EDUARDO MENDONÇA RAUPP

**ESTUDO NUMÉRICO DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO OSCILANDO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

Orientador:

Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini

São Paulo
2007

EDUARDO MENDONÇA RAUPP

**ESTUDO NUMÉRICO DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO OSCILANDO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini

São Paulo
2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de maio de 2007.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Raupp, Eduardo Mendonça

**Estudo numérico do escoamento ao redor de um cilindro oscilando / E.M. Raupp. -- ed.rev. -- São Paulo, 2007.
112 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Vibração induzida por vórtices 2.Hidrodinâmica 3.Cilindro oscilando forçadamente 4.Cilindro apoiado em base elástica 5.Método dos elementos espectrais I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Dedico este trabalho aos meus pais Elizabeth e Marco Antônio, pelo incessante apoio dado em toda minha vida e pelo imenso incentivo para realizar meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini, pela orientação instigante e encorajadora, e pela confiança depositada. Meus agradecimentos e admiração pela sua competência e capacidade, bem como por seu entusiasmo e bom humor, sempre presentes e contagiantes.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro durante o período do desenvolvimento deste projeto.

Aos professores José A. P. Aranha e Fábio Saltara, pela contribuição no processo de desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela contribuição na minha formação profissional durante o período de Graduação.

A todos os meus amigos e colegas do NDF: Roque, Bruno, Lauro, Buk, Iago, Guto, Herval, Furla, Gioria, Tanaka, Rosi, Alfredo, Zink, Ricardo, Pepe, Leandro, Carlos, Karl, Ivone, Zuleide, Prof. Ramos, Prof. Jorge Baliño, pelo direto e indireto auxílio durante o desenvolvimento deste trabalho e, sobretudo por proporcionarem um ambiente sempre alegre, divertido e amigável.

Finalmente, aos meus pais Elizabeth e Marco Antônio, pelo apoio incondicional e pelos ensinamentos e dedicação na minha educação e no meu crescimento como pessoa.

RESUMO

O objetivo deste projeto de mestrado é estudar o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro isolado oscilando forçadamente e apoiado em base elástica através de simulações computacionais utilizando o Método de Elementos Espectrais. Este tópico suscita grande interesse no meio tecnológico, pois esta configuração aparece com bastante frequência em estruturas marítimas, como os “risers” de produção e umbilicais de plataformas de exploração de petróleo, e também no meio acadêmico, uma vez que se trata do estudo de fenômenos complexos originados do escoamento ao redor de uma geometria simples: cilindro circular.

A pesquisa tem seu principal enfoque na avaliação da utilização do método espectral de elementos finitos para solução do escoamento bidimensional no limite do regime de esteira laminar, $Re \leq 200$, ao redor de um cilindro oscilando forçadamente e apoiado em base elástica.

As simulações do escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente são realizadas com duas amplitudes de oscilação do cilindro: $0.15D$ e $0.40D$. Para cada amplitude são utilizadas dez frequências de oscilação: $0.8f_s$, $0.85f_s$, $0.9f_s$, $0.95f_s$, $0.975f_s$, $0.9875f_s$, $1.025f_s$, $1.05f_s$, $1.075f_s$ e $1.1f_s$; onde D é o diâmetro do cilindro e f_s é a frequência de desprendimento de vórtices para cilindro fixo. O objetivo destas simulações é a tentativa de observação do fenômeno da mudança brusca do ângulo de fase entre a força transversal à direção da corrente e o deslocamento do cilindro, “phase-jump”, obtendo, deste modo, uma base para comparação com trabalhos já existentes sobre o mesmo tema, avaliando o método numérico utilizado para o caso do escoamento ao redor de um cilindro oscilando.

As simulações do escoamento ao redor de um cilindro apoiado em base elástica (livre para oscilar) foram feitas com apenas um grau de liberdade: a direção transversal ao escoamento incidente (eixo y no caso estudado). O resultado mais importante deste tipo de configuração, do ponto de vista prático (projetos de “risers”, e outras estruturas cilíndricas), é a curva $A_{\max}/D$ versus V_r , isto, devido à dependência da vida útil destas estruturas à máxima amplitude de oscilação. Para reproduzir a curva $A_{\max}/D$ versus V_r , foram escolhidos os seguintes valores de velocidade reduzida: 1.0, 2.0, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, e 10.0.

Palavras-Chave: Vibração Induzida por Vórtices, Hidrodinâmica, Cilindro oscilando, Método dos Elementos Espectrais.

ABSTRACT

The goal of this work is to study through numerical simulations using the Spectral Elements Method the two-dimensional the flow past a single circular cylinder that is either in simple harmonic cross-flow oscillation or elastically mounted. This is a very important topic for the technological environment because this configuration is identical to offshore structures, like risers of oil production platform and is also important to scientific environment due to the study of complex phenomena originated from the flow past a very simple geometry: a circular cylinder.

The focus of this research is to evaluate the use of Spectral Element Method for solution of two-dimensional flow past a circular cylinder that is either in simple harmonic cross-flow oscillation or elastically mounted, at the laminar wake limit, $Re \leq 200$.

Two oscillation amplitudes were employed for the forced oscillations simulations: $0.15D$ e $0.40D$. And, for each amplitude, were selected ten frequencies: $0.8f_s$, $0.85f_s$, $0.9f_s$, $0.95f_s$, $0.975f_s$, $0.9875f_s$, $1.025f_s$, $1.05f_s$, $1.075f_s$ e $1.1f_s$; where D is the cylinder diameter and f_s is the vortex shedding frequency. The phase jump phenomenon, e.g., the fast change of phase angle, is observed and compared with existents works evaluating the Spectral Elements Method for forced oscillations cases.

In the elastically mounted simulations the most important result, for the practical point of view (risers design), is the $A_{\max}/D \times V_r$ curve, e.g., maximum amplitude versus velocity ratio, due to the relation of risers lifetime with maximum oscillation amplitude. To build the $A_{\max}/D \times V_r$ curve were selected the follow values of velocity ratio: 1.0, 2.0, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, e 10.0.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E SIMBOLOS

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	MOTIVAÇÃO.....	4
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	4
2	ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO	6
2.1	TRANSIÇÃO DA ESTEIRA DE VÓRTICES	6
2.2	ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO OSCILANDO.....	10
2.2.1	<i>Escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente</i>	<i>12</i>
2.2.1.1	Método do escoamento oscilatório transversal.....	17
2.2.2	<i>Escoamento ao redor de um cilindro oscilando montado em uma base elástica</i>	<i>22</i>
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS	36
3.1	MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS E FORMULAÇÃO DE GALERKIN	36
3.2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS: CASO UNIDIMENSIONAL	38
3.2.1	<i>Decomposição elementar: Refinamento tipo h.....</i>	<i>39</i>
3.2.2	<i>Construção de expansões do tipo p</i>	<i>41</i>
3.2.3	<i>Decomposição Contorno-Interior em expansões tipo p</i>	<i>43</i>
3.2.4	<i>Expansão modal tipo p C^0</i>	<i>44</i>
3.3	BASES MULTIDIMENSIONAIS.....	46
3.4	FORMULAÇÃO MULTIDIMENSIONAL	48
3.4.1	<i>Operações Locais</i>	<i>48</i>
3.4.2	<i>Operações globais</i>	<i>56</i>
3.4.3	<i>Representação da fronteira</i>	<i>67</i>
4	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS.....	73
4.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO E AVANÇO NO TEMPO.....	74

5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	79
5.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO E TESTES DE CONVERGÊNCIA.....	79
5.1.1	<i>Grau do polinômio da função de base.....</i>	<i>79</i>
5.1.2	<i>Grau de integração da condição de contorno de pressão.....</i>	<i>80</i>
5.1.3	<i>Dimensões da malha.....</i>	<i>80</i>
5.1.4	<i>Validação das simulações com resultados da literatura.....</i>	<i>81</i>
5.2	CILINDRO OSCILANDO FORÇADAMENTE.....	82
5.3	CILINDRO APOIADO EM BASE ELÁSTICA.....	93
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	99
7	REFERÊNCIAS.....	101
	APÊNDICE A	104

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Plataforma tipo “Tension Leg”. Observa-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (“risers”) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície.....	2
Figura 2.1: Curva $S_t \times Re$ para os regimes laminar e faixa de transição na esteira, mostrando os modos tridimensionais A e B. Reproduzido de Williamson [30].....	7
Figura 2.2: Visualizações do escoamento, modos A ($Re=200$) e B ($Re=270$). Reproduzido de Williamson [30].....	8
Figura 2.3: Diferentes simetrias dos modos A e B. Reproduzido e adaptado de Williamson [32].	8
Figura 2.4: Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro. Reproduzido de Williamson [32].....	9
Figura 2.5: Esquema das formas de estudo do escoamento ao redor de um cilindro oscilando.	10
Figura 2.6: Variação brusca do coeficiente de sustentação e do ângulo de fase próximo ao ponto de ressonância, reproduzida de Bishop e Hassan [1].	13
Figura 2.7: Fronteira de sincronização, reproduzida por Koopman [2].	13
Figura 2.8: Esquema dos tipos mais freqüentes de modos de sincronização. Reproduzido de Williamson e Govardhan [26].	14
Figura 2.9: Mapeamento dos modos de sincronização para um cilindro oscilando forçadamente, reproduzido de Williamson e Roshko [3].....	15
Figura 2.10: O fenômeno de histerese na curva do ângulo de fase e sua relação com os modos de geração e desprendimento de vórtice, reproduzida de Williamson e Roshko [3] ..	16
Figura 2.11: Variação do ângulo de fase, reproduzida de Blackburn e Henderson [8].	16
Figura 2.12: Fronteira de sincronização para $Re=200$, reproduzida de Blackburn e Karniadakis [21].	17
Figura 2.13: Fronteira de sincronização para baixas amplitudes, $A/D < 0.6$. Reproduzido de Meneghini e Bearman [7].....	20
Figura 2.14: Série temporal dos coeficientes de força (C_d e C_l) e posição do cilindro (y_b) para $f/f_s = 0.90$ e $A/D = 0.15$. Reproduzida de Meneghini e Bearman [7]..	20

Figura 2.15: Série temporal dos coeficientes de força (C_d e C_l) e posição do cilindro (y_b) para $f / f_s = 1.025$ e $A / D = 0.05$. Reproduzida de Meneghini e Bearman [7].	21
Figura 2.16: Dependência da amplitude com o parâmetro S_G . Reproduzida de Khalak e Williamson [5].	27
Figura 2.17: Séries temporais dos coeficientes de sustentação e de arrasto e do deslocamento do cilindro com $Re=1000$, cilindro montado em base elástica, $V_f=5.75$. Reproduzido de Saltara et al. [20].	29
Figura 2.18: Estrutura da esteira de vórtices para cilindro apoiado em base elástica com $Re=1000$ e $V_f=5.75$. Reproduzido de Saltara et al. [20].	29
Figura 2.19: Amplitude de oscilação $A_{\max}^* = A_{\max} / D$, versus velocidade reduzida U^* . Reproduzido de Khalak e Williamson [5].	30
Figura 2.20: Gráfico de “Griffin” do ramo superior e inferior por $(m^* + C_a)\zeta$; para uma variedades de valores de parâmetros de massa m^* . Reproduzido de Khalak e Williamson [5].	31
Figura 2.21: Resposta de amplitude máxima de oscilação versus velocidade reduzida e versus velocidade reduzida dividida pela razão de frequências, sobreposta ao mapeamento de Williamson e Roshko [3]. Reproduzido de Khalak e Williamson [5].	33
Figura 2.22: Demonstração do efeito do amortecimento negativo e positivo. Em (a), pode-se alterar o amortecimento efetivo para negativo, positivo, ou nulo. Em (b), fica evidente o efeito desta variação do amortecimento na amplitude de resposta do cilindro, em $\log(A)$. Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].	34
Figura 2.23: Relação entre pico de amplitude (A^*) e número de Reynolds (Re), para amortecimento nulo. Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].	34
Figura 2.24: Pico de amplitude (A^*) para número de Reynolds fixado em $Re=4000$ e massa-amortecimento constantes ($\alpha=0.1$ ou $\alpha=0.5$), em função da razão de massa m^* . Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].	35
Figura 2.25: Amplitudes (A^*) para baixos valores de massa-amortecimento em função do número de Reynolds (Re). Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].	35
Figura 3.1: Funções de base lineares unidimensionais.	39
Figura 3.2: Região padrão bidimensional.	47
Figura 3.3: Mapeamento de coordenadas, caso bidimensional.	50

Figura 3.4: Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais concordantes. Reproduzido de Karniadakis e Sherwin [9].....	60
Figura 3.5: Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais não concordantes. Reproduzido de Karniadakis e Sherwin [9].....	61
Figura 3.6: Estrutura da matriz M.	64
Figura 3.7: Contornos e sistemas de coordenadas locais e global.....	69
Figura 5.1: Malha bidimensional utilizada nas simulações computacionais.....	81
Figura 5.2: Validação com resultados experimentais.....	82
Figura 5.3: Condições de contorno utilizadas nas simulações computacionais para cilindro oscilando forçadamente.	83
Figura 5.4: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.80$	84
Figura 5.5: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.80$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L	84
Figura 5.6: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L	85
Figura 5.7: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$	85
Figura 5.8: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$ mostrando as linhas de corrente nas proximidades do cilindro.....	86
Figura 5.9: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.975$	86
Figura 5.10: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.975$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L	87
Figura 5.11: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 1.075$	87
Figura 5.12: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 1.075$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L	88
Figura 5.13: Variação brusca do ângulo de fase para $A/D = 0.15$. Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].....	89
Figura 5.14: Esteira de vórtices para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 0.90$	90

Figura 5.15: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 0.90$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .	90
Figura 5.16: Esteira de vórtices para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.025$.	91
Figura 5.17: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.025$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .	91
Figura 5.18: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.05$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .	92
Figura 5.19: Variação brusca do ângulo de fase para $A/D = 0.40$. Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].	93
Figura 5.20: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.0$.	94
Figura 5.21: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.0$ mostrando as linhas de corrente. .	94
Figura 5.22: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 4.5$.	95
Figura 5.23: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.5$.	95
Figura 5.24: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 5.0$.	96
Figura 5.25: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 5.0$.	96
Figura 5.26: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 8.0$.	97
Figura 5.27: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 6.0$.	97
Figura 5.28: Curva de máxima amplitude de oscilação versus velocidade reduzida para $Re = 200$.	98

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Ângulo de fase, para $A/D = 0.15$	21
Tabela 2.2: Ângulo de fase, para $A/D = 0.40$	22
Tabela 4.1: Coeficientes dos algoritmos das famílias Adams-Bashforth e Adams-Moulton.	76
Tabela 5.1: Teste de convergência – grau do polinômio da função de base.	80
Tabela 5.2: Teste de convergência – Grau de integração da condição de contorno de pressão.	80
Tabela 5.3: Teste de convergência – Dimensões adimensionais da malha.	81
Tabela 5.4: Variação brusca do ângulo de fase (em graus). Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].	89
Tabela 5.5: Variação brusca do ângulo de fase (em graus). Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].	92

Lista de Siglas e Símbolos

CFD	- Dinâmica dos Fluidos Computacional
NDF	- Núcleo de Dinâmica e Fluidos
VIE	- Vibração Induzida pelo Escoamento
VIV	- Vibração Induzida por emissão de Vórtices
MEE	- Método de Elementos Espectrais
MEF	- Método de Elementos Finitos
DNS	- Simulação Numérica Direta
RMS	- Raiz da Média Quadrática
A	- Amplitude dimensional de oscilação do cilindro
A^*	- Amplitude adimensional de oscilação do cilindro
$A_{\max}$	- Máxima amplitude dimensional de oscilação do cilindro
$A_{\max}^*$	- Máxima amplitude adimensional de oscilação do cilindro
C_D	- Coeficiente de arrasto
$\overline{C_D}$	- Coeficiente de arrasto médio
C_L	- Coeficiente de sustentação
C_L'	- Flutuação do coeficiente de sustentação (valor RMS)
C_{pb}	- Coeficiente de pressão de base
D	- Diâmetro do cilindro
E	- Energia adimensional transferida do escoamento para o cilindro em um ciclo
$\overline{E}$	- Energia dimensional transferida do escoamento para o cilindro em um ciclo
f	- Frequência de oscilação do cilindro
f_s	- Frequência de desprendimento de vórtices
f_N	- Frequência natural do sistema do cilindro montado em base elástica
N_{el}	- Número de elementos
N_{gl}	- Número de graus de liberdade
N_m^e	- Número de modos de expansão num elemento
p	- Pressão
Q^2	- Região padrão bidimensional

Re	- Número de Reynolds
St	- Número de Strouhal
U	- Velocidade do escoamento ao longe
u	- Componente da velocidade na direção x
v	- Componente da velocidade na direção y
$v_j(x)$	- Função de peso
x	- Direção da corrente livre
y	- Direção da oscilação do cilindro, perpendicular à corrente livre e perpendicular ao eixo do cilindro
Y	- Deslocamento adimensional do cilindro
z	- Direção do eixo do cilindro
χ^e	- Transformação da coordenada local para global
Φ_i	- Funções de base
ϕ_p	- Base polinomial local unidimensional
ϕ_{pq}	- Base polinomial local bidimensional
ϕ_{pqr}	- Base polinomial local tridimensional
μ	- Viscosidade dinâmica
ν	- Viscosidade cinemática
ρ	- Densidade do fluido
ξ	- Coordenada local
Ω	- Domínio fluido considerado
Ω^e	- Domínio do elemento
Ω_{st}	- Domínio padrão
ω	- Vorticidade

1 Introdução

Vibração Induzida pelo Escoamento (VIE) é um tema fundamental no estudo da fadiga de componentes de sistemas oceânicos de produção “offshore” de petróleo, tais como “risers”, oleodutos, cabos de ancoragem, umbilicais, etc. Na presença de correntes marítimas estes elementos estruturais flexíveis vibram devido à excitação cíclica oriunda do escoamento incidente.

No caso de uma corrente incidente uniforme, assunto tratado no presente trabalho, um mecanismo que pode gerar VIE é a Vibração Induzida por Vórtices, cuja causa é a formação e desprendimento alternado de vórtices (“vortex shedding”), essa vibração causa tensões cíclicas que podem, eventualmente, romper por fadiga a estrutura; outro mecanismo é uma instabilidade hidroelástica conhecida por galope, a qual é chamada na literatura inglesa de “galloping”. Esta última é um movimento com um único grau de liberdade que ocorre predominantemente na direção transversal ao escoamento. Ela ocorre em corpos rombudos nos quais o ponto de separação é fixo ou em corpos cujas forças hidrodinâmicas se desenvolvem em fase com o movimento estrutural. Um exemplo típico de corpo suscetível a “galloping” é aquele cuja forma é uma seção prismática retangular ou quadrada.

Os casos relacionados a VIE presentes na indústria nuclear constituem-se em um problema de escoamento confinado e, na maioria das vezes, a vibração não é causada pela geração e desprendimento de vórtices e sim pelo fenômeno denominado de “turbulence buffeting”. Além desta diferença, a razão de aspecto dos cilindros encontrados nas aplicações práticas em engenharia naval (produção de petróleo em águas profundas e muito profundas) chega muitas vezes a valores próximos a $L/D = 8000 - 10000$, onde L é o comprimento e D diâmetro do cilindro.

O fenômeno de “turbulence buffeting” foi extensivamente estudado na década de 70. No entanto, o fenômeno de vibração induzida por vórtices (VIV), objetivo da investigação do projeto temático ao qual esta proposta se vincula, têm ainda uma série de pontos não resolvidos e que se constituem no objeto de diversas pesquisas internacionais em curso em renomados centros mundiais de excelência em fluidodinâmica. Destes podemos citar a University of Cornell, MIT, CALTEC, Imperial College, Universidade de São Paulo, dentre outros.

VIE pode também ocorrer devido à proximidade entre corpos rombudos e há casos de geração de vórtices de um corpo atingindo um segundo e fazendo-o oscilar. Podemos citar como exemplo as oscilações que podem ocorrer quando duas colunas de uma TLP estão

alinhas, ou quase alinhadas, com a direção da corrente. Problemas associados com VIE em “risers” e agrupamento dos mesmos, particularmente quando a exploração de óleo passa para águas profundas, passa a ser um problema potencialmente complexo com poucas referências para definição dos parâmetros de projeto.

A integridade das plataformas oceânicas (Figura 1.1) também é afetada por este mecanismo de desprendimento alternado de vórtices. A geração e desprendimento de vórtices (“vortex shedding”) presente na esteira dos cilindros que compõem a estrutura da plataforma conduzem a grandes flutuações das forças de pressão no sentido transversal do escoamento causando oscilações.

Figura 1.1 – Plataforma tipo “Tension Leg”. Observa-se a estrutura dos componentes cilíndricos tais como os tubos flexíveis (“risers”) que levam a produção do poço petrolífero para a superfície.

É fundamental que as características críticas de uma nova estrutura que esteja sujeita a VIV sejam reconhecidas em uma fase inicial do projeto. No entanto, algumas das fontes do fenômeno de VIV envolvem a complexa interação entre forças hidrodinâmicas e a resposta da estrutura. Estas forças não são facilmente previstas sem que se recorra à realização de experimentos ou a simulação completa do escoamento conjuntamente com a resposta dinâmica da estrutura. O conhecimento do fenômeno de acoplamento vibração/escoamento ainda encontra-se em uma fase incipiente, havendo uma incerteza elevada no cálculo das forças hidrodinâmicas que causam a vibração. Esta incerteza faz com que haja, muitas vezes,

uma majoração elevada do risco de colapso da estrutura, levando a um superdimensionamento da mesma.

O objetivo fundamental do projeto temático, ao qual este mestrado está vinculado, está concentrado na procura de uma melhor compreensão do fenômeno de acoplamento vibração/escoamento, com a conseqüente diminuição da incerteza na determinação das forças hidrodinâmicas que atuam nos elementos cilíndricos de plataformas “offshore” de produção de petróleo.

Ao longo dos últimos oito anos a Petrobras vem desenvolvendo, em parceria com os Departamentos de Engenharia Mecânica e Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica da USP (EPUSP), uma série de pesquisas visando aplicações para o projeto de sistemas oceânicos com vibrações excitadas pelos agentes ambientais, tais como correntes e ondas. Além das pesquisas conjuntas com a EPUSP, a Petrobras tem desenvolvido junto ao agrupamento de Engenharia Naval do IPT estudos experimentais sobre a influência de VIV em casos específicos. Estes estudos têm sido realizados, de forma intermitente, ao longo dos últimos quinze anos e embora satisfatórios, no contexto em que se colocavam, umas séries de questões conceituais, mas com importantes conseqüências práticas, não conseguiram ser respondidas a contento.

Na Bacia de Campos, onde a Petrobras concentra seu esforço de produção em águas profundas, existe uma corrente marítima persistente e relativamente intensa e o estudo do VIV é uma etapa necessária na estimativa da vida útil de oleodutos e “risers”. Estes “risers”, em particular, têm comprimento suspenso da ordem de 1000-2000 m e a frequência de excitação, relacionada à geração e desprendimento de vórtices, é capaz de sintonizar simultaneamente diferentes modos naturais destes elementos estruturais. Valores de produção de mais de 100.000 barris de petróleo por dia em uma única plataforma já foram alcançados pela Petrobras. Nestas condições uma melhor compreensão da dinâmica dos vórtices causando a vibração dos “risers” é essencial.

No projeto temático, três tipos distintos de abordagem foram adotados para o estudo do VIV. Com a primeira, baseada em desenvolvimentos recentes da *Dinâmica dos Fluidos Computacional* (CFD), procurou-se compreender e quantificar o fenômeno através das equações básicas que o regem. Com a segunda, baseada em ensaios em escala reduzida, teve-se uma preocupação semelhante utilizando uma metodologia distinta. Finalmente, com a terceira procurou-se, através de uma visão fenomenológica do mecanismo básico da interação hidroelástica, propor modelos analíticos simplificados.

A abordagem baseada no CFD, apesar de poderosa e promissora, encontra dificuldades ainda insuperáveis relacionados à tridimensionalidade do problema; a técnica experimental, por sua vez, não consegue simular, de maneira apropriada, o “riser” real, não só porque a distorção de escala é tremenda como também porque a condição ambiental é muito difícil de ser imitada no laboratório. A abordagem que pode mais facilmente ser generalizada, baseada em uma visão de sobrevôo do fenômeno, padece do defeito congênito de toda abordagem com esta característica: a dificuldade de se validar suas predições quantitativas. Neste cenário entende-se que uma compreensão própria do fenômeno, em seus diferentes aspectos e visando uma aplicação ao problema prático que a Engenharia Oceânica coloca, necessita da utilização complementar das distintas abordagens acima referidas.

Olhando agora pelo ponto de vista acadêmico, nos últimos trinta anos muitos artigos que lidam com o estudo do escoamento ao redor de corpos cilíndricos, tanto computacionais quanto experimentais, têm sido publicados em periódicos de grande relevância. Ao longo deste tempo estes estudos evoluíram bastante, e hoje os pesquisadores envolvidos com este tema utilizam aparatos experimentais e computacionais bastante sofisticados, a fim de analisar em detalhe todas as peculiaridades presentes neste escoamento.

1.1 Motivação

A oscilação da estrutura imersa no escoamento, na maioria dos casos práticos, de seção cilíndrica, altera significativamente o fenômeno de formação e desprendimento de vórtices.

Listar os exemplos práticos de escoamento ao redor de corpos rombudos e suas aplicações é uma enorme tarefa. O conhecimento das forças fluido-dinâmicas que atuam sobre o corpo é essencial no projeto de torres de estruturas “offshore”, torres de resfriamento, pontes, veículos de alta velocidade, edifícios, etc.

1.2 Organização do texto

A seguir será mostrada a estrutura do corpo de texto deste trabalho, relatando os assuntos tratados nos diversos capítulos.

O Capítulo 2 fornece um resumo dos fundamentos de Vibração Induzida por Vórtices no escoamento ao redor de um cilindro, mostrando em detalhes as duas formas de estudo do escoamento ao redor de um cilindro oscilando: oscilação imposta ou forçada e cilindro apoiado em base elástica.

Os Capítulos 3 e 4 mostram a metodologia utilizada neste projeto: o Método dos Elementos Espectrais. O capítulo 3 apresenta os fundamentos do método e o capítulo 4 mostra a aplicação deste na solução das equações de Navier-Stokes.

No capítulo 5 encontram-se os resultados das simulações computacionais, separadamente estão as simulações bidimensionais do escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente e apoiado em base elástica, com as devidas análises e discussões.

Por fim, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões sobre o desenvolvimento do projeto até este ponto são apresentadas.

2 Escoamento ao redor de um cilindro

O número de Reynolds, parâmetro governante do escoamento incompressível ao redor de um corpo cilíndrico, é definido pela razão:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}, \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, U_{∞} é a velocidade do escoamento incidente ao longe, D é o diâmetro do cilindro e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Com o aumento de Re , o escoamento passa por sucessivas transições em diferentes regiões do escoamento perturbado. A região de esteira é a parte do escoamento perturbado que recebeu até hoje a maior parte da atenção devotada pelos pesquisadores. Grandes estruturas são formadas na porção desta região mais próxima ao corpo, denominada de região de esteira próxima, e são convectadas ao longo da esteira, ao mesmo tempo em que decaem de intensidade por efeitos de difusão. A forma e o decaimento de tais estruturas dependem do estado do escoamento nesta região, que pode ser laminar, transicional ou turbulento. Este capítulo foi baseado nas referências: Williamson [30], Williamson [32], Williamson e Roshko [3], Meneghini [6], Meneghini [7], Meneghini [11], Khalak e Williamson [5], Saltara et al. [20], Carmo [28], dentre outros.

2.1 Transição da esteira de vórtices

A esteira de vórtices até $Re \approx 180 - 200$ é bidimensional, a partir deste valor, sinais de turbulência começam a aparecer. Este é o regime de escoamento investigado neste trabalho. Fenômenos como deslocamentos de vórtices e as transições para os chamados modos tridimensionais A e B acontecem, afetando também a organização da esteira bidimensional. A transição na esteira está associada com duas descontinuidades no processo de geração e emissão dos vórtices à medida que Re é aumentado. Estas descontinuidades manifestam-se na curva $St \times Re$ (Figura 2.1).

Figura 2.1: Curva $S_f \times Re$ para os regimes laminar e faixa de transição na esteira, mostrando os modos tridimensionais A e B. Reproduzido de Williamson [30].

Após a primeira descontinuidade, que acontece para $Re=180$ a 200 , dependendo das condições experimentais, percebe-se que os tubos de vórtices primários se deformam formando laços, levando à formação de pares de vórtices com vorticidade no plano $x-y$, na direção do escoamento principal. Esses pares de vórtices podem ser observados na Figura 2.2, e tem comprimento de periodicidade na direção do eixo entre 3 e 4 diâmetros. O processo de geração desses laços é auto-sustentável, devido à indução do tipo Biot-Savart de um laço para o próximo, e ocasiona uma sequência de laços numa mesma altura em relação ao eixo do cilindro (Williamson, [32]). Esta primeira descontinuidade apresenta histerese o modo de emissão resultante é conhecido na literatura como modo A.

Figura 2.2: Visualizações do escoamento, modos A ($Re=200$) e B ($Re=270$). Reproduzido de Williamson [30].

Por sua vez, o regime posterior à segunda descontinuidade na curva $St \times Re$ denota a transferência gradual de energia do modo A para o chamado modo B, na faixa de Re que vai de 230 a 250. O modo B consiste em pares de vórtices de menor escala alinhados com a corrente, com comprimento periódico na direção do eixo igual a aproximadamente 1 diâmetro e notavelmente mais uniformes ao longo do eixo do que as estruturas características do modo A. Uma visualização do escoamento neste modo pode ser encontrada na Figura 2.2. Esta segunda descontinuidade não apresenta histerese e tem sua origem nas camadas cisalhantes livres.

São observados tipos de simetrias distintas para os modos A e B. Referindo-se ao sinal da circulação dos vórtices na direção do escoamento. A disposição dos vórtices em cada modo pode ser observada na Figura 2.3.

Figura 2.3: Diferentes simetrias dos modos A e B. Reproduzido e adaptado de Williamson [32].

De acordo com a Figura 2.4, vê-se que existem modos instáveis ou transientes, representados pelas linhas tracejadas. Esses estados podem ocorrer no início de simulações ou experimentos, mas tendem a evoluir com um tempo para estados mais estáveis, representados por linhas cheias. Quando o número de Reynolds ultrapassa o primeiro ponto crítico para tridimensionalidades, o escoamento pode seguir uma transição suave, que corresponde ao aparecimento do modo A somente, sem a presença de deslocamentos. Após certo tempo, com o desenvolvimento dos deslocamentos em alguns sítios de enlaçamento de vórtices intrínsecos do modo A, o escoamento reverte para o estado chamado de A*, que corresponde a uma combinação de estruturas do modo A e deslocamentos de vórtices. Por volta de $Re=230-250$, há períodos intermitentes onde estruturas características do modo B predominam ao longo do eixo, fazendo com que a curva de St se desloque para um patamar mais alto (B), e períodos onde predominam estruturas do modo A com deslocamentos, levando o St a valores mais baixos (A*). Acima de $Re=250$, o escoamento permanece no modo B, sem deslocamentos, a não ser que estas sejam artificialmente introduzidas, caso este em que a curva encontrada para St é aquela chamada B*. Esta curva é uma extensão contínua da curva A*.

Figura 2.4: Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro.
Reproduzido de Williamson [32].

Concluindo, há duas curvas distintas de $St \times Re$ na Figura 2.4: a superior corresponde à presença de instabilidades de pequena escala exclusivamente e a inferior corresponde à combinação dessas instabilidades de pequena escala com deslocamentos de vórtices. O caminho natural para a transição na esteira de um cilindro infinito passa de um estado para outro, na sequência $2D \rightarrow A \rightarrow A^* \rightarrow B$.

2.2 Escoamento ao redor de um cilindro oscilando

O fenômeno de geração e desprendimento de vórtices pode ser dramaticamente alterado quando o corpo rombudo está oscilando ou, equivalentemente, quando estiver imerso em um escoamento oscilatório.

A forma como a oscilação do corpo afeta o fenômeno de geração de vórtices pode ser estudado de duas maneiras distintas. A primeira delas procura analisar a influência indiretamente através da aplicação de oscilações forçadas em um cilindro montado em um túnel de vento ou água. A segunda procura investigar diretamente os efeitos da oscilação montando o cilindro em um sistema de suporte externo constituído por molas ajustáveis e um sistema de amortecimento de forma a permitir a sua movimentação transversal e/ou na direção do escoamento. O esquema das duas maneiras de se estudar o escoamento ao redor de um cilindro oscilando está mostrado na Figura 2.5.

Figura 2.5: Esquema das formas de estudo do escoamento ao redor de um cilindro oscilando.

Existem prós e contras em cada um destas formas de se atacar o problema. A utilização de um cilindro montado em base elástica nos permite obter evidências diretas das interações não-lineares que ocorrem entre excitação e resposta. No entanto, este método acarreta um aumento apreciável nos parâmetros a serem medidos, complicando de maneira considerável a interpretação dos resultados. O outro método, i.e. através de oscilações forçadas, faz com que os experimentos tenham um número inferior de parâmetros a serem medidos, mas algumas características observadas em problemas práticos de VIV não são por ele reproduzidas.

A questão que surge naturalmente é: sob quais condições um ensaio com o cilindro oscilando forçadamente é equivalente a um ensaio no qual o cilindro está montado em base elástica?

Para responder esta pergunta deve-se investigar o sentido da transferência de energia: se ela ocorre do fluido para o corpo ou vice-versa. A energia transferida está diretamente relacionada com o ângulo de fase entre a força transversal ao escoamento e o deslocamento do

corpo. Caso a transferência de energia em uma oscilação forçada, com certa frequência e amplitude, ocorrer do fluido para o corpo oscilando, este provavelmente oscilaria se estivesse montado numa base elástica com uma frequência natural próxima daquela da oscilação do corpo.

Quando temos um experimento com um cilindro montado em base elástica, oscilações ocorrerão apenas quando a energia se transferir do fluido para o corpo. Dependendo de como se define o sistema mecânico, pode-se convencionar este sentido como sendo de energia positiva. Logicamente, na dinâmica do sistema, deve-se considerar a energia média transferido do fluido para o cilindro montado em base elástica. Por sua vez, quando fazemos um experimento de oscilação forçada, a energia não está restrita a valores positivos: dependendo da amplitude e frequência de oscilação valores negativos ou positivos podem ser obtidos.

A energia transferida do fluido para o corpo oscilando, conforme já foi dito, está diretamente relacionada ao ângulo de fase entre a força e o deslocamento do corpo. Além disto, o estudo deste ângulo de fase em casos que o corpo é forçado a oscilar permite uma comparação direta com casos em que o corpo está livre para oscilar por estar montado numa base elástica.

Para mostrar esta afirmação, tomando um corpo oscilando transversalmente ao escoamento, a energia transferida em um ciclo é

$$\bar{E} = \int_0^T F_y(t) dy_b, \quad (2.2)$$

onde F_y é a força transversal por unidade de comprimento na direção da envergadura. Esta força lidera o deslocamento transversal y_b por uma fase ϕ e é obtida através de

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 D \bar{C}_l \sin(2\pi ft + \phi), \quad (2.3)$$

na qual $\bar{C}_l$ é a amplitude do coeficiente de sustentação e

$$y_b = A \sin(2\pi ft). \quad (2.4)$$

A energia transferida ao corpo pelo fluido em cada ciclo com período T de oscilação é

$$\bar{E} = \int_0^T F_y dy_b = \int_0^T F_y \frac{dy_b}{dt} dt, \quad (2.5)$$

a qual pode ser reescrita utilizando (2.3) e (2.4), fornecendo

$$\bar{E} = -\frac{1}{2} \rho U^2 D \bar{C}_l A \int_0^{2\pi} \cos(\tau + \phi) \sin(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

onde $\tau = 2\pi ft$. Esta expressão nos fornece

$$\bar{E} = -\frac{\pi}{2} \rho U^2 D \bar{C}_l A \sin \phi. \quad (2.7)$$

Adimensionalizando esta energia obtemos

$$E = \frac{\bar{E}}{\frac{1}{2} \rho U^2 D^2} = -\pi \bar{C}_l \left(\frac{A}{D} \right) \sin \phi. \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) mostra claramente a dependência da energia com a fase.

2.2.1 Escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente

Bishop e Hassan [1] foram uns dos primeiros pesquisadores a investigar a influência da oscilação do corpo na geração de vórtices. Eles estudaram como as forças em um cilindro são afetadas quando o corpo oscila forçadamente e transversalmente à direção do escoamento ao longe. A oscilação do corpo imposta era da forma senoidal,

$$y_b = A \sin(2\pi ft), \quad (2.9)$$

onde y_b é a coordenada do centro do cilindro, A a amplitude do movimento e f a frequência da oscilação forçada.

$$\bar{y} = \frac{A}{D} \sin(2\pi ft), \quad (2.10)$$

na qual $\bar{y}$ é o deslocamento adimensional transversal normalizado do corpo, A/D é a amplitude normalizada da oscilação, D é o diâmetro do cilindro. Bishop e Hassan descobriram que à medida que a frequência de oscilação do corpo f aproxima-se da frequência do número de Strouhal f_s , a frequência de oscilação do corpo e a frequência da oscilação do coeficiente de sustentação tornam-se sincronizadas, isto é, a oscilação é capaz de alterar o valor da frequência de geração e desprendimento de vórtices para seu próprio valor. A sincronização, que persiste numa faixa de frequências para um dado valor de amplitude de oscilação, é chamada na literatura inglesa de “lock-in”.

Um importante aspecto apontado Bishop e Hassan é a variação brusca do ângulo de fase ϕ entre a força transversal e o deslocamento do corpo que ocorre quando a frequência de oscilação varia em torno da frequência de geração de vórtices. Junto com esta brusca variação ocorre um repentino aumento da amplitude do coeficiente de sustentação, conforme visto na Figura 2.6.

Figura 2.6: Variação brusca do coeficiente de sustentação e do ângulo de fase próximo ao ponto de ressonância, reproduzida de Bishop e Hassan [1].

Alguns anos após os experimentos de Bishop e Hassan, Koopman [2] também investigou o efeito de oscilações transversais forçadas na geração de vórtices. Seu principal interesse era a determinação da fronteira de sincronização, i.e. a fronteira de “lock-in”. A fronteira de “lock-in” determinada por Koopman é mostrada na Figura 2.7.

Figura 2.7: Fronteira de sincronização, reproduzida por Koopman [2].

Koopman descobriu que a sincronização só ocorre acima de um valor mínimo de amplitude de movimento. É possível notar que os limites superior e inferior de frequências para as quais ocorre “lock-in” são muito dependentes da amplitude e fracamente dependentes do número de Reynolds do escoamento.

Williamson e Roshko [3] realizaram uma série de experimentos com um cilindro oscilando transversalmente. O número de Reynolds dos experimentos estava nos intervalos entre 300 – 1000, enquanto foi varrida uma faixa de amplitudes de $0.2D - 5D$ e uma de frequências $0.3f_s - 5f_s$ de oscilação. Eles encontraram uma série de regimes de sincronização, os quais foram classificados em relação ao número de vórtices gerados e desprendidos em cada ciclo de oscilação. Eles classificaram como sincronização fundamental quando dois vórtices de circulação opostas são desprendidos a cada ciclo, este modo foi chamado de 2S. Para amplitudes mais altas é observado um modo onde dois pares de vórtices são gerados e desprendidos a cada ciclo, este classificado como modo 2P. Uma série de modos intermediários foram observados para diferentes combinações de velocidade reduzida (V_r) e amplitude de oscilação, onde

$$V_r = \frac{U}{fD} \quad V_r = \frac{U}{fD} . \quad (2.11)$$

Figura 2.8: Esquema dos tipos mais freqüentes de modos de sincronização. Reproduzido de Williamson e Govardhan [26].

Williamson e Roshko mapearam os modos de ocorrência esquematicamente em função destes parâmetros na curva apresentada na Figura 2.9.

Figura 2.9: Mapeamento dos modos de sincronização para um cilindro oscilando forçadamente, reproduzido de Williamson e Roshko [3].

A sincronização primária é aquela região ao redor da frequência de Strouhal. Nesta região ocorrem normalmente os modos 2S ou 2P e para baixos números de Reynolds, o modo P+S (um vórtice mais um par de circulações opostas). Nesta região temos também o fenômeno de histerese ao redor da frequência de Strouhal. A passagem do modo 2P para 2S e vice-versa é acompanhada por uma descontinuidade do ângulo de fase entre a força e deslocamento transversal. Valores elevados de ângulo de fase (160-180°) e de amplitude estão aparentemente relacionados ao modo 2P. O modo 2S, por sua vez, está relacionado a ângulos de fase na faixa de 0-90°. Na Figura 2.10 é apresentado um esquema destes modos e do ângulo de fase em função do comprimento de onda λ da oscilação:

$$\lambda = V_r D = \frac{U}{f}. \quad (2.12)$$

Figura 2.10: O fenômeno de histerese na curva do ângulo de fase e sua relação com os modos de geração e desprendimento de vórtice, reproduzida de Williamson e Roshko [3]

É interessante notar que em Meneghini [6] e Meneghini e Bearman [7] foi observado fenômeno semelhante no que se refere à memória do escoamento: iniciando-se a oscilação com um deslocamento positivo do cilindro, ocorria a formação do modo P+S, com o par P formando-se na parte superior da esteira; quando iniciava-se o deslocamento para baixo, ocorria o inverso.

Um estudo detalhado da variação brusca do ângulo de fase quando um cilindro é forçado a oscilar com frequência próxima daquela de Strouhal foi efetuado por Blackburn e Henderson [8]. Neste trabalho, utilizou-se o Método de Elementos Espectrais/hp para simular o escoamento bidimensional com $Re = 500$ ao redor de um cilindro oscilando. A amplitude foi fixada em $A/D = 0.25$, enquanto que a frequência de oscilação variava dentro da faixa de $0.7 < f/f_s < 1.1$, onde f_s indica mais uma vez a frequência de geração e desprendimento de vórtices (frequência de Strouhal).

Figura 2.11: Variação do ângulo de fase, reproduzida de Blackburn e Henderson [8].

A Figura 2.11 mostra a variação brusca do ângulo de fase estudada por Blackburn e Henderson.

Blackburn e Karniadakis [21] realizaram um estudo bi e tridimensional do escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente utilizando o método dos elementos espectrais. As simulações foram realizadas com $Re = 200$ e o número de Strouhal $St = \frac{f_v U}{D} = 0.200$, onde f_v é a frequência de desprendimento de vórtices. Foram escolhidas três amplitudes de oscilação: $0.1D$, $0.2D$ e $0.5D$.

Figura 2.12: Fronteira de sincronização para $Re=200$, reproduzida de Blackburn e Karniadakis [21].

2.2.1.1 Método do escoamento oscilatório transversal

O escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente e imerso a uma corrente é cinematicamente equivalente ao escoamento ao redor de um cilindro fixo com uma corrente sobreposta a um escoamento oscilatório transversal. A invariância do campo de vorticidade quando o referencial está sujeito à aceleração linear é o que faz estes dois tipos de escoamento serem equivalentes. Estes dois escoamentos diferem dinamicamente devido aos efeitos inerciais causados pelo fato do referencial apresentar aceleração.

Com isso em mente, o escoamento ao redor de um cilindro oscilando transversalmente é simulado considerando o referencial preso a ele e um escoamento oscilatório transversal. O escoamento oscilatório sobreposto é dado por

$$v = V_a \sin(2\pi ft), \quad (2.13)$$

onde V_a é a amplitude do escoamento oscilatório. Neste caso, a posição do corpo na direção transversal y_b é dada por

$$y_b = \frac{V_a}{2\pi f} \cos(2\pi ft). \quad (2.14)$$

A partir desta expressão, pode-se avaliar

$$\frac{dy_b}{dt} = -V_a \sin(2\pi ft) \quad (2.15)$$

e

$$\frac{d^2 y_b}{dt^2} = -2\pi f V_a \cos(2\pi ft). \quad (2.16)$$

A expressão (2.15) mostra que $\frac{dy_b}{dt}$ é igual a $-v$ devido ao movimento relativo entre o corpo e a velocidade transversal imposta.

A amplitude A do movimento do corpo está relacionada à amplitude do escoamento oscilatório através da expressão

$$\frac{A}{D} = \frac{V_a}{2\pi f D}. \quad (2.17)$$

As malhas computacionais utilizadas na maioria das simulações possuem referenciais fixos ao cilindro. As forças calculadas neste referencial devem ser corrigidas para levar em conta os efeitos inerciais. Deve-se, então, aplicar a seguinte correção para o caso de um cilindro bidimensional

$$\vec{F} = \vec{F}_{fm} + \frac{\rho \pi D^2}{4} \vec{a}_{fm}, \quad (2.18)$$

na qual $\vec{F}$ é a força no referencial absoluto (inercial), $\vec{F}_{fm}$ é a força no referencial não-inercial fixo ao cilindro e $\vec{a}_{fm}$ é a aceleração do referencial não-inercial em relação ao referencial absoluto. No caso de uma oscilação transversal, somente o coeficiente de sustentação deve ser corrigido

$$C_l = C_{l_{fm}} + \frac{\pi D}{2U^2} \frac{d^2 y_b}{dt^2}, \quad (2.19)$$

onde C_l é o coeficiente de sustentação no referencial inercial e $C_{l_{fm}}$ no referencial não-inercial. Na direção da corrente não são necessárias correções já que nesta direção este ultimo referencial não apresenta nenhuma aceleração.

Para calcular o ângulo de fase basta analisar o coeficiente de sustentação em função do tempo. Se o coeficiente é decomposto em um termo em fase com o deslocamento do cilindro (C_{l_m}), e em outro em fase com a velocidade do cilindro (C_{l_d}), temos

$$C_l = Cl_m \cos(2\pi ft) - Cl_d \sin(2\pi ft). \quad (2.20)$$

O sinal negativo acima aparece devido à definição do deslocamento, velocidade e aceleração do cilindro.

Para determinar os coeficientes da expressão (2.20), usa-se as propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno, assim obtemos

$$Cl_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_l \cos \tau d\tau, \quad (2.21)$$

$$Cl_d = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_l \sin \tau d\tau, \quad (2.22)$$

onde $\tau = 2\pi ft$ e as integrais são calculadas nos ciclos de oscilação e é tomada a média.

Para obter o ângulo de fase, a expressão (2.20) é escrita na forma

$$\begin{aligned} C_l &= \bar{C}_l \cos(2\pi ft + \phi) = \\ &= \bar{C}_l (\cos(2\pi ft) \cos \phi - \sin(2\pi ft) \sin \phi), \end{aligned} \quad (2.23)$$

o que fornece

$$C_{lm} = \bar{C}_l \cos \phi, \quad (2.24)$$

$$C_{ld} = \bar{C}_l \sin \phi, \quad (2.25)$$

$$\phi = \text{atan} \frac{C_{ld}}{C_{lm}}. \quad (2.26)$$

Meneghini e Bearman [7] realizaram um estudo detalhado sobre o escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente com baixas amplitudes de oscilação $A/D < 0.6$, utilizando o método dos vórtices discretos com difusão viscosa. Eles obtiveram a fronteira de sincronização mostrada na Figura 2.13. Nesta faixa de sincronização, dois vórtices com circulações opostas são desprendidos à cada ciclo (modo 2S). Este resultado está de acordo com aquele observado experimentalmente por Williamson e Roshko [3].

Figura 2.13: Fronteira de sincronização para baixas amplitudes, $A/D < 0.6$. Reproduzido de Meneghini e Bearman [7].

Na Figura 2.14 é apresentado o caso com $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.90$, a fase entre a força de sustentação e o deslocamento do cilindro é aproximadamente 180° . Este caso se localiza na região interna da fronteira de sincronização e o modo de desprendimento de vórtices é o 2S.

Figura 2.14: Série temporal dos coeficientes de força (C_d e C_l) e posição do cilindro (y_b) para $f/f_s = 0.90$ e $A/D = 0.15$. Reproduzida de Meneghini e Bearman [7].

Os resultados para $f/f_s = 1.025$ e $A/D = 0.05$ são mostrados na Figura 2.15. O escoamento chega a um regime estacionário após 18 ciclos de oscilação. O ângulo de fase move-se de um valor elevado (180°) para um valor aproximadamente 10° quando o escoamento entra em regime.

Figura 2.15: Série temporal dos coeficientes de força (C_d e C_l) e posição do cilindro (y_b) para

$f/f_s = 1.025$ e $A/D = 0.05$. Reproduzida de Meneghini e Bearman [7].

Na Tabela 2.1 são apresentados os valores do ângulo de fase para uma oscilação de $A/D = 0.15$. Os resultados são mostrados para uma faixa de frequências próximas a frequência natural de desprendimento de vórtices. Analisando a tabela é possível notar a grande variação de ϕ à medida que a velocidade reduzida é alterada. Na Tabela 2.2 são apresentados os resultados para uma amplitude maior, $A/D = 0.40$.

Tabela 2.1: Ângulo de fase, para $A/D = 0.15$.

V_r	f/f_s	ϕ	C_{d_m}	C_{l_m}
6.38	0.80	180.1	1.94×10^{-5}	3.24×10^{-2}
6.00	0.85	196.7	-9.85×10^{-2}	-0.328
5.67	0.90	173.0	5.81×10^{-2}	-0.469
5.37	0.95	147.7	0.323	-0.514
5.30	0.9625	135.8	0.463	-4.75
5.23	0.975	132.9	0.415	-0.479
5.17	0.9875	121.7	0.626	-0.387
4.98	1.025	97.9	0.875	-0.121
4.86	1.05	73.4	0.998	0.296
4.75	1.075	2.9 ⁻²	3.94×10^{-5}	0.768

Tabela 2.2: Ângulo de fase, para $A/D = 0.40$.

V_r	f/f_s	ϕ	C_{ld}	C_{lm}
6.38	0.80	180	0	3.24×10^{-2}
6.00	0.85	180	0	-0.328
5.67	0.90	162	0.167	-0.514
5.37	0.95	150	0.274	-0.475
5.23	0.975	138	0.431	-0.479
4.86	1.05	0	3.8×10^{-4}	1.39
4.75	1.075	-1.2×10^{-2}	2.97×10^{-4}	1.42

2.2.2 Escoamento ao redor de um cilindro oscilando montado em uma base elástica

A importância prática do estudo de cilindros oscilando devido à “vortex shedding” fez com que houvesse muitas pesquisas fundamentais sobre o tópico nos últimos anos. Muitas destas pesquisas estudaram o fenômeno de VIV utilizando um cilindro montado em base elástica livre para oscilar. Com este tipo de aparato, oscilações ocorrem somente para certos valores de velocidade reduzida, onde a energia é transferida do fluido para o corpo (positiva) e a frequência de despreendimento de vórtices está próxima da frequência natural do sistema ou de um de seus múltiplos ou submúltiplos. A vantagem de simular o escoamento ao redor de um cilindro livre para oscilar reside no fato de que neste caso a medição das amplitudes de oscilação é direta. Neste aspecto, experimentos em base elástica são mais realistas do que aqueles nos quais as oscilações são impostas. No entanto, o preço que se paga é que o número de parâmetros nos experimentos em base elástica é muito maior do que aqueles com oscilações forçadas.

Na maioria dos ensaios, o único grau de liberdade é o transversal. Isto porque a amplitude de oscilação do arrasto é muito pequena se comparada à amplitude da sustentação.

Na maioria dos ensaios e simulações com esta configuração, os objetivos são obter as amplitudes de oscilação para uma faixa de velocidade reduzida, estudar os efeitos do amortecimento estrutural nestas amplitudes máximas e uma possível correlação entre estas e os modos de despreendimento de vórtices.

A equação básica do problema é a equação de um oscilador:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_l, \quad (2.27)$$

na qual m é a massa do cilindro, c é o amortecimento, k é a rigidez do sistema e F_l é a força que atua no cilindro na direção transversal em relação à corrente. Para adimensionalizar

essa equação, seguindo Khalak e Williamson [5], inicialmente definimos os adimensionais, parâmetro de massa m^* , amplitude adimensional A^* , frequência adimensional f^* , parâmetro de amortecimento ζ , parâmetro de amortecimento ζ_a e velocidade reduzida V_r ,

$$m^* = \frac{m}{m_d} = \frac{4m}{\pi \rho D^2 l}, \quad (2.28)$$

$$A^* = \frac{A}{D}, \quad (2.29)$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad (2.30)$$

$$T_{n_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m+m_a}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m+C_a m_d}}}, \quad (2.31)$$

$$f^* = \frac{f_{osc}}{f_n}, \quad (2.32)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad (2.33)$$

$$\zeta_a = \frac{c}{2\sqrt{k(m+m_a)}} = \frac{c}{2\sqrt{k(m+C_a m_d)}}, \quad (2.34)$$

$$V_r = \frac{U}{f_n D}, \quad (2.35)$$

$$V_{r_a} = \frac{U}{f_{n_a} D}, \quad (2.36)$$

nas quais m_d é a massa de fluido deslocada pelo corpo, m_a é a massa adicional, y é o deslocamento transversal do corpo, U é a velocidade do escoamento e f_n é a frequência natural do sistema medida no vácuo e o subscrito a na frequência natural e no amortecimento indicam parâmetros medidos na água.

Para adimensionalizar a equação (2.27), utilizando os parâmetros em água, inicialmente a dividimos por $m+m_a$,

$$\frac{m}{m+m_a} \ddot{y} + \frac{c}{m+m_a} \dot{y} + \frac{k}{m+m_a} y = \frac{F_l}{m+m_a}, \quad (2.37)$$

e utilizando a definição da fração do amortecimento crítico ζ , de coeficiente de sustentação e frequência natural,

$$\frac{m}{m+m_a} \ddot{y} + 2\zeta\omega_{n_a} \sqrt{\frac{m}{m+m_a}} \dot{y} + \omega_{n_a}^2 y = \frac{1}{2(m+m_a)} \rho U^2 D l C_l, \quad (2.38)$$

retirando o termo que multiplica a aceleração e introduzindo o coeficiente de massa m^* e o coeficiente de massa adicional C_a ,

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_{n_a} \sqrt{1 + \frac{C_a}{m^*}} \dot{y} + \omega_{n_a}^2 \left(1 + \frac{C_a}{m^*}\right) y = \frac{2}{\pi D m^*} U^2 C_l. \quad (2.39)$$

Para a adimensionalização final desta expressão, considera-se o deslocamento adimensional como:

$$Y = \frac{y}{D}, \quad (2.40)$$

e o tempo adimensional como:

$$\tau = \frac{t}{T_{n_a}}. \quad (2.41)$$

As derivadas temporais de (2.40), tornam-se

$$\dot{y} = \frac{D}{T_{n_a}} \dot{Y}, \quad \ddot{y} = \frac{D}{T_{n_a}^2} \ddot{Y}, \quad (2.42)$$

e, com estas expressões, pode-se reescrevê-la como

$$\ddot{Y} + 4\pi\zeta \sqrt{1 + \frac{C_a}{m^*}} \dot{Y} + 4\pi^2 \left(1 + \frac{C_a}{m^*}\right) Y = \frac{2}{\pi n^*} V_{r_a}^2 C_l. \quad (2.43)$$

Procedendo de maneira análoga mas agora com os parâmetros definidos no vácuo, inicialmente dividindo a equação (2.27) por m

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{F_l}{m}, \quad (2.44)$$

e agora, utilizando a fração do amortecimento critico, coeficiente de sustentação, frequência natural e o coeficiente de massa m^* , a expressão torna-se

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{2}{\pi D m^*} U^2 C_l. \quad (2.45)$$

Com a mesma adimensionalização para o deslocamento, tempo e derivadas temporais, finalmente chega-se à expressão:

$$\ddot{Y} + 4\pi\zeta \dot{Y} + 4\pi^2 Y = \frac{2}{\pi n^*} V_r^2 C_l. \quad (2.46)$$

Esta é a expressão adimensional do oscilador. A não-linearidade da mesma está expressa no coeficiente de sustentação C_l e de suas componentes em fase com a aceleração e

velocidade. As duas expressões (2.43) e (2.46) são equivalentes, a única diferença reside na forma com que os coeficientes são definidos e a escala de tempo. Sendo dados os valores de m^* , ζ e V_r , pode-se resolver a expressão (2.46) a cada instante de tempo com o valor de C_l resultante da solução numérica do escoamento ao redor do cilindro.

Conforme já foi dito anteriormente, o objetivo das simulações computacionais e experimentos com cilindro apoiado em base elástica é a obtenção da curva de máximas amplitudes de oscilação em função da velocidade reduzida, isto porque a vida útil de elementos cilíndricos de estruturas “offshore” sujeitos a VIV, tais como “risers”, depende diretamente da amplitude máxima de oscilação.

Para um cilindro montado em base elástica com um grau de liberdade na direção transversal em relação à corrente, a equação que rege o fenômeno é a expressão (2.46). Pode ser visto em Bearman [12], para amplitudes de oscilação induzida por vórtices com uma corrente constante, a força hidrodinâmica na direção transversal e a resposta de deslocamento do corpo oscilam na mesma frequência, f_{osc} , a qual é usualmente próxima da frequência natural do sistema f_n . Quando um corpo está respondendo à geração de vórtices, a força de sustentação lidera a excitação por um ângulo de fase ϕ e a energia transferida do fluido para o corpo é proporcional ao seno deste ângulo.

Repetindo as expressões para deslocamento adimensional e coeficiente de sustentação, temos então

$$Y = \frac{y}{D} = \frac{A}{D} \sin(2\pi f_{osc} t), \quad (2.47)$$

$$C_l = \bar{C}_l \sin(2\pi f_{osc} t + \phi). \quad (2.48)$$

Substituído essas expressões na equação (2.46), obtemos

$$-\frac{A}{D} 4\pi^2 f_{osc}^2 \sin(2\pi f_{osc} t) + 8\pi^2 \zeta \frac{A}{D} f_{osc} \cos(2\pi f_{osc} t) + 4\pi^2 \frac{A}{D} \sin(2\pi f_{osc} t) = \frac{2}{\pi m^*} V_r^2 \bar{C}_l \sin(2\pi f_{osc} t + \phi), \quad (2.49)$$

e igualando os coeficientes dos senos e co-senos na expressão resultante obtemos

$$f^* = \frac{f_{osc}}{f_n} = \sqrt{1 - \frac{\bar{C}_l}{4\pi^2} \left(\frac{2}{m^*} \right) V_r^2 \left(\frac{A}{D} \right)^{-1}}, \quad (2.50)$$

$$A^* = \frac{A}{D} = \frac{\bar{C}_l \sin \phi}{8\pi^2} \left(\frac{2}{m^* \zeta} \right) V_r^2 \frac{1}{f^*}. \quad (2.51)$$

Como pode ser visto em Bearman [12], para oscilações de um cilindro onde m^* é da ordem de 10^3 , a frequência de oscilação deve ser próxima à frequência natural do sistema. Para um fluido mais denso, como a água, onde m^* é da ordem da unidade, a frequência de oscilação pode ser significativamente diferente da frequência natural do sistema. Além disso, pode-se notar a importância do valor do ângulo de fase no valor da máxima amplitude de oscilação. Esta amplitude não depende somente da amplitude do coeficiente de sustentação C_l , mas sim da amplitude deste coeficiente em fase com a velocidade do corpo $C_l \sin \phi$. Analisando a expressão para amplitude, podemos também verificar sua dependência com o parâmetro de massa-amortecimento $m^* \zeta$. Quanto maior ele for, menores serão as amplitudes máximas esperadas.

Khalak e Williamson [5] modelaram o problema de uma maneira diferente através da definição de uma massa adicional “efetiva”. Esta massa inclui um efeito aparente devido à força transversal em fase com a aceleração do corpo ($C_l \cos \phi$)

$$C_{EA} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_l \cos \phi}{A^*} \left(\frac{U^*}{f^*} \right)^2. \quad (2.52)$$

Com esta definição, e utilizando a fração do amortecimento crítico definida para água (2.34) obtemos

$$f^* = \frac{f_{osc}}{f_n} = \sqrt{\frac{m^* + C_a}{m^* + C_{EA}}}, \quad (2.53)$$

$$A^* = \frac{A}{D} = \frac{\bar{C}_l \sin \phi}{4\pi^3} \left(\frac{1}{(m^* + C_a) \zeta_a} \right) \left(\frac{V_r}{f^*} \right)^2 f^*. \quad (2.54)$$

Analisando as duas expressões percebemos que elas são similares às obtidas por Bearman [12], mas com os parâmetros definidos em água. Devemos lembrar que em Khalak e Williamson [5] o coeficiente de massa adicional é admitido igual à unidade. Isto equivale a fazer $m_a = m_d$. A dependência da amplitude de oscilação com $m^* \zeta$ é evidente e inversamente proporcional analisando-se a expressão (2.51).

Por este motivo, diversos pesquisadores apresentam os resultados de amplitude máxima em função de parâmetros proporcionais a $m^* \zeta$. Vickerey e Watkins [13] estudaram o problema de VIV em um cilindro engastado em uma das extremidades e apresentaram os resultados em função de um parâmetro de estabilidade K_s , definido como

$$K_s = \pi^2 (m^* \zeta). \quad (2.55)$$

Em um outro artigo, porém investigando VIV em um cilindro montado em base elástica, Scruton [14] definiu um parâmetro também proporcional a $m^* \zeta$, o qual veio a ser conhecido por número de Scruton

$$S_c = \frac{\pi}{2} (m^* \zeta). \quad (2.56)$$

Analizando um modelo de esteira através da utilização da equação de van der Pol, Skop e Griffin [15] também chegaram a um parâmetro similar

$$S_G = 2\pi^3 S_t^2 (m^* \zeta). \quad (2.57)$$

Em Khalak e Williamson [5] todos estes parâmetros são apresentados e a equivalência dos mesmos é clara. Skop e Balasubramanian [16] apresentam resultados experimentais da variação de A/D versus $m^* \zeta$. Na Figura 2.16 estes resultados são apresentados na forma A/D versus S_G . No entanto, Sarpkaya [17] mostrou que a resposta é governada independentemente por m^* e ζ . Ele apresentou como evidencia a sustentar esta hipótese resultados experimentais com três pares de dados com valores pequenos e distintos de amplitude e resposta, cada par com valores de S_G similares mas diferentes valores de m^* . Sarpkaya observou uma influencia maior de m^* nos resultados.

Figura 2.16: Dependência da amplitude com o parâmetro S_G . Reproduzida de Khalak e Williamson [5].

Zdravkovich [18] também prefere a utilização de uma análise independente da influência de m^* e ζ na amplitude de oscilação. Ele afirma que S_G é útil em problemas de engenharia de vento, onde $m^* > 100$, mas para problemas de tecnologia marítima, nos quais $m^* < 10$, devemos utilizá-lo com cautela. A análise da Figura 2.16 corrobora esta hipótese, já

que existe uma grande dispersão de resultados para ensaios em água e com $S_G < 1$. É interessante notar que devido à importância prática da obtenção da amplitude de oscilação, é comum encontrarmos referências de curvas que tentam reproduzir os resultados experimentais. Sarpkaya [17] propôs uma curva do tipo

$$A_{\max}^* = \frac{B}{\sqrt{C + S_G^2}}. \quad (2.58)$$

Na Figura 2.16, está indicada com linha cheia a curva dada pela expressão acima e com constantes $B = 0.385$ e $C = 0.12$. A concordância muito boa com os resultados experimentais é clara analisando-se esta figura.

Uma questão ainda não respondida diz respeito à máxima amplitude de oscilação. Os resultados experimentais com Reynolds elevado apresentam uma grande dispersão para o valor de $A_{\max}^*$ na faixa de $0.8 < A_{\max}^* < 1.5$. Outro problema ocorre quando se compara os resultados experimentais com simulações numéricas. Os valores de $A_{\max}^*$ encontrados em simulações numéricas subestimam o valor da amplitude máxima consideravelmente.

Existe uma concordância dos resultados numéricos apenas quando os comparamos com os resultados experimentais de Anagnostopoulos e Bearman [19]. Estes experimentos ocorreram no intervalo $90 < Re < 150$, e forneceram uma amplitude máxima de $A_{\max}^* = 0.55$. Esta evidência, aliada ao fato da maioria das simulações numéricas terem sido realizadas para baixos valores de Reynolds ($Re < 1000$), nos leva a concluir que existe uma dependência da amplitude de oscilação máxima com o valor de Re . Esta dependência ocorre mesmo na faixa na qual o número de Strouhal é constante, $180 \sim 200 < Re < 5 \times 10^5$. No entanto, deve ser ressaltado que nos experimentos de Anagnostopoulos e Bearman o valor de $m^* \zeta$ era elevado ($m^* \zeta = 0.179$). O fato de eles obterem amplitudes pequenas pode ser devido ao baixo número de Reynolds ou devido ao elevado valor de $m^* \zeta$.

As simulações de Saltara et al. [20] foram feitas para valores de velocidade reduzida no intervalo $2.0 < V_r < 14.0$. A maior amplitude de oscilação $A_{\max} / D = 0.67$ ocorreu para um valor de velocidade reduzida $V_r = 5.75$, e este também é o valor no qual ocorreu o maior coeficiente de arrasto médio. À medida que este valor de velocidade reduzida é aumentado, o ângulo de fase varia bruscamente. Na Figura 2.17 as séries temporais dos coeficientes de força e do deslocamento do cilindro para $Re = 1000$ e $V_r = 5.75$ são apresentados.

A estrutura da esteira de vórtices para $V_r = 5.75$ é mostrada na Figura 2.18. a esteira é do tipo 2S e apresenta um grande espaçamento transversal. Ainda analisando os resultados de Saltara et al. [20], verifica-se que a amplitude máxima obtida nas simulações é consideravelmente inferior àquela encontrada nos experimentos. Ainda não se sabe a razão deste desacordo. A explicação talvez esteja relacionada à diferença no número de Reynolds nos experimentos e nas simulações. Os resultados experimentais estão compreendidos numa faixa entre $6 \times 10^3 < Re < 4 \times 10^4$. Apesar de ter havido um ligeiro aumento da amplitude máxima para simulação com $Re = 1000$, comparada àquela com $Re = 200$, a diferença com o resultado experimental é considerável.

Figura 2.17: Séries temporais dos coeficientes de sustentação e de arrasto e do deslocamento do cilindro com $Re=1000$, cilindro montado em base elástica, $V_r=5.75$. Reproduzido de Saltara et al. [20].

Figura 2.18: Estrutura da esteira de vórtices para cilindro apoiado em base elástica com $Re=1000$ e $V_r=5.75$. Reproduzido de Saltara et al. [20].

Newman e Karniadakis [23] obtiveram amplitudes $A_{\max}^* / D = 0.8 - 1.0$ para simulações tridimensionais de um cilindro flexível com $Re = 500$ somente quando o amortecimento estrutural era anulado e o cilindro estava livre para oscilar para qualquer direção.

Brika e Laneville [24] e Khalak e Williamson [5] mostraram, analisando resultados experimentais, que existem dois valores possíveis de amplitudes máximas, cada um deles associados a um ramo da curva amplitude por velocidade reduzida. Eles mostraram que existe histerese associada com alternância da resposta entre estes dois ramos. É interessante notar que a amplitude do ramo inferior é aproximadamente $0.6D$, a qual é muito similar aos valores máximos encontrados nas simulações numéricas.

Brika e Laneville [24] sugeriram que os modos de geração e desprendimento de vórtices são diferentes nos dois ramos. Seguindo a nomenclatura de Williamson e Roshko [3], eles relacionaram o modo 2P ao ramo inferior e o modo 2S ao ramo superior. No modo 2S, dois vórtices com circulações opostas são gerados a cada ciclo de oscilação e no modo 2P dois pares de vórtices são formados em cada ciclo.

Figura 2.19: Amplitude de oscilação $A_{\max}^* = A_{\max} / D$, versus velocidade reduzida U^* . Reproduzido de Khalak e Williamson [5].

Khalak e Williamson [5] nos seus experimentos, procuraram verificar de maneira detalhada os possíveis regimes de geração de vórtices e a relação destes com os ramos na curva amplitude máxima por velocidade reduzida. A intenção deles era interpretar a relação

do modo de desprendimento dos vórtices com as características do sinal da força transversal. Na Figura 2.19 são apresentados os resultados de amplitudes dos experimentos em água de Khalak e Williamson (“Quadrados cheios”), para um parâmetro de massa $m^* = 10.1$ e $m^* \zeta = 0.013$, juntamente com os resultados em ar de Feng [25] (“Círculos vazios”) para um valor de $m^* = 248$ e $m^* \zeta = 0.325$. A amplitude máxima observada neste ultimo caso é inferior à observada em água. Além disto, a largura da faixa de velocidade reduzida na qual as amplitudes são elevadas é mais extensa em água do que em ar. Isso indica claramente a dependência desta largura no parâmetro m^* . Nos resultados em água foram observados três ramos: inicial, superior e inferior. Feng observou apenas dois ramos nos experimentos em ar.

Para analisar claramente a influência de m^* e do produto $m^* \zeta$ na amplitude máxima de oscilação, Khalak e Williamson [5] fizeram um conjunto de medições mantendo o valor de $m^* \zeta$ aproximadamente constante e variando m^* no intervalo de 1 a 20. Estes resultados são apresentados na Figura 2.20 e, por sua vez, comprova que o valor de $A_{\max}/D$ depende fundamentalmente do produto $m^* \zeta$. Além disso, podemos verificar que uma variação de m^* faz com que haja um aumento da faixa de velocidade reduzida em que ocorre o patamar correspondente ao ramo inferior. Quanto menor o valor de m^* mais extenso será este patamar.

Figura 2.20: Gráfico de “Griffin” do ramo superior e inferior por $(m^* + C_a)\zeta$; para uma variedades de valores de parâmetros de massa m^* . Reproduzido de Khalak e Williamson [5].

Fazendo a sobreposição dos resultados de Khalak e Williamson [5] no mapeamento proposto por Williamson e Roshko [3], algumas conclusões podem ser estabelecidas. Primeiramente, verificamos que o modo 2S ocorre apenas no ramo de excitação inicial, tanto

os ramos superior e inferior encontram-se na região de modo 2P. Já que o patamar superior corresponde à amplitude máxima de oscilação, temos dois pares de vórtices desprendidos a cada ciclo de oscilação. Este resultado não é o mesmo observado por Brika e Laneville [24] para experimentos com cilindros flexíveis, onde, apesar das amplitudes máximas por eles observadas serem muito próximas àsquelas de Khalak e Williamson, foi observado o modo 2S no ramo superior.

O modo obtido por Khalak e Williamson é similar ao obtido por Meneghini e Bearman [7], onde a mudança do modo 2S para 2P ou P+S ocorria sempre que um valor limite de amplitude fosse ultrapassado. As séries temporais das forças obtidas por Meneghini e Bearman indicam que quando o modo 2P é atingido, o sinal de C_l pode deixar de ter uma forma senoidal. Os resultados referentes aos modos de desprendimento de vórtices são apresentados na Figura 2.21.

Figura 2.21: Resposta de amplitude máxima de oscilação versus velocidade reduzida e versus velocidade reduzida dividida pela razão de frequências, sobreposta ao mapeamento de Williamson e Roshko [3].

Reproduzido de Khalak e Williamson [5].

Govardhan e Williamson [27] estudaram o efeito do número de Reynolds na vibração induzida por vórtices de um cilindro rígido montado em base elástica. Eles desenvolveram um mecanismo de controle de amortecimento estrutural, permitindo que o sistema possuísse amortecimento negativo e positivo. A Figura 2.22 mostra o efeito deste mecanismo sobre a amplitude de resposta do cilindro.

Figura 2.22: Demonstração do efeito do amortecimento negativo e positivo. Em (a), pode-se alterar o amortecimento efetivo para negativo, positivo, ou nulo. Em (b), fica evidente o efeito desta variação do amortecimento na amplitude de resposta do cilindro, em $\log(A)$. Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].

Experimentos anteriores apresentam uma grande divergência dos valores de máxima amplitude versus o produto massa-amortecimento ($\alpha = (m^* + C_A)\zeta$), no chamado “Gráfico de Griffin”. Govardhan e Williamson mostram um efeito evidente do numero de Reynolds no pico de amplitude correspondente a massa-amortecimento zero ($\alpha = 0$), Figura 2.23. Eles também mostraram (veja Figura 2.24) que a razão de massa, isoladamente, não interfere no valor de pico de amplitude, mas, apenas, através do parâmetro de massa-amortecimento.

Figura 2.23: Relação entre pico de amplitude (A^*) e número de Reynolds (Re), para amortecimento nulo. Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].

Figura 2.24: Pico de amplitude (A^*) para número de Reynolds fixado em $Re=4000$ e massa-amortecimento constantes ($\alpha = 0.1$ ou $\alpha = 0.5$), em função da razão de massa m^* . Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].

Govardhan e Williamson também compilaram inúmeros resultados de experimentos e simulações numéricas em um gráfico de pico de amplitude (A^*) versus número de Reynolds (Re), veja Figura 2.25.

●, Present ; ■, Govardhan & Williamson (1998); ⊙, Vikestad (1998); ▣, Hover, Techet & Triantafyllou (1998); □, Khalak & Williamson (1999); ○, Govardhan & Williamson (2000); ▽, Dahl, Hover & Triantafyllou (2004); ◁, Klamo, Leonard & Roshko (2004); △, Lucor (2004); ▷, Blackburn & Karniadakis (1993); ×, Newman & Karniadakis (1997); ◀, Fujarra et al. (1998); ▶, Shiels, Leonard & Roshko (2001); ◇, Singh & Mittal (2004).

Figura 2.25: Amplitudes (A^*) para baixos valores de massa-amortecimento em função do número de Reynolds (Re). Reproduzido de Govardhan e Williamson [27].

3 Método dos elementos espectrais

O método de elementos espectrais é uma junção de métodos espectrais puros método de elementos finitos, empregando funções de base espectrais em uma formulação de elementos finitos. Do primeiro, ele herda a convergência exponencial e a alta resolução, devido à alta ordem das funções de aproximação. Do segundo vem a divisão do domínio em elementos, que permite refinamento local e flexibilidade geométrica.

Os métodos espectrais (SM) derivam de métodos analíticos de solução de equações diferenciais parciais que apresentam soluções baseadas em expansões em série de funções ortogonais. Estas funções são suaves e o erro da equação diferencial é minimizado segundo um dado critério. A vantagem deste método é a convergência exponencial que possibilita a solução do problema com relativamente poucos graus de liberdade. Contudo, geometrias complexas são difíceis de serem tratadas com esta abordagem.

Os métodos de elementos finitos (FEM) foram os primeiros métodos numéricos que permitiram a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Depois de anos de evolução e estudo, este método hoje é utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais.

Isso posto, podem-se observar nos métodos numéricos utilizados para a simulação de escoamentos duas tendências predominantes. Por um lado, existem métodos de baixa ordem para simulação de problemas em geometrias complexas e “problemas de engenharia” envolvendo modelos físicos avançados (modelos de turbulência do tipo $k-\varepsilon$ por exemplo). Por outro, pesquisas envolvendo simulação numérica direta (DNS) só são possíveis com métodos de ordem superior. Os métodos de elementos espectrais (SEM) procuram conciliar estas duas tendências. Uma outra questão relevante é a simulação durante longos intervalos de tempo. Nesta situação, uma resolução espacial alta é essencial para minimizar os erros (Karniadakis, Israeli e Orzag [10]), o que é o caso deste trabalho onde se estudam séries temporais de grandezas num escoamento ao redor de cilindros.

3.1 Método dos resíduos ponderados e formulação de Galerkin

Ao se aproximar numericamente a solução exata de uma equação, tipicamente o que se faz é substituir uma expansão infinita, que é a solução exata, por uma representação dada por um conjunto finito de funções conhecidas. Tal aproximação, portanto, é incapaz de satisfazer a equação diferencial em todos os pontos do domínio de interesse. Ao invés disso, impõe-se que esta aproximação tenha que satisfazer um número finito de condições. A escolha destas

condições é que determina o tipo de método numérico. O método de resíduos ponderados consiste em utilizar funções de peso (ou ponderação) na forma integral ou forma fraca da equação diferencial em questão para se chegar a aproximações válidas da solução.

Para descrever este método, considera-se uma equação diferencial linear num domínio Ω denotada por:

$$L(u) = 0, \quad (3.1)$$

sujeita a condições de contorno e condições iniciais apropriadas. Assume-se que a solução $u(x, t)$ pode ser representada com uma dada precisão por uma solução aproximada da forma:

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N_{gl}} \hat{u}_i(t) \Phi_i(x), \quad (3.2)$$

onde $\Phi_i(x)$ são funções analíticas chamadas funções de base ou funções de forma, $\hat{u}_i(t)$ são os N_{gl} coeficientes desconhecidos e $u_0(x, t)$ é selecionada de modo a satisfazer as condições de contorno e condições iniciais. A substituição da aproximação (3.2) na equação (3.1) produz um resíduo não-nulo, R , tal que:

$$L(u^\delta) = R(u^\delta). \quad (3.3)$$

A fim de estabelecer uma maneira única de determinar os coeficientes $\hat{u}_i(t)$, é imposta uma restrição ao resíduo R de modo que a equação (3.3) se reduza a um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\hat{u}_i(t)$. Se a equação diferencial original (3.1) é independente do tempo, então os coeficientes $\hat{u}_i$ podem ser determinados diretamente da solução de um sistema de equações algébricos.

Definindo o produto interno (f, g) no domínio Ω :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx. \quad (3.4)$$

A restrição colocada a R é que o produto interno do resíduo com uma função peso é igual a zero, ou seja:

$$(v_j(x), R) = 0, \quad j = 1, \dots, N_{gl}. \quad (3.5)$$

A função $v_j(x)$ é a função peso e é daí que vem o nome da técnica.

Se o método apresenta convergência, $R(x)$ tenderá a zero desde que a solução $u^\delta(x, t)$ tenda para a solução exata $u(x, t)$ na medida em que $N_{gl} \rightarrow \infty$. A natureza do esquema é determinada pela escolha das funções de base $\Phi_i(x)$ e das funções peso v_j .

Dentre as várias escolhas possíveis, o método utilizado neste trabalho é o método de Galerkin. Nele as funções de peso são iguais às funções de base, ou seja, $v_j = \Phi_j$. Outros métodos além do método de Galerkin são brevemente descritos em Karniadakis e Sherwin [9].

Na formulação do tipo Galerkin, condições de contorno do tipo Dirichlet têm que ser especificadas explicitamente enquanto condições de contorno do tipo Neumann são tratadas implicitamente, como parte da formulação, através do uso de integração por partes e de uma função teste que se anule nas partes da fronteira onde condições de contorno do tipo Dirichlet são especificadas (Karniadakis e Sherwin [9], p.20). Por isso, as condições de contorno do tipo Neumann são também chamadas de *naturais* enquanto as do tipo Dirichlet são também chamadas de *essenciais*.

Para tratar condições de contorno essenciais não-homogêneas, tendo em vista que as funções de teste são nulas nas regiões onde tais condições são definidas, é preciso que a base utilizada para aproximar a solução contenha outras funções que sejam não nulas nestes contornos. Sem isso, seria impossível satisfazer estas condições de contorno do problema. Assim, a solução aproximada u^δ é composta de uma parcela conhecida u^D , que satisfaz as condições de contorno essenciais, e uma parcela homogênea desconhecida, u^H , que se anula nos contornos com condição do tipo Dirichlet, ou seja:

$$u^\delta = u^D + u^H. \quad (3.6)$$

Desse modo, o mesmo conjunto de funções agora é usado para representar a solução homogênea u^H e a função de teste v .

Algumas propriedades da formulação de Galerkin que tornam o seu uso interessante são unicidade de solução, ortogonalidade do erro em relação ao espaço de funções de peso, solução que minimiza a norma de energia do erro e equivalência de bases polinomiais no que diz respeito à norma de energia. Esta última característica tem a implicação importante de que a estimativa de erro é independente do tipo de expansão polinomial e depende somente do espaço polinomial. Todas estas propriedades são descritas e provadas em Karniadakis e Sherwin [9].

3.2 Conceitos fundamentais: Caso unidimensional

Neste item serão abordados tópicos referentes a expansões polinomiais utilizadas como funções de base em problemas unidimensionais. A tradição no uso de expansões polinomiais em métodos de elementos finitos pode ser atribuída ao uso histórico de série de Taylor para aproximar funções e também pela existência de regras de integração discreta para estas expansões, o que é uma vantagem, já que facilita a implementação computacional.

Conforme dito anteriormente, o método de elementos espectrais procura juntar o melhor do método de elementos finitos (flexibilidade) com o melhor dos métodos espectrais

(convergência exponencial). Neste método, as funções de base são definidas localmente em um elemento. A convergência é resultado de um aumento da ordem de interpolação (refinamento tipo p) e/ou um refinamento da malha (refinamento tipo h). Por isso, o SEM é chamado de método hp .

No refinamento do tipo h a ordem do polinômio utilizado como função de base em todos os elementos é mantida e a convergência é atingida através da redução do tamanho dos elementos. O caractere h representa o tamanho característico de um elemento.

No refinamento do tipo p uma malha fixa é empregada e a convergência é atingida através do aumento da ordem do polinômio em todos os elementos. O caractere p representa a ordem da expansão. Se o domínio inteiro for tratado como um único elemento, então este método nada mais é do que o método espectral simples.

3.2.1 Decomposição elementar: Refinamento tipo h

Subdividir o domínio de interesse em diversos subdomínios tem algumas vantagens. Entre as principais estão a flexibilidade geométrica e o tratamento das equações localmente. O particionamento do domínio deve ser feito de modo que todo o domínio seja coberto pelo novo conjunto de subdomínios e que estes subdomínios não se sobreponham. Em linguagem matemática, podemos dizer que, considerado um domínio Ω , pode-se dividi-lo em N_{el} elementos, denotados por Ω^e , tais que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e = \emptyset. \quad (3.7)$$

Com a finalidade de introduzir e ilustrar os conceitos de mapeamento de coordenadas e elemento padrão, será descrito o início do procedimento de montagem das matrizes para um caso unidimensional de formulação do tipo elementos finitos utilizando funções de base lineares. Para este caso, cada modo tem valor unitário em um nó de cada um dos elementos e decai linearmente para zero ao longo dos elementos que contém este nó. Uma ilustração gráfica está na Figura 3.1.

Figura 3.1: Funções de base lineares unidimensionais.

Escrevendo a expressão de um elemento qualquer Ω^e :

$$\Omega^e = \{x / x_{e-1} < x < x_e\}. \quad (3.8)$$

O que se quer é definir uma mudança de coordenadas para um elemento padrão do tipo:

$$\Omega_{ST} = \{\xi / -1 < \xi < 1\}, \quad (3.9)$$

onde podemos definir as funções de base facilmente, em termos da coordenada local ξ , através das expressões:

$$\phi_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} \quad \phi_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} & \xi \in \Omega_{st} \\ 0 & \xi \notin \Omega_{st} \end{cases} \quad (3.10)$$

O elemento padrão pode ser mapeado para qualquer domínio Ω^e através da transformação $\chi^e(\xi)$ que expressa a coordenada global x em termos da coordenada local ξ como:

$$x = \chi^e(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2} x_{e-1} + \frac{(1+\xi)}{2} x_e, \quad \xi \in \Omega_{st}. \quad (3.11)$$

Este mapeamento tem uma inversa analítica, $(\chi^e)^{-1}(x)$, da forma:

$$\xi = (\chi^e)^{-1}(x) = 2 \frac{(x - x_{e-1})}{(x_e - x_{e-1})} - 1, \quad x \in \Omega^e. \quad (3.12)$$

Introduzidos os conceitos de elemento padrão e de mapeamento de coordenadas locais para globais, pode-se definir formalmente o espaço χ^δ do elemento hp em uma dimensão: Se denotarmos o espaço de todos os polinômios de grau P definidos no elemento padrão Ω_{st} por $P_P(\Omega_{st})$, então o espaço discreto χ^δ é o conjunto de todas as funções $u^\delta(x)$ que existem em H^l e que são polinômios em ξ dentro de todos os elementos. Isto é, $u^\delta(\chi^e(\xi)) \in P_P(\Omega_{st})$, que pode ser escrito formalmente como:

$$\chi^\delta = \{u^\delta / u^\delta \in H^l, u^\delta(\chi^e(\xi)) \in P_P(\Omega_{ST}), e = 1, \dots, N_{el}\}. \quad (3.13)$$

Esta definição permite que tanto o mapeamento $\chi^e(\xi)$ quanto a ordem do polinômio P^e variem dentro de cada elemento e , portanto permitindo refinamento h , que altera $\chi^e(\xi)$ e refinamento p , que altera P^e .

Em métodos puramente do tipo h , como é o caso do método de elementos finitos, as funções de base são definidas localmente. Elas têm valor não nulo dentro de um único elemento e nulo em todos os outros e são construídas de modo a obter uma aproximação C^0 da solução (a solução é contínua, mas não suas derivadas). Uma consequência é que a matriz

global poder ser obtida através da montagem (*assembly*) das matrizes obtidas para cada elemento.

Observe que agora se podem considerar dois tipos de grau de liberdade: os graus de liberdade local e os graus de liberdade global. Cada grau de liberdade local corresponde a um grau de liberdade global, $i^e \rightarrow i$ (i^e é o grau de liberdade local e i é o grau de liberdade global).

A montagem da matriz global M_{ij} a partir das matrizes elementares M_{ij}^e para uma base com N graus de liberdade local pode ser feita usando o seguinte algoritmo:

Para $e = 0 \rightarrow N_{\text{elementos}}$

Para $i^e = 0 \rightarrow N$

Para $j^e = 0 \rightarrow N$

$$i_{\text{global}} = \text{map}(e, i^e), j_{\text{global}} = \text{map}(e, j^e)$$

$$M_{i_{\text{global}} j_{\text{global}}} + = M_{i^e j^e}^e$$

Próximo j

Próximo i

Próximo e

Neste algoritmo, a função $\text{map}(e, i)$ retorna o grau de liberdade global do grau de liberdade local i do elemento e .

Observando o algoritmo anterior, é evidente que as matrizes globais são extremamente esparsas e com uma numeração adequada dos graus de liberdade global, a resolução de sistemas lineares com matrizes de ordem N é uma operação com custo $O[N]$. Esta é uma das vantagens de se trabalhar com interpolantes de válidos localmente.

3.2.2 Construção de expansões do tipo p

Como mencionado anteriormente, uma expansão do tipo p num domínio único é uma expansão espectral e, portanto, pode-se considerar esta abordagem como um método do tipo p global.

Em múltiplas dimensões, domínios complexos tornam difícil a tarefa de achar uma expansão global tanto analiticamente quanto numericamente. A introdução de geometrias complexas pode gerar também a presença de *escalas* diferentes na solução, que podem ter uma estrutura bastante localizada. Tais considerações fazem com que o uso de decomposição em elementos, como discutido na seção anterior, seja necessário. O processo de construção de expansões do tipo p pode ser sumarizado em dois passos:

- ✓ Determinação de uma expansão apropriada dentro de uma região padrão.

- ✓ Modificação da expansão de modo que ela possa ser facilmente implementada numericamente.

No primeiro passo, uma expansão apropriada é tipicamente um conjunto de funções ortogonais ou quase ortogonais. No segundo passo, considerações sobre a implementação computacional desta base têm que ser feitas e a base é modificada, se necessário, para facilitar o processo. Tipicamente, a base é decomposta em contribuições no contorno e no interior de uma região padrão, pois esta abordagem simplifica o processo de montagem global.

Algumas definições relativas a tipos de expansão devem ser feitas:

- ✓ Uma base é chamada de uma expansão modal *hierárquica* quando uma expansão de ordem P está contida numa expansão de ordem $P+1$.

Um exemplo deste tipo de base é:

$$\Phi_p^A(x) = x^p \quad p = 0, \dots, P. \quad (3.14)$$

Ilustrando, considerando uma base com $p = 2$, tem-se $\chi_2^\delta = \{1, x, x^2\}$. Uma base com $p = 3$, tem-se $\chi_3^\delta = \{1, x, x^2, x^3\} = \{\chi_2^\delta, x^3\}$. Isto quer dizer que se for necessário incluir mais termos na expansão, os $P + 1$ termos já calculados podem ser utilizados como valores iniciais. Isto é muito interessante em um problema adaptativo onde não é necessário recalcular nenhuma base, apenas adicionar novos termos.

- ✓ Uma base é chamada *nodal* quando os coeficientes da expansão representam a solução aproximada nos nós.

Bases com polinômios de Lagrange são típicas bases nodais. Esta base pode ser escrita em linguagem matemática da seguinte forma:

$$\Phi_p^B(x) = \frac{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x - x_q)}{\prod_{q=0, q \neq p}^P (x_p - x_q)} \quad p = 0, \dots, P. \quad (3.15)$$

Esta base não é hierárquica, visto que consiste de $P + 1$ polinômios de ordem P .

Comparando com a expansão $\Phi_p^A(x)$, vemos que esta consiste de polinômios de ordem crescente. Porque a base de Lagrange tem a propriedade $\Phi_p^B(x_q) = \delta_{pq}$, onde δ_{pq} é o delta de Kronecker, temos que

$$u^\delta(x_q) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \Phi_p^B(x_q) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \delta_{pq} = \hat{u}_q, \quad (3.16)$$

e, portanto, esta base é um exemplo de base nodal.

- ✓ Literalmente, qualquer base é uma base *modal*. No entanto, neste texto, assim como em Karniadakis e Sherwin [9], usaremos o termo *modal* para expansões hierárquicas.

Uma base modal, que também apresenta características de ortogonalidade, é a seguinte:

$$\Phi_p^C(x) = L_p(x) \quad p = 0, \dots, P, \quad (3.17)$$

onde $L_p(x)$ são polinômios de Legendre. Polinômios deste tipo são um caso especial dos polinômios de Jacobi. Por definição, esta base é ortogonal no produto interno de Legendre, valendo a expressão:

$$(L_p(x), L_q(x)) = \int_{-1}^1 L_p(x) L_q(x) dx = \left(\frac{2}{2p+1} \right) \delta_{pq}. \quad (3.18)$$

Ortogonalidade tem implicações numéricas importantes quando se utiliza o método de Galerkin.

Na escolha de uma dada expansão deve-se levar em conta fatores como eficiência computacional, condicionamento, independência linear da base e propriedades da aproximação.

Quanto à eficiência computacional, devem ser analisados dois aspectos. O primeiro é o custo de construção da matriz, o que pode envolver integração numérica. O segundo é o custo de inversão do sistema matricial para a obtenção da solução. Quando a matriz tem alguma estrutura conhecida, esta última tarefa pode ser feita de forma muito mais eficiente. Karniadakis e Sherwin [9] mostram, utilizando uma projeção de Galerkin, que a base $\Phi_p^C(x)$ é a mais eficiente das três bases mostradas até aqui, pois gera uma matriz diagonal, que é de fácil construção e inversão. Isto porque é uma base ortogonal. Entretanto, quando utilizada em casos com decomposição elementar, devido à imposição de continuidade C^0 , esta base perde sua ortogonalidade.

No que se refere ao condicionamento, Karniadakis e Sherwin [9] mostra que, para polinômios de baixa ordem, as três bases tem comportamento similar. Todavia, na medida em que a ordem é aumentada, a base de Legendre se torna superior às outras duas. O condicionamento da matriz reflete o grau de dependência linear da base e influi no número de iterações necessárias para se inverter uma matriz, quando métodos iterativos são empregados.

3.2.3 Decomposição Contorno-Interior em expansões tipo p

Da discussão anterior, presume-se que a melhor escolha para uma base são os polinômios de Legendre ou mais geralmente, um sistema de polinômios ortogonais, pois hierarquia e ortogonalidade são características que levam à geração de matrizes com bom condicionamento numérico. No entanto, se deseja também combinar este tipo de expansão

com decomposição elementar do tipo h . A principal dificuldade deste processo aparece quando se tenta garantir um grau de continuidade na expansão global nas fronteiras dos elementos. Para uma equação diferencial parcial de segunda ordem, foi visto que é suficiente garantir que a solução aproximada u^δ esteja em H^1 . Tipicamente em métodos de elementos finitos, esta condição é satisfeita através da imposição de continuidade C^0 entre elementos, isto é, os modos de expansão global são contínuos em todo o domínio da solução, embora suas derivadas possam não ser.

Esta condição de continuidade pode ser implementada construindo expansões locais que tenham alguns modos com magnitude não nula nos contornos enquanto todos os outros sejam nulos ao longo da fronteira. Este tipo de decomposição é conhecida como *Decomposição Contorno-Interior*. Modos de contorno tem magnitude não nula (geralmente unitária) em uma das fronteiras do domínio e são nulos em todas as outras fronteiras. Modos interiores, também conhecidos como modos de bolha, somente tem magnitude não nula no interior do elemento e são nulos ao longo de todas as fronteiras. As expansões apresentadas nos próximos itens apresentam este tipo de decomposição.

3.2.4 Expansão modal tipo p C^0

Como já foi visto, é vantajoso considerar polinômios ortogonais para a construção de bases. Dentre as expansões mais utilizadas para a construção de bases estão aquelas que utilizam os polinômios de Jacobi. A seguir é apresentada uma base de ordem $P + 1$ C^0 construída com estes polinômios, válida no domínio padrão $\Omega_{st} = \{ \xi \mid -1 < \xi < 1 \}$:

$$\phi_p(\xi) \mapsto \psi_p(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{1-\xi}{2} \right) & p=0 \\ \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) P_{p-1}^{1,1}(\xi) & 0 < p < P. \\ \left(\frac{1+\xi}{2} \right) & p=P \end{cases} \quad (3.19)$$

Note que $\phi_p(\xi)$ será usado para denotar a definição geral de uma base polinomial local enquanto $\psi_p(\xi)$ tem a definição específica dada acima. Os modos $\psi_0(\xi)$ e $\psi_P(\xi)$ são os mesmos da expansão linear para elementos finitos. Estes são modos de contorno, já que são os únicos que tem valor não nulo nas extremidades do intervalo. Os modos interiores restantes, por definição, são zero nas extremidades do intervalo e aumentam em ordem polinomial como é típico em uma expansão polinomial.

Os modos interiores poderiam ser definidos com qualquer polinômio que tenha valor nulo nas extremidades, porém o uso de polinômios ortogonais mantém um alto grau de ortogonalidade na matriz cujo acoplamento interior gera matrizes de banda, o que é muito interessante para os processos de inversão.

Agora resta determinar a melhor escolha dentre os polinômios de Jacobi. Karniadakis e Sherwin mostram que uma escolha bastante interessante é o polinômio de Jacobi simétrico com $\alpha = \beta = 1$, ou seja, $P_p^{1,1}(\xi)$, pois ele gera uma matriz de massa local pentadiagonal, com alguns poucos elementos adicionais nos nós de contorno e uma matriz Laplaciana diagonal, com dois elementos não nulos adicionais nos nós de contorno. Nesta mesma referência são analisados outros exemplos de polinômio de Jacobi e verifica-se que eles não apresentam características tão interessantes quanto o caso de $P_p^{1,1}(\xi)$.

Karniadakis e Sherwin analisam também bases nodais adaptadas para o SEM. Como estas bases não são utilizadas neste trabalho, entende-se que uma exposição teórica de tais expansões foge do escopo texto. O leitor interessado neste assunto é encorajado a buscar tal referência.

Por fim, cabe aqui observar que até este ponto foi assumido que todas as integrais eram conhecidas. Não é sempre que estas integrais tem forma analítica conhecida, e a forma das funções integradas depende especificamente do problema. É preciso, portanto, utilizar algum método numérico para cálculo destas integrais, a fim de automatizar este processo. Os métodos de integração numérica são conhecidos por quadraturas. O conceito fundamental é a aproximação da integral por uma soma finita da forma:

$$\int_{-1}^1 u(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i). \quad (3.20)$$

onde w_i são pesos e ξ_i representam as abscissa de Q pontos distintos no intervalo $-1 \leq \xi_i \leq 1$. Neste trabalho é utilizada uma regra específica de quadratura, denominada *quadratura de Gauss*.

Quanto à diferenciação, a idéia utilizada aqui é que, assumindo uma aproximação polinomial da forma:

$$u^\delta(\xi) = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \phi_p(\xi), \quad (3.21)$$

a diferenciação tem a forma:

$$\frac{du^\delta(\xi)}{d\xi} = \sum_{p=0}^P \hat{u}_p \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi}. \quad (3.22)$$

A diferenciação de $u^\delta(\xi)$ depende portanto do cálculo de $d\phi_p(\xi)/d\xi$. Qualquer expansão polinomial pode ser representada em termos de polinômios de Lagrange, e para este tipo de polinômio podem ser definidas regras específicas de diferenciação.

3.3 Bases multidimensionais

Os conceitos referentes a bases unidimensionais serão agora estendidos para casos multidimensionais. Todas as expansões discutidas neste item serão consideradas como válidas dentro de uma *região padrão*, que, no caso deste trabalho, é um quadrado, visto que somente malhas com elementos quadriláteros são utilizadas nas simulações.

As bases de expansão aqui discutidas são tais que podem ser expressas em termos de um produto de funções unidimensionais, isto é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2). \quad (3.23)$$

Expansões construídas desta maneira permitem que muitas operações numéricas sejam realizadas de maneira bastante eficiente, através da utilização da técnica de *soma fatorada*.

Para o caso de malhas com elementos quadriláteros, a região padrão bidimensional, Q^2 , é definida como sendo o quadrado:

$$\Omega_{st} = Q^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}. \quad (3.24)$$

Como esta região é trivialmente definida por um sistema de coordenadas cartesiano padrão, a forma mais natural e direta de construir esta base é tomando o produto de bases unidimensionais, que podem ser pensadas como *tensores* unidimensionais.

Analisando a base unidimensional descrita na eq. (3.4), percebe-se que a expansão é denotada por um subscrito único, p , e portanto pode ser considerada como um tensor unidimensional. A base bidimensional pode, por conseguinte, ser construída através de um produto simples de tensores bidimensionais em cada uma das direções das coordenadas cartesianas. Destarte, a base modal é:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1) \psi_q^a(\xi_2) \quad 0 \leq p, q; \quad p \leq P_1, q \leq P_2. \quad (3.25)$$

Nota-se pelo uso de limites distintos P_1 e P_2 que a ordem polinomial de expansões multidimensionais podem diferir em cada direção.

A decomposição contorno-interior da base unidimensional é herdada pela base bidimensional. Para os casos bidimensionais, os modos de contorno recebem uma subclassificação. Os modos chamados modos de vértices são aqueles que têm magnitude unitária em um dos vértices e são nulos em todos os outros, e os modos de aresta são todos os

modos que tem magnitude não nula ao longo de uma aresta e são nulos em todas outras arestas e vértices.

Considerando a base bidimensional, $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, como uma matriz que se estende pela região padrão ilustrada na Figura 3.2, os índices dos modos de contorno correspondem às suas localizações dentro desta matriz. Por exemplo, o modo de vértice que tem magnitude no vértice A do quadrado corresponde aos índices $p = 0$, $q = 0$ e portanto $\phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2)$ é o modo deste vértice na expansão utilizada aqui.

Os quatro modos de vértice são:

$$\text{VÉRTICE A: } \phi_{0,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2)$$

$$\text{VÉRTICE B: } \phi_{P_1,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2)$$

$$\text{VÉRTICE C: } \phi_{0,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2)$$

$$\text{VÉRTICE D: } \phi_{P_1,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2)$$

Figura 3.2: Região padrão bidimensional.

Da mesma forma os modos de aresta são:

$$\text{ARESTA AB: } \phi_{p,0}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_0^a(\xi_2) \quad (0 < p < P_1)$$

$$\text{ARESTA CD: } \phi_{p,P_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_{P_2}^a(\xi_2) \quad (0 < p < P_1)$$

$$\text{ARESTA AC: } \phi_{0,q}(\xi_1, \xi_2) = \psi_0^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < q < P_2)$$

$$\text{ARESTA BD: } \phi_{P_1,q}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{P_1}^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < q < P_2)$$

E, por fim, os modos de interior:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_q^a(\xi_2) \quad (0 < p, q; \quad p < P_1, q < P_2) . \quad (3.26)$$

Neste trabalho, as ordens utilizadas em cada uma das direções são sempre iguais. Detalhes quanto a expansões tridimensionais, expansões com ordens diferentes em cada uma das direções e bases em malhas com elementos triangulares podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin [9].

3.4 Formulação multidimensional

Numa analogia direta com a formulação unidimensional, as operações de integração e diferenciação podem ser executadas no nível do elemento e por isso são consideradas *operações locais*, juntamente com a técnica de soma fatorada, que é de primordial importância para a eficiência numérica do método.

Para construir uma expansão que seja globalmente C^0 é preciso introduzir *operações globais*. Construído o sistema matricial global, discute-se a técnica de *condensação estática* que faz uso da decomposição contorno-interior das expansões para desacoplar os modos interiores dos graus de liberdade de fronteira.

3.4.1 Operações Locais

Nesta seção serão abordadas operações de integração e diferenciação, mapeamento, transformações no nível de elemento e a técnica de soma fatorada.

✓ Integração.

Em domínios multidimensionais, a quadratura de Gauss também é utilizada, por todas as vantagens descritas anteriormente para casos unidimensionais. A regra de integração na região padrão bidimensional é uma extensão direta da regra de quadratura de Gauss unidimensional. A integração sobre o domínio $Q^2 = \{-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$ é matematicamente definido como duas integrais unidimensionais da forma:

$$\int_{Q^2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right\} \Big|_{\xi_2} d\xi_2. \quad (3.27)$$

Se as integrais forem substituídas pelas somas advindas das regras de integração, chega-se a:

$$\int_{Q^2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=0}^{Q_1-1} w_i \left\{ \sum_{j=0}^{Q_2-1} w_j u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \right\}, \quad (3.28)$$

onde Q_1 e Q_2 são os números de pontos de quadratura nas direções ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. A expressão será exata se $u(\xi_1, \xi_2)$ é um polinômio e Q_1 e Q_2 são escolhidos de forma apropriada.

✓ Diferenciação.

Como no caso unidimensional, a discussão será restrita à diferenciação no espaço físico, o que significa que a função polinomial é representada por polinômios de Lagrange com um conjunto de pontos que são tipicamente pontos da quadratura.

Para diferenciar uma expansão no interior de uma região padrão quadrada Q^2 da forma:

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2), \quad (3.29)$$

primeiro representa-se a função em termos de polinômios de Lagrange:

$$u^\delta(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{Q_1-1} \sum_{q=0}^{Q_2-1} u_{pq} h_p(\xi_1) h_q(\xi_2). \quad (3.30)$$

onde

$$u_{pq} = u^\delta(\xi_{1p}, \xi_{2q}), \quad Q_1 > P_1, \quad Q_2 > P_2. \quad (3.31)$$

e ξ_p e ξ_q são tipicamente zeros de uma quadratura Gaussiana apropriada. A derivada parcial em relação a ξ_1 é portanto:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} h_q(\xi_2). \quad (3.32)$$

O procedimento de avaliação de $dh_p(\xi)/d\xi$ nos pontos de quadratura é feito de forma similar ao caso unidimensional. Com base na eq. (3.32) vê-se que para calcular uma derivada num ponto arbitrário em (ξ_1, ξ_2) pe preciso fazer uma suma de ordem $O(P^2)$ nos índices p e q . Para avaliar a derivada num ponto nodal (ξ_{1i}, ξ_{2j}) do polinômio de Lagrange, a operação cai para $O(P)$, pois $h_q(\xi_{1j}) = \delta_{qj}$, isto é:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_1}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} u_{pq} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}} \delta_{qj} = \sum_{p=0}^{P_1} u_{pj} \frac{dh_p(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}}. \quad (3.33)$$

Tipicamente, este é o único lugar onde a derivada é necessária pois é parte de uma integral que é calculada usando quadratura de Gauss. O custo total do cálculo de uma derivada em $O(P^2)$ pontos será por conseguinte $O(P^3)$. A derivada parcial em relação a ξ_2 pode ser calculada de forma similar, chegando a:

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial \xi_2}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{q=0}^{P_2} u_{iq} \frac{dh_q(\xi_2)}{d\xi_2} \bigg|_{\xi_{2j}}. \quad (3.34)$$

✓ Mapeamento.

Visto como integrar e diferenciar numa região padrão, é preciso agora estabelecer como fazer estas operações em regiões que podem ter uma forma arbitrária. Para isso, um mapeamento é introduzido, com a seguinte forma para casos bidimensionais:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi_1, \xi_2) \quad x_2 = \chi_2^e(\xi_1, \xi_2). \quad (3.35)$$

Para elementos com lados retilíneos um mapeamento simples pode ser construído usando os modos de vértices lineares da expansão modal. Esta abordagem leva a um mapeamento bilinear de um quadrilátero de forma arbitrária onde apenas os vértices precisam ser prescritos (ver Figura 3.3). Este mapeamento tem a forma:

$$\begin{aligned} x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2) = & x_1^A \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4} + x_1^B \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4} + \\ & + x_1^D \frac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4} + x_1^C \frac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Figura 3.3: Mapeamento de coordenadas, caso bidimensional.

A construção de um mapeamento baseado nos modos de expansão pode ser estendido de modo a incluir regiões com lados curvos usando uma representação isoparamétrica. Este conceito será tratado adiante.

Quando do desenvolvimento de um tipo de mapeamento é importante garantir que o Jacobiano do mapeamento para a região padrão é não-nulo e do mesmo sinal. Para o mapeamento dado, esta condição é satisfeita quando todos os ângulos internos dos elementos têm valores menores que 180° , ou seja, todos os elementos são polígonos convexos.

Para integrar uma função num elemento qualquer Ω^e , é preciso transformar esta região na região padrão Ω_{st} definida em termos de (ξ_1, ξ_2) e calcular:

$$\int_{\Omega^e} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_{st}} u(\xi_1, \xi_2) |J_{2D}| d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.37)$$

onde J_{2D} é o Jacobiano bidimensional devido à transformação de coordenadas, definido como:

$$J_{2D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}. \quad (3.38)$$

Como é assumido que a forma do mapeamento é conhecida, então todas as derivadas parciais necessárias para o cálculo do Jacobiano podem ser calculadas. Calculado o Jacobiano nos pontos de quadratura, basta multiplicar o integrando pelo resultado e calcular a integral da mesma forma discutida anteriormente.

Para diferenciar uma função numa região arbitrária Ω^e aplica-se a regra da cadeia que, para um caso bidimensional, resulta em:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Anteriormente foi apresentado um método de diferenciação em relação a ξ_1 e ξ_2 mas é necessário calcular também derivadas da forma $\partial \xi_1 / \partial x_1$. Para o mapeamento linear dado por (3.36) é possível obter uma fórmula analítica, mas em geral é preciso saber também com tratar elementos curvilíneos. Para isso, pode-se expressar derivadas como $\partial \xi_1 / \partial x_1$ em termos de derivadas parciais em relação a ξ_1 e ξ_2 , que podem ser tratadas utilizando-se os conceitos já apresentados. Para uma função geral dependente de duas variáveis, $u(\xi_1, \xi_2)$ sabe-se pela regra da cadeia que o diferencial total desta função é :

$$du(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2. \quad (3.40)$$

Substituindo $u(\xi_1, \xi_2)$ por $x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2)$ e $x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2)$ o seguinte sistema matricial é obtido:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

que pode ser invertido, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

onde J é o Jacobiano definido por (3.38). Porém, como o mapeamento é assumido bijetor e com inversa expressa por $\xi_1 = (\chi_1)^{-1}(x_1, x_2)$ e $\xi_2 = (\chi_2)^{-1}(x_1, x_2)$ e portanto pode-se aplicar a regra da cadeia diretamente a ξ_1 e ξ_2 :

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Finalmente, igualando as matrizes de (3.42) e (3.43), vê-se que:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \quad (3.44)$$

Por fim, conclui-se que o operador gradiente bidimensional na eq. (3.39) pode ser calculado pois todas as derivadas parciais podem ser expressas em termos de diferenciais em relação a ξ_1 e ξ_2 , que por sua vez podem ser avaliados usando a representação em polinômios de Lagrange utilizada anteriormente.

✓ Transformações nos domínios elementares.

Escolhida uma base de expansão, $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$, a seguinte equação é válida:

$$u^\delta(x_1, x_2) = \sum_{pq} \hat{u}_{pq} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega^e, \quad (3.45)$$

onde $\xi_1 = (\chi_1)^{-1}(x_1, x_2)$ e $\xi_2 = (\chi_2)^{-1}(x_1, x_2)$. Analogamente à transformada de Fourier, diz-se que $u^\delta(x_1, x_2)$ representa a variável no espaço *físico*, enquanto que $\hat{u}_{pq}$ representa a variável no espaço *transformado*.

Nesta seção serão abordadas transformações que são efetuadas para se passar de um espaço para o outro. A transformação que leva a variável do espaço físico para o espaço transformado é chamada de *transformação para frente*. A transformação inversa, descrita pela eq. (3.45), é chamada de *transformação para trás*.

Para facilitar a notação em casos multidimensionais, onde um grande número de índices tem que ser utilizados, será empregada a notação matricial. Utilizando esta notação, pode-se definir o vetor $\mathbf{u}$, que é o valor de $u(\xi_{1i}, \xi_{2j})$ nos pontos de quadratura. Se existem Q_1 , Q_2 pontos de quadratura em cada direção, então $\mathbf{u}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u}[m(ij)] = u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \quad m(ij) = i + j \cdot Q_1. \quad (3.46)$$

Para representar os coeficientes da expansão, $\hat{u}_{pq}$, na forma vetorial uma notação similar é adotada, porém com um acento circunflexo, $\hat{\mathbf{u}}$. Sendo P_1, P_2 a ordem dos polinômios da expansão, a expressão matemática é:

$$\hat{\mathbf{u}}[m(pq)] = \hat{u}_{pq} \quad m(pq) = q + p(P_2 + 1). \quad (3.47)$$

Os índices correm de forma inversa do vetor $\mathbf{u}$ porque para elementos triangulares isto é interessante para manter uma ortogonalidade parcial (Karniadakis e Sherwin, [9], p.114). Apesar de neste trabalho serem empregados somente elementos quadriláteros, esta regra foi mantida, pois o código computacional usa esta convenção, na medida em que aceita os dois tipos de elemento.

Cabe ressaltar que os índices não são intercambiáveis, pois nas bases utilizadas é utilizada decomposição contorno-interior. O esquema de armazenamento típico coloca nas primeiras posições os modos de vértice, depois os modos de aresta e por último os modos de interior.

Serão introduzidas agora matrizes importantes para as operações que serão abordadas. A primeira delas é a matriz de peso $\mathbf{W}$, que é diagonal e contém os pesos da quadratura multiplicados pelo Jacobiano nos pontos de quadratura e é definida consistentemente com $\mathbf{u}$. Se J_{ij} representa o valor discreto do Jacobiano $J(\xi_{1i}, \xi_{2j})$, então $\mathbf{W}$ é:

$$\mathbf{W}[m(ij)][n(ij)] = J_{ij} w_i w_j \delta_{mn} \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1, \quad (3.48)$$

onde δ_{mn} é o delta de Dirac e $m(ij)$ e $n(ij)$ são definidos de forma consistente com $\mathbf{u}$.

A matriz de base $\mathbf{B}$ tem nas colunas os valores discretos dos modos de expansão nos pontos de quadratura, isto é:

$$\mathbf{B}[m(ij)][m(pq)] = \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) \quad m(ij) = i + j \cdot Q_1, \quad n(pq) = q + p(P_2 + 1)$$

A matriz é montada de modo que suas colunas (laço em $m(ij)$) são ordenadas de modo consistente com $\mathbf{u}$ e suas linhas (laço em $n(pq)$) são ordenadas de modo consistente com $\hat{\mathbf{u}}$.

Para ilustrar o uso da notação matricial, será considerado o produto interno de uma função $v(x_1, x_2)$ com uma função $u(x_1, x_2)$ que é definido como:

$$(v, u) = \int v(\xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) |J| d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.49)$$

Representando a integral usando quadratura Gaussiana, a aproximação discreta é:

$$(v, u)^\delta = \sum_{i=0}^{Q_1-1} \sum_{j=0}^{Q_2-1} w_i w_j v(\xi_{1i}, \xi_{2j}) u(\xi_{1i}, \xi_{2j}) |J_{ij}|, \quad (3.50)$$

onde

$$(v, u) = (v, u)^\delta + \varepsilon. \quad (3.51)$$

e ε é o erro devido à integração numérica. Se as funções u e v são suaves o suficiente, em outros termos, se as primeiras Q derivadas são limitadas, então ε será da mesma ordem do erro da aproximação.

A operação na eq. (3.50) pode ser efetuada usando os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ e a matriz $\mathbf{W}$:

$$(v, u)_\delta = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{u}. \quad (3.52)$$

Uma outra matriz a ser definida é aquela que representa o operador de diferenciação. Relembrando a expressão da diferenciação parcial em relação a uma coordenada local ξ_1 definida no espaço físico:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = \sum_{r=0}^{Q_1} \sum_{s=0}^{Q_2} \frac{dh_r(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}} h_s(\xi_{2j}) u_{rs}, \quad (3.53)$$

onde $h_r(\xi_1)$ é um polinômio de Lagrange definido com os Q_1 pontos de quadratura. A derivada em relação a ξ_2 é calculada de maneira similar.. Será introduzida agora uma matriz $\mathbf{D}_{\xi_1}$ que age sobre $\mathbf{u}$ de tal forma que $\mathbf{D}_{\xi_1} \mathbf{u}$ é a derivada nos pontos de quadratura, ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} = \mathbf{D}_{\xi_1} \mathbf{u}, \quad (3.54)$$

onde

$$\mathbf{D}_{\xi_1} [m(ij)] [n(rs)] = \frac{dh_r(\xi_1)}{d\xi_1} \bigg|_{\xi_{1i}} h_s(\xi_{2j}), \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1. \quad (3.55)$$

Para calcular as derivadas com relação às coordenadas globais x_1 e x_2 é preciso utilizar a regra da cadeia. A operação matricial equivalente consiste em pré-multiplicar as matrizes de derivação por uma matriz diagonal contendo fatores tais como $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, \dots$ avaliados nos pontos de quadratura. Defini-se $\mathbf{\Lambda}(f(\xi_1, \xi_2))$ como uma matriz diagonal cujos componentes são os valores da função $f(\xi_1, \xi_2)$ nos pontos de quadratura

$$\mathbf{\Lambda}(f(\xi_1, \xi_2)) [m(ij)] [n(ij)] = f(\xi_{1i}, \xi_{2j}) \delta_{mn}, \quad m(ij) = n(ij) = i + j \cdot Q_1.$$

Assim, a forma matricial da expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \quad (3.56)$$

é

$$\mathbf{u}_{x_1} = \left[\mathbf{\Lambda} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \mathbf{D}_{\xi_1} + \mathbf{\Lambda} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{D}_{\xi_2} \right] \mathbf{u}. \quad (3.57)$$

Definidas todas estas matrizes pode-se escrever as transformações em termos matriciais. Primeiramente, a transformação para trás:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}. \quad (3.58)$$

Depois a transformação para frente:

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u}, \quad (3.59)$$

onde a matriz $\mathbf{M}$ é a matriz de massa. Esta expressão está deduzida em Karniadakis e Sherwin [9] utilizando o método de resíduos ponderados com projeção de Galerkin. É interessante observar que a matriz $\mathbf{M}$ é positiva definida (Karniadakis e Sherwin, p.122). Por fim, a operação de interpolação, que consiste numa transformação para frente seguido de uma transformação para trás:

$$\mathbf{u}^\delta = \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}^* (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{u}. \quad (3.60)$$

Nesta equação $\mathbf{u}$ é a função a ser interpolada nos pontos de quadratura e $\mathbf{B}^*$ é construída da mesma maneira que a matriz de base $\mathbf{B}$, só que calculando o valor da expansão nos locais onde se deseja interpolar a função $\mathbf{u}^\delta$.

✓ Soma Fatorada.

Apesar de a notação matricial ser bastante clara e ser um tipo de notação que pode facilmente ser transportada para uma linguagem computacional, ela não é a forma mais eficiente de se implementar os algoritmos, dado que muitas dessas matrizes são bastante esparsas. Um método mais eficiente de executar essas operações é a chamada técnica da soma fatorada, que é considerada a chave da eficiência dos métodos espectrais. Ela se baseia no fato de que a expansão é o produto tensorial de funções unidimensionais, o que significa que muitas operações numéricas importantes podem ser efetuadas com uma notável redução no número de operações computacionais.

Para demonstrar como esta técnica funciona, considera-se o cálculo de uma soma em r, s de um vetor f_{rs} com as funções h_{ir} e h_{js} para todos os índices i, j , isto é:

$$U_{ij} = \sum_r^P \sum_s^P f_{rs} h_{ir} h_{js}, \quad \forall i, j. \quad (3.61)$$

Se $f_{rs} = f(\xi_{1r}, \xi_{2s})$ e $h_{ir} = h_r(\xi_{1i})$ e $h_{js} = h_s(\xi_{2j})$, então esta soma representaria a interpolação, usando polinômios de Lagrange, de um conjunto de pontos (ξ_{1r}, ξ_{2s}) para um conjunto de pontos (ξ_{1i}, ξ_{2j}) . Se todos os índices i, j, r, s forem da ordem $O(P)$, então o cálculo total da operação se reduz a uma soma $O(P^2)$ em r, s para cada um dos $O(P^2)$ índices i, j de tal forma que a operação total é da ordem $O(P^4)$. Contudo, notando que se pode fatorar o termo h_{ir} fora da segunda somatória:

$$U_{ij} = \sum_r^P h_{ir} \left(\sum_s^P f_{rs} h_{js} \right), \quad \forall i, j, \quad (3.62)$$

pode-se calcular a somatória em s e substituir os termos entre parênteses por:

$$\bar{f}_{jr} = \sum_s^P f_{rs} h_{js}. \quad (3.63)$$

Construir $\bar{f}_{jr}$ é uma operação $O(P^3)$ pois se calcula uma soma $O(P)$ em s para todos os $O(P^2)$ índices jr . A soma original (3.61) pode então ser escrita:

$$U_{ij} = \sum_r^P h_{ir} \bar{f}_{jr}, \quad \forall i, j, \quad (3.64)$$

que também é uma operação $O(P^3)$ pois se está calculando uma soma $O(P)$ no índice r para todos os $O(P^3)$ pontos i, j . Conclui-se então que esta fatoração reduziu o custo de uma operação $O(P^4)$ para uma operação $O(P^3)$ com a necessidade de armazenamento de um vetor extra de tamanho $O(P^2)$, o que é típico em somas bidimensionais. Somas como estas aparecem, por exemplo, na transformação para trás e no cálculo de produtos internos. Detalhes quanto a implementações tridimensionais e exemplos detalhados podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin.

3.4.2 Operações globais

Na seção 3.4.1 foram vistas operações realizadas no nível do elemento e não foi feita nenhuma consideração a respeito de como as informações de diferentes elementos são acopladas. Para resolver equações diferenciais parciais de segunda ordem é suficiente que a aproximação global seja de classe C^0 . Para isso, as informações dos elementos são acopladas entre si e, portanto, operações que envolvem inversão de um sistema matricial se tornam operações *globais*. Para executar este tipo de operação, é preciso realizar a montagem da matriz global, conhecida em linguagem de elementos finitas como *assembly*, que constrói uma base de expansão global de classe C^0 a partir das funções de forma dos elementos.

Este tópico já foi abordado para o caso unidimensional com funções de forma lineares na seção 3.2.1, e agora os conceitos serão estendidos para casos multidimensionais. Uma característica das expansões que estão sendo utilizadas que é fundamental para este processo é a decomposição contorno-interior, pois através do acoplamento somente dos modos de contorno é possível construir uma expansão global que atenda os requisitos estabelecidos.

Na prática, muitas das operações podem ser executadas em nível local, bastando depois somar as contribuições de modo a formar o sistema global. Para isso, é preciso definir um procedimento de montagem do sistema local a partir de sistemas locais.

✓ Montagem das matrizes globais e conectividade

Primeiramente é preciso definir os modos de expansão local $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ dentro do domínio de solução global Ω . Se Ω for dividido em N_{el} elementos contíguos chamados Ω^e os modos de expansão $\phi_{pq}^e(\xi_1, \xi_2)$ são definidos da seguinte forma:

$$\phi_{pq}^e(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) & (x_1, x_2) \in \Omega^e \\ 0 & (x_1, x_2) \notin \Omega^e \end{cases}, \quad \begin{aligned} \xi_1 &= [\chi_1^e]^{-1}(x_1, x_2) \\ \xi_2 &= [\chi_2^e]^{-1}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Olhando a expressão acima vê-se que os modos de interior, que são nulos na fronteira dos elementos, são de classe C^0 em nível global, mas os modos de contorno não tem esta propriedade e é com eles que será feito o acoplamento das variáveis entre os elementos.

Graus de liberdade locais são definidos como coeficientes de expansão elementares em todos os elementos. O vetor $\hat{\mathbf{u}}$, previamente introduzido, representa uma lista consecutiva de todos os coeficientes dos modos de expansão de um elemento. Usando o sobrescrito e pra indicar o vetor elementar dos coeficientes de expansão $\hat{\mathbf{u}}^e$, então o vetor de todos os graus de liberdade locais, denominado $\hat{\mathbf{u}}_l$, é:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \underline{\hat{\mathbf{u}}}^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^1 \\ \hat{\mathbf{u}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}^{N_{el}} \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

que tem dimensão N_{eof} . Aqui também é introduzida a notação de um vetor sublinhado, que implica em extensão a todas as regiões elementares. Como complemento de $\hat{\mathbf{u}}_l$ define-se $\hat{\mathbf{u}}_g$ que indica os graus de liberdade globais e é um vetor de dimensão N_{dof} . O mapeamento dos graus de liberdade globais para os graus de liberdade locais é representado pela multiplicação de $\hat{\mathbf{u}}_g$ pela matriz $\mathbf{A}$, isto é:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_g. \quad (3.66)$$

$\mathbf{A}$ é uma matriz retangular esparsa de dimensão $N_{eof} \times N_{dof}$ cujos valores não nulos podem ser 1 ou -1 dependendo da forma dos modos de contorno. Para uma expansão nodal, todas as entradas são positivas. Toda linha da matriz $\mathbf{A}$ contém somente uma entrada, dado o fato de que cada grau de liberdade local está relacionado a um grau de liberdade global. Toda coluna da matriz $\mathbf{A}$ contém pelo menos uma entrada e a soma dos valores absolutos das colunas indica quantos modos locais contribuem para a construção de um grau de liberdade global, o que é conhecido como multiplicidade do modo.

O processo de mapeamento de graus de liberdade locais para graus de liberdade globais é feito pela matriz transposta de $\mathbf{A}$, ou seja:

$$\hat{\mathbf{v}}_g = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{v}}_l. \quad (3.67)$$

Usou-se $\hat{\mathbf{v}}$ ao invés de $\hat{\mathbf{u}}$ para enfatizar que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^T$ não são inversas uma da outra.

Na prática, não é vantajoso construir $\mathbf{A}$ explicitamente devido ao tamanho e esparsidade da matriz. As operações podem ser implementadas numericamente de forma análoga à descrita na seção 3.2.1, através do uso de uma matriz de mapeamento que será chamado de $map[e][i]$. Esta matriz nada mais é do que a matriz de conectividade e tem a dimensão $N_{el} \times \max_e(N_m^e)$, onde N_m^e é o número de modos de expansão em um elemento. Tipicamente e neste trabalho, N_m^e é igual para todos os elementos embora, em geral, este valor possa variar entre os elementos. A matriz $map[e][i]$ tem como entradas o valor global do i -ésimo coeficiente de expansão do e -ésimo elemento. Isto posto, a operação descrita pela eq. (3.66) pode ser implementada pelo seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow N_m^e - 1$

$$\hat{\mathbf{u}}^e[i] = sinal[e][i] \cdot \hat{\mathbf{u}}_g[map[e][i]]$$

Próximo i

Próximo e

onde $sinal[e][i]$ é uma matriz de mesma dimensão de $map[e][i]$ contendo entradas de valor 1 ou -1 dependendo da conectividade modal entre dois elementos, como será discutido um pouco mais a frente. Já a eq. (3.67) pode ser calculada utilizando o seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow N_m^e - 1$

$$\hat{\mathbf{v}}_g[map[e][i]] = \hat{\mathbf{v}}_g[map[e][i]] + sinal[e][i] \cdot \hat{\mathbf{v}}^e[i]$$

Próximo i

Próximo e

O procedimento de montagem envolve essencialmente a conectividade dos modos de contorno, pois como os modos de interior já são globalmente de classe C^0 , podem ser numerados independentemente como graus de liberdade globais. Nesta seção, portanto, o foco será no desenvolvimento de um mapeamento de fronteira $bmap[e][i]$ e nas questões envolvidas na construção desta expansão de alta ordem.

Assumindo a ordenação dos nós na qual os nós de contorno são numerados primeiro, se há $nb[e]$ modos de fronteira no e -ésimo elemento, o procedimento de montagem do sistema local para o global pode ser feito segundo o seguinte algoritmo:

Para $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Para $i = 0 \rightarrow nb[e] - 1$

$$\hat{\mathbf{v}}_g [bmap[e][i]] = \hat{\mathbf{v}}_g [bmap[e][i]] + sinal[e][i] \cdot \hat{\mathbf{v}}^e [i]$$

Próximo i

Próximo e

cujas representação matricial é:

$$\hat{\mathbf{v}}_g = \mathbf{A}_b^T \hat{\mathbf{v}}_b^e. \quad (3.68)$$

Este procedimento é idêntico ao sistema de mapeamento total, usando inclusive a mesma notação, só que agora somente os primeiros $nb[e]$ elementos são usados. A matriz $\mathbf{A}_b$ é uma sub-matriz de $\mathbf{A}$.

Será considerada agora a construção da matriz $sinal[e][i]$ para uma expansão modal em elementos bidimensionais quadriláteros. Extensões para elementos triangulares e tridimensionais podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin.

Quando uma expansão com mais de um modo de aresta é considerada, é preciso levar em conta a orientação do sistema de coordenadas local do elemento, pois dependendo dele o sinal dos modos de aresta ímpares tem que ser trocado. A razão para isso é que a forma dos modos elementares são definidos em relação ao sistema de coordenadas local. Se os sistemas locais de dois elementos vizinhos são orientados de forma que duas coordenadas vizinhas estão em direção oposta, então o sinal dos modos ímpares de um dos dois elementos tem que ser invertido. Elementos vizinhos com sistema de coordenadas concordantes estão ilustrados na Figura 3.4, e elementos vizinhos com sistema de coordenadas não concordantes estão ilustrados na Figura 3.5.

Figura 3.4: Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais concordantes. Reproduzido de Karniadakis e Sherwin [9].

Olhando para a Figura 3.5 vemos que é necessário também inverter a ordem dos modos de arestas. Normalmente este problema é abordado quando da definição da numeração global dos nós da aresta. Como os modos hierárquicos de contorno têm sua interpretação física ligada ao fato de estarem associados a um vértice ou aresta, a ordem dos modos de uma dada aresta pode ser mudada, desde que a aresta não seja alterada. Por conseguinte, o procedimento de numeração global de modos de aresta deve prever a verificação de que modos com polinômios de mesma ordem estão sendo associados. Uma vez montada corretamente a matriz de conectividade, este problema está solucionado e todas as operações podem ser executadas normalmente.

Todavia, ainda resta o problema do sinal, que pode ser resolvido por um procedimento automático que identifica quais arestas que tem modos ímpares que precisam ter seus sinais trocados. Tal procedimento pode ser construído considerando o sinal do produto interno entre dois vetores representando a direção e sentido de uma aresta em coordenadas globais. Dado que sempre se conhece os vértices que definem um elemento, define-se Δx_a^e como um vetor paralelo a uma aresta no elemento e orientado de acordo com o sentido da coordenada local ξ_1 ou ξ_2 . Por exemplo, para a aresta onde $\xi_2 = -1$:

$$\Delta x_a^e = \begin{bmatrix} \chi_1(1,-1) - \chi_1(-1,-1) \\ \chi_2(1,-1) - \chi_2(-1,-1) \end{bmatrix}, \quad x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2). \quad (3.69)$$

Para determinar se um modo de aresta ímpar precisa ter seu sinal trocado ou não, em uma aresta comum a dois elementos e e k , o seguinte teste é aplicado:

$$\Delta x_a^e \cdot \Delta x_a^k < 0 \quad \text{e} \quad k > e.$$

Se o resultado do teste for verdadeiro, então se inverte o sinal do modo no elemento e . O critério extra $k > e$ certifica que apenas um dos dois modos de aresta tem o sinal trocado. Este teste simplesmente indica se os sistemas de coordenadas locais ao longo de uma aresta específica têm sentidos iguais ou opostos.

Figura 3.5: Elementos vizinhos com sistemas de coordenadas locais não concordantes. Reproduzido de Karniadakis e Sherwin [9].

✓ O sistema maticial global.

Foi visto na seção anterior como montar um sistema global a partir de sistemas locais. Esta técnica será empregada agora para gerar matrizes globais a partir de matrizes elementares. Na notação empregada aqui, o sobrescrito e é uma variável que se refere ao número do elemento, portanto matrizes ou vetores com este sobrescrito são elementares. Matrizes ou vetores sem este sobrescrito são entendidas como globais. Isto posto, vale ressaltar as igualdades: $\hat{\mathbf{u}}_I = \hat{\mathbf{u}}^e$ e $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}^e$.

Como exemplo de montagem de sistema matricial global, será explanada a montagem das matrizes para a operação de transformação para frente em nível global. Em nível elementar, esta operação é descrita pela expressão:

$$\mathbf{M}^e \hat{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{u}^e. \quad (3.70)$$

Pode-se representar esta operação em todos os elementos em termos de uma expressão matricial global com o uso de matrizes diagonais por blocos da forma:

$$\underline{\mathbf{M}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^{N_{el}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^1)^T \mathbf{W}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{W}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mathbf{B}^{N_{el}})^T \mathbf{W}^{N_{el}} \end{bmatrix}$$

O sistema matricial:

$$\underline{\mathbf{M}}^e \hat{\mathbf{u}}_l = \underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e} \mathbf{u}_l, \quad (3.71)$$

representa a transformação para frente local em todos os N_{el} elementos e é equivalente à eq. (3.70). Este sistema pode ser invertido, pois os sistemas locais estão desacoplados e são individualmente inversíveis. Entretanto, não há garantia de continuidade entre os elementos. Porém, sabe-se que a eq. (3.66) determina os graus de liberdade locais a partir dos graus de liberdade globais. Substituindo a eq. (3.66) na eq. (3.71), chega-se a:

$$\underline{\mathbf{M}}^e \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_g = \underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e} \mathbf{u}_l. \quad (3.72)$$

O efeito de pós-multiplicar a matriz $\underline{\mathbf{M}}^e$ por $\mathbf{A}$ é a imposição da continuidade entre os elementos, através da montagem adequada das linhas da matriz $\underline{\mathbf{M}}^e$. A matriz resultante $\underline{\mathbf{M}}^e \mathbf{A}$ não é quadrada pois as colunas do sistema não foram adequadamente montadas. Isto pode ser feito através de pré-multiplicação dos dois lados da eq. (3.72) por $\mathbf{A}^T$, de modo a obter o sistema global quadrado:

$$[\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{M}}^e \mathbf{A}] \hat{\mathbf{u}}_g = \mathbf{A}^T \underline{(\mathbf{B}^e)^T \mathbf{W}^e} \mathbf{u}_l, \quad (3.73)$$

que pode ser resolvido, pois é um sistema linear determinado. A matriz resultante da expressão entre colchetes é a matriz de massa global $\mathbf{M}$. Qualquer sistema matricial global

pode ser derivado de um sistema matricial local utilizando-se um procedimento idêntico a este.

Por fim, nota-se que para problemas grandes calcular produtos de matrizes de forma explícita é inviável e nesses casos, a técnica de soma fatorada pode ser utilizada. O sistema resultante é bastante grande, e também tipicamente bastante esparso. A inversão ou fatoração direta são praticamente inviáveis. Posteriormente, será visto como reduzir este sistema matricial em componentes menores baseado na decomposição natural de métodos de elementos espectrais.

✓ Condensação estática.

Nesta seção será apresentada a técnica de condensação estática, que é utilizada para resolver sistemas matriciais tirando proveito da estrutura do método de elementos espectrais. Embora esta técnica possa ser aplicada também a um sistema matricial não-simétrico, aqui a atenção será restrita somente a sistemas simétricos, que são típicos quando se usa o método de Galerkin. Para o uso desta técnica, similarmente ao esquema de numeração local a convenção usada para a numeração global é numerar primeiramente os modos de vértices globais, depois os modos de aresta e por último os modos de interior. Além disso, os modos de interior são numerados consecutivamente.

Será tomado como exemplo o sistema matricial representado pela eq. (3.73). As matrizes elementares $\mathbf{M}^e$ podem ser divididas em componentes que contêm contribuições do contorno e/ou interior, da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b^e & \mathbf{M}_c^e \\ (\mathbf{M}_c^e)^T & \mathbf{M}_i^e \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

onde $\mathbf{M}_b^e$ representa os componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam da interação entre modos de contorno, $\mathbf{M}_c^e$ representa os componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam do acoplamento entre modos de contorno e modos de interior e $\mathbf{M}_i^e$ representa componentes de $\mathbf{M}^e$ que resultam da interação entre modos de interior.

Figura 3.6: Estrutura da matriz $\mathbf{M}$.

Dada a convenção de numeração descrita no primeiro parágrafo desta seção, a matriz $\mathbf{M}$ terá a estrutura descrita na Figura 3.6. Nesta figura, a matriz $\mathbf{M}_b$ é a montagem global das matrizes $\mathbf{M}_b^e$ e similarmente $\mathbf{M}_c$ e $\mathbf{M}_i$ correspondem à montagem global das matrizes $\mathbf{M}_c^e$ e $\mathbf{M}_i^e$ respectivamente. Uma característica notável do sistema global é que a parcela $\mathbf{M}_b$ é esparsa e pode ser reordenada de modo a diminuir a largura de banda usando procedimentos como, por exemplo, o algoritmo reverso de Cuthill McKee ou refatoração em multi-nível utilizando complemento de Schur. Estes último exemplo será discutidos nessa seção. A matriz $\mathbf{M}_c$ é bastante esparsa mas, como será visto adiante, ela só opera em vetores conhecidos e por isso só é preciso armazenar as matrizes elementares $\mathbf{M}_c^e$. Finalmente, a forma natural de $\mathbf{M}_i$ é uma matriz diagonal em blocos, cuja inversão tem um custo bastante baixo, pois cada bloco pode ser invertido individualmente. É a estrutura desta última matriz que faz com que o método de condensação estática seja interessante em termos de eficiência e ela decorre do fato de que um modo de interior só tem magnitude não nula em um elemento e portanto é ortogonal aos modos de interior dos outros elementos.

Reescrevendo o sistema da eq. (3.73) de modo a simplificar a notação para esta seção, temos:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (3.75)$$

onde $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{u}}_g$ e $\mathbf{f} = \mathbf{A}^T(\mathbf{B}^e)^T\mathbf{W}^e\mathbf{u}_l$. Pode-se fazer a distinção entre componentes de interior e contorno para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$, usando $\mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_i$, e $\mathbf{f}_b$, $\mathbf{f}_i$ respectivamente, ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

A eq. (3.75) pode então ser reescrita, mostrando suas partes constituintes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Para resolver este sistema, uma eliminação de bloco é efetuada através da pré-multiplicação dos dois lados da equação pela matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

chegando a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T & 0 \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

A equação para as incógnitas de contorno é, portanto:

$$(\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T) \mathbf{x}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i. \quad (3.80)$$

Uma vez conhecido $\mathbf{x}_b$, pode-se determinar $\mathbf{x}_i$ com a segunda linha da eq. (3.79):

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i - \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b. \quad (3.81)$$

A solução da eq. (3.75) foi dividida em três etapas: a primeira é calcular e inverter $[\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T]$, que é conhecido como *complemento de Schur*. A segunda é o cálculo de $\mathbf{M}_i^{-1}$ e a operação final é o cálculo de $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} = [\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T]^T *$.

A segunda e terceira operações podem ambas serem feitas no nível de elemento. Como $\mathbf{M}_i$ é uma matriz diagonal de blocos e estes blocos são as matrizes $\mathbf{M}_i^e$, isto é, $\mathbf{M}_i = \underline{\mathbf{M}_i^e}$, a inversa de $\mathbf{M}_i$ é:

$$\mathbf{M}_i^{-1} = [\underline{\mathbf{M}_i^e}]^{-1} = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}}, \quad (3.82)$$

que é ainda uma matriz diagonal de blocos e pode ser calculada localmente para cada elemento. Os produtos $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i$ e $\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b$ podem também ser tratados localmente pois envolvem somente produtos entre matrizes e vetores com um vetor conhecido. Para ilustrar esta operação na sua forma matricial, define-se uma matriz $\mathbf{A}_b$ que a versão para contorno da

* Esta igualdade vale pela propriedade de matrizes $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ e porque a matriz $\mathbf{M}_i$ é simétrica, e portanto, também sua inversa, fazendo com que a $(\mathbf{M}_i^{-1})^T = \mathbf{M}_i^{-1}$

matriz $\mathbf{A}$ e é equivalente à operação feita por $bmap[e][i]$. A matriz $\mathbf{A}_b$, portanto transforma os graus de liberdade de contorno globais em locais, isto é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_b^1 \\ \mathbf{x}_b^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_b^{N_{el}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b, \quad (3.83)$$

onde $\mathbf{x}_b^e$ contém os componentes de $\mathbf{x}_b$ no elemento e . Similarmente, ao se operar com $\mathbf{A}_b^T$ os graus de liberdade de contorno locais são montados num vetor global. A matriz $\mathbf{M}_c$ pode ser escrita:

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e}, \quad (3.84)$$

e os produtos $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i$ e $\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b$ tornam-se:

$$\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \mathbf{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} \mathbf{f}_i}, \quad (3.85)$$

$$\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T \mathbf{x}_b = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1} [\mathbf{M}_c^e]^T \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b}. \quad (3.86)$$

Como tanto $\underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}}$ quanto $\underline{\mathbf{M}_c^e}$ são essencialmente matrizes locais, estes produtos podem ser calculados no nível do elemento em relação a um vetor que ou está montado globalmente, como representado por $\mathbf{A}_b^T$, ou distribuído globalmente, como representado por $\mathbf{A}_b$. Essas duas matrizes também ilustram como construir o sistema de modos de contorno, pois:

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_b} \mathbf{A}_b. \quad (3.87)$$

Por conseguinte, a expressão do complemento de Schur pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^T &= \mathbf{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_b} \mathbf{A}_b - \mathbf{A}_b^T \underline{\mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T} \mathbf{A}_b = \\ &= \mathbf{A}_b^T \left[\underline{\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T} \right] \mathbf{A}_b, \end{aligned} \quad (3.88)$$

o que mostra que o complemento de Schur global pode ser gerado a partir de sistemas locais de complemento de Schur $\mathbf{M}_b^e - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T$. Conclui-se então que a montagem global somente é necessária para o sistema de contorno quando a técnica de condensação estática é empregada. Uma vez que solução no contorno é conhecida, a solução dos modos de interior dada pela eq. (3.81) pode ser calculada no nível de elemento. Nesta formulação, assumiu-se que todas as condições de contorno globais eram incógnitas, resultando numa matriz global para o complemento de Schur de tamanho N_b . No entanto, na maioria dos problemas algumas condições de contorno são do tipo Dirichlet, ou seja, têm valores conhecidos. Pode-se então

renumerar o sistema global de modo que estes graus de liberdade sejam posicionados após os graus de liberdade de valor desconhecido. Por fim, somente uma sub-matriz de $\mathbf{M}_b$ é utilizada.

Dado que a maior parte da memória requerida no emprego desta técnica é usada no sistema global do complemento de Schur, uma alternativa é resolver este sistema iterativamente, onde somente o armazenamento de complementos de Schur locais $\mathbf{M}_b^e - \mathbf{M}_c^e [\mathbf{M}_i^e]^{-1} (\mathbf{M}_c^e)^T$ são necessários. Este sistema local é também melhor condicionado do que o sistema completo (Karniadakis e Sherwin, p.151). A seguir, será descrito este modo de resolução.

O efeito de construir cada um dos complementos de Schur locais é separar os modos de contorno dos modos de interior. Entretanto, a matriz inversa $[\mathbf{M}_i^e]^{-1}$ é tipicamente cheia, o que significa que os modos de contorno estão acoplados. É este acoplamento que dita a largura de banda do complemento de Schur global.

Embora um modo de contorno esteja acoplado a todos os outros modos de contorno dos elementos aos quais ele pertence, ele não está acoplado com os modos de contorno dos elementos aos quais ele não pertence. Assim, uma numeração apropriada do sistema de contorno gera uma matriz de complemento de Schur que também contém uma sub-matriz que é diagonal de blocos, podendo-se, desse modo, reaplicar a técnica de condensação estática. Esta renumeração pode ser repetida enquanto houver mais de uma região com elementos não vizinhos.

3.4.3 Representação da fronteira

Para concluir este capítulo, serão discutidos tópicos relevantes para a representação de informações na fronteira do domínio. Até agora, assumiu-se que todas as condições de contorno eram especificadas em termos de coeficientes modais, contudo, este não é o caso típico.

Para ilustrar os conceitos desta seção será considerada uma equação de Poisson na região bidimensional Ω ;

$$\nabla^2 u - f = 0, \quad (3.89)$$

com condições de contorno

$$u|_{\partial\Omega^D} = g_D \left(\partial\Omega^D \right), \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega^N} = g_N \left(\partial\Omega^N \right), \quad (3.90)$$

onde g_D e g_N são as condições de contorno tipo Dirichlet e Neumann, respectivamente, e $\partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N = \partial\Omega$. Para construir a formulação fraca deste problema, multiplica-se a equação pela função de peso $v(x)$ e integra-se no domínio Ω para obter:

$$(v, \nabla^2 u) - (v, f) = 0. \quad (3.91)$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo desta equação, chega-se a:

$$(\nabla v, \nabla u) = (v, f) + \langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle, \quad (3.92)$$

onde

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.93)$$

e $\mathbf{n}$ é a normal que aponta para fora do domínio. É preciso agora aplicar as condições de contorno, lembrando que o espaço de funções $v(\mathbf{x})$ numa expansão de Galerkin é homogênea e portanto nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet.

Só se pode operar com componentes de $u(\mathbf{x})$ que estejam no mesmo espaço. Por isso, a solução total $u(\mathbf{x})$ será decomposta numa componente homogênea $u^H(\mathbf{x})$ e numa componente não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$, onde $u(\mathbf{x}) = u^H(\mathbf{x}) + u^D(\mathbf{x})$ e $u^D(\mathbf{x})$ satisfaz as condições de contorno essenciais $g_D(\partial\Omega^D)$. Nota-se que como $v(\mathbf{x})$ é definida de modo a ser nula em todas as fronteiras do tipo Dirichlet, pode-se reescrever a eq. (3.93):

$$\langle v, \nabla u \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} v g_N dS = \langle v, g_N \rangle. \quad (3.94)$$

Desse modo, o problema de Galerkin pode ser posto como:

Encontrar $u^H \in \chi$ tal que:

$$(\nabla v, \nabla u^H) = (v, f) + \langle v, g_N \rangle - (\nabla v, \nabla u^D), \quad \forall v \in \chi, \quad (3.95)$$

onde χ é o espaço homogêneo de teste. Tendo em mente todos os conceitos apresentados até então, ainda resta descrever uma maneira de determinar a solução não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$ assim como um procedimento para calcular a integral de contorno $\langle v, g_N \rangle$. Embora a escolha de funções globais quaisquer que satisfaçam as condições de contorno seja suficiente, pode-se automatizar este processo aplicando a solução não-homogênea $u^D(\mathbf{x})$ nos modos de expansão que não são nulos na fronteira do tipo Dirichlet.

Para calcular a integral de contorno $\langle v, g_N \rangle$, é necessário saber como representar elementos curvos, pois o objetivo deste trabalho é o estudo do escoamento ao redor de corpos cilíndricos, portanto, nas simulações haverá a necessidade de se representar superfícies curvas. Além de definir este tipo de representação, é preciso também calcular o Jacobiano do mapeamento da fronteira para a região padrão de integração.

- ✓ Aplicações de condições de contorno essenciais.

Em termos práticos, normalmente se deseja tratar todos os graus de liberdade globais do sistema como incógnitas, de modo que se possa manter a generalidade da implementação numérica. No entanto, graus de liberdade associados com condições de contorno essenciais são conhecidos. O procedimento que se adota então é renumerar estes modos de forma que eles fiquem agrupados e colocados dentro da porção de contorno, após os modos de contorno incógnitos. Assim, o sistema referente ao contorno $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{HH} & \mathbf{A}^{HD} \\ \mathbf{A}^{DH} & \mathbf{A}^{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^H \\ \mathbf{u}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^H \\ \mathbf{f}^D \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Como $\mathbf{u}^D(\mathbf{x})$ é conhecido, o sistema fica reduzido a:

$$\mathbf{A}^{HH} \mathbf{u}^H = \mathbf{f}^H - \mathbf{A}^{HD} \mathbf{u}^D. \quad (3.97)$$

Dada uma condição de contorno essencial $g_D(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ faz-se necessário um método consistente de aproximar esta condição de contorno em termos da expansão discreta utilizada. O método que será utilizado opera em nível local e consiste em fazer uma projeção de Galerkin de g_D nos modos de fronteira, e depois subtrair a contribuição dos vértices e fazer uma projeção L^2 dos modos de aresta da função que sobra, de modo a garantir continuidade C^0 . Esta operação será ilustrada agora, considerando a Figura 3.7.

Figura 3.7: Contornos e sistemas de coordenadas locais e global.

Uma condição de contorno conhecida g_D será projetada na fronteira de um elemento e que está ao longo de $\partial\Omega$. A solução discreta $u^\delta(x_1, x_2)$ ao longo da aresta pode ser escrita da seguinte forma:

$$u^\delta(x_1, x_2) = \sum_{pq} \hat{u}_{pq}^e \phi_{p0}^e(\xi_1, -1) = \sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}_{p0}^e \phi_{p0}^e(\xi_1, -1), \quad (3.98)$$

onde $x_1 = \chi_1^e(\xi_1, -1)$, $x_2 = \chi_2^e(\xi_1, -1)$. Sendo a expansão modal então $\phi_{p0}(\xi_1, -1) = \psi_p^a(\xi_1)\psi_0^a(-1) = \psi_p^a(\xi_1)$. Portanto, o problema é encontrar $\hat{u}_{p0}^e$ tal que:

$$\sum_{p=0}^{P_1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \square g_D(\chi_1^e(\xi_1, -1)). \quad (3.99)$$

Pode-se usar a decomposição vértice-aresta dos modos de fronteira para garantir que a aproximação seja globalmente C^0 . Os modos de vértice têm, por definição, valor unitário nas extremidades de uma aresta e todos os outros modos de contorno são nulos nestes pontos. Continuidade C^0 é, portanto, garantida se os coeficientes de vértice forem igualados a:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{00}^e &= g_D(\chi_1^e(-1, -1)) \\ \hat{u}_{P_1 0}^e &= g_D(\chi_1^e(1, -1)) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Os coeficientes restantes da fronteira podem ser escritos da forma:

$$\sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \psi_p^a(\xi_1) \square g_D(\chi_1^e(\xi_1, -1)) - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a(\xi_1) - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a(\xi_1). \quad (3.101)$$

Como os modos restantes não contribuem para os pontos de extremidade, pode-se resolver a equação para as incógnitas restantes $\hat{u}_{p0}^e (1 \leq p \leq P_1)$ sem destruir a continuidade C^0 . Estes coeficientes podem ser encontrados através do cálculo uma projeção de Galerkin:

Encontrar $\hat{u}_{p0}^e$ tal que

$$\left(\phi_i, \sum_{p=1}^{P_1-1} \hat{u}_{p0}^e \phi_p \right) = \left(\phi_i, g_D - \hat{u}_{00}^e \psi_0^a - \hat{u}_{P_1 0}^e \psi_{P_1}^a \right), \quad 0 \leq i \leq P_1 - 1. \quad (3.102)$$

Claramente isto envolve a construção e inversão de uma matriz unidimensional de massa $\mathbf{M}^{1D}[i][j] = (\phi_i(\xi_1), \phi_j(\xi_1))$ para $(1 \leq i, j \leq P_1)$. Esta aproximação de Galerkin minimiza a norma L^2 do erro entre a condição de contorno exata e a aproximação na aresta no interior da região (Karniadakis e Sherwin, p.158).

✓ Representação de superfícies curvas

Foi visto, anteriormente, como mapear quadrilátero qualquer com lados retilíneos na região padrão de integração. Nesta seção, o método de mapeamento será generalizado com a finalidade de incluir também contornos curvos.

A função de mapeamento pode ser escrita de forma genérica como uma expansão da forma:

$$x_i = \chi_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=0}^{P_2} \hat{x}_{pq}^i \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2), \quad (3.103)$$

onde, para um quadrilátero de lados retilíneos, $\hat{x}_{pq}^i = 0$ exceto para os modos de vértice, que tem os valores:

$$\hat{x}_{00}^i = x_i^A \quad \hat{x}_{p0}^i = x_i^B \quad \hat{x}_{p1}^i = x_i^C \quad \hat{x}_{0p_2}^i = x_i^D.$$

Portanto, para descrever uma região de lados retos, só é necessário conhecer a localização dos vértices. No entanto, para arestas de forma arbitrária, mais informações são necessárias, e normalmente uma aresta deste tipo é descrita em termos de funções paramétricas, que serão chamadas de $f_i^A(\xi_1)$, $f_i^B(\xi_2)$, $f_i^C(\xi_1)$ e $f_i^D(\xi_2)$.

Pode-se representar uma função de contorno analítica em termos de uma expansão C^0 usando uma transformação de contorno modificada. Por exemplo, pode-se representar uma aresta curva ao longo de $\xi_2 = -1$ onde $x_i = f_i(\xi_1)$ por uma expansão polinomial em ξ_1 da forma:

$$x_i = f_i^A(\xi_1) \square \sum_{p=0}^{P_1} \hat{x}_{p0}^i \psi_p(\xi_1). \quad (3.104)$$

Este tipo de expansão força a continuidade das coordenadas nos vértices. Se um procedimento similar for aplicado a todas as outras arestas então, ter-se-á um conjunto de coeficientes $\hat{x}_{pq}^i$ que representará todas as arestas. O mapeamento geral das coordenadas ξ_1 , ξ_2 para x_1, x_2 é determinado por (3.103).

Concluindo, este tipo de mapeamento pode ser gerado para todo tipo de expansão modal modificada em qualquer região padrão seguindo dois passos:

- Projecção das coordenadas globais curvas x_i nos contornos de cada elemento usando a transformação de contorno modificada.
 - A transformação para trás expressa pela eq. (3.103) então determina o mapeamento isoparamétrico que relaciona as coordenadas locais ξ_1, ξ_2 às coordenadas globais x_1, x_2 .
- ✓ Cálculo do Jacobiano da integral de contorno.

Para determinar integrais da forma:

$$\langle v, g_N \rangle = \int_{\partial\Omega^N} v g_N dS, \quad (3.105)$$

que aparecem tipicamente em discretizações de Galerkin de operadores Laplacianos como mostrado na eq. (3.95)

Em duas dimensões a eq. (3.105) é uma integral de linha da forma:

$$\int_a^b f(x_1, x_2) ds, \quad (3.106)$$

onde $ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$ é o comprimento diferencial. A fronteira é particionada em contornos elementares $\partial\Omega^e \cap s$, nos quais se deseja calcular cada segmento da integral (3.106). sabe-se que as coordenadas globais x_1, x_2 em cada elemento estão relacionadas com as coordenadas locais ξ_1, ξ_2 pelo mapeamento, ou seja:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi_1, \xi_2) \quad x_2 = \chi_2^e(\xi_1, \xi_2) .$$

Pode-se, portanto, relacionar o diferencial em x_1 e x_2 em termos do diferencial em ξ_1 e ξ_2 pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde as derivadas parciais podem ser calculadas como mostrado anteriormente.

Ao longo de uma aresta de qualquer elemento a aresta está completamente parametrizada em termos de ξ_1 ou ξ_2 enquanto a outra coordenada local é constante e tem o valor 1 ou -1. Sendo assim, dependendo da aresta, o comprimento ds pode ter uma das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 (d\xi_1)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 (d\xi_1)^2} \\ ds &= \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 (d\xi_2)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2 (d\xi_2)^2} \end{aligned} \quad (3.108)$$

e a integral (3.106) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2) ds &= \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2} d\xi_1 \\ \int_{\partial\Omega^e \cap s} f(x_1, x_2) ds &= \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2} d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.109)$$

que pode ser calculada usando quadratura de Gauss.

4 Solução das equações de Navier-Stokes utilizando o método dos elementos espectrais

O objeto de estudo deste trabalho é o escoamento laminar de um fluido newtoniano bidimensional. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível, sem forças de corpo e com propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{u}=(u, v, w)$ é o vetor velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ρ é a densidade e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Esta equação pode ser adimensionalizada utilizando as seguintes expressões:

$$\bar{u} = \frac{u}{U_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}, \quad \bar{w} = \frac{w}{U_\infty}, \quad \bar{t} = \frac{t U_\infty}{D},$$
$$\bar{x} = \frac{x}{D}, \quad \bar{y} = \frac{y}{D}, \quad \bar{z} = \frac{z}{D}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$$

onde U_∞ é a velocidade do campo não perturbado, D é a dimensão característica do corpo, que neste trabalho, onde são estudados escoamentos ao redor de cilindros, é o diâmetro do cilindro e Re é o número de Reynolds. Todas as variáveis utilizadas daqui para diante serão adimensionais, salvo indicação contrária, e por isso não se usará mais a barra sobre as grandezas a fim de simplificar a notação. As equações de Navier-Stokes podem então ser escritas na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.4)$$

A solução numérica das equações de Navier-Stokes apresenta diversas dificuldades. Talvez a mais evidente seja a existência do termo não linear. No método que será descrito aqui, o termo não linear é tratado de maneira explícita e com um intervalo de tempo (Δt) adequado este problema é solucionado.

Uma outra dificuldade importante é a forma de acoplamento entre pressão e velocidade, que faz com que as duas variáveis não possam ser aproximadas independentemente. Uma condição de compatibilidade conhecida como condição *inf-sup* ou *div-stability* deve ser satisfeita pelos espaços discretos que aproximarão a solução, a fim de garantir estabilidade e unicidade da solução discreta. Na implementação utilizada neste

trabalho, esta condição foi satisfeita empregando-se polinômios de ordem N para a velocidade e um polinômio de ordem $N - 1$ para a pressão. Maiores detalhes sobre esta condição podem ser encontrados em Karniadakis e Sherwin [9].

4.1 Condições de contorno e avanço no tempo

Esta seção baseia-se primordialmente nos trabalhos de Karniadakis, Israeli e Orszag [10], e Karniadakis e Sherwin [9].

Primeiramente serão definidas condições de contorno apropriadas para o tipo de problema estudado neste trabalho, que é o escoamento externo ao redor de um corpo rombudo. Começando com as condições de contorno para velocidade, pode-se dizer que ao longe, onde não há influência do corpo nem da esteira por ele formada, o escoamento pode ser considerado não perturbado e a velocidade é igual a U_∞ . Nas paredes, é imposta condição de não escorregamento e a velocidade é nula. Na região de saída de fluido, tipicamente influenciada pela esteira, a derivada da velocidade na direção normal do contorno pode ser considerada como nula, ou seja, $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$.

Já para a pressão, na saída também se impõe uma condição do tipo Neumann, isto é, $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$. Quanto à condição de contorno da pressão na parede, a literatura apresenta um debate intenso sobre esta questão. Vale lembrar que não existe uma equação para pressão e, portanto, a pressão numa parede é consequência do escoamento. Tradicionalmente, nas paredes adotou-se para a pressão um gradiente nulo:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{parede}} = 0. \quad (4.5)$$

Deve-se ressaltar que a adoção deste tipo de condição de contorno é totalmente compatível com a teoria da camada limite. Contudo, segundo Karniadakis, Israeli e Orszag [10], esta condição de contorno compromete qualquer tentativa de se obter uma precisão melhor do que primeira ordem no tempo. Os mesmos autores propõem uma condição de contorno do tipo Neumann de alta ordem para a pressão nestas regiões, que é derivada da equação de equilíbrio de momento linear na direção normal na fronteira do domínio. Esta mesma condição é utilizada também nas regiões de escoamento ao longe na implementação empregada neste trabalho. Ela será descrita adiante, juntamente com o método de avanço no tempo.

Ao se resolver as equações de Navier-Stokes no tempo, é necessário adotar uma discretização temporal. O mais usual em escoamentos incompressíveis é fazer a discretização

no tempo independente da discretização no espaço. O método de elementos espectrais permite uma resolução muito alta no espaço, mas isso de nada adianta se a resolução temporal não for compatível com esta precisão. A discretização temporal, além de estar diretamente ligada com fenômenos transientes, também influencia diretamente na forma do sistema de equações que precisam ser resolvidas. Em particular, ela determina a forma da equação de pressão e dita o quão bem a restrição de incompressibilidade é aproximada nas formulações com variáveis primitivas, ou seja, formulações do tipo pressão-velocidade.

Eles propõem um método de solução das equações de Navier-Stokes transitórias usando *time-splitting* que permite o uso de precisões de ordens superiores.

A eq. (4.3) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{L}(\mathbf{u}). \quad (4.6)$$

Nesta equação,

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})], \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.8)$$

que representam o termo convectivo e o termo difusivo. O termo convectivo geralmente é implementado desta forma para reduzir *aliasing* (Karniadakis, Israeli e Orszag [10]) e apresenta resultados superiores apesar de aumentar o custo computacional.

A eq. (4.6) integrada num passo de tempo Δt resulta em:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt + \frac{1}{\text{Re}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) dt, \quad (4.9)$$

onde o índice n se refere ao passo de tempo $t_n = n\Delta t$. O termo não linear é aproximado por um esquema explícito de ordem J_e da família de Adams-Bashforth, principalmente por razões de eficiência:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) dt = \Delta t \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}), \quad (4.10)$$

onde β_q são os pesos dados pela Tabela 4.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Os termos lineares $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ são aproximados de forma implícita por razões de estabilidade. Será utilizado um esquema de ordem J_i da família de Adams-Moulton, resultando em:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) dt = \Delta t \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}), \quad (4.11)$$

onde γ_q são os pesos dados pela Tabela 4.1, que dependem da ordem de integração escolhida. Por último, o termo de pressão será reescrito:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt = \Delta t \nabla \bar{p}^{n+1}, \quad (4.12)$$

onde $\bar{p}^{n+1}$ é um campo escalar que assegura que o campo de velocidades final é incompressível ao final do passo de tempo $(n+1)$.

Tabela 4.1: Coeficientes dos algoritmos das famílias Adams-Bashforth e Adams-Moulton.

	Coeficiente	1ª ordem	2ª ordem	3ª ordem
Adams-Bashforth	β_0	1	3/2	23/12
	β_1	0	-1/2	-16/12
	β_2	0	0	5/12
Adams-Moulton	γ_0	1	1/2	5/12
	γ_1	0	1/2	8/12
	γ_2	0	0	-1/12

Usando esta notação, a discretização temporal pode ser realizada em três etapas, tomando a seguinte forma:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q N(\mathbf{u}^{n-q}) \quad \text{EM } \Omega, \quad (4.13)$$

$$\frac{\hat{\hat{\mathbf{u}}} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1} \quad \text{EM } \Omega, \quad (4.14)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\hat{\mathbf{u}}}}{\Delta t} = \nu \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q L(\mathbf{u}^{n+1-q}) \quad \text{EM } \Omega, \quad (4.15)$$

com condições de contorno essenciais $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0 \quad \text{EM } \partial\Omega. \quad (4.16)$$

Nestas equações, $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ são campos de velocidade intermediários. A eq. (4.13) pode ser resolvida para $\hat{\mathbf{u}}$, já que é uma expressão explícita. Desde que se conheça o campo $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$, que deve vir da eq. (4.14), a eq. (4.15) também pode ser resolvida para $\mathbf{u}^{n+1}$, pois se trata de uma equação linear resolvida de maneira implícita. Resta saber como resolver a eq. (4.14), já que nesta expressão há duas incógnitas: $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\bar{p}^{n+1}$. Isto é solucionado assumindo-se que o campo de velocidades temporário $\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ satisfaz a condição de incompressibilidade do fluido, assim:

$$\nabla \cdot \hat{\hat{\mathbf{u}}} = 0 \quad \text{EM } \Omega. \quad (4.17)$$

Substituindo a eq. (4.17) na eq. (4.14) chega-se a:

$$\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \quad \text{EM } \Omega. \quad (4.18)$$

Falta agora estabelecer as condições de contorno para esta equação. Para isso, toma-se a equação (4.6) no contorno $\partial\Omega$ integrada no tempo, multiplicando todos os termos pelo vetor normal $\mathbf{n}$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p \cdot \mathbf{n} dt + \frac{1}{\text{Re}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dt \quad \text{EM } \partial\Omega. \quad (4.19)$$

O termo dentro da integral do lado esquerdo desta equação pode ser reescrito:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}. \quad (4.20)$$

O segundo termo do lado direito desta equação é nulo, visto que o domínio é fixo e que portanto o vetor normal na fronteira é invariante no tempo. Já o segundo termo, quando integrado em todo o contorno, representa o fluxo mássico líquido no domínio. Como está sendo considerado um escoamento incompressível, sem fontes ou sorvedouros no interior do domínio, a integral no contorno deste termo é nula, embora localmente ele possa não ser. Entretanto, como no método numérico utilizado as equações posteriormente são integradas em todo o domínio, este termo será cancelado numa etapa seguinte, e por isso, ele será desconsiderado nesta etapa. Isto posto, o termo do lado esquerdo na eq. (4.19) é anulado e substituindo nela as expressões (4.10), (4.11) e (4.12), chega-se a:

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbf{L}(\mathbf{u}^{n+1-q}) \right] \quad \text{EM } \partial\Omega. \quad (4.21)$$

Nota-se que nesta expressão aparecem variáveis no tempo $n+1$, que são incógnitas. Isto acontece devido ao tratamento implícito do termo difusivo $\mathbf{L}(\mathbf{u})$. A fim de eliminar este problema e construir um esquema estável, o termo difusivo é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (4.22)$$

O primeiro termo, $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$, será tratado de forma implícita enquanto o segundo termo, $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$, será tratado de forma explícita. Pode-se reescrever então a eq. (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot & \left[\sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{u}^{n-q}) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-q}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q (-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{n-q})) \right] \quad \text{EM } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que nesta equação, o termo $\gamma_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})$ pode ser igualado a zero, pois o requisito de incompressibilidade no passo $n+1$ faz com que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$. Desse modo, elimina-se as

velocidades no passo $n+1$ da expressão e a única incógnita passa a ser $\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}}$. Perceba que esta expressão também recupera a condição imposta na região de saída, $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$, pois nesta região $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$.

5 Simulações numéricas

As simulações numéricas foram realizadas utilizando o programa computacional *Nektar* que utiliza o método dos elementos espectrais para solução das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível.

Este programa foi desenvolvido por Spencer Sherwin, George EM Karniadakis e outros. O programa é bem geral, permitindo utilizar elementos quadriláteros e triangulares com interpolações de ordem variada. As equações (4.13) a (4.17) são utilizadas para a discretização das equações de Navier-Stokes e o programa permite interpolação de até terceira ordem. O programa também permite utilizar diversas condições de contorno: velocidades conhecidas em algum trecho da fronteira, parede (velocidade nula), escoamento saindo e fluxo. As condições de contorno podem ser fornecidas a partir de uma equação analítica, o que facilita muito a entrada de dados algumas vezes.

Para executar o programa é necessário criar um arquivo com as informações sobre a simulação. Este arquivo contém informações gerais sobre a simulação como número de Reynolds, intervalo de tempo, grau do polinômio de função de base, ordem de interpolação no tempo, que saída produzir (campos e forças), tempo de simulação. O arquivo também tem a definição da malha e condições de contorno.

As simulações para cilindro oscilando forçadamente são realizadas impondo um campo de velocidade senoidal na direção de oscilação do cilindro (y), conforme o método do escoamento oscilatório transversal descrito na seção 2.2.1.1.

5.1 Validação do Método Numérico e Testes de Convergência

5.1.1 Grau do polinômio da função de base

A análise da sensibilidade dos resultados (simulação ao redor de um cilindro fixo) em relação à variação do grau do polinômio utilizado como função de base foi o primeiro teste realizado neste trabalho. Para este teste foi utilizada uma malha baseada em trabalhos da literatura no que se refere às dimensões e distribuição de elementos. Esta malha possui $50D$ de comprimento e $25D$ de largura, contando com 338 elementos.

O valor do número de Reynolds foi fixado em 200 e foram feitas simulações variando o grau do polinômio da função de base de 6 a 12. A Tabela 5.1 mostra os resultados encontrados para o número de Strouhal (S_t), coeficiente de arrasto médio ($\overline{C_D}$), valor RMS (Raiz da média quadrática) do coeficiente de sustentação (C_L') e coeficiente de pressão de

base médio ($\bar{C}_{pb}$), onde $C_{pb} = 1 + 2(p_{180^\circ} - p_{0^\circ}) / \rho U^2$, sendo p_{0° e p_{180° as pressões no ponto a montante e a jusante do cilindro. O passo de tempo adimensional utilizado foi de $\Delta t = 0.005$.

Tabela 5.1: Teste de convergência – grau do polinômio da função de base.

Ordem	St	$\bar{C}_{pb}$	$\bar{C}_D$	C'_L
6	0,1960	-0,8942	1,3408	0,4790
7	0,1960	-0,8916	1,3368	0,4768
8	0,1960	-0,8939	1,3367	0,4766
9	0,1960	-0,8938	1,3367	0,4765
10	0,1960	-0,8938	1,3367	0,4765
11	0,1960	-0,8938	1,3367	0,4765
12	0,1960	-0,8938	1,3367	0,4765

O critério de convergência adotado foi o de variação relativa com o caso de refinamento imediatamente superior. A convergência foi considerada atingida quando esta variação fosse menor que 1% para todas as grandezas. Em decorrência deste critério foi escolhido grau 9 para a função de base.

5.1.2 Grau de integração da condição de contorno de pressão

Este teste refere-se a um parâmetro particular do método utilizado. O software *nektar* permite variar a ordem de integração da condição de contorno de pressão. Esta condição de contorno é do tipo Neumann de alta ordem, e se localiza onde há condições de contorno essenciais para velocidade, isto é, nas paredes e regiões de entrada. Tabela 5.2 mostra os resultados das simulações para $Re = 200$.

Tabela 5.2: Teste de convergência – Grau de integração da condição de contorno de pressão.

Grau de Integração	St	$\bar{C}_{pb}$	$\bar{C}_D$	C'_L
1	0,1960	-0,8938	1,3367	0,4765
2	0,1962	-0,8878	1,3455	0,4676
3	0,1961	-0,8879	1,3454	0,4675

Utilizando mesmo o critério descrito no teste anterior foi adotado grau de integração 2.

5.1.3 Dimensões da malha

Neste teste foram escolhidas 5 malhas computacionais com as dimensões comprimento *versus* largura variando de 10D x 40D até 30D x 80D e, consequentemente, variando o número de elementos de 198 até 545. A Tabela 5.3 mostra os resultados das simulações para $Re = 200$.

A Figura 5.1 mostra a malha utilizada nas simulações computacionais. Esta malha possui 361 elementos e as seguintes dimensões adimensionais 20 x 60.

Tabela 5.3: Teste de convergência – Dimensões adimensionais da malha.

<i>Largura X Comprimento</i>	<i>Nº Elementos</i>	<i>St</i>	$\bar{C}_{pb}$	$\bar{C}_D$	C'_L
10 x 40	198	0,1997	-0,9038	1,3564	0,4732
15 x 50	254	0,1976	-0,8953	1,3498	0,4705
20 x 60	361	0,1961	-0,8879	1,3354	0,4623
25 x 70	423	0,1961	-0,8879	1,3353	0,4624
30 x 80	545	0,1960	-0,8879	1,3354	0,4624

Figura 5.1: Malha bidimensional utilizada nas simulações computacionais.

5.1.4 Validação das simulações com resultados da literatura

O método computacional utilizado foi validado através da comparação dos resultados das simulações com cilindro fixo para valores Re de 60 até 180 com valores experimentais extraídos de Williamson [34].

A Figura 5.2 mostra a comparação dos resultados numéricos obtidos neste trabalho com os resultados experimentais da literatura. Percebe-se nitidamente a grande proximidade dos resultados. Comparando-se os valores numéricos verifica-se que o maior erro fica abaixo de 1%, o que valida a utilização do algoritmo computacional para as simulações do escoamento ao redor do cilindro oscilando, tanto forçadamente quanto apoiado em base elástica.

Figura 5.2: Validação com resultados experimentais.

5.2 Cilindro Oscilando Forçadamente

A malha utilizada nas simulações possui 361 elementos quadrangulares, possuindo as seguintes dimensões: $20D$ de largura e $60D$ de comprimento. A Figura 5.1 mostra esta malha em detalhe. A Figura 5.3 mostra as condições de contorno utilizadas nas simulações com o detalhe do campo de velocidade oscilatório na direção transversal à corrente uniforme $v = V_a \sin(2\pi ft)$ e a condição “outflow” representa $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$. Foram utilizados polinômios de grau 9 como interpoladores. O passo de tempo adimensional utilizado foi de $\Delta t = 0.002$.

Figura 5.3: Condições de contorno utilizadas nas simulações computacionais para cilindro oscilando forçadamente.

Foram escolhidas duas amplitudes de oscilação do cilindro: $0.15D$ e $0.40D$, e para ambas, número de Reynolds $Re = 200$. Para cada amplitude foram escolhidas dez frequências de oscilação do cilindro: $0.8f_s$, $0.85f_s$, $0.9f_s$, $0.95f_s$, $0.975f_s$, $0.9875f_s$, $1.025f_s$, $1.05f_s$, $1.075f_s$ e $1.1f_s$; onde D é o diâmetro do cilindro e f_s é a frequência de desprendimento de vórtices para cilindro fixo para dado número de Reynolds (Strouhal). A razão destas escolhas é a tentativa de observação do fenômeno da mudança brusca do ângulo de fase entre a força transversal ao escoamento e o deslocamento do cilindro, este fenômeno é conhecido como “phase-jump”.

Para ambas as amplitudes e todas as frequências de oscilação o modo de sincronização encontrado foi o 2S, resultado coerente com o mapeamento de Williamson e Roshko [3] (Figura 2.9), visto que para baixas amplitudes ($A/D < 0.6$) este é o modo de sincronização mais provável. A seguir, serão mostrados os resultados destas simulações.

Figura 5.4: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.80$.

Figura 5.5: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.80$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Para $A/D = 0.15$ a sincronização ocorreu a partir de $f/f_s = 0.85$ e terminou em $f/f_s = 1.1$. Como podemos ver na Figura 5.5, o coeficiente de sustentação e o deslocamento do cilindro não possuem a mesma frequência de oscilação, indicando que não houve sincronização. Podemos ver a igualdade entre essas frequências para $f/f_s = 0.85$ na Figura

5.6, indicando que para essa razão de frequências houve sincronização. Podemos ver também que o modo obtido foi o 2S (Figura 5.7).

Figura 5.6: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Figura 5.7: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$.

Figura 5.8: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.85$ mostrando as linhas de corrente nas proximidades do cilindro.

Figura 5.9: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.975$.

Podemos notar que à medida que a razão de frequências aumenta, dentro do regime de sincronização, a amplitude de oscilação do coeficiente de sustentação aumenta significativamente. Esta constatação fica clara observando as Figuras 5.6, 5.10 e 5.12. Outro fato interessante é a aproximação das curvas de coeficiente de sustentação e deslocamento adimensional com o aumento da razão de frequências, indicando que o ângulo de fase entre as curvas diminui.

Figura 5.10: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 0.975$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Figura 5.11: Esteira de vórtices para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 1.075$.

Figura 5.12: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.15$ e $f/f_s = 1.075$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

A Tabela 5.4 e a Figura 5.13 mostram a variação brusca do ângulo de fase entre o coeficiente de sustentação e o deslocamento do cilindro, e faz uma comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6], ambos para $Re = 200$ e $A/D = 0.15$. Pode-se perceber uma semelhança no comportamento dos resultados, já que a queda do ângulo de fase ocorre com a mesma taxa aproximadamente. A diferença está na fronteira do regime de sincronização. No presente trabalho a sincronização se inicia para $f/f_s = 0.85$ e a fase se anula para $f/f_s = 1.1$, já para Meneghini [6] a sincronização se inicia em $f/f_s = 0.80$ e a fase se anula em $f/f_s = 1.075$.

Tabela 5.4: Variação brusca do ângulo de fase (em graus). Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].

A/D = 0.15	Presente trabalho	Meneghini [6]
f/fs	ϕ	ϕ
0,8000	179	180
0,8500	160	197
0,9000	149	173
0,9500	132	147
0,9750	120	133
0,9875	109	122
1,0250	94	98
1,0500	80	73
1,0750	52	0
1,1000	0	0

Figura 5.13: Variação brusca do ângulo de fase para $A/D = 0.15$. Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].

Figura 5.14: Esteira de vórtices para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 0.90$.

Figura 5.15: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 0.90$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Figura 5.16: Esteira de vórtices para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.025$.

Figura 5.17: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.025$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Vimos, anteriormente, que, para $A/D = 0.15$, as curvas de coeficiente de sustentação e deslocamento do cilindro se aproximam à medida que a razão de freqüências aumenta, mostrando a variação do ângulo de fase de 180° para 0° . Para amplitude de $A/D = 0.40$ isso também ocorre (veja Figuras 5.15, 5.17 e 5.18). As diferenças são que para $A/D = 0.40$ a curva do coeficiente de sustentação não é uma senóide “perfeita” como é para $A/D = 0.15$ e o ângulo de fase, nesta amplitude, não varia de 180° a 0° , e sim de 143° a 0° .

Figura 5.18: Histórico do coeficiente de sustentação e do deslocamento adimensional do cilindro para $A/D = 0.40$ e $f/f_s = 1.05$, onde “Omega” é a velocidade angular da oscilação do coeficiente de sustentação C_L .

Tabela 5.5: Variação brusca do ângulo de fase (em graus). Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].

A/D = 0.40	Presente trabalho	Meneghini [6]
	ϕ	ϕ
0,8000	143	180
0,8500	137	180
0,9000	132	162
0,9500	120	150
0,9750	115	138
1,0500	0	0

Figura 5.19: Variação brusca do ângulo de fase para $A/D = 0.40$. Comparação com os resultados obtidos por Meneghini [6].

A Figura 5.19 e a Tabela 5.5 mostram, em detalhe, a variação brusca do ângulo de fase para $A/D = 0.40$, comparando com Meneghini [6]. Pode-se perceber uma grande semelhança na brusca variação do ângulo de fase entre os trabalhos. Ao contrário das simulações anteriores com amplitude $A/D = 0.15$, o ângulo de fase se torna nulo para mesma frequência que Meneghini [6].

5.3 Cilindro Apoiado em Base Elástica

As simulações do escoamento ao redor de um cilindro apoiado em base elástica (livre para oscilar) foram feitas com apenas um grau de liberdade: a direção transversal ao escoamento incidente (eixo y no caso estudado). Foi utilizada a mesma malha das simulações anteriores, ou seja, a malha apresentada na Figura 5.1. O resultado mais importante, do ponto de vista prático (projetos de “risers”, e outras estruturas cilíndricas), deste tipo de configuração é a curva $A_{\max}/D \times V_r$, isto, devido a dependência da vida útil destas estruturas à máxima amplitude de oscilação.

Para reproduzir a curva $A_{\max}/D \times V_r$ para Número de Reynolds $Re = 200$, foram escolhidos os seguintes valores de velocidade reduzida: 1.0, 2.0, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, e 10.0. A seguir serão mostrados os resultados das simulações, com as curvas $A_{\max}/D \times V_r$. Foram utilizados polinômios de grau 9 como interpoladores. O passo de tempo adimensional utilizado foi de $\Delta t = 0.002$.

Figura 5.20: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.0$.

Figura 5.21: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.0$ mostrando as linhas de corrente.

Para $Re = 200$ o pico de amplitude ocorreu para $Vr = 4.0$, com o valor de $A_{\max}/D = 0.565$. O baixo valor do pico de amplitude é um resultado esperado, de acordo com Williamson e Govardhan [26], onde, após uma compilação de inúmeros resultados experimentais e numéricos ficou constatado que para simulações numéricas para este Reynolds o pico de amplitude se aproxima de $A_{\max}/D \approx 0.6$. Outra constatação, também obtida por Saltara [20], foi que a maior variação do coeficiente de arrasto ocorreu na mesma velocidade reduzida onde ocorreu o pico de amplitude (Figura 5.22).

Figura 5.22: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 4.5$.

Figura 5.23: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 4.5$.

Figura 5.24: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 5.0$.

Figura 5.25: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 5.0$.

Uma questão importante também nas simulações de cilindro apoiado em base elástica é a variação do ângulo de fase entre o coeficiente de sustentação e o deslocamento do cilindro. As simulações de base elástica apresentaram uma significativa coerência com as simulações de oscilação forçada, uma vez que, ao aumentar o valor de Vr ocorreu uma mudança no ângulo de fase de 0° para 180° . Podemos perceber que para $Vr = 5.0$ (Figura 5.25) a fase é aproximadamente 0° e quando a velocidade reduzida é aumentada para $Vr = 8.0$ (Figura 5.26) a fase é de 180° , aproximadamente.

Figura 5.26: Histórico dos coeficientes de sustentação e de arrasto e deslocamento adimensional do cilindro para $Re = 200$ e $Vr = 8.0$.

Figura 5.27: Esteira de vórtices para $Re = 200$ e $Vr = 6.0$.

Figura 5.28: Curva de máxima amplitude de oscilação versus velocidade reduzida para $Re = 200$.

A Figura 5.28 mostra a curva $A_{\text{máx}}/D \times V_r$ obtida pelas simulações com $Re = 200$. Podemos observar novamente o pico de amplitude de $A_{\text{máx}}/D = 0.565$ ocorrido para $V_r = 4.0$.

6 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

As simulações computacionais obtiveram resultados muito coerentes com a literatura. No caso de um cilindro oscilando forçadamente, tanto para $A/D=0.15$ quanto para $A/D=0.40$, o fenômeno de variação brusca do ângulo de fase foi observado. Para $A/D=0.15$, as curvas de coeficiente de sustentação e deslocamento do cilindro se aproximam à medida que a razão de frequências aumenta, mostrando a variação do ângulo de fase de 180° para 0° . Para amplitude de $A/D=0.40$ isso também ocorre (veja Figuras Figura 5.15 e Figura 5.17). A única diferença é que para $A/D=0.40$ a curva do coeficiente de sustentação não é uma senoíde perfeita como é para $A/D=0.15$. Para ambas as amplitudes e todas as frequências (que se ocorreu sincronização) de oscilação o modo de sincronização encontrado foi o 2S, resultado coerente com o mapeamento de Williamson e Roshko [3] (Figura 2.9), visto que para baixas amplitudes ($A/D<0.6$) o modo de sincronização mais provável é o 2S. Pode-se perceber uma semelhança no comportamento dos resultados do presente trabalho com aqueles obtidos por Meneghini [6], ambos para $Re=200$ e $A/D=0.15$, já que a queda do ângulo de fase ocorre com a mesma taxa aproximadamente. A diferença está na fronteira do regime de sincronização. No presente trabalho a sincronização se inicia para $f/f_s=0.85$ e a fase se anula para $f/f_s=1.1$, já para Meneghini [6] a sincronização se inicia em $f/f_s=0.80$ e a fase se anula em $f/f_s=1.075$.

O valor do pico de amplitude $A_{\max}/D=0.565$ obtido nas simulações de cilindro apoiado em base elástica para $Re=200$ é coerente com os demais resultados obtidos através de simulações numéricas para este valor de Reynolds, e coerente também se comparado com os resultados experimentais para baixos valores de massa-amortecimento e Reynolds (vide Figura 2.25).

Outra constatação, também obtida por Saltara [20], foi que a maior variação do coeficiente de arrasto ocorreu na mesma velocidade reduzida onde ocorreu o pico de amplitude. A variação do ângulo de fase também foi observada nas simulações de base elástica. As simulações de base elástica apresentaram uma significativa coerência com as simulações de oscilação forçada, uma vez que, ao aumentar o valor de Vr ocorreu uma mudança no ângulo de fase de 0° para 180° .

Aqui seguem três sugestões para trabalhos futuros. A primeira delas é a investigação da influência do número de Reynolds na amplitude de oscilação do cilindro apoiado em base elástica.

A segunda é a realização de simulações tridimensionais do escoamento ao redor de um cilindro oscilando forçadamente e apoiado em base elástica para estudar a influência da oscilação nas tridimensionalidades do escoamento e a influência das tridimensionalidades na oscilação do cilindro.

Por fim, a última sugestão é integrar a solução hidrodinâmica obtida através do Método de Elementos Espectrais à solução da dinâmica estrutural de um “riser” pelo Método de Elementos Finitos.

7 Referências

- [1] R. E. D. Bishop and A. Y. Hassan, *The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid*, Proceedings Royal Society 277 (1964), 51-75, Series A.
- [2] G. H. Koopman, *The vortex wakes of vibrating cylinder at low Reynolds number*, J. Fluid Mech., 28 (1967), no. Part 3, 501-512.
- [3] C. H. K. Williamson and A. Roshko, *Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder*, J. Fluid and Structures 2 (1988), 393-441.
- [4] F. Saltara, J. R. Meneghini and P. W. Bearman, *Numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder*, Computational Methods and Experimental Measurements VIII, ed. P. Anagnostopoulos et al., Computational Mechanics Publications, UK, pp. 409-418, 1997.
- [5] A. Khalak and C. H. K. Williamson, *Motions, Forces and Mode Transitions in Vortex-Induced Vibrations at low Mass-Damping*, J. Fluid and structures 13 (1999), 813-851.
- [6] J. R. Meneghini, *Numerical simulation of bluff body flow control using a discrete vortex method*, PhD. Thesis, Imperial College, Department of Aeronautics, university of London, UK, 1993.
- [7] J. R. Meneghini and P. W. Bearman, *Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder*, J. Fluids and Structures 9 (1995), 435-455.
- [8] H. M. Blackburn and R. D. Henderson, *A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder*, J. Fluid Mech. 385 (1999), pp. 255-286.
- [9] G. E. Karniadakis and S. J. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for CFD*, New York, Oxford University Press, 1999.
- [10] G. E. Karniadakis, M. Israeli and S. A. Orszag, *High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equation*, Journal of Computational Physics, v. 97, pp.414-443, 1991.
- [11] J. R. Meneghini, *Projetos de pesquisa no tópico de geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros*, Tese de Livre Docência, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, 2002.
- [12] P. W. Bearman, *Vortex shedding from oscillating bluff bodies*, Ann. Rev. Fluid Mech., 16 (1984), 195-222.
- [13] B. J. Vickerey and R. D. Watkins, *Flow-induced vibrations of cylindrical structures*, Proc. First Australian Conference of Hydraulics and Fluid mechanics (New York) (R. Silvester ed.), Peragamon Press, 1964.

- [14] C. Scruton, *On the wind-excited oscillations of towers, stacks and masts*, Proc. Symp. Wind Effects Build. Struct., Pap. 16, pp. 798-836. London: HMSO, 1965.
- [15] R. A. Skop and O. M. Griffin, *An heuristic model for determining flow-induced vibrations of offshore structures*, 5th Offshore Technology Conf. OTC Pap. 1843, Houston, TX, 1973.
- [16] R. A. Skop and S. Balasubramanian, *A new twist on an old model for vortex-excited vibrations*, J. Fluid Struct. 11 (1997), 395-412.
- [17] T. Sarpkaya, *Fluid forces on oscillating cylinders*, ASCE Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division 104 (1978), 275-290.
- [18] M. M. Zdravkovich, *Flow around circular cylinders*, vol. 1, Oxford University Press, New York, 1997.
- [19] P. Anagnostopoulos and P. W. Bearman, *Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds number*, J. Fluid and Struct. 6 (1992), 39-50.
- [20] F. Saltara, J. R. Meneghini and P. W. Bearman, *The simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder with turbulence modelling*, in Bearman and Williamson eds., Proc 1998 asme fluids eng. Division summer meeting, ASME, 1998.
- [21] H. M. Blackburn and G. E. Karniadakis, *Two- and three-dimensional simulations of vortex-induced vibration of a circular cylinder*, Offshore & Polar Eng. Conference, Singapore, 1993, 3, 715-720.
- [22] P. H. C. C. Parra, *Modelo semi-empírico de vibração induzida por vortex shedding*, Msc, USP, São Paulo, Brasil, 1996.
- [23] D. Newman and G. E. Karniadakis, *Simulations of flow over a flexible cable: comparison of forced and flow-induced vibration*, J. Fluid and Struct. 10 (1996), 439-453.
- [24] D. Brika and A. Laneville, *Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder*, J. Fluid Mech. 250 (1993), 481-508.
- [25] C. C. Feng, *The measurement of vortex-induced effects in a flow past stationary and oscillating circular cylinder and d-section cylinders*, Msc thesis, University British Columbia, Vancouver, Canada, 1968.
- [26] C. H. K. Williamson and R. Govardhan, *Vortex-induced vibrations*, J. Fluid Mech., 36, 2004, 413-455.
- [27] R. N. Govardhan and C. H. K. Williamson, *Revealing the effect of Reynolds number on vortex-induced vibrations using controlled negative and positive damping*, BBVIV-4, 2005.
- [28] B. S. Carmo, *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados*, Tese de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.

- [29] C. H. K. Williamson, *The natural and forced formation of spot-like ‘vortex dislocations’ in the transition of a wake*. Journal of Fluid Mechanics, v.243, p.393-441, 1992.
- [30] C. H. K. Williamson, *Vortex dynamics in the cylinder wake*. Annual Review of Fluid Mechanics, v.28, p.477-539, 1996a.
- [31] C. H. K. Williamson, *Mode A secondary instability in wake transition*. Physics of Fluids, v.8, n.6, p.1680-1682, 1996b.
- [32] C. H. K. Williamson, *Three-dimensional wake transition*. Journal of Fluid Mechanics, v.328, p.345-407, 1996c.
- [33] R. D. Henderson, *Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition*. Journal of Fluid Mechanics, v.352, p.65-112, 1997.
- [34] C. H. K. Williamson, *Oblique and Parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, v.206, p.579-627, 1989.

APENDICE A – Expansão em domínios homogêneos (MEE)

Em uma larga gama de aplicações, como o escoamento entre placas paralelas ou o escoamento ao redor de cilindros ou grupos de cilindros, o problema de interesse tem pelo menos uma região homogênea, isto é, uma região onde não há um comprimento característico. Esta propriedade indica que neste tipo de problema uma expansão do tipo p pode ser utilizada na direção homogênea, com a ressalva de que a solução tem que ser suave. Considerando a direção homogênea como sendo ξ_3 , a base tridimensional $\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pode ser escrita em termos de uma expansão bidimensional qualquer, denominada $\phi_{pq}^{2D}(\xi_1, \xi_2)$, multiplicada por uma expansão completa em ξ_3 , denominada $\varphi_r(\xi_3)$, ou seja:

$$\phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_{pq}^{2D}(\xi_1, \xi_2) \varphi_r(\xi_3). \quad (\text{A.1})$$

A escolha de $\varphi_r(\xi_3)$ depende das condições de contorno nas extremidades da direção homogênea. Como $\varphi_r(\xi_3)$ é uma expansão puramente tipo p , uma grande variedade de expansões polinomiais podem ser utilizadas, como polinômios de Legendre ou Chebychev. Cada uma destas expansões tem suas propriedades particulares e são apropriadas para uma dada aplicação. Contudo, a expansão mais utilizada é adequada para o caso onde a direção homogênea recebe condição de contorno do tipo periódica e a função empregada é uma expansão de Fourier, ou seja:

$$\varphi_r(\xi_3) = e^{ir\beta\xi_3}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\beta = 2\pi/L_{\xi_3}, \quad (\text{A.3})$$

e L_{ξ_3} é o comprimento do domínio calculado na direção periódica, que é a direção homogênea. O grande atrativo desta expansão é o uso da transformada rápida de Fourier para transitar entre o espaço transformado e o espaço físico. Além do mais, quando operadores diferenciais lineares são considerados, têm-se as seguintes expressões:

$$\nabla \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\tilde{\nabla}_r] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ ir\beta \end{bmatrix} \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla^2 \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\tilde{\nabla}^2_r] \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - r^2 \beta^2 \right) \phi_{pqr}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

A introdução destes operadores $\tilde{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}^2$ significa que um problema diferencial linear tridimensional pode ser reduzido a uma série de r problemas bidimensionais nos planos de Fourier.