Projeto Inverso Aerodinâmico Utilizando o Método Adjunto Aplicado às Equações de Euler

Marco Antonio de Barros Ceze

Resumo

Um desafio constante no projeto aerodinâmico de uma superfície é obter a forma geométrica que permite, baseado em uma determinada medida de mérito, o melhor desempenho possível. No contexto de projeto de aeronaves de transporte, o desempenho ótimo em cruzeiro é a principal meta do projetista. Nesse cenário, o uso da Dinâmica dos Fluidos Computacional como não só uma ferramenta de análise mas também de síntese torna-se uma forma atrativa para melhorar o projeto de aeronaves que é uma atividade dispendiosa em termos de tempo e recursos financeiros.

Esse artigo apresenta o método adjunto contínuo aplicado às equações de Euler. Tal método está inserido no contexto de um ciclo de projeto inverso aerodinâmico. Além disso, foi adotada uma metodologia de redução do gradiente da função de mérito em relação às variáveis de projeto. O algoritmo utilizado para a busca do mínimo da função de mérito é o *steepest descent*. Os binômios de Bernstein foram escolhidos para representar a geometria do aerofólio de acordo com a parametrização proposta em [14]. Apresenta-se um estudo dessa parametrização mostrando suas características relevantes para a otimização aerodinâmica.

Os resultados apresentados estão divididos em dois grupos: validação do ciclo de projeto inverso e aplicações práticas. O primeiro grupo consiste em exercícios de projeto inverso nos quais são estabelecidas distribuições de pressão desejadas obtidas a partir de geometrias conhecidas, desta forma garante-se que tais distribuições são realizáveis. No segundo grupo, porém, as distribuições desejadas são propostas pelo projetista baseado em sua experiência e, portanto, não sendo garantida a realizabilidade dessas distribuições. Em ambos os grupos, incluem-se resultados nos regimes de escoamento transônico e subsônico incompressível.

1 Introdução

A mecânica dos fluidos estuda uma vasta gama de problemas de interesse científico e tecnológico, que envolve as mais diversas aplicações da engenharia, de simples sistemas de ventilação aos mais complexos projetos de aerodinâmica e hidrodinâmica, como por exemplo na indústria aeronáutica e até no setor médico-hospitalar. Devido a esta imensa diversidade e importância de suas aplicações, a mecânica dos fluidos sempre foi objeto de intensa investigação, tanto através da abordagem experimental, quanto através da abordagem teórica, onde se procura obter soluções através dos modelos matemáticos que descrevem o escoamento.

Na abordagem teórica, formulam-se modelos com base nos princípios fundamentais de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Entretanto, na mecânica dos fluidos, esses princípios assumem a forma de equações diferenciais parciais não-lineares, para as quais não se conhecem soluções analíticas gerais. Ao contrário, as soluções analíticas são conhecidas apenas para uma coleção restrita de problemas, que compreende uma

pequena parte da vasta gama de problemas e aplicações de interesse prático. Tais condições favoreceram o desenvolvimento de técnicas de simulação numérica, como alternativa natural aos métodos analíticos, para a obtenção de soluções aproximadas. Tais técnicas constituem-se atualmente numa linha de pesquisa extremamente profícua, denominada Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). De fato, CFD tornou-se uma ferramenta de uso cotidiano na engenharia. Seu impacto na redução de custos e riscos tanto humanos quanto de investimentos em empreendimentos de engenharia é inegável. Os ciclos de projeto de produtos, que envolvem a interação com fluidos, ficam cada vez mais curtos e eficientes com o uso de ferramentas computacionais.

O uso de CFD é ainda mais pronunciado na indústria aeronáutica onde essa ferramenta está presente em todo o ciclo de desenvolvimento de uma aeronave. Durante a etapa de projeto conceitual por exemplo, muitas das definições geométricas da aeronave são embasadas por resultados obtidos a partir de simulação numérica do escoamento, com isso tentando ao máximo diminuir a campanha de ensaios em túnel de vento, uma vez que essa etapa é bastante onerosa em termos de custo e tempo para o desenvolvimento do produto. Além disso, na etapa de desenvolvimento e detalhamento da aeronave, a equipe de engenharia dos sistemas como condicionamento de ar e propulsão utiliza, em grande escala, a dinâmica dos fluidos computacional em suas análises.

Apesar da extensa aplicação de CFD, essa metodologia é normalmente utilizada como ferramenta de análise, num papel semelhante ao de instalações experimentais como túneis de vento. Isto é, o projetista prescreve a geometria de uma superfície (ex. uma asa) e usa CFD para testá-la com respeito aos seus efeitos no escoamento, como se estivesse introduzindo um modelo (numérico) num túnel de vento (virtual). Uma característica fundamental desse procedimento é o fato de que a proposição de uma geometria para uma dada finalidade depende quase que exclusivamente da experiência acumulada pelo projetista. Muitas vezes, essa dependência pode tornar o processo de projeto lento e ineficiente.

Apenas recentemente, ferramentas de síntese, e não somente análise, passaram a ser integradas às metodologias de projeto fluidodinâmico. Essas ferramentas não têm como objetivo substituir a experiência do projetista mas sim possibilitar a exploração de configurações além do limite da intuição e agilizar o processo de projeto como citado em [7].

Uma metodologia que tem se mostrado bastante promissora na utilização de CFD como ferramenta de síntese é a aplicação da teoria de controle ótimo para projeto aerodinâmico. O uso desta metodologia em aerodinâmica foi inicialmente proposta em [10] e tem sido aplicada em diversos problemas de ordem prática da indústria aeronáutica. Batizado de método adjunto, esta afigura-se como uma forma eficiente de otimização de superfícies aero e hidrodinâmicas por apresentar baixo custo computacional se comparado com outros métodos como algoritmos genéticos e diferenças finitas.

2 Método Adjunto

A teoria de controle ótimo de sistemas governados por equações diferenciais parciais é apresentada de forma geral em [15]. Essa teoria foi inicialmente aplicada a projeto aerodinâmico em regime transônico em [9]. A idéia geral da teoria é minimizar um funcional (função de mérito) submetido a um conjunto de restrições (equações que governam o escoamento) através de uma função de controle (geometria do corpo).

Na explicação que se segue, será utilizada uma notação semelhante à utilizada em

[18].

Suponha a existência de uma medida de desempenho I de uma superfície aerodinâmica $\mathcal{F}$ dada por um conjunto de parâmetros de projeto. Essa medida de desempenho pode estar relacionada com a sustentação ou o arrasto de uma asa ou até mesmo a diferença entre a sua distribuição de pressão e uma distribuição desejada. Sendo assim, a variação dessa medida (δI) pode ser linearizada e expressa como um produto interno entre o gradiente ($\mathcal{G}$) de I em relação aos parâmetros de projeto e a variação da geometria $\delta\mathcal{F}$:

$$\delta I = \langle \mathcal{G}, \delta\mathcal{F} \rangle. \quad (1)$$

Assumindo que a variação da geometria seja feita proporcional e na direção contrária ao vetor gradiente conforme o método *steepest descent*:

$$\delta\mathcal{F} = -\lambda \mathcal{G}$$

e λ seja positivo e suficientemente pequeno, o produto interno (1) será sempre negativo, implicando que a medida de mérito I diminuirá até que o gradiente seja nulo.

$$\delta I = -\lambda \langle \mathcal{G}, \mathcal{G} \rangle \leq 0 \quad (2)$$

A forma de $\delta\mathcal{F}$ pode ser obtida através de outra metodologia como gradiente conjugado por exemplo. Porém, prova-se que δI continua a respeitar de forma análoga a relação (2).

Nos problemas de interesse nesse trabalho, a função de mérito é dada como uma função das variáveis do escoamento (w), dos elementos da malha ($\mathcal{X}$) e da geometria $\mathcal{F}$:

$$I = I(w, \mathcal{X}, \mathcal{F})$$

onde sua variação é obtida aplicando-se a regra da cadeia.

$$\delta I = \underbrace{\frac{\partial I}{\partial w} \delta w}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial \mathcal{X}} \delta \mathcal{X}}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F}}_{(c)} \quad (3)$$

O termo (a) da equação (3) necessita de soluções adicionais das equações do escoamento, o que implica em custo computacional uma vez que a solução do escoamento pode, muitas vezes, ser cara. Porém, os termos (b) e (c) podem ser facilmente avaliados uma vez que são variações geométricas da malha e da fronteira respectivamente. Essas variações da malha podem ser avaliadas mediante a geração de malhas independentes para a variação de cada um dos parâmetros, porém, em casos onde a geometria é complexa e o número de parâmetros é elevado, isso pode ser custoso computacionalmente. Uma alternativa à isso, é a utilização de uma metodologia de perturbação da malha [18].

Para que o processo de minimização de I seja realizável do ponto de vista físico, é necessário que sejam introduzidas restrições ao problema de otimização. Essas restrições devem ser homogêneas de forma que a introdução delas não afete o valor da variação da medida de mérito. No problema de otimização aerodinâmica, tais restrições são definidas pelas equações que governam o escoamento. Assumindo a solução em regime permanente, estas equações podem ser escritas de forma compacta:

$$R(w, \mathcal{X}, \mathcal{F}) = 0$$

onde:

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial w} \delta w + \frac{\partial R}{\partial \mathcal{X}} \delta \mathcal{X} + \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} = 0. \quad (4)$$

Como a equação (4) é homogênea, pode-se introduzir os multiplicadores de Lagrange e somar à expressão (3):

$$\delta I = \frac{\partial I^T}{\partial w} \delta w + \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{X}} \delta \mathcal{X} + \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} + \psi^T \left(\frac{\partial R}{\partial w} \delta w + \frac{\partial R}{\partial \mathcal{X}} \delta \mathcal{X} + \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} \right)$$

re-arranjando os termos, tem-se:

$$\delta I = \underbrace{\left\{ \frac{\partial I^T}{\partial w} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial w} \right\}}_{(d)} \delta w + \left\{ \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{X}} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial \mathcal{X}} \right\} \delta \mathcal{X} + \left\{ \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right\} \delta \mathcal{F}. \quad (5)$$

Para que a variação da função de mérito seja independente da variação das propriedades do escoamento, deve-se fazer com que o termo (d) seja nulo. Com isso, tem-se a equação adjunta que deve ser resolvida para ψ :

$$\frac{\partial I^T}{\partial w} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial w} = 0. \quad (6)$$

O multiplicadores de Lagrange não têm significado físico no problema adjunto *a priori*. Porém, pode-se interpretá-los como forças generalizadas que impoem a realizabilidade física da solução do problema de otimização [20].

Pode-se então definir o gradiente da função de mérito em relação à geometria da fronteira conforme:

$$\mathcal{G}^T = \frac{\delta I}{\delta \mathcal{F}} = \left\{ \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{X}} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial \mathcal{X}} \right\} \frac{\delta \mathcal{X}}{\delta \mathcal{F}} + \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} - \psi^T \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}}. \quad (7)$$

A vantagem da expressão (7) é sua independência em relação à δw , o que permite a avaliação do gradiente sem a necessidade de soluções adicionais das equações que governam o escoamento. Com isso, é possível promover uma mudança geométrica $\delta \mathcal{F}$ que diminua a medida de mérito e, com a nova geometria, repetir o processo até que o gradiente seja nulo ou a medida de mérito tenha atingido o valor desejado.

3 Ciclo de Projeto

O processo iterativo de melhoria aerodinâmica é executado através de um ciclo lógico de projeto conforme a figura 1.

Nesse ciclo, o argumento de entrada é um conjunto de parâmetros de projeto que definem a geometria inicial. Com esses parâmetros, o gerador de geometria gera um aerofólio que é então encaminhado para o gerador de malha. Esse componente, discretiza o domínio de cálculo para que o código de solução das equações que governam o escoamento forneça o campo de variáveis primitivas do domínio fluídico. Com esse e os dados geométricos da malha, calcula-se a função de mérito. Nesse ponto, é verificado se a função de mérito tem o valor desejado. Caso isso seja verdade, o ciclo é interrompido. Caso contrário, as propriedades físicas do escoamento e a malha são então encaminhadas para o código de solução das equações adjuntas.

O campo das variáveis adjuntas juntamente com a malha e a solução do escoamento são encaminhados ao componente que calcula o gradiente da função de mérito e promove uma variação dos parâmetros de projeto. Esse parâmetros são utilizados pelo gerador de geometria para se obter o novo aerofólio e o ciclo continuar até a convergência.

Figura 1: Ciclo de Projeto

4 Modelagem Matemática do Escoamento

As equações de Euler na forma diferencial podem ser escritas na forma conservativa utilizando a separação em variáveis de estado e vetores de fluxo conforme:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E}_e \hat{e}_x + \mathbf{F}_e \hat{e}_y) = 0 \quad (8)$$

onde:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \mathbf{E}_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho H u \end{Bmatrix} \text{ \& } \mathbf{F}_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho H v \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Integrando a equação (8) em um volume de controle e utilizando o teorema de Gauss pode-se relacionar a variação temporal das variáveis conservadas com a integral dos vetores de fluxo no contorno $\mathcal{C}$ do volume de controle $\mathcal{V}$.

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{E}_e \hat{e}_x + \mathbf{F}_e \hat{e}_y) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{C} = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é válida para um volume de controle genérico e portanto pode-se assumir um volume pequeno o suficiente para que a variação espacial das variáveis conservadas seja desprezível. Desta forma, a integral volumétrica se reduz a um produto do volume $\mathcal{V}_i$ pela variação temporal das variáveis conservadas. Além disso, pode-se tomar um volume de controle poligonal com k faces de forma que a integral de contorno dos vetores de fluxo reduz-se a um somatório, conforme a equação (11).

$$\mathcal{V}_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \underbrace{\sum_{j=1}^k (\mathbf{E}_e(\mathbf{Q}_i)_j \hat{e}_x + \mathbf{F}_e(\mathbf{Q}_i)_j \hat{e}_y) \cdot \ell_{ij} \hat{n}_j}_{C(\mathbf{Q}_i)} = 0 \quad (11)$$

A equação (11) deve ser respeitada simultaneamente em cada um dos volumes $\mathcal{V}_i$ de um domínio de cálculo discretizado. Essa discretização pode ser feita de duas formas:

estruturada e não-estruturada. Em malhas estruturadas, o domínio é dividido em volumes aos quais são atribuídos índices de forma que seja possível obter os volumes vizinhos a um dado volume apenas a partir de seu próprio índice conforme uma matriz. Nessas malhas, usualmente chamadas de *body-fitted*, utilizam-se coordenadas generalizadas e transforma-se o domínio físico em um domínio computacional, atribuindo-se termos que corrigem a diferença de métrica entre os dois domínios. A solução do escoamento é então conduzida no domínio computacional que consiste essencialmente de uma matriz em que cada elemento corresponde a um volume $\mathcal{V}_{ij}$.

Em malhas não-estruturadas, o domínio pode ser dividido de forma arbitrária, não havendo nenhuma regra *a priori* que defina a vizinhança de um dado volume $\mathcal{V}_i$. Assim, faz-se necessário o uso de uma tabela que defina a conectividade entre os elementos que formam a malha. Uma das vantagens dessa metodologia é que as equações discretizadas ficam mais simples, uma vez que os termos de correção da métrica são unitários, e outra vantagem é sua capacidade de lidar com geometrias complexas. Por outro lado, porém, com essa metodologia a implementação torna-se mais complicada e restringe as possibilidades de utilização de algoritmos implícitos de evolução temporal.

Neste trabalho, optou-se por malhas não-estruturadas com o domínio sendo discretizado por triângulos de dimensão variável utilizando-se do algoritmo de triangulação de Delaunay. Esse algoritmo é largamente utilizado na geração de malhas e possibilita uma variação suave de volume de cada uma das células ao longo do domínio (figura 2).

Figura 2: Malha Computacional

(a) Discretização do domínio; (b) Malha próxima ao aerofólio NACA0012

Os valores das variáveis conservadas em cada face de um volume $\mathcal{V}_i$ podem ser obtidos fazendo-se a média aritmética entre os valores dos dois volumes que compartilham cada uma das faces (equação (12)). Esse método, conforme apresentado por [11], corresponde a um esquema numérico de diferenças finitas centrado de segunda ordem de precisão espacial, em malhas sem variações bruscas de volume das células.

$$V_{ij} = \frac{V_i + V_j}{2} \quad (12)$$

4.1 Dissipação Artificial

O equação (11) apresenta apenas um termo de variação temporal e um termo convectivo de modo que a única forma de dissipação é devido ao erro de truncamento durante a solução numérica. Esse nível de dissipação é muitas vezes insuficiente para atenuar determinados comprimentos de onda presentes em regiões com gradientes de pressão elevados como em ondas de choque e pontos de estagnação. A dissipação, tanto numérica quanto física, filtra de forma eficiente os comprimentos de onda menores e tem pouco efeito em comprimentos de onda maiores conforme mostrado em [6].

Esses comprimentos de onda menores são gerados devido ao cascadeamento de frequência causado pelas não-linearidades das equações de Euler. Os comprimentos de onda menores causam erros de instabilidade numérica e *aliasing* e estão associados a frequências acima da frequência de corte definida pela dimensão dos elementos da malha.

Figura 3: Esquema do espectro de energia

A dissipação artificial tem o objetivo de dissipar a energia armazenada nas frequências acima da frequência de corte (figura 3), minimizando o cascadeamento e melhorando a estabilidade do cálculo. Além disso, deseja-se que a dissipação aja nas regiões em que há gradientes de pressão elevados e seja reduzida em todo o resto do domínio apenas para atenuar a instabilidade inerente a esquemas centrados. A equação (11) é então modificada para incluir o termo de dissipação artificial $D(\mathbf{Q})$ (13).

$$\mathcal{V}_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + C(\mathbf{Q}_i) - D(\mathbf{Q}_i) = 0 \quad (13)$$

Uma forma de comprovada eficiência do termo de dissipação artificial é apresentada em [12] e foi adaptada para malhas não-estruturadas:

$$D(\mathbf{Q}_i) = d^{(2)}(\mathbf{Q}_i) - d^{(4)}(\mathbf{Q}_i) \quad (14)$$

Onde o termo $d^{(2)}(\mathbf{Q})$ é chamado de operador Laplaciano não-dividido e $d^{(4)}(\mathbf{Q})$ de operador bi-harmônico. Estes são escritos da seguinte forma:

$$d^{(2)}(\mathbf{Q}_i) = \sum_k \left[\frac{(A_i + A_k)}{2} \varepsilon_{ik}^{(2)} (\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_i) \right] \quad (15)$$

$$d^{(4)}(\mathbf{Q}_i) = \sum_k \left[\frac{(A_i + A_k)}{2} \varepsilon_{ik}^{(4)} (\nabla^2 \mathbf{Q}_k - \nabla^2 \mathbf{Q}_i) \right] \quad (16)$$

O operador ∇^2 na equação (16) utiliza a notação geralmente atribuída ao Laplaciano, porém, aqui é apenas uma notação para:

$$\nabla^2 \mathbf{Q}_i \equiv \sum_k (\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_i) \quad (17)$$

Os coeficientes ε dos operadores bi-harmônico e Laplaciano não-dividido são calculados da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ik}^{(2)} = \mathcal{K}^{(2)} \max(\nu_i, \nu_k) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ik}^{(4)} = \max[0, (\mathcal{K}^{(4)} - \varepsilon_{ik}^{(2)})] \quad (19)$$

Onde ν em (18) funciona como um sensor de gradiente de pressão calculado conforme:

$$\nu_i = \frac{\sum_k |p_k - p_i|}{\sum_k (p_k + p_i)} \quad (20)$$

Na equação (15), o termo A_i corresponde ao maior autovalor da matriz Jacobiana (item 5.2) e é calculado conforme:

$$A_i = \sum_k \left[|\vec{q}_{ik} \cdot \vec{\mathcal{S}}_{ik}| + a_{ik} |\vec{\mathcal{S}}_{ik}| \right] \quad (21)$$

Onde $\vec{q}_{ik}$ é o vetor velocidade na face de superfície $\mathcal{S}$ compartilhada pelo elemento i e seu vizinho k .

$$\vec{q}_{ik} = u_{ik} \hat{e}_x + v_{ik} \hat{e}_y \quad (22)$$

Os coeficientes $\mathcal{K}$ utilizados nesse trabalho correspondem aos valores utilizados em [12]:

$$\mathcal{K}^{(2)} = \frac{1}{4} ; \mathcal{K}^{(4)} = \frac{3}{256}$$

Em regiões de gradiente de pressão alto, o valor de $\varepsilon_{ik}^{(2)}$ é maior que em outras regiões do domínio e, dessa forma, o operador Laplaciano não-dividido age na dissipação da energia presente em comprimentos de onda inferiores aos que a malha é capaz capturar. Consequentemente, o valor absoluto de $\varepsilon_{ik}^{(4)}$ é baixo ou nulo e, portanto, o operador bi-harmônico tem pouco efeito na dissipação.

De forma contrária, em regiões de variações suaves de pressão, ν_i apresenta valores absolutos baixos diminuindo o efeito do operador Laplaciano não-dividido na dissipação e o operador bi-harmônico tem seu valor controlado e de quarta ordem no espaço, ou seja, de valor absoluto inferior à precisão do esquema de diferenciação no espaço (equação (12)). Assim não há dissipação excessiva na solução numérica do escoamento.

4.2 Passo Temporal

A equação (13) está na forma semi-discreta, uma vez que o termo de variação temporal das variáveis conservadas está na forma contínua. Essa equação deve ser aplicada em todo o domínio para se obter a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em cada volume $\mathcal{V}_i$. Com isso, tem-se

um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que se deseja solucionar para a condição de regime permanente.

Equações diferenciais ordinárias podem ser resolvidas por uma vasta gama de métodos de discretização temporal, porém, optou-se por um Runge-Kutta de cinco estágios semelhante ao apresentado em [18]. Esse tipo de método tem a vantagem de acompanhar a evolução temporal da solução de forma consistente com a física porque é possível utilizar-se um passo de tempo Δt constante para todas as células e executar a integração temporal de forma explícita. No contexto de malhas estruturadas, a implementação de algoritmos implícitos de evolução temporal é simplificada pelo fato das matrizes de coeficientes apresentarem banda estreita, porém, neste trabalho, optou-se por malhas não-estruturadas onde as matrizes são geralmente esparsas e implicam em uma dificuldade adicional de implementação de algoritmos implícitos.

Os esquemas de Runge-Kutta de cinco estágios permitem até quinta ordem de precisão temporal, podendo-se optar por maior estabilidade ou maior precisão mediante a escolha dos α_k . Neste trabalho, optou-se por um conjunto de valores de α_k que garante a estabilidade para valores de CFL (Courant-Friedrich-Lewy) até $2\sqrt{2}$ [12] e tem precisão de segunda ordem.

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_i^{(0)} = \mathbf{Q}_i^{(n)} \\ \mathbf{Q}_i^{(1)} = \mathbf{Q}_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\mathbf{Q}_i^{(0)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(0)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(2)} = \mathbf{Q}_i^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\mathbf{Q}_i^{(1)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \\ \mathbf{Q}_i^{(k)} = \mathbf{Q}_i^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\mathbf{Q}_i^{(k-1)}) - D(\mathbf{Q}_i^{(1)})] \quad k = 3, 4, 5 \\ \mathbf{Q}_i^{(n+1)} = \mathbf{Q}_i^{(5)} \end{cases} \quad (23)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_5 = 1$$

Aceleração de Convergência

Conforme pode ser visto no algoritmo (23), a evolução temporal de cada uma das células pode ser feita com passos de tempo distintos de forma a acelerar a convergência, uma vez que apenas a solução de regime permanente interessa. Isso pode ser feito fixando um valor de CFL para todas as células e utilizando a expressão (24) para calcular o passo de tempo para cada um dos volumes.

$$\Delta t_i = \frac{\Delta l_i CFL}{c_i}; \quad c_i = (|q| + a)_i \quad (24)$$

Onde c_i corresponde à maior velocidade característica (item 5.2), a é a velocidade do som no volume $\mathcal{V}_i$ e q a velocidade local do escoamento. É importante ressaltar que, diferente de malhas estruturadas, Δl_i não corresponde ao espaçamento da malha em uma determinada direção e sim à menor aresta da célula i .

5 Condições de Contorno

A classe de problemas de aerodinâmica externa geralmente apresenta três tipos de condições de contorno: superfície sólida, simetria e corrente não-perturbada. No contexto das equações de Euler, a formulação para superfície sólida adiabática e uma superfície de simetria coincidem, uma vez que não há viscosidade. Neste trabalho, serão tratadas apenas as formulações de superfície adiabática e de corrente não-perturbada.

5.1 Superfície Adiabática

A modelagem matemática de superfície sólida adiabática em escoamentos sem viscosidade é feita impondo-se que o vetor velocidade seja tangente à superfície e os gradientes de pressão e de temperatura sejam nulos na direção normal à esta.

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Dessa forma, é possível perceber que a formulação de uma superfície sólida adiabática em escoamentos modelados pelas equações de Euler é o mesmo que impor que o campo seja localmente simétrico, uma vez que nenhuma informação atravessa a superfície.

As condições (25) devem ser discretizadas e tratadas em termos das variáveis conservadas Q_n . Utilizando-se a expressão 12 e considerando uma célula fictícia (subscrito g) que compartilha a face de contorno com a célula do domínio (subscrito c) conforme a figura 4, pode-se mostrar que

$$\begin{cases} Q_{1_g} = Q_{1_c} \\ Q_{2_g} = Q_{2_c} t_x - Q_{2_c} n_x \\ Q_{3_g} = Q_{3_c} t_y - Q_{3_c} n_y \\ Q_{4_g} = Q_{4_c} \end{cases} \quad (26)$$

é equivalente a (25).

Figura 4: Condição de contorno de superfície com deslizamento

A utilização de células fictícias [17] é uma prática bastante comum na implementação de condições de contorno por apresentar a vantagem de não exigir nenhum tratamento especial das células de fronteira no cálculo dos termos convectivo e dissipativo. Isso ocorre porque os volumes fictícios são endereçados na tabela de conectividade e, portanto, são tratados como células vizinhas às células do domínio. Porém, os valores das variáveis nesses volumes fictícios não necessariamente são corretos do ponto de vista físico, e são apenas valores numéricos que garantem que as propriedades na face respeitem as condições de contorno físicas.

5.2 Corrente Não-Perturbada

O tratamento da condição de contorno de corrente não-perturbada deve respeitar as direções de propagação de propriedades físicas de forma a evitar sobre-especificação ou sub-especificação do problema. As direções de propagação são definidas pelas variáveis características.

Os casos apresentados nesse trabalho restringem-se a casos de aerodinâmica externa onde a fronteira externa do domínio está distante do corpo imerso. Desta forma, é razoável tratar o escoamento próximo dessa fronteira como unidimensional conforme [8]. Tomando-se a direção normal para a resolução das equações de Euler e mantendo a velocidade tangencial invariante tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} = 0 \quad (27)$$

onde $\mathbf{V}$ é o vetor de variáveis primitivas e $\mathbf{A}$ é a matriz Jacobiana para estas variáveis.

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \rho \\ q_n \\ p \end{Bmatrix} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} q_n & \rho & 0 \\ 0 & q_n & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & q_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

As equações características são obtidas diagonalizando a equação (27). Para isso calcula-se o autovalores (λ) e autovetores da matriz $\mathbf{A}$.

$$\lambda = \begin{Bmatrix} q_n \\ q_n + c \\ q_n - c \end{Bmatrix} ; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{bmatrix} ; \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Em (29) $\mathbf{L}$ é a matriz dos autovetores pela esquerda da matriz $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{L}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \overbrace{(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L})}^{\Lambda} \mathbf{L}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} = 0 \quad (30)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} q_n & 0 & 0 \\ 0 & q_n + c & 0 \\ 0 & 0 & q_n - c \end{bmatrix} \quad (31)$$

Diagonalizando o sistema (27) conforme (30) definem-se as variáveis características conforme (32). Onde $\delta \mathbf{W}$ corresponde à primeira variação de $\mathbf{V}$ multiplicada por L^{-1} . A variável W muitas vezes não é possível de ser definida porque a equação (27) é não-linear e os termos da matriz L^{-1} não são constantes.

$$\delta \mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1} \delta \mathbf{V} \quad (32)$$

$$\delta W_1 = \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \quad (33a)$$

$$\delta W_2 = \delta q_n + \frac{1}{\rho c} \delta p \quad (33b)$$

$$\delta W_3 = \delta q_n - \frac{1}{\rho c} \delta p \quad (33c)$$

As equações (30) a (33) constituem o chamado problema de Riemann. Se as variações δW_n forem nulas, W_1 , W_2 e W_3 são chamados de invariantes de Riemann [2]. Mostra-se que δW_1 , em particular, é proporcional à variação da entropia [8]. Sendo assim, a hipótese dos invariantes de Riemann implica em assumir que o processo é isentrópico ao longo da curva característica q_n , que corresponde a uma linha de corrente no caso unidimensional.

Na região da fronteira externa, a hipótese de invariância de $\mathbf{W}$ é válida uma vez que, se esta fronteira estiver suficientemente distante do corpo, é razoável assumir que não há descontinuidades que produziram uma variação de entropia. Utilizando essa hipótese, pode-se integrar as relações (33) para um gás perfeito e assim obter os invariantes de Riemann [8]:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{p}{\rho^\gamma} \equiv W_1 \quad (34a)$$

$$\mathcal{R}_+ = q_n + \frac{2c}{\gamma - 1} \equiv W_2 \quad (34b)$$

$$\mathcal{R}_- = q_n - \frac{2c}{\gamma - 1} \equiv W_3 \quad (34c)$$

onde $\mathcal{R}_0$ está relacionado com o autovalor (q_n), $\mathcal{R}_+$ com o autovalor ($q_n + c$) e $\mathcal{R}_-$ com ($q_n - c$). As deduções apresentadas nesse trabalho são convencionadas com os volumes positivamente orientados e, portanto, os versores normais apontam para fora de forma que, de acordo com o sinal da velocidade normal q_n , seja definido se a fronteira é uma entrada ou uma saída de massa.

Em regime subsônico, os invariantes $\mathcal{R}_+$ e $\mathcal{R}_-$ sempre seguirão o caminho do domínio para a fronteira e do infinito para a fronteira respectivamente. Isso ocorre porque os autovalores $q_n + c$ e $q_n - c$ não mudam de sinal independentemente do sinal de q_n . Assim pode-se calcular a velocidade normal à fronteira de acordo com a expressão (35) e com isso decidir entre a formulação de entrada ou saída de massa.

$$q_{n_f} = \frac{\mathcal{R}_{+d} + \mathcal{R}_{-\infty}}{2} \quad (35)$$

5.2.1 Regime Subsônico

Entrada de Massa

A condição de entrada de massa corresponde à velocidade normal à face negativa. Portanto, na condição subsônica, a informação é transportada para a fronteira de acordo com a figura 5.

Utilizando a relações (34), é possível definir o estado termodinâmico da fronteira conforme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{0_f} &= \mathcal{R}_{0_\infty} & \rho_f &= \left(\frac{\rho_\infty^\gamma c_f^2}{\gamma p_\infty} \right) \\ \mathcal{R}_{+f} &= \mathcal{R}_{+d} & \Rightarrow & q_{n_f} = \frac{\mathcal{R}_{+d} + \mathcal{R}_{-\infty}}{2} \\ \mathcal{R}_{-f} &= \mathcal{R}_{-\infty} & c_f^2 &= (\gamma - 1) \frac{\mathcal{R}_{+d} - \mathcal{R}_{-\infty}}{4} \end{aligned} \quad (36)$$

Com a condição de que a velocidade tangencial se mantém invariante pode-se definir o estado hidrodinâmico de acordo com relação:

$$\begin{aligned} u_f &= u_\infty + (q_{n_f} - q_{n_\infty}) \mathbf{n}_x \\ v_f &= v_\infty + (q_{n_f} - q_{n_\infty}) \mathbf{n}_y \end{aligned} \quad (37)$$

Figura 5: Condição de contorno de entrada subsônica

Com os estados termodinâmico e hidrodinâmico da fronteira definidos, calculam-se as variáveis conservadas na fronteira e utiliza-se a relação (12) para definir essas variáveis na célula fictícia de forma análoga ao apresentado na seção 5.1.

Saída de Massa

A condição de saída de massa corresponde à velocidade normal à face positiva. Portanto, na condição subsônica, a informação é transportada para a fronteira de acordo com a figura 6. Os estados termodinâmico e hidrodinâmico na fronteira são definidos de forma

Figura 6: Condição de contorno de saída subsônica

análoga ao apresentado para a entrada de massa. Porém, na condição de saída de massa, a característica W_1 sai do domínio e as relações que definem esses estados tomam a forma

de

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{0_f} &= \mathcal{R}_{0_d} & \rho_f &= \left(\frac{\rho_d^\gamma c_f^2}{\gamma p_d} \right) \\
\mathcal{R}_{+_f} &= \mathcal{R}_{+_d} & \Rightarrow \quad q_{n_f} &= \frac{\mathcal{R}_{+_d} + \mathcal{R}_{-\infty}}{2} \\
\mathcal{R}_{-_f} &= \mathcal{R}_{-\infty} & c_f^2 &= (\gamma - 1) \frac{\mathcal{R}_{+_d} - \mathcal{R}_{-\infty}}{4}
\end{aligned} \tag{38}$$

com a velocidade sendo dada por:

$$\begin{aligned}
u_f &= u_d + (q_{n_f} - q_{n_d}) \mathbf{n}_x \\
v_f &= v_d + (q_{n_f} - q_{n_d}) \mathbf{n}_y
\end{aligned} \tag{39}$$

5.2.2 Regime Supersônico

Em regime supersônico, o número de Mach é superior a 1 e as características da equação (27) estão todas no mesmo sentido, ou seja, negativo para entrada e positivo para saída de massa.

Entrada de Massa

Os invariantes de Riemann na condição de entrada supersônica devem ser calculados na fronteira de acordo com:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{0_f} &= \mathcal{R}_{0_\infty} & \rho_f &= \left(\frac{\rho_\infty^\gamma c_f^2}{\gamma p_\infty} \right) \\
\mathcal{R}_{+_f} &= \mathcal{R}_{+\infty} & \Rightarrow \quad q_{n_f} &= \frac{\mathcal{R}_{+\infty} + \mathcal{R}_{-\infty}}{2} \\
\mathcal{R}_{-_f} &= \mathcal{R}_{-\infty} & c_f^2 &= (\gamma - 1) \frac{\mathcal{R}_{+\infty} - \mathcal{R}_{-\infty}}{4}
\end{aligned} \tag{40}$$

Pode ser mostrado que as relações (40), juntamente com a hipótese de invariância da velocidade tangencial, correspondem a fixar os valores das variáveis de estado iguais aos valores prescritos para a corrente não-perturbada.

Saída de Massa

Na condição de saída supersônica, todas as características estão saindo do domínio. Desta forma, os invariantes de Riemann na fronteira são extrapolados do domínio.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{0_f} &= \mathcal{R}_{0_d} & \rho_f &= \left(\frac{\rho_d^\gamma c_f^2}{\gamma p_d} \right) \\
\mathcal{R}_{+_f} &= \mathcal{R}_{+_d} & \Rightarrow \quad q_{n_f} &= \frac{\mathcal{R}_{+_d} + \mathcal{R}_{-_d}}{2} \\
\mathcal{R}_{-_f} &= \mathcal{R}_{-_d} & c_f^2 &= (\gamma - 1) \frac{\mathcal{R}_{+_d} - \mathcal{R}_{-_d}}{4}
\end{aligned} \tag{41}$$

De forma análoga à entrada supersônica, as relações (41) correspondem a extrapolar todas as variáveis de estado do domínio para a fronteira.

6 Método Adjunto Euler

As equações adjuntas Euler apresentam uma semelhança com o sistema de Euler descrito em 4, porém, apresentam a vantagem de serem lineares uma vez que as matrizes Jacobianas das variáveis de estado são constantes durante a solução do problema adjunto, além de não dependerem de ψ .

O método dos volumes finitos empregado para a solução das equações adjuntas utilizado nesse trabalho aplica-se a malhas não-estruturadas. Essas malhas são um caso particular dos sistemas de coordenadas generalizadas apresentado. Nelas, apenas se faz uma rotação finita do sistema cartesiano local para alinhar o sistema com as direções normais e tangenciais. As formulações apresentadas no que se segue assumem uma estrutura semelhante ao apresentado para a solução das equações do escoamento.

A equação adjunta em coordenadas cartesianas é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{A}_1^T \frac{\partial \psi}{\partial x} - \mathbf{A}_2^T \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

Integrando a equação (42) em um volume de controle genérico $\mathcal{V}$ e utilizando o teorema de Gauss:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathcal{V} - \mathbf{A}_1^T \int_{\mathcal{C}} \psi n_x d\mathcal{C} - \mathbf{A}_2^T \int_{\mathcal{C}} \psi n_y d\mathcal{C} \quad (43)$$

Nota-se que as matrizes Jacobianas na equação (43) estão fora das integrais de contorno. Isso ocorre porque admite-se que essas matrizes são constantes dentro de um volume de controle e, portanto, não há a necessidade de avaliá-las no contorno de $\mathcal{V}$ ao aplicar o teorema de Gauss. Essa aproximação é razoável quando adota-se um volume de controle triangular pequeno o suficiente de forma análoga ao exposto em 4.

Com essa escolha, podemos aproximar as integrais de contorno em somatórios sobre as faces do volume e a integral de volume em um produto do volume da célula pela variação temporal:

$$\mathcal{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \underbrace{\sum_{j=1}^3 (\mathbf{A}_1^T \psi_{ij} \ell_{ij} n_{x_j} + \mathbf{A}_2^T \psi_{ij} \ell_{ij} n_{y_j})}_{C(\psi_i)} = 0 \quad (44)$$

Dissipação Artificial

A equação (44) pode ser integrada no tempo utilizando o método descrito em 4.2, porém, a literatura [18] mostra que essa equação apresenta instabilidades quando solucionada utilizando um método centrado além do fato de que as equações adjuntas são escritas na forma não-conservativa. Com isso, faz-se necessária a introdução de um termo de dissipação artificial.

O esquema de dissipação artificial utilizado no problema adjunto é o mesmo utilizado na solução do escoamento (4.1) preservando todos os sensores e apenas substituindo as variáveis de estado pelas variáveis adjuntas. O nível de dissipação observado nas soluções adjuntas, porém, é significativamente menor uma vez que as equações adjuntas não apresentam o cascadeamento de frequência por serem lineares [5].

A equação (44) é modificada para incluir o termo de dissipação artificial:

$$\mathcal{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - C(\psi_i) - D(\psi_i) = 0 \quad (45)$$

O sinal do termo $D(\psi_i)$ é o mesmo utilizado para o escoamento. Isso se deve ao fato de que o operador de transposição muda apenas o sinal do operador de primeira ordem embutido em $C(\psi_i)$ e não muda o sinal dos operadores de segunda e quarta ordem presentes no termo de dissipação [18].

Evolução Temporal

A evolução temporal utilizada para o problema adjunto segue os mesmos procedimentos descritos para o escoamento. O Runge-Kutta de 5 estágios é escrito conforme segue:

$$\begin{cases} \psi_i^{(0)} = \psi_i^{(n)} \\ \psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)} + \alpha_1 \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\psi_i^{(0)}) + D(\psi_i^{(0)})] \\ \psi_i^{(2)} = \psi_i^{(0)} + \alpha_2 \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\psi_i^{(1)}) + D(\psi_i^{(1)})] \\ \psi_i^{(k)} = \psi_i^{(0)} + \alpha_k \frac{\Delta t_i}{\mathcal{V}_i} [C(\psi_i^{(k-1)}) + D(\psi_i^{(1)})] \quad k = 3, 4, 5 \\ \psi_i^{(n+1)} = \psi_i^{(5)} \end{cases} \quad (46)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_5 = 1$$

6.1 Condições de Contorno

As condições de contorno do problema adjunto foram implementadas utilizando-se de metodologias já consagradas para aplicações de escoamento externo e que estão presentes na literatura [18].

Superfície Sólida

Adotou-se uma metodologia para a condição de contorno de superfície sólida que não especifica nenhum valor para as variáveis adjuntas (ψ_1 e ψ_4) na parede, apenas impõe a sua continuidade através da superfície.

A formulação proposta em [18] foi adaptada para malhas não-estruturadas em coordenadas cartesianas tendo a seguinte forma:

$$\begin{cases} \psi_{1_g} = \psi_{1_c} \\ \psi_{2_g} = \psi_{2_c} - 2n_x[(p - p_t) + n_x\psi_{2_c} + n_y\psi_{3_c}] \\ \psi_{3_g} = \psi_{3_c} - 2n_y[(p - p_t) + n_x\psi_{2_c} + n_y\psi_{3_c}] \\ \psi_{4_g} = \psi_{4_c} \end{cases} \quad (47)$$

Corrente Não-Perturbada

A condição contorno de corrente não-perturbada do problema adjunto deve respeitar as direções de propagação de informação.

$$\psi^T C_2 \delta \mathbf{Q} = 0. \quad (48)$$

Porém, verifica-se que, para casos em que a fronteira externa é muito distante do aerofólio, a solução trivial da equação (48) para ψ apresenta resultados satisfatórios.

$$\psi_{1-4_g} = 0 \quad (49)$$

7 Parametrização: Formulação Geral

Nesse item, apresenta-se, em linhas gerais, a metodologia de representação geométrica proposta em [14] sem, no entanto, reproduzir por completo o estudo teórico desenvolvido pelos autores.

Propõe-se que a geometria de um dado corpo bidimensional de corda c seja definida pelo produto de uma função de classe ($C(\frac{x}{c})$) por uma função de forma ($S(\frac{x}{c})$) somado a um termo que define a espessura do bordo de fuga:

$$\frac{y}{c} = C\left(\frac{x}{c}\right) S\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{x}{c} \frac{\Delta z_{te}}{c} \quad (50)$$

onde:

$$C\left(\frac{x}{c}\right) \equiv \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left[1 - \frac{x}{c}\right]^{N_2} \quad \text{com } 0 \leq \frac{x}{c} \leq 1. \quad (51)$$

Os expoentes N_1 e N_2 definem o tipo de geometria que se deseja representar [14]. Para a representação de um aerofólio por exemplo, utilizam-se $N_1 = 0.5$ e $N_2 = 1.0$. Esses valores decorrem do fato que a única função que garante que o bordo de ataque seja arredondado é $\sqrt{\frac{x}{c}}$ [14] independentemente do valor de $S(\frac{x}{c})$. Além disso, o termo $(1 - \frac{x}{c})$ faz com que o bordo de fuga seja agudo.

Em [14] mostra-se que para esses valores de N_1 e N_2 , o raio de arredondamento do bordo de ataque e o ângulo de fechamento do bordo de fuga estão relacionados com os valores da função de forma nos extremos do intervalo $[0, 1]$ conforme:

$$S(0) = \sqrt{\frac{2R_{le}}{c}} \quad S(1) = \tan\beta + \frac{\Delta z_{te}}{c}. \quad (52)$$

A função de forma é arbitrária *a priori*. Porém, convém adotar-se uma família de funções analíticas bem comportadas para a geração da função de forma global $S(\frac{x}{c})$. Isso porque a parametrização ocorre diretamente nos termos que geram tal função. Com isso, qualquer característica indesejada da função S é transferida à geometria final, uma vez que ela age como uma função de escala para a função classe (C). Para ilustrar isso, podemos escolher a função de forma simples $S(\frac{x}{c}) = 1$ e aplicarmos a função de classe com $N_1 = 0.5$ e $N_2 = 1.0$ (figura 7). Em seguida, introduz-se uma função de forma parametrizada através de pontos de controle de uma curva *spline*. Perturbando-se um parâmetro para cima e outro para baixo, percebe-se que, ainda que atenuada, a oscilação gerada na função de forma é transferida à geometria final do aerofólio (figura 7).

A proposta apresentada em [14] para parametrização da função de forma consiste na ponderação dos binômios que formam os polinômios de Bernstein. Esses polinômios são formados por uma somatória de binômios, e tal somatória tem a propriedade de ser constante e unitária no intervalo $[0, 1]$:

$$B_{pn}\left(\frac{x}{c}\right) = \sum_{i=0}^n \left[K_{i,n} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{n-i} \right] = 1 \quad ; \quad K_{i,n} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (53)$$

Define-se a função de forma introduzindo as variáveis de projeto (b_i) conforme:

$$S\left(\frac{x}{c}\right) \equiv \sum_{i=0}^n \left[b_i \cdot K_{i,n} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{n-i} \right]. \quad (54)$$

Figura 7: Perturbação da Função de Forma Unitária Através de pontos de controle de uma curva *spline*

A expressão (54) constrói a função de forma unitária quando $b_i = 1$ conforme ilustra a figura 8. Nessa figura observa-se que as variáveis de projeto são fatores que controlam a amplificação de cada um dos binômios de Bernstein. Esses binômios têm seus valores máximos equispçados no intervalo $[0, 1]$.

Introduzindo-se uma perturbação nas variáveis de projeto de mesma intensidade à ilustrada na figura 7 e aplicando-se a função de classe para aerofólios, observa-se na figura 9 um comportamento mais suave da geometria final.

Desta forma, parametrização da função de forma através dos binômios de Bernstein apresenta características como continuidade de segunda ordem e pouca sensibilidade à perturbações bruscas das variáveis de projeto. Essas características são desejáveis em aplicações de aerodinâmica, porém, do ponto de vista de otimização, há outras características importantes como unicidade da representação geométrica, filtragem e distribuição de erros. Essas propriedades serão discutidas nos itens subseqüentes.

Outro aspecto importante família dos binômios de Bernstein é o fato de não serem ortogonais entre si no intervalo $[0, 1]$ [16] e não observamos nenhuma função peso que faça com que produto interno entre eles seja nulo no intervalo de interesse. Essa propriedade não é exclusiva da parametrização utilizada nesse trabalho pois também é observada na família de funções de forma de Hicks-Henne.

8 Parametrização de Aerofólios

A parametrização de aerofólios é feita utilizando a função de classe com os expoentes $N_1 = 0.5$ e $N_2 = 1.0$ conforme discutido no item anterior. Com isso, é necessário apenas definir os valores dos parâmetros b_i que constroem a função de forma que representa a geometria desejada. Essa definição é feita utilizando o método dos mínimos quadrados.

Para que seja definido o maior grau dos binômios de Bernstein, é necessária uma análise de erro da representação geométrica. A figura 10 mostra tal análise aplicada ao

Figura 8: Função de Forma Unitária gerada por um Polinômio de Bernstein de 4º grau.

perfil aerodinâmico RAE2822. Nessa figura, observa-se que não há um benefício adicional significativo ao adotar-se um número de parâmetros superior à dez. O desempenho da parametrização de outros aerofólios é semelhante ao apresentado aqui. Isso porque as propriedades geométricas (raio de curvatura, inclinação, etc.) dos perfis aerodinâmicos são semelhantes entre si.

Nas aplicações e validações do ciclo de projeto inverso apresentadas nesse trabalho foram adotados onze variáveis de projeto. Das quais, a primeira e a última controlam o raio de arredondamento do bordo de ataque e o ângulo de fechamento do bordo de fuga.

8.1 Unicidade

No contexto do problema de otimização aerodinâmica, é importante verificar se a representação geométrica de uma superfície é única para um dada uma tolerância. Isso porque a não-unicidade da parametrização pode dificultar a convergência do algoritmo de busca do mínimo da função de mérito, uma vez que conjuntos de parâmetros muito distintos podem representar geometrias iguais dentro de uma tolerância.

Para analisarmos a unicidade da parametrização adotada nesse trabalho montamos o sistema (55) que relaciona os parâmetros de projeto b_i e pontos que descrevem a geometria $(x_i, y(x_i))$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_0(x_0) & S_1(x_0) & S_2(x_0) & \dots & S_n(x_0) \\ S_0(x_1) & S_1(x_1) & S_2(x_1) & \dots & S_n(x_1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ S_0(x_n) & S_1(x_n) & S_2(x_n) & \dots & S_n(x_n) \end{bmatrix}}_M \cdot \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_n) \end{Bmatrix} \quad (55)$$

onde

$$S_i(x) = C(x_i) \cdot K_{i,n} \cdot (x)^i \cdot (1-x)^{n-i}.$$

Uma medida simples da unicidade da representação geométrica dos pontos $(x_i, y(x_i))$

Figura 9: Função de Forma Unitária perturbada através de pontos de controle dos binômios de Bernstein.

(a) Perfil RAE2822 parametrizado por 6 parâmetros

(b) Erro da parametrização.

Figura 10: Análise de erro da Parametrização Geométrica

é o número de condicionamento espectral¹ da matriz M . Quando esse número é elevado, o condicionamento da matriz é ruim, implicando que pequenas diferenças de y causam diferenças muito altas em b . Ou seja, geometrias muito parecidas podem ser geradas por conjuntos muito distintos de parâmetros. Essa característica pode ser chamada de uma não-unicidade numérica da parametrização, uma vez que as diferenças entre as geometrias representadas podem ser menores que a precisão com a qual os dados estão sendo computados. Com isso temos geometrias muito próximas (iguais do ponto de vista computacional) representada por conjuntos distintos de parâmetros.

Adotando-se os pontos x_i como os pontos de controle dos binômios de Bernstein e calculando o número de condicionamento da matriz M para diferentes níveis (n) de parametrização, temos o seguinte comportamento:

A figura 11 mostra que o condicionamento numérico da matriz M piora com o aumento do número de parâmetros. Isso implica que o aumento do detalhamento de uma geometria traz a desvantagem de aproximarmos da não-unicidade da representação ge-

¹Razão entre o maior e o menor autovalores de uma matriz quadrada

Figura 11: Condicionamento numérico da matriz de parametrização.

ométrica. Além disso, a partir de um certo grau (n) da parametrização, o aumento do detalhamento introduz autovalores à matriz M com módulos muito reduzidos conforme observa-se na figura 12, que mostra a contribuição de autovalores da matriz do sistema (55) de acordo com a ordem da representação geométrica.

Esse comportamento é observado na matriz e coeficientes do filtro de Bezier [19] utilizado em ciclos de projeto inverso aerodinâmico para atenuar oscilações em geometrias de aerofólios. A matriz do filtro de Bezier é, em essência, a mesma da parametrização em questão e, apesar da desvantagem de seu mal condicionamento, a parametrização proposta em [14] tem o grande benefício da filtragem natural de oscilações inerentes à métodos numéricos de otimização aerodinâmica.

Figura 12: Autovalores da matriz de parametrização.

8.2 Estudo de Parâmetros

Os binômios de Bernstein não têm raízes reais no intervalo aberto $]0, 1[$. Essa característica faz com que os parâmetros de controle da função de forma tenham efeitos não apenas localizados, mas também distribuídos ao longo da corda do aerofólio. Para explicar tal efeito, convém utilizar a função de forma unitária e analisar a contribuição de cada um dos binômios de Bernstein em seu valor. Dessa forma, quantifica-se a influência de cada um dos parâmetros sobre os outros. Esse fator de influência é avaliado na posição de máximo de cada um dos binômios e está exemplificado para uma representação com 5 parâmetros na tabela 1.

Tabela 1: Fator de influência dos Parâmetros (4° grau)

Binômio	$B(x_0)$	$B(x_1)$	$B(x_2)$	$B(x_3)$	$B(x_4)$
0	1.00000	0.31641	0.06250	0.00391	0.00000
1	0.00000	0.42188	0.25000	0.04688	0.00000
2	0.00000	0.21094	0.37500	0.21094	0.00000
3	0.00000	0.04688	0.25000	0.42188	0.00000
4	0.00000	0.00391	0.06250	0.31641	1.00000

A tabela 1 mostra que o parâmetro 0 é o único que tem efeito na posição de máximo do binômio que ele controla. Por outro lado, ele tem influência não-nula na posição de máximo de todos os outros binômios exceto no último. O mesmo ocorre com o último parâmetro (4, no caso) em relação ao primeiro (0, no caso). Esse aspecto da representação geométrica evidencia que os únicos parâmetros independentes são o primeiro e o último, que controlam o raio de arredondamento do bordo de ataque e o ângulo de fechamento do bordo de fuga respectivamente.

Além disso, essa propriedade da parametrização pode ser interpretada como uma distribuição de erros, uma vez que um erro localizado em um parâmetro é difundido ao longo da corda do aerofólio. Isso está relacionado com a capacidade de filtragem da parametrização, discutida no item anterior.

Outro aspecto importante da parametrização adotada nesse trabalho, é o fato não ser possível eliminar um parâmetro quando este é nulo. Isso ocorre porque os binômios de Bernstein mudam de forma de acordo com o grau da parametrização e, sendo assim, a eliminação de um parâmetro implica na mudança dos binômios restantes. Tal característica está ilustrada na figura 13.

$$y\left(\frac{x}{c}\right) \text{ para } b = (1, 0, 1) \neq y\left(\frac{x}{c}\right) \text{ para } b = (1, 1)$$

9 Gradiente: Forma Particular

A expressão do gradiente reduzido da função de mérito é escrita em função dos parâmetros b_i para sua implementação no ciclo de projeto descrito em 3.

O procedimento algébrico para a obtenção de tal expressão é detalhado por [1] e a

Figura 13: Eliminação de parâmetro nulo.

expressão final do gradiente da função de mérito tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b_i} = & \oint_c \left[\frac{\partial}{\partial b_i} \left(J \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mathbf{x}_j} \right) f_{j\alpha} + C_{2\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \zeta_p} \left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial b_i} \right) \right] d\zeta_1 - \\ & \oint_c p \left[\psi_2 \frac{\partial}{\partial b_i} \left(J \frac{\partial \zeta_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right) + \psi_3 \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial \mathbf{x}_2} \right) \right] d\zeta_1 \end{aligned} \quad (56)$$

onde $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (\xi, \eta)$ corresponde às coordenadas tangencial e normal respectivamente, $\mathbf{x} = (x, y)$ às coordenadas cartesianas, $C_{2\alpha\beta}$ são os termos da matriz Jacobiana $C_2 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}}$, $\mathbf{Q}$ é o vetor de variáveis de estado e $f_{j\alpha}$ são os vetores de estado em coordenadas cartesianas:

$$f_\alpha = \begin{pmatrix} f_{1\alpha} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix} \\ f_{2\alpha} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

No contexto de malhas não-estruturadas, onde o sistema é cartesiano, os termos da métrica presentes na equação (56) são obtidos através de uma rotação finita entre o sistema cartesiano global e o sistema local de cada face dos elementos de fronteira. Sendo assim, o Jacobiano é unitário e os outros termos são cossenos diretores.

A expressão (56) pode ser expandida e seus termos podem separados em dois grupos:

Os termos geométricos são obtidos a partir da derivação da expressão da parametrização. Já os termos de campo são obtidos das soluções do escoamento e das equações adjuntas. Os detalhes da derivação desses termos estão apresentados em [1].

Termos Geométricos	Termos de Campo
$\frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial b_i} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial b_i} \right), \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial b_i} \right)$	$\psi_\alpha, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, C_{2\alpha\beta}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta}, p$

9.1 Validação

As variáveis adjuntas não têm um significado físico definido de forma que tomemos uma solução padrão que possibilite a validação da solução do campo dessas variáveis e também não temos soluções adjuntas exatas no contexto deste trabalho. Portanto, a metodologia de validação do código de solução das equações adjuntas adotada nesse trabalho consiste na comparação entre o valor do gradiente calculado a partir do campo adjunto e o gradiente calculado pelo método de diferenças finitas.

O cálculo do gradiente da função de mérito através do método de diferenças finitas é realizado variando-se individualmente cada um dos parâmetros que geram a geometria e resolvendo as equações que governam o escoamento para o cálculo da função de mérito de cada uma dessas geometrias. A seguinte expressão calcula o gradiente função de mérito com segunda ordem de precisão.

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{I(b + \Delta b) - I(b - \Delta b)}{2\Delta b} + \mathcal{O}(\Delta b^2) \quad (57)$$

Para a avaliação da expressão (57) é necessário $2n$ soluções do escoamento adicionais, onde n é número de parâmetros geométricos.

Por outro lado, o cálculo do gradiente da função de mérito através do método adjunto requer apenas uma solução do escoamento e uma solução das equações adjuntas que tem aproximadamente o mesmo custo computacional da solução do escoamento. Além disso, esse cálculo do gradiente não admite como fixo nenhum grau de liberdade (b_i). Esse aspecto aliado ao mal condicionamento da matriz da parametrização (item 8.1) implica que a única forma dos gradientes (diferenças finitas e método adjunto) corresponderem entre si é comparando-os para um caso onde a geometria é gerada apenas por dois parâmetros (parametrização de grau 1). Isso porque, esses dois parâmetros são os únicos independentes entre si, conforme discutido anteriormente.

A comparação das componentes do gradiente foi realizada em três casos distintos. Nesses casos foram variados apenas os parâmetros geométricos do extradorso do aerofólio. Os resultados dessa comparação estão apresentados na tabela 2.

Tabela 2: Comparação entre as metodologias de cálculo do gradiente.

Caso	Diferença Finitas		Método Adjunto		Erro	
1	0.021586	0.0041938	0.018959	0.004003	12%	4.5%
2	-0.0074515	-0.0026206	-0.0068640	-0.002847	7.9%	8.6%
3	-0.0074290	-0.0026409	-0.0072700	-0.002565	2.1%	2.9%

Os valores de erro mostrados na tabela 2 assumem como padrão o gradiente calculado pelo método de diferenças finitas. Nesse contexto, é importante ressaltar que todos os casos foram realizados com a mesma precisão da solução numérica tanto do escoamento quanto do problema adjunto.

As diferenças no valor do gradiente calculado pelos dois métodos são da mesma ordem de grandeza das diferenças observadas em outros trabalhos de otimização aerodinâmica utilizando o método adjunto [13, 18].

10 Validação do Ciclo de Projeto Inverso

O procedimento de validação do ciclo de projeto inverso aerodinâmico consiste em adotar como distribuição de pressão desejada a distribuição de uma geometria conhecida *a priori*. Dessa forma, garante-se que a distribuição desejada seja realizável. Entretanto, não há nenhuma garantia que haja mais de uma geometria que possua a uma distribuição semelhante ou idêntica à distribuição de pressão desejada. Tal situação caracterizaria um ponto de mínimo local da superfície de otimização e respeitaria as premissas estabelecidas para o projeto aerodinâmico.

Em todos os casos de validação apresentados aqui, as distribuições de pressão desejadas foram obtidas utilizando o código de solução das equações de Euler descrito em 4. Além disso, as geometrias que apresentam tais distribuições foram geradas a partir de parâmetros em um processo semelhante ao apresentado na figura 10. Com isso, garante-se que a geometria que produz a distribuição desejada está no espaço de geometrias geradas pela parametrização geométrica possibilitando, *a priori*, a completa convergência do processo de minimização da função de mérito.

As geometrias utilizadas nesse trabalho são públicas e facilmente encontradas na literatura. No ciclo de projeto, tais geometrias foram geradas com onze parâmetros que, conforme discutido em 8, as representam com erros reduzidos, não necessitando de graus superiores de parametrização para melhorar a representação geométrica.

Os casos de validação do ciclo de projeto inverso estão apresentados na tabela 3. Cada um deles tem o objetivo de testar capacidades distintas do método. Estes objetivos serão discutidos a medida em que os testes serão apresentados.

Tabela 3: Casos de Validação do Ciclo de Projeto Inverso

Caso	Geometria Inicial	Geometria Objetivo	M_∞	AOA
1	RAE2822	NACA0012	0.75	0°
2	NACA0012	RAE2822	0.75	1°
3	Clark Y	SD7062	0.30	0°

Caso 1

Nesse caso, inicia-se o ciclo de projeto com uma geometria assimétrica (RAE2822) em uma condição de escoamento em que a distribuição de pressão também não é simétrica. Por outro lado, tanto a distribuição objetivo quanto a geometria são simétricas.

Esse caso de validação tem o objetivo de avaliar a capacidade do ciclo de projeto inverso de construir uma simetria sem que ela seja imposta a partir do controle dos parâmetros. Apesar desse objetivo ser estritamente acadêmico, testar essa capacidade é importante para verificar se o ciclo como um todo apresenta erros no tratamento das superfícies superior e inferior do aerofólio. Esses erros são facilmente identificados em casos de contrução de simetria.

Além disso, esse caso tem o benefício adicional de verificar a capacidade do método adjunto de eliminar ondas de choque. Apesar dessa capacidade ter sido mostrada com a utilização de métodos mais simples baseados na solução de escoamento potencial linearizado, o método adjunto aplicado às equações de Euler deve apresentar um desempenho superior nesse tipo de aplicação, uma vez que a modelagem física dessas equações é adequada para representar fenômenos como ondas de choque.

A figura 14 apresenta o resultado desse teste de validação. É possível observar nessa figura que a simetria foi contruída de forma satisfatória eliminando completamente a onda de choque presente na distribuição de pressão inicial. Porém, observou-se, ao longo das soluções intermediárias do ciclo, uma dificuldade na modificação da geometria na região do bordo de fuga. Essa dificuldade é mais aparente na figura 14(a), onde a distribuição de pressão da trigésima solução difere em maior intensidade em relação à distribuição desejada. Acredita-se que essa dificuldade esteja relacionada com o fato que a região do bordo de fuga contribui em menor valor para a integral da função de mérito e, nessas condições, implica em componentes do gradiente relativas à essa região menores fazendo com que as correções geométricas no bordo de fuga sejam mais lentas do ponto de vista do ciclo de projeto inverso.

É importante mencionar também que a forçante do problema adjunto desse trabalho é a diferença entre as distribuições de pressão e, à medida que o ciclo se aproxima da solução de mínimo da função de mérito, as mudanças geométricas tornam cada vez menores. Portanto, é conceitualmente mais correto avaliar o desempenho do ciclo pelas diferenças de pressão do através do que pelas diferenças geométricas.

O método que promove as alterações geométricas adotado nesse trabalho é o *steepest descent*. Esse método, consiste em promover uma alteração geométrica proporcional ao gradiente porém em sua direção contrária. O desempenho desse algoritmo de busca do mínimo nem sempre é bom, podendo apresentar oscilações e dificuldades de convergência [18]. O emprego de outros métodos de busca não faz parte do escopo desse trabalho, uma vez que aqui objetiva-se apenas mostrar o conceito do método adjunto para otimização aerodinâmica em malhas não-estruturadas.

Caso 2

O caso 2 tem o objetivo de avaliar a capacidade do ciclo de projeto inverso de posicionar uma onda de choque. Para isso, parte-se de da geometria NACA0012 com $M_\infty = 0.75$ e $AOA = 1^\circ$ que produz uma onda de choque na porção anterior do aerofólio e deseja-se chegar à distribuição de pressão da geometria RAE2822 nas mesmas condições de escoamento, com as quais produz-se uma onda de choque na porção posterior do aerofólio.

Esse caso não apresenta um interesse prático, uma vez que parte-se de uma onda de choque mais fraca para uma mais forte (figura 15(a)) o que implica em um arrasto de onda superior apesar do aumento substancial do coeficiente de sustentação. Porém, do ponto de vista acadêmico, esse teste mostra uma grande vantagem do método adjunto Euler sobre outros métodos. Tal vantagem reside no fato que o método adjunto incorpora o mesmo nível de modelagem física utilizada na solução do escoamento e, portanto, se o modelo do escoamento é capaz de tratar ondas de choque de forma adequada, a formulação adjunta associada a tal modelagem deve ser capaz de também lidar com esses fenômenos físicos. Enquanto que o MGM é capaz de apenas eliminar ondas de choque.

Observa-se na figura 15(a) que tanto a posição quanto a intensidade da onda de choque foram reproduzidas pela geometria da trigésima sexta solução do ciclo. Porém, percebe-se que a dificuldade relacionada com a região do bordo de fuga está presente nesse

caso de forma análoga ao observado no caso 1. Acredita-se também, que tal dificuldade está relacionada à contribuição dessa região para a integral da função de mérito conforme discutido para o caso 1. Além disso, pode-se perceber que apesar das diferenças na distribuição de pressão serem pequenas, as diferenças na geometria são relativamente grandes. Diante disso, vale reiterar que a forçante do problema adjunto nesse caso é a diferença entre as distribuições de pressão e, portanto, à medida que as distribuições ficam próximas, a taxa de convergência do ciclo fica mais lenta, uma vez que o passo no método *steepest descent* é fixo.

Caso 3

O objetivo desse caso é avaliar a capacidade do ciclo de projeto inverso em condições de escoamento incompressível. A dificuldade dessas condições está relacionada com o fato da adimensionalização adotada no código de solução das equações de Euler ser adequada para números de Mach mais elevados. Com isso, a matriz de variáveis de estado de cada célula do domínio é pior condicionada do que em regimes transônicos e supersônicos, embora a teoria valha para todos os regimes.

Nesse caso, parte-se da geometria Clark Y com $M_\infty = 0.3$ e $AOA = 0^\circ$ e deseja-se chegar à distribuição de pressão gerada pela geometria SD7062 nas mesmas condições de corrente não-perturbada. Em ambos os casos, o número de Mach no domínio do escoamento não ultrapassa 0.43. Nesse regime, as variações de densidade não são expressivas e o efeito da compressibilidade é pouco importante.

A figura 16 apresenta o resultado do caso 3. Nessa figura percebe-se um desempenho muito bom do ciclo de projeto inverso. Porém, o resultado apresenta o problema observado nos casos anteriores na região bordo de fuga. Acredita-se que a razão desse problema seja a mesma apresentada para os casos 1 e 2. Por outro lado, verifica-se uma diferença geométrica menor que as presentes nos casos anteriores em que o número de Mach é mais elevado.

O método adjunto apresenta uma grande vantagem sobre o MGM nesse caso. Isso porque o MGM utiliza uma equação modelada a partir da solução de escoamento potencial compressível linearizado sobre uma placa ondulada [4, 3]. Essa modelagem é mais adequada apenas para o regime transônico onde os efeitos de compressibilidade são mais importantes, portanto, o MGM não produz resultados satisfatórios em condições de escoamento em que o efeito da compressibilidade é desprezível. Enquanto que a restrição do método adjunto é definida apenas pela capacidade da modelagem física adotada para a solução do escoamento.

11 Conclusão

Essa trabalho mostrou o conceito de aplicação do método adjunto na formulação contínua aplicado às equações de Euler para promover melhorias aerodinâmicas. Para isso, desenvolveu-se um ciclo de projeto inverso em que os principais componentes foram implementados ao longo desse trabalho.

As formulações em malhas não-estruturadas tanto da modelagem do escoamento quanto do método adjunto foram apresentadas procurando-se permitir a extensão futura da metodologia para problemas tridimensionais ou até mesmo com outros tipos de medida de mérito. Além disso, procurou-se mostrar o sentido prático das considerações apresentadas aqui, para isso mostrando o contexto e a necessidade da ferramenta de projeto apresentada do ponto de vista da engenharia aeronáutica. Porém, a utilidade de tal

ferramenta não restringe-se somente a esse setor mas também estende-se a outros setores como o de geração de energia, onde pode-se aplicar as idéias apresentadas aqui em projeto de pás para a geração de energia eólica por exemplo.

O código de solução das equações que regem o escoamento apresentou resultados com qualidade comparável ao padrão estabelecido por códigos do mesmo tipo. Apesar disso, não foi o objetivo desse trabalho melhorar o desempenho de tal código em termos de custo computacional. Sendo assim, não se desejou acelerar o avanço temporal adotando metodologias como *multigrid* e suavização implícita de resíduo.

O código de solução das equações adjuntas utilizou-se em larga medida da estrutura montada para a solução do escoamento e, por uma razão semelhante a do escoamento, não se procurou melhorar a taxa de convergência. Apesar disso, os resultados obtidos com o ciclo de projeto não necessitaram de um tempo de CPU excessivo. Além disso, verificou-se que o custo de solução das equações adjuntas é ligeiramente inferior ao custo observado para o escoamento. Com isso, é ainda mais evidente a vantagem do método adjunto para a obtenção do gradiente da função de mérito em relação ao método de diferenças finitas que necessita de um número de soluções do escoamento proporcional ao número de variáveis de projeto enquanto que pelo método adjunto o custo é de aproximadamente duas soluções do escoamento, independentemente do número de graus de liberdade da parametrização.

A escolha da parametrização geométrica foi feita com base nas opções presentes na literatura. Verificou-se que a proposta apresentada em [14] tem a capacidade de parametrizar o aerofólio inteiro diferente das funções de forma de Hicks-Henne que parametrizam apenas as mudanças geométricas. Além disso, a parametrização geométrica através dos polinômios de Bernstein é uma iniciativa recente e com grande potencial de aplicação na indústria. Verificou-se porém, que tal parametrização apresenta propriedades ainda pouco discutidas na literatura. Essas propriedades dividem-se em vantagens e desvantagens apresentadas em 7 e apesar de algumas dificuldades relativas à essa parametrização, como a não-ortogonalidade da família de polinômios de Bernstein, julga-se que essa metodologia figura-se como uma boa forma de representação geométrica por apresentar características desejáveis como filtragem natural, controle direto de parâmetros como raio de bordo de ataque e ângulo de fechamento do bordo de fuga e a possibilidade de cobertura de grande parte do espaço de geometrias possíveis com um número reduzido de parâmetros.

Os resultados do ciclo de projeto mostraram o bom desempenho do método adjunto Euler para eliminar e também posicionar uma onda de choque. Além disso, observou-se uma boa resposta de ciclo para o caso de validação em $M_\infty = 0.30$. Apesar dessas qualidades esperadas do método em questão, verificou-se uma dificuldade sistemática do ciclo em corrigir o bordo de fuga. Acredita-se que essa dificuldade está relacionada com a pouca contribuição dessa região para a integral da função de mérito aliada à influência entre os parâmetros discutida em 8.2. Com os casos de aplicação, desejou-se descrever o cenário em que a ferramenta detalhada nesse trabalho se insere e contribui para as soluções dos problemas enfrentados na indústria aeronáutica.

Referências

- [1] Bruno Galelli Chierigatti. Otimização aerodinâmica de aerofólios utilizando o método adjunto. Trabalho de Graduação - EPUSP, 2008.
- [2] T. J. Chung. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2002.

- [3] Marco Antonio de Barros Ceze and Ernani Vitillo Volpe. Estudo do projeto inverso de superfícies aerodinâmicas. Technical report, PIC-EPUSP, 2004.
- [4] Luis Carlos de Castro Santos. *A Hybrid Inverse Optimization Method for Aerodynamic Design of Lifting Surfaces*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 1993.
- [5] Clive A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*. Springer, 2006.
- [6] Clive A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*. Springer, 2006.
- [7] Mike Giles. Aerospace design: a complex task. Report 97/07, Oxford University Computing Laboratory, Oxford, July 1997.
- [8] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, volume 2. John Wiley and Sons, 1988.
- [9] Antony Jameson. Aerodynamic design via control theory. In *12th IMACS World Congress on Scientific Computation*, MAE Report 1824, Paris, July 1988.
- [10] Antony Jameson. Re-engineering the design process through computation. In *35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, NV, January 1997. American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA. AIAA-97-0641.
- [11] Antony Jameson and Dimitri Mavriplis. Finite volume solution of the two-dimensional euler equations on a regular triangular mesh, 1986.
- [12] Antony Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. *AIAA Journal*, 1981.
- [13] Sangho Kim, Juan J. Alonso, and Antony Jameson. A gradient accuracy study for the adjoint-based navier-stokes design method. In *37th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, 1999.
- [14] Brenda M. Kulfan and John E. Bussoletti. Fundamental parametric geometry representations for aircraft component shapes. In *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2006.
- [15] J. L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Number 170 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 1971.
- [16] G. G. Lorentz. *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company, 1986.
- [17] Clovis R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, 2004.
- [18] James John Reuther. *Aerodynamic Shape Optimization Using Control Theory*. PhD thesis, University of California Davis, 1996.

- [19] Ernani Vitillo Volpe. A3 - inverse aerodynamic design applications. Technical report, EMBRAER - FAPESP - EPUSP, 2005.
- [20] Ernani Vitillo Volpe and Luis Carlos de Castro Santos. Boundary and internal conditions for adjoint fluid problems, 2008.

(a) Distribuição de pressão

(b) Geometria dos aerofólios

Figura 14: Caso 1 - Geometria inicial: RAE2822 $M_\infty = 0.75$, $AOA = 0^\circ$
Geometria objetivo: NACA0012 $M_\infty = 0.75$, $AOA = 0^\circ$

(a) Distribuição de pressão

(b) Geometria dos aerofólios

Figura 15: Caso 2 - Geometria inicial: NACA0012 $M_\infty = 0.75$, $AOA = 1^\circ$
Geometria objetivo: RAE2822 $M_\infty = 0.75$, $AOA = 1^\circ$

(a) Distribuição de pressão

(b) Geometria dos aerofólios

Figura 16: Caso 3 - Geometria inicial: Clark Y $M_\infty = 0.30$, $AOA = 0^\circ$
Geometria objetivo: SD7062 $M_\infty = 0.30$, $AOA = 0^\circ$