UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FERNANDO KENIG BUFFA

ANÁLISE E REVISÃO DE MODELOS DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS
EMPREGADOS EM VÁLVULAS DO TIPO *CHOKE*

São Paulo

2017

FERNANDO KENIG BUFFA

ANÁLISE E REVISÃO DE MODELOS DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS
EMPREGADOS EM VÁLVULAS DO TIPO *CHOKE*

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

ORIENTADOR: PROF. DR. JORGE LUIS BALIÑO

São Paulo
2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Buffa, Fernando Kenig
ANÁLISE E REVISÃO DE MODELOS DE ESCOAMENTOS
MULTIFÁSICOS EMPREGADOS EM VÁLVULAS DO TIPO CHOKE / F. K.
Buffa -- versão corr. -- São Paulo, 2017.
74 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Escoamento Multifásico I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo o quanto tem feito em minha vida e pela oportunidade concedida para desempenhar esse trabalho.

Agradeço ao Professor Doutor Jorge Luis Baliño pela paciência, confiança e orientação concedida durante o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço também a minha família que esteve sempre ao meu lado me motivando no desenvolvimento desse trabalho, bem como a minha amada Franciely Grou pela compreensão em não poder estar ao seu lado em todos os momentos pelo fato de estar dedicado a este trabalho.

De igual maneira, agradeço à empresa Voith Hydro pela disponibilidade de tempo concedida para desempenhar esse trabalho, bem como à Escola Politécnica e ao Departamento de Engenharia Mecânica pelos recursos disponibilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Lista de Figuras

1	Válvula <i>choke</i> tipo positivo - Catálogo N-Line.	12
2	Válvula <i>choke</i> tipo - Catálogo N-Line.	13
3	Padrão de escoamento na vertical de Collier (1972).	14
4	Padrão de escoamento na horizontal Collier (1972).	16
5	Esquema para o <i>Hydro model</i> (reproduzido de Schüller <i>et al.</i> (2003)).	22
6	Volumes controle - Válvula <i>choke</i>	27
7	Volumes controle unidimensional, infinitesimal e com área variável.	35
8	Vazão mássica - Resultado obtido com C_c calculado através da Eq. (8).	50
9	Vazão mássica - Resultado obtido com $C_c = 1$	50
10	Influência do escorregamento no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo adiabático.	53
11	Influência do escorregamento no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo equilíbrio termodinâmico.	54
12	Influência da energia cinética a montante no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo de equilíbrio termodinâmico e modelo de escorregamento ($\beta = 0, 6$).	55
13	Comparação com valores preditos considerando modelo adiabático e valores medidos de vazão mássica (dados de Schüller <i>et al.</i> (2003, 2006)).	55
14	Comparação com valores preditos modelo de equilíbrio e valores medidos de vazão mássica (dados de Schüller <i>et al.</i> (2003, 2006)).	56
15	Variação de $\frac{\rho}{\rho_0}$ para modelo adiabático.	65
16	Variação de $\frac{\rho}{\rho_0}$ para modelo de equilíbrio.	66
17	Variação de $\frac{P}{P_0}$ para modelo adiabático.	67
18	Variação de $\frac{P}{P_0}$ para modelo de equilíbrio.	68
19	Variação de $\frac{T}{T_0}$ para modelo adiabático.	68
20	Variação de $\frac{T}{T_0}$ para modelo de equilíbrio.	69
21	Volume de controle entre B e 3.	72

Lista de Tabelas

1	Cronologia em pesquisa de escoamentos em válvulas <i>choke</i>	17
2	Coeficientes das correlações empíricas segundo diferentes autores.	18
3	Dados de entrada obtidos por Schüller <i>et al.</i> (2003, 2006).	46
4	Parâmetros utilizados no estudo de sensibilidade; parâmetros com (*) são cal- culados.	52
5	Valores em condição crítica para diferentes modelos.	53
6	Influência da energia cinética a montante nos valores das condições críticas para $\beta = 0, 6$, equilíbrio termodinâmico, modelo com escorregamento.	54
7	Parâmetros utilizados no cálculo.	65

NOMENCLATURA

A : area da seção transversal, m^2
 C_C : Relação entre área da vena contracta e área da restrição, (adimensional)
 C_D : Coeficiente de descarga, (adimensional)
 c_p : Calor específico pressão constante, $J/(kg\ K)$
 c_v : Calor específico volume constante, $J/(kg\ K)$
 d : Diâmetro do *choke*, m
 D : Diâmetro do Tubo, m
 G : Fluxo mássico, $kg/(sm^2)$
 n : Coeficiente da politrópica (adimensional)
 P : Pressão, Pa
 RGL : Razão gás-liquido, (adimensional)
 R : Constante do gás, $J/mol\ K$
 s : Posição axial, m
 $\hat{s}$: Entropia específica, $J/(kg\ K)$
 S : Razão de escorregamento (adimensional)
 x : Título mássico (adimensional)
 W : Vazão mássica, kg/s
 W_{exp} : Vazão mássica experimental, kg/s
 y : Razão de pressões, (adimensional)
 β : Razão de diâmetros, (adimensional)
 η : Coeficiente do teorema de transporte de Reynolds,
 γ : Relação de calores específicos, (adimensional)
 ρ : densidade, kg/m^3
 σ : Relação entre área da restrição e área de saída, (adimensional)
 ω : coeficiente adimensional

Subscritos

B : restrição, geométrico
 c : critico
 e : efetivo
 g : gás
 i : ponto elemental
 l : liquido homogeneizado
 m : medido
 o : óleo
 p : predito
 w : agua

1 : montante

2 : restrição, vena contracta

3 : jusante

RESUMO

Escoamentos multifásicos estão presentes em diversas aplicações industriais, principalmente na indústria do petróleo. Um dos casos de aplicação, objeto de estudo desse trabalho, é a determinação da produção de poços de petróleo através de válvulas *choke*. É apresentada uma revisão dos efeitos físicos e do equacionamento adotado pelos principais modelos multifásicos existentes para tais válvulas. Um estudo de sensibilidade de tais efeitos físicos é realizado, analisando as possíveis alternativas para a diferença de velocidade entre as fases, o mecanismo adotado para a troca de calor entre as fases, a influência da energia cinética a montante da válvula, a influência da área efetiva da garganta e a metodologia de cálculo da recuperação de pressão a jusante da válvula. Conclui-se que dos diversos fatores que influenciam no cálculo da vazão mássica e da condição crítica, a área efetiva da garganta é um parâmetro importante e que é necessário uma maior investigação de como determinar tal parâmetro.

Palavras-chave: válvula de *choke*, modelo homogêneo, modelo com escorregamento, escoamento multifásico, tecnologia de produção de petróleo.

ABSTRACT

Multiphase flow are present in many industrial applications, mainly at the petroleum industry. One of these application cases, aim of this work study, is to determine a petroleum well production by the *choke* valves. It is presented a revision of the physical effects and for the adopted equation by the main existing multiphase models for such valves. A sensibility study of such physical effects is performed, analyzing the possible alternatives for the phases velocities difference, the adopted mechanism for the heat transfer between the phases, the upstream kinetic energy influence, the throat effective area influencie and the calculation methodology adopted for the valve downstream pressure recover. It is concluded that from many factors that influence in the mass flow and critical condition calculation, the throat effective area is a important parameter and it is necessary a deeper investigation in how to determine such parameter.

Key-words: *choke* valve, homogeneous model, slip model, multiphase flow, petroleum production technology.

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Válvulas <i>choke</i>	11
1.1.1	Válvulas <i>choke</i> - Tipo positivo	11
1.1.2	Válvulas <i>choke</i> - Tipo ajustáveis	12
1.2	Objetivos	12
1.3	Organização do trabalho	13
2	Revisão bibliográfica	14
2.1	Escoamentos multifásicos	14
2.2	Correlações empíricas	17
2.3	Modelo de Ashford e Pierce	18
2.4	Modelo de Sachdeva <i>et al.</i>	19
2.5	Modelo de Perkins	21
2.6	Modelo de Schüller <i>et al.</i>	22
2.7	Modelo de Al-Safran e Kelkar	24
2.8	Modelo de Zhibin e Yonghui	24
3	Metodologia	26
4	Desenvolvimento do modelo proposto	27
4.1	Introdução aos modelos de escoamento multifásico	27
4.2	Homogeneização da fase líquida	30
4.3	Modelos de escorregamento	30
4.4	Considerações individuais para cada volume de controle	31
4.5	Volume de controle 1 - Coeficiente politrópico	31
4.5.1	Modelo adiabático	31
4.5.2	Modelo de equilíbrio termodinâmico	33
4.6	Volume de controle 1	35
4.6.1	Cálculo do fluxo mássico	35
4.6.2	Fluxo mássico crítico	37
4.7	Volumes de controle 2 e 3	39
4.7.1	Cálculo da pressão	39
4.7.2	Cálculo da temperatura	40
4.8	Resumo das equações do modelo	41
4.9	Comparação do modelo proposto com modelos existentes	43
4.9.1	Modelo de Sachdeva <i>et al.</i>	43
4.9.2	Modelo de Al-Safran	43
5	Resultados	45
5.1	Resultados obtidos com o modelo atual	45
5.1.1	Procedimento de cálculo	47
5.2	Estudo de sensibilidade aos efeitos físicos	51
6	Conclusões e recomendações	58
A	APÊNDICE A	61
A.1	Escoamentos compressíveis	61

A.2	Velocidade do som	62
A.2.1	Modelo adiabático	62
A.2.2	Modelo de equilíbrio homogêneo	63
A.3	Razões de estagnação	64
A.3.1	Determinação de $\frac{\rho}{\rho_0}$	65
A.3.2	Determinação de $\frac{P}{P_0}$	66
A.3.3	Determinação de $\frac{T}{T_0}$	68
B	APÊNDICE B	70
C	APÊNDICE C - Escoamento de Borda Carnot	72

1 Introdução

1.1 Válvulas *choke*

Escoamentos multifásico de fluidos compostos por misturas bifásicas, gases e líquidos, ocorrem com grande frequência na indústria do petróleo. No caso da extração do petróleo, tais misturas são transportadas do meio poroso por dutos horizontais e/ou verticais até a cabeça do poço. Da cabeça do poço a mistura é transportada até os separadores de gás-líquido, onde ocorre tratamento primário e, posteriormente, são conduzidas até o tanque de estocagem.

Tais válvulas podem ser comparadas a restrições, cujo objetivo principal é controlar e otimizar a produção (Sachdeva *et al.*, 1986), entretanto outros objetivos das válvulas de *choke* são:

- Manter uma vazão de escoamento permissível na cabeça do poço.
- Controlar a vazão de produção.
- Proteger os equipamentos de superfície.
- Manter uma contrapressão a montante da válvula para proteção do poço.

Tais válvulas são encontradas tanto em poços *on-shore* como em poços *off-shore*. Sua principal função é controlar a pressão a montante da válvula, usualmente poços de petróleo possuem pressão suficientemente elevada para elevar o petróleo a superfície, assim necessita-se de uma válvula de controle para manter o poço pressurizado e ao mesmo tempo controlar a pressão da linha de extração, outra funcionalidade dessa válvula é controlar a produção de petróleo e gás natural.

Conhecendo a instalação de tal válvula, bem como parâmetros de leituras físicas de pressão e porcentagem mássica de cada fase composta do fluido que atravessa a válvula *choke*, alguns autores propõe expressões para calcular a condição crítica e a vazão mássica, entretanto grande parte desses modelos propostos possuem parâmetros de ajustes, obtidos com base em dados experimentais. Assim, a condição crítica e a vazão mássica são termos a serem investigados, bem como os diferentes efeitos físicos que alteram o cálculo de tais parâmetros.

Válvulas *choke* podem ser consideradas como restrições na linha do escoamento, similares a placas de orifícios. As válvulas podem ser do tipo positivo, onde não é possível ajustar o diâmetro do orifício, ou ainda podem ser classificadas como do tipo ajustáveis, onde pode-se ajustar o diâmetro efetivo do orifício.

1.1.1 Válvulas *choke* - Tipo positivo

Válvulas do tipo positivo são aquelas onde o diâmetro do orifício não pode ser alterado, caracterizando assim um valor constante para o diâmetro da restrição. Possuem como vantagem

Figura 1: Válvula *choke* tipo positivo - Catálogo N-Line.

a operação e manutenção, visto que seu projeto mecânico é simplificado quando comparado com as válvulas de deslocamento positivo, entretanto, possuem como desvantagem o fato de não controlarem de forma eficiente o valor da vazão mássica, onde esta será resultado das propriedades físicas da mistura.

A Fig. 1 exemplifica um tipo de válvula do tipo positivo.

1.1.2 Válvulas *choke* - Tipo ajustáveis

As válvulas *choke* do tipo ajustáveis são aquelas onde o diâmetro da restrição é controlável e variável, garantindo assim uma maior versatilidade do controle da produção do poço. As válvulas do tipo ajustáveis possuem diversas concepções para o elemento de controle, podendo este ser do tipo agulha, multi orifícios, dentre outros.

Como já destacado a grande vantagem dessas válvulas está relacionada a possibilidade do controle do diâmetro da restrição e consequente controle do valor da vazão mássica, como desvantagem pode ser mencionado a manutenção de tais válvulas e o custo quando comparadas com as válvulas do tipo positivo, pois são válvulas projetadas para trabalharem com ambientes abrasivos e altamente corrosivos.

A Fig. 2 exemplifica um tipo de válvula do tipo ajustável.

1.2 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é revisar os modelos existentes que abordam o equacionamento para cálculo da vazão mássica através de válvulas do tipo *choke* em função de parâmetros de contorno da válvula determinados através de medições, tais como pressão e temperatura.

Serão abordados os principais textos publicados relacionados a este assunto, com uma apresentação geral sobre as considerações que cada autor tomou para dedução física dos modelos, hipóteses simplificadoras e características gerais dos modelos.

Figura 2: Válvula *choke* tipo - Catálogo N-Line.

Um dos objetivos deste trabalho é realizar um estudo de sensibilidade dos diferentes efeitos físicos que podem ser adotados durante o cálculo da condição crítica e da vazão mássica. Tal estudo será apresentado utilizando o banco de dados do trabalho de [Schüller *et al.* \(2003, 2006\)](#).

1.3 Organização do trabalho

A dissertação foi organizada em 6 seções, conforme segue:

Na Seção 1, o tema das válvulas *choke* é apresentado e as duas classificações quanto à geometria são apresentadas.

Na Seção 3, é apresentada a metodologia empregada na dissertação, envolvendo o estudo das condições à montante da válvula, bem como as devidas considerações à jusante. As ferramentas de cálculo usadas nos cálculos são apresentadas.

Na Seção 4, o modelo proposto é detalhado, partindo dos termos conhecidos para cada volume de controle e quais as incógnitas que devem ser resolvidas, as expressões em conjunto com as hipóteses físicas são apresentadas partindo da montante à jusante, já na parte final da seção é feita uma breve comparação com os modelos de [Sachdeva *et al.* \(1986\)](#) e [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#).

Na Seção 5 são apresentados os resultados obtidos com as expressões propostas, bem como o estudo de sensibilidade aos efeitos físicos que podem ser considerados no modelo.

Na Seção 6, as conclusões quanto aos diferentes efeitos físicos são apresentadas, bem como recomendações para trabalhos futuros envolvendo o tema.

2 Revisão bibliográfica

Neste tópico será feita uma breve discussão sobre a física que engloba os escoamentos multifásicos e uma discussão acerca dos modelos desenvolvidos para medição de vazão em válvulas do tipo *choke*. Desde o início dos anos 1950 pesquisadores preocupam-se em propor modelos e expressões que possam prever o valor da vazão em tais válvulas. Uma das dificuldades encontradas em tais modelos está relacionada com a obtenção de uma expressão que possa prever a fronteira entre os regimes crítico e subcrítico do escoamento, para posteriormente calcular o fluxo mássico através do *choke*.

2.1 Escoamentos multifásicos

Os escoamentos multifásicos são aqueles compostos por ao menos duas fases distintas, por exemplo gás e líquido. Os escoamentos multifásicos são conhecidos por sua complexidade matemática e física de solução de problemas envolvendo estes. Com o objetivo de auxiliar os estudos de tais modelos, diversos autores estudaram o comportamento das misturas e propuseram padrões de escoamento, para auxiliar na solução de problemas.

Basicamente os padrões de escoamento podem ser estudados considerando o escoamento na vertical ou na horizontal. [Thomas \(2001\)](#) estudou ambos os casos de escoamento. Segundo [Thomas \(2001\)](#) dois fatores influenciam no gradiente de pressão: a geometria das fases líquida e gasosa e as velocidades. Quando comparados na vertical ou na horizontal, os padrões de escoamento apresentam formas análogas, onde a principal diferença está relacionada ao fato de que os padrões na horizontal sofrem influência da força gravitacional, assim, em um primeiro momento serão descritos os comportamentos dos padrões de escoamento na vertical. Os padrões de escoamento na vertical são classificados em: bolha, golfada, transição e anular, conforme pode ser observado na Fig. 3.

Figura 3: Padrão de escoamento na vertical de [Collier \(1972\)](#).

O primeiro escoamento da esquerda para a direita é o escoamento em bolhas que é caracterizado por uma coluna completamente cheia de líquido e a fase gasosa dispersa em bolhas

no meio líquido, para esta configuração a velocidade das fases podem ser diferentes dependendo do diâmetro das bolhas. Este tipo de padrão de escoamento é encontrado normalmente próximo ao fundo do poço de extração.

Já o próximo padrão de escoamento a direita é o escoamento em golfada que é caracterizado por a fase líquida sendo a fase contínua, entretanto as bolhas formam bolsões estáveis no interior do escoamento com diâmetros próximos ao diâmetro da tubulação. Ao decorrer do escoamento ascendente a pressão diminui, ocasionando assim uma liberação maior do gás que estava associado. Próximo a parede da tubulação existe um filme de líquido cuja velocidade é menor do que as bolhas que se movem em seu interior. Este é o tipo mais comum de padrão de escoamento encontrados em poços de extração de petróleo.

Com a evolução do escoamento ascendente e conseqüentemente menor pressão no interior da tubulação, o escoamento tende a transição entre o escoamento em golfada e anular, conforme pode ser observado no terceiro padrão de escoamento da imagem da esquerda para a direita, neste caso a fase gasosa é a predominante e o líquido está disperso em gotas no interior do leito gasoso, até então atingir uma condição de totalidade de padrão de escoamento anular, como pode ser observado no quarto padrão de escoamento da esquerda para a direita, onde existe um pequeno filme de líquido na parede da tubulação e a fase predominante é a gasosa, com pequenas gotas de líquido dispersas em seu interior.

Comenta-se que os padrões de escoamento na vertical são objetos de estudos em maior parte do caso, devido ao estudo desses em *risers*, mas [Thomas \(2001\)](#) também estudou os padrões de escoamento multifásico na horizontal. Nesta configuração nota-se a influencia das forças gravitacionais nos padrões de escoamento, onde a fase de maior massa específica tende a ficar na parte mais baixa da tubulação enquanto a parte gasosa permanece na parte mais alta. Os padrões de escoamento na horizontal, apresentados na Fig. 4, são classificados em: segregado, intermitente, distribuído e anular.

Os padrões de escoamento do tipo segregado são aqueles onde pode-se observar nitidamente a separação entre as fases devido as força gravitacional, onde a fase de maior massa específica tende a estar na parte mais baixa da tubulação. Já de forma análoga ao escoamento vertical pode-se aproximar o padrão de escoamento do tipo intermitente com o padrão de escoamento tipo golfada e de transição de arranjo vertical. Também é possível comparar o padrão de escoamento distribuído com o padrão de escoamento em bolhas do tipo vertical.

Estas são as classificações dos padrões de escoamento multifásicos quando a distribuição das fases em seu interior, entretanto, os escoamentos multifásicos podem ainda ser classificados em grupos quanto às considerações feitas para as velocidades das fases e para a aproximação da troca de calor feita entre as fases.

O modelo homogêneo considera que durante o escoamento das fases, estas possuem a mesma velocidade em qualquer ponto específico do escoamento, configurando um pseudo fluido, onde as propriedades deste podem ser facilmente calculadas com base no título ou na fração de vazio, ou seja, com relação às equações de conservação, tanto massa, momento linear

Figura 4: Padrão de escoamento na horizontal Collier (1972).

e energia, tais expressões possuem formulação análoga a de fluidos monofásicos compressíveis, salvo a informação que está contida em algumas variáveis das expressões, por exemplo a massa específica da mistura, que é dependente do título e das massa específicas das fases presentes na mistura.

Modelos homogêneos possuem boa qualidade de resultados em situações em que uma fase é predominante e a outra fase é finamente dispersa, por exemplo uma mistura de ar e água, onde a fase predominante é o ar, entretanto existem gotas de água finamente disperso no escoamento. Em tal caso o valor do título é próximo ao valor unitário, o caso oposto também apresenta boa relação para obtenção de respostas, ou seja, quando o título é próximo a zero.

Duas abordagens extremas podem ser efetuadas no modelo homogêneo, a primeira delas, considera que a expansão do gás é adiabática, ou seja, não existe transferência de calor entre as fases no interior do fluido, já a abordagem oposta considera que existe troca de calor instantânea entre as fases de tal forma que em qualquer seção ambas as fases encontram-se em estado de equilíbrio termodinâmico, ou seja, a temperatura das fases é sempre a mesma em qualquer ponto do escoamento.

O modelo com escorregamento ou modelo *slip* considera que as velocidades das fases podem possuir valores diferentes em uma dada seção do escoamento.

Modelos que abordam o fator de escorregamento entre as fases possuem melhor asser-

Autores	Ano Publicação
Correlações Empíricas	1960-70
Ashford e Pierce	1975
Sachdeva	1986
Perkins	1993
Schuller	2003
Al-Safran e Kelkar	2009
Zhibin et al.	2011

Tabela 1: Cronologia em pesquisa de escoamentos em válvulas *choke*.

tividade de resultados quando comparados com modelos homogêneos, pois os valores preditos por tais modelos, geralmente, são superiores se comparados com os preditos quando aplicado a teoria dos modelos homogêneos, tal consideração poderá ser observada nos próximos capítulos.

Semelhante ao modelo homogêneo, duas abordagens extremas podem ser efetuadas, a primeira delas, considera que a expansão do gás é adiabática, entretanto, pode-se considerar que existe troca de calor entre as fases de tal forma que em qualquer secção ambas as fases encontram-se em estado de equilíbrio termodinâmico.

Os escoamentos multifásicos têm sido objeto de estudo de pesquisadores há décadas, especialmente para as válvulas *choke*. Pesquisadores pioneiros propunham expressões empíricas, baseadas curvas de ajustes obtidas através de banco de dados, posteriormente pesquisadores propuseram expressões considerando o modelo homogêneo e os mais recentes propõe expressões considerando o modelo *slip*.

Os modelos com maior uso no mercado serão revisados nesse trabalho. A orientação das revisões estará em ordem cronológica, para comparação efetiva do avanço dos modelos com o tempo, conforme apresentado na TAB 1.

2.2 Correlações empíricas

Os primeiros estudos propuseram modelos com correlações empíricas, obtidas através de curvas de ajustes com base em bancos de dados, que eram funções da pressão P a montante da válvula (*psig*), da razão gás-líquido R na condição padrão ($Mscf/stb$), do diâmetro do *choke* d ou abertura da válvula (em $1/64in$) e os parâmetros de ajuste α , β e δ . Sendo assim a vazão de produção Q_{IO} é dada por:

$$Q_{IO} = \frac{P d^{\delta}}{\alpha R^{\beta}} \quad (1)$$

Tal expressão tem sua empregabilidade restrita aos escoamentos em condição crítica, os coeficientes de ajustes foram propostos por diversos autores, entre eles Gilbert (1954), Ros (1961), Baxendell (1957) e Achong (1961), e os valores dos coeficientes são apresentados na TAB 2.

Correlação	α	β	δ
Gilbert	10,00	0,546	1,89
Ros	17,40	0,500	2,00
Baxendell	9,56	0,546	1,93
Achong	3,82	0,650	1,88

Tabela 2: Coeficientes das correlações empíricas segundo diferentes autores.

É importante observar que tais curvas são obtidas através de parâmetros de ajustes, ou seja, possuem relativa precisão somente para os dados que compõe a amostra. Com o objetivo de tornar as expressões mais genéricas, autores desenvolveram expressões baseadas nas equações da conservação da massa, momento linear e energia para calcular a condição crítica e a vazão mássica.

2.3 Modelo de Ashford e Pierce

O modelo proposto por [Ashford e Pierce \(1975\)](#) tinha como objetivo determinar o comportamento do escoamento na restrição tanto para as condições críticas e subcríticas. A metodologia de cálculo da queda de pressão no *choke* e para cálculo da vazão mássica considera as seguintes condições:

1. O gás expande de forma adiabática escoando simultaneamente com óleo e água através de um orifício.
2. O gás livre e o gás dissolvido escoam simultaneamente com óleo e líquido, modelo homogêneo;
3. Óleo, água, gás e demais propriedades do fluído são considerados.

As motivações para o desenvolvimento do modelo vieram do fato de que os modelos existentes na época não refletiam de forma adequada a natureza dos escoamentos monofásicos compressíveis, em particular, o comportamento dos fluidos na restrição.

O modelo foi desenvolvido em parceria com a válvula fornecida pela Otis, modelo J22J037. O procedimento de testes consistiu em substituir a válvula existente (Otis Modelo F) por uma válvula que permitisse a modificação do diâmetro do *choke*.

Ao todo foram testados três diâmetros distintos para a restrição, 14/64-, 16/64- e 20/64-. Observou-se que para os diâmetros eleitos e para sua configuração e arranjo de testes não seria possível medir a pressão no orifício, não conseguindo assim captar os efeitos da vena-contracta.

Os autores concluem seu trabalho admitindo que a relação entre o orifício e o fluído é muito sensível e que pequenas modificações no comportamento mecânico da válvula, devido a operações, modificam de forma não muito significativa o valor numérico da vazão, mas tem um impacto considerável na perda de carga da válvula.

A vazão mássica através do *choke* é dada por:

$$W = C_d A_2 (2P_1 \rho_l)^{\frac{1}{2}} \frac{\left[\frac{nR(p,T)}{n-1} \left(1 - y^{\frac{n-1}{n}} \right) + (1 - y) \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + R(p,T) y^{\frac{-1}{n}}} \quad (2)$$

onde,

$$R(p, T) = \frac{\nu_1 - \nu_l}{\nu_l} \quad (3)$$

Já a fronteira entre o escoamento crítico e subcrítico pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$y_c = \left[\frac{\frac{R(p,T)}{n} \left[\frac{R(p,T)n}{n-1} \left(1 - y_c^{\frac{n-1}{n}} \right) + (1 - y_c) \right]}{0.5 \left[1 + R(p,T) y_c^{\frac{-1}{n}} \right]} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (4)$$

O modelo é considerado homogêneo e a energia cinética a montante da válvula não é considerada no desenvolvimento das expressões.

Com base em seus estudos, os autores concluem que para válvulas de diâmetros de 14/64 in é recomendado a utilização de um coeficiente de descarga de 1,2 e para válvulas maiores, um valor de 0,95 poderia ser usado.

2.4 Modelo de Sachdeva *et al.*

[Sachdeva *et al.* \(1986\)](#) abordaram em seu estudo misturas de ar com água e ar com querosene escoando através de cinco diâmetros diferentes de válvulas *choke*. Os autores consideraram que o escoamento pode ser crítico e sub-crítico e propuseram uma expressão para determinar a região da transição entre essas duas condições. Comenta-se sobre algumas referências existentes na época de seu estudo e que alguns destes poderiam ser utilizados para escoamento subcrítico, como por exemplo o modelo proposto por [Ashford e Pierce \(1975\)](#), entretanto comenta-se que para tal modelo, é recomendado o uso de um coeficiente de descarga que excede o valor unitário.

A bancada experimental foi projetada de tal forma que a posição do *choke* permaneça na horizontal de forma a eliminar os efeitos das perturbações do fluxo causados por curvas a montante. Todos os parâmetros físicos foram medidos durante o experimento, por exemplo, a temperatura foi medida diretamente através de termômetros, as vazões de gás e líquido foram lidas instantaneamente através de placas de orifício e um rotâmetro. Manômetros calibrados ajudaram a verificar as leituras obtidas pelos instrumentos, a pressão a montante foi obtida através de uma simples tomada de pressão na tubulação, já a pressão a jusante foi obtida através de sete tomadas de pressão instaladas a jusante da válvula *choke* para garantir que a recuperação da pressão a jusante seja total.

O experimento proposto consistiu em estabilizar inicialmente a vazão mássica no sistema, seu órgão de controle na ocasião era uma válvula localizada a jusante do *choke*, inicialmente tal válvula encontrava-se em uma condição de abertura total. Os autores observaram que inicialmente pequenas variações na posição da válvula, ocasionavam incrementos de pressão a jusante do *choke*, entretanto o valor da vazão permanecia constante, assim deduziam que o escoamento encontrava-se em uma condição crítica. O processo de fechamento da válvula continuava até que a vazão do escoamento atingia a condição subcrítica.

Os estudos foram realizados em uma bancada de testes experimentais, onde as seguintes condições foram testadas:

1. Diâmetros do *choke*: entre 6,35 e 12,7 mm.
2. Fluidos de teste: Ar-querosene / Ar-água.
3. Máxima vazão de líquido: $213 \text{ m}^3/D$.
4. Máxima vazão de ar: $161,2 \text{ m}^3/h$.
5. Pressão máxima a montante: 700 kPa .
6. Número de pontos em condição crítica: 223.
7. Número de pontos em condição subcrítica: 220.
8. Número de pontos em transição: 110.

Os autores consideraram o escoamento é unidimensional, sem escorregamento entre as fases e título constante durante a evolução, ou seja, as condições básicas do modelo homogêneo.

No desenvolvimento das expressões do modelo, foram trabalhadas as expressões de conservação do momento linear e conservação da energia, com o objetivo de obter uma expressão capaz de calcular a relação de pressões entre jusante e montante da válvula de *choke*. Para a expressão da conservação do momento linear os autores consideraram que existe troca térmica entre as fases líquidas e gás, segundo um expoente politrópico definido por [Ros \(1961\)](#), entretanto na expressão da conservação da energia, foi considerado que a expansão do gás é isentrópica e a partir dessas hipóteses tornou-se possível determinar uma expressão que define a razão de pressões a montante e na restrição. Assim, a consideração de diferentes expoentes para descrever a mesma evolução constitui uma incoerência no modelo.

Da equação de conservação do momento foi determinada a razão de pressões na condição crítica, que deve ser comparada com a razão de pressões para determinar se o escoamento está na condição crítica. Para a condição crítica é possível determinar uma vazão mássica teórica.

Para determinar a fronteira da condição crítica e subcrítica torna-se necessário o cálculo da pressão na restrição, os autores adotam uma expressão para o cálculo deste dada por [Perry \(1950\)](#), que é deduzida para escoamento monofásicos e incompressíveis, onde esta é unicamente

relacionada com as pressões a montante e jusante da restrição e com a relação dos diâmetros (ver Eq. 67 na Seção 4.7.1).

As expressões utilizadas para o cálculo da condição crítica e da vazão mássica serão apresentadas da Seção 4.9.1.

Com base nos experimentos foi definido um coeficiente de descarga da válvula, ajustado para correlacionar os dados experimentais, com um valor proposto de 0,75 quando o *choke* está instalado em uma configuração onde existam perturbações a montante da válvula ou 0,85 quando instalado em condições que não haja perturbações a montante.

A grande variação do coeficiente de descarga sugere que efeitos físicos não foram considerados, fazendo com que a solução precise de parâmetro de ajuste dos mesmos dados experimentais. Nota-se que alguns autores aproveitam o modelo proposto e alteram o valor do coeficiente de descarga para que os resultados se ajustem a sua amostra de dados experimentais. É o caso do artigo proposto por [Guo et al. \(2007\)](#) onde este propõe valores para coeficiente de descarga das válvulas com valores superiores a 1. Precisamente a conclusão do trabalho deste é que para uma determinada condição da medição de vazão de líquido em poços de gás natural é que o valor do coeficiente de descarga pode atingir 1,53.

2.5 Modelo de Perkins

[Perkins \(1993\)](#) propôs um modelo que trabalha com as equações da conservação, similar ao proposto por [Sachdeva et al. \(1986\)](#), entretanto o escoamento é trifásico, composto por óleo, água e gás. O escoamento foi abordado como unidimensional, sendo que em qualquer ponto todas as fases possuem a mesma temperatura. O autor trabalhou com as expressões da conservação da energia para cálculo da condição crítica, e para o cálculo do valor da vazão mássica através do *choke*.

O escoamento foi considerado como adiabático, sem perdas por atrito, a expansão do gás é regida por um processo politrópico, a fase líquida é incompressível e a velocidade das fases é a mesma em qualquer ponto do escoamento. Sendo assim, não há escorregamento entre as fases.

A vazão mássica através do *choke* é dada por:

$$W = C_d A_2 \left\{ 2P_1 \rho_2^2 \left[\frac{\lambda \left(1 - y^{\frac{n-1}{n}} + \alpha_1 (1 - y) \right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left(\frac{x_g + \alpha_1}{x_g y^{\frac{-1}{n}} + \alpha_1} \right)^2 \right] (x_g y^{frac{1}{n}} + \alpha_1)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

onde,

$$\lambda = x_g + \left[(x_g c_{vg} + x_o c_{vo} + x_w c_{vw}) \frac{M}{zR} \right] \quad (6)$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\nu} \right) \left(\frac{x_o}{\rho_o} + \frac{x_w}{\rho_w} \right) \quad (7)$$

Para o cálculo da pressão no *choke*, o autor também trabalhou com a expressão proposta por [Perry \(1950\)](#).

O autor propôs um valor para o coeficiente de descarga da válvula com a finalidade de corrigir as simplificações consideradas na dedução das expressões. O coeficiente de descarga sugerido é de $C_D = 0,826$.

2.6 Modelo de Schüller *et al*

[Schüller *et al.* \(2003, 2006\)](#) compararam os valores de vazão preditos pelos modelos teóricos apresentados anteriormente, com o modelo proposto por [Selmer-Olsen \(1995\)](#), também conhecido como *Hydro Model*, onde a principal contribuição foi agregar uma nova correlação para o cálculo da diferença de velocidade entre as fases, comprovando que este apresenta um fundamental papel para um aprimoramento da eficácia do cálculo da vazão.

Os autores consideraram a existência de dois volumes de controle, onde o volume de controle 1 compreende a região do orifício do *choke* e o segundo volume de controle localizava-se a jusante, segundo mostrado na Fig. 5.

Figura 5: Esquema para o *Hydro model* (reproduzido de [Schüller *et al.* \(2003\)](#)).

Para tal análise o escoamento é considerado em regime permanente e despreza-se a aceleração da gravidade. As equações de conservação (massa, momento e energia) são integradas para a mistura no decorrer de cada volume de controle no sentido axial.

As seguintes hipóteses foram consideradas para o escoamento com um todo:

- O escorregamento é considerado entre as posições 1 e 3.
- O título é constante (escoamento do tipo *frozen*) para toda região à montante da posição 2.

- Sendo o escoamento adiabático e sem variação de cota, resulta que a entalpia de estagnação da mistura é constante.

As seguintes hipóteses foram utilizadas para o escoamento a montante da posição 'V':

- Não há perda de pressão de estagnação, ou neste caso em que a cota é constante, não há perda de carga.
- Não há perda de entalpia da mistura.

As seguintes hipóteses foram utilizadas para o escoamento que ocorre no volume de controle entre 'V' e 2:

- Consideram-se perdas de pressão de estagnação, devido principalmente ao atrito com a parede e dissipação interna.
- O escoamento é adiabático.
- Assume-se que a temperatura das fases varia na posição, no entanto, para uma dada posição, todas as fases possuem a mesma temperatura.

As seguintes hipóteses são feitas para o escoamento que ocorre no volume de controle entre '2' e '3':

- Consideram-se perdas de pressão de estagnação, devido principalmente à separação do escoamento e ondas de choque.
- Assume-se que a temperatura das fases varia na posição, no entanto, para uma dada posição, todas as fases possuem a mesma temperatura.
- Considera-se escoamento homogêneo na posição 3; no entanto, o escorregamento é considerado entre as posições 1 e 3.
- Mudanças de fase ocorrem no segundo volume de controle, sendo assumido equilíbrio térmico na posição 3.

Os autores calculam a pressão na restrição adotando um escoamento de Borda-Carnot a jusante da válvula, propondo ainda que o coeficiente de contração (C_c) pode ser obtido através de ensaios de válvula com água.

Não são apresentadas as deduções das expressões utilizadas no modelo.

2.7 Modelo de Al-Safran e Kelkar

O modelo proposto por Al-Safran e Kelkar (2009) foi baseado nos modelos propostos anteriormente por Sachdeva *et al.* (1986) e Perkins (1993), com a agregação de um modelo de escorregamento entre as fases nas expressões de conservação.

O modelo considera o escoamento bifásico e unidimensional, com as mesmas simplificações impostas anteriormente por Sachdeva, com a diferença que agora a correlação do escorregamento é introduzida, onde esta depende, do tipo de escoamento que ocorre (crítico ou subcrítico), da região de validade da correlação com relação ao título e da razão de viscosidade dos fluidos. O modelo proposto engloba tanto o estudo da determinação numérica da região de transição do regime de escoamento entre crítico e subcrítico, bem como propõe uma expressão para cálculo da vazão mássica da mistura que atravessa a válvula.

É importante ressaltar que na análise do modelo, a energia cinética a montante da válvula foi negligenciada durante o desenvolvimento das expressões. Os autores acreditavam que o valor numérico do coeficiente que relaciona os diâmetros do orifício com o diâmetro da tubulação a montante da válvula, possui valor numérico muito baixo, podendo assim ser negligenciado.

De forma similar ao adotado pelos autores cujos trabalhos foram utilizados como referência, os autores adotaram a mesma expressão para o cálculo da pressão na restrição.

As expressões utilizadas para o cálculo da condição crítica e da vazão mássica serão apresentadas da Seção 4.9.2.

O coeficiente de escorregamento por Schüller *et al.* (2006) foi utilizado para escoamento crítico, enquanto o coeficiente proposto por Grolmes e Leung (1985), com as constantes apresentadas por Simpson *et al.* (1983), foi utilizado para escoamento subcrítico. As expressões para cálculo do escorregamento estão apresentadas na Seção 4.3.

É recomendada a utilização de um coeficiente de descarga C_D com valores entre 0,7 e 0,75.

Na conclusão é citado que o modelo de Sachdeva possui inconsistências no âmbito da análise da expressão da conservação de energia, o que ocasiona o surgimento dos expoentes isentrópicos γ e politrópicos n nas expressões propostas; tal inconsistência foi corrigida utilizando um único coeficiente politrópico.

2.8 Modelo de Zhibin e Yonghui

O modelo proposto por W. Zhibin e Yonghui (2011) é o modelo mais recente disponível no banco de dados das referências de modelos que englobam o estudo do escoamento em este tipo de válvula. Na parte inicial do artigo, é comentado sobre as referências de modelos, as mesmas citadas nesse trabalho anteriormente, de maneira macro, propondo uma divisão para os modelos que consideram o escorregamento entre as fases e aqueles que não o consideram. Os autores propuseram um modelo diferente dos demais autores, com menos parâmetros de ajustes para correção do valor numérico da vazão do escoamento.

As bases consideradas para o modelo estão descritas nos pontos abaixo:

- Escoamento unidimensional;
- Fase líquida incompressível;
- Evolução politrópica do gás;
- Escoamento adiabático e sem atrito;
- Inexistência de mudança de fase;

Para o desenvolvimento das expressões de cálculo da vazão mássica, foi considerada a equação de conservação do momento linear, similar ao proposto por os demais autores, a diferença está na introdução de uma expressão para cálculo do diâmetro da vena contracta, entretanto observa-se que a expressão proposta para cálculo de tal parâmetro está relacionada somente com a razão de diâmetros entre a restrição e montante, dada por:

$$C_c = \frac{1}{0,639(1 - \sigma)^{0,5} + 1} \quad (8)$$

Uma observação importante referente ao trabalho, da-se ao fato do cálculo da pressão na restrição, onde diferentemente dos demais autores que propuseram uma simples expressão para o cálculo dessa pressão, os autores calcularam esta com base nas informações físicas do escoamento, através da expressão de Borda-Carnot, entretanto não utiliza a equação da conservação da energia na expansão, admitindo assim que o escoamento é isentrópico na região da expansão, o que pode ser apontado como uma inconsistência.

O modelo propõe uma metodologia de cálculo com base em uma integração numérica para cálculo da condição crítica devido a considerar o escorregamento variável com a posição, assim como para o cálculo da vazão mássica, e em suas conclusões define que o modelo proposto é o que possui maior precisão quando comparado com outros modelos de válvulas do tipo *choke*.

3 Metodologia

A primeira etapa consistiu no desenvolvimento de expressões que descrevam o comportamento de escoamentos multifásicos em válvulas *choke* em uma primeira abordagem considera-se o escoamento em um bocal convergente, com a hipótese de que o escoamento é unidimensional e isentrópico.

Em uma segunda etapa, para a região a jusante da garganta, foram desenvolvidas expressões considerando o escoamento de Borda-Carnot e a equação da conservação da energia.

Para efeito do estudo de sensibilidade foram utilizados os dados experimentais obtidos por [Schüller et al. \(2003, 2006\)](#); tais dados foram utilizados como entrada para um *software* desenvolvido em MATLAB, que tem como objetivo principal calcular e determinar a diferença existente entre a vazão calculada através dos modelos com a vazão efetiva medida em campo de extração.

A metodologia de cálculo empregada para o modelo proposto é apresentada na Seção [5.1.1](#), pois na sequência é apresentado o desenvolvimento do cálculo das expressões que são utilizadas para cálculo da vazão mássica de uma válvula do tipo *choke*.

Foi estudado em particular, para o caso do modelo homogêneo, as diferenças que podem existir ao considerar o escoamento adiabático ou em equilíbrio termodinâmico, onde foram deduzidas expressões para determinação das razões de estagnação. Tais considerações estão apresentadas no Apêndice [A](#).

4 Desenvolvimento do modelo proposto

O modelo proposto neste trabalho divide a válvula *Choke* em três volumes de controle, conforme ilustrado na Fig. 15.

Figura 6: Volumes controle - Válvula *choke*.

Na sequência serão apresentados conceitos básicos da física que engloba tais escoamentos e posteriormente o desenvolvimento das expressões para cálculo da vazão mássica e determinação da fronteira do escoamento crítico independentes de parâmetros de ajustes.

Os seguintes parâmetros são fornecidos como dados de entrada:

- $P_1; P_3; T_1; x; x_o; x_w;$

Os seguintes parâmetros são calculados:

- $P_2; P_B; T_2; T_B; T_3; y_c; G_c; G; W;$

Uma vez que o escoamento é trifásico, composto por metano, água e óleo, será apresentada uma introdução com as expressões para tratar cada uma das fases distintas e posteriormente o procedimento de homogeneização da parte líquida, afim de simplificar o procedimento de cálculo da vazão mássica.

Na sequência são apresentadas expressões comuns aos três volumes de controle, como por exemplo as expressões para cálculo da homogeneização da fase líquida e procedimento para cálculo do coeficiente de escorregamento, para então prosseguir com uma abordagem individual de cada volume de controle.

4.1 Introdução aos modelos de escoamento multifásico

Na revisão bibliográfica foram apresentados conceitos físicos dos escoamentos multifásico, principalmente referentes aos seus comportamentos, chamados de padrões de escoamentos, entretanto é importante introdução básica, dos termos que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Na análise dos escoamentos multifásicos, as expressões da conservação são amplamente utilizadas e com o intuito de simplificar o sistema de equações, sempre será considerado que o escoamento é unidimensional, ou seja, as variações das propriedades é nula no sentido perpendicular do escoamento.

Considerando as equações da conservação (massa e momento linear) e ainda considerando o escoamento unidimensional, composto por três fases (óleo, gás e água) escoando em regime permanente e separadas, torna-se possível obter equações de conservação para a mistura das fases, conforme serão abordadas em maior detalhe em tópico subsequente.

Uma vez definido a abordagem macro do escoamento como um todo, é possível ainda tratar o escoamento de cada fase em individual, onde, alguns parâmetros individuais dos componentes da mistura são de importância e relevância seu conhecimento, como por exemplo, as velocidades superficiais, as vazões volumétricas, as vazões mássicas e os títulos mássicos.

Admitindo um escoamento composto de ar, água e óleo, para efeitos de exemplificação, seguem expressões que podem ser utilizadas para cálculo dos parâmetros relacionados anteriormente para sua respectiva fase.

A velocidade superficial do gás com relação à velocidade do gás e à fração de vazio é expressa por:

$$j_g = u_g \alpha \quad (9)$$

A velocidade superficial da água com relação à velocidade da água e à fração de vazio da água é expressa por:

$$j_w = u_w \alpha_w \quad (10)$$

A velocidade superficial do óleo com relação à velocidade do óleo e à fração de vazio do óleo é expressa por:

$$j_o = u_o (1 - \alpha - \alpha_w) \quad (11)$$

A vazão volumétrica do gás com relação à velocidade do gás, fração volumétrica e área total de passagem é expressa por:

$$Q_g = u_g \alpha A = j_g A \quad (12)$$

A vazão volumétrica da água com relação à velocidade da água, fração volumétrica da água e área total de passagem é expressa por:

$$Q_w = u_w \alpha_w A = j_w A \quad (13)$$

A vazão volumétrica do óleo com relação à velocidade do óleo, fração volumétrica do óleo e área total de passagem é expressa por:

$$Q_o = u_o (1 - \alpha - \alpha_w) A = j_o A \quad (14)$$

Como para escoamentos multifásicos, é de costume trabalhar com a vazão mássica e não volumétrica, visto que ao menos uma das fases é compressível, a vazão mássica de gás com relação à massa específica do gás, velocidade do gás, fração de vazio e área de passagem é expressa por:

$$W_g = \rho_g u_g \alpha A = \rho_g j_g A = \rho_g Q_g \quad (15)$$

A vazão mássica de água com relação à massa específica da água, velocidade da água, fração de vazio da água e área de passagem é expressa por:

$$W_w = \rho_w u_w \alpha_w A = \rho_w j_w A = \rho_w Q_w \quad (16)$$

A vazão mássica de óleo com relação à massa específica do óleo, velocidade do óleo, fração de vazio do óleo e área de passagem é expressa por:

$$W_o = \rho_o u_o (1 - \alpha - \alpha_w) A = \rho_o j_o A = \rho_o Q_o \quad (17)$$

Com base nos parâmetros anteriormente definidos, torna-se possível definir um parâmetro de extrema importância que será empregado no decorrer da grande maioria das expressões apresentadas na sequencia, o título (x) é definido como:

$$x = \frac{W_g}{W} = \frac{W_g}{W_g + W_w + W_o} \quad (18)$$

É interessante observar que através das equações apresentadas anteriormente, pode-se concluir que o título e a fração de vazio podem ser relacionadas diretamente através das seguintes expressões:

$$\frac{x_o}{x} = \frac{1 - x - x_w}{x} = \frac{u_o \rho_o}{u_g \rho_g} \frac{1 - \alpha - \alpha_w}{\alpha} \quad (19)$$

ou ainda,

$$\frac{x_w}{x} = \frac{u_w \rho_w}{u_g \rho_g} \frac{\alpha_w}{\alpha} \quad (20)$$

forma final da relação entre fração de vazio e título é expressa por:

$$x = \frac{\rho_g u_g \alpha}{\rho_g u_g \alpha + \rho_o u_o (1 - \alpha - \alpha_w) + \rho_w u_w \alpha_w} \quad (21)$$

Tais parâmetros descritos aqui são importante no estudo do padrão de escoamento existente para os escoamentos multifásicos, é importante ressaltar que os tipos diferentes de padrões de escoamento não alteram a estrutura do modelamento matemático do modelo.

4.2 Homogeneização da fase líquida

A grande maioria dos casos de escoamentos multifásicos que englobam as válvulas do tipo *choke*, são casos que envolvem não unicamente a mistura de água e gás escoando em conjunto em uma tubulação com uma válvula de controle, mas sim a mistura de n componentes escoando em conjunto.

Para o caso do estudo de caso, será feita uma análise considerando um primeiro cenário, onde será considerado apenas o escoamento de gás e água e em segundo lugar, pode-se considerar que o escoamento será composto de uma mistura de três componentes, normalmente, gás, óleo e água.

Para esses casos, onde tem-se o escoamento de fases líquidas distintas, a massa específica do líquido ρ_l é dada por:

$$\rho_l = \frac{\rho_o(1 - \alpha - \alpha_w) + \rho_w \alpha_w}{1 - \alpha} \quad (22)$$

De forma similar ao adotado para a massa específica da fase líquida, torna-se necessário o cálculo do calor específico do líquido C_l que pode ser determinado por:

$$C_l = \frac{x_o C_{vo} + x_w C_{vw}}{1 - x} \quad (23)$$

Diante da simplificação explicada, pode-se determinar as expressões da continuidade somente em termos do líquido homogeneizado com propriedades relativas, ressalta-se também que a expressão final do balanço de momento já considerando a explicação anterior será usada desta parte do trabalho em diante.

4.3 Modelos de escorregamento

Conforme explicado anteriormente, as expressões para cálculo do coeficiente de escorregamento são comuns aos três volumes de controle abordados neste trabalho, assim, pode-se dividir o cálculo dos coeficientes de escorregamento para duas condições, para a condição crítica é considerada a expressão proposta por [Schüller et al. \(2003, 2006\)](#) dada por:

$$S = \sqrt{1 + x \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right)} [1 + 0.6 \exp(-5.0 x)] \quad (24)$$

Já para a condição subcrítica considera-se a aproximação proposta por [Grolmes e Leung \(1985\)](#) com os valores das constantes propostos por [Simpson et al. \(1983\)](#) dado por:

$$S = a_0 \left(\frac{1 - x}{x} \right)^{(a_1 - 1)} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{(a_2 + 1)} \left(\frac{\mu_l}{\mu_g} \right)^{a_3} \quad (25)$$

onde $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -0.83$ e $a_3 = 0$.

Embora exista uma influencia do fator de escorregamento através de ρ_g , o modelo considera um escorregamento constante obtido através da média do escorregamento nas seções, entretanto para cada trecho o escorregamento é diferente.

Uma vez definidas todas as expressões comuns aos volumes de controle, torna-se possível detalhar as considerações individuais para cada volume de controle, conforme segue.

4.4 Considerações individuais para cada volume de controle

Para o volume de controle 1, que trata da parte da contração do escoamento, a abordagem considera que:

- Escoamento unidimensional;
- Escoamento isentrópico da mistura;
- Escoamento barotrópico.

Já para os volumes de controle 2 e 3, serão consideradas as seguintes premissas:

- Escoamento de Borda-Carnot.

Determinadas as condições de cada volume de controle, serão apresentadas na sequência o equacionamento de cada um dos volumes de controle, começando a partir do volume de controle 1, onde será explicado em uma primeira etapa o processo de obtenção do coeficiente politrópico para ambos os casos, tanto escoamento adiabático, como escoamento em equilíbrio termodinâmico.

4.5 Volume de controle 1 - Coeficiente politrópico

A determinação do expoente da politrópica da expansão do gás é atrelado à consideração feita com relação aos conceitos de transferência de calor considerada entre as fases, em um primeiro momento serão ilustradas as equações para cálculo do expoente da politrópica considerando o escoamento do gás adiabático e em um segundo momento serão ilustradas as equações para cálculo do modelo de equilíbrio termodinâmico.

4.5.1 Modelo adiabático

Considerando uma condição de uma mistura multifásica atravessando uma restrição em uma condição próxima a condição crítica e com a fase gasosa predominante, é razoável definir que a transferência de calor com o líquido pode ser desprezível para essa região de contração, admitindo assim uma expansão adiabática do gás e fase líquida com temperatura constante.

Assim, o balanço da entropia da mistura $\hat{s}$ é expresso por:

$$d\hat{s} = x d\hat{s}_g + (1 - x) d\hat{s}_l \quad (26)$$

onde $\hat{s}_g$ é a entropia do gás e $\hat{s}_l$ é a entropia da fase líquida.

Tratando as fases de forma separada a variação da entropia do gás é determinada por:

$$d\hat{s}_g = C_{pg} \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (27)$$

Já a variação de entropia da fase líquida é dada por:

$$d\hat{s}_l = C_l \frac{dT_l}{T_l} - \frac{1}{\rho_l T_l} dP \quad (28)$$

onde C_l é o calor específico da fase líquida.

Para o caso particular do modelo adiabático os termos que compõe a variação da entropia da fase líquida podem ser desprezados, assim a variação da entropia da mistura, será única e exclusivamente dependente da variação da entropia da fase gasosa, assim a Eq. (26) para o caso particular do modelo adiabático pode ser reescrita como:

$$d\hat{s} = x C_{pg} \frac{dT}{T} - x R \frac{dP}{P} \quad (29)$$

Admitindo que o escoamento da mistura é isentrópico, ou seja, para $d\hat{s} = 0$ tem-se que:

$$\frac{dP}{P} = \frac{C_{pg}}{R} \frac{dT}{T} \quad (30)$$

Integrando a expressão anterior, resulta em:

$$\ln P = m_a \ln T + \ln C \quad (31)$$

onde

$$m_a = \frac{1}{x R} (x C_{pg}) = \frac{C_{pg}}{R} \quad (32)$$

Voltando na Eq. (31):

$$P = C T^{m_a} \quad (33)$$

Isolando o termo T, obtém-se que:

$$T = \frac{P^{\frac{1}{m_a}}}{C^{\frac{1}{m_a}}} \quad (34)$$

Mas, da expressão dos gases ideais, dada por:

$$P = \rho_g R T \quad (35)$$

A Eq. (34) pode ser reescrita como:

$$P^{1-\frac{1}{m_a}} \rho_g^{-1} = \frac{R}{C^{\frac{1}{m_a}}} \quad (36)$$

Rearranjando, obtém-se que:

$$P \rho_g^{-\frac{1}{1-\frac{1}{m_a}}} = \left(\frac{R}{C^{\frac{1}{m_a}}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{m_a}}} \quad (37)$$

Sendo assim o expoente n da politrópica, para o caso adiabático, é dado por:

$$n = \frac{1}{1 - \frac{1}{m_a}} = \frac{m_a}{m_a - 1} \quad (38)$$

Substituindo o valor de m_a na expressão e rearranjando os termos, resulta em:

$$n = \gamma \quad (39)$$

Conforme já conhecido para o caso particular de escoamentos monofásicos quando a expansão do gás é isentrópica, o coeficiente da politrópica é dado por γ .

4.5.2 Modelo de equilíbrio termodinâmico

O modelo de equilíbrio termodinâmico possui como base fundamental o princípio de que em qualquer ponto do escoamento as fases encontram-se em estado de equilíbrio termodinâmico, ou seja, possuem mesmo valor de temperatura e pressão.

O procedimento para determinação do expoente da politrópica para o modelo de equilíbrio termodinâmico, segue procedimento similar ao adotado anteriormente para o modelo adiabático, entretanto a única diferença é que a variação da entropia da fase líquida não pode ser desprezada, sendo assim a Eq. (28) não será mais nula, apenas seu último termo será desprezado, sendo assim a expressão da variação da entropia para o caso do modelo de equilíbrio termodinâmico pode ser expressa por:

$$d\hat{s} = [x C_{pg} + (1 - x) C_l] \frac{dT}{T} - x R \frac{dP}{P} \quad (40)$$

Admitindo que o escoamento da mistura é isentrópico (ainda que as entropias das fases individuais variam), ou seja, para $d\hat{s} = 0$ tem-se que:

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{x R} [x C_{pg} + (1 - x) C_l] \frac{dT}{T} \quad (41)$$

Integrando a expressão anterior, resulta em:

$$\ln P = m_e \ln T + \ln C \quad (42)$$

onde

$$m_e = x C_{pg} + (1 - x) C_l \quad (43)$$

O procedimento para determinação do coeficiente da politrópica é o mesmo que o determinado anteriormente para o caso específico de modelo adiabático, assim para o caso do modelo de equilíbrio a Eq. (38) pode ser reescrita como:

$$n = \frac{1}{1 - \frac{1}{m_e}} = \frac{m_e}{m_e - 1} \quad (44)$$

Substituindo o valor de m_e na expressão e rearranjando os termos, resulta em:

$$n = 1 + \frac{x (C_{pg} - C_{vg})}{x C_{vg} + (1 - x) C_l} \quad (45)$$

onde C_{vg} é o calor específico a volume constante do gás.

Para o modelo de equilíbrio termodinâmico, o expoente da politrópica coincide com o utilizado por [Ros \(1961\)](#) e [Sachdeva *et al.* \(1986\)](#).

4.6 Volume de controle 1

4.6.1 Cálculo do fluxo mássico

Uma vez definido os possíveis valores de expoentes politrópicos, pode-se determinar o fluxo mássico que atravessa o *choke*, através da equação da conservação do momento linear, considerando um volume de controle de espessura diferencial como o da Fig. 7.

Figura 7: Volumes controle unidimensional, infinitesimal e com área variável.

A expressão da conservação do momento linear para regime permanente, negligenciando forças de volume e de atrito é dada por:

$$\frac{W^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{A} \left(x + \frac{1-x}{S} \right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} S \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial s} \quad (46)$$

onde A é a área de passagem do escoamento, P é a pressão, S é a relação de escorregamento, s é a posição axial, W é a vazão mássica, x é o título e ρ_g e ρ_l são respectivamente as massa específicas do gás e do líquido. Definindo uma massa específica efetiva ρ_e como:

$$\frac{1}{\rho_e} = \left(x + \frac{1-x}{S} \right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} S \right) \quad (47)$$

A dedução detalhada da Eq. (129) e da Eq.(47) estão apresentadas no Apêndice B.

Retornando a Eq. (129), esta pode ser reescrita como:

$$\frac{W^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho_e A} \right) = -\frac{\partial P}{\partial s} \quad (48)$$

Definindo uma velocidade efetiva u_e como $G = \frac{W}{A} = \rho_e u_e$, onde G é o fluxo mássico, resulta em:

$$-\frac{dP}{\rho_e} = u_e du_e \quad (49)$$

Para escoamento barotrópico, ou seja $\rho_e = \rho_e(P)$, Eq. (49) pode ser integrada entre a localização 1 (montante) e 2 (garganta) como:

$$-\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho_e(P)} = \frac{1}{2} \frac{G_2^2}{\rho_{e2}^2} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left(\frac{\rho_{e2}}{\rho_{e1}} \right)^2 \right] \quad (50)$$

Considerando uma seção transversal circular e definindo $\beta = \frac{D_2}{D_1}$, resulta em:

$$G_2^2 = \frac{-2 \rho_{e2}^2 \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho_e(P)}}{1 - \beta^4 \left(\frac{\rho_{e2}}{\rho_{e1}} \right)^2} \quad (51)$$

Torna-se necessário então calcular cada termo da expressão anterior de forma separada, para então unir os termos e determinar a forma final para o cálculo do fluxo mássico, sendo assim, da Eq. (45) pode ser escrito:

$$\frac{\rho_l}{\rho_g} = y^{-\frac{1}{n}} \frac{\rho_l}{\rho_{g1}} \quad (52)$$

onde $y = \frac{P}{P_1}$ é a razão de pressão. Da Eq. (47) a massa específica efetiva pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{x^2}{\rho_{g1}} \left(1 + \frac{1-x}{xS} \right) \left(\omega S + y^{-\frac{1}{n}} \right) \quad (53)$$

onde:

$$\omega = \frac{1-x}{x} \frac{\rho_{g1}}{\rho_l} \quad (54)$$

Calculando os diferentes termos que aparecem na Eq. (51) pode ser obtido:

$$\frac{\rho_{e2}}{\rho_{e1}} = \frac{\omega S + 1}{\omega S + y_2^{-\frac{1}{n}}} \quad (55)$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho_e(P)} = P_1 \int_1^{y_2} \frac{dy}{\rho_e(y)} = -\frac{P_1 x^2}{\rho_{g1}} \left(1 + \frac{1-x}{xS} \right) \left[\omega S (1 - y_2) + \frac{n}{n-1} \left(1 - y_2^{\frac{n-1}{n}} \right) \right] \quad (56)$$

Substituindo Eq. (53), (55) e (56) na Eq. (51), o fluxo mássico na restrição finalmente resulta em:

$$G_2 = \left\{ \frac{\frac{2 P_1 \rho_{g1}}{x^2} \left[\omega S (1 - y_2) + \frac{n}{n-1} \left(1 - y_2^{\frac{n-1}{n}} \right) \right]}{\left(1 + \frac{1-x}{xS} \right) \left(y_2^{-\frac{1}{n}} + \omega S \right)^2 \left[1 - \beta^4 \left(\frac{1 + \omega S}{y_2^{-\frac{1}{n}} + \omega S} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

4.6.2 Fluxo mássico crítico

Conforme descrito anteriormente, um objetivo desse trabalho e de forma geral um objetivo geral dos pesquisadores envolvidos com válvulas do tipo *choke* está relacionado na determinação da fronteira do escoamento com a condição crítica, sendo assim será desenvolvido um equacionamento para cálculo da condição crítica nessa secção.

Todas as expressões serão calculadas considerando que o escoamento é com escorregamento, entretanto para voltar para a condição do modelo homogêneo, basta substituir o valor de S por 1.

Assim, da Eq. (128) e assumindo escoamento barotrópico, resulta em:

$$\frac{W^2}{A} \left[\frac{1}{A} \frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{A} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial s} \quad (58)$$

Isolando o gradiente de pressão, pode ser obtido:

$$- \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\frac{W^2}{\rho_e} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{A^2} \right)}{1 + \frac{W^2}{A^2} \frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_e} \right)} \quad (59)$$

Da Eq. (59), a condição necessária para existência do escoamento crítico ocorre na restrição e resulta:

$$1 + G_c^2 \frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) = 0 \quad (60)$$

isolando G_c :

$$G_c^2 = - \left[\frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right]^{-1} \quad (61)$$

Negligenciando a compressibilidade da fase líquida, a transferência de massa entre as fases (título constante) e supondo escorregamento constante pode ser obtido através da Eq. (47):

$$\frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) = x^2 \left(1 + \frac{1-x}{xS} \right) \frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_g} \right) \quad (62)$$

Substituindo Eq. (62) na Eq. (61), resulta:

$$G_c^2 = - \frac{\left[\frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_g} \right) \right]^{-1}}{x^2 \left(1 + \frac{1-x}{xS} \right)} \quad (63)$$

Com o objetivo de calcular o fluxo mássico crítico, Eq. (52) é diferenciada, resultando:

$$\frac{d}{dP} \left(\frac{1}{\rho_g} \right) = \frac{1}{P_1} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\rho_g} \right) = - \frac{1}{n P_1 \rho_{g1}} y^{-\frac{n+1}{n}} \quad (64)$$

Substituindo Eq. (64) na Eq. (63) e rearranjando, o fluxo mássico crítico resulta:

$$G_{2c} = \left\{ \frac{n P_1 \rho_{g1}}{x^2} \frac{y_2^{\frac{n+1}{n}}}{\left(1 + \frac{1-x}{x S}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

Equalizando Eq. (57) e (65) a razão de pressão crítica na restrição y_c resulta:

$$y_c = \left\{ \frac{\omega S (1 - y_c) + \frac{n}{n-1} \left(1 - y_c^{\frac{n-1}{n}}\right)}{\frac{n}{2} \left(1 + \omega S y_c^{\frac{1}{n}}\right)^2 \left[1 - \beta^4 \left(\frac{\omega S + 1}{\omega S + y_c^{-\frac{1}{n}}}\right)^2\right]} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \quad (66)$$

Com base nas expressões encontradas para cálculo da fronteira da região crítica com a subcrítica e para cálculo da vazão mássica que atravessa a válvula *choke*, as mesmas serão comparadas com as expressões obtidas por [Sachdeva *et al.* \(1986\)](#) e [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#) devido as similaridade adotada por tais autores na dedução das expressões de seus modelos para o cálculo das referidas propriedades.

4.7 Volumes de controle 2 e 3

4.7.1 Cálculo da pressão

Durante o desenvolvimento do trabalho, observou-se que grande parte dos autores dos artigos referentes à válvulas *choke* não dedicaram estudos com o comportamento do escoamento após a restrição. Observou-se entretanto que os trabalhos de [Schüller *et al.* \(2003\)](#) e [W. Zhibin e Yonghui \(2011\)](#), calculam as pressões na restrição com base na equação de Borda-Carnot. O cálculo da região a jusante da válvula será dividida em duas partes, uma primeira etapa é calculada a distribuição de pressão a jusante com base na equação de Borda-Carnot, bem como algumas análises são feitas, em uma segunda etapa são calculadas as distribuições de temperatura à jusante da válvula com base na equação da conservação da energia, as devidas considerações e análises comparativas com os modelos existentes estão destacados na sequência.

Como visto anteriormente a dedução das expressões físicas para a região convergente é o grande foco dos pesquisadores envolvidos nos estudos de escoamentos multifásicos, não dedicando a devida atenção para a zona de expansão. Como pode ser observado nos trabalhos desenvolvidos por [Sachdeva *et al.* \(1986\)](#), [Perkins \(1993\)](#) e [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#), a expressão utilizada para cálculo da pressão na restrição é proveniente do trabalho desenvolvido por [Perry \(1950\)](#), dada por:

$$P_2 = P_1 - \left(\frac{P_1 - P_3}{1 - \beta^{1.85}} \right) \quad (67)$$

Com base nas equações da conservação da massa, equação da conservação do momento linear no volume de controle 3, através do teorema de transporte de Reynolds, desprezando o cisalhamento na parede, uma nova expressão é desenvolvida para o cálculo da pressão na restrição. Sendo assim, considerando que o volume de controle para análise da conservação da massa e do momento linear é analisado na secção transversal B que está localizada após a contração até uma secção transversal 3 localizada após a região de expansão do fluido, zona delimitada após a recuperação parcial da pressão. Aplicando a expressão de Borda-Carnot para o volume de controle compreendido entre as seções B e 3 resulta em:

$$P_3 - P_B = \frac{W^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{\rho_{eB}\sigma} - \frac{1}{\rho_{e3}} \right) \quad (68)$$

De forma análoga, pode-se determinar o valor da pressão em 2, região da contração, com base no volume de controle delimitado entre as regiões 2 e B, através da seguinte expressão:

$$P_B - P_2 = \frac{W^2}{A_B^2} \left(\frac{1}{\rho_{e2}C_c} - \frac{1}{\rho_{eB}} \right) \quad (69)$$

A dedução detalhada das expressões para o cálculo da região de expansão encontra-se no Apêndice C.

4.7.2 Cálculo da temperatura

De forma análoga a abordagem feita para a distribuição de pressão, será feita uma primeira análise com respeito ao volume de controle compreendido entre as regiões B e 3, é importante ressaltar que para as regiões de expansão não é considerado que o escoamento é isentrópico. Para o cálculo da pressão tanto em B como em 2 é necessário o cálculo prévio das massas específicas efetivas em cada um destes pontos, para tal, como o único parâmetro que é variável durante o escoamento é massa específica do gás, torna-se necessário o cálculo da temperatura em cada um destes pontos.

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds para a equação da conservação da energia no volume de controle entre B e 3, considerando o escoamento adiabático e irreversível a equação da energia resume-se à:

$$c_p (T_3 - T_B) + \frac{(1-x)}{\rho_l} (P_3 - P_B) = \frac{1}{2} W^2 \left(\frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} - \frac{1}{\rho_{c3}^2 A_3^2} \right) \quad (70)$$

onde,

$$c_p = x c_{pg} + (1-x) c_l \quad (71)$$

$$\frac{1}{\rho_c^2} = \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{S}{\rho_l} (1-x) \right]^2 \left(x + \frac{1-x}{S^2} \right) \quad (72)$$

De forma análoga a diferenças de temperaturas entre 2 e B, pode ser expressa por:

$$c_p (T_B - T_2) + \frac{(1-x)}{\rho_l} (P_B - P_2) = \frac{1}{2} W^2 \left(\frac{1}{\rho_{c2}^2 A_2^2} - \frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} \right) \quad (73)$$

Importante ressaltar para esse ponto que para o modelo proposto por [W. Zhibin e Yonghui \(2011\)](#) não foi considerado uma abordagem similar para os cálculos das temperaturas nas posições mencionadas, mas sim é adotado um coeficiente n da politrópica para qualquer secção do escoamento correspondente a uma evolução isentrópica. Tal afirmação não é coerente, uma vez que ao utilizar a equação de Borda-Carnot, diretamente já está considerada a existência de perdas irreversíveis no escoamento.

A dedução detalhada das expressões para o cálculo da região de expansão encontra-se no [C](#).

4.8 Resumo das equações do modelo

Nesta Seção são reescritas as expressões finais que são utilizadas no cálculo da vazão mássica através do *choke* de forma sequencial ao que são utilizadas no procedimento de cálculo.

A relação de pressão crítica pode ser expressa por:

$$y_c = \left\{ \frac{\omega S (1 - y_c) + \frac{n}{n-1} \left(1 - y_c^{\frac{n-1}{n}}\right)}{\frac{n}{2} \left(1 + \omega S y_c^{\frac{1}{n}}\right)^2 \left[1 - \beta^4 \left(\frac{\omega S + 1}{\omega S + y_c^{\frac{1}{n}}}\right)^2\right]} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \quad (74)$$

Conhecendo o valor da pressão crítica o fluxo mássico crítico pode ser expresso por:

$$G_{2c} = \left\{ \frac{n P_1 \rho_{g1}}{x^2} \frac{y_2^{\frac{n+1}{n}}}{\left(1 + \frac{1-x}{x S}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (75)$$

Determinado o fluxo mássico, o valor da temperatura em B pode ser calculado por:

$$c_p (T_3 - T_B) + \frac{(1-x)}{\rho_l} (P_3 - P_B) = \frac{1}{2} W^2 \left(\frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} - \frac{1}{\rho_{c3}^2 A_3^2} \right) \quad (76)$$

Conhecendo o valor da temperatura em B, o valor da pressão em B pode ser calculada por:

$$P_3 - P_B = \frac{W^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{\rho_{eB} \sigma} - \frac{1}{\rho_{e3}} \right) \quad (77)$$

Conhecendo os valores da pressão e temperatura em B, a temperatura em 2 pode ser calculada por:

$$c_p (T_B - T_2) + \frac{(1-x)}{\rho_l} (P_B - P_2) = \frac{1}{2} W^2 \left(\frac{1}{\rho_{c2}^2 A_2^2} - \frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} \right) \quad (78)$$

Com o valor da temperatura em 2, a pressão em 2 pode ser calculada como:

$$P_B - P_2 = \frac{W^2}{A_B^2} \left(\frac{1}{\rho_{e2} C_c} - \frac{1}{\rho_{eB}} \right) \quad (79)$$

Após verificação se a condição real do escoamento é crítica ou subcrítica, o fluxo más-

sico pode ser calculado como:

$$G_2 = \left\{ \frac{\frac{2 P_1 \rho_{g1}}{x^2} \left[\omega S (1 - y_2) + \frac{n}{n-1} \left(1 - y_2^{\frac{n-1}{n}} \right) \right]}{\left(1 + \frac{1-x}{x S} \right) \left(y_2^{-\frac{1}{n}} + \omega S \right)^2 \left[1 - \beta^4 \left(\frac{1 + \omega S}{y_2^{-\frac{1}{n}} + \omega S} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (80)$$

Finalmente a vazão mássica pode ser calculada por:

$$W = G A_2 \quad (81)$$

4.9 Comparação do modelo proposto com modelos existentes

Comparado aos modelos existentes, os seguintes comentários são feitos:

4.9.1 Modelo de Sachdeva *et al.*

A expressão de Sachdeva para o fluxo mássico crítico é dada por:

$$G_{2c} = \left(\frac{n P_1 \rho_{g1}}{x} y_2 \frac{\rho_{g2}}{\rho_{g1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

onde n é dado pela Eq. (45). Entretanto, existe uma inconsistência na integração da equação do momento linear, pois Sachdeva assumiu que a evolução do gás é isentrópica, resultando em:

$$G_2 = \left\{ \frac{\frac{2 P_1 \rho_{g1}}{x} \left[\omega (1 - y_2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(1 - y_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]}{\left(y_2^{-\frac{1}{\gamma}} + \omega \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (83)$$

A Eq. (83) é coincidente com Eq. (57) se $S = 1$, $n = \gamma$ e $\beta = 0$; entretanto, esta é inconsistente com Eq. (82). Após substituir o valor da relação de massa específica do gás da relação isentrópica na Eq. (82) e igualar a Eq. (83) ambos coeficientes politrópicos aparecem na determinação da pressão crítica, resultando em:

$$y_c = \left[\frac{\omega (1 - y_c) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}}{\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{n}{2} \left(1 + \omega y_c^{\frac{1}{n}} \right)^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (84)$$

4.9.2 Modelo de Al-Safran

Para as expressões do modelo, as aproximações são as mesmas que as citadas na Seção 4.6, a expressão para prever o fluxo máximo é a mesma que a Eq. (57). A relação de pressão crítica, foi determinada zerando a derivada do fluxo mássico com respeito a razão de pressão e a seguinte expressão foi apresentada:

$$y_c = \left\{ \frac{\omega S (1 - y_c) + \frac{n}{n-1}}{\frac{n}{n-1} + \frac{n}{2} \left(1 + \omega S y_c^{\frac{1}{n}} \right)^2 \left[1 - \beta^4 \left(\frac{\omega S + 1}{\omega S + y_c^{-\frac{1}{n}}} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \quad (85)$$

A Eq. (85) não está correta e não representa a razão crítica de pressão (máximo fluxo mássico local) para $\beta \neq 0$, enquanto Eq. (66) representa. É notável perceber que Eq. (85) e (66)

são coincidentes para $\beta = 0$; como a energia cinética a montante geralmente possui um valor pequeno, o erro usando Eq. (85) também é pequeno, mas para valores de β próximos a valores unitários, o erro passa a ser notável. Infelizmente, no trabalho de [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#) não estão ilustradas as expressões analíticas usadas para determinar a relação crítica.

5 Resultados

Nesta Seção serão apresentados em um primeiro momento os resultados obtidos para o cálculo da vazão mássica que atravessa o *choke* com base nas expressões deduzidas aqui para o cálculo das regiões de contração e expansão do gás.

Em uma segunda etapa é apresentado um estudo de sensibilidade aos efeitos físicos para as equações utilizadas para cálculo da vazão mássica através do *choke*, bem como serão comparados os modelos existentes com a metodologia proposta para cálculo deste trabalho.

5.1 Resultados obtidos com o modelo atual

Com base nos dados experimentais apresentados no trabalho de [Schüller *et al.* \(2003, 2006\)](#), foi desenvolvido um software em MATLAB capaz de calcular a vazão mássica para uma grande quantidade de pontos e ainda analisar os efeitos encontrados para a região de expansão.

Os dados de entrada estão apresentados na Tabela 3.

P_1 bara	T_1 C	x —	x_o —	x_w —	$P_1 - P_3$ bar	W_{exp} kg/s
8,41	50,9	0,0083	0,8620	0,1300	0,98	0,66
9,50	49,9	0,0105	0,8780	0,1110	2,01	0,95
11,40	49,9	0,0086	0,8630	0,1280	3,83	1,36
13,10	50,9	0,0039	0,8790	0,1170	5,60	1,65
8,74	49,9	0,0127	0,4330	0,5540	1,05	0,66
10,10	49,9	0,0111	0,4490	0,5400	2,60	1,08
11,50	50,9	0,0041	0,4540	0,5420	4,05	1,49
13,80	50,9	0,0048	0,4490	0,5460	6,31	1,87
8,87	50,9	0,0097	0,0916	0,8990	1,03	0,71
9,84	52,9	0,0078	0,0709	0,9210	2,44	1,12
13,80	49,9	0,0042	0,0786	0,9170	6,44	1,99
10,80	50,9	0,0879	0,7810	0,1310	3,27	0,64
12,00	49,9	0,0455	0,8470	0,1080	4,41	1,03
14,00	50,9	0,0361	0,8740	0,1260	6,28	1,37
14,80	51,9	0,0274	0,8570	0,1160	7,27	1,62
10,60	50,9	0,0802	0,3770	0,5420	3,11	0,67
12,10	50,9	0,0440	0,4180	0,5380	4,57	1,09
14,40	49,9	0,0334	0,4340	0,5330	6,79	1,51
15,50	50,9	0,0217	0,4430	0,5360	7,97	1,81
11,60	50,9	0,0825	0,0575	0,8600	3,87	0,75
14,40	50,9	0,0585	0,0968	0,8450	6,74	1,21
14,80	50,9	0,0347	0,0347	0,9250	7,21	1,55
12,50	50,9	0,1380	0,7290	0,1340	5,16	0,63
14,20	50,9	0,0845	0,8030	0,1130	6,84	1,01

P_1 <i>bara</i>	T_1 <i>C</i>	x —	x_o —	x_w —	$P_1 - P_3$ <i>bar</i>	W_{exp} <i>kg/s</i>
13,40	50,9	0,1340	0,3730	0,4930	6,08	0,74
14,30	50,9	0,0716	0,4160	0,5130	6,88	1,13
14,10	50,9	0,1190	0,0957	0,7850	6,48	0,82
14,70	50,9	0,0621	0,1090	0,8290	7,36	1,24
14,20	50,9	0,1640	0,7150	0,1210	6,81	0,69
14,00	45,9	0,1550	0,3520	0,4940	6,84	0,74
14,50	44,9	0,1350	0,1010	0,7630	7,19	0,81
9,50	49,9	0,0477	0,0704	0,9010	4,17	1,13
11,80	49,9	0,0287	0,8790	0,1170	5,60	1,65
13,20	51,9	0,0221	0,8490	0,1290	5,16	1,36
15,00	51,9	0,0191	0,8740	0,1070	7,23	1,73
11,50	50,9	0,0330	0,0706	0,8960	3,90	1,03
11,70	49,9	0,0251	0,4860	0,4880	4,16	1,20
14,00	51,9	0,0241	0,4390	0,5370	5,77	1,50
15,00	50,9	0,0144	0,4420	0,5430	7,32	1,89
9,73	49,9	0,0409	0,0872	0,8720	2,15	0,73
11,30	50,9	0,0274	0,0723	0,9000	3,94	1,14
14,70	50,9	0,0222	0,0855	0,8920	6,69	1,62
15,30	51,9	0,0109	0,0927	0,8960	7,55	2,05
23,85	77,9	0,2960	0,6403	0,0637	10,43	0,67
28,48	93,9	0,2432	0,6510	0,1058	16,12	0,96
19,86	69,9	0,2601	0,0576	0,6824	8,45	0,65
24,34	69,9	0,2517	0,0489	0,6994	12,97	0,84
30,62	79,9	0,2419	0,0626	0,6955	17,57	1,07
37,13	92,9	0,2461	0,0604	0,6935	22,01	1,27
15,48	53,9	0,0723	0,8151	0,1126	4,95	0,95
25,38	66,9	0,0730	0,8141	0,1129	11,52	1,52
32,12	70,9	0,0710	0,8178	0,1112	15,78	1,79
37,79	87,9	0,0738	0,8097	0,1165	19,07	2,02
15,61	50,9	0,0778	0,0813	0,8409	5,88	1,05
23,03	48,9	0,0628	0,0834	0,8538	10,12	1,59
31,09	70,9	0,0601	0,0746	0,8653	18,22	2,29
18,81	50,9	0,0386	0,8330	0,1284	7,43	1,36
26,28	57,9	0,0404	0,8378	0,1218	12,73	1,84
32,01	64,9	0,0348	0,8409	0,1242	16,60	2,29
38,49	73,9	0,0385	0,8343	0,1272	21,01	2,54
17,24	56,9	0,0392	0,0810	0,8798	5,97	1,43
27,62	56,9	0,0344	0,0768	0,8887	14,46	2,32
34,72	59,9	0,0322	0,0815	0,8862	18,74	2,78
39,37	63,9	0,0340	0,0769	0,8891	21,11	3,06
22,08	52,9	0,0073	0,0764	0,9163	11,66	2,65

Tabela 3: Dados de entrada obtidos por Schüller *et al.* (2003, 2006).

A região da expansão, é compreendida entre as seções 2 e 3 do escoamento conforme ilustrado na Fig. 6 onde duas considerações podem ser feitas:

- O comprimento da válvula é curto, acarretando assim que não exista um volume de controle entre 2 e B.
- O comprimento da válvula é longo, ocasionando uma diferença de pressão entre a pressão encontrada em B e a pressão em 2.

Para a análise dos estudos de sensibilidade do modelo que serão apresentadas na sequência foi considerado que a válvula é longa, gerando assim dois volumes de controle a serem analisados na zona de expansão da válvula, um primeiro compreendido entre as regiões 2 e B, e o segundo volume de controle está compreendido entre as regiões B e 3. Onde para ambos os volumes de controle são consideradas as expressões de Borda-Carnot.

A justificativa para o desenvolvimento de uma rotina de cálculo para determinar a pressão na restrição está atrelada ao fato de que a determinação precisa de tal pressão é diretamente relacionada a precisão do cálculo da vazão mássica, uma vez que analisando a Eq. (57), todos os parâmetros da equação são constantes e relacionados com as propriedades físicas à montante da válvula, o único termo que é livre para variar é a pressão na restrição, visto que esta não pode ser medida nas bancadas experimentais, desta forma foi desenvolvida uma rotina de cálculo em MATLAB para cálculo da pressão em 2.

5.1.1 Procedimento de cálculo

O procedimento de cálculo do software desenvolvido em MATLAB pode ser dividido em três partes:

1. Cálculo dos parâmetros iniciais e constantes das propriedades do fluido
2. Cálculo da condição crítica
3. Iteração e cálculo da vazão mássica

Para a primeira parte, correspondente ao cálculo dos parâmetros iniciais, os dados obtidos através do trabalho de Schüller *et al.* (2003, 2006) são carregados no programa. É importante ressaltar que somente os pontos com escoamento multifásico foram considerados para análise, aqueles formados por somente uma fase não foram considerados pois, as hipóteses do modelo não são válidas para quando existe uma fase líquida somente. Outro ponto relevante para análise do modelo, da-se pelo fato da empregabilidade exclusiva do modelo de equilíbrio termodinâmico, não sendo estudada a hipótese de gás adiabático.

Para todos os casos das análises as massas específicas da água e óleo são constantes, bem como o calor específico da água. Outros parâmetros que são mantidos constantes para

todos os pontos de cálculo são os parâmetros geométricos da válvula, onde é considerado que o diâmetro de entrada é igual ao diâmetro de saída da válvula com diâmetro de 77,9 *mm* e o diâmetro da restrição é de 11 *mm*.

Posterior ao carregamento dos dados experimentais da válvula, com base na temperatura e pressão a montante é calculada a massa específica do gás, através da equação de gás perfeito, bem como são calculados os calores específicos do gás e do óleo. Feito isso é calculada a massa específica da fase líquida através da Eq. (22), bem como o calor específico da fase líquida através da Eq. (23).

Calculadas as propriedades da fase líquida, torna-se possível calcular o calor específico da mistura através da Eq. (143), bem como o coeficiente da politrópica dado pela Eq. (45). Agora, com todos os parâmetros iniciais calculados, pode-se calcular a condição crítica.

Para o cálculo da condição crítica faz-se necessário calcular primeiramente um valor para o coeficiente de escorregamento na região da contração, correspondente ao fator de escorregamento na condição crítica, para tal, calcula-se um primeiro coeficiente de escorregamento com base na Eq. (24) e com base em tal coeficiente obtido, inicia-se um processo iterativo com o coeficiente de escorregamento para obtenção da pressão crítica utilizando a Eq. (66). Com o valor da pressão crítica, calcula-se então a temperatura crítica aplicando a expressão dos gases perfeitos.

O processo iterativo necessita de um ponto de partida, para o trabalho em questão, o ponto com as condições críticas foi escolhido como ponto inicial, assim, torna-se necessário o cálculo do fluxo mássico crítico com base na Eq. (57), e finalmente cálculo da vazão mássica crítica.

Determinado as condições críticas, inicia-se a preparação para o cálculo iterativo, o ponto de partida considera que a vazão mássica é igual a vazão mássica crítica, que os coeficientes de escorregamento locais em 2, B e 3 são iguais ao coeficiente de escorregamento na condição crítica, considera-se ainda que a pressão em 2 e B são iguais a condição crítica e que as temperaturas em 2, B e 3 são iguais as temperaturas críticas.

Definidas todas as condições iniciais, inicia-se o cálculo iterativo, que recalculará ao final todos os parâmetros citados no parágrafo anterior; foi considerado um fator de subrelaxação de 0,2 para o cálculo dos novos parâmetros. O processo iterativo será detalhado conforme segue:

- Calcular os valores de ρ_{g2} e ρ_{bB} , e com tais valores calcular os valores de ρ_{c2} e ρ_{cB} ;
- Calcular um novo valor para C_{vo} , C_{vg} e C_{pg} , entretanto a temperatura para cálculo desses parâmetros será com base no cálculo da média das temperaturas entre 2 e B. Definidos tais valores calcula-se um novo valor de C_p ;
- Calcular um novo valor de T_B com base na Eq. (145), considerando o valor de C_p obtido na item acima;

- Calcular os valores de ρ_{g3} e ρ_{c3} ;
- Calcular um novo valor para C_{vo} , C_{vg} e C_{pg} , entretanto a temperatura para cálculo desses parâmetros será com base no cálculo da média das temperaturas entre B e 3. Definidos tais valores calcula-se um novo valor de C_p ;
- Calcular um novo valor de T_3 com base na Eq. (142), considerando o valor de C_p obtido na item acima;
- Calcular os valores de ρ_{eB} e ρ_{e3} , com tais valores calcular um novo valor de P_B através da Eq. (68);
- Calcular o valor de ρ_{e2} e posteriormente calcular um novo valor de P_2 ;
- Calcular um novo valor de y com base no novo valor de P_2 e comparar com o valor de y_c afim de verificar se o escoamento é crítico ou subcrítico;
- Caso o escoamento seja crítico, igualar todos os termos em 2 aos termos obtidos para a condição crítica e recalculer o coeficiente de escorregamento local em 2, B e 3 com base na Eq. (24)
- Caso o escoamento seja subcrítico, recalculer os valores dos coeficientes de escorregamento utilizando a Eq. (25) e calcular um valor de coeficiente de escorregamento médio entre 1 e 2. Com tal coeficiente de escorregamento calcular um novo valor para o fluxo mássico conforme Eq. (57) e calcular os novos valores de ρ_{g2} e T_2 ;
- Calcular os erros dos parâmetros de pressão e temperatura nas regiões 2, B e 3 em conjunto com o erro da vazão mássica;
- Subrelaxar os parâmetros indicados acima;
- Caso algum dos erros relativos seja maior do que $\epsilon = 10^{-6}$, repetir todo o processo até a convergência de todos os parâmetros.

Para o cálculo iterativo torna-se necessário calcular o parâmetro C_c que é dado por W. Zhibin e Yonghui (2011) dado pela Eq. (8).

Concluída a iteração, pode-se comparar os resultados obtidos com referência aos valores obtidos através do experimento. Observa-se que os pontos possuem uma divergência para valores altos de vazão mássica, entretanto os resultados obtidos para valores baixos desta está com uma margem de erro muito menor, conforme pode ser visto na Fig.8.

Onde W_p é a vazão obtida pelo cálculo e W_m é o valor da vazão experimental.

Analizou-se a sensibilidade de diversos parâmetros no cálculo da vazão mássica afim de encontrar algum que influenciasse significativamente no cálculo deste, verificou-se então que o

Figura 8: Vazão mássica - Resultado obtido com C_c calculado através da Eq. (8).

Figura 9: Vazão mássica - Resultado obtido com $C_c = 1$.

parâmetro C_c é um ponto de destaque, conforme pode ser observado em maiores detalhes na Fig. 9 quando o valor de C_c é adotado como unitário.

Onde W_p é a vazão obtida pelo cálculo e W_m é o valor da vazão experimental. Como pode ser observado na Fig. 8, para baixos valores de vazão mássica, os pontos que consideram que C_c estão muito próximos a condição experimental, entretanto para valores mais altos para a vazão mássica, fica evidentes que o diâmetro da vena contracta influencia na determinação da vazão mássica.

Como pode ser observado a expressão acima considera somente parâmetros geométricos da válvula, indicando assim que, independentemente do valor da vazão mássica, o diâmetro da vena contracta será constante. Torna-se então necessária uma investigação detalhada para o parâmetro C_c .

5.2 Estudo de sensibilidade aos efeitos físicos

Como visto anteriormente os modelos podem ser divididos com relação a evolução termodinâmica do gás no interior da mistura: o modelo adiabático assume que não existe troca de calor entre as fases, enquanto o modelo de equilíbrio térmico assume que as fases trocam calor entre si de tal forma a sempre estarem com a mesma temperatura. A evolução real está entre esses dois casos limitantes e deve estar próxima a condição do modelo adiabático uma vez que os valores do fluxo mássico são altos.

Referente a consideração da energia cinética a montante, o efeito desta torna-se importante para altos valores do coeficiente β , ocorrendo quando a válvula encontra-se próximo a situação de completamente aberta.

Com o objetivo de ilustrar as diferenças entre os efeitos físicos, o fluxo mássico G em função da razão de pressão y é apresentado na Fig. 10 à 12. As expressões aplicadas são as descritas na Seção 4.6.

Os parâmetros (entrada e calculados), retirados dos dados experimentais apresentados no trabalho de Schüller *et al.* (2003, 2006), estão apresentados na TAB 4. Como a água também foi usada nos experimentos e as massa específicas dos líquidos não são tão diferentes, foi decidido homogeneizar as fases líquidas considerando que estas possuem a mesma velocidade.

Como somente as pressões a montante e jusante são medidas, a pressão no *choke* P_2 foi calculada considerando a expressão proposta por Perry (1950).

Figuras 10 e 11 mostram o fluxo mássico em função da razão de pressão para o modelo adiabático e para o modelo de equilíbrio termodinâmico respectivamente; em cada figura, a influência do escorregamento é considerada. É possível notar que o modelo adiabático prediz valores mais altos para o fluxo mássico quando comparado com o modelo de equilíbrio termodinâmico; as diferenças no fluxo mássico entre estes dois casos limites pode ser usada como uma estimativa da incerteza devido a influencia da transferência de calor entre as fases. Além disso, o modelo homogêneo prediz valores mais baixos para o fluxo mássico, constituindo as-

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Calor específico do gás a pressão constante	c_{pg}	2,254	$kJ/(kg\ K)$
Calor específico do gás a volume constante	c_{vg}	1,7352	$kJ/(kg\ K)$
Calor específico do líquido (*)	c_{vl}	4,224	$kJ/(kg\ K)$
Calor específico do óleo	c_{vo}	4,7424	$kJ/(kg\ K)$
Calor específico da água	c_{vw}	4,1855	$kJ/(kg\ K)$
Coeficiente politrópico do gás (*)	n	1,0009	—
Pressão a montante	P_1	741000	Pa
Pressão no <i>Choke</i> (*)	P_2	640307	Pa
Pressão a Jusante	P_3	643000	Pa
Escorregamento (*)	S	2,1562	—
Temperatura a montante	T_1	324,05	K
Fração de gás	x	0,0083	—
Fração de óleo	x_o	0,862	—
Fração de água	x_w	0,13	—
Diâmetro a montante	D	77,9	mm
Diâmetro do <i>Choke</i>	d	11	mm
Razão de Diâmetro (*)	β	0,1412	—
Razão de calores específicos do gás (*)	γ	1,299	—
Massa específica do gás	ρ_g	7,7	kg/m^3
Massa específica do líquido (*)	ρ_l	817,44	kg/m^3
Massa específica do óleo	ρ_o	796	kg/m^3
Massa específica da água	ρ_w	998	kg/m^3
Parâmetro adimensional (*)	ω	1,1255	—

Tabela 4: Parâmetros utilizados no estudo de sensibilidade; parâmetros com (*) são calculados.

Figura 10: Influência do escorregamento no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo adiabático.

Caso	G_c [$kg/(s m^2)$]	y_c [—]
Adiabático, Modelo com Escorregamento	18402	0,38
Adiabático, Modelo Homogêneo	14469	0,44
Equilíbrio Térmico, Modelo com Escorregamento	17021	0,44
Equilíbrio Térmico, Modelo Homogêneo	13293	0,51

Tabela 5: Valores em condição crítica para diferentes modelos.

sim um importante erro sistemático que deve ser corrigido com cálculos mais confiáveis; este comportamento também foi encontrado por [Campos *et al.* \(2014\)](#) quando correlacionava dados de escoamento multifásico em orifícios próximos a estados incompressíveis. Pode ser observado que o valor da razão de pressão crítica é modificada para valores mais baixos: a) quando o escorregamento é considerado, e, b) quando o modelo adiabático é escolhido. Os valores numéricos para o fluxo mássico crítico e para a razão de pressão crítica para diferentes modelos estão ilustrados na TAB 5.

Conforme estabelecido anteriormente, a energia cinética modifica os resultados do fluxo mássico crítico e a razão crítica. As diferenças são negligenciadas para baixos valores de β ; entretanto para altos valores pode existir um valor significativo de influencia. Como por exemplo, considerando os mesmos parâmetros ilustrados na TAB 4 excepto o diâmetro do *choke*, o qual foi ajustado para um valor de $\beta = 0.6$, Fig. 12 mostra o comportamento para escorregamento,

Figura 11: Influência do escorregamento no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo equilíbrio termodinâmico.

Caso	$G_c \text{ [kg/(sm}^2\text{)]}$	$y_c \text{ [-]}$
Com energia cinética a montante	17667,49	0,46
Sem energia cinética a montante	17030,40	0,44
Modelo de Al-Safran, Eq. (85)	17665,93	0,47

Tabela 6: Influência da energia cinética a montante nos valores das condições críticas para $\beta = 0,6$, equilíbrio termodinâmico, modelo com escorregamento.

modelo de equilíbrio térmico. Os valores numéricos estão ilustrados na TAB 6, onde também é apresentado os valores críticos com a razão de pressão crítica do modelo de Al-Safran, Eq. (85). Pode-se notar que os valores das condições críticas são ligeiramente diferentes.

Com o objetivo de testar o comportamento de diferentes modelos na forma com a qual predizem os valores de fluxo mássico, os valores preditos para a vazão mássico correspondente a modelo adiabático e de equilíbrio térmico estão ilustrados comparados com os valores dos dados experimentais de Schüller *et al.* (2003, 2006) respectivamente na Fig. 13 e 14. Nestas figuras, um coeficiente de descarga $C_D = 1$ e o modelo com *slip* foram considerado.

A fonte de certeza na construção das Fig. 13 e 14 é a determinação da pressão na seção do *choke* P_2 , a qual não é medida e é determinada indiretamente a partir da pressão a medida a jusante P_3 . Como Eq. (67), relaciona as pressões do *choke* e a jusante, dependendo unicamente do parâmetro β , é esperada uma certa incerteza desse modelo simplificado. Pode

Figura 12: Influência da energia cinética a montante no fluxo mássico em função da razão de pressão, modelo de equilíbrio termodinâmico e modelo de escorregamento ($\beta = 0,6$).

Figura 13: Comparação com valores preditos considerando modelo adiabático e valores medidos de vazão mássica (dados de Schüller *et al.* (2003, 2006)).

Figura 14: Comparação com valores preditos modelo de equilíbrio e valores medidos de vazão mássica (dados de [Schüller et al. \(2003, 2006\)](#)).

ser observado que a escolha do modelo modifica a predição da condição operacional para cada ponto individual. Entre os 67 pontos experimentais considerados, o modelo adiabático prediz 40 pontos na condição subcrítica, enquanto o modelo de equilíbrio termodinâmico prediz 30 pontos.

Com o objetivo de aprimorar a correlação entre os dados experimentais e os dados de vazão mássica preditos, um coeficiente de descarga é definido como a razão entre a vazão mássica medida e a predita. Uma vez que o valor da vazão predita vêm de um modelo com uma equação analítica (ou mestre), o valor do coeficiente de descarga depende das simplificações físicas feitas no modelo.

O coeficiente de descarga já foi analisado para escoamentos compressíveis monofásicos. Entretanto, existe uma dispersão considerável nos coeficientes de descarga para escoamentos multifásicos, resultando parâmetros que não podem ser usados para correlacionar outros dados experimentais; por exemplo, no trabalho [Guo et al. \(2002, 2007\)](#) valores maiores que 1.5 foram calculados para compensar o erro sistemático que aparece no modelo de Sachdeva. Como o numero de parâmetros em problemas com escoamentos multifásicos são maiores que os de monofásicos, a teoria de ter um valor constante de coeficiente de descarga não é confiável do ponto de vista físico. Uma expressão para determinar o valor do coeficiente de descarga com base nos dados de escoamentos monofásicos, compressíveis seria amplamente útil, como feito por [Campos et al. \(2014\)](#) para correlacionar escoamentos multifásicos próximos a condição incompressível através de placas de orifício.

Assim com o propósito de melhorar os resultados obtidos anteriormente quando empre-

gadas as equações propostas por [Sachdeva *et al.* \(1986\)](#) e [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#), a região da expansão é analisada com maiores detalhes com o objetivo de obter-se uma expressão que possa calcular o valor da pressão em 2 de forma mais precisa.

6 Conclusões e recomendações

As conclusões serão divididas em duas partes, onde a primeira está relacionada mais a física do problema dos escoamentos multifásicos, onde serão postas as conclusões referentes as propriedades de estagnação e já a segunda parte será propriamente dita com referência às vazões mássicas.

Com base nos gráficos das propriedades de estagnação, analisou-se que existe uma diferença entre os valores encontrados para as razões de estagnação quando um tipo de abordagem relacionada a transferência de calor é considerada.

Com respeito as vazões mássicas, foram revisados alguns dos modelos utilizados para prever o escoamento de gás e mistura de líquidos através de uma válvula *choke*. As premissas básicas foram revisadas, como a evolução termodinâmica do gás, escorregamento entre as fases e considerações e considerar ou não a energia cinética e a relação de diâmetros. Dois modelos foram escolhidos para serem revisados: o modelo homogêneo proposto por [Sachdeva et al. \(1986\)](#) e o modelo proposto por [Al-Safran e Kelkar \(2009\)](#). Os parâmetros de entrada usados para comparar as soluções quando aplicados cada tipo de modelo são baseados nos dados experimentais publicados por [Schüller et al. \(2003, 2006\)](#). Considerações para desenvolver uma expressão geral para prever a vazão através da válvula e discussões sobre o coeficiente de descarga são apresentados.

Foi encontrado que modelos sem escorregamento (homogêneo) introduzem um considerável erro sistemático, subestimando a vazão mássica; consequentemente, o modelo de escorregamento deve ser escolhido como o mais preciso.

Referente a evolução do gás, os modelos adiabáticos e de equilíbrio térmico devem limitar a real evolução do gás, sendo assim uma fonte de incerteza. Para os resultados mostrados nesse trabalho foi considerado o modelo de equilíbrio termodinâmico.

Avaliando os efeitos da energia cinética a montante, pode-se concluir que este pode ser negligenciado com exceção para valores de β próximos a unitários (válvula próxima a condição completamente aberta).

Finalmente, as diferentes aproximações usadas para calcular o coeficiente de descarga, bem como a pressão no *choke* baseada na pressão medida a jusante, são consideradas muito simplistas, assim como já observado foram desenvolvidas novas expressões para cálculo da pressão na restrição, apenas fica como ponto de observação que o coeficiente C_c necessita de uma maior investigação para obter-se de forma mais precisa seu valor real.

Um ponto importante é que toda a análise física é fundamentada considerando a válvula *choke* como uma simples restrição no escoamento, análogo a uma placa de orifício, no entanto sabe-se que não é essa a realidade, a geometria de uma válvula *choke* é complexa sendo assim a determinação do coeficiente de descarga dessa válvula não é simples e é variável de fabricante para fabricante.

REFERENCIAS

- Achong, I., 1961. *Revised bean performance formula for lake Maracaibo wells*. Internal report.
- Al-Safran, E.M. e Kelkar, M., 2009. “Predictions of two-phase critical-flow boundary and mass-flow rate across chokes”. *SPE Production & Operations*, Vol. 24, No. 2, pp. 249–256.
- Ashford, F.E. e Pierce, P.E., 1975. “Determining multiphase pressure drop and flow capacities in downhole safety valves”. *Journal of Petroleum Technology*, Vol. 27, pp. 1145–1152.
- Baxendell, P.B., 1957. *Bean performance - Lake wells*. Internal report.
- Campos, S.R.V., no, J.L.B., Slobodcicov, I., Filho, D.F. e Paz, E.F., 2014. “Orifice plate meter field performance: Formulation and validation in multiphase flow conditions”. *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 58, pp. 93–104.
- Collier, J.G., 1972. *Convective boiling and condensation*. McGraw-Hill, New York.
- Gilbert, W.E., 1954. “Flowing and gas-lift well performance”. *Drilling and production practice*, Vol. 143, pp. 127–157.
- Grolmes, M.A. e Leung, J.C., 1985. *Chemical Engineering Progress*, Vol. 81, No. 8, p. 47.
- Guo, P., Al-Bemani, A.S. e Ghalambor, A., 2002. “Applicability of sachdeva’s choke flow model in southwest louisiana gas condensate wells”. In *2002 SPE Gas Technology Symposium, Paper SPE 75507*. SPE, p. 11p.
- Guo, P., Al-Bemani, A.S. e Ghalambor, A., 2007. “Improvement in sachdeva’s multiphase choke flow model using field data”. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Vol. 46, No. 5, p. 22.
- Perkins, T.K., 1993. “Critical and subcritical flow of multiphase mixtures through chokes”. *SPE Drilling & Completion*, Vol. 8, No. 4, pp. 271–276.
- Perry, R.H., 1950. *Chemical Engineers’ Handbook*. McGraw-Hill.
- Ros, N.C.J., 1961. “An analisys of critical simultaneous gas/liquid flow through a restriction and its application to flow metering”. *Applied Science Research*.
- Sachdeva, R., Schmidt, Z., Brill, J.P. e Blais, R.M., 1986. “Two-phase flows through chokes”. *SPE 61st Annual Technical Conference and Exhibition, paper SPE 15657*.

- Schüller, R.B., Solbakken, T. e Selmer-Olsen, S., 2003. “Evaluation of multiphase flow rate models for chokes under subcritical oil/gas/water flow conditions”. *SPE Production & Facilities*, Vol. 18, No. 3, pp. 170–181.
- Schüller, R.B., Solbakken, T. e Selmer-Olsen, S., 2006. “Critical and subcritical oil/gas/water mass flow rate experiments and predictions for chokes”. *SPE Production & Facilities*, Vol. 21, No. 3, pp. 372–380.
- Selmer-Olsen, S., 1995. “Subsea chokes as multiphase flowmeters: production control at troll olje”. Cannes, France.
- Simpson, H., Rooney, D. e Grattan, E., 1983. “Two-phase flow through gate valves and orifice plates”. Coventry, UK.
- Thomas, E.T., 2001. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Editora Interciência, 2a. edição.
- W. Zhibin, L. Yingchuan, Z.H.L.X. e Yonghui, L., 2011. “A simple numerical model for the prediction of multiphase mass flow rate through chokes”. *Petroleum Science and Technology*, Vol. 29, No. 24, pp. 2545–2553.
- White, F.M., 2010. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, University of Rhode Island.

A APÊNDICE A

A.1 Escoamentos compressíveis

O escoamento compressível é determinado em condições na qual a massa específica do fluido muda com relação a pressão em dada secção do escoamento, basicamente todos os fluidos são compressíveis, entretanto alguns possuem compressibilidade alta, por exemplo os gases, enquanto outros possuem compressibilidade muito baixa, por exemplo líquidos. Em termos gerais, fluidos com altos valores de massa específica, podem ser considerados incompressíveis, o que simplifica o equacionamento matemático das expressões que regem estes sistemas.

Em escoamentos compressíveis estuda-se o comportamento das propriedades do escoamento com referência a velocidade de propagação do som no fluido, definindo assim o numero de Mach Ma , que é definido pela razão entre a velocidade do escoamento sob a velocidade do som. O escoamento é classificado como subsônico quando $Ma < 1$, sônico quando $Ma = 1$ e supersônico quando $Ma > 1$. Tal parâmetro é de grande importância para determinar o comportamento das propriedades do escoamento em bocais convergentes ou divergentes e nas válvulas *choke*, pois as propriedades físicas do escoamento, como pressão, temperatura, velocidade e massa específica variam de forma diferente com relação ao numero de Mach.

Em bocais convergentes-divergentes pode-se estudar outro comportamento de caracter exclusivo dos escoamentos compressíveis, chamado de propriedades de estagnação. As propriedades de estagnação podem ser analisadas em escoamentos multifásicos e seu estudo é relevante, pois torna-se possível analisar a influência da fase líquida no interior do escoamento, sendo assim uma breve explicação segue uma breve explicação sobre as propriedades de estagnação e suas expressões.

Considere um escoamento adiabático, sem trabalho, sem variação de energia potencial e em regime permanente através de um duto, bocal convergente ou divergente ou qualquer outra passagem de escoamento, o balanço de energia para esse escoamento entre duas diferentes seções transversais é dada por:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (86)$$

Considere agora que o fluido fosse parado completamente, a velocidade na posição 2 seria zero e a Eq. (86) reduz-se à:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{02} \quad (87)$$

A entalpia de estagnação representa a entalpia de um fluido quando ele é levado ao repouso de forma adiabática. Ao considerar o gás como um gás ideal as demais propriedades de estagnação podem ser determinadas (massa específica, pressão e temperatura). É importante salientar que as propriedades de estagnação podem ser relacionadas com o numero de Mach,

principalmente com relação a pressão de estagnação e a pressão local do fluido, observa-se que para $Ma = 1$ a pressão atinge uma condição chamada crítica, onde o valor da vazão mássica é a máxima e o escoamento atinge uma configuração de que mesmo com incrementos de pressões, o valor da vazão mássica permanece constante, usualmente é dado o nome de condição bloqueada para tal comportamento. Na análise dos escoamentos multifásicos serão abordadas as expressões para as propriedades de estagnação, bem como será aprofundado o estudo dos comportamentos físicos para cada condição.

Uma vez que as bases dos escoamentos monofásicos compressíveis foi definida, é possível estudar a forma mecânica e construtiva das válvulas do tipo *choke* de forma a analisar sua analogia com bocais, placas de orifícios ou tubos de venturi.

A.2 Velocidade do som

Com o objetivo de estudar as propriedades de estagnação no escoamento multifásico e comparar com os resultados obtidos com as já conhecidas para escoamentos monofásicos compressíveis, torna-se necessário em uma primeira etapa calcular a expressão que define o valor da velocidade da propagação do som na mistura multifásica. A velocidade do som comporta-se diferentemente para cada um dos dois casos considerados para a transferência de calor entre as fases. Serão abordadas e demonstradas as duas deduções existentes para a velocidade do som para os casos particulares, sendo em uma primeira etapa para o modelo adiabático e posteriormente para o modelo de equilíbrio termodinâmico.

A.2.1 Modelo adiabático

Com base nas equações vistas anteriormente, para o caso particular do modelo adiabático a Eq. (35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P\rho_g^{-\gamma} = A_\gamma = cte \quad (88)$$

Isolando ρ_g na equação Eq. (47) e admitindo $S = 1$ resulta em:

$$\rho_g = x \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1-x}{\rho_l} \right)^{-1} \quad (89)$$

Substituindo a Eq. (89) na Eq. (35) resulta em:

$$P = x R T \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1-x}{\rho_l} \right)^{-1} \quad (90)$$

A velocidade do som é dada por:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\partial \rho}{\partial P} = -\rho^2 \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} \right) = \rho^2 \left(\frac{x}{\rho_g^2} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{1-x}{\rho_l^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right) \quad (91)$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{1}{a_g^2} = \frac{\rho_g}{\gamma P} \quad (92)$$

E que:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial P} = \frac{1}{a_l^2} \quad (93)$$

A Eq. (91) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{a^2} = \rho^2 \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1-x}{\rho_l} \right) \frac{1}{\gamma P} + \frac{1-x}{\rho_l^2 a_l^2} \right] \quad (94)$$

ou,

$$a^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1-x}{\rho_l} \right) \frac{1}{\gamma P} + \frac{1-x}{\rho_l^2 a_l^2} \right]^{-1} \quad (95)$$

Admitindo que $\frac{x}{\rho_g^2 a_g^2} \gg \frac{1-x}{\rho_l^2 a_l^2}$ que é coerente admitindo que a velocidade do som na fase líquida é muito maior que na fase gasosa, e quando não for próximo do zero pode-se desprezar o termo $\frac{1-x}{\rho_l^2 a_l^2}$ na expressão o que resulta em:

$$a^2 = \frac{\gamma P}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-x}{\rho_l} \right)^{-1} \quad (96)$$

A.2.2 Modelo de equilíbrio homogêneo

Uma vez definido a expressão que determina o valor do coeficiente da politrópica (n), torna-se possível determinar uma expressão para determinar valor da velocidade do som para o modelo de equilíbrio homogêneo, levando em consideração a troca de calor entre os fluidos que compõe o escoamento.

A velocidade do som é dada pela mesma expressão dada anteriormente para o caso de modelo adiabático, dada pela Eq. (91).

A variação da massa específica do gás relacionado com a pressão pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{1}{RT} - \frac{P}{RT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \quad (97)$$

E que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = \frac{T}{P} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1-x}{x} \frac{C_l}{R} \right)^{-1} \quad (98)$$

Substituindo Eq. (98) na Eq. (97) e simplificando:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = x R T \frac{\rho^2}{P^2} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1-x}{x} \frac{C_l}{R} \right)^{-1} \right] \quad (99)$$

Assim a expressão final da velocidade do som para o modelo de equilíbrio homogêneo possui a forma final:

$$a^2 = \frac{P^2}{x R T \rho^2} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - x}{x} \frac{c_l}{R} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (100)$$

A.3 Razões de estagnação

Conforme já descrito anteriormente, o cálculo das razões de estagnação não está ligado de forma direta com a válvula *choke* mas sim é uma forma didática de provar que todo o equacionamento efetuado para cálculo da vazão mássica na válvula possui fundamento físico quando é comparado com as expressões já conhecidas para os escoamentos monofásicos compressíveis.

Para o cálculo das razões de estagnação será considerado que o escoamento ocorre em um bocal convergente-divergente, será considerado ainda somente o modelo homogêneo, uma vez que o objetivo é detectar a sensibilidade das expressões ao aumentar a quantidade de líquido na mistura, entretanto na Secção 4.6 será apresentada o tratamento com escorregamento para o cálculo da evolução isentrópica na região convergente.

A continuação serão calculadas as razões de estagnação para escoamentos multifásicos, partindo da equação da conservação do momento linear. A variação de pressão pode ser expressa por:

$$dp = a^2 d\rho \quad (101)$$

Substituindo a Eq. (101) na Eq. (129):

$$u du = d \left(\frac{u^2}{2} \right) = a^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (102)$$

Para o desenvolvimento das expressões das condições de estagnação, pode-se utilizar tanto a expressão da velocidade do som calculada para a condição de modelo adiabático, tanto quanto a expressão determinada para a condição de equilíbrio homogêneo, para o desenvolvimento das futuras expressões será usado o desenvolvimento considerando a expressão determinada para a condição de equilíbrio homogêneo, pois as expressões terão seus resultados em função de n , que poderá ser apenas substituído por γ de forma a obter as expressões do modelo adiabático.

Entrando com o valor de a^2 da Eq. (102) e integrando entre a condição de estagnação ($\rho_0, u = 0$) e a condição local, obtém-se:

$$\frac{n(1-n)}{2} Ma^2 = \left(1 - \zeta \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(n - \zeta \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\left(1 - \zeta \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n+1}}{(1-\zeta)^n} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1-n} (n - \zeta) \quad (103)$$

onde numero de Mach e o parâmetro adimensional ζ são definidos como:

$$Ma = \frac{u}{a} \quad (104)$$

$$\zeta = (1 - x) \frac{\rho_0}{\rho_l} \quad (105)$$

O parâmetro ζ quantifica a concentração de líquido no interior da mistura. A variação é contida entre 0 e 1, onde para valores iguais a 0 as expressões tornam-se idênticas às expressões de escoamento monofásico. Para o caso de ζ próximo ao valor unitário, as expressões não são válidas, pois foi desprezado a compressibilidade da fase líquida.

A.3.1 Determinação de $\frac{\rho}{\rho_0}$

A Eq. (103) já fornece a razão de massas específicas de maneira implícita. A resolução da mesma pode ser interativa. Os resultados são mostrados nas Fig. 15 e 16, respectivamente para os dois casos extremos com relação a transferência de calor entre as fases Eq. (103); Para o cálculo das condições de estagnação foi considerado uma mistura de ar e água, com as propriedades descritas conforme indicado na TAB. (7).

Parâmetro	Valor	Unidade
C_{pg}	1.0038	KJ/KgK
C_{vg}	0.7167	KJ/KgK
C_w	4.187	KJ/KgK
P_0	10^5	Pa
T_0	300	K

Tabela 7: Parâmetros utilizados no cálculo.

Assim, graficamente a relação $\frac{\rho}{\rho_0}$ para o caso exclusivo do gás adiabático é dada por:

Figura 15: Variação de $\frac{\rho}{\rho_0}$ para modelo adiabático.

Como pode ser observado para a condição adiabática ao incrementar a porção de líquido no interior da mistura ao aumentar o termo ζ , a curva como um todo tende ao valor unitário, comenta-se que para $\zeta = 0$ que significa que o escoamento é monofásico, formado por somente ar, a curva encontrada coincide com a curva de escoamento monofásico compressível, já para $\zeta = 1$ a curva na realidade tende ao valor unitário, significando que o escoamento estaria em uma condição de quase incompressível, assim comprovando que o cálculo desta curva está correto.

Figura 16: Variação de $\frac{\rho}{\rho_0}$ para modelo de equilíbrio.

As considerações para as curvas encontradas para o modelo de equilíbrio termodinâmico são as mesmas que as encontradas que as citadas anteriormente para o modelo adiabático com referência a comparação dos termos de ζ , entretanto observa-se que para a condição de equilíbrio termodinâmico as curvas tendem ao valor de $\frac{\rho}{\rho_0}$ próximos a zero para menores valores do numero de Ma .

Os cálculos foram efetuados em um software MATLAB e consiste em incrementar valores para o numero de Mach e com tais valores calcular a razão estagnação da massa específica, ao todo o numero de Mach entre 0 a 5 foi fracionado em 1000 partições e para cada uma destas era calculada uma razão de estagnação, comenta-se que o mesmo procedimento foi adotado para os três casos de estudo, tanto para a massa específica, pressão e temperatura quando comparadas com as respectivas propriedades de estagnação.

Os mesmos comparativos efetuados aqui para a massa específica podem ser adotados para a pressão e temperatura que são apresentados na sequencia.

A.3.2 Determinação de $\frac{P}{P_0}$

Determinado os valores de $\frac{\rho}{\rho_0}$ é possível determinar os valores de $\frac{P}{P_0}$, sabendo que:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_{0g}} \right)^n \quad (106)$$

$$\frac{P}{P_0} = \left[\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{(1-x)}{\rho_l}}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{(1-x)}{\rho_l}} \right]^{-n} \quad (107)$$

Multiplicando a expressão por $\frac{\rho}{\rho}$

$$\frac{P}{P_0} = \left[\frac{\frac{\rho}{\rho} - \frac{\rho}{\rho_l} (1-x)}{\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_l} (1-x)} \right]^{-n} \quad (108)$$

Simplificando e multiplicando por $\frac{\rho_0}{\rho_0}$:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \left[\frac{1 - \frac{\rho}{\rho_l} (1-x)}{1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_l} (1-x)} \right]^n \quad (109)$$

Simplificando resulta em:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \left[\frac{1 - \zeta}{1 - \frac{\rho}{\rho_0} \zeta} \right]^n \quad (110)$$

A razão de estagnação $\frac{P}{P_0}$, da Eq. (110), para os casos de modelo adiabático e modelo de equilíbrio é mostrada respectivamente nas Fig. 17 e 18.

Figura 17: Variação de $\frac{P}{P_0}$ para modelo adiabático.

Figura 18: Variação de $\frac{P}{P_0}$ para modelo de equilíbrio.

A.3.3 Determinação de $\frac{T}{T_0}$

Para a temperatura, a condição de estagnação pode ser determinada através da seguinte expressão:

$$R^n P^{1-n} T^n = A_n \quad (111)$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-n} \left(\frac{T}{T_0}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (112)$$

A razão de estagnação $\frac{T}{T_0}$, da Eq. (112), para os casos de modelo adiabático e modelo de equilíbrio é mostrada respectivamente nas Fig. 19 e 20.

Figura 19: Variação de $\frac{T}{T_0}$ para modelo adiabático.

Figura 20: Variação de $\frac{T}{T_0}$ para modelo de equilíbrio.

B APÊNDICE B

Esta secção têm como objetivo deduzir a expressão de conservação do momento linear, considerando o escoamento unidimensional, em regime permanente e desprezando forças de atrito e viscosas, aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds para o volume de controle presente na Fig. 6, segundo White (2010) obtêm-se que:

$$\frac{\partial}{\partial s} [\rho u^2 A] ds = \sum F_{ext} \quad (113)$$

Desenvolvendo o lado direito da Eq.(113), resulta em:

$$\sum F_{ext} = (P A)_s - (P A)_{s+ds} + P dA \quad (114)$$

$$\sum F_{ext} = -\frac{\partial}{\partial s} (P A) ds + P dA \quad (115)$$

$$\sum F_{ext} = -\frac{\partial P}{\partial s} A ds - P \frac{\partial A}{\partial s} ds + P dA \quad (116)$$

Finalmente:

$$\sum F_{ext} = -\frac{\partial P}{\partial s} A ds \quad (117)$$

Substituindo a Eq. (117) na Eq. (113):

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho u^2 A) = -A \frac{\partial P}{\partial s} \quad (118)$$

Trabalhando em uma primeira etapa com o termo $\rho u^2 A$ e expandindo em função de cada componente da mistura:

$$\rho u^2 A = [\rho_g u_g^2 \alpha + \rho_l u_l^2 (1 - \alpha)] A \quad (119)$$

Reescrevendo a expressão em função da vazão mássica, resulta em:

$$\rho u^2 A = \frac{W^2}{A} \left[\frac{x^2}{\rho_g \alpha} + \frac{(1-x)^2}{\rho_l (1-\alpha)} \right] \quad (120)$$

Sabendo que α e x podem ser relacionados através da seguintes expressão:

$$x = \frac{W_g}{W} = \frac{\rho_g u_g \alpha}{\rho_g u_g \alpha + \rho_l u_l (1 - \alpha)} \quad (121)$$

Definindo $S = \frac{u_g}{u_l}$ e simplificando, tem-se que:

$$\alpha = \frac{x \rho_l}{(1-x) \rho_g S + \rho_l x} \quad (122)$$

A partir da expressão anterior podem ser escritas as seguintes expressões:

$$\frac{x^2}{\rho_g \alpha} = x \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x)}{\rho_l} S \right] \quad (123)$$

$$\frac{(1-x)^2}{\rho_l (1-\alpha)} = \frac{1-x}{S} \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x)}{\rho_l} S \right] \quad (124)$$

Substituindo Eq. (123) e (124) na Eq. (120), resulta em:

$$\rho u^2 A = \frac{W^2}{A} \left[\left(x + \frac{1-x}{S} \right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x)}{\rho_l} S \right) \right] \quad (125)$$

Pode-se definir o seguinte termo:

$$\frac{1}{\rho_e} = \left(x + \frac{1-x}{S} \right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x)}{\rho_l} S \right) \quad (126)$$

Substituindo a Eq.(126) na Eq.(125), resulta que:

$$\rho u^2 A = \frac{W^2}{\rho_e A} \quad (127)$$

Substituindo a Eq.(127) na Eq.(118), resulta em:

$$\frac{W^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho_e A} \right) = - \frac{\partial P}{\partial s} \quad (128)$$

ou ainda,

$$\frac{W^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{A} \left(x + \frac{1-x}{S} \right) \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} S \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial s} \quad (129)$$

C APÊNDICE C - Escoamento de Borda Carnot

Considerando o volume de controle entre B e 3, dado pela Fig. 21, que é análogo ao volume de controle entre 2 e B, desprezando o cisalhamento na parede e as forças gravitacionais, aplicando o teorema de transporte de Reynolds, a equação da conservação do momento linear em regime permanente resulta em:

Figura 21: Volume de controle entre B e 3.

$$\Sigma F_{ext} = (\rho u^2 A)_{saída} - (\rho u^2 A)_{entrada} \quad (130)$$

Considerando a seção 3 a saída e B a entrada, substituindo a Eq.(127) na Eq.(130) e considerando que o único termo de força que age no volume de controle é o termo das forças de pressão, resulta em:

$$(P_B - P_3) A_3 = \frac{W^2}{\rho_{e3} A_3} - \frac{W^2}{\rho_{eB} A_B} \quad (131)$$

Simplificando, obtém-se que:

$$P_B - P_3 = \frac{W^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{\rho_{e3}} - \frac{1}{\rho_{eB} \frac{A_B}{A_3}} \right) \quad (132)$$

Definindo $\sigma = \frac{A_B}{A_3}$ e simplificando:

$$P_3 - P_B = \frac{W^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{\rho_{eB} \sigma} - \frac{1}{\rho_{e3}} \right) \quad (133)$$

De forma análoga para o volume de controle entre 2 e B, a expressão que calcula a pressão em 2 é dada por:

$$P_B - P_2 = \frac{W^2}{A_B^2} \left(\frac{1}{\rho_{e2} C_c} - \frac{1}{\rho_{eB}} \right) \quad (134)$$

onde $C_c = \frac{A_2}{A_B}$.

Para o cálculo da variação de pressão, é necessário calcular a massa específica efetiva da mistura (ρ_e) para cada ponto e por consequência, calcular a massa específica do gás. Assim, torna-se necessário determinar a temperatura em cada ponto. A temperatura será calculada com base na equação da conservação da energia.

Considerando o mesmo volume de controle do caso anterior, a equação da conservação da energia, unidimensional, em regime permanente, sem troca de calor e trabalho, segundo [White \(2010\)](#) pode ser dada por:

$$\int \rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} u^2 \right) u dA = 0 \quad (135)$$

$$\left[\rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} u^2 \right) u A \right]_{saída} - \left[\rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} u^2 \right) u A \right]_{entrada} = 0 \quad (136)$$

Trabalhando com um componente da expressão, tem-se que:

$$\left(\hat{h} + \frac{1}{2} u^2 \right) \rho u A = x W \left(\hat{h}_g + \frac{1}{2} u_g^2 \right) + (1 - x) W \left(\hat{h}_l + \frac{1}{2} u_l^2 \right) \quad (137)$$

onde:

$$\hat{h}_g = c_{pg} T \quad (138)$$

$$\hat{h}_l = c_l T + \frac{1}{\rho_l} P \quad (139)$$

$$u_g = \frac{W}{A} \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{S}{\rho_l} (1 - x) \right] \quad (140)$$

$$u_l = \frac{W}{A} \frac{1}{S} \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{S}{\rho_l} (1 - x) \right] \quad (141)$$

Substituindo Eq.(138), (139), (140) e (141) na Eq.(137) e considerando a entrada em B e a saída em 3, a diferença de temperaturas entre 3 e B é dada por:

$$c_p (T_3 - T_B) + \frac{(1 - x)}{\rho_l} (P_3 - P_B) = \frac{1}{2} W^2 \left(\frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} - \frac{1}{\rho_{c3}^2 A_3^2} \right) \quad (142)$$

onde,

$$c_p = x c_{pg} + (1 - x) c_l \quad (143)$$

$$\frac{1}{\rho_c^2} = \left[\frac{x}{\rho_g} + \frac{S}{\rho_l} (1 - x) \right]^2 \left(x + \frac{1 - x}{S^2} \right) \quad (144)$$

De forma análoga a diferenças de temperaturas entre 2 e B, pode ser expressa por:

$$c_p(T_B - T_2) + \frac{(1-x)}{\rho_l}(P_B - P_2) = \frac{1}{2}W^2 \left(\frac{1}{\rho_{c2}^2 A_2^2} - \frac{1}{\rho_{cB}^2 A_B^2} \right) \quad (145)$$