zeta^2 - 2\nu\zeta + 1) \qquad k_{23} = k_{32} = \cos(\alpha)(\zeta + \nu)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{\xi}(\zeta^2 - 1) \qquad k_{24} = k_{42} = \sin(\alpha)(\zeta + \nu)R$$

$$k_{13} = k_{31} = \cos(\alpha)(\zeta - \nu) \qquad k_{33} = \xi\cos(\alpha)^2$$

$$k_{14} = k_{41} = \sin(\alpha)(\zeta - \nu)R \qquad k_{34} = k_{43} = \xi\cos(\alpha)\sin(\alpha)R$$

$$k_{22} = \frac{1}{\xi}(\zeta^2 + 2\nu\zeta + 1) \qquad k_{44} = \xi\sin(\alpha)^2R^2$$

Com:

$$R = \frac{R_e + R_i}{2}; \quad t = R_e - R_i; \quad \xi = \frac{t\cos(\alpha)}{L}$$

$$\zeta = \frac{t}{2R}\sin(\alpha)^2 = \frac{R_e - R_i}{R_e + R_i}\sin(\alpha)^2$$

Considerou-se até aqui que todos os tendões são idênticos. Apesar de ser matematica e computacionalmente viável considerar que cada tendão (dentro de uma mesma camada helicoidal) possa ter valores diferentes de constantes de material, ou até mesmo de medida,

em relação a outros tendões, esta abordagem é desnecessária, visto que esta situação não é observada em linhas flexíveis.

As equações obtidas neste modelo são similares àquelas encontradas em Bahtui [4], porém neste trabalho o autor não considera as variações de espessura em uma camada. Introduzindo tal simplificação neste modelo, chega-se nas mesmas equações apresentadas no trabalho citado.

Sistema completo

Utilizando-se dos resultados de 4.5, 4.2 e 4.23, define-se um conjunto de equações relacionando os deslocamentos e esforços atuantes em uma camada helicoidal:

$$\frac{E\,n\,b}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta R_e \\ \Delta L \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Pi} \\ F_{Pe} \\ F_t \\ M_t \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Formulação alternativa

Ao invés de utilizar a equação da energia, pode-se chegar a um modelo analítico partindo das equações de equilíbrio de Clebsch. Tais equações garantem o equilíbrio de uma barra naturalmente curva no espaço, sem a necessidade de impor a hipótese de pequenos deslocamentos, mantendo no entanto a hipótese de pequenas deformações.

É de se esperar que, partindo das mesmas hipóteses, as equações que regem o problema sejam as mesmas. As equações de equilíbrio de Clebsch possuem menos restrições em relação àquelas impostas no item 4.2, a saber, tais equações permitem grandes deslocamentos. O anexo B.4 apresenta estas equações, bem como uma série de deduções e simplificações, de maneira que, para as hipóteses estabelecidas, o equilíbrio em um tendão arbitrário de seção transversal retangular pode ser resumido com a seguinte equação:

$$\Delta p = \frac{T\chi}{b} \leftrightarrow \sigma_t = (p_{int} - p_{ext})\frac{R}{t\,\sin(\alpha)^2} \tag{4.25}$$

A fórmula 4.25 é comumente encontrada na literatura (por exemplo, Féret; Bournazel [13] e Witz; Tan [35]), e, segundo Ramos, [27], pode ser relacionada à clássica fórmula de tensão circunferencial em vasos de parede fina sujeitos a um diferencial de pressões.

Adicionalmente à relação citada anteriormente, é necessário estabelecer uma equação para

as tensões atuantes na direção radial da camada, que são as tensões na direção normal de um tendão, representada por σ_n. Esta tensão pode ser aproximada pela média aritmética das pressões atuantes nesta camada, ou seja:

$$\sigma_n = -\frac{p_{ext} + p_{int}}{2} \tag{4.26}$$

Por fim, pode-se calcular os esforços F_t e M_t pela integração das tensões de tração σ_t na extremidade dos tendões, e os esforços F_{Pi} e F_{Pe} pela integração das pressões nas áreas de contato dos tendões:

$$\begin{aligned} F_{Pi} &= \frac{Lbn}{\cos(\alpha)} \cdot p_{int} \qquad & F_{Pe} &= -\frac{Lbn}{\cos(\alpha)} \cdot p_{ext} \\ F_t &= A_t \cdot \sigma_t \cdot \cos(\alpha) \cdot n \qquad & M_t &= A_t \cdot \sigma_t \cdot R \cdot \sin(\alpha) \cdot n \end{aligned} \tag{4.27}$$

Onde a área da seção transversal (A_t) é dada por $b \cdot t$ no caso dos tendões retangulares.

Utilizando as equações de equilíbrio 4.25 e 4.26, em adição às relações cinemáticas estabelecidas em 4.22, juntamente com as equações 4.27, chega-se às mesmas relações dadas em 4.24, obtidas através do método da energia descrito anteriormente.

4.3.4 Modelos para a carcaça intertravada

Devido à sua forma construtiva, a carcaça intertravada exige um certo cuidado para o seu modelamento. Existem, na literatura, basicamente dois tipos diferentes de abordagem. O primeiro trata a carcaça como uma camada helicoidal, formada por uma única hélice, com um ângulo de assentamento bastante alto. O segundo trata a carcaça como um tubo equivalente, considerando-o como um material contínuo e utilizando valores de espessura e propriedades mecânicas adaptados para tentar representar de forma adequada o seu comportamento para um dado carregamento aplicado.

O modelo de camada helicoidal aparece com mais frequência na literatura, por exemplo em Claydon et al. [8], Féret; Bournazel [13], Goto et al. [15] e Witz; Tan [35]. A modelagem de camadas helicoidais está descrita no item 4.3.3, portanto será omitida desta seção. O modelo de tubo equivalente pode ser encontrado em McNamara; Harte [23], Cruz [9], e Ramos [27]. Neste último, o autor cita trabalhos onde abordagem de tubo equivalente foi amparada por resultados experimentais satisfatórios para predizer o comportamento linear da estrutura.

O modelo de tubo equivalente foi implementado no modelo em elementos finitos e será detalhado no capítulo posterior. Para utilizar o modelo de camada helicoidal, no entanto, é necessário observar algumas considerações adicionais, a saber:

- A carcaça intertravada não é estanque, em outras palavras, a pressão interna exercida pelo fluído transportado pelo tubo é resistida pela camada plástica adjacente;
- As equações apresentadas em 4.24 presumem que a seção transversal de um tendão é retangular, no entanto a carcaça intertravada apresenta um perfil em forma de "S".

A segunda condição, a princípio, impossibilitaria o uso das equações dadas em 4.24 para a modelagem da carcaça intertravada. No entanto, é possível estabelecer uma seção retangular "equivalente" à seção original, tal que a área da seção retangular equivalente seja a mesma área da seção original. Esta mudança de espessura pode ser realizada alterando o valor do raio interno para um valor equivalente que satisfaça esta condição, ou seja:

$$A_t = b \cdot (R_e - R_{i,eq}) \leftrightarrow R_{i,eq} = R_e - \frac{A_t}{b} \tag{4.28}$$

Onde $R_{i,eq}$ é o valor do raio interno equivalente que deverá ser considerado pelo modelo da carcaça intertravada.

Portanto, tomando-se o cuidado de utilizar o raio interno equivalente e o de se aplicar a pressão interna na camada adjacente à carcaça intertravada, as equações dadas em 4.24 também são utilizadas para o modelamento desta camada.

4.4 Modelo para o tubo completo

Até aqui foram feitas deduções para o cálculo de forças e deslocamentos de cada camada. Resta agora estabelecer algumas equações que representem as interações que ocorrem entre as camadas, bem como equações que introduzam os carregamentos externos aplicados ao conjunto.

Naturalmente, todos os parâmetros geométricos e constantes de material devem ser conhecidos e são parâmetros de entrada para a resolução do problema. O comprimento L do riser é compartilhado entre todas as camadas, sejam elas plásticas ou helicoidais. Para cada camada j, devem ser conhecidos o raio interno $R_{i,j}$, e o raio externo $R_{e,j}$ (ou, alternativamente, o raio médio R_j e a espessura t_j). Adicionalmente, para as camadas helicoidais, é necessário fornecer

o ângulo de assentamento α_j, a largura b_j dos tendões, e o número de tendões n_j que compõem a camada. Observe que a espessura de um tendão é dada pela diferença entre os raios externo e interno de sua camada, portando não é necessário redefini-la. Por fim, deve-se fornecer os valores das constantes elásticas do material, E_j e ν_j, lembrando que quaisquer outras constantes de material (como G e λ) podem ser obtidas facilmente através destes valores. A tabela A.1 apresenta relações entre as constantes elásticas mais comuns de um material elástico-linear.

Determinação das incógnitas

Considerando que um determinado riser seja composto por N camadas, sejam elas plásticas ou helicoidais, pode-se resumir as incógnitas do problema conforme apresentado na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Determinação das incógnitas do problema

Descrição	Variáveis	Quantidade
Forças em cada camada	$F_{Pi,j}$, $F_{Pe,j}$, $F_{t,j}$, $M_{t,j}$	$4N$
Deslocamentos de cada camada	$\Delta R_{i,j}$, $\Delta R_{e,j}$	$2N$
Forças globais	F_t, M_t	2
Deslocamentos globais	ΔL, $\Delta\phi$	2
Total		$6N+4$

Temos assim um total de $6N+4$ incógnitas para o problema, sendo necessário, portanto, o mesmo número de equações linearmente independentes para a resolução do problema.

Equações para resolução

Nos itens anteriores foram apresentadas equações que relacionam os esforços externos de uma camada com os deslocamentos considerados possíveis para esta camada. Foi tomado o cuidado de se utilizar as mesmas variáveis de força e de deslocamento para cada camada, de maneira a simplificar a resolução do sistema contendo todas as camadas do riser.

Em adição às equações 4.16 e 4.24, que relacionam diretamente os esforços e deslocamentos de uma única camada, são necessárias equações que representem as interações que ocorrem entres as diversas camadas, bem como equações que introduzam os carregamentos externos impostos ao conjunto.

Para a obtenção das equações de compatibilidade entre camadas adjacentes, admite-se que, na configuração inicial (não deformada), todas as camadas do riser estão em contato. No

entanto, após a aplicação de um determinado carregamento, duas situações podem ocorrer em uma dada interface:

- As camadas se afastam uma da outra. Neste caso, é sabido que a pressão de contato entre estas camadas é conhecida e nula, e as incógnitas são os deslocamentos das camadas envolvidas:

$$\begin{cases} F_{Pe,j} = 0 \\ F_{Pi,j+1} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

- As camadas permanecem em contato. Neste caso, é sabido que os deslocamentos e as pressões na interface são iguais em ambas as camadas, porém suas magnitudes são desconhecidas:

$$\begin{cases} F_{Pe,j} = F_{Pi,j+1} \\ \Delta R_{e,j} = \Delta R_{i,j+1} \end{cases} \tag{4.30}$$

Não há como saber, a priori, qual situação ocorrerá em cada interface. Este problema pode ser modelado através da seguinte equação:

$$p_{c,j} \cdot g_j = 0 \tag{4.31}$$

Onde $p_{c,j}$ é a pressão de contato da j-ésima com a $(j+1)$-ésima camada e $g_j = \Delta R_{i,j+1} - \Delta R_{e,j} > 0$ é o afastamento entre a j-ésima e a $(j+1)$-ésima camada.

A equação 4.31 é conhecida como "condição de complementaridade", e insere uma não-linearidade no sistema de equações, pois trata-se de um produto de incógnitas. No entanto, esta abordagem mostrou-se ineficiente no método de resolução utilizado, e foi substituída por uma abordagem iterativa (a qual será explicitada adiante), não fazendo uso direto desta equação para representar o contato entre as camadas.

Cabe aqui uma observação importante em relação às equações dadas em 4.30. Observe que estamos igualando o valor das forças decorrente das pressões internas e externas, e não as pressões. Esta abordagem foi adotada para tratar o caso em que as camadas plásticas estão em contato com uma camada helicoidal: uma vez que podem existir vãos entre os tendões de uma camada helicoidal, a pressão exercida nas camadas plásticas seriam irregularmente distribuídas por conta destes vãos. A abordagem adotada trata este problema considerando que a pressão é exercida integralmente na área de contato da camada plástica.

Além das equações de compatibilidade apresentadas, são ainda necessárias duas equações referente ao equilíbrio de forças envolvendo a distribuição de esforços globais entre todas as

camadas do riser: uma diz respeito ao equilíbrio das forças de tração e outra ao equilíbrio de momentos.

$$\sum_{j=1}^{N} F_{t,j} = F_t \quad ; \quad \sum_{j=1}^{N} M_{t,j} = M_t \tag{4.32}$$

Por fim, devem ser introduzidos 4 valores que dizem respeito ao carregamento externo aplicado no tubo:

$$\begin{cases} F_{Pi} & = & \overline{F_{Pi}} & & & & \\ F_{Pe} & = & \overline{F_{Pe}} & & & & \\ F_t & = & \overline{F_t} & \text{ou} & \Delta L & = & \overline{\Delta L} \\ M_t & = & \overline{M_t} & \text{ou} & \Delta\phi & = & \overline{\Delta\phi} \end{cases} \tag{4.33}$$

Onde $\overline{X}$ indica um valor prescrito para a variável X. A tabela 4.2 apresenta de forma resumida as equações do problema.

Tabela 4.2: Determinação das equações do problema

Descrição	Quantidade	Equações utilizadas
Matriz de rigidez de cada camada	$4N$	4.16 ou 4.24
Equações de compatibilidade entre camadas	$2(N-1)$	4.29 ou 4.30
Equilíbrio de forças	2	4.32
Carregamentos externos	4	4.33
Total	$6N+4$	

As equações de compatibilidade podem ser da condição sem formação de abertura ou com formação de abertura, e em ambos os casos são fornecidas duas equações independentes em $N-1$ contatos. Temos portanto, no total, $6N+4$ equações independentes, que são suficientes para a resolução completa do sistema. É importante notar que, com exceção da condição de complementaridade citada, o sistema obtido é linear em suas incógnitas, o que traz uma grande facilidade computacional para sua resolução.

Resolução do sistema de equações

As equações apresentadas até aqui são, a princípio, suficientes para a resolução do sistema. No entanto, como foi apresentado anteriormente, existe uma não-linearidade devido ao efeito de contato entre as camadas.

Neto [25] discorre sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato. Neste trabalho é mostrada a dificuldade da consideração direta destes efeitos nos modelos analíticos, em especial a dificuldade de considerar a condição de impenetrabilidade entre dois corpos, a qual não pode ser aplicada diretamente sobre o sistema na forma de uma expressão analítica ou diferencial, podendo apenas ser expressa em termos gerais. Essas dificuldades acabam por impossibilitar a resolução do problema por métodos diretos, sendo necessária a utilização de rotinas iterativas com verificações de restrições ou métodos de penalizações.

A estratégia para resolver a não-linearidade decorrente do contato entre as camadas foi a utilização de uma rotina iterativa que verifica se alguma condição de contato foi violada, e que substitui a correspondente equação de compatibilidade caso isto ocorra. Esta abordagem pode ser vista, por exemplo, em Bahtui et al. [6]. Sabe-se que duas condições são impossíveis de ocorrer em uma certa interface:

- A abertura entre as camadas apresenta um valor negativo. Isto significa que uma camada penetrou em outra, o que é fisicamente impossível [2].
- A pressão entre as camadas apresenta um valor negativo.

Assim, se alguma das condições acima for violada, a configuração obtida não é válida e o sistema deve ser reavaliado. Nesta situação, nas interfaces aonde ocorreram as violações, deve-se trocar as correspondentes equações de compatibilidade e resolver o novo sistema. O fluxograma apresentado na figura 4.2 mostra de forma resumida este método.

Toda a modelagem analítica apresentada nesta seção foi implementada em planilhas de trabalhos do Maple. Os resultados obtidos utilizando a metodologia apresentada na geometria escolhida estão apresentados com mais detalhes no item 4.5 a seguir.

Observando este método de resolução, pode-se concluir que eventualmente a rotina caia num *loop* infinito, ao ficar trocando ciclicamente duas condições quaisquer, não havendo nenhuma garantia aparente de que tal situação não ocorra. No entanto, tal situação não foi observada durante as simulações para os casos propostos neste trabalho.

Uma alternativa a este método é simular todas as combinações de contato / abertura possíveis, e tomar uma solução que satisfaça todas as condições de compatibilidade. Ainda assim, neste método não há garantias de que somente uma solução válida será encontrada, e caso isto ocorra, fica a critério do analista selecionar a solução mais plausível.

[2] Na realidade, tal situação pode ocorrer em etapas intermediárias de alguns métodos iterativos de solução. Isto não representa necessariamente um erro, desde que esta situação não persista na solução final do problema.

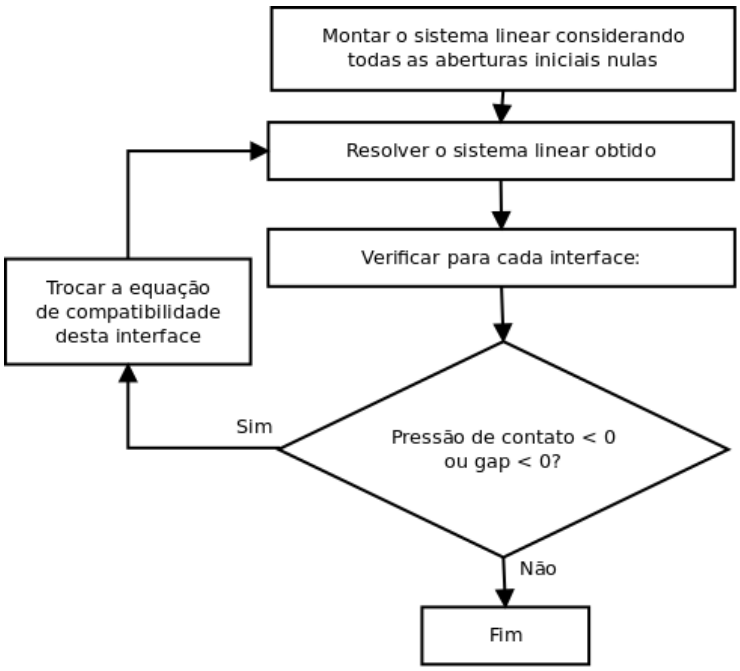

Figura 4.2: Fluxograma do método de resolução do modelo analítico

Uma terceira alternativa seria melhorar o método descrito inicialmente, incluindo uma lista de combinações que já foram testadas durante a simulação, e no caso do algoritmo detectar uma combinação já simulada, alguma condição de compatibilidade seria trocada, utilizando algum critério adequado, dando continuidade ao processo iterativo.

4.5 Simulações e Resultados

O modelo analítico-numérico apresentado foi implementado em ambiente Maple, e o seu código-fonte está apresentado no anexo D.3, contendo todos os detalhes de implementação e comentários.

4.5.1 Dados de entrada

Os parâmetros geométricos e de material foram retirados dos valores apresentados no capítulo anterior e estão resumidos, de maneira conveniente à aplicação no modelo analítico, na tabela 4.3. O comprimento total do tubo é de 4660mm.

Foram utilizados os mesmos casos de carregamento do ensaio experimental: Foram combinadas a presença e ausência de pressão interna e liberação e restrição de rotação das extremidades, conforme resumo da tabela 4.4.

[3]O valor do raio interno apresentado é o valor do raio equivalente, calculado pela equação 4.28.

Tabela 4.3: Propriedades do tubo analisado pelo modelo analítico

Camada	Modelo	E (GPa)	ν	R_i (mm)	R_e (mm)	α (°)	n	b (mm)
1 Carcaça intertravada	Helicoidal [3]	190	0,3	33,42	35	-85,8	1	12
2 Camada plástica interna	Cilíndrica	0,28	0,4	35	41	N/A	N/A	N/A
3 Armadura interna	Helicoidal	207	0,3	41	43	-55,5	29	5
4 Armadura externa	Helicoidal	207	0,3	43	45	+55,5	29	5
5 Camada plástica externa	Cilíndrica	0,32	0,4	45	50	N/A	N/A	N/A

Tabela 4.4: Casos de carregamento utilizados no modelo analítico

Caso	Pressão Interna	Força aplicada	Condição de contorno
A	0 MPa	40 kN	Giro restrito
B	0 MPa	40 kN	Livre para girar
C	6,89 MPa	40 kN	Giro restrito
D	6,89 MPa	40 kN	Livre para girar

4.5.2 Resultados

Além da análise global do tubo, é possível recuperar informações de tensão e deformação de cada elemento estrutural, a partir das formulações propostas. As tensões de tração nas armaduras (σ_t) e as tensões na direção normal (σ_n) podem ser obtidas rearranjando-se as equações 4.17:

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_n)$$
$$\sigma_n = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_n + \nu\varepsilon_t) \tag{4.34}$$

Onde as deformações ε_n e ε_t são obtidas pelas equações em 4.22. Podemos ainda obter uma expressão para a deformação na direção binormal, ε_b. Utilizando as equações constitutivas A.8, lembrando que σ_b = 0 por hipótese, mostra-se que:

$$\varepsilon_b = -\frac{\nu}{E}(\sigma_t + \sigma_n) = (\varepsilon_t + \varepsilon_n)\frac{\nu}{(\nu-1)} \tag{4.35}$$

A variação do ângulo de assentamento é dada pela fórmula B.20:

$$\Delta\alpha = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{R\Delta\phi}{L\tan(\alpha)} - \frac{\Delta L}{L}\right)$$

Utilizando a rotina iterativa apresentada no item 4.4, obtém-se os valores de forças e deslocamentos para todas as camadas do tubo, a partir dos dos quais é possível obter os demais resultados utilizando as formulações apresentadas anteriormente. Um resumo dos resultados de todos os casos está apresentado na tabela C.1 do apêndice C.

Distribuição de carga entre as camadas

Através da equação 4.32, pode-se calcular qual a contribuição percentual de cada camada para a rigidez do conjunto. A tabela 4.5 apresenta estes resultados, de onde pode-se tirar algumas conclusões:

1. Em todos os casos, a camada plástica interna e a carcaça intertravada trabalham sob compressão, não resistindo ao carregamento axial;
2. Em todos os casos, a contribuição da carcaça intertravada à rigidez axial, ainda que negativa, é desprezível, sendo menor do que 1% do total;
3. Em todos os casos, as armaduras de tração são responsáveis por cerca de 100% da resistência ao carregamento.

Tabela 4.5: Distribuição porcentual de carga entre as camadas prevista pelo modelo analítico

Camada	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
1 Carcaça intertravada	-0,8	-0,8	-0,2	-0,2
2 Camada plástica interna	-8,9	-8,9	-11	-11
3 Armadura interna	44,7	53,4	47,5	52,8
4 Armadura externa	53,9	45,2	54,5	49,2
5 Camada plástica externa	11,1	11,1	9,2	9,2

É interessante notar que a carcaça intertravada e as armaduras de tração são feitas com materiais semelhantes e com a mesma geometria helicoidal, diferindo entre si no número de tendões, no ângulo de assentamento e na área e formato da seção transversal. No entanto, a diferença na distribuição de carga é enorme: de fato, a função estrutural da carcaça intertravada é de resistir à pressão externa, enquanto a função estrutural das armaduras é resistir à tração e flexão.

Análise local dos tendões

Uma vez que os tendões das camadas de armadura são responsáveis pela maior parte do carregamento, é importante obtermos os valores de tensão e deformação dos mesmos. A tabela 4.6 apresenta estes resultados para todos os casos simulados.

Tabela 4.6: Análise local dos tendões pelo modelo analítico

Camada	σ_t (MPa)	σ_n (MPa)	$\varepsilon_t(\mu\varepsilon)$	$\varepsilon_n(\mu\varepsilon)$	$\varepsilon_b(\mu\varepsilon)$	$\Delta\alpha$ (°)
Caso A						
Armadura interna	108	-5,83	534	-186	-149	-0,34
Armadura externa	131	-2,04	637	-200	-187	0,33
Caso B						
Armadura interna	130	-5,51	636	-215	-180	-0,34
Armadura externa	110	-1,71	534	-168	-156	0,34
Caso C						
Armadura interna	116	-5,98	567	-196	-159	-0,27
Armadura externa	133	-2,06	645	-202	-189	0,27
Caso D						
Armadura interna	129	-5,79	629	-214	-177	-0,27
Armadura externa	120	-1,86	581	-182	-170	0,27

4.5.3 Comparativo com os resultados experimentais

As figuras 4.3 a 4.6 mostram os resultados de *Força de Tração x Deformação Axial* para os casos de carregamento apresentados, onde é possível comparar os resultados experimentais com os resultados obtidos através do modelo analítico-numérico. Observa-se que, para os casos A e B, nos quais o tubo flexível não foi submetido à uma pressão interna, o modelo analítico apresenta uma boa aderência em relação ao resultado experimental; já nos casos C e D, onde o tubo flexível estava pressurizado, a curva obtida pelo modelo analítico acompanhou, de maneira aproximada, a inclinação da curva experimental, porém com um pequeno deslocamento no eixo das ordenadas.

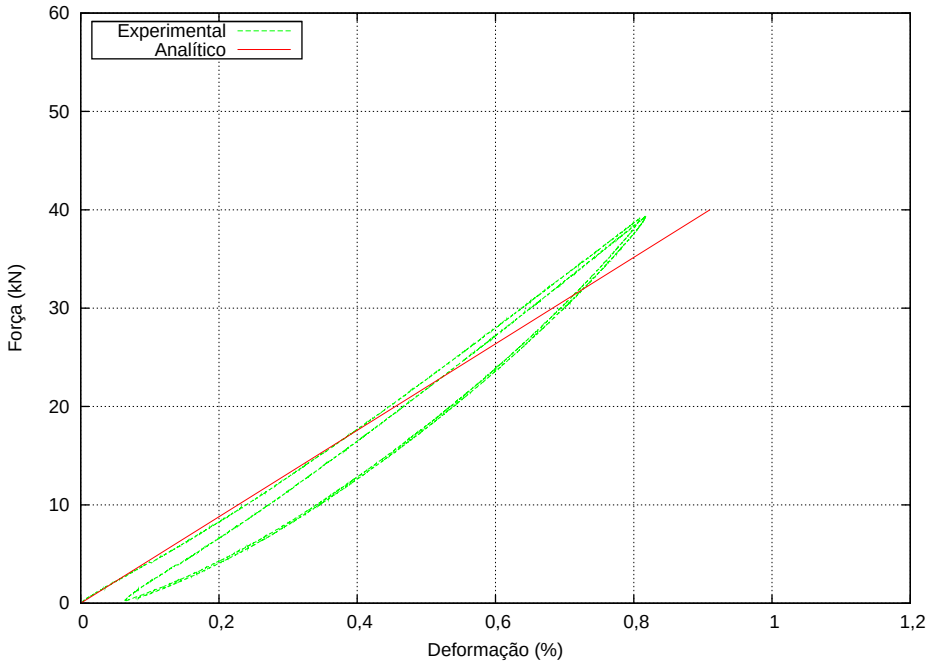

Figura 4.3: Comparativo de resultados - Caso A

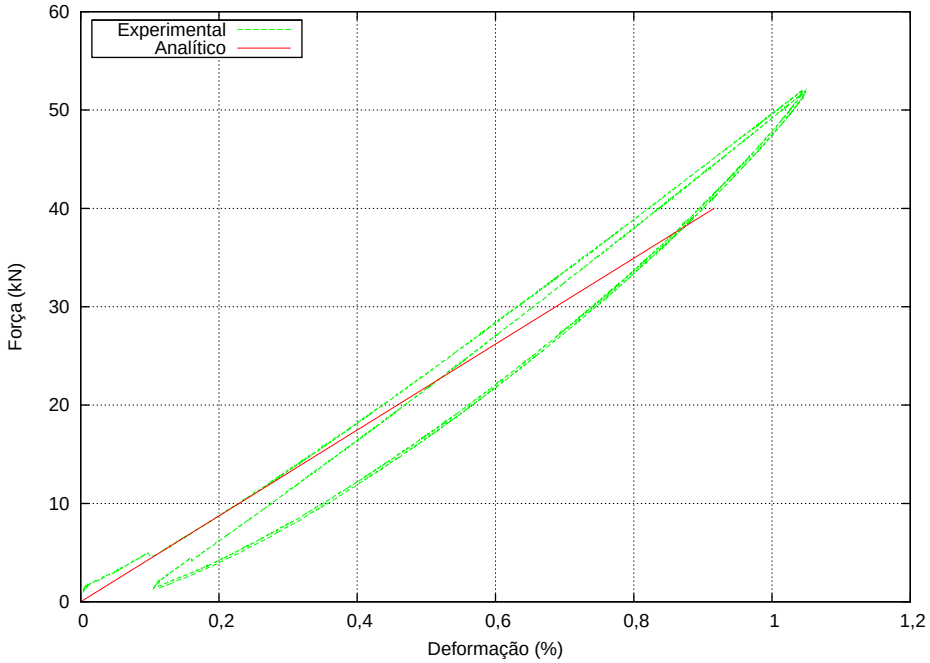

Figura 4.4: Comparativo de resultados - Caso B

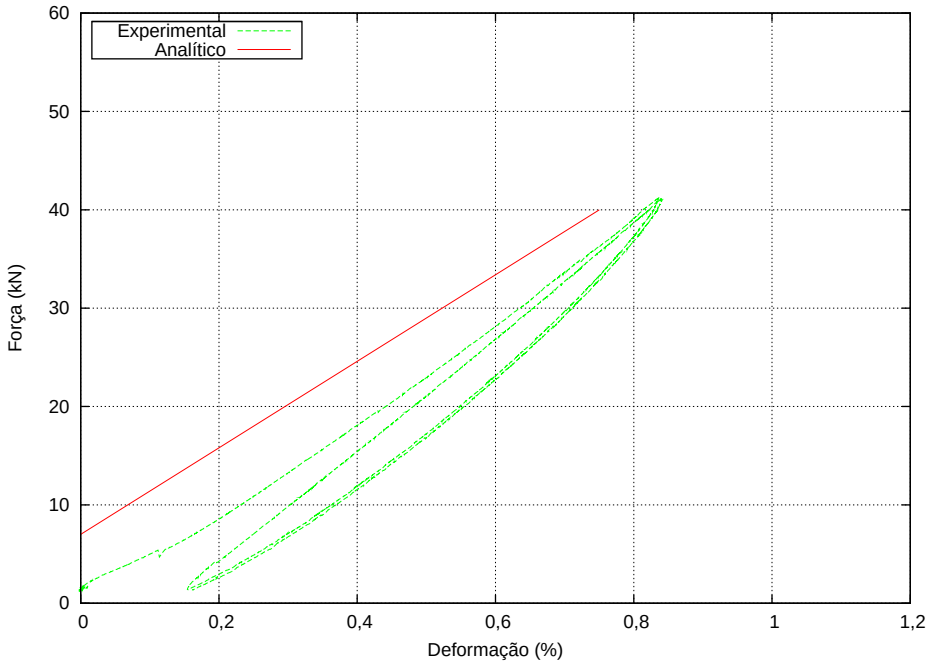

Figura 4.5: Comparativo de resultados - Caso C

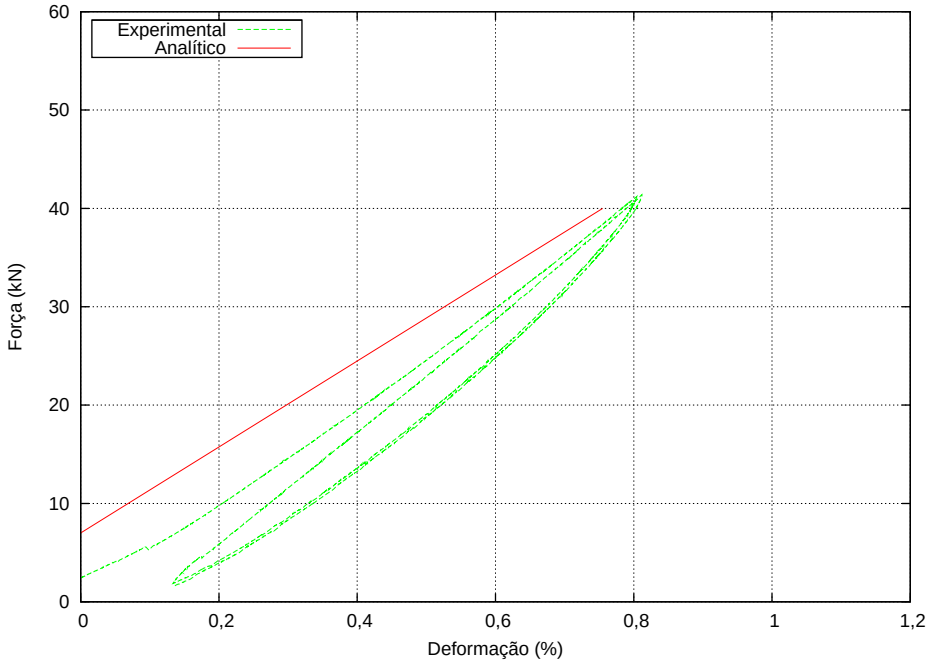

Figura 4.6: Comparativo de resultados - Caso D

4.5.4 Análise e discussões dos resultados

O modelo analítico apresentado neste trabalho, o qual se baseia em diversos outros modelos apresentados na literatura, foi capaz de obter resultados rapidamente para uma análise local e global de tubos flexíveis submetidos a carregamentos axissimétricos. Observou-se uma boa concordância entre os valores previstos pelo modelo com os resultados obtidos experimentalmente, respeitando as limitações do modelo analítico-numérico.

Na análise local dos tendões, algumas diferenças obtidas são bastante relevantes. Para o caso A, por exemplo, o modelo analítico-numérico previu uma deformação axial (ε_t) dos tendões da armadura externa de $0,64 \cdot 10^{-3}$ (ver tabela 4.6), ao passo que os resultados experimentais (ver figuras 3.15, 3.17 e 3.19), mostram resultados variando de $0,40 \cdot 10^{-3}$ a $0,95 \cdot 10^{-3}$. Apesar do resultado previsto analiticamente estar dentro da faixa medida, o valor máximo observado experimentalmente é 48% maior do que o valor previsto pelo modelo.

Já no caso das deformações na direção binormal (ε_b), que são as deformações obtidas experimentalmente pelos extensômetros transversais, o modelo analítico-numérico indicou uma compressão de $0,18 \cdot 10^{-3}$ (tabela 4.6), frente a um pico de compressão de $0,12 \cdot 10^{-3}$, (figuras 3.16, 3.18 e 3.20) levantado experimentalmente. Neste caso, o modelo indicou uma compressão 50% maior do que o valor máximo efetivamente observado.

Por isso é importante atentar às hipóteses utilizadas pelo modelo analítico. É admitida, para as camadas helicoidais, a hipótese de deformações e pressões constantes ao longo dos tendões, mas na prática os efeitos de variações locais podem ser muito relevantes e invalidar esta hipótese estabelecida para sua obtenção, tornando-o assim inadequado para predizer picos locais de tensão. Ou seja, ainda que os resultados de tensão média sejam satisfatórios, os resultados obtidos analiticamente devem ser interpretados com cuidado.

5 *Modelo em elementos finitos*

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns modelos em elementos finitos para a análise local de dutos flexíveis. Primeiramente, serão apresentados, brevemente, o método dos elementos finitos linear e não linear, e em seguida será feito um detalhamento do modelo construído para o estudo. São levantadas também considerações sobre as não-linearidades decorrentes dos efeitos de contato e sobre as aplicações das condições de contorno.

5.2 Método dos elementos finitos

5.2.1 Método dos elementos finitos linear

O método dos elementos finitos linear teve sua origem em meados dos anos 40. Apesar do termo "Elemento Finito" ter sido cunhado por Ray William Clough em 1960, sua metodologia já era bastante pesquisada e utilizada na época, conforme relatado por Zienkiewicz [38]. Anteriormente já existiam muitos métodos voltados para o cálculo de estruturas, como por exemplo o método matricial, que foram incorporados ao MEF.

O método em si é formulado para a resolução de um sistema de equações diferenciais parciais através de métodos variacionais. Tais equações aparecem com frequência no estudo de estruturas, eletromagnetismo e termodinâmica. Sua técnica consiste em discretizar o domínio do problema, geralmente de geometria complexa, em "elementos", os quais devem ter uma geometria simples e conhecida.

Através da discretização do domínio, obtém-se um sistema linear, cuja solução é uma aproximação do sistema de equações diferenciais inicial. Observa-se que a resolução numérica deste sistema é simples e bastante adequada à resolução computacional, e de fato a sua utilização por computadores é o principal motivo para a utilização do método. É importante observar

também que, assim como em outros métodos numéricos, a qualidade da solução aproximada está intimamente ligada à qualidade da discretização realizada do problema, sendo às vezes necessária uma certa dose de experiência por parte dos usuários.

Ao modelo discretizado dá-se o nome de "malha" do sistema, que é composta por elementos (sejam eles quadriláteros, hexaedros, tetraedros, entre outros), cujos vértices são chamados de "nós".

Consideremos um problema de análise estrutural que admita as seguintes hipóteses:

- Os carregamentos são quasi-estáticos, isto é, a aplicação dos carregamentos não gera efeitos inerciais no sistema;
- O material possui comportamento elástico-linear;
- O carregamento aplicado gera pequenas deformações e pequenos deslocamentos, de maneira que as configurações deformada e indeformada do sistema podem se confundir;
- As condições de contorno são conhecidas.

Neste caso, aplicando-se o MEF ao sistema de equações diferenciais governantes deste problema, obtém-se seguinte sistema linear:

$$[F] = [K] \cdot [U] \tag{5.1}$$

Onde [F] e [U] são, respectivamente, vetores com as forças e os deslocamentos nodais, e [K] é a chamada "matriz de rigidez" da estrutura. Na matriz de rigidez estão consideradas as propriedades de material, a geometria inicial do problema e a discretização utilizada.

Um fator importante na resolução do MEF linear é que a matriz de rigidez é singular (possui determinante nulo), ou seja, o sistema 5.1 possui infinitas soluções, que correspondem aos infinitos modos de deslocamento possíveis. A solução deste problema só é possível através da introdução de condições de contorno de deslocamentos, ditas condições de contorno essenciais. Tais condições de contorno eliminam os graus de liberdade excedentes da matriz [K], tornando assim este sistema compatível e determinado e possibilitando, portanto, a sua solução numérica.

Outra característica importante do método reside no fato de a matriz [K] ser, por construção, simétrica e esparsa, e após a introdução das condições de contorno essenciais, ela se torna positiva e definida. Estas características permitem o uso de algoritmos numéricos de resolução eficientes, sendo possível resolver grandes sistemas em um tempo pequeno até mesmo num

computador doméstico. Este é um dos principais fatores da popularização do método dos elementos finitos.

É importante notar que o sistema 5.1, apesar de simples, pode possuir alguns milhões de equações, dependendo da discretização utilizada. Por isso a resolução deste sistema é geralmente feita por *solvers* comerciais, os quais possuem inúmeras rotinas de otimização de cálculo.

Na realidade o MEF só tem utilidade prática para ser utilizado em computadores, conforme explica Azevedo [3]. Apesar de o método tornar possível a solução de equações que não poderiam ser resolvidas analiticamente, na prática os sistemas lineares obtidos são muito grandes, de maneira que sua resolução só é realmente possível com a ajuda de um computador. Percebe-se que a evolução do MEF, especialmente nos anos 80, praticamente coincide com a proliferação do uso de computadores nos centros de pesquisa, sendo possível afirmar que atualmente o método é o principal meio para a realização de análises estruturais em estruturas complexas.

Não será aprofundada aqui a fundamentação teórica do método, sendo recomendado para tal os livros de Bathe [7], Avelino [14] e Zienkiewicz [38].

5.2.2 Método dos elementos finitos não-linear

Eventualmente, as hipóteses enumeradas para a obtenção do sistema 5.1 podem não se aplicar a um dado problema, em decorrência de não-linearidades intrínsecas ao problema. Dentre os fatores que podem gerar não-linearidades, podemos citar:

- O material não possui comportamento elástico-linear. Incluem-se aqui também problemas de plasticidade e seus variantes;
- Problemas de grande deslocamentos;
- Problemas de impacto;
- Condições de contorno que variam durante o carregamento, como por exemplo, problemas de contato.

Existem basicamente dois métodos para a resolução de MEF não linear, chamados de método “implícito” e método “explícito”. Ambos os métodos baseiam-se em uma resolução incremental do sistema, o que na prática significa uma resolução sucessiva de uma série de

sistemas lineares. Em uma resolução incremental, os carregamentos são aplicados aos poucos. Um *incremento* é uma pequena porcentagem do valor do carregamento total, calculado de maneira a se obter uma solução para o modelo que atenda as hipóteses exigidas pelo MEF linear. A partir da nova configuração obtida, atualiza-se a matriz [K], reconsiderando todos os fatores inicialmente fornecidos para o seu cálculo. Aplica-se, então, mais um incremento de carga, até um novo equilíbrio, e assim sucessivamente até que se complete o valor do carregamento total.

Por conta desta natureza incremental, uma análise não linear pode apresentar problemas de convergência, quando um dado incremento não consegue atender às condições de linearidade. Em alguns casos, estes problemas podem ser sanados através de um remodelamento do problema (como alteração na malha ou mudanças nas condições de contorno); em outros casos através de configurações específicas de parâmetros dos métodos numéricos implementados no *solver* utilizado, porém quase sempre levando a um tempo de análise computacional maior.

5.3 Modelagem do tubo flexível

No estudo proposto, deseja-se observar a influência do contato entre as camadas e as consequentes forças de atrito no comportamento global do duto. Uma vez que isso significa uma mudança de condição de contorno durante o carregamento, as análises serão realizadas pelo MEF não-linear.

Os modelos em elementos finitos foram construídos no pré-processador MSC.Patran e simulados através do *solver* MSC.Marc. Um detalhe da malha criada para o estudo está mostrada na figura 5.1.

5.3.1 Modelagem dos componentes do tubo

Carcaça Intertravada

A carcaça intertravada representa uma dificuldade à parte na modelagem completa de um duto flexível. Dada a flexibilidade do método dos elementos finitos, é possível modelar a carcaça de forma muito próxima à sua geometria; no entanto, esta abordagem exige um tempo computacional impraticável para o estudo.

Por conta disso, foi utilizado um modelo de “tubo equivalente”, no qual a complexa geometria helicoidal da carcaça é substituída por uma geometria muito mais simples, formada por um tubo cilíndrico, utilizando um material ortotrópico, com as propriedades geométricas e mecânicas devidamente adaptadas.

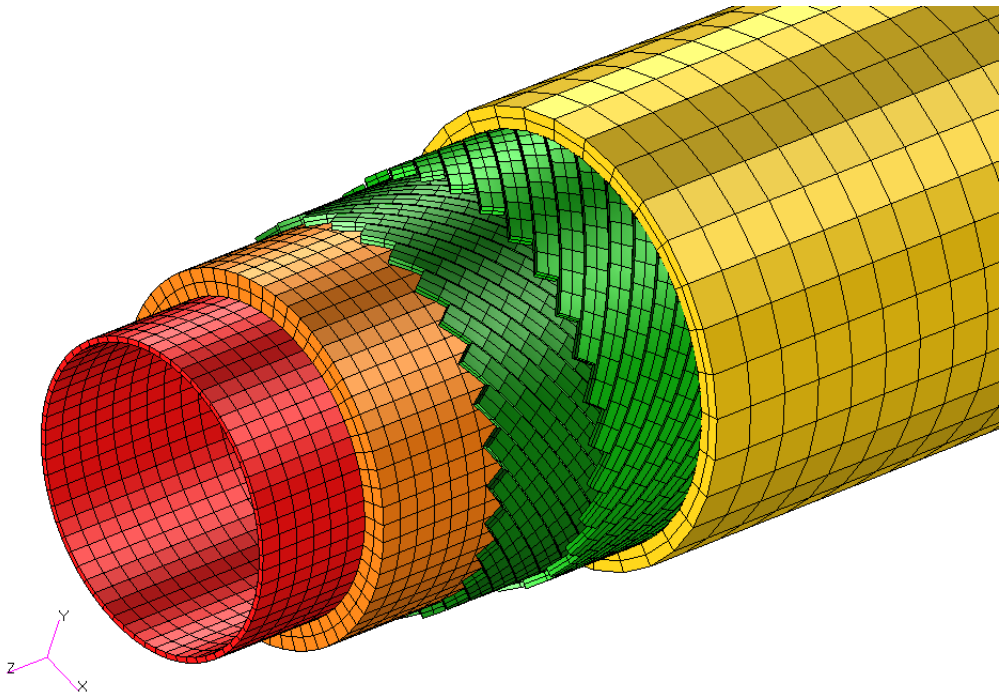

Figura 5.1: Modelo em elementos finitos do tubo flexível.

É importante ressaltar que a modelagem da carcaça intertravada é uma tarefa relativamente complexa, podendo gerar diversos estudos para um modelamento adequado. O modelo proposto busca somente reproduzir, no tubo equivalente, os mesmos deslocamentos que seriam observados na carcaça helicoidal, quando submetida a um determinado esforço.

Para obter o modelo de tubo equivalente, foram levantadas algumas hipóteses que serão apontadas ao longo das deduções. Consideremos, inicialmente, que o tubo equivalente esteja submetido às mesmas pressões interna e externa e à mesma força axial experimentadas pela carcaça metálica. Admitindo que as forças atuantes no tubo equivalente causam deformações somente segundo a sua linha de ação (ou seja, há um desacoplamento de efeitos), podemos escrever:

$$\sigma_r = E_r \varepsilon_r \quad ; \quad \sigma_\theta = E_\theta \varepsilon_\theta \quad ; \quad \sigma_z = E_z \varepsilon_z \tag{5.2}$$

Onde r, θ e z são as direções principais do sistema de coordenadas cilíndrico do tubo equivalente. Impondo o equilíbrio de forças em uma seção transversal do tubo (ver, por exemplo, Timoshenko [34]), é possível correlacionar os esforços externos com as componentes

de tensão:

$$\begin{cases} \sigma_r \approx -\dfrac{(p_{ext}+p_{int})}{2} = -p_m \\ \\ \sigma_\theta = (p_{int}-p_{ext})\dfrac{R_{eq}}{t_{eq}} \\ \\ \sigma_z = \dfrac{F_t}{A_{eq}} = \dfrac{F_t}{2\pi R_{eq} t_{eq}} \end{cases} \tag{5.3}$$

Onde A_{eq} é a área equivalente do topo do cilindro, e R_{eq} e t_{eq} são respectivamente o raio médio equivalente e a espessura média equivalente do tubo. O subscrito "eq" é utilizado para reforçar que estas são grandezas equivalentes, e não devem ser confundidas com as dimensões originais do tendão da carcaça intertravada, doravante identificadas com o subscrito "0".

Admitindo que as deformações nas direções indicadas são dadas simplesmente por:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta t}{t_{eq}} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\Delta R}{R_{eq}} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L} \tag{5.4}$$

Pode-se expressar, a partir das equações 5.2, 5.3 e 5.4, as seguintes relações envolvendo as grandezas de rigidez do tubo equivalente:

$$\begin{cases} E_r = -p_m \dfrac{t_{eq}}{\Delta t} \\ \\ E_\theta = (p_{int}-p_{ext})\dfrac{R_{eq}^2}{t_{eq}\Delta R} \\ \\ E_z = \dfrac{F_t}{2\pi R_{eq} t_{eq}} \dfrac{L}{\Delta L} \end{cases} \tag{5.5}$$

Para o cálculo das componentes de deformação da carcaça intertravada ε_t e ε_n, dadas pelas equações B.17 e B.13, cabe uma importante simplificação: uma vez que o ângulo de assentamento α é muito próximo de 90°, podemos admitir que $\cos(\alpha) \approx 0$. Assim, as deformações axial e normal desta camada ficam dadas simplesmente por:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R_0}\sin(\alpha)^2 \quad ; \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta t}{t_0} \tag{5.6}$$

Utilizando ainda as equações constitutivas 4.25 e 4.26, juntamente com a terceira equação

de 4.27, segue que:

$$\begin{cases} -p_m = E\dfrac{\Delta t}{t_0} \\ \\ (p_{int} - p_{ext})\dfrac{R_0 \cdot b}{A_s \sin(\alpha)^2} = E\sin(\alpha)^2\dfrac{\Delta R}{R_0} \\ \\ F_t = A_t\sigma_t\cos(\alpha) = EA_t\cos(\alpha)^3\dfrac{\Delta L}{L} \end{cases} \tag{5.7}$$

Lembrando que o subscrito "0" é utilizado para identificar a dimensão real da carcaça intertravada. Fazendo as substituições necessárias nas equações 5.5 e 5.7, é possível correlacionar as grandezas do modelo de tubo equivalente com as grandezas do modelo original de um tendão helicoidal:

$$\begin{cases} E_r = E\left(\dfrac{t_{eq}}{t_0}\right) \\ \\ E_\theta = E\left(\dfrac{A_s}{b \cdot t_{eq}}\right)\left(\dfrac{R_{eq}}{R_0}\right)^2\sin(\alpha)^4 \\ \\ E_z = E\left(\dfrac{A_s}{2\pi R_{eq}t_{eq}}\right)\cos(\alpha)^3 \end{cases} \tag{5.8}$$

Temos 5 incógnitas relativas ao tubo equivalente (E_r, E_θ, E_z, t_{eq} e R_{eq}), no entanto somente três equações. Devemos ainda considerar um parâmetro geométrico em conta: O raio externo do tubo equivalente deve coincidir com o raio externo da carcaça intertravada, pois essa região deve estar em contato com a capa plástica adjacente. Temos portanto mais uma equação:

$$R_{ext,eq} = R_{ext,0} \leftrightarrow R_{eq} + \frac{t_{eq}}{2} = R_0 + \frac{t_0}{2} \tag{5.9}$$

Resta ainda um parâmetro livre. Foi adotado um parâmetro, nomeado de β, para correlacionar o módulo de elasticidade (E) da carcaça metálica com o módulo de elasticidade tangencial (E_θ) utilizado no modelo de tubo equivalente, de tal forma que:

$$E_\theta = \beta E \tag{5.10}$$

Assim é possível obter todos os valores procurados fornecendo-se um valor para o parâmetro β. Com esse modelo, espera-se que um dado carregamento aplicado na carcaça intertravada produza os mesmos deslocamentos no tubo equivalente. Cabe aqui ressaltar que foi feito um estudo para diversos valores de E_θ, cujos resultados estão apresentados no item 5.4.2.

O tubo modelado é composto de 20608 elementos hexaédricos lineares (HEX8) de dimensões aproximadamente $1,26mm$x $3,37mm$ x $4,53mm$.

Camadas Plásticas

As camadas plásticas, como a barreira de pressão e a capa externa, foram modeladas com elementos sólidos hexaédricos de interpolação linear (HEX8), utilizando um material isotrópico para estas camadas. A capa plástica interna foi modelada de maneira à sua malha ficar congruente à malha da carcaça intertravada, para representar o contato colado entre estas duas camadas. A figura 5.3 mostra um detalhe da interface entre estas duas camadas, com alguns elementos omitidos para visualização. Nas superfícies externas das camadas plásticas adjacentes às armaduras, foi modelado o contato entre as superfícies que se tocam, conforme explicado no item 5.3.2 deste capítulo.

A capa plástica interna é composta por 31582 elementos de dimensões aproximadamente $3mm$x $3,73mm$ x $4,53mm$. A capa plástica externa é composta por 8638 elementos medindo aproximadamente $2,5mm$x $9,07mm$ x $9,55mm$.

Armaduras de tração

As armaduras foram modeladas com elementos hexaédricos de interpolação linear (HEX8), utilizando um material isotrópico para estas camadas. Em todas as armaduras foi modelada a presença de regiões de contato, as quais estão descritas com detalhes no item 5.3.2.

A seção transversal de um tendão foi dividida em quatro partes (ver figura 5.2), e o comprimento total do tendão foi dividido em 256 partes. Cada tendão (seja ele pertencente à armadura interna ou externa) é composto portanto de 1024 elementos, e cada camada de armadura, contendo 29 tendões cada uma, é composta por 29696 elementos. As dimensões aproximadas de um hexaedro de um tendão são de $1mm$ x $2,5mm$ x $5mm$.

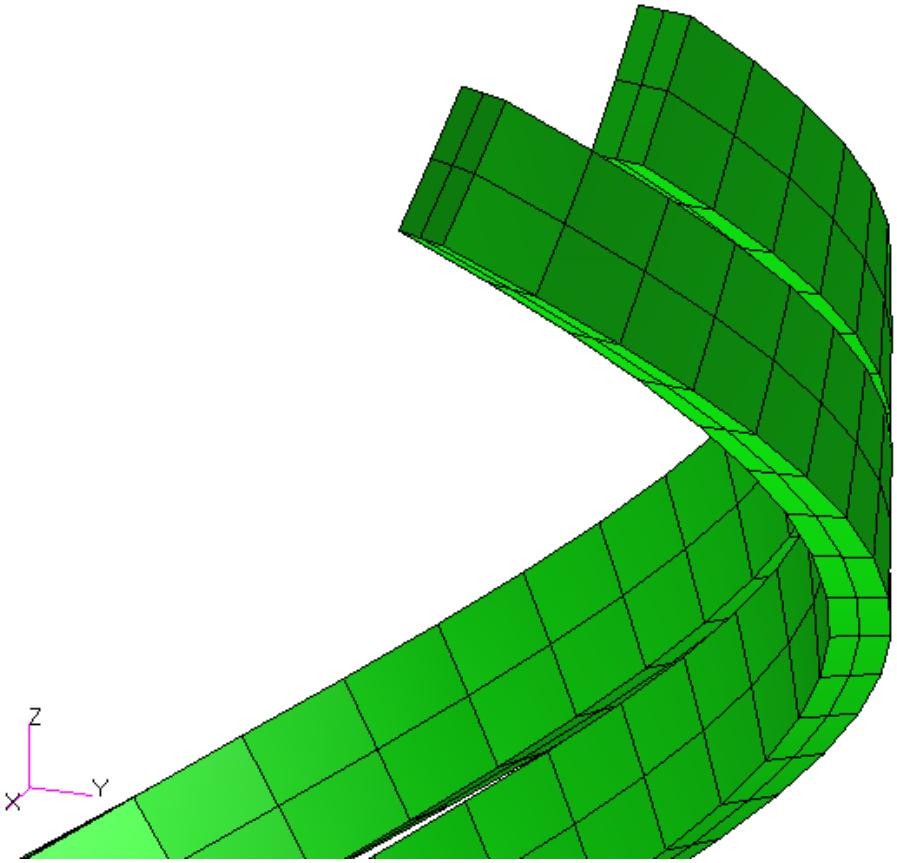

Figura 5.2: Detalhe da malha dos tendões.

5.3.2 Contatos e atrito

Apesar de as considerações iniciais sobre a resolução do problema permitirem uma análise linear, os efeitos de contato e atrito introduzem uma não-linearidade, pois alteram as condições de contorno. A ocorrência de contato implica que em algum momento o contorno da estrutura não estará mais livre para deslocar em uma dada direção, e uma vez restrita, qualquer tentativa de deslocamento implicará na ocorrência de uma força de reação. Ou seja, a ocorrência de contato significa uma alteração nas condições de contorno locais do problema, introduzindo assim uma não-linearidade.

A correta modelagem dos contatos no modelo proposto é a parte mais sensível da análise, pois todos os efeitos de não-linearidade que se deseja observar decorrem desta consideração.

No tubo estudado, contendo cinco camadas estruturais, são encontrados quatro pares de contato entre as camadas, cada um sendo modelado de uma maneira conveniente.

A interface entre a carcaça intertravada e a barreira de pressão foi modelada como um "contato colado", ou seja, as superfícies de contato entre estas camadas estão em contato

permanente, não sendo possível nenhum tipo de deslizamento. Tal abordagem foi escolhida basicamente por dois motivos:

1. Pela forma construtiva do tubo, a barreira de pressão é extrudada diretamente por cima da carcaça intertravada, eventualmente preenchendo alguns espaços vazios. Isto faz com que o desacoplamento entre estas camadas seja improvável;

2. Conforme foi mostrado em Maranhão; Ramos [20], a influência dos efeitos de contato entre camadas cilíndricas na análise de rigidez global do tubo, considerando carregamentos axissimétricos, é desprezível.

Adicionalmente aos motivos listados acima, a modelagem utilizada para a carcaça intertravada, utilizando um tubo equivalente, permite uma congruência com a malha da barreira de pressão, bastando ajustar o tamanho dos elementos destas camadas. Por isso, ao invés de utilizarmos a opção de "contato colado" disponível pelo *solver*, este par de contato foi modelado simplesmente pela união física das malhas que representam estas camadas, ou seja, os nós das interfaces pertencem aos elementos de ambas as estruturas adjacentes, sem a necessidade de se estabelecer duas regiões de contato. A figura 5.3 apresenta um detalhe da malha contendo estas duas camadas, com alguns elementos retirados para visualização, na qual é possível observar a congruência das malhas. Esta abordagem é vantajosa, pois o acoplamento das estruturas é feito diretamente na matriz de rigidez e não pela alteração das condições de contorno locais, introduzindo assim um ganho de tempo computacional sem perda na qualidade do resultado. Em Maranhão, Ramos [20] é mostrado um exemplo da equivalência destas abordagens.

Entre a camada plástica interna e a armadura interna, bem como entre as armaduras interna e externa, foi considerada a possibilidade de contato. Nestas regiões são esperados alguns deslizamentos, devido à geometria helicoidal dos tendões, bem como uma pressão de contato, devido às constrições radiais das camadas helicoidais. Nestes contatos foi considerada a presença de força de atrito, utilizando o modelo de atrito seco de Coulomb, sendo considerados diversos coeficientes de atrito nas simulações, conforme detalhamento posterior.

Finalmente, entre a armadura externa e a capa plástica externa não foi considerada a presença de contato. Tal abordagem foi escolhida simplesmente por conhecimento prévio dos resultados, sejam eles analíticos ou experimentais, os quais mostraram que nesta região ocorre a formação de uma abertura entre as camadas. É importante esclarecer que esta abordagem utilizada só é válida para os carregamentos considerados neste estudo, e que para outros carregamentos (como uma carga de compressão axial, por exemplo, ou uma elevada pressão externa) é necessário observar a presença de contato entre estas camadas.

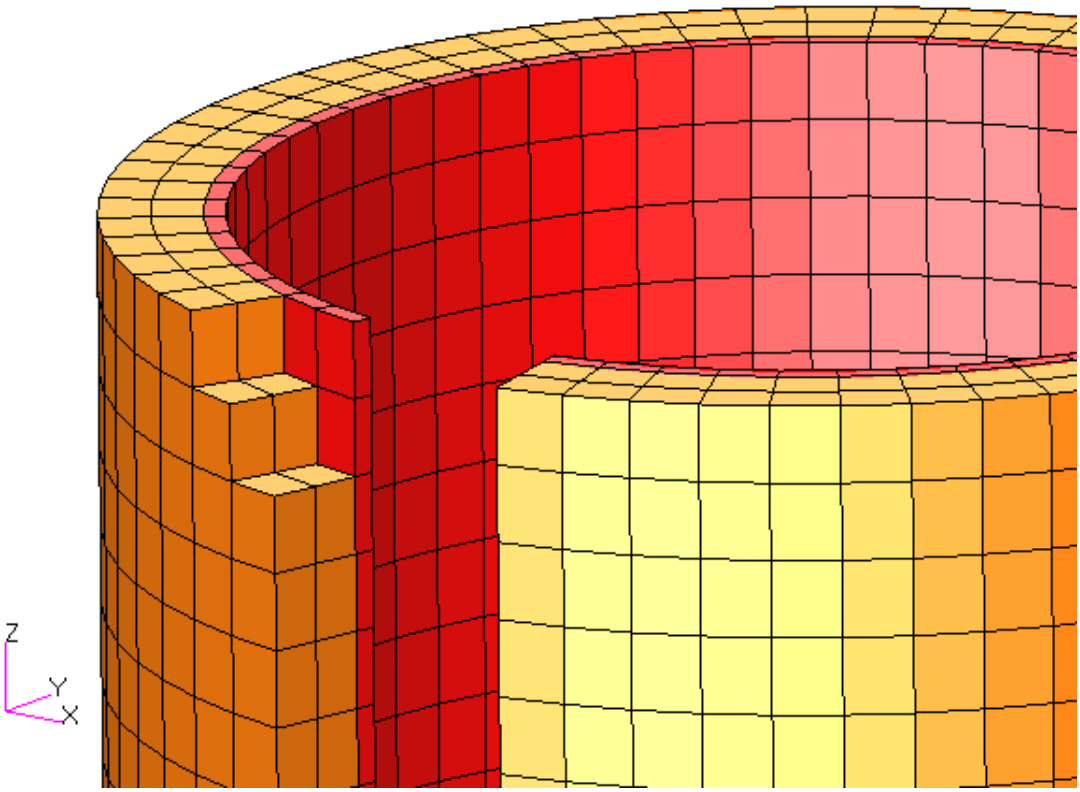

Figura 5.3: Detalhe da congruência da malha.

Pode-se enfim resumir a modelagem dos contatos:

- A carcaça intertravada e a capa plástica interna são representadas por uma única malha contínua, porém com elementos de propriedades distintas, de acordo com as propriedades de cada camada;
- A camada plástica interna pode entrar em contato com os tendões das armaduras internas;
- Os tendões da armadura interna podem entrar em contato com os tendões da armadura externa;
- Os tendões da armadura externa não entram em contato com a capa plástica externa.

A matriz de contatos define entre quais regiões o *solver* deverá buscar a ocorrência de contato. Quanto mais pares de contato forem definidos, maior será o tempo de busca dos contatos entre os pares e consequentemente maior será o tempo de análise do problema. A tabela 5.1 ilustra como foram formados os pares de contato segundo as hipóteses estabelecidas.

Tabela 5.1: Matriz de contatos utilizada para o modelamento do tubo

	CPI_EXT	ARMINT_INT	ARMINT_EXT	ARMEXT_INT
CPI_EXT		X		
ARMINT_INT	X			
ARMINT_EXT				X
ARMEXT_INT			X	

Onde:

CPI_EXT é a superfície externa da camada plástica interna;

ARMINT_INT é a superfície interna da armadura interna;

ARMINT_EXT é a superfície externa da armadura interna; e

ARMEXT_INT é a superfície interna da armadura externa.

5.3.3 Condições de contorno

A maior dificuldade na condução deste estudo foi encontrar um bom modelo para as condições de contorno, pois pequenas mudanças nas considerações feitas causavam grandes alterações nos resultados observados. Não existe uma maneira "correta" de se modelar as condições de contorno, mas sim uma maneira que melhor represente um certo efeito a ser estudado.

Após uma série de testes, duas maneiras de representar os efeitos de contorno foram consideradas:

- (1) É aplicado um deslocamento axial uniforme em todas as camadas do riser;
- (2) É aplicada uma força axial (segundo o eixo z do tubo flexível) somente nas armaduras, mantendo as camadas cilíndricas fixas.

Independente da abordagem realizada, as seguintes hipóteses foram utilizadas em todos os casos simulados:

- Não é permitida uma variação nos raios das superfícies extremas, tanto nas camadas cilíndricas quanto nas helicoidais;

- Os tendões são carregados somente nos nós que correspondem ao eixo central de suas seções transversais (ver figura 5.4). Tal abordagem foi escolhida para ser possível observar uma variação no ângulo de assentamento destes componentes;
- Os deslocamentos das superfícies extremas são permitidos somente segundo o eixo z.

Na figura 5.4 é possível observar o detalhe comentado no segundo item acima: somente os nós centrais dos tendões estão fixados, de maneira que a seção transversal possa girar em torno do seu eixo central.

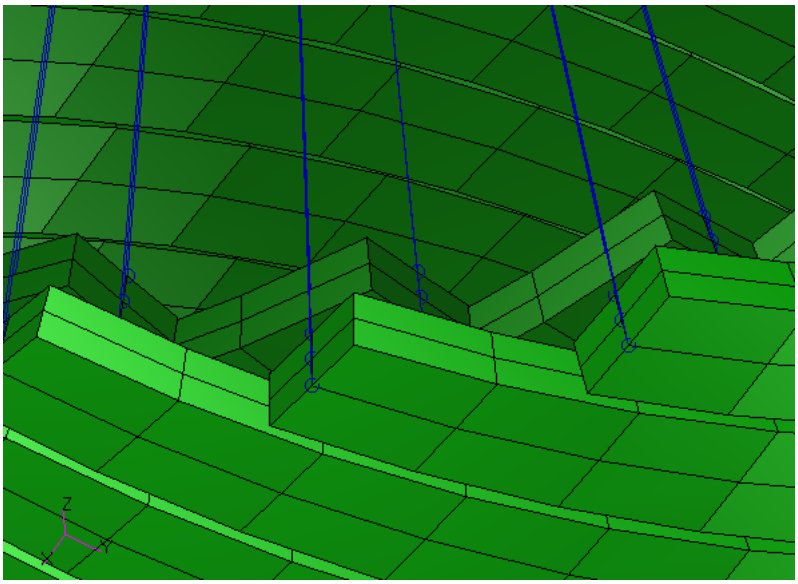

Figura 5.4: Detalhe das condições de contorno nos tendões das armaduras.

A figura 5.5 apresenta a região da malha utilizando a condição de contorno (1). Nela é possível observar que as extremidades das camadas estão todas no mesmo plano, no qual é aplicado um deslocamento na direção Z do cilindro.

A figura 5.6 apresenta a região da malha utilizando a condição de contorno (2), com um pedaço da malha da capa plástica externa retirado para visualização. É possível observar que as camadas internas são "estendidas", de maneira a garantir que durante todo o deslocamento das armaduras exista uma região de contato. As extremidades dos tendões estão todas ligadas a um nó central por ligações rígidas, representadas pelas linhas retas [1] na figura. Somente o nó central é carregado com uma força axial, que é transmitida às armaduras pela ligação rígida, enquanto as demais camadas cilíndricas permanecem descarregadas e com as extremidades fixadas.

Na realidade, nenhuma das abordagens utilizadas trouxe resultados totalmente compatíveis com os resultados experimentais. Utilizando as condições de contorno (1), os resultados das

[1] Note que o fato destas linhas "atravessarem" as camadas internas não é um erro, pois estas linhas somente representam um vínculo matemático entre os deslocamentos destes nós.

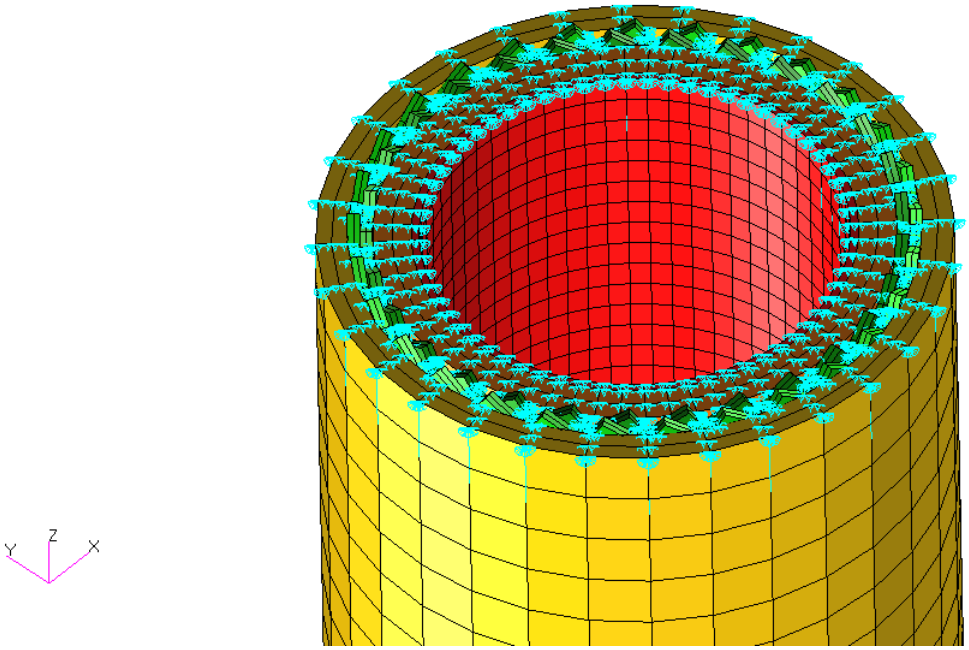

Figura 5.5: Condições de contorno (1).

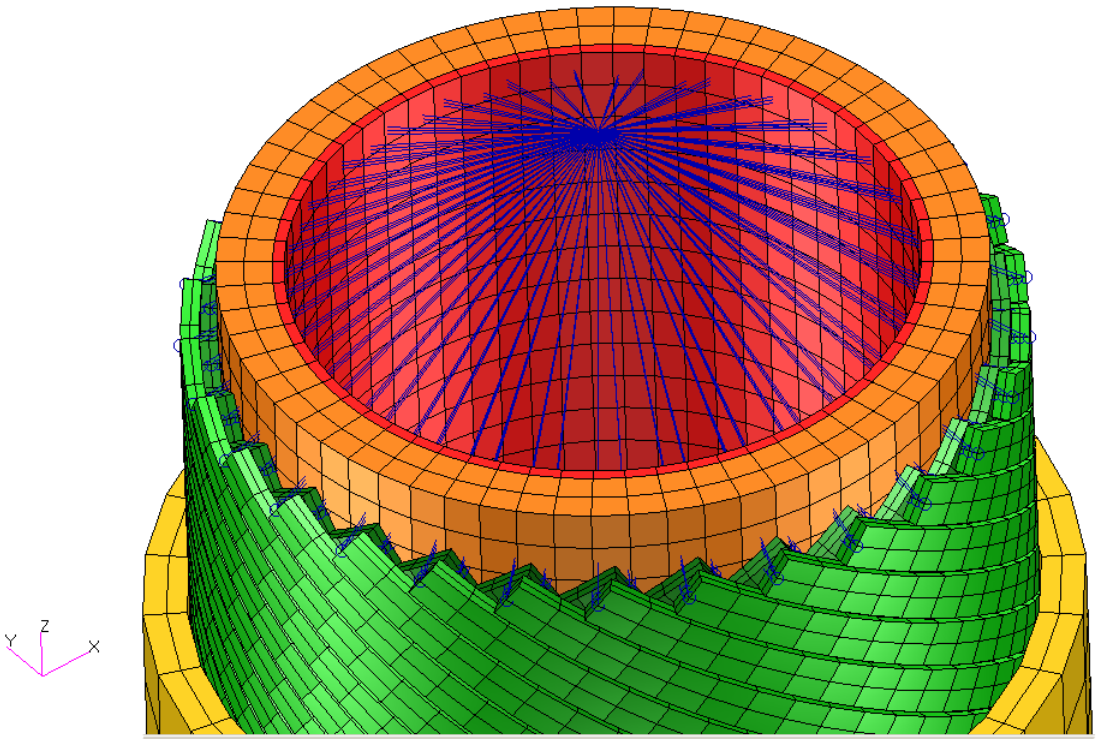

Figura 5.6: Condições de contorno (2).

simulações mostraram um valor de rigidez axial equivalente muito próximo do resultado experimental, porém o efeito de histerese obtido foi imperceptível. Já com as condições (2), os efeitos de histerese são muito claros e da mesma ordem de grandeza dos resultados experimentais, porém observou-se um aumento significativo no valor da rigidez axial equivalente. Tal efeito persistiu mesmo para menores coeficientes de atrito e para diferentes valores de E_θ da carcaça intertravada equivalente. O detalhamento destes resultados está apresentado no item 5.4.1.

5.3.4 Modelo para calibração e otimizações

Uma vez que o trabalho computacional do método é grande, surge naturalmente a necessidade de simplificar o modelo estudado, sendo importante que tais simplificações não tragam prejuízos à análise. O tubo ensaiado experimentalmente possui 5 metros de comprimento, o que equivale aproximadamente a 28 passos da camada helicoidal interna. Fica então a dúvida: É necessário modelar o tubo completo, tal e qual o modelo em escala, ou é possível modelar um tubo de tamanho reduzido? E, se afirmativo, qual é o comprimento desde modelo reduzido?

Para responder estas perguntas, foram feitas algumas análises para teste. Foram criados modelos contendo somente a carcaça intertravada, a camada plástica interna e um único tendão da armadura interna, submetidos a um ciclo de carregamento e descarregamento de tração, para investigar se as seguintes variáveis são dependentes do comprimento do tubo:

1. A variação do raio médio do tendão;
2. As reações nos engastes do tendão;
3. A resposta do conjunto frente ao carregamento considerado.

Foram criados três modelos distintos, variando o número de passos do tendão: um modelo com 1 passo, um modelo com 2 passos e um modelo com 4 passos, para investigar estes parâmetros citados.

A reação mais importante a ser observada é a reação do tendão no eixo z do sistema cilíndrico $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ do tubo. Através desta reação são levantadas as curvas de histerese e obtida a rigidez equivalente. No entanto, é interessante observar as reações nas outras direções a fim de aprofundar o estudo. Adicionalmente, as reações também foram medidas segundo o sistema de coordenadas $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$ fixado no tendão, lembrando que existe uma correlação geométrica entre estes dois sistemas (ver anexo B.1).

A rigidez equivalente é calculada através da equação:

$$F_t = (EA)_{eq} \cdot \varepsilon_z \tag{5.11}$$

Onde ε_z é a deformação axial imposta ao modelo e F_t é a força axial observada. É importante ressaltar que esta equação foi colocada para compararmos o valor de $(EA)_{eq}$ entre os modelos com 1, 2 e 4 passos estudados.

A figura 5.7 mostra como o o raio do eixo central do tendão varia com a altura segundo o eixo z, para os três modelos estudados. Nota-se que, apesar das oscilações ao longo da altura, as três curvas apresentam um valor médio muito próximo.

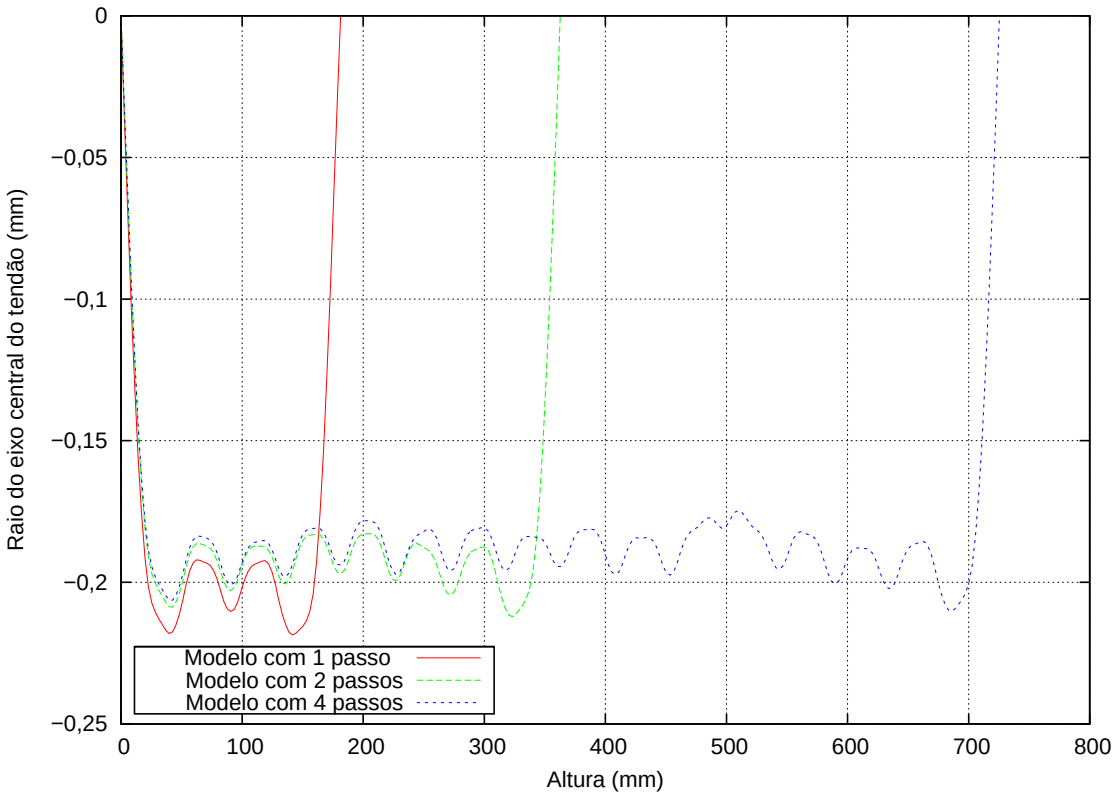

Figura 5.7: *Raio do eixo central do tendão x altura* do modelo de calibração.

A tabela 5.2 apresenta os demais resultados numéricos levantados para comparação. Nota-se que, de uma maneira geral, as diferenças observadas entre o modelo com 2 passos e o modelo com 4 passos são muito pequenas: A diferença no valor de $(EA)_{eq}$ foi da ordem de 5%, e a diferença na reação em $\vec{e}_z$ foi de 2,5% aproximadamente. Já a diferença no raio médio do eixo central do tendão não passou de 0,6%.

Tabela 5.2: Resultados do estudo de calibração da altura do tubo com modelo numérico

	Modelo 1 Passo	Modelo 2 Passos	Modelo 4 Passos
L_0 (mm)	181,37	362,74	725,48
ΔL (mm)	1,72	3,45	6,9
ε_z (%)	0,95	0,95	0,95
ΔR médio (mm)	-0,180	-0,183	-0,184
EA equivalente (MPa)	14051	12733	12097
Reação em $\vec{e}_r$ (N)	68,8	47,1	46,1
Reação em $\vec{e}_\theta$ (N)	495	161	157
Reação em $\vec{e}_z$ (N)	134	121	118
Reação em $\vec{n}$ (N)	-68,8	-47,1	-46,1
Reação em $\vec{b}$ (N)	-171	8,28	8,18
Reação em $\vec{t}$ (N)	484	202	196

Frente à estas observações, pode-se afirmar que o modelo contendo somente dois passos do tendão trouxe resultados muito bons. Apesar deste modelo representar apenas uma pequena fração do comprimento do modelo em escala (mais precisamente, 7,25%), a diferença dos resultados entre o modelo de 2 passos e o modelo de 4 passos são mínimas, de maneira que pode-se considerar que uma sessão transversal, longe das extremidades, do modelo reduzido, apresenta resultados semelhantes à aqueles observados em uma seção transversal do tubo completo, também longe das extremidades, desde que ambos estejam submetidos ao mesmo alongamento axial ε_z.

Outra conclusão notável deste estudo, vista na figura 5.8, foi que o valor de ε_z é aproximadamente constante ao longo do eixo z, em todos os modelos, o que corrobora uma das hipóteses levantadas para o modelo analítico.

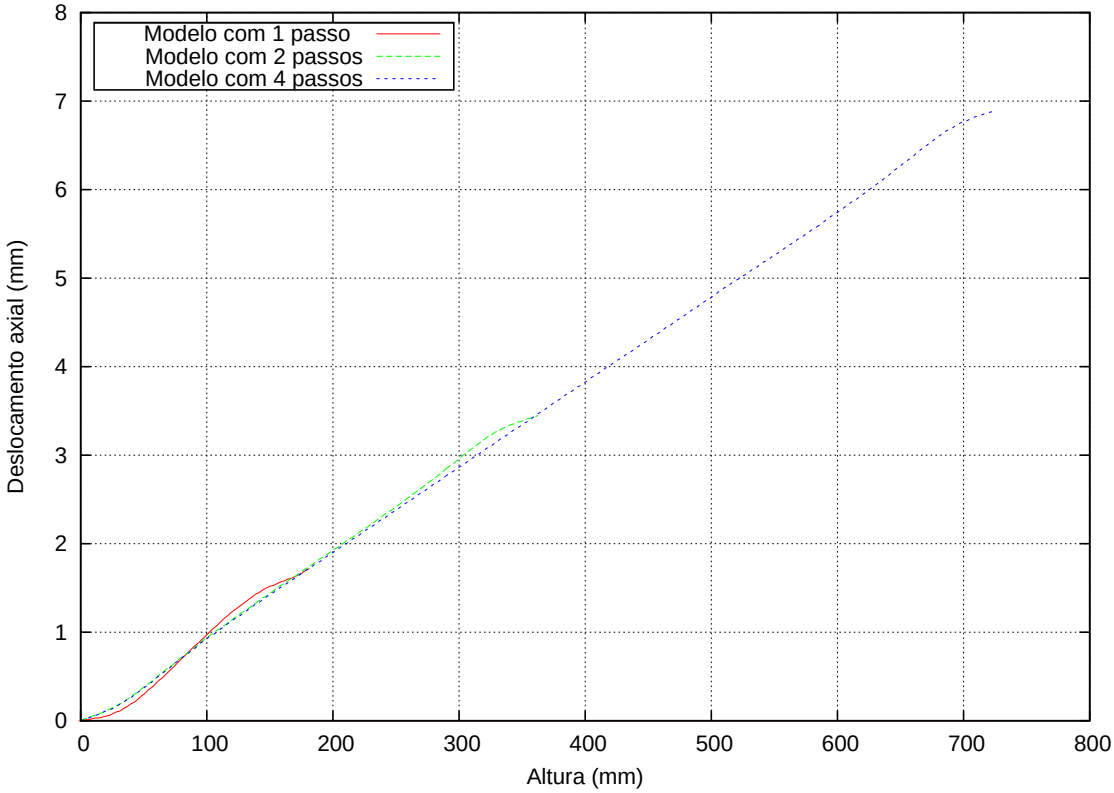

Figura 5.8: Curva *Deslocamento axial x altura* do tendão do modelo de calibração.

5.4 Simulações e resultados do modelo completo

Os parâmetros geométricos e de material são os mesmos utilizados no modelo analítico (item 4.5.1), com exceção da carcaça intertravada, modelada como um tubo equivalente. O comprimento do segmento estudado foi de $362mm$, equivalente a dois passos de um tendão da armadura interna. O coeficiente de atrito adotado onde necessário foi de $\mu = 0,1$, com exceção dos casos que foram elaborados para o estudo deste coeficiente, apresentados no item 5.4.3. Da mesma maneira, arbitrou-se $\beta = 1$ para todos os casos, com exceção dos casos elaborados para o estudo deste parâmetro.

A tabela 5.3 apresenta os valores de referência utilizados em todas as simulações numéricas apresentadas nos itens subsequentes. No entanto, algumas simulações foram feitas especificamente para analisar a influência de alguns destes parâmetros; nestes casos os valores utilizados são apontados quando necessário.

Tabela 5.3: Propriedades geométricas do tubo analisado pelo modelo numérico

Camada	Modelo	R_i (mm)	R_e (mm)	α (°)	n	b (mm)
1 - Carcaça intertravada	Tubo equivalente	33,74	35	N/A	N/A	N/A
2 - Camada plástica interna	Cilíndrica	35	41	N/A	N/A	N/A
3 - Armadura interna	Helicoidal	41	43	-55,5	29	5
4 - Armadura externa	Helicoidal	43	45	+55,5	29	5
5 - Camada plástica externa	Cilíndrica	45	50	N/A	N/A	N/A

As propriedades de material foram as mesmas utilizadas no modelo analítico, com exceção da carcaça intertravada, que utiliza um modelo de tubo ortotrópico cujas propriedades estão descritas na tabela 5.5, construída a partir das equações obtidas em 5.8. Os valores considerados para os módulos de cisalhamento ($G_{r\theta}$, $G_{\theta z}$ e G_{rz}) foram iguais ao valor do módulo de cisalhamento G original do aço, que vale aproximadamente 80MPa. Na realidade estes valores não são significativos para a análise uma vez que a carcaça intertravada não será submetida à esforços de torção, mas estes valores não podem ser nulos para garantir a estabilidade numérica do processo de resolução do método.

Tabela 5.4: Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

Camada	Material	E (GPa)	ν
2 - Camada plástica interna	Plástico	0,28	0,4
3 e 4 - Armaduras de tração	Aço	207	0,3
5 - Camada plástica externa	Plástico	0,32	0,4

Tabela 5.5: Propriedades mecânicas para o modelo da carcaça (Valores em GPa)

Camada	E_r	E_θ	E_z	$G_{r\theta}$	$G_{\theta z}$	G_{rz}
1	68	207	0,006	80	80	80

Em todos os casos a seguir, o carregamento utilizado foi um ciclo de força axial de 0 kN a 40 kN, seguido de um descarregamento até 0kN. A figura 5.9 apresenta este carregamento.

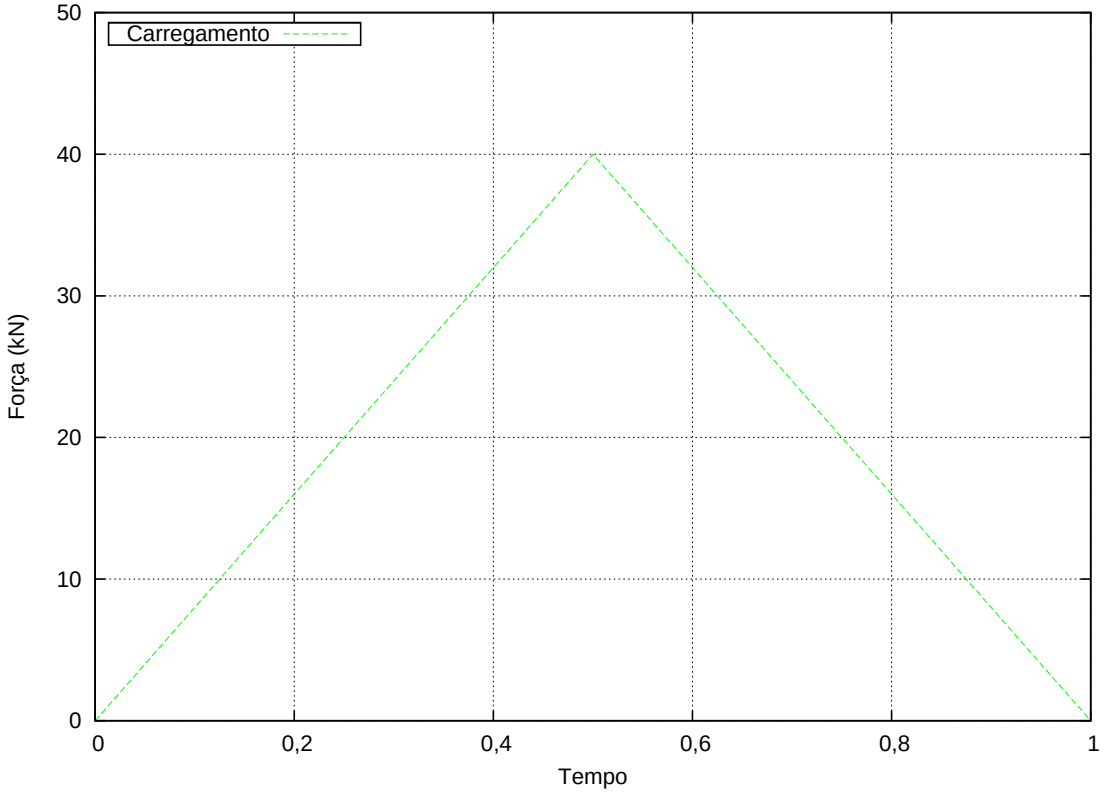

Figura 5.9: Carregamento axial aplicado nos modelos com elementos finitos.

5.4.1 Modelagem do tubo completo

Com base nos dados apresentados no item anterior, foi realizado o modelamento de um segmento do tubo de 362mm de comprimento, o que corresponde a dois passos de um tendão qualquer da armadura interna. O modelo resultante é composto de 48.064 elementos, 92.620 nós e duas regiões para detecção de contato entre elementos: uma entre a camada plástica interna e a armadura interna e outra entre a armadura interna e a armadura externa. Conforme descrito anteriormente, não foi considerado o contato entre a armadura externa e a capa plástica externa.

Os modelos foram simulados no solver marc2008r2, rodando em um nó de um cluster Altix contendo 8 núcleos Xeon X5560 2.8GHz e 24 GB de memória, com o sistema operacional Linux. Neste ambiente, o tempo de análise médio de cada caso foi de 120 horas.

5.4.2 Análise da influência do parâmetro E_θ

Conforme descrito na seção 5.3.1, foi adotado o modelo de tubo ortotrópico para a carcaça intertravada. Observou-se que o módulo de elasticidade tangencial E_θ é uma medida de rigidez importante para a composição da rigidez do conjunto.

Para analisar a influência deste parâmetro na rigidez axial do conjunto foram feitas três simulações. Tomando como referência o módulo de elasticidade E do material da carcaça intertravada, podemos expressar $E_\theta = \beta E$. Foram simulados casos com β assumindo os valores $1, 0,5$ e $0,25$

O gráfico da figura 5.10 apresenta os resultados para os valores de β considerados. É notória a influência deste parâmetro na rigidez axial do conjunto.

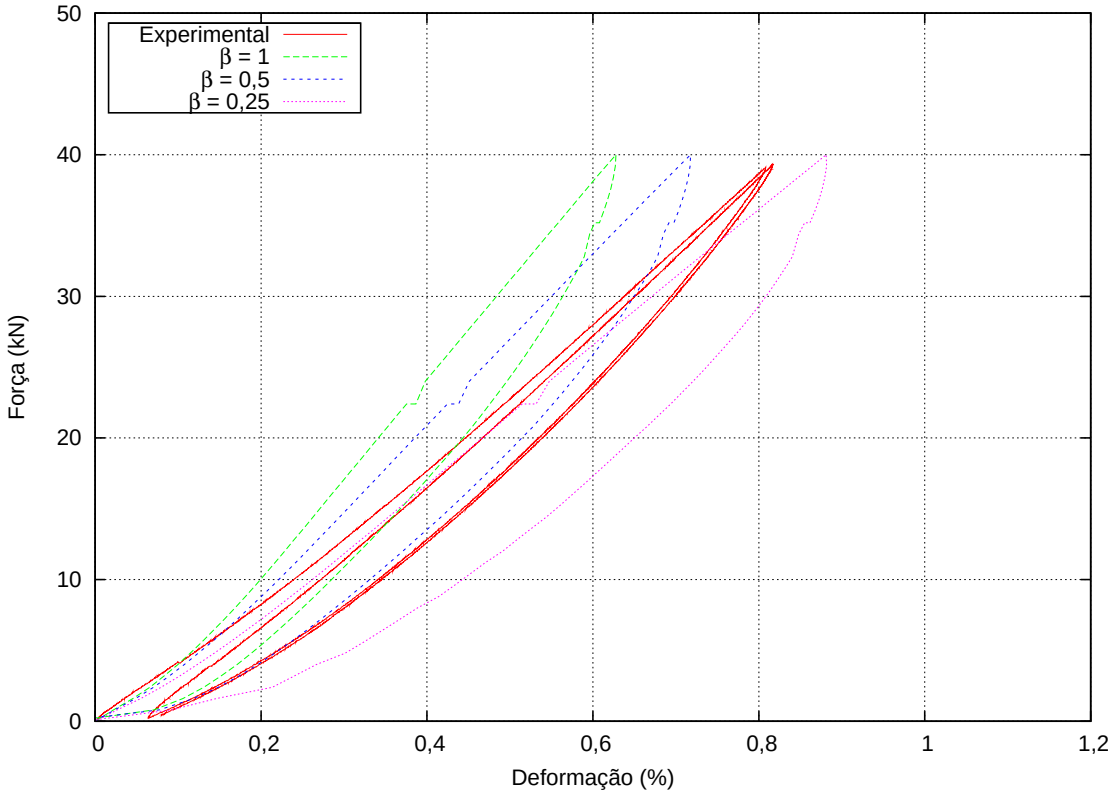

Figura 5.10: Curva *Força de tração x deformação* para diferentes valores de β ($\mu = 0,1$).

5.4.3 Análise da influência do coeficiente de atrito

Alguns autores (como Bahtui et al. [5] e Shirong [31]) apontam o valor de $\mu = 0,1$ como razoável para se adotar nas interfaces entre as camadas do tubo flexível, sob condições de baixas velocidades de deslizamento.

Para determinar a influência do coeficiente de atrito no comportamento (curva de histerese), foram feitas análises numéricas considerando $\mu = 0,1$, e $\mu = 0,05$, cujos resultados estão apresentados no gráfico da figura 5.11. Pode-se observar variações tanto na rigidez equivalente do conjunto, quanto na energia dissipada, dada pela "abertura" da curva de histerese.

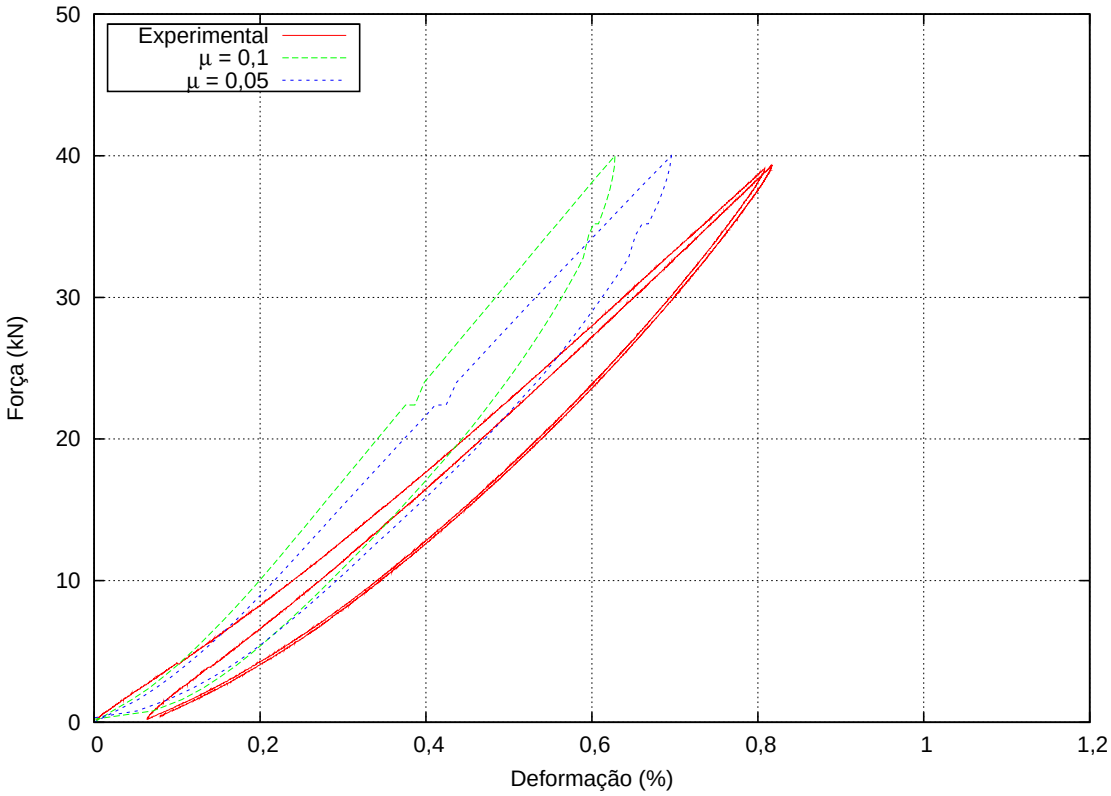

Figura 5.11: Curva *Força de tração x deformação* para diferentes valores de μ ($\beta = 1$).

5.4.4 Estudo das condições de contorno

No item 5.3.3 foram apresentadas duas maneiras distintas de aplicar o carregamento no modelo. A figura 5.12 mostra os resultados obtidos para estas duas abordagens, juntamente como o resultado obtido experimentalmente. É possível observar que a condição de contorno (1), onde todas as camadas são submetidas a um carregamento uniforme, apresenta um valor de rigidez axial próximo ao observado experimentalmente, porém sem recuperar efeitos de histerese; já a condição de contorno (2) recuperou o resultado de histerese, porém apresentando uma rigidez axial superior àquela observada experimentalmente.

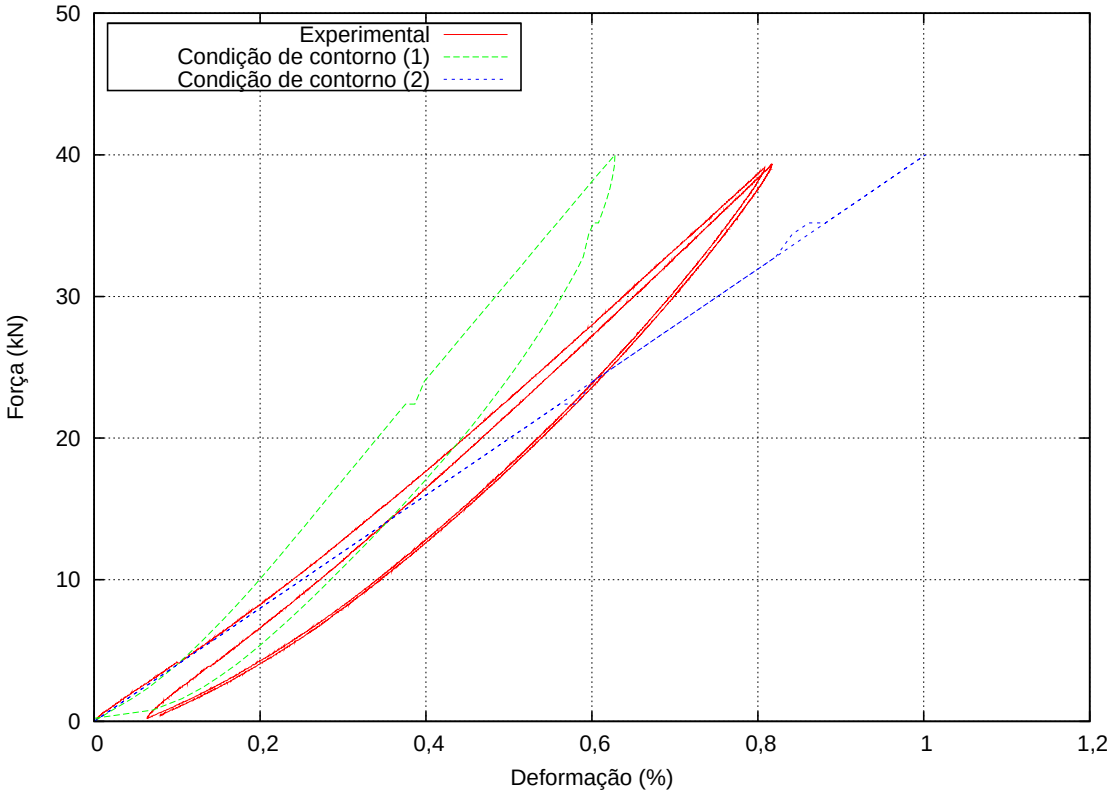

Figura 5.12: Resultado de *Força de tração x deformação* para diferentes condições de contorno ($\beta = 1$, $\mu = 0,1$).

5.4.5 Carregamento cíclico de um tubo não pressurizado

A figura 5.13 mostra a curva *Força de tração x deformação* para o tubo não pressurizado, utilizando o carregamento equivalente ao "Caso A" apresentado nos resultados experimentais e analíticos. Observa-se que o modelo em elementos finitos indicou uma rigidez axial maior do que a observada experimentalmente, enquanto o modelo analítico indicou uma rigidez axial menor.

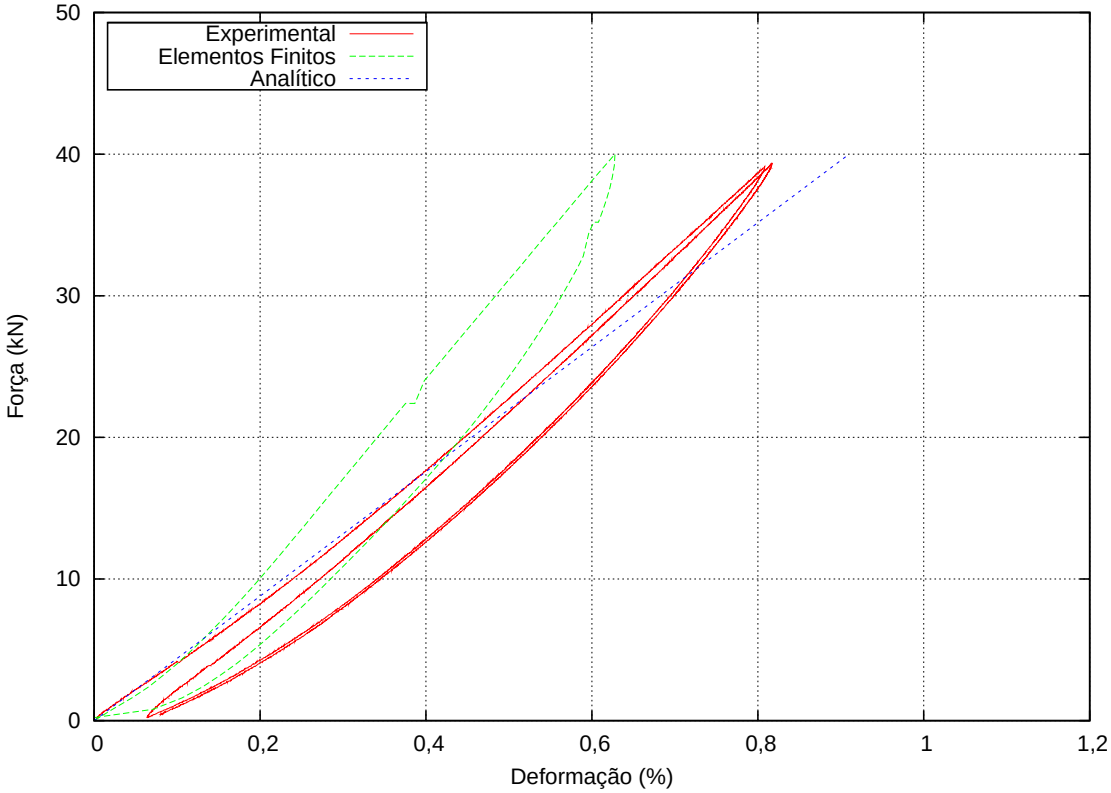

Figura 5.13: Curva *Força de tração x deformação* para o tubo não pressurizado ($\beta = 1$, $\mu = 0,1$).

Análise local dos tendões

A figura 5.14 mostra a tensão axial σ_t, segundo o sistema de coordenadas local $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$, em uma seção transversal de um tendão arbitrário da armadura interna. A distribuição de tensão nesta superfície não é constante, mas varia de 81 a 115 MPa, aproximadamente. Observa-se pela tabela 4.6 que o modelo analítico trouxe uma boa aproximação para este resultado, indicando uma tensão média de 101 MPa.

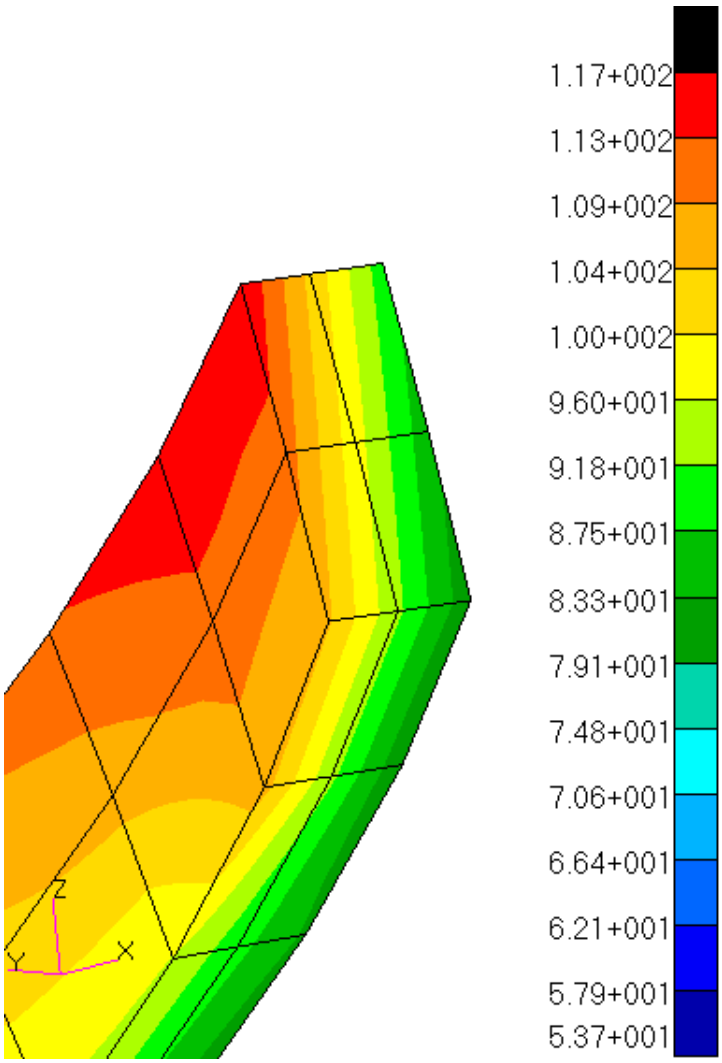

Figura 5.14: Tensão axial em um tendão da armadura externa para o Caso A ($\beta = 1$, $\mu = 0,1$).

O gráfico da figura 5.15 mostra a variação das tensões axiais σ_t ao longo do comprimento do tubo flexíveis para três linhas pertencentes a um mesmo tendão arbitrário da armadura externa. As três linhas estão localizadas no raio médio do tendão. Estão mostradas a linha superior, que pertence à face superior do tendão, a linha central, que corresponde ao centróide da seção retangular do tendão, e a linha inferior, pertencente à face inferior do tendão.

É possível observar que na região de engaste há uma grande variação nas tensões, porém logo as linhas convergem para um valor em torno de $110MPa$. Na outra extremidade, onde foi permitida a variação do ângulo de assentamento, as variações observadas não foram tão significativas. Observa-se também que o valor de $131MPa$ calculado pelo modelo analítico é cerca de 20% maior do que o valor observado pelo modelo em elementos finitos.

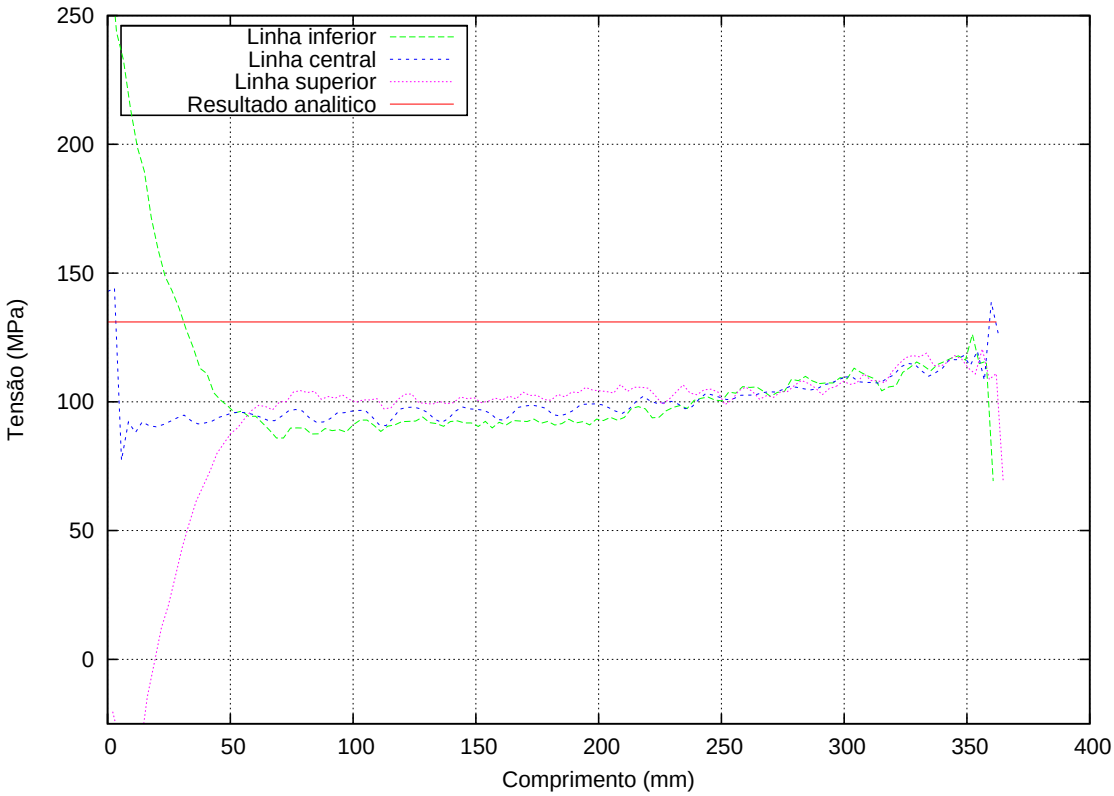

Figura 5.15: Tensão axial ao longo do comprimento em três linhas de um tendão arbitrário da armadura externa do Caso A ($\beta = 1$, $\mu = 0,1$).

Análise da rigidez global

A equação 5.11 foi utilizada para calcular a rigidez axial secante do tubo flexível através dos resultados obtidos experimentalmente, pelo modelo analítico e por elementos finitos. Os resultados, mostrados na tabela 5.6, mostram que o modelo por elementos finitos indicou uma rigidez axial secante equivalente cerca de 33% maior do que a observada experimentalmente e 46,24% maior do que o indicado pelo modelo analítico.

Tabela 5.6: Rigidez axial secante do conjunto para o caso A calculada por diferentes métodos

Método	$(EA)_{eq}\,(kN)$
Ensaio experimental	48,3
Modelo por elementos finitos	64,2
Modelo analítico	43,9

Esta diferença pode ser explicada pela adoção inadequada de parâmetros: conforme foi mostrado nos itens anteriores, a curva de histerese é sensível a pelo menos dois parâmetros, o coeficiente de atrito μ e o módulo de elasticidade tangencial E_θ do tubo equivalente à carcaça intertravada. Ou seja, através da calibração destes parâmetros pode-se obter uma curva de histerese muito próxima a aquela observada experimentalmente.

No entanto, é interessante observar a região inicial da curva de histerese mostrada na figura 5.13: no início do carregamento, enquanto o valor da força axial é pequena e os efeitos de atrito são muito pequenos para surtir efeito, os três resultados são muito próximos.

5.4.6 Carregamento cíclico de um tubo pressurizado

A figura 5.16 mostra a curva *Força de tração x deformação* para o tubo pressurizado, utilizando o carregamento equivalente ao "Caso C" apresentado nos resultados experimentais e analíticos. A pressão interna utilizada foi de $6,89MPa$ ($1000psi$), a mesma utilizada no ensaio experimental, e mantida constante ao longo do carregamento axial imposto.

A aplicação das forças de pressão foi feita diretamente na capa plástica interna, e não na parede interna do tubo equivalente à carcaça intertravada. Esta abordagem foi utilizada pois a carcaça intertravada não é estanque, de maneira que em situações de operação é a própria barreira de pressão que deve resistir à pressão interna do fluido transportado pelo tubo flexível.

Observa-se que tanto o modelo em elementos finitos quanto o modelo analítico indicaram uma rigidez axial maior do que a observada experimentalmente. Assim como no caso do tubo despressurizado, a diferença observada pode ter sido causada pela má adoção dos parâmetros β e μ.

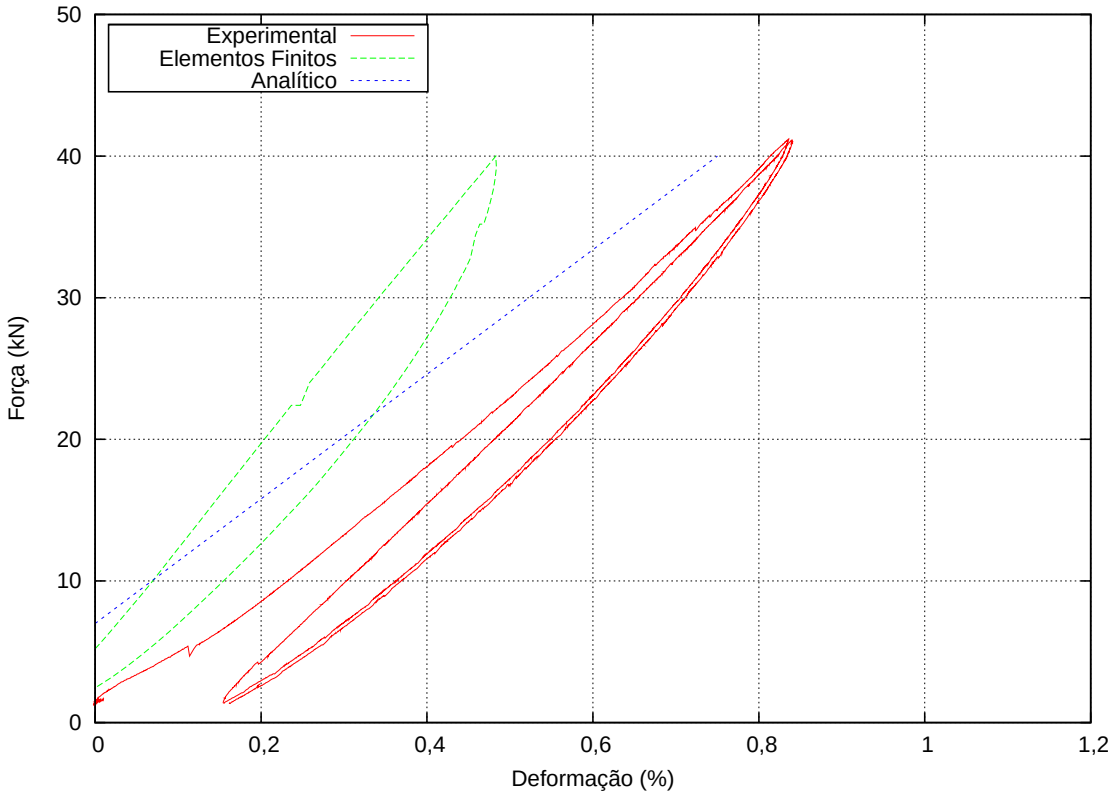

Figura 5.16: Curva *Força de tração x deformação* para o tubo pressurizado ($\beta = 1$, $\mu = 0,1$).

5.4.7 Análise e discussões dos resultados

O método dos elementos finitos é uma ferramenta poderosa para a análise estrutural, e trouxe, para o estudo de um tubo flexível submetido a um carregamento axissimétrico, uma série de resultados adicionais que não foram possíveis de se obter por modelos analíticos ou experimentalmente. Enquanto os modelos analíticos permitem uma análise rápida, os modelos em elementos finitos permitem obter uma maior riqueza de detalhes, tais como:

- Distribuição de tensões nos tendões;
- Curvas de histerese;
- Forças de atrito entre as camadas;
- Variação de qualquer grandeza desejada ao longo do carregamento;

Entre outros. No entanto, a validade destes resultados depende de um bom modelamento do problema. Conforme foi apontado nos resultados deste capítulo, alguns parâmetros influenciam consideravelmente os resultados e devem ser escolhidos cuidadosamente para se obter uma boa qualidade na análise desejada.

6 *Considerações Finais*

Entre os objetivos desta dissertação estão servir de introdução ao assunto e servir de ponto de partida para estudos mais avançados, e certamente estes objetivos foram alcançados: muitas das formulações apresentadas foram retiradas ou inspiradas em outros trabalhos, e muitas destas formulações podem ser aperfeiçoadas retirando algumas hipóteses simplificadoras e introduzindo mais detalhes no modelamento.

O tema estudado é bastante atual e deve permanecer em evidência por muito tempo, uma vez que as fontes de petróleo disponíveis no planeta estão se restringindo às águas profundas e, com isso, serão necessários cada vez mais detalhes e informações para que o projeto estrutural de linhas flexíveis se torne mais preciso e confiável.

6.1 Conclusões

Ao unir resultados oriundos de modelos analíticos, numéricos e experimentais, foi possível distinguir os pontos fortes e fracos de cada abordagem. Mostrou-se a importância de saber selecionar um modelo adequado para analisar o tubo flexível: para uma análise rápida, um modelo analítico simplificado pode satisfazer todas as necessidades; já uma análise de vida útil pode requerer uma análise em elementos finitos ou uma série de experimentos em modelos em escala.

Como é geralmente observado na literatura, a resposta de um tubo flexível sujeito somente a carregamentos axissimétricos é essencialmente linear, salvo se forem considerados grandes carregamentos, onde entram em questão as não-linearidades de material e o contato entre tendões de uma mesma armadura. Foi visto também que, em carregamentos cíclicos, a maior parte dos efeitos dissipativos se deve à força de atrito entre as camadas, particularmente entre as armaduras e as suas camadas adjacentes.

Também foi observado que nem sempre, na prática, as hipóteses levantadas nas formulações analíticas são observadas, mas, ainda assim, podem ser consideradas aceitáveis para certas

condições de carregamento. Além disso, outros fatores, como a correta obtenção de parâmetros de material, podem comprometer os resultados previstos por um dado modelo.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

6.2.1 Modelos em elementos finitos e analítico-numéricos em outros casos de carregamento

Nesta dissertação foram considerados somente os esforços de natureza axissimétrica atuantes em um tubo flexível. Um estudo mais aprofundado poderia incluir outros tipos de carregamento, como por exemplo esforços de flexão. Tais esforços podem ocorrer durante as operações de lançamento do tubo flexível (passagem por roda), durante a instalação destas estruturas. Mesmo em condições de operação, é possível observar carregamentos de flexão no TDP do tubo, no ponto onde a estrutura toca o fundo do mar. Também é interessante incluir esforços de esmagamento ("crushing") de linhas, que podem ser causados pelas lagartas durante a operação de lançamento.

6.2.2 Estudo da carcaça intertravada

Foram apresentadas duas abordagens distintas para a modelagem da carcaça intertravada: modelagem como camada helicoidal ou como tubo equivalente. Um estudo detalhado desta camada seria interessante para obter, por exemplo:

- Valores de tensões nos contatos das regiões de intertravamento;
- Localização dos pontos de máxima tensão da estrutura quando submetida à altas cargas de esmagamento;
- Levantamento de curvas de histerese para vários tipos de carregamentos cíclicos;

Dentre outros. Estes valores poderiam ser comparados em ambos os modelos, verificando a aplicabilidade de cada um.

6.2.3 Modelo analítico para os tendões considerando atrito

Utilizando as equações de equilíbrio de Clebsh para uma barra naturalmente curva, lançando mão de algumas hipóteses adequadas para o estudo, pode-se chegar a um conjunto de equações diferenciais que regem a dinâmica de um tendão. McIver [22] mostra que os resultados dos carregamentos de flexão são bastante sensíveis ao coeficiente de atrito utilizado, indicando ainda que o modelo de atrito seco de Coulomb pode não ser o mais adequado. Diferentes modelos de atrito podem ser retirados de Awrejcewicz; Olejnik [2] de maneira a estudar qual modelo se adapta melhor aos resultados experimentais, que podem ser vistos em Witz [37] ou Ramos et al. [29]. Adicionalmente, alguns coeficientes de atrito podem ser obtidos dos trabalhos de Peng et al. [26], Saevick; Berge [30] e Shirong [31] para introduzir nos modelos analíticos.

6.2.4 Modelo em elementos finitos considerando os contatos entre os tendões e não-linearidade de material

Como mostrado por Custódio; Vaz [11], observa-se uma mudança no comportamento do tubo sob altos valores de carregamento (considerando somente os esforços de natureza axissimétrica) quando se leva em conta as não-linearidades de material e a possibilidade de contato entre tendões de uma mesma camada helicoidal. Um modelo em elementos finitos com tal nível de refinamento seria interessante para confrontar os resultados com o modelo analítico apresentado no trabalho citado e poderia trazer novas informações a respeito das tensões nos contatos, por exemplo. Outros parâmetros, como coeficientes de atrito, poderiam ser avaliados numericamente para estudar sua influência nos valores de rigidez que regem o comportamento do tubo.

Referências Bibliográficas

[1] ARANHA, J. A. P.; PINTO, M. O.; da SILVA, R. M. C. On the dynamic compression of risers: an analytic expression for the critical load. **Applied Ocean Research**, v. 23, n. 2, p. 83-91, Abril, 2001.

[2] AWREJCEWICZ, J.; OLEJNIK, P. Analysis of dynamic systems with various fricton laws. **Applied Mechanics Reviews**, v. 58 p.389-411 Novembro, 2005

[3] AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1a. Edição, 2003.

[4] BAHTUI, A. **Development of a constitutive model to simulate unbonded flexible riser pipe elements**. Londres, 2008. Tese (Doutorado) - Brunel University.

[5] BAHTUI, A.; BAHAI, H; ALFANO, G. A finite element analysis for unbonded flexible risers under torsion. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 130, 041301, Novembro, 2008.

[6] BAHTUI, A.; BAHAI, H; ALFANO, G. Numerical and Analytical Modeling of Unbonded Flexible Risers. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 131, 021401, Maio, 2009.

[7] BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1995.

[8] CLAYDON, P.; COOK, G.; BROWN, P.A.; CHANDWANI, R. A theoretical approach to prediction of service life of unbonded flexible pipes under dynamic loading conditions. **Marine Structures**, Oxford, v. 5, n.5, p.399-429, 1992.

[9] CRUZ, F. T. L. **Análise estrutural de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos**. São Paulo, 1996. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

[10] CUSTÓDIO, A. B. **Modelo analítico para estimativa da falha por instabilidade em armaduras de dutos flexíveis**. Rio de Janeiro, 2005. Tese (Doutorado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[11] CUSTÓDIO, A. B.; VAZ, M. A. A non linear formulation for the axisymmetric response of umbilical cables and flexible pipes. **Applied Ocean Research**, v. 24, p.21-29, 2002.

[12] FANG, J.; LYONS, G. J. Structural Damping Behaviour of Unbonded Flexible Risers. **Marine Structures**, v. 5, p.165-192, 1992.

[13] FÉRET, J. J.; BOURNAZEL, C. L. Calculation of stresses and slip in structural layers of unbonded flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v. 109, p.263-269, 1987.

[14] FILHO, A. A. **Elementos finitos - A base da tecnologia CAE**. Ed. Erica, 4a. edição, 2006.

[15] GOTO, Y; OKAMOTO, T.; ARAKI, M.; FUKU, T. Analytical study of the mechanical strength of flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, New York, v.109, p.249-253, agosto, 1987.

[16] KNAPP, R.H. Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, London, v. 14, n.4, p.515-529, 1979.

[17] KRAINCANIC, I.; KEBADZE, E. Slip initiation and progression in helical armouring layers of unbonded flexible pipes and its effect on pipe bending behaviour. **Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, v. 36, n.3, p.265-275, 2001.

[18] LANTEIGNE, J. Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 52, n.2, p.423-432, junho, 1985.

[19] LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4. ed. New York: Dover Publications, 1944. 643p.

[20] MARANHÃO, F. A. F.; RAMOS Jr., R. Analysis of friction effects in the structural behavior of sandwich pipes under axissymmetric loads. **Proceedings of COBEM 2009**, outubro, 2009

[21] MARTINDALE, H. G. A. **The behaviour of flexible riser tensile armour in the region of an end fitting**, Londres, 2008. Tese (Doutorado) - University College London

[22] McIVER, D. B. A method of modelling the detailed component and overall structural behaiour of flexible pipe sections. **Engineering Structures**, Guildford, v. 17, n. 4, p. 254-266, Maio, 1995.

[23] McNAMARA, J. F.; HARTE, A. M. Three-dimensional analytical simulation of flexible pipe wall structure. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 114 p.69-75, Maio, 1992

[24] MOORE, F. Materials for flexible riser systems: problems and solutions. **Engineering Structures**, Guildford, v. 11, n.4, p.208-216, Outubro, 1989.

[25] NETO, D. P. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. São Carlos, 2009. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia São Carlos, Universidade de São Paulo.

[26] PENG, Y. X.; ZHU, Z. C.; CHEN, G. A.; CAO, G. H. Effect of tension on friction coefficient between lining and wire rope with low speed sliding. **Journal of China University of Mining and Technology**, v. 17(3), p. 409-413, Setembro, 2007.

[27] RAMOS Jr., R. **Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais**, São Paulo, 2001. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

[28] RAMOS Jr., R.; PESCE, C. P. A consistent analytical model to predict the structural behavior of flexible risers subjected to combined loads. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 126, p.141-146, Maio, 2004

[29] RAMOS Jr., R.; MARTINS, C. A.; PESCE, C. P.; ROVERI, E. F. A case study on the axial-torsional behavior of flexible risers. **Proceedings of the ASME 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, 2008.

[30] SAEVICK, S.; BERGE, S. Fatigue testing and theoretical studies of two 4 inches flexible pipes. **Engeneering Structures**, v.17(4), p.276-292, Maio, 1995.

[31] SHIRONG, G. The friction coefficients between the steel rope and polymer lining in frictional hoisting. **Wear**, v. 152 p.21-29, 1992.

[32] SOUSA, J. R. M. **Análise local de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos**, Rio de Janeiro, 2005. Tese (Doutorado) - COPPE, UFRJ.

[33] SOUZA, L. A. L. **Rigidez à flexão de cabos umbilicais submarinos**. Rio de Janeiro, 1998. Dissertação (Mestrado). COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[34] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

[35] WITZ, J. A.; TAN, Z. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, Barking, v. 5, p.205-227, 1992.

[36] WITZ, J. A.; TAN, Z. On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, v. 5, p.229-249, 1992.

[37] WITZ, J.A. A case study in the cross-section analysis of flexible risers. **Marine Structures**, Barking, v. 9, p.885-904, 1996.

[38] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method in Engineering Sciences**. Vol. I, McGraw-Hill, 1988.

APÊNDICE A – Energia de deformação de um corpo elástico-linear

Grande parte dos modelos analíticos apresentados ao longo desta dissertação é baseada na equação da energia interna de um sólido deformável. Neste apêndice serão apresentados brevemente alguns conceitos de teoria da elasticidade, de maneira a demonstrar a origem desta equação. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, recomenda-se o livro de Timoshenko [34], de onde foram retiradas as formulações deste apêndice.

A.1 Equilíbrio de forças

O equilíbrio de forças em um sólido deformável é dado por:

$$\nabla \cdot T + \vec{F} = \rho \ddot{\vec{u}} \tag{A.1}$$

Onde:

∇ é o operador divergente;

T é o tensor das tensões;

$\vec{F}$ É o vetor de forças distribuídas por unidade de volume;

ρ é a densidade do sólido;

$\ddot{\vec{u}}$ é o vetor de aceleração.

Considerando-se que o sólido deformável está livre de forças de campo (como por exemplo força gravitacional, eletromagnética, etc), e as acelerações são desprezíveis, a equação A.1

expandida em coordenadas cartesianas fica:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

A.2 Relações deslocamentos-deformações

Sendo u, v e w os campos de deslocamentos nas direções x, y e z de um sólido qualquer, as relações deslocamento-deformações, considerando-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos, são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{A.3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Sendo u_r, u_θ e u_z os campos de deslocamentos radiais, tangenciais e axiais, as mesmas relações em coordenadas cilíndricas são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{A.4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

Utilizando estas relações, as equações de compatibilidade de deformações são automaticamente satisfeitas.

A.3 Equações constitutivas de um material elástico-linear

Sendo T o tensor das tensões (também chamado de tensor das tensões de Cauchy) e E o tensor das pequenas deformações, mostra-se que uma relação linear entre estes dois tensores é dada por:

$$T = CE \tag{A.5}$$

Onde C é um tensor de quarta ordem, contendo 81 constantes. No entanto, devido à simetria dos tensores T e E, somente 21 destas constantes são independentes.

Para um material isotrópico, mostra-se que somente duas constantes (ou *parâmetros*) são necessárias para caracterizar o tensor C. A relação A.5 fica simplificada para:

$$T = 2GE + \lambda tr(E)I \tag{A.6}$$

Onde $tr(E)$ é o traço de E e I é a matriz identidade de ordem três. O parâmetro G é o *Módulo de Cisalhamento* do material, enquanto o parâmetro λ não possui uma interpretação física imediata, apesar de ser frequentemente utilizado para simplificar certas equações. Outros parâmetros de material, como o *Módulo de Elasticidade* (E) e o *Coeficiente de Poisson* (ν) podem ser obtidos através destes dois parâmetros. A tabela A.1 mostra algumas relações entre as constantes elásticas mais comuns.

Tabela A.1: Tabela de conversão de constantes elásticas

	(λ, G)	(E, G)	(E, ν)	(G, ν)	(λ, ν)
$E =$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	E	E	$2G(1+\nu)$	$\frac{\lambda}{\nu}(1+\nu)(1-2\nu)$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(G+\lambda)}$	$\frac{E}{2G}-1$	ν	ν	ν
$G =$	G	G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$
$\lambda =$	λ	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	λ

Expandindo a equação A.6, podemos escrever as relações constitutivas em função das componentes de tensão e de deformação:

- Tensões em função das deformações

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z & \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \end{cases} \tag{A.7}$$

- Deformações em função das tensões

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] & \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] & \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] & \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \end{cases} \tag{A.8}$$

A.4 Trabalho e Energia de deformação

Seja o seguinte elemento infinitesimal, retirado de um material homogêneo, isótropo e de comportamento elástico-linear, sujeito a uma tensão σ_x, que causa uma correspondente deformação ε_x. O trabalho realizado por esta deformação é armazenado internamente no sistema e é chamada energia de deformação. Admite-se que não há nenhum efeito dissipativo, como aumento na temperatura ou alteração na energia cinética do elemento, dada a natureza *quasi-estática* do carregamento, de maneira que todo o trabalho realizado é convertido em energia. Analisando o gráfico A.1, observa-se que o trabalho infinitesimal dW realizado por esta tensão é dado por:

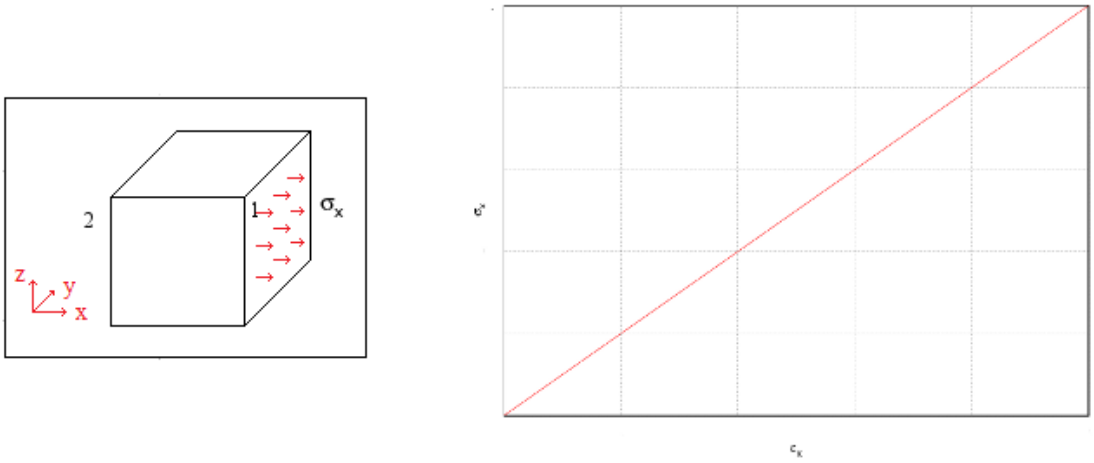

Figura A.1: Curva *tensão x deformação* em um elemento infinitesimal

$$dW = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dydz \tag{A.9}$$

E uma vez que todo o trabalho realizado é convertido em energia, temos que $dW = dU$, onde U é a energia interna do sólido. No entanto a equação acima considera que somente uma das faces foi carregada. Utilizando o subscrito 1 para indicar os efeitos na face 1 e o subscrito 2 para indicar os efeitos na face 2, a energia fica dada por:

$$dU = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x u)_1 - (\sigma_x u)_2\right] dydz \tag{A.10}$$

Sendo u, v, w os campos de deslocamentos segundo os eixos x, y, z, respectivamente. Tomando o limite da equação acima:

$$dU = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)\, dx\right] dydz \tag{A.11}$$

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para todas as componentes de tensão, em todas as direções. Assim, a energia é completamente dada por:

$$dU = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y v + \tau_{yz} w + \tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z w + \tau_{xz} u + \tau_{yz} v)\right] dxdydz$$

Expandindo a equação anterior, temos:

$$dU = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. u\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\right] dV \tag{A.12}$$

Podemos observar que, utilizando as relações deslocamento-deformações dadas em A.3, as derivadas parciais que multiplicam cada componente de tensão na primeira linha da equação acima nada mais são do que suas correspondentes componentes de deformação. De maneira similar, utilizando as equações de equilíbrio A.2, os valores dentro dos parênteses que multiplicam as variáveis de deslocamento são todos nulos. Assim, podemos expressar a equação da energia de um elemento infinitesimal submetido a um carregamento qualquer simplesmente por:

$$dU = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) dV \tag{A.13}$$

Pode-se definir um vetor de tensões $\vec{\sigma}$ e um vetor de deformações $\vec{\varepsilon}$ a partir de suas componentes:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Assim, a equação da energia é dada simplesmente por:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon}\, dV \tag{A.15}$$

É possível demonstrar que o escalar U é um invariante do sistema, portanto sua medida independe do sistema de coordenadas adotado. Portanto, esta equação permanece válida se as componentes de tensão e de deformação forem expressas em um sistema de coordenadas

não-cartesiano, desde que ambas obedeçam ao mesmo sistema adotado. É interessante ressaltar também que na dedução desta equação foi necessário garantir o equilíbrio de forças e, por conta das relações deslocamento-deformações utilizadas, a compatibilidade de deformações é automaticamente satisfeita.

Para um material elástico-linear, pode-se expressar facilmente as tensões σ em função das deformações ε e vice-versa. Introduzindo a equação constitutiva A.7 na equação acima, obtemos uma expressão para a energia do sistema somente em termos de deformações:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left[(\lambda+2G)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+2\lambda(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x)+G(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{xz}^2)\right] dV \quad \text{(A.16)}$$

De maneira similar podemos utilizar a equação A.8 para obtermos uma expressão para a energia em termos de tensões:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{1}{E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)+(2+2\nu)(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)\right] dV \quad \text{(A.17)}$$

Estas duas equações são bastante úteis na dedução de algumas fórmulas utilizadas ao longo deste trabalho.

APÊNDICE B – Estudo de uma barra prismática helicoidal

Em geral, admite-se que o eixo central dos tendões que compõem uma camada de armadura de um tubo flexível, em sua configuração indeformada, possa ser representado geometricamente pelas equações de uma hélice cilíndrica de passo constante. Neste apêndice serão apresentadas algumas deduções para o estudo de um tendão, apresentando algumas equações importantes utilizadas ao longo desta dissertação. Lembrando que, sempre que necessário, serão utilizadas as hipóteses simplificadoras apresentadas anteriormente, em particular as que dizem respeito à simplificações geométricas.

B.1 Análise geométrica

Neste item será feita uma análise da geometria de uma hélice de passo constante de maneira a se obter algumas relações bastante empregadas no estudo dos tendões. Tais deduções podem ser observadas, por exemplo, nos trabalhos de Custódio [10] e Ramos [27].

As equações paramétricas de uma hélice cilíndrica de passo constante no espaço são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\sin(\theta) \\ z &= h\frac{\theta}{2\pi} = \frac{R\,\theta}{\tan(\alpha)} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Onde θ é o ângulo que define a posição angular de um ponto P qualquer da hélice, medido a partir do eixo x até a reta que passa pela origem e pela projeção ortogonal do ponto no plano $z = 0$, e h é o passo da hélice. Na figura B.1 podemos ver estes parâmetros em uma hélice.

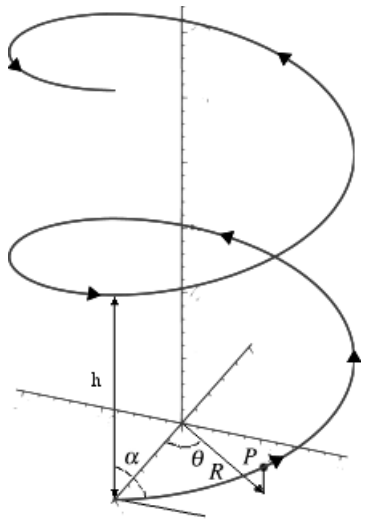

Figura B.1: Geometria de uma hélice (adaptada de www.wikipedia.org)

O passo h e o ângulo de assentamento α estão relacionados um ao outro por:

$$\tan(\alpha) = \frac{2\pi R}{h} \tag{B.2}$$

O vetor posição de um ponto qualquer pertencente à hélice é dado por:

$$\vec{r} = R\cos(\theta)\vec{e_x} + R\sin(\theta)\vec{e_y} + \frac{R\theta}{\tan(\alpha)}\vec{e_z} \tag{B.3}$$

E o comprimento de arco de um elemento infinitesimal é dado por:

$$dS = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\right) d\theta \tag{B.4}$$

Da equação acima obtemos a relação:

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{R}{\sin(\alpha)} \tag{B.5}$$

As análises no tendão são feitas em um sistema de coordenadas local, chamado de *Triedro de Frenet*, ou mais genericamente de sistema de coordenadas de *Frenet–Serret*. Este sistema de coordenadas tem sua origem no centroide da seção transversal (ponto pertencente à linha central da hélice) e é formado por três versores: o versor tangente ($\vec{t}$), que é tangente à linha central no ponto, o versor normal ($\vec{n}$), que aponta para o centro de curvatura local, e o versor binormal ($\vec{b}$), formado pelo produto vetorial destes últimos. Podemos ver estes versores na figura B.2.

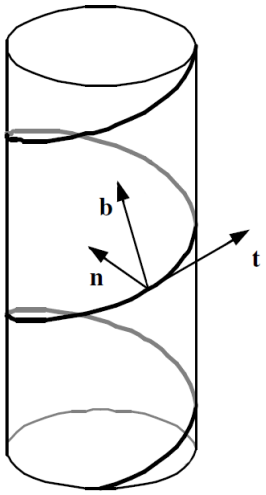

Figura B.2: Triedro de Frenet (adaptado de Martindale [21])

Em um espaço euclidiano tridimensional, uma curva é definida por três invariantes: o comprimento de arco S, a curvatura χ e a tortuosidade τ. As equações de *Frenet–Serret* estabelecem como estes valores estão relacionados com as variações dos versores $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$:

$$\frac{d}{dS}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \chi & 0\\ -\chi & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix} \tag{B.6}$$

Ou, expandindo as equações acima:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{dS}&=\chi\vec{n}\\ \frac{d\vec{n}}{dS}&=-\chi\vec{t}+\tau\vec{b}\\ \frac{d\vec{b}}{dS}&=-\tau\vec{n}\end{aligned} \tag{B.7}$$

O vetor tangente ao eixo central em um ponto qualquer é dado por:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dS} = -\sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y + \cos(\alpha)\vec{e}_z \tag{B.8}$$

Utilizando a primeira equação de B.7, pode-se obter a curvatura χ e as componentes do versor normal $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \vec{n} &= \frac{d\vec{t}}{dS} = \frac{d\vec{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{dS} \\ \chi &= \left\| \frac{d\vec{t}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dS} \right\| = \frac{\sin(\alpha)^2}{R} \\ \vec{n} &= -\cos(\theta)\vec{e}_x - \sin(\theta)\vec{e}_y \end{aligned} \tag{B.9}$$

O vetor binormal $\vec{b}$ e a tortuosidade τ podem ser obtidos através do produto vetorial de $\vec{t}$ e $\vec{n}$ e pela terceira equação de B.7:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{t} \times \vec{n} = \sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x - \cos(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_y + \sin(\alpha)\vec{e}_z \\ \tau &= \left\| \frac{d\vec{b}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dS} \right\| = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R} \end{aligned} \tag{B.10}$$

Enfim, pode-se resumir as principais características geométricas de uma hélice de passo constante como segue:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= -\sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y + \cos(\alpha)\vec{e}_z \\ \vec{n} &= -\cos(\theta)\vec{e}_x - \sin(\theta)\vec{e}_y \\ \vec{b} &= \sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x - \cos(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_y + \sin(\alpha)\vec{e}_z \\ \chi &= \frac{\sin(\alpha)^2}{R} \qquad \tau = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R} \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 Deformações

Neste item serão estabelecidas as medidas de deformação utilizadas no estudo das armaduras de um tubo flexível. Dada a natureza axissimétrica dos esforços considerados neste estudo, as deformações serão consideradas uniformes ao longo dos tendões.

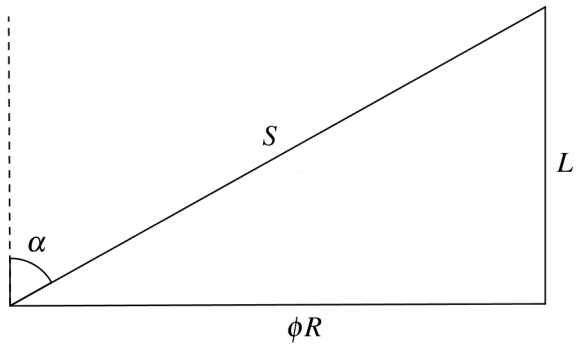

Figura B.3: Desenho esquemático de um tendão desenrolado.

- **Deformação circunferencial da camada helicoidal** (ε_c): É a deformação devida à variação do raio médio de um tendão, e é dada por:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta R}{R} \tag{B.12}$$

- **Deformação radial da camada helicoidal** (ε_n): É a deformação devida à variação da espessura de um tendão, calculada por:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta t}{t} \tag{B.13}$$

- **Deformação axial da camada helicoidal** (ε_z): É a deformação devida à variação da altura da camada helicoidal:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L} \tag{B.14}$$

- **Deformação angular da camada helicoidal** (ε_ϕ): É a deformação devida à variação do ângulo de giro da camada helicoidal:

$$\varepsilon_\phi = \frac{\Delta \phi}{\phi} \tag{B.15}$$

- **Deformação axial média de um tendão** (ε_t): É a deformação de um tendão qualquer segundo o seu eixo central (não confundir com a deformação axial da camada, medida em relação ao eixo z do tubo flexível). A figura B.3 mostra um tendão completamente desenrolado, onde podemos verificar as seguintes relações geométricas:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha) = \frac{\phi R}{S}; \quad \cos(\alpha) = \frac{L}{S}; \quad \tan(\alpha) = \frac{\phi R}{L} \\ &S^2 = (\phi R)^2 + L^2 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Diferenciando a última equação, obtemos:

$$2SdS = 2\phi R(\phi dR + Rd\phi) + 2LdL$$

Utilizando agora a hipótese de linearidade geométrica, podemos assumir que os infinitésimos dX correspondem às variações ΔX. Com esta simplificação, utilizando ainda as relações trigonométricas dadas em B.16 e dividindo os dois lados da equação por $2S^2$, temos finalmente:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta S}{S} = \sin(\alpha)^2 \frac{\Delta R}{R} + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\frac{R\Delta\phi}{L} + \cos(\alpha)^2 \frac{\Delta L}{L} \tag{B.17}$$

A equação acima é largamente encontrada na literatura (ver, por exemplo, Custódio; Vaz [11], Langeigne [18], Ramos; Pesce [28] e Witz; Tan [35]). É importante ressaltar que esta equação somente é válida levando em conta as hipóteses estabelecidas em sua dedução, em especial a hipótese de linearidade geométrica e uniformidade da deformação ε_t ao longo do eixo central do tendão.

Utilizando as expressões para as deformações estabelecidas anteriormente, temos:

$$\varepsilon_t = \left(\varepsilon_c + \varepsilon_\phi\right)\sin(\alpha)^2 + \varepsilon_z \cos(\alpha)^2 \tag{B.18}$$

- **Variação do ângulo de assentamento**: Pode-se obter uma expressão para calcular a variação do ângulo de assentamento de uma camada após um carregamento axissimétrico qualquer. Diferenciando a relação dada em B.16:

$$\begin{aligned} &\tan(\alpha) = \frac{\phi R}{L} \\ &\frac{d\alpha}{\cos(\alpha)^2} = \frac{R}{L}d\phi + \frac{\phi}{L}dR - \frac{\phi R}{L^2}dL \end{aligned} \tag{B.19}$$

Utilizando novamente a hipótese de linearidade geométrica, as relações trigonométricas dadas em B.16 e algumas manipulações algébricas, temos:

$$\Delta\alpha = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{R\Delta\phi}{L\tan(\alpha)} - \frac{\Delta L}{L}\right) \tag{B.20}$$

A equação acima também pode ser escrita como:

$$\Delta\alpha = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(\varepsilon_c + \varepsilon_\phi - \varepsilon_z\right) \tag{B.21}$$

B.3 Equações constitutivas

Neste item serão introduzidas algumas equações constitutivas para uma barra. As deduções destas equações são um pouco extensas e podem ser vistas no trabalho de Ramos [27]. Mostra-se que, partindo das hipóteses clássicas da teoria de barras, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} T &= EA^*\,\varepsilon_t - ES_y^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{y,2} - \chi_1\right] + ES_x^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{x,2}\right] \\ M_y &= ES_y^*\,\varepsilon_t + EI_y^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{y,2} - \chi_1\right] - EI_{xy}^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{x,2}\right] \\ M_x &= ES_x^*\,\varepsilon_t - EI_{xy}^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{y,2} - \chi_1\right] + EI_x^*\left[(1+\varepsilon_t)\,\kappa_{x,2}\right] \end{aligned} \tag{B.22}$$

Onde:

$$\begin{aligned} A^* &= \iint_A \frac{1}{1-x\chi_1}dA \qquad & I_x^* &= \iint_A \frac{y^2}{1-x\chi_1}dA \\ S_x^* &= \iint_A \frac{y}{1-x\chi_1}dA \qquad & I_y^* &= \iint_A \frac{x^2}{1-x\chi_1}dA \\ S_y^* &= \iint_A \frac{y}{1-x\chi_1}dA \qquad & I_{xy}^* &= \iint_A \frac{xy}{1-x\chi_1}dA \end{aligned} \tag{B.23}$$

Observando que nas expressões acima o sobrescrito * indica que se trata de uma grandeza "corrigida" (de fato, podemos obter as expressões tradicionais para a área (A), os momentos estáticos (S) e os momentos de inércia (I) de uma sessão se colocarmos $\chi_1 = 0$). Aplicando estas equações à geometria retangular dos tendões estudados (de altura b e espessura t), após algumas pequenas manipulações e simplificações, temos:

$$
\begin{aligned}
A^* &\approx b\,t\left[1+\frac{(t\,\chi_1)^2}{12}\right] & I_x^* &\approx \frac{b^3\,t}{12}\left[1+\frac{(t\,\chi_1)^2}{12}\right] \\
S_x^* &\approx \frac{b\,t^2}{12}\,(t\,\chi_1) & I_y^* &\approx \frac{b\,t^3}{12}\left[1+\frac{(t\,\chi_1)^2}{12}\right] \\
S_y^* &= 0 & I_{xy}^* &= 0
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

Introduzindo estes valores de volta na equação B.22:

$$
\begin{aligned}
T &\approx EA\,\varepsilon_t - ES_y\,(t\,\chi_1)\left[\kappa_{y,2}-\chi_1\right] \\
M_y &\approx EI_y\left[\kappa_{y,2}-\chi_1\right] - ES_y\,(t\,\chi_1)\,\varepsilon_t \\
M_x &\approx EI_x\,\kappa_{x,2}
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

Finalmente, se considerarmos que as deformações sejam pequenas, podemos desprezar os infinitésimos de ordem superior, como os produtos de $(t\,\chi_1)$ por ε_t e por $\left[\kappa_{y,2}-\chi_1\right]$, retomamos as expressões clássicas:

$$
\begin{aligned}
T &\approx EA\,\varepsilon_t \\
M_y &\approx EI_y\left[\kappa_{y,2}-\chi_1\right] \\
M_x &\approx EI_x\,\kappa_{x,2}
\end{aligned}
\tag{B.26}
$$

Também é necessário estabelecer uma equação para o momento de torção M_z do tendão. Esta relação pode ser observada, por exemplo, em Witz; Tan [35] ou McIver [22]:

$$
M_z = GI_t\,\left[\kappa_{t,2}-\kappa_{t,1}\right] \tag{B.27}
$$

B.4 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio de uma barra de geometria qualquer submetida a um carregamento genérico foram obtidas por Clebsh. Tais equações são extremamente úteis na análise de tendões helicoidais que compõem as camadas de um tubo flexível. As deduções destas equações podem ser encontradas, por exemplo, em Love [19] ou Ramos [27], neste último utilizando uma notação mais simples.

As equações em B.28 satisfazem as condições de equilíbrio de uma barra naturalmente curva.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_x}{\partial S} - Q_y \kappa_{t,2} + T\,\kappa_{y,2} + f_x = 0 && \frac{\partial M_x}{\partial S} - M_y \kappa_{t,2} + M_z \kappa_{y,2} - Q_y + m_x = 0 \\
&\frac{\partial Q_y}{\partial S} - T\,\kappa_{x,2} + Q_x \kappa_{t,2} + f_y = 0 && \frac{\partial M_y}{\partial S} - M_z \kappa_{x,2} + M_x \kappa_{t,2} + Q_x + m_y = 0 \\
&\frac{\partial T}{\partial S} - Q_x \kappa_{y,2} + Q_y \kappa_{x,2} + f_z = 0 && \frac{\partial M_z}{\partial S} - M_x \kappa_{y,2} + M_y \kappa_{x,2} + m_z = 0
\end{aligned}
\tag{B.28}
$$

Onde:

S é a variável de comprimento da linha média da barra;

T, Q_x e Q_y são a força de tração, força cortante em x e força cortante em y;

M_x, M_y e M_z são os momentos fletores em x e y e o momento torçor;

f_x, f_y e f_z são as forças distribuídas por unidade de comprimento;

m_x, m_y e m_z são os momentos distribuídos por unidade de comprimento; e

κ_x, κ_y e κ_t são as componentes x e y da curvatura e a torção.

Os subscritos 1 e 2 referem-se às configurações iniciais e finais da barra, neste caso se resumindo às configurações indeformada e deformada, respectivamente.

As equações apresentadas em B.28 são bastante genéricas e podem ser aplicadas a qualquer barra em qualquer formato. Porém, através das hipóteses estabelecidas para o estudo dos tendões, pode-se fazer uma série de simplificações nestas equações.

Inicialmente utilizaremos a hipótese que as direções principais de flexo-torção da barra, indicadas pelo sistema de coordenadas $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, coincida com as direções principais de curvatura,

dadas pelo sistema de coordenadas $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{t})$. Apesar destes sistemas de coordenadas possuírem a mesma origem e estarem fixados na seção transversal do tendão, pode existir um ângulo de rotação β entre os versores $\vec{i}$ e $\vec{n}$. Entretanto, devido à forma construtiva de uma camada helicoidal, os movimentos de torção da barra em torno do seu eixo central são restritos, sendo assim possível afirmar que o ângulo β vale 0, sem trazer prejuízos para o estudo. Assim, as componentes de curvatura e tortuosidade ficam dadas por:

$$\begin{aligned} \kappa_{x,1} &= 0 & \kappa_{x,2} &= 0 \\ \kappa_{y,1} &= \chi_1 & \kappa_{y,2} &= \chi_2 \\ \kappa_{t,1} &= \tau_1 & \kappa_{t,2} &= \tau_2 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Onde χ é a curvatura e τ é a tortuosidade mostradas na equação B.11. Desprezando agora os efeitos de atrito entre uma camada e outra e os efeitos de contato entre os tendões, podemos considerar que as forças distribuídas em y e z são nulas, bem como o momento distribuído em x:

$$f_y = 0; \qquad f_z = 0; \qquad m_x = 0 \tag{B.30}$$

Com estas simplificações, desprezando ainda as variações de grandezas por unidade de comprimento, as equações de equilíbrio ficam resumidas a:

$$\begin{aligned} -Q_y\tau_2 + T\chi_2 + fx &= 0 & -M_y\tau_2 + M_z\chi_2 - Q_y &= 0 \\ Q_x\tau_2 &= 0 & M_x\tau_2 + Q_x + m_y &= 0 \\ -Q_x\chi_2 &= 0 & -M_x\chi_2 + m_z &= 0 \end{aligned}$$

De onde conclui-se imediatamente que $Q_x = 0$. Podemos agora introduzir as equações constitutivas para o cálculo dos esforços solicitantes dadas em B.26 e B.27:

$$\begin{aligned} T &= EA\varepsilon_t \\ M_x &= EI_x\,\kappa_{x,2} = 0 \\ M_y &= EI_y\left(\kappa_{y,2} - \chi_1\right) = EI_y\left(\chi_2 - \chi_1\right) \\ M_z &= GI_t\left(\kappa_{t,2} - \kappa_{t,1}\right) = GI_t\left(\tau_2 - \tau_1\right) \end{aligned} \tag{B.31}$$

Substituindo estes valores, conclui-se que $m_y = m_z = 0$, pois $M_x = 0$. Restam portanto duas equações:

$$\begin{aligned} -Q_y\tau_2 + T\chi_2 + f_x &= 0 \\ -M_y\tau_2 + M_z\chi_2 - Q_y &= 0 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Finalmente, ao igualarmos o termo em Q_y, obtemos uma única equação de equilíbrio:

$$(M_y\tau_2 - M_z\chi_2)\,\tau_2 + T\chi_2 + f_x = 0 \tag{B.33}$$

E, após substituirmos B.31 em B.33, temos:

$$EI_y\,(\chi_2 - \chi_1)\,\tau_2^2 - GI_t\,(\tau_2 - \tau_1)\,\chi_2\tau_2 + EA\varepsilon_t\chi_2 + f_x = 0 \tag{B.34}$$

É necessário obter os valores de χ_2 e τ_2. Usando as relações obtidas em B.11, lembrando que $R_2 = R_1 + \Delta R$ e $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$, e considerando que na configuração original $R_1 = R$ e $\alpha_1 = \alpha$, temos:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R} & \chi_1 &= \frac{\sin^2(\alpha)}{R} \\ \tau_2 &= \frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\alpha+\Delta\alpha)}{R+\Delta R} & \chi_2 &= \frac{\sin^2(\alpha+\Delta\alpha)}{R+\Delta R} \end{aligned} \tag{B.35}$$

As expressões acima podem ser linearizadas através de uma expansão em série de Taylor em torno de $\Delta\alpha = 0$ e $\Delta R = 0$. Com isso, e eliminando os termos de ordem superior ($\Delta\alpha\Delta R$, $(\Delta\alpha)^2$ e $(\Delta R)^2$), chegamos a:

$$\tau_2 \approx \tau_1\left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \qquad \chi_2 \approx \chi_1\left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \tag{B.36}$$

Podemos elucidar a partir da equação B.36 duas relações úteis:

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \tau_1\left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \qquad \chi_2 - \chi_1 \approx \chi_1\left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \tag{B.37}$$

Podemos ainda observar dois termos da equação B.34:

$$(\chi_2 - \chi_1)\,\tau_2^2 = \chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right)\left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right)^2$$

$$(\tau_2 - \tau_1)\,\chi_2 \tau_2 = \chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right)\left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right)\left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right)$$

Que podem ser linearizados:

$$\begin{aligned} (\chi_2 - \chi_1)\,\tau_2^2 &\approx \chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \\ (\tau_2 - \tau_1)\,\chi_2 \tau_2 &\approx \chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) \end{aligned} \tag{B.38}$$

Resultando enfim na seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} &EI_y\,\chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) - GI_t \chi_1 \tau_1^2 \left(\frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(2\,\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) + \\ &EA\varepsilon_t \chi_1 \left(1 + \frac{2\,\Delta\alpha}{\tan(\alpha)} - \frac{\Delta R}{R}\right) + f_x = 0 \end{aligned} \tag{B.39}$$

A equação B.39 resume as equações de equilíbrio de uma barra prismática submetida a um carregamento qualquer, dentro das hipóteses e simplificações estabelecidas na sua dedução.

Podemos fazer uma análise das ordens de grandezas dos termos acima. Vamos mostrar que o termo de rigidez EA é um termo dominante, e por isso os outros termos de rigidez podem ser desprezados. Seja o adimensional $(t/R)^2$, ou seja, o quadrado da razão entre a espessura de uma camada helicoidal e o raio médio desta camada. De uma maneira geral, este adimensional assume um valor muito pequeno em relação à unidade. Tomando como exemplo o tubo flexível estudado nesta dissertação, temos que, para um tendão da armadura interna, $(t/R)^2 = (2/44)^2 \approx 0,002 = O\left(10^{-3}\right)$. Assim:

$$\frac{GI_t}{EA}\tau_1^2 = \frac{1}{2\,(1+\nu)}\frac{bt^3}{3\,bt}\left(\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R}\right)^2 = \frac{1}{(1+\nu)}\frac{1}{6}\left(\frac{t}{R}\right)^2 \sin(\alpha)^2\cos(\alpha)^2$$

$$\therefore O\left(\frac{GI_t}{EA}\tau_1^2\right) \approx \frac{1}{1000} \ll 1$$

$$\frac{EI_y}{EA}\tau_1^2 = \frac{bt^3}{12\,bt}\left(\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R}\right)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{t}{R}\right)^2 \sin(\alpha)^2\cos(\alpha)^2 \tag{B.40}$$

$$\therefore O\left(\frac{EI_y}{EA}\tau_1^2\right) \approx \frac{1}{1000} \ll 1$$

É interessante observar que não foi feita nenhuma restrição em relação ao ângulo de assentamento α para fazer estas simplificações. No caso de uma carcaça intertravada, por exemplo, onde este ângulo possui valores muito próximos de 90°, estes termos assumem valores menores ainda devido ao fator $\cos(\alpha)^2$. Temos assim:

$$EA\varepsilon_t\chi_1\left(1 - \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\tan(\alpha)}\right) + f_x = 0$$

Prosseguindo com as simplificações, de acordo com a equação B.17, $\varepsilon_t = f\,(\Delta R, \Delta L, \Delta\phi)$, portanto os produtos $\varepsilon_t\Delta R$ e $\varepsilon_t\Delta\alpha$ também são de ordem superior e podem ser desprezados. Assim a equação B.39 fica simplificada para:

$$EA\varepsilon_t\chi_1 + f_x = 0$$

Os esforços distribuídos f_x são gerados somente pelas pressões interna e externa aplicadas no tendão. Lembrando que o tendão tem espessura b, temos que $f_x = (p_{ext} - p_{int}) \cdot b$. Lembrando ainda que $\sigma_t = E\varepsilon_t$, temos finalmente:

$$-\Delta p = \sigma_t\,\chi_1\,t \quad \therefore \quad \sigma_t = -\frac{R\,\Delta p\,b}{A\,\sin(\alpha)^2} \tag{B.41}$$

Para uma seção transversal retangular, a área é dada por $A = bt$, e a equação anterior é dada por:

$$\sigma_t = -\frac{R\Delta p}{t\,\sin(\alpha)^2} \tag{B.42}$$

Esta equação resume o equilíbrio de forças de um tendão helicoidal de passo constante submetido a esforços axissimétricos, assumindo que são válidas as demais hipóteses estabelecidas durante sua dedução. Muitos autores (p. ex. Féret; Bournazel [13] ou Witz; Tan [35]) obtém expressões similares à esta impondo o equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal.

APÊNDICE C – Resultados

O modelo analítico apresentado no capítulo 4 foi implementado no Maple. A solução do sistema de equações está resumida na tabela C.1 a seguir. Os demais resultados, como deformações nos tendões e variações do ângulo de assentamento, são obtidos a partir dos resultados apresentados nesta tabela, utilizando as formulações que foram apresentadas para tal.

Note que o modelo calcula as variações dos raios interno e externo. As variações do raio médio e da espessura apresentadas na tabela C.1 são obtidos através das fórmulas:

$$\begin{cases} \Delta R = \dfrac{\Delta R_e + \Delta R_i}{2} \\ \\ \Delta t = \Delta R_e - \Delta R_i \end{cases} \tag{C.1}$$

Tabela C.1: Resultados do modelo analítico

Camada	ΔR_i (μm)	ΔR_e (μm)	ΔR (μm)	Δt (μm)	ΔL (mm)	$\Delta\phi$ $(^\circ)$	M_t $(kN \cdot m)$	F_t (kN)
	Caso A							
1	-44,03	-43,49	-43,76	0,54	42,44	0	-0,15	-0,33
2	-43,49	-147,46	-95,48	-103,97	42,44	0	0,00	-3,54
3	-147,46	-147,83	-147,65	-0,37	42,44	0	1,09	17,89
4	-147,83	-148,23	-148,03	-0,4	42,44	0	-1,38	21,56
5	-148,23	-167,56	-157,9	-19,33	42,44	0	0,00	4,42
	Caso B							
1	-44,63	-44,09	-44,36	0,54	42,7	1,37	-0,15	-0,32
2	-44,09	-148,47	-96,28	-104,38	42,7	1,37	0,00	-3,54
3	-148,47	-148,9	-148,69	-0,43	42,7	1,37	1,31	21,36
4	-148,9	-149,24	-149,07	-0,34	42,7	1,37	-1,16	18,06
5	-149,24	-168,68	-158,96	-19,44	42,7	1,37	0,00	4,44
	Caso C							
1	-9,99	-9,95	-9,97	0,04	35,02	0	-0,03	-0,07
2	-9,95	-113,85	-61,9	-103,9	35,02	0	0,00	-4,4
3	-113,85	-114,25	-114,05	-0,39	35,02	0	1,16	18,98
4	-114,25	-114,65	-114,45	-0,4	35,02	0	-1,40	21,81
5	-114,65	-131,14	-122,9	16,49	35,02	0	0,00	3,68
	Caso D							
1	-10,36	-10,32	-10,34	0,04	35,18	0,84	-0,03	-0,07
2	-10,32	-114,48	-62,4	-104,16	35,18	0,84	0,00	-4,4
3	-114,48	-114,9	-114,69	-0,43	35,18	0,84	1,29	21,11
4	-114,9	-115,27	-115,09	-0,37	35,18	0,84	-1,26	19,66
5	-115,27	-131,83	-123,55	-16,56	35,18	0,84	0,00	3,7

APÊNDICE D – Códigos-Fonte

A seguir estão os códigos-fonte utilizados para a elaboração dos modelos analíticos deste trabalho. São planilhas de trabalho desenvolvidas no Maple 9.3, no formato .mw (formato nativo do programa). Algumas funções foram modificadas com o intuito de caber no papel impresso.

D.1 Cálculo da matriz de rigidez de uma camada plástica

```
# Obs -algumas quebras de linha sao feitas somente para paginacao
#     -troque os : por ; para visualizar as saidas no maple
restart:
interface(showassumed=0):

# Parte de dentro da integral da equacao da energia
u := (lambda + 2*G)*(er*der + et*det + ez*dez)
u := u + lambda*(der*(et+ez)+det*(er+ez)+dez*(er+et))
u := u + G*(gama_rt*dgama_rt+gama_tz*dgama_tz+gama_zr*dgama_zr):

# Campos de deslocamentos
# Obs: em coordenadas cilindricas: r = raio, t = theta, z = z.
C1 := b*Db/(b^2-a^2)-Da*a/(b^2-a^2):
C2 := -b*a^2*Db/(b^2-a^2)+b^2*a*Da/(b^2-a^2):
Ur := C1*r + C2/r:
Ut := z*r*Dphi/L:
Uz := DL/L*z:

# Campos de Deformacoes
er := diff(Ur,r):
```

```
et := Ur/r + (1/r)*diff(Ut,t):
ez := diff(Uz,z):
gama_rt := diff(Ut,r) + (1/r)*diff(Ur,t) - Ut/r:
gama_tz := diff(Ut,z) + (1/r)*diff(Uz,t):
gama_zr := diff(Ur,z) + diff(Uz,r):

# Derivadas das deformacoes
der := (da * diff(er, Da) + db*diff(er, Db)):
det := (da * diff(et, Da) + db*diff(et, Db)):
dez := dL/L: dgama_tz := dphi*r/L:

collect(expand(u), {da, db, dL, dphi} );

# Isolando as variacoes dos deslocamentos
eq1 := diff(expand(u), da):
eq2 := diff(expand(u), db):
eq3 := diff(expand(u), dL):
eq4 := diff(expand(u), dphi):

collect(expand(eq1), {Da, Db, DL, Dphi} );
collect(expand(eq2), {Da, Db, DL, Dphi} );
collect(expand(eq3), {Da, Db, DL, Dphi} );
collect(expand(eq4), {Da, Db, DL, Dphi} );

# Coletando os termos da matriz de rigidez (Antes de integrar)
k11 := simplify(diff(eq1, Da)):
k12 := simplify(diff(eq1, Db)):
k13 := simplify(diff(eq1, DL)):
k14 := simplify(diff(eq1, Dphi)):
k21 := simplify(diff(eq2, Da)):
k22 := simplify(diff(eq2, Db)):
k23 := simplify(diff(eq2, DL)):
k24 := simplify(diff(eq2, Dphi)):
k31 := simplify(diff(eq3, Da)):
k32 := simplify(diff(eq3, Db)):
```

```
k33 := simplify(diff(eq3, DL)):
k34 := simplify(diff(eq3, Dphi)):
k41 := simplify(diff(eq4, Da)):
k42 := simplify(diff(eq4, Db)):
k43 := simplify(diff(eq4, DL)):
k44 := simplify(diff(eq4, Dphi)):

# Integracao dos k's
assume(b>0,a>0,b>a,G>0,lambda>0):
K11 := int(int(int(r*k11, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K12 := int(int(int(r*k12, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K13 := int(int(int(r*k13, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K14 := int(int(int(r*k14, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K21 := int(int(int(r*k21, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K22 := int(int(int(r*k22, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K23 := int(int(int(r*k23, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K24 := int(int(int(r*k24, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K31 := int(int(int(r*k31, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K32 := int(int(int(r*k32, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K33 := int(int(int(r*k33, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K34 := int(int(int(r*k34, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K41 := int(int(int(r*k41, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K42 := int(int(int(r*k42, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K43 := int(int(int(r*k43, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):
K44 := int(int(int(r*k44, r=a..b), t=0..2*Pi), z=0..L):

K := matrix([
 [simplify(K11), simplify(K12), simplify(K13), simplify(K14)],
 [simplify(K21), simplify(K22), simplify(K23), simplify(K24)],
 [simplify(K31), simplify(K32), simplify(K33), simplify(K34)],
 [simplify(K41), simplify(K42), simplify(K43), simplify(K44)]
 ] );
```

D.2 Cálculo da matriz de rigidez de uma camada helicoidal

```
restart:
interface(showassumed=0):

# Equacao da energia (parte de dentro da integral)
u := E/(1-nu^2)*(et*det + en*den + nu*(en*det + et*den) ):

# Generalizando os deslocamentos
Da := X[1]: Db := X[2]: DL := X[3]: Dphi := X[4]:
R := (a+b)/2:
DR := (Db+Da)/2:
t := (b-a):
Dt := Db - Da:

et := ((DR/R +Dphi/L*R/tan(alpha))*sin(alpha)^2)+DL/L*cos(alpha)^2:
en := Dt/t:
#st := E/(1-nu^2)*(et+nu*en);
#sn := E/(1-nu^2)*(en+nu*et);
unassign('R','t');
det := 0: den := 0:
for i from 1 to 4 do:
   det := det + x[i]*diff(et, X[i]):
  den := den + x[i]*diff(en, X[i]):
end do:
for i from 1 to 4 do:
  eq[i] := diff(expand(u), x[i]):
end do:
for i from 1 to 4 do:
  collect(expand(eq[i]), {X[1], X[2], X[3], X[4]});
end do;

# Coletando os termos da matriz de rigidez
k := array(1..4, 1..4):
for i from 1 to 4 do:
```

```
  for j from 1 to 4 do:
    k[i,j] := simplify(diff(eq[i], X[j])):
  end do:
end do:

# Integrando os k's
K := array(1..4, 1..4):
for i from 1 to 4 do:
  for j from 1 to 4 do:
    K[i,j] := k[i,j]*n*h*t*L/cos(alpha);
  end do;
end do;
Matrix(K);

# Trocando de variaveis para melhorar a notacao
K2 := array(1..4, 1..4);
for i from 1 to 4 do:
  for j from 1 to 4 do:
    K2[i,j] := simplify( subs(a = R-t/2, b = R+t/2, K[i,j]), trig );
  end do;
end do;
matrix(K2);

# Verificando a simetria
for i from 1 to 4 do:
  for j from i to 4 do:
    print(i, j, K2[i,j] - K2[j,i]);
  end do;
end do;

# Colocando os adimensionais na base da forca bruta...
_C:=n*h*E/(1-nu*nu);
_zeta=(t/(2*R))*sin(alpha)^2;
_xi=t*cos(alpha)/L;
KC := array(1..4,1..4):
```

```
f := simplify(K2[1,1]);
test := C*(zeta^2-2*nu*zeta+1)/xi;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[1,1] := test:
f := simplify(K[1,2], trig);
test := C*(zeta^2-1)/xi;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[1,2] := test:
f := simplify(K[1,3], trig);
test := C*cos(alpha)*(zeta-nu);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[1,3] := test:
f := simplify(K[1,4], trig);
test := C*R*sin(alpha)*(zeta-nu);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[1,4] := test:
f := simplify(K[2,1], trig);
test := C*(zeta^2-1)/xi;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[2,1] := test:
f := simplify(K[2,2], trig);
test := C*(1+2*nu*zeta+zeta^2)/xi;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[2,2] := test;
f := simplify(K[2,3], trig);
test := C*cos(alpha)*(nu+zeta);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[2,3] := test:
f := simplify(K[2,4], trig);
test := C*R*sin(alpha)*(nu+zeta);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[2,4] := test:
f := simplify(K[3,1], trig);
test := C*cos(alpha)*(zeta-nu);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
```

```
KC[3,1] := test:
f := simplify(K[3,2], trig);
test := C*cos(alpha)*(nu+zeta);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[3,2] := test:
f := simplify(K[3,3], trig);
test := C*xi*cos(alpha)^2;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[3,3] := test:
f := simplify(K[3,4], trig);
test := C*xi*R*sin(alpha)*cos(alpha);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[3,4] := test:
f := simplify(K[4,1], trig);
test := C*sin(alpha)*(zeta-nu)*R;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[4,1] := test:
f := simplify(K[4,2], trig);
test := C*R*sin(alpha)*(nu+zeta);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[4,2] := test:
f := simplify(K[4,3], trig);
test := C*xi*R*sin(alpha)*cos(alpha);
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[4,3] := test:
f := simplify(K[4,4], trig);
test := C*xi*R^2*sin(alpha)^2;
simplify(subs(C=_C, zeta=_zeta, xi=_xi, test-f), trig);
KC[4,4] := test:

matrix(KC);

# Verificando novamente se nao ha erros na mudanca de variaveis
# K = matrix originalmente calculada
# KC = matriz feita manualmente com os adimensionais
```

```
for i from 1 to 4 do:
  for j from 1 to 4 do:
    tmp := subs(a = R-t/2, b = R+t/2, KC[i,j]-K[i,j]);
    tmp := subs(C=n*h*E/(1-nu*nu), zeta=beta*sin(alpha)^2, tmp);
    tmp := subs(beta=t/(2*R), xi=t*cos(alpha)/L, tmp);
    print(i, j, simplify(tmp, trig) );
  end do;
end do;
```

D.3 Modelo analítico para o tubo completo

```
restart;
interface(showassumed=0):

# Definicoes dos carregamentos.
# Aqui estao os casos de (Ramos et al, 2008)
# Para criar outros basta seguir a logica

# Caso A:
carregamento := { FPi = 0, FPe = 0, Ft = 40000, DPhi=0 }:
incognitas := {Da, Db, DL, Mt}:
# Caso B:
#carregamento := { FPi = 0, FPe = 0, Ft = 50000, Mt = 0 }:
#incognitas := {Da, Db, DL, DPhi}:
# Caso C:
# p_int := 6.89*2*Pi*_Ri[1]*_Lo
#carregamento := { FPi = p_int, FPe = 0, Ft = 40000, DPhi=0 }:
#incognitas := {Da, Db, DL, Mt}:
# Caso D:
#carregamento := { FPi = p_int, FPe = 0, Ft = 40000, Mt = 0 }:
#incognitas := {Da, Db, DL, DPhi}:

##Definicoes da geometria do riser:
# Numero de camadas:
N := 5:
```

```
#Tipos de camadas (H)elicoidal ou (P)lastica:
Tipos := [H, P, H, H, P]:

#Parametros geometricos e de material:
_E := [190000, 280, 207000, 207000, 320]:
_nu := [0.3, 0.4, 0.3, 0.3, 0.4]:
_Ri := [33.42, 35, 41, 43, 45]:
_Ro := [35, 41, 43, 45, 50]:
_alpha := [+85.8, 0, +55.5, -55.5, 0]:
_h := [12, 0, 5, 5, 0]:
_n := [1, 0, 29, 29, 0]:
_Lo := 4660:

#Outros parametros auxiliares:
_t := array(1..N):
_Rm := array(1..N):
_zeta := array(1..N):
for i from 1 to N do:
  # Geometria
  _alpha[i] := convert(_alpha[i]*degrees, radians):
  _Rm[i] := (_Ro[i]+_Ri[i])/2:
  _t[i]  := (_Ro[i]-_Ri[i]):
  _zeta[i] := _t[i]*sin( _alpha[i] )^2/(2*_Rm[i]):
  # Material
  _G[i] := _E[i]/(2*_nu[i]+2):
  _lambda[i] := _E[i]*_nu[i]/((1+_nu[i])*(1-2*_nu[i])):
  # _E[i]  := _G[i]*(3*_lambda[i]+2*_G[i])/(_lambda[i] + _G[i]):
  # _nu[i] := _lambda[i]/(2*_lambda[i]+2*_G[i]):
  _C[i]  := _E[i]/(1-_nu[i]^2)*_n[i]*_h[i]:
end do:

#Incognitas de deslocamentos de cada camada (2*N):
_Da := array(1..N):
_Db := array(1..N):
```

```
#Incognitas de forca de cada camada (4*N):
_FPi := array(1..N):
_FPe := array(1..N):
_Ft := array(1..N):
_Mt := array(1..N):

#Demais incognitas (2):
_DL := DL:
_DPhi := DPhi:

# Montagem da matriz de rigidez de uma camada plastica,
# vide planilha correspondente.
KP := array(1..4,1..4):
KP[1,1] := 4*(a^2*lambda+a^2*G+b^2*G)*Pi*L/(b^2-a^2):
KP[1,2] := -4*a*b*(lambda+2*G)*Pi*L/(b^2-a^2):
KP[1,3] := -2*lambda*a*Pi:
KP[1,4] := 0:
KP[2,1] := KP[1,2]:
KP[2,2] := 4*(b^2*lambda+b^2*G+a^2*G)*Pi*L/(b^2-a^2):
KP[2,3] := 2*lambda*b*Pi:
KP[2,4] := 0:
KP[3,1] := KP[1,3]:
KP[3,2] := KP[2,3]:
KP[3,3] := (lambda+2*G)*(b^2-a^2)*Pi/L:
KP[3,4] := 0:
KP[4,1] := KP[1,4]:
KP[4,2] := KP[2,4]:
KP[4,3] := KP[3,4]:
KP[4,4] := 1/2*G*(b^4-a^4)*Pi/L:

# Montagem da matriz de rigidez de uma camada helicoidal,
# vide planilha correspondente.
KH := array(1..4,1..4):
KH[1,1] := C*L*(zeta^2-2*nu*zeta+1)/(cos(alpha)*t):
```

```
KH[1,2] := C*L*(zeta^2-1)/(cos(alpha)*t):
KH[1,3] := C*cos(alpha)*(zeta-nu):
KH[1,4] := C*sin(alpha)*(zeta-nu)*R:
KH[2,1] := KH[1,2]:
KH[2,2] := C*L*(1+2*nu*zeta+zeta^2)/(cos(alpha)*t):
KH[2,3] := C*cos(alpha)*(nu+zeta):
KH[2,4] := C*sin(alpha)*(nu+zeta)*R:
KH[3,1] := KH[1,3]:
KH[3,2] := KH[2,3]:
KH[3,3] := C*t*cos(alpha)^3/L:
KH[3,4] := C*sin(alpha)*cos(alpha)^2*t*R/L:
KH[4,1] := KH[1,4]:
KH[4,2] := KH[2,4]:
KH[4,3] := KH[3,4]:
KH[4,4] := C*t*R^2*sin(alpha)^2*cos(alpha)/L:

#Montando as equacoes basicas das matrizes de rigidez:
for i from 1 to 4 do:
  EqP[i] := sum(KP[i,j]*X[j], j=1..4) = F[i]:
end do:
for i from 1 to 4 do:
  EqH[i] := sum(KH[i,j]*X[j], j=1..4) = F[i]:
end do:

# Contador geral de equacoes:
Neq := 1:

## Montando agora o sistema do tubo completo.
# 1 - Equacoes de cada tubo: 4*N equacoes;
for i from 1 to N do: # Para cada camada;
  if (Tipos[i] = P) then:
    print("Equacoes da camada", i, "Plastica");
  else:
    print("Equacoes da camada", i, "Helicoidal");
  end if:
```

```
  for j from 1 to 4 do: # Para cada equacao desta camada;
    if (Tipos[i] = P) then:
      tmp := EqP[j]:
      tmp := subs(a = _Ri[i], b = _Ro[i], tmp);
      tmp := subs(G = _G[i], lambda = _lambda[i], L= _Lo, tmp);
    else:
      tmp := EqH[j]:
      tmp := subs(nu = _nu[i], C = _C[i], L = _Lo, tmp);
      tmp := subs(t = _t[i], R = _Rm[i], tmp);
      tmp := subs(alpha = _alpha[i], zeta = _zeta[i], tmp);
    end if:
    tmp := subs(X[1] = _Da[i], X[2] = _Db[i], tmp);
    tmp := subs(X[3] = _DL, X[4] = _DPhi, tmp);
    tmp := subs(F[1] = _FPi[i], F[2] = -_FPe[i], tmp);
    smp := subs(F[3] = _Ft[i], F[4] = _Mt[i], tmp);
    # Substituindo os valores no contorno:
    tmp := subs(_FPi[1] = FPi, _FPe[N] = -FPe, tmp);
    tmp := subs(_Da[1] = Da, _Db[N] = Db,tmp);
    Eq[Neq] := evalf(tmp);
    print(Neq, evalf(Eq[Neq]));
    Neq := Neq + 1;
  end do:
end do:

# 2 - Equacoes nas interfaces das camadas: 2*(N-1) equacoes;
NeqC := 1:
for i from 1 to N-1 do:
  EqC[NeqC] := _Db[i] = _Da[i+1]:
  EqC[NeqC+1] := _FPe[i] = _FPi[i+1]:
  NeqC := NeqC + 2:
end do:

# 3 - Equacoes remanescentes:
unassign('i','j','k');
Eq[Neq]   := Ft = sum(_Ft[i], i=1..N):
```

```
Eq[Neq+1] := Mt = sum(_Mt[i], i=1..N):
Neq := Neq + 2:

#  Montando o sistema
All_eqs_tmp := {seq(Eq[i], i=1..Neq-1),seq(EqC[j],
                                                    j=1..NeqC-1)}:
All_eqs := {seq(subs(carregamento, All_eqs_tmp[i]),
                                                  i=1..Neq+NeqC-2)}:
All_incogs := {seq(_Da[i], i=2..N),
  seq(_Db[i], i=1..N-1),
  seq(_FPi[i], i=2..N),
  seq(_FPe[i], i=1..N-1),
  seq(_Ft[i], i=1..N),
  seq(_Mt[i], i=1..N),
  seq(incognitas[i], i=1..4) }:

#Resolucao do sistema completo:
# Para utilizar a hipotese de contato colado entre as camadas,
# basta resolver o sistema inteiro
#solve(All_eqs, All_incogs);

# Para considerar os gaps, entrar na rotina iterativa:
flag := true:
iteracoes := 0:
while (flag) do:
  flag := false:
  iteracoes := iteracoes + 1:
  print("Iteracao: ", iteracoes):
  sol := solve(All_eqs, All_incogs):
  k := 1:
  EqC := array(1..NeqC-1):
  for i from 1 to N-1 do:
    for j from 1 to nops(sol) do:
      if ( lhs(sol[j]) = _FPe[i]) then:
        if ( rhs(sol[j]) < 0 ) then:
```

```
            print("Pressao negativa:", sol[j] ):
            EqC[k] := _FPe[i] = 0:
            EqC[k+1] := _FPi[i+1] = 0:
            flag := true

          else:
            EqC[k] := _FPe[i] = _FPi[i+1]:
            EqC[k+1] := _Db[i] = _Da[i+1];
          end if:
          j := nops(sol):
        end if:
      end do:
      k := k + 2:
    end do:
    All_eqs_tmp := { seq(Eq[i], i=1..Neq-1), seq(EqC[j],
                                                    j=1..k-1) }:
    All_eqs := { seq(subs(carregamento, All_eqs_tmp[i]),
                                                  i=1..Neq+NeqC-2)}:
end do:
print("OK"):
assign(sol);

# Verificando os Gaps:
for i from 1 to N-1 do:
    print("Gap:", i, ":", _Da[i+1] - _Db[i]):
end do:

# Resultados das incognitas livres:
print("Solucao para o carregamento:", carregamento);
print("Da:", Da, "FPi:", FPi);
print("Db:", Db, "FPe:", FPe);
print("DL:", DL, "Ft:", Ft);
print("DPhi:", evalf(DPhi*180/Pi), "Mt:", Mt);
```

```
#Pos Processamento
_Da[1] := Da: _Db[N] := Db: Ft := sum(_Ft[ii], ii=1..N):

#Deslocamentos (para o anexo C)
for i from 1 to N do:
  tmp1 := (_Da[i]+_Db[i])/2: tmp2 := _Db[i]-_Da[i]:
  print("C",i, "Da=",_Da[i], "Db=",_Db[i], "DR=",tmp1, "Dt=",tmp2);
end do:

# Tensoes, Deformacoes e Dalpha das armaduras
print("Resultados das armaduras:"):
for i from 1 to N do:
  if (Tipos[i] = H) then:
    # Eq. 4.22 (p. 66)
    et_[i] := evalf( (( (_Db[i]+_Da[i])/(_Ro[i]+_Ri[i]) +
                _DPhi/_Lo*_Rm[i]/tan(_alpha[i]))*sin(_alpha[i])^2) +
                _DL/_Lo*cos(_alpha[i])^2 );
    en_[i] := evalf((_Db[i]-_Da[i])/_t[i]);
    # Eq. 4.17
    st_[i] := evalf(_E[i]/(1-_nu[i]^2)*(et_[i] + _nu[i]*en_[i]));
    sn_[i] := evalf(_E[i]/(1-_nu[i]^2)*(en_[i] + _nu[i]*et_[i]));
    # Eq. B.20
    Dalpha_[i] := evalf( sin(_alpha[i])*cos(_alpha[i])*
                        ((_Db[i]+_Da[i])/(_Ro[i]+_Ri[i])-_DL/_Lo +
                        _Rm[i]*DPhi/(_Lo*tan(_alpha[i])))*180/Pi );
    print("C", i, "et=", et_[i], "en=", en_[i], "st=", st_[i],
                          "sn=", sn_[i], "Dalpha=",Dalpha_[i] );
  end if:
end do:

# Forcas de tracao e Momentos
for i from 1 to N do:
  tmp1 := 100*evalf(_Ft[i]/Ft):
  print("C", i, "Mt=", _Mt[i]/1000 , "Ft=", _Ft[i]/1000, "%=", tmp1);
end do:
```