UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

GABRIEL ROMUALDO DE AZEVEDO

**Estabilidade linear para intermitência severa
em sistemas água-ar**

São Paulo

2018

GABRIEL ROMUALDO DE AZEVEDO

**Estabilidade linear para intermitência severa
em sistemas água-ar**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. Mecânica
de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

São Paulo

2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Azevedo, Gabriel Romualdo de
Estabilidade linear para intermitência severa em sistemas água-ar / G.
R. Azevedo -- versão corr. -- São Paulo, 2018.
195 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Intermitência severa 2.Sistema pipeline-riser 3.Escoamento água-ar
4.Estabilidade 5.Tecnologia de produção de petróleo I.Universidade de São
Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

FOLHA DE APROVAÇÃO

GABRIEL ROMUALDO DE AZEVEDO
Estabilidade linear para intermitência severa
em sistemas água-ar

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. Mecânica
de Energia e Fluidos

Aprovado em:

Banca examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____ Assinatura: _____

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Jorge Luis Baliño e ao Prof. Dr Karl Peter Burr pela orientação em meus trabalhos de pesquisa e por todo tempo dispendido em aconselhamentos profissionais e pessoais.

Agradecimento à minha família: Dona Claudete, Seu Alvaro, Ana Carolina e Camila por todo suporte nesses últimos 4 anos.

Agradeço aos amigos queridos, professores e funcionários do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) que tornaram o dia-a-dia de trabalho muito mais agradável. Entre eles Lucia, Vitão, Amir, Bruno Souza, Gustavo Assi, Clóvis, Julio Meneguini, Fábio Saltara, Aranha, Ernani, Jairson, Alan, Reinaldo, Murilo, Cesar, João, Sergio, Gustavo Patino, Ivan, Ivanildo, Elói, Douglas, Mariana, Fabiano, Gustavo Bocchio, Rafael Gioria, Gabriel, Alessandro, Eduardo, Rodrigo Provasi, Toni, Leonardo, Daiane, Pedrão e especialmente, à máquina de café.

Agradeço à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e à Petrobras pela possibilidade em trabalhar no desenvolvimento de tecnologia atrelada à exploração de petróleo *offshore*.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Agência Nacional de Petróleo (ANP) e ao PRH-19 pelo apoio financeiro por meio da bolsa de doutorado fornecida e ao pessoal: Vilma, Fabiana, Adriana e Prof. Marcelo.

"Correndo atrás do tempo perdido, perdi tempo."

ABSTRACT

A mathematical model that numerically evaluates the stability of the stationary state for hilly terrain air-water flows systems is presented. Numerical linear stability analysis is performed to a suitable mathematical model for the two-phase flows in a pipeline-riser system. The mathematical model considers the continuity equations for the liquid and gas phases, one-dimensional flow and isothermal conditions. The liquid is assumed incompressible while the gas phase is considered as an ideal gas. A simplified momentum equation for the mixture, neglecting inertia (NPW - No pressure wave model) is considered and the local flow pattern is defined based on the flow conditions and the local inclination. In this way, severe slugging is controlled mainly by gravity in the riser and compressibility in the pipeline. The void fraction and friction pressure drop, utilized as closure laws, are determined based on the local flow pattern. Gas injection at the bottom of the riser and a choke valve at the top are considered. The model is applied to air-water pipeline-riser systems reported in the literature. Numerical linear stability analysis results are compared with experimental and numerical results reported in the literature with excellent agreement.

Keywords: *Severe slugging, pipeline-riser system, air-water flow, stability, oil production technology*

RESUMO

Apresenta-se um modelo matemático que avalia numericamente a estabilidade do estado estacionário para escoamentos água-ar em sistemas *pipeline-riser* de geometria variável. Uma análise a partir da teoria de estabilidade linear é aplicada a um modelo matemático adequado ao escoamento água-ar no sistema *pipeline-riser*. O modelo considera equações de continuidade para a fase líquida e para a fase gasosa, admite-se escoamento unidimensional e em condição isotérmica. O líquido é considerado incompressível enquanto que a fase gasosa é considerada um gás ideal. Admite-se uma equação de momento simplificada para mistura onde despreza-se a inércia (NPW - Modelo *No Pressure Wave*) e o padrão de escoamento local é definido com base nas condições do escoamento e na inclinação local. Assim, a intermitência severa é controlada principalmente pela gravidade no *riser* e pela compressibilidade do gás no *pipeline*. Tanto a correlação de fluxo de deriva quanto o cálculo da queda de pressão por atrito, adotados como lei de fechamento do modelo, são determinados em função do padrão de escoamento. Injeção de gás e válvula de *choke* são consideradas, respectivamente, na base e no topo do *riser*. O modelo é aplicado à sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar citados na literatura. Os resultados da análise de estabilidade linear numérica são comparados aos resultados experimentais e numéricos apresentando uma excelente concordância.

Palavras-chave: *Intermitência severa, sistema pipeline-riser, escoamento água-ar, estabilidade, tecnologia de produção de petróleo*

SUMÁRIO

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Siglas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Lista de Publicações	i
1 Introdução	1
1.1 Caracterização da intermitência severa	2
1.2 Objetivos da tese	4
1.3 Modelo matemático proposto	4
1.4 Estrutura do texto	6
2 Revisão bibliográfica	7
2.1 Principais abordagens	7
2.2 Mecanismos de mitigação de instabilidade	17
2.3 Critérios de estabilidade	18
2.4 Modelagem para escoamentos multifásicos	20
2.5 Análise de estabilidade linear	24
3 Modelo	27
3.1 Modelagem do escoamento	27
3.1.1 Equações dinâmicas em forma matricial	30

3.1.2	Modelo simplificado - <i>Pipeline</i> a parâmetros concentrados e reservatório <i>buffer</i>	32
3.1.2.1	Modelo de fração de vazio constante	33
3.1.3	Modelo generalizado - Reservatório <i>buffer</i>	34
3.2	Condições de contorno	35
3.2.1	Injeção de gás	35
3.2.2	Válvula de <i>choke</i>	36
3.2.3	Continuidade entre subsistemas	37
3.3	Leis de fechamento	38
3.3.1	Modelo simplificado	38
3.4	Modelo generalizado	40
3.4.1	Escoamento intermitente	41
3.4.1.1	Fração de vazio	41
3.4.1.2	Queda de pressão por atrito	44
3.4.2	Escoamento estratificado	45
3.4.2.1	Fração de vazio	45
3.4.2.2	Queda de pressão por atrito	47
3.5	Estado estacionário	47
3.5.1	Injeção de gás	48
3.5.2	Válvula de <i>choke</i>	48
3.5.3	Acoplamento entre subsistemas	48
3.6	Equações de perturbação	49
3.6.1	Injeção de gás	51
3.6.2	Válvula de <i>choke</i>	51
3.6.3	Modelo simplificado - <i>Pipeline</i> e reservatório <i>buffer</i>	52
3.6.3.1	<i>Pipeline</i> com fração de vazio constante	53

3.6.4	Modelo generalizado - Reservatório <i>buffer</i>	53
3.6.5	Acoplamento entre subsistemas	54
4	Implementação Numérica	55
4.1	Equações discretizadas	55
4.1.1	Modelo simplificado	58
4.1.2	Modelo generalizado	59
4.2	Espectro de autovalores e critério de estabilidade	61
4.3	Procedimento numérico	62
4.3.1	Estabilidade do estado estacionário	62
4.3.2	Construção da curva de estabilidade	64
5	Resultados	69
5.1	Modelo simplificado	69
5.1.1	Análise de convergência	69
5.1.2	Comparação com dados de (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996)	73
5.1.3	Comparação com dados de (WORDSWORTH et al., 1998)	77
5.1.4	Comparação com dados de (YAMAGUCHI, 2015)	82
5.1.5	Comparação com dados de (TAITEL, 1986)	86
5.2	Modelo generalizado	93
5.2.1	Análise de convergência	93
5.2.2	Comparação com dados de (TAITEL, 1986)	95
5.2.3	Comparação com dados de (WORDSWORTH et al., 1998)	103
5.2.4	Comparação com dados da bancada multifásica POLI-USP	109
5.2.5	Comparação com dados de (PARK; NYDAL, 2014)	114
6	Conclusões e perspectivas	119

6.1 Perspectivas	122
Referências	123
Apêndice A – Dedução das equações de conservação	127
A.1 Dedução da equação de conservação de líquido	127
A.2 Dedução da equação de conservação de gás	128
A.3 Dedução da equação de conservação de quantidade de movimento	129
Apêndice B – Dedução das equações dinâmicas em forma matricial	131
Apêndice C – Dedução do sistema de equações de perturbação	133
Apêndice D – Dedução da correlação de fluxo de deriva e derivadas e correlações de fração de vazio	135
D.1 Dedução da formulação do modelo de fluxo de deriva	135
D.2 Dedução das derivadas parciais da fração de vazio com relação as variáveis: j_g , j_l , P e θ	138
D.2.1 Derivada de α com relação à j_g	138
D.2.2 Derivada de α com relação à j_l	138
D.2.3 Derivada de α com relação à P	139
D.3 Correlação de Chexal-Lellouche	139
D.4 Derivada dos parâmetros e da correlação de Chexal et al. (1997) - Escoamento co-corrente ascendente	144
D.4.1 Derivada de C_d e U_D em função de j_g	145
D.4.1.1 $\partial C_d / \partial j_g$	145
D.4.1.2 $\partial U_d / \partial j_g$	147
D.4.2 Derivada de C_d e U_d em função de j_l	148
D.4.2.1 $\partial C_d / \partial j_l$	148

D.4.2.2	$\partial U_d / \partial j_l$	150
D.4.3	Derivada de C_d e U_d em função de P	151
D.4.3.1	$\partial C_d / \partial P$	151
D.4.3.2	$\partial U_d / \partial P$	153
D.4.4	Derivadas de C_d e U_d em função de α	155
D.4.4.1	$\partial C_d / \partial \alpha$	155
D.4.4.2	$\partial U_d / \partial \alpha$	156
Apêndice E – Dedução das relações para escoamento estratificado		157
E.1	Fração de vazio	158
E.1.1	Derivadas da fração de vazio em função de j_g	161
E.1.1.1	Primeiro termo da Eq. (E.25)	161
E.1.1.2	Segundo termo da Eq. (E.25)	163
E.1.1.3	Terceiro termo da Eq. (E.25)	164
E.1.1.4	Função $\partial \alpha / \partial j_g$ simplificada	165
E.1.2	Derivadas da fração de vazio em função de j_l	166
E.1.2.1	Primeiro termo da Eq. (E.64)	166
E.1.2.2	Segundo termo da Eq. (E.64)	167
E.1.2.3	Terceiro termo da Eq. (E.64)	168
E.1.2.4	Função $\partial \alpha / \partial j_l$ simplificada	170
E.1.3	Derivadas da fração de vazio em função de P	170
E.1.3.1	Primeiro termo da Eq. (E.99)	170
E.1.3.2	Segundo termo da Eq. (E.99)	172
E.1.3.3	Terceiro termo da Eq. (E.99)	173
E.1.3.4	Quarto termo da Eq. (E.99)	174
E.1.3.5	Função $\partial \alpha / \partial P$ simplificada	174
E.2	Queda de pressão devido ao atrito	175

E.2.1	Derivada da queda de pressão com relação a j_g	175
E.2.2	Derivada da queda de pressão com relação a j_l	176
E.2.3	Derivada da queda de pressão com relação a P	176
E.3	Critério de transição	177

Apêndice F – Dedução da derivadas da queda de pressão por atrito pela abordagem do multiplicador multifásico.....181

F.1	Dedução das derivadas para queda atrito em função de j_g	181
F.2	Dedução das derivadas para queda atrito em função de j_l	182
F.3	Dedução das derivadas para queda atrito em função de P	183
F.4	Derivadas do multiplicador multifásico de Müller-Steinhagen e Heck (1986) em função das variáveis j_g , j_l e P	183
F.4.1	Derivada de ϕ^2 com relação a j_g	184
F.4.2	Derivada de ϕ^2 com relação a j_l	185
F.4.3	Derivada de ϕ^2 com relação a P	186

Apêndice G – Dedução das relações da correlação de (CHEN,1979) para o fator de atrito.....187

G.1	Derivada de f em relação a Re	187
G.2	Derivada de f em relação a D	188

Apêndice H – Dedução das equações referentes ao *pipeline*.....189

H.1	Modelo simplificado - <i>Pipeline</i> a parâmetros concentrados e reservatório <i>buffer</i> ..	189
H.1.1	Modelo de fração de vazio constante	191
H.2	Modelo generalizado - Reservatório <i>buffer</i>	191

Apêndice I – Publicações.....195

LISTA DE FIGURAS

Figura - 1.1	Etapas da intermitência severa.	3
Figura - 2.1	Transiente de pressão na base do <i>riser</i>	10
Figura - 2.2	Mapa de estabilidade para $P_s = 2 \text{ bar}$	11
Figura - 2.3	Mapa com tipos de intermitência severa para $P_s = 2 \text{ bar}$	13
Figura - 2.4	Mapa de estabilidade da bancada multifásica POLI-USP	15
Figura - 3.1	Definição das variáveis na tubulação (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).	28
Figura - 3.2	Definição das variáveis no <i>pipeline</i> (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).	33
Figura - 3.3	Definição das variáveis no volume <i>buffer</i>	35
Figura - 3.4	Definição de variáveis para a válvula de <i>choke</i>	37
Figura - 3.5	Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz. ..	41
Figura - 3.6	Definição de variáveis no escoamento estratificado.	45
Figura - 4.1	Definição dos nós para discretização.	56
Figura - 4.2	Procedimento numérico.	66
Figura - 5.1	Comportamento da parte real do espectro de autovalores	71
Figura - 5.2	Mapa de estabilidade para um <i>riser</i> vertical com diferentes nodalizações. .	72
Figura - 5.3	Mapa de estabilidade para <i>riser</i> vertical com <i>gas lift</i>	74
Figura - 5.4	Mapa de estabilidade para um <i>riser</i> vertical com válvula de <i>choke</i>	76
Figura - 5.5	Mapa de estabilidade - $P_s = 2.0 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998)	78
Figura - 5.6	Mapa de estabilidade - $P_s = 2.7 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998)	79
Figura - 5.7	Mapa de estabilidade - $P_s = 4.1 \text{ bar}$; Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998)	80
Figura - 5.8	Comparação das curvas para estabilidade em <i>riser</i> catenária.	81
Figura - 5.9	Mapa de estabilidade - $\theta = 5^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI,	

2015).	83
Figura - 5.10 Mapa de estabilidade - $\theta = 10^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).	84
Figura - 5.11 Comparação dos mapas de estabilidade em função da inclinação do <i>pipeline</i> .	85
Figura - 5.12 Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	87
Figura - 5.13 Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	88
Figura - 5.14 Mapa de estabilidade - $L_e = 10 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	89
Figura - 5.15 Mapas de estabilidade de <i>riser</i> vertical com diferentes comprimentos de <i>buffer</i> .	90
Figura - 5.16 Comparação de correlações - Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 m$.	91
Figura - 5.17 Comparação de correlações - Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1 m$.	92
Figura - 5.18 Comportamento da parte real do espectro de autovalores	94
Figura - 5.19 Convergência da nodalização.	96
Figura - 5.20 Geometria com <i>riser</i> vertical de (TAITEL, 1986).	97
Figura - 5.21 Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	98
Figura - 5.22 Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	99
Figura - 5.23 Mapa de estabilidade - $L_e = 10 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).	100
Figura - 5.24 Mapas de estabilidade de <i>riser</i> vertical com diferentes <i>buffer</i> .	101
Figura - 5.25 Geometria com <i>riser</i> em catenária.	104
Figura - 5.26 Mapa de estabilidade - $P_s = 2.0 bar$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).	105
Figura - 5.27 Mapa de estabilidade - $P_s = 2.7 bar$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).	106
Figura - 5.28 Mapa de estabilidade - $P_s = 4.1 bar$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).	107
Figura - 5.29 Comparação das curvas para estabilidade para <i>riser</i> catenária.	108
Figura - 5.30 Geometria de <i>riser</i> vertical - POLI-USP. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).	110

Figura - 5.31 Mapa de estabilidade - Inclinação $\theta = -5^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).	111
Figura - 5.32 Mapa de estabilidade - Inclinação $\theta = -10^\circ$.	112
Figura - 5.33 Comparação de mapa de estabilidade variando a inclinação.	113
Figura - 5.34 Geometria com <i>riser</i> em formato de S.	115
Figura - 5.35 Mapa de estabilidade - Comparação entre a curva de estabilidade e os dados experimentais.	116
Figura - 5.36 Efeito da transição sobre a fronteira de estabilidade.	117
Figura - D.1 Terminologia de direções do escoamento entre gás e líquido.	140
Figura - E.1 Definição para escoamento estratificado	158
Figura - E.2 Representação geométrica das variáveis.	160
Figura - E.3 Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz	178

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Casos estudados para a análise de espectros.	70
Tabela 5.2	Parâmetros para <i>riser</i> vertical (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996).	73
Tabela 5.3	Parâmetros para <i>riser</i> em catenária (WORDSWORTH et al., 1998).	77
Tabela 5.4	Parâmetros para geometria com <i>riser</i> vertical da bancada multifásica - POLI-USP.	82
Tabela 5.5	Parâmetros para <i>riser</i> vertical (TAITEL, 1986).	86
Tabela 5.6	Casos estudados para a análise de espectros.	94
Tabela 5.7	Geometria para o <i>riser</i> vertical.	95
Tabela 5.8	Geometria para o <i>riser</i> em catenária.	103
Tabela 5.9	Geometria para o <i>riser</i> vertical - 1º caso.	109
Tabela 5.10	Geometria para o <i>riser</i> vertical - 2º caso.	109
Tabela 5.11	Parâmetros para o <i>riser</i> em S. (PARK; NYDAL, 2014).	114
Tabela 5.12	Geometria para o <i>riser</i> em S (PARK; NYDAL, 2014).	114
Tabela D.1	Termo L - Escoamento água-ar	141
Tabela D.2	Parâmetro C_1	142
Tabela D.3	Parâmetro C_3	143
Tabela D.4	Parâmetros Υ e J_{frx}	144

LISTA DE SIGLAS

CCFL	<i>Counter Current Flooding Line</i>
DFM	Modelo de fluxo de deriva (<i>Drift-Flux Model</i>)
NPW	Modelo sem ondas de pressão (<i>No Pressure Wave</i>)
OSC	Intermitência do tipo oscilatória
SS1	Intermitência severa tipo 1 (<i>Severe Slugging 1</i>)
SS2	Intermitência severa tipo 2 (<i>Severe Slugging 2</i>)
SS3	Intermitência severa tipo 3 (<i>Severe Slugging 3</i>)
TFM	Modelo de dois fluidos (<i>Two-Fluid Model</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal da tubulação [m^2]
A_g	Área de gás na seção transversal do <i>pipeline</i> [m^2]
A_l	Área de líquido na seção transversal do <i>pipeline</i> [m^2]
C_d	Parâmetro de distribuição na relação fluxo de deriva $[-]$
C_j	Constante da válvula de (Jansen, Shoham e Taitel (1996)) [$Pa\ s^2/m^2$]
D	Diâmetro interno da tubulação [m]
D_g	Diâmetro hidráulico do gás no <i>pipeline</i> [m]
D_l	Diâmetro hidráulico do líquido no <i>pipeline</i> [m]
f_m	Fator de atrito de Fanning para a mistura $[-]$
f_g	Fator de atrito de Fanning para a fase gasosa $[-]$
f_l	Fator de atrito de Fanning para a fase líquida $[-]$
Fr	Número de Froude $[-]$
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]
G	Fluxo mássico da mistura [$kg/s/m^2$]
j_g	Velocidade superficial de gás no <i>riser</i> [m/s]
j_{g0}	Velocidade superficial de gás de referência [m/s]
j_{g0l}	Velocidade superficial de gás injetado de referência (<i>gas lift</i>) [m/s]
j_{g1}	Velocidade superficial de gás no primeiro nó do <i>riser</i> [m/s]
j_{gb}	Velocidade superficial na base do <i>riser</i> [m/s]
j_{gt}	Velocidade superficial de gás no topo do <i>riser</i> [m/s]
j_l	Velocidade superficial de líquido no <i>riser</i> [m/s]
j_{l0}	Velocidade superficial de líquido de referência [m/s]
j_{l1}	Velocidade superficial de líquido no primeiro nó do <i>riser</i> [m/s]
j_{lb}	Velocidade superficial do líquido na base do <i>riser</i> [m/s]

j_{lt}	Velocidade superficial de líquido no topo do <i>riser</i> [m/s]
j	Velocidade superficial total [m/s]
j_t	Velocidade superficial total no topo do <i>riser</i> [m/s]
L	Comprimento do <i>pipeline</i> [m]
L_e	Comprimento equivalente de <i>buffer</i> [m]
La	Número de Laplace $[-]$
K_v	Constante da válvula de <i>choke</i> $[-]$
$\dot{m}_{g0}$	Vazão mássica de gás no <i>pipeline</i> [kg/s]
$\dot{m}_{gl}$	Vazão de mássica injetada (<i>gas lift</i>) [kg/s]
$\dot{m}_l$	Vazão mássica de líquido [kg/s]
N	Número de nós de discretização $[-]$
P	Pressão no <i>riser</i> [$Pa, bara$]
P_0	Pressão de referência [$Pa, bara$]
P_b	Pressão na base do <i>riser</i> [$Pa, bara$]
P_g	Pressão do gás no <i>pipeline</i> [$Pa, bara$]
P_s	Pressão no separador [$Pa, bara$]
P_t	Pressão no topo do <i>riser</i> anterior a válvula de <i>choke</i> [$Pa, bara$]
P_u	Pressão referente a coluna de líquido no ponto s_u [$Pa, bara$]
$\dot{Q}_{l0}$	Vazão volumétrica de líquido no <i>pipeline</i> [m^3/s]
R_g	Constante do gás [$m^2/s^2/K$]
Re_g	Número de Reynolds para o líquido $[-]$
Re_l	Número de Reynolds para o gás $[-]$
Re_m	Número de Reynolds para a mistura $[-]$
s	Coordenada de posição ao longo do <i>riser</i> [m]
S_g	Perímetro molhado de gás no <i>pipeline</i> [m]
S_l	Perímetro molhado de líquido no <i>pipeline</i> [m]
s_u	Comprimento da coluna de líquido no <i>riser</i> [m]

t	Tempo [s]
T_0	Temperatura de referência [K]
T_g	Temperatura do gás [K]
U_d	Velocidade de deriva na relação de fluxo de deriva [m/s]
u_g	Velocidade do gás [m/s]
u_{gb}	Velocidade do gás na base do <i>riser</i> [m/s]
u_l	Velocidade do líquido [m/s]
u_{lb}	Velocidade do líquido na base do <i>riser</i> [m/s]
x	Comprimento de penetração de líquido no <i>pipeline</i> [m]
X	Abcissa do <i>riser</i> - projeção do comprimento do <i>riser</i> na direção horizontal [m]
z	Coordenada de posição da direção vertical [m]
Z	Altura do <i>riser</i> [m]
α	Fração de vazio no <i>riser</i> [—]
α_p	Fração de vazio no <i>pipeline</i> [—]
α_t	Fração de vazio no topo do <i>riser</i> [—]
β	Inclinação do pipeline com relação a horizontal [°]
Δs	Tamanho dos elementos da malha unidimensional [m]
ϵ	Rugosidade da tubulação [m]
λ	Conjunto de autovalores [—]
ϕ	Incremento angular [°]
ϕ_{f0}	Multiplicador de duas fases [—]
μ_g	Viscosidade do gás [kg/(ms)]
μ_l	Viscosidade do líquido [kg/(ms)]
μ_m	Viscosidade da mistura [kg/(ms)]
ρ_g	Massa específica do gás [kg/m ³]
ρ_l	Massa específica do líquido [kg/m ³]
ρ_m	Massa específica da mistura [kg/m ³]

σ	Tensão superficial do líquido [Pa]
τ_i	Tensão de cisalhamento interfacial entre o líquido e o gás [Pa]
τ_{wg}	Tensão de cisalhamento entre o gás e a parede [Pa]
τ_{wl}	Tensão de cisalhamento entre o líquido e a parede [Pa]
τ_{wm}	Tensão de cisalhamento entre a mistura e a parede [Pa]
θ	Inclinação local do <i>riser</i> com relação a vertical [$^\circ$]
v_e	Volume de <i>buffer</i> [m^3]
v_g	Volume total de gás no <i>pipeline</i> [m^3]
v_l	Volume de líquido no <i>pipeline</i> [m^3]
ζ	Coefficiente de sub-relaxamento [$-$]

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Artigos publicados/submetidos em periódico

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging: sensitivity to void fraction and friction pressure drop correlations. *International Journal of Simulation and Process Modelling*, v. 12, p. 235-248, 2017.

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging. *Chemical Engineering Science*, v. 161, p. 1-13, 2017.

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging in air-water systems considering different mitigation mechanisms. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 73, p. 238-250, 2015.

Artigos publicados em anais de conferências

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis of severe slugging including inertial effects. In: ABCM. *Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2015)*. Campinas, SP, Brazil, 2015. p. 10.

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging: sensitivity to void fraction correlations. In: *Proceeding of the 7th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2015)*. Bergamo, Italy, 2015. p. 10.

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging. In: *Proceedings of the 3th International Conference Of Numerical Analysis And Applied Mathematics (ICNAAM 2015)*. Rhodes, Greece, 2015. p. 10.

AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Stability solver for air-water hilly terrain flows. In: ABCM. *Proceedings of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2017)*, São Paulo, SP, Brazil, 2017. p.10

1 INTRODUÇÃO

A grande maioria dos escoamentos observados na natureza é do tipo multifásico. A vasta presença deste tipo de escoamento dá a real dimensão da necessidade de uma descrição geral para compreensão de seu comportamento.

Contudo, o estado da arte na modelagem de escoamento multifásico ainda não evoluiu, suficientemente, para garantir o bom comportamento matemático das equações que governam os fenômenos multifásicos.

Em um escoamento multifásico, as diferentes fases são distinguíveis fisicamente uma de outra. Dentro de cada fase pode-se ter diferentes componentes e fenômenos turbulentos (DREW; PASSMAN, 1999), gerando assim grande complexidade para ser resolvida matematicamente.

Os principais fatores que influenciam nesta complexidade são a existência de interfaces, diferentes padrões de escoamento e suas transições, cujas forma e posição ao longo do tempo são impossíveis de serem determinadas.

Por isso a indústria recorre, frequentemente, a um tratamento estatístico para entender esses componentes e fenômenos, como ocorre em escoamentos turbulentos. Parâmetros de interesse que surgem do processo de média estatística (*ensemble average*), neste tipo de problema, são a fração de vazio (*void fraction*) e a densidade de área interfacial (*interfacial area*).

Atualmente, o conhecimento de mecanismos de transporte de gás e líquidos através da teoria de escoamentos multifásicos tem se tornado cada vez mais relevante, especialmente na tecnologia de produção de petróleo.

Tipicamente em situações de produção *offshore*, durante a extração, o padrão de escoamento mais comum é o do tipo intermitente, caracterizado por uma distribuição axial de gás e de líquido, no qual o gás é transportado como pequenos pacotes entre golfadas de líquido. Este padrão de escoamento pode mudar dramaticamente sob certas condições geométricas e de escoamento, se tornando uma indesejável instabilidade hidrodinâmica conhecida como intermi-

tência severa (*severe slugging*).

1.1 Caracterização da intermitência severa

A intermitência severa ocorre geralmente num ponto com uma cota baixa da topografia do conduto, por exemplo, num trecho de tubulação descendente ou *pipeline*, seguido por trecho ascendente ou *riser*. Uma típica situação sob intermitência severa pode ser observada quando o líquido se acumula no fundo do *riser*, bloqueando a passagem de gás e iniciando um ciclo de golfada com períodos da ordem de horas em sistemas de produção de petróleo. Tal período é muito maior do que o período característico da passagem de *slugs* em operação normal. Os pré-requisitos para que o fenômeno ocorra são pressões baixas e vazões baixas, tipicamente quando o poço já tem um tempo razoável de exploração.

A intermitência severa está associada com grandes oscilações de pressão e problemas de dimensionamento nas unidades de separação na plataforma, provocando sua saída de serviço e graves perdas econômicas. Em particular, a Petrobras tem reportado vários casos de intermitência severas nos sistemas *pipeline-riser* ao longo dos anos. Os primeiros casos remetem à operação dos anos de 1984-1985 (WORDSWORTH et al., 1998).

Tipicamente em operação, considerando em regime permanente, o padrão de escoamento no *pipeline* pode ser estratificado, enquanto no *riser* considera-se regime intermitente, como mostra a Fig. 1.1(a).

Um ciclo de intermitência severa pode ser mostrado em termos das etapas descritas por (TAITEL, 1986). Uma vez que o sistema se desestabiliza e a passagem de gás fica bloqueada na base do *riser*, o líquido continua penetrando no *riser* e o gás existente continua saindo, o que possibilita que o nível de líquido comece a aumentar, podendo alcançar o nível máximo, no separador. Como consequência, a coluna do *riser* se torna muito pesada e a pressão na base aumenta, comprimindo o gás no *pipeline* e criando uma região de acumulação de líquido; esta etapa é conhecida como formação do *slug* (Fig. 1.1(b)).

Quando o nível de líquido atinge o topo, enquanto a passagem de gás permanece bloqueada, a pressão na base atinge seu valor máximo e apenas líquido escoar no *riser*, o que resulta na etapa de produção do *slug* (Fig. 1.1(c)). Como o gás continua entrando no *pipeline*, a frente de acumulação de líquido é empurrada de volta, até que atinge a base do *riser*, iniciando a etapa de penetração de gás (Fig. 1.1(d)).

A medida que o gás penetra no *riser*, a coluna torna-se mais leve, diminuindo a pressão

Figura 1.1: Etapas da intermitência severa (TAITEL, 1986; SCHMIDT, 1977).

na base e aumentando a vazão de gás. Quando o gás atinge o topo do *riser*, a passagem de gás fica liberada através do escoamento estratificado no *pipeline* e do escoamento anular no *riser*, causando uma violenta expulsão e uma rápida descompressão, levando novamente o processo à etapa de formação; esta etapa é conhecida como expulsão de gás (Fig. 1.1(e)).

A Fig. 1.1(f) mostra as diferentes etapas na evolução da pressão na base do *riser* correspondente a uma experiência sob condições de laboratório (SCHMIDT, 1977) sob intermitência severa.

As consequências indesejáveis da intermitência severa são (WORDSWORTH et al., 1998):

- Aumento da pressão na cabeça do poço, causando perdas significativas de produção;
- Grandes vazões instantâneas, o que causa instabilidades no sistema de controle de líquido nos separadores e eventualmente um *shutdown*;
- Oscilações de vazão no reservatório.

Diante da necessidade de se ter uma produção controlada e eficiente, e da dificuldade em se avaliar este fenômeno, a compreensão e a caracterização matemática do problema da intermitência severa é de grande relevância na indústria *offshore*.

1.2 Objetivos da tese

Com o intuito de investigar o fenômeno, esta tese de doutorado tem por objetivo analisar a intermitência severa do ponto de vista analítico e numérico. Utilizando uma técnica matemática chamada teoria da estabilidade linear, será desenvolvida uma metodologia matemática e um modelo numérico capaz de avaliar se uma determinada condição operacional leva, com o decorrer do tempo, a uma condição de intermitência severa. Serão construídos mapas de estabilidade caracterizando, para diversas condições operacionais, em quais regiões do espaço de parâmetros uma determinada condição conduzirá ao fenômeno indesejável.

1.3 Modelo matemático proposto

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático que avalia numericamente a estabilidade do estado estacionário para escoamentos água-ar em sistemas *pipeline-riser* de geometria variável.

O modelo é baseado na aproximação NPW (*No Pressure Wave*), no qual os termos referentes à inércia dos fluidos são desprezados na equação de conservação de quantidade de movimento e o padrão de escoamento local é definido com base nas condições do escoamento e na inclinação local. Assim, a intermitência severa é controlada principalmente pela gravidade no *riser* e pela compressibilidade do gás no *pipeline*.

O modelo considera escoamento unidimensional e equações de continuidade para a fase líquida e para a fase gasosa. A fase líquida é assumida incompressível, enquanto que a fase gasosa é considerada um gás ideal. Além disso, ambas as fases se encontram em condições isotérmicas.

Tanto a correlação de fluxo de deriva quanto o cálculo da queda de pressão por atrito, adotados como lei de fechamento do modelo, são determinados em função do padrão de escoamento.

Injeção de gás e válvula de *choke* são consideradas, respectivamente, na base e no topo do *riser*. O modelo é aplicado à sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar citados na literatura.

Nesta modelagem são adotados os seguintes subsistemas:

- Reservatório de volume de gás (*buffer*);
- Conduto com trechos ascendentes (*riser*) e descendentes (*pipeline*), considerado como um sistema bifásico, onde se despreza a inércia na equação de momento e são consideradas correlações para a fração de vazio e para a queda de pressão por atrito como leis de fechamento;
- Separador localizado no topo da tubulação.

As características do modelo permitem avaliar a estabilidade do estado estacionário para um ampla faixa de experimentos e condições presentes na literatura. Pode-se citar:

- Tubulação de geometria variável;
- Inclinação local positiva e negativa com relação à horizontal;
- Pressões no separador;
- Comprimentos equivalentes de *buffer*;
- Padrões de escoamento;

- Correlações de fração de vazio e de queda pressão por atrito;
- Transição de padrão de escoamento.
- Injeção de gás;
- Válvula de *choke*.

Nos próximos capítulos será apresentado o sistema de equações que governam o modelo, suas hipóteses e simplificações adotadas. Apresenta-se a metodologia adotada, através da linearização das equações de governo em torno do estado estacionário, para se obter o sistema de equações de governo das perturbações, a partir do qual se avalia a estabilidade de um determinado estado estacionário. O estado estacionário pode ser obtido desconsiderando-se as derivadas temporais das variáveis nas equações de conservação. São apresentadas também as condições de contorno do escoamento água-ar e as condições de contorno das equações de perturbação.

Dois modelos são apresentados: o primeiro, chamado de modelo simplificado no qual o trecho referente ao *pipeline* é modelado a parâmetros concentrados; e o segundo, chamado modelo generalizado, no qual todos trechos são modelados a parâmetros distribuídos.

O modelo generalizado representa a principal contribuição original deste trabalho. Os resultados obtidos serão comparados aos disponíveis na literatura, tanto numéricos quanto experimentais.

1.4 Estrutura do texto

Este texto apresenta, além deste Capítulo introdutório, uma breve revisão bibliográfica sobre assuntos pertinentes ao desenvolvimento da pesquisa no Capítulo 2. No Capítulo 3, mostra-se a modelagem para se obter o sistema de equações de governo do sistema para realização da análise de estabilidade. No Capítulo 4, apresenta-se uma breve discussão sobre a abordagem numérica adotada e como é implementado o cálculo de estabilidade e a construção dos mapas correspondentes. No Capítulo 5 são apresentados os principais resultados obtidos. Primeiramente, apresenta-se uma análise de convergência do modelo e de malha. Em seguida o modelo é validado junto a outros trabalhos publicados apresentando-se, para estas diversas condições, mapas de estabilidade. O texto é finalizado no Capítulo 6 com as principais conclusões do trabalho e os próximos passos que se espera realizar nesta linha de pesquisa e ampliar os resultados apresentados nesta tese.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se um histórico sucinto sobre os principais tópicos envolvidos neste trabalho. Trata-se de uma análise de publicações envolvendo o tema do trabalho, relatando informações úteis ao desenvolvimento da pesquisa que vem sendo realizada.

Este Capítulo é dividido em partes de acordo com o assunto relacionado. A Seção 2.1 aborda publicações relacionadas com a intermitência severa e sua caracterização do ponto de vista experimental e numérico e engloba também os principais tipos de modelos para intermitência severa. A Seção 2.2 discute os métodos experimentais para mitigar ou eliminar o fenômeno. A Seção 2.3 envolve os critérios de estabilidade e os primeiras abordagens analítica/numéricas para definir esses critérios. A Seção 2.4 apresenta as principais abordagens adotadas em modelos de escoamentos multifásicos, a definição e determinação da fração de vazio e sua importância dentro destes modelos. Finalmente, a Seção 2.5 aborda os trabalhos envolvendo a teoria de estabilidade linear para se avaliar a ocorrência da intermitência severa.

2.1 Principais abordagens

A grande maioria dos estudos de intermitência severa em sistemas água-ar foi desenvolvida para *risers* verticais, onde se admite escoamento unidimensional, isotérmico e com uma equação de momento para mistura na qual apenas o termo gravitacional é relevante.

Em (TAITEL et al., 1990) foi apresentado um modelo considerando valores médios constantes para a densidade do gás e fração de vazio no *riser*, que permite calcular as variações temporais de pressão no *pipeline*, posição da região de acúmulo de líquido, vazões no *riser* e fração de vazio média. Verificou-se que a medida que o ponto de operação se aproxima da fronteira entre as regiões de estabilidade e instabilidade, no espaço de parâmetros, o procedimento numérico não converge, o que resulta em um valor de vazão mássica de gás que tende ao infinito a medida que a discretização espacial é refinada. Os dados experimentais para comparação foram obtidos a partir de uma bancada para diferentes volumes *buffer* (simulando comprimentos equi-

valentes de *pipelines*) e foram feitas comparações com os resultados da simulação, mostrando boa concordância com exceção das fases de penetração e expulsão de gás. Desconsiderando os problemas de convergência da solução, os modelos de parâmetros concentrados se mostraram eficientes para *risers* curtos, onde as variações locais são pequenas. Contudo não funcionam bem em *risers* longos, típicos de sistemas *offshore*.

Em (TAITEL; SHOHAM; BRILL, 1990) propôs-se um modelo para o analisar o escoamento água-ar para uma tubulação de geometria qualquer, considerando um escoamento de baixas vazões. O modelo é baseado na abordagem de quase-equilíbrio usada por (SCHMIDT; BRILL; BEGGS, 1979) aplicada a um sistema *pipeline-riser* específico. Naquele trabalho, foi proposto estender a teoria para incluir múltiplas seções ascendentes e descendentes de maneira que também fosse possível capturar o comportamento instável do escoamento nas diversas seções. Como aplicação, adotou-se uma operação em tubulação ondulada (*hilly terrain*), na qual o líquido tende a se acumular nos vales enquanto que o gás tende a se acumular nos picos. Sob essas condições, as perdas de pressão por atrito podem ser desprezadas e o sistema é totalmente controlado pela gravidade. Consequentemente, pode-se observar um comportamento transiente do gás e de líquido, mesmo que as vazões mássicas de entradas sejam constantes. Tal comportamento transiente resulta em um escoamento de estado estacionário estável, escoamento bifásico de bolhas ou slug na seção ascendente e estratificado na seção descendente, ou flutuações complexas indefinidas na pressão e na distribuição dos fluidos quando as colunas de líquido nas seções posteriores são consideradas instáveis.

Em (SARICA; SHOHAM, 1991) foi apresentado um modelo com uma formulação de parâmetros distribuídos para o *riser*. Considerou-se as equações de continuidade para o líquido e para o gás sem mudança de fase e uma equação de momento da mistura apenas com o termo gravitacional. O modelo foi capaz de lidar com descontinuidades, tais como a acumulação de líquido no *pipeline* e nível do líquido no *riser*. As equações resultantes foram resolvidas utilizando o método das características. A comparação das simulações com diferentes dados experimentais mostrou concordância razoável, embora o modelo também tenha apresentado falta de convergência na configurações de parâmetros onde se caracteriza a intermitência severa (região instável).

Em (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) desenvolveu-se um modelo numérico com as seguintes características:

- Conduto descendente (*pipeline*):
 - Padrão de escoamento estratificado;

- Gás modelado como cavidade de pressão constante na posição, mas variável ao longo do tempo, evoluindo isotermicamente;
 - Fração de vazio também constante na posição, na região com escoamento estratificado, mas variável ao longo do tempo;
 - Volume de gás acrescentado para simular diferentes comprimentos equivalentes do *pipeline* (recipiente *buffer*);
 - Modelagem do comprimento de penetração de líquido, nas situações onde existe bloqueio de escoamento de gás na base do *riser*.
- Conduto ascendente (*riser*) de geometria variável:
 - Equações de continuidade para as fases líquida e gasosa, evoluindo isotermicamente;
 - Equação da quantidade de movimento para as fases escoando em conjunto, desprezando os termos de inércia;
 - Modelo de fluxo de deriva (*drift flux*) onde se considera que a relação constitutiva é válida para o ângulo de inclinação local do *riser*. Tanto a relação constitutiva quanto as transições entre padrões de escoamento (*slug*, *bubbly*, anular) são funções do ângulo de inclinação local;
 - Localização (*tracking*) do nível de líquido e da fronteira de fração de vazio.

São estabelecidas condições de continuidade entre os dois subsistemas na base do *riser*. Estas condições de continuidade devem considerar situações onde os subsistemas podem mudar de configuração, por exemplo, quando existe um comprimento de entrada de líquido no *pipeline*.

Realizou-se uma integração numérica do modelo por meio de um método que garante convergência (método implícito com não-linearidades tratadas por um método preditor-corretor). É possível complementar o modelo com dispositivos destinados a suprimir o fenômeno de intermitência severa (válvula de *choke* e injeção de gás), de tal maneira que é possível utilizá-lo como ferramenta de predição e diagnóstico de condições sob intermitência severa.

As características do modelo permitem simular uma grande variedade de dados experimentais encontrados na literatura para sistemas água-ar em *risers* verticais (TAITEL et al., 1990; SARICA; SHOHAM, 1991; JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996) e, em particular, os correspondentes ao relatório da empresa CALtec (WORDSWORTH et al., 1998) para um *riser* em catenária. Também pode ser utilizado como base para os estudos de estabilidade.

Figura 2.1: Transiente de pressão na base do *riser* para $Q_{l0} = 1.2984 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, $\dot{m}_{g0} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$ e $P_s = 2 \text{ bar}$ (BALIÑO, 2008).

Utilizando os dados geométricos da bancada e os dados termodinâmicos correspondentes aos fluidos água e ar de (WORDSWORTH et al., 1998), apresentou-se o transiente de pressão na base do *riser* para valores constantes de vazões de gás e líquido e pressão de separação (Fig. 2.1). Como condição inicial para o código computacional transiente foi imposto o estado estacionário para a configuração em questão. Observa-se que neste caso o sistema desestabiliza-se e atinge um ciclo limite.

Baseado na existência ou não do fenômeno de desestabilização do comportamento dinâmico do sistema, é possível determinar as regiões para as quais o sistema é estável ou instável. Na Fig. 2.2 apresenta-se um típico mapa de estabilidade correspondente à pressão no separador $P_s = 2 \text{ bar}$. Neste mapa, os eixos representam as velocidades superficiais de gás j_{g0} (eixo y) e de líquido j_{l0} (eixo x) em uma condição de referência. Cada par (j_{g0}, j_{l0}) representa um estado estacionário. Os pontos representam os tipos de intermitência observados experimentalmente e a linha representa a curva de estabilidade neutra, obtida numericamente.

A curva de estabilidade numérica foi obtida fixando-se um valor de vazão e variando a outra, em incrementos, até passar da condição instável para a estável. Nesta situação, repete-

Figura 2.2: Mapa de estabilidade para $P_s = 2 \text{ bar}$ (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) - Linha contínua representa a curva de estabilidade numérica; Pontos representam condições experimentais para cada tipo de intermitência severa ou condições estáveis.

se o procedimento com metade do incremento anterior até atingir convergência na fronteira de estabilidade. Na mesma figura são mostrados os dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998), considerando-se os valores médios das vazões de líquido e de gás. Observa-se que a curva numérica prediz de maneira excelente a região de estabilidade, para os diferentes tipos de intermitência severa reportados experimentalmente. Resultados experimentais e numéricos para pressões de 3 e 4 bar são mostrados em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

Embora do ponto de vista tecnológico seja importante a operação com uma boa margem de segurança na região estável, é fundamental o conhecimento referente aos diferentes tipos de instabilidades, pois a amplitude do fenômeno e seus efeitos também está relacionada aos períodos e as amplitudes das flutuações das variáveis envolvidas. Baseados nas diferentes configurações do sistema no ciclo-limite, foram definidos os seguintes tipos de intermitência severa (*severe slugging* ou SS) (TIN; SARSHAR, 1993; WORDSWORTH et al., 1998):

- Intermittência severa tipo 1 (SS1): O comprimento do *slug* é igual ou maior do que o

comprimento do *riser* e a pressão na base atinge um máximo (aproximadamente igual à pressão da coluna cheia de líquido, desprezando o atrito), o que é evidenciado pelos patamares nos valores máximos no gráfico de pressão. O *riser* atinge no transiente uma condição na qual está cheio de líquido, portanto, o comprimento de penetração de líquido no *pipeline* é maior que zero ($x > 0$) no transiente;

- Intermitência severa tipo 2 (SS2): O comprimento do *slug* é menor do que o comprimento do *riser* e a pressão na base atinge um valor menor que a pressão da coluna do cheia de líquido. O *riser* no transiente não se encontra completamente cheio de líquido. O comprimento de penetração de líquido no pipeline é maior que zero no transiente;
- Intermitência severa tipo 3 (SS3): Embora as variáveis apresentem flutuações no transiente, existe uma penetração contínua de gás na base do *riser*, isto é, o comprimento do *slug* e o comprimento de penetração de líquido são iguais a zero. A amplitude máxima da pressão na base do *riser* resulta, comparativamente, menores que nos tipos SS1 e SS2;
- Intermitência tipo oscilatória (OSC): Existem flutuações de pequena amplitude das variáveis.

Na matemática, no estudo de sistemas dinâmicos em duas dimensões, o ciclo-limite é definido como uma trajetória fechada no plano de fases com a propriedade de que pelos menos uma outra trajetória em espiral tende a ele quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ por fora ou por dentro (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Com a classificação definida acima, foi construído o mapa de tipos de intermitência severa, mostrado na Fig. 2.3, para uma pressão de separação de $P_s = 2 \text{ bar}$. O mapa de tipos de intermitência possui informações mais detalhadas que o mapa de estabilidade. Considerando que a controlabilidade das condições de contorno teve limitações nos experimentos, observa-se na Fig. 2.3 uma boa concordância com os dados experimentais do relatório da CALTec (WORDSWORTH et al., 1998), em particular para os pontos experimentais SS1 e grande parte dos SS3 e OSC. Das definições dos tipos de intermitência, não existe uma condição objetiva de transição entre os tipos SS3 e OSC.

Um conclusão que pode ser extraída da Fig. 2.3 é que a região de tipo SS3 se estende em uma faixa significativa de vazões de gás e para baixas vazões de líquido (dentro da região instável). Este resultado implica que um sistema real poderia, eventualmente, continuar operando na região instável, com flutuações aceitáveis de pressão e vazões, dependendo da geometria e das características do separador.

Figura 2.3: Mapa com tipos de intermitência severa para $P_s = 2 \text{ bar}$ (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

Em (BALIÑO, 2012; BALIÑO, 2014) foi introduzido um modelo de *riser* mais sofisticado, necessário para lidar com condições de contorno mais gerais, considerando termos adicionais nas equações dinâmicas. Em adição aos efeitos gravitacionais e de atrito, efeitos inerciais e de compressibilidade foram considerados. O modelo desenvolvido em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) foi melhorado considerando-se efeitos inerciais, utilizando-se a aproximação de golpe de aríete rígido (CHAUDHRY, 1987). Nesta aproximação, os termos de aceleração para as fases líquida e gasosa são considerados na equação de momento, porém a compressibilidade do líquido é desprezada na equação de continuidade. No *pipeline*, os termos da aceleração convectiva são desprezados, porém os termos da aceleração local para as fases foram incluídos no balanço de momento para o escoamento estratificado, permitindo calcular valores instantâneos de queda de pressão e fração de vazio. Os resultados obtidos apresentaram uma excelente concordância com dados experimentais presentes na literatura. Além disso, mapas de estabilidade incluindo efeitos inerciais foram obtidos. A aproximação de golpe de aríete rígido não captura todos os efeitos inerciais, contudo é uma boa aproximação para transientes lentos.

Efeitos de compressibilidade são necessários para rápidos transientes nos quais existem descontinuidades na velocidade de condição de contorno, como fechamento repentino de uma válvula de *choke*, o que gera ondas de pressão, aumentando o número de direções características e a complexidade do procedimento numérico de resolução. Efeitos inerciais, associados à aceleração do fluido, podem lidar com descontinuidades da pressão na condição de contorno.

Em (MALEKZADEH; BELFROID; MUDDE, 2012) foi apresentado um modelo transiente para se avaliar a intermitência severa, através de um modelo de fluxo de deriva. O modelo adota como lei de fechamento a correlação de (SHI et al., 2005) para o cálculo de fração de vazio que, segundo o autor, cobre todos os tipos de padrões de escoamento. As simulações transientes convergem rapidamente e de maneira eficiente, sem a necessidade de se usar qualquer forma de suavização. Segundo o autor, tais vantagens decorrem da correlação de fração de vazio ser função apenas da fração de volume do gás e da velocidade da mistura e, portanto, não são funções explícitas do padrão de escoamento. Desse modo, a correlação não introduz, no modelo, descontinuidades no cálculo dos parâmetros do escoamento, quando um padrão se transiciona para outro. Tais descontinuidades reduziriam a velocidade de convergência. Além disso, esse modelo transiente possui apenas uma equação de balanço de momento para mistura ao invés de duas equações como é o caso do modelo de dois fluidos (TFM), que é adotado no software OLGA (BENDIKSEN; MALNES; MOE, 1991) por exemplo. Tal simplificação na modelagem é uma vantagem adicional para o cálculo numérico sem perder precisão.

O modelo é validado numericamente com os dados de (MASELLA et al., 1998) e com os dados experimentais apresentados por (FABRE et al., 1987) para um *pipeline* horizontal seguido de um *riser* vertical. Uma comparação com os resultados do software OLGA também foi apresentada. Para as condições discutidas, os resultados mostraram boa concordância com a literatura. Inclusive, o modelo consegue prever o comportamento de ciclo limite como observado no experimento de (FABRE et al., 1987).

Em (PARK; NYDAL, 2014) foi apresentado um estudo experimental e numérico para intermitência severa em um escoamento água-ar para uma geometria com *riser* S. Dados experimentais foram obtidos e comparados com dados de simulação numérica do escoamento a partir do software OLGA. Os resultados numéricos da simulação temporal apresentados tem uma boa concordância com dados experimentais, com exceção dos resultados obtidos para frequência de emissão de *slugs* para baixas vazões. A partir dos resultados da simulação, construiu-se um fronteira de estabilidade para se avaliar a ocorrência da intermitência severa e uma fronteira para tipos de instabilidade. Dos resultados experimentais é possível observar dois tipos de intermitências severa: SS1 e SS2. Os resultados numéricos apresentaram uma boa concordância

Figura 2.4: Mapa de estabilidade da bancada multifásica POLI-USP (YAMAGUCHI, 2015) - Linha contínua representa a curva de estabilidade numérica; Pontos representam condições experimentais instáveis e estáveis.

com dados experimentais, tanto para fronteira de estabilidade quanto a fronteira do tipo de instabilidade. Os dados experimentais foram obtidos no laboratório de escoamento multifásico da NTNU (*Norwegian University of Science and Technology*).

Em (YAMAGUCHI, 2015) foram apresentados os primeiros resultados obtidos para intermitência severa na bancada de experimentos do Laboratório Multipropósito de Escoamento Multifásicos da Universidade de São Paulo localizado junto a Escola Politécnica-USP. Os experimentos foram realizados para uma sistema *pipeline-riser* com *riser* vertical para escoamento água-ar. Os dados experimentais foram obtidos com o objetivo de construir mapas de regime de escoamento e também poder validar modelos numéricos desenvolvidos para o fenômeno de intermitência severa. Desses resultados, apresenta-se um exemplo de mapa de estabilidade de (YAMAGUCHI, 2015) que pode ser visto na Fig. 2.4, onde a fronteira de estabilidade numérica baseada no modelo de (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a) é comparada a dados experimentais, apresentando boa concordância.

O Laboratório Multipropósito de Escoamento Multifásico da Universidade de São Paulo foi construído dentro do projeto financiado junto à Petrobras (BALIÑO, 2009), com o propósito de prover dados experimentais relacionados a fenômenos de escoamentos multifásicos.

Utilizando ar-água como fluidos de trabalho, é possível investigar mecanismos básicos do comportamento do escoamento. No entanto, existem muitas limitações quando os resultados são extrapolados para sistemas de produção de petróleo. Os comprimentos dos *pipelines* e as alturas dos *risers* em sistemas de produção de petróleo são muito maiores (ordem de quilômetros de comprimento) do que os valores para instalações experimentais água-ar. As altas razões de pressão entre a parte inferior e superior do *riser* dão origem a efeitos de expansão significativos na fase gasosa, invalidando modelos baseados na suposição de uma fração de vazão média.

O petróleo é um sistema multicomponente, em que ambas as fases, líquida e gasosa, coexistem em condições operacionais (MCCAIN, 1990). A transferência de massa entre as fases é dependente da pressão e da temperatura através dos dados de pressão, temperatura e volume. Com grandes variações de pressão no *riser*, os efeitos de transferência de massa não podem ser ignorados. Além disso, o líquido proveniente do reservatório tem um teor de água, de modo que três fases podem coexistir no caso mais geral.

Em (NEMOTO; BALIÑO, 2012) o modelo desenvolvido em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) foi estendido para investigar a dinâmica do escoamento de gás, óleo e água em um sistema *pipeline-riser*. A transferência de massa entre as fases de óleo e gás foi calculada utilizando a aproximação de *black oil*. As propriedades dos fluidos foram calculadas através de correlações com base em estudos experimentais e dados de campo.

Efeitos térmicos são relevantes em transientes de sistemas de produção petróleo *offshore* e são considerados nas simulações através da inclusão da equação de energia na análise dinâmica, como em códigos comerciais. Mesmo assim, como discutido em (NEMOTO; BALIÑO, 2012), um escoamento isotérmico é uma aproximação razoável para intermitência severa, pois variações na temperatura são muito menores do que variações na pressão em condições operacionais. Consequentemente, efeitos térmicos tem uma influência secundária em sistemas de produção de petróleo. Para experimentos água-ar reportados na literatura, as variações de temperatura são desprezadas.

2.2 Mecanismos de mitigação de instabilidade

No caso de escoamentos sob intermitência severa, os dispositivos de mitigação são utilizados para manter a produção de petróleo contínua. Existem quatro métodos básicos propostos na literatura para reduzir ou suprimir o fenômeno: aumento da pressão do separador, restrição do escoamento através de uma válvula de controle (*choking*), injeção de gás (*gas lift*) e restrição da vazão no *pipeline*. Outras abordagens são deduções e combinações entre os 4 métodos.

A principal razão pela qual o aumento da pressão de separação tem um efeito de estabilização é que o aumento de pressão comprime a fase gasosa e torna o sistema menos compressível. Como a diferença de pressão entre o reservatório e o separador é a força impulsionadora do escoamento em sistemas de produção de petróleo, um aumento na pressão no separador provoca uma redução na vazão de produção, sendo esta a principal desvantagem.

Em operações normais, uma válvula de *choke* controla o escoamento, permitindo uma produção compatível com as características do reservatório. Quando sob intermitência severa, sabe-se que o fechamento desse tipo de válvula de controle, na parte superior do *riser*, pode gerar um aumento da pressão do sistema, que é função da vazão do fluido, o que resulta em uma estabilização do sistema. A manipulação da válvula é geralmente a ação usada em sistemas de controle para estabilizar diferentes regimes de escoamentos e evitar a intermitência severa (STORKAS; SKOGESTAD, 2007). Além do aumento de pressão, qualquer aumento na vazão na parte superior do *riser* gera um aumento na queda de pressão através da válvula, provocando um efeito de estabilização adicional. Por outro lado, o fechamento da válvula provoca uma diminuição na produção. A estabilização requer um *choking* (fechamento) cuidadoso, de maneira que se garanta um aumento de pressão mínimo e suficiente, evitando perdas de produção.

O mecanismo de injeção de gás (*gas lift*) é um processo utilizado para elevar artificialmente fluidos de poços onde a pressão no reservatório é insuficiente. Por meio da injeção de gás, é possível arejar a coluna de líquido e reduzir o gradiente de pressão. A partir da injeção de gás, observa-se a estabilização do escoamento sob intermitência severa. Porém, ainda são necessárias vazões de gás relativamente altas para se observar um resultado significativo (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996). Entretanto, o custo operacional dessa injeção de gás, em termos financeiros, torna a operação muito cara, especialmente devido ao custo energético envolvido. Ou seja, a redução significativa da intermitência severa, via injeção de gás, pode ser inviável financeiramente.

Em (ALMEIDA; GONCALVES, 1999) foi apresentado um método para a eliminação da intermitência severa com base em um venturi colocado, internamente, no *pipeline*, próximo

da junção com o *riser*. O venturi acelera os fluidos, eliminando o padrão de escoamento estratificado próximo da entrada do *riser*, na fase de expulsão de gás. A ausência de escoamento estratificado nesta região impede rápida despressurização na base do *riser* e, consequentemente, reduz a intermitência severa. O método foi verificado em uma instalação experimental de pequena escala e foi feita uma comparação com o *choking* no topo do *riser*.

Em (TENGEDDAL; SARICA; THOMPSON, 2002; TENGEDDAL; THOMPSON; SARICA, 2003) e uma técnica chamada de "auto-elevação" (*self lifting*) foi investigada. O princípio desta técnica é transferir gás do *pipeline* ao *riser* em um ponto acima da base do *riser*. Desta forma, a diferença de pressão entre o *pipeline* e o ponto de injeção no *riser* seria a força impulsionadora, sem a necessidade de potência externa para a injeção de gás. O processo de transferência irá reduzir tanto a queda hidrostática no *riser* quanto a pressão no *pipeline*, consequentemente diminuindo ou eliminando a intermitência severa.

2.3 Critérios de estabilidade

Embora um sistema *pipeline-riser* seja concebido para operar em estado permanente, é possível que esta condição não exista. A estabilidade de um escoamento em um sistema *pipeline-riser* depende do conjunto de parâmetros que definem o estado operacional. É comum representar a estabilidade em um mapa com velocidades superficiais do líquido e do gás nos eixos, mantendo o resto dos parâmetros constantes. A curva de estabilidade é definida como a fronteira entre as regiões onde há e onde não há regime permanente no espaço de parâmetros do sistema.

Muitos critérios de estabilidade foram desenvolvidos com base em modelos simplificados para como *risers* verticais (BØE, 1981; TAITEL, 1986; JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996; POTS; BROMILOW; KONIJN, 1987).

Em (BØE, 1981) um critério de estabilidade foi obtido com base na existência de um padrão de escoamento estratificados no *pipeline* e um equilíbrio de pressão na base do *riser*. A condição é estabelecida por meio da equalização da queda de pressão no *riser* devido à adição de líquido na parte inferior e a queda de pressão no *pipeline* devido à adição de gás.

Em (TAITEL, 1986) foi deduzido um critério de estabilidade baseado na diferença de pressão entre o *pipeline* e o *riser* após a perturbação de uma bolha de gás que penetra no *riser*, em uma condição de estado estacionário, considerando-se duas condições de contorno: a) pressão de separação constante e b) válvula de *choke*. Se a diminuição de pressão no *riser* for maior que a do *pipeline*, o sistema será instável. Este critério prediz que o sistema é mais estável para maiores pressões no separador e maiores comprimentos do *riser*, enquanto o sistema é menos

estável para maiores comprimentos do *pipeline*. Embora tenham sido obtidos parâmetros adimensionais próximos da evidência experimental, o critério ignora as vazões de gás e líquido no processo de perturbação. Além disso, os parâmetros adimensionais dependem de variáveis não controladas, tais como a fração de vazio no *pipeline*, fração de vazio média no *riser* e fração de vazio na bolha de gás que penetra na coluna de líquido.

Em (POTS; BROMILOW; KONIJN, 1987), um critério de estabilidade é definido, baseado em um parâmetro definido como a razão entre a pressão no *pipeline* e a pressão hidrostática na base do *riser* cheio de líquido, após a passagem da vazão mássica de gás estar bloqueada entre o *pipeline* e o *riser*. Se a pressão hidrostática do líquido (devido ao crescimento do *slug* no *riser*) exceder a pressão de gás no *pipeline* (devido à entrada contínua de gás no sistema), o *riser* torna-se cheio de líquido antes que a pressão de gás possa carregar o *slug* de líquido para fora da tubulação. Essa condição implica a ocorrência da intermitência severa do tipo 1.

Em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996) a metodologia apresentada em (TAITEL, 1986) foi estendida, supondo uma vazão de injeção de gás constante na base do *riser*. A comparação foi feita com os dados experimentais para um *riser* vertical, considerando-se uma válvula de *choke* e injeção de gás.

Uma típica desvantagem desses critérios é que eles não são deduzidos de modelos de sistemas dinâmicos completos, e sim de condições específicas nas quais muitos efeitos físicos podem ter sido desprezados e, conseqüentemente, sua aplicabilidade é limitada. Contudo, os critérios de estabilidade apresentados acima são úteis para uma primeira estimativa da região instável.

Uma curva de estabilidade para qualquer sistema *pipeline-riser* pode ser obtida numericamente se um modelo e uma rotina numérica para simulação do modelo estiverem disponíveis. O estado estacionário mais uma pequena perturbação, para um dado ponto no espaço de parâmetros do sistema, é dada como condição inicial para a simulação numérica. O próprio erro de truncamento no processo de cálculo numérico da solução estacionária serve como uma pequena perturbação. A aproximação numérica da solução estacionária é uma condição inicial adequada para se estudar a estabilidade face a pequenas perturbações utilizando simulação numérica no domínio do tempo.

Se a solução numérica converge ao longo do tempo para o estado estacionário, a mesma é estável e resulta no estado permanente do sistema; se a solução numérica não converge com o tempo para o estado estacionário, ela é instável e, portanto, não existe um estado permanente e uma solução intermitente desenvolve-se com o tempo. Alterando-se o ponto no espaço dos parâmetros do sistema e repetindo este processo, pode ser construído o mapa de estabilidade.

Para escoamentos instáveis, a análise da solução periódica conduz à determinação do regime de escoamento, mostrando as regiões correspondentes aos diferentes tipos de intermitência.

Contudo, o procedimento descrito é trabalhoso e custoso computacionalmente. Além disso, nas vizinhanças da fronteira de estabilidade, a taxa de crescimento ou decaimento da solução tende a zero (igual a zero sobre a fronteira de estabilidade), o que implica em períodos de simulação que tendem a valores muito grandes. Consequentemente, a determinação da fronteira de estabilidade em si resulta em um processo muito custoso do ponto de vista computacional. Este custo é a principal razão para se desenvolver outras abordagens para a análise de estabilidade.

2.4 Modelagem para escoamentos multifásicos

Em um modelo de dois fluidos cada fase é considerada separadamente, dessa maneira o modelo do escoamento é formulado em termos de dois conjuntos de equações de conservação de balanço de massa, de quantidade de movimento e de energia. Contudo, a introdução das duas equações de quantidade de movimento no modelo gera dificuldades consideráveis devido a problemas de modelagem e incertezas na especificação dos termos de interação, por exemplo, o atrito entre as fases.

Modelos de interação entre as fases geralmente dependem do regime de escoamento, que em geral, variam com vazões mássicas e com a fração de vazio. Mudanças nesses regimes, durante o escoamento transiente, introduzem complicações adicionais no cálculo dos parâmetros do escoamento multifásico. (MASELLA et al., 1998) afirma que instabilidades numéricas causadas por escolhas incorretas dos termos de interação nas equações de conservação de momento são comuns e, portanto, estudos cuidadosos nas equações de interação entre as fases são necessários na formulação de um modelo multifásico.

(MASELLA et al., 1998) argumenta que simulações multifásicas transientes necessitam de consideráveis esforços computacionais, especialmente modelos de transientes rápidos que utilizam a abordagem de modelo de dois fluidos, como por exemplo escoamentos bifásicos presentes na indústria nuclear. Porém outras áreas, como a indústria de óleo e gás, apresentam regimes de transientes lentos, geralmente relacionados ao transporte de *slugs* ao longo das tubulações. Nessas condições, o autor afirma que a simplificação das equações traria benefícios ao código computacional e não perderia precisão no resultado final. Ou seja, mesmo com a simplificação do modelo, é esperado que o resultado tenha precisão suficiente, já que o fenômeno físico apresenta um regime transiente mais lento e uma modelagem mais simples já seria

suficiente.

Em (MASELLA et al., 1998) são apresentados e utilizados três modelos diferentes para a simulação de escoamentos multifásicos transientes em tubulações: um modelo de dois fluidos (*Two-Fluid Model* ou TFM), implementado no software comercial OLGA, o modelo de fluxo de deriva (*Drift Flux Model* ou DFM), e um modelo chamado de *no-pressure wave* (ou NPW). O objetivo do trabalho é definir qual o método mais eficiente, levando em consideração um balanço entre custo computacional e a qualidade dos resultados.

No TFM, resolvem-se duas equações de conservação de momento, uma para cada fase. No DFM resolve-se uma única equação de conservação de momento para as duas fases, junto com uma relação algébrica para o escorregamento entre as fases. No NPW resolvem-se apenas relações algébricas para a queda de pressão e escorregamento. A tubulação é discretizada com uma geometria unidimensional. Analisaram-se diferentes casos para o teste, um deles correspondente à intermitência severa. Verificou-se que os três modelos apresentam resultados similares, mas o DFM foi mais eficiente do ponto de vista computacional.

Os modelos numéricos discutido neste texto, (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; NEMOTO; BALIÑO, 2012; BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; BALIÑO, 2012; BALIÑO, 2014; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015c), adotam o modelo NPW com uma lei de fechamento com base no fluxo de deriva. Nessa abordagem são consideradas as equações de continuidade para cada fase e uma equação de conservação de momento para mistura, que é a combinação das equações de conservação de momento de cada fases. A lei de fechamento adotada é uma relação algébrica entre as variáveis, chamada de modelo de fluxo de deriva, no qual a fração de vazio é uma função das outras variáveis de estado.

A fração de vazio é uma variável chave no comportamento de sistemas multifásicos, já que ela afeta dinamicamente todas as variáveis da mistura e também os processos de transporte. A determinação da fração de vazio é geralmente feita através de correlações onde é admitido que a fração de vazio depende algebricamente das variáveis do processo.

A grande maioria dessas correlações de fração de vazio foram desenvolvidas com base no modelo de fluxo de deriva (ZUBER; FINDLAY, 1965; WALLIS, 1969), no qual a relação é focada no movimento relativo das fases ao invés do movimento individual de cada uma. Define-se:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d(j_g + j_l) + U_d} \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1), a fração de vazio α é determinada em função das velocidades superficiais de gás e de líquido, respectivamente j_g e j_l , e de dois parâmetros empíricos: o parâmetro de distribuição

C_d e a velocidade de deriva U_d . Ambos devem ser determinados em função das condições do escoamento e da geometria.

Como muitos modelos multifásicos e códigos computacionais comerciais são baseados no comportamento da fração de vazio, é necessário o estudo da sensibilidade da resposta do sistema para uma determinada correlação de fração de vazio. Diante desse interesse, muitos trabalhos foram propostos apresentando correlações para a determinação dos parâmetros C_d e U_d .

Neste texto serão abordadas quatro tipos de correlações. Duas delas foram desenvolvidas para se determinar C_d e U_d de maneira geral, sem a informação prévia do tipo de padrão de escoamento local (CHEXAL et al., 1992) e (BHAGWAT; GHAJAR, 2014). A terceira é adotada para *slugs* e bolhas alongadas (BENDIKSEN, 1984). A quarta correlação é utilizada para a determinação da fração de vazio em escoamentos estratificados (TAITEL; DUKLER, 1976), porém não é baseada no modelo fluxo de deriva; nesta última, a fração de vazio é determinada a partir de uma relação implícita, obtida via balanço das equações de quantidade de movimento para um modelo de dois fluidos.

Em (BENDIKSEN, 1984) apresenta-se um estudo experimental de propagação de bolhas em escoamento intermitente, utilizando como detectores um conjunto de foto-transmissores na faixa de infravermelho. Foram realizados experimentos numa bancada água-ar com ângulos de inclinação entre -30° e 90° com a horizontal, diâmetros entre 1,9 cm e 5,0 cm e velocidades superficiais de líquido e de gás variando entre 0,01 m/s até 5 m/s. Os resultados foram correlacionados com a relação de fluxo de deriva, no qual os parâmetros são funções dos números de Reynolds, do número de Froude e do ângulo de inclinação. Como resultado, apresenta-se uma correlação de fluxo de deriva, em função do ângulo de inclinação, que satisfaz os valores limite correspondentes a condutos horizontais e verticais. Porém, a correlação de (BENDIKSEN, 1984) é específica para *slugs* e bolhas, apresentando desvios consideráveis quando próximo da transição para outros padrões de escoamento.

Em (CHEXAL et al., 1992) apresenta-se uma correlação para a fração de vazio aplicada a escoamentos bifásicos que é válida para uma ampla faixa de valores de pressão, vazão mássicas, frações de vazio, tipos de fluidos (vapor-água, água-ar, hidrocarbonetos e oxigênio), diferentes condições termodinâmicas e é denominada de correlação de Chexal-Lellouche. Esta correlação é baseada no modelo de fluxo de deriva e determina os parâmetros de distribuição e a velocidade de deriva para escoamentos co-corrente e contra-corrente, em escoamentos ascendentes e descendentes. Segundo os autores, a proposta daquele trabalho é apresentar uma correlação empírica que elimina a necessidade de se conhecer o regime de escoamento antes que a esti-

mativa da fração de vazio seja feita. A correlação apresenta uma boa concordância com dados experimentais. Tais resultados devem-se em parte ao fato de que os parâmetros do modelo de deriva da correlação respeitam os seguintes princípios:

- Devem calcular velocidades das fases e frações de vazio contínuas, exceto na descontinuidade entre a condição de mistura bifásica e vapor puro ou em descontinuidades geométricas;
- Devem ter derivada de primeira ordem finita e contínua;
- A fração de vazio como função dos parâmetros do modelo de deriva deve variar entre os valores zero e um;
- Devem recuperar valores corretos para as condições limite de pressão crítica, pressão zero, fração de vazio unitária e fração de vazio nula.

Também foi realizada uma verificação para a condição de *flooding* (CCFL- *Counter Current Flow Limitation*). No total, foram verificados 1400 dados experimentais, considerando frações de vazio na faixa de 0.01 até 0.98, vazões mássicas na faixa de 0.04 até 550 kg/s/m^2 , pressões na faixa de 1 a 23 *bar* e diâmetros na faixa de 0.03 até 0.12 *m*.

Contudo, trabalhos mais recentes mostram que a correlação Chexal-Lellouche pode apresentar problemas de super-generalização (*over-generalization*) devido aos ajustes dos parâmetros a cada tipo de condição. Em (GRIFFITHS et al., 2014) afirma-se que a correlação pode fornecer valores aproximados para muitas condições, porém não consegue prever nenhum tipo de resposta com precisão. Isto pode ser tornar um problema quando se trabalha em sistemas mais complexos que necessitam de uma determinada precisão ou situações críticas de operação. Além disso, segundo (GRIFFITHS et al., 2014), a correlação está sujeita a existência de erros de compensação nos modelos para a velocidade de deriva e para parâmetro de distribuição. Erros na velocidade de deriva podem ser compensados por erros no parâmetro de distribuição (no sentido oposto), o que resultaria em uma predição de fração de vazio razoável, mesmo que os parâmetros não apresentem sentido físico. Tal compensação pode ser um problema quando se utiliza sistemas ou modelos dinâmicos, que utilizam a velocidade de deriva e o parâmetros de distribuição separadamente. O uso de correlações com erros de compensação na modelagem pode resultar em erros no cálculo do atrito ou nas derivadas da fração de vazio, implicando erros ainda mais relevantes em todo sistema dinâmico, especialmente em modelos sensíveis à fração de vazio.

Em (WOLDESEMAYAT; GHAJAR, 2007; BHAGWAT; GHAJAR, 2012) foram comparados diversos tipos de correlações para escoamentos co-corrente bifásicos que cobrem diversos padrões de escoamento e fluidos. O objetivo dos dois trabalhos era avaliar quais dentre elas apresentaria resultados mais satisfatórios quando comparado aos dados experimentais. Ao todo foram analisadas 68 correlações para escoamentos horizontais, 52 correlações para escoamentos verticais ascendentes e 26 correlações para escoamentos verticais descendentes. As comparações deram origem a uma correlação otimizada de fração de vazio apresentada em (BHAGWAT; GHAJAR, 2014).

Em (BHAGWAT; GHAJAR, 2014) é apresentada uma correlação de fluxo de deriva que também é independente do padrão de escoamento local. A correlação é validada para ser aplicada em escoamentos bifásico gás-líquido em co-corrente, para uma vasta faixa de combinações de fluidos, diâmetros hidráulicos e inclinação da tubulação. O parâmetro de distribuição é função da razão entre as densidades, do Reynolds da mistura, da velocidade superficial total, da massa específica do líquido, do diâmetro hidráulico, da viscosidade do líquido, da orientação da tubulação e da fração de vazio (a correlação considera a mudança do padrão de escoamento no parâmetro de distribuição). Também é função do fator de atrito bifásico que é função do Reynolds na mistura. A velocidade de deriva é modelada como uma função do diâmetro da tubulação, da orientação da tubulação, das densidades do gás e do líquido, da viscosidade do líquido, da tensão superficial entre as fases e da fração de vazio. Os dados utilizados para validar a correlação consistem de 8255 dados experimentais coletados de 60 fontes diferentes. Entre eles, as seguintes combinações de fluidos foram analisados: ar-água, argônio-água, gás natural-água, ar-querosene, ar-glicerina, argônio-acetona, argônio-etanol, argônio-álcool, refrigerantes (R11, R12, R22, R134a, R114, R410A, R290 e R1234yf), vapor-água e ar-óleo. (BHAGWAT; GHAJAR, 2014) mostram que a correlação consegue prever a fração de vazio, com precisão adequada, para diâmetros hidráulicos na faixa de 0.5 a 305 mm (geometria de tubulação circular, anular e retangular), tubulações com inclinação na faixa de -90° a 90° (com relação a horizontal), viscosidade da fase líquida na faixa de 0.0001 a 0.6 Pa s, pressões na faixa de 0.1 a 18 MPa e número de Reynolds para as duas fases na faixa de 10 a 5×10^6 .

2.5 Análise de estabilidade linear

Como uma alternativa mais eficiente do que as simulações no domínio do tempo, a teoria de estabilidade linear é uma técnica poderosa para identificar as regiões em um espaço de parâmetros, onde o escoamento multifásico tem um estado estável ou não. Para realizar a análise de estabilidade linear de um sistema dinâmico, é necessário um modelo caracterizado por um

conjunto de equações governantes. O estado estacionário pode ser obtido eliminando-se as derivadas parciais em relação ao tempo. O conjunto de equações resultante tem como solução o estado estacionário.

Para se determinar a estabilidade do estado estacionário, escreve-se as variáveis dependentes como valor destas no estado estacionário mais uma perturbação e substitui-se nas equações de governo o que resulta nas equações de governo da perturbação do estado estacionário. Admite-se que essas perturbações são infinitesimais, assim termos não lineares podem ser desprezados. Consequentemente, obtém-se as equações de governo lineares para as perturbações do estado estacionário. A estabilidade linear do estado estacionário é dada pela solução das equações de governo das perturbações linearizadas.

As equações linearizadas determinam como evoluem com o tempo as perturbações da solução estacionária. Se as perturbações crescem com o tempo, a solução estacionária é instável; caso contrário, é estável. A taxa de crescimento das perturbações é dada pela parte real dos autovalores do espectro associado ao sistema de equações linearizadas. Se todos os autovalores têm parte real negativa, então a solução estacionária é estável. Se pelo menos um autovalor tem parte real positiva, a solução estacionária é instável. Resumindo, a estabilidade linear do estado estacionário frente a pequenas perturbações é definida pelo espectro do operador obtido via linearização das equações de governo em termos do estado estacionário.

Em (ZAKARIAN, 2000), a análise de estabilidade linear foi aplicada com sucesso para um escoamento água-ar em um sistema *pipeline-riser* simplificado. Os mapas de estabilidade obtidos apresentaram uma concordância qualitativa com dados experimentais reportados na literatura. Naquele modelo simplificado considera-se que as quantidades para o *riser* variam linearmente no espaço. As equações de conservação de gás, de líquido e uma equação de conservação de quantidade de movimento simplificada (apenas termos gravitacionais) são integradas no espaço. Para fechar o modelo, utiliza-se uma relação algébrica de fluxo de deriva, o que resulta em um sistema de equações algébrico-diferencial. Além da metodologia aplicada para um *riser* vertical, apresentou-se também uma equação de evolução para o modo instável. A análise de estabilidade linear mostra que quando a fronteira de estabilidade é cruzada da região estável para a região instável, o espectro apresenta dois autovalores complexos conjugados que cruzam o eixo imaginário (parte real se torna positiva). Segundo o autor, essa forma de perda de estabilidade do estado estacionário é típica de uma bifurcação de *Hopf* supercrítica. O estado estacionário perde estabilidade e dá lugar a uma solução periódica (ciclo limite). (ZAKARIAN, 2000) mostra que a equação de evolução do modo instável tem como solução um ciclo-limite. Pode-se concluir que o fenômeno de intermitência severa pode ser visto como uma instabilidade

hidrodinâmica. A generalização da abordagem apresentada por (ZAKARIAN, 2000) para sistemas com mais graus de liberdade, de maneira a se descrever inclinação variável e distribuições ao longo do *riser*, é uma ferramenta promissora para gerar os mapas de estabilidade.

Em (BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013) estendeu-se o modelo utilizando em (ZAKARIAN, 2000) com a inclusão de efeitos de atrito e permitindo *risers* com inclinação ascendente, mas não necessariamente verticais, como *riser* em catenária. O *riser* foi discretizado em N nós e $N - 1$ intervalos. As variáveis dependentes são admitidas lineares em cada intervalo. As equações de conservação de massa de gás e de líquido são integradas em cada intervalo, levando a um conjunto de equações diferenciais. A integração da equação de conservação de momento em cada intervalo obtém um conjunto de equações algébricas desde que os termos inercias sejam desprezados. Uma correlação de fluxo de deriva é considerada a cada nó de discretização. Uma breve discussão é dada sobre como realizar a análise de estabilidade linear para esse tipo de sistema algébrico diferencial obtido via discretização das equações de governo do escoamento.

Para o caso específico de dois nós e *riser* vertical sem atrito, os resultados obtidos por (ZAKARIAN, 2000) foram reproduzidos por (BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013); contudo, a metodologia de (ZAKARIAN, 2000) não conseguiu capturar as curvas de estabilidade para os casos nos quais o comprimento de equivalente de *buffer* é maior do que um valor crítico. Como a abordagem de (BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013) tem sucesso na obtenção dessas curvas, conclui-se que a principal causa da falta de concordância, para valores acima do crítico, é a não consideração dos termos de atrito no modelo de (ZAKARIAN, 2000).

É interessante observar que, como mostrado em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), a não consideração do atrito é também responsável pela falta de convergência em modelos anteriores de (TAITEL et al., 1990; SARICA; SHOHAM, 1991), reportado como uma penetração infinita de gás na base do *riser*. (BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013) apresentam mapas de estabilidade para todos os comprimentos equivalente de *buffer* para os casos sem e com atrito, adotando $N = 50$ nós. Os mapas de estabilidade para o caso sem atrito tem um comportamento qualitativo muito distinto, enquanto que o mapa de estabilidade para o caso com atrito tem concordância com resultados experimentais reportados na literatura. O caso sem atrito não recupera as curvas estabilidade para valores de comprimento equivalente de *buffer* maior que um valor crítico, assim como os resultados de (ZAKARIAN, 2000) também não recuperam as curvas.

3 MODELO

Neste capítulo é apresentado o modelo matemático adotado e a dedução das equações que permitem avaliar o comportamento dinâmico do sistema *pipeline-riser*, assim como as hipóteses e simplificações assumidas. O modelo é baseado na aproximação NPW (*No Pressure Wave*), no qual os termos referentes à inércia dos fluidos são desprezados na equação de conservação de quantidade de movimento. A modelagem apresentada neste texto é baseada nos seguintes trabalhos: (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; BALIÑO, 2012; BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017)

Apresenta-se a metodologia adotada, através da linearização das equações de governo em torno do estado estacionário, para se obter o sistema de equações de governo das perturbações, a partir do qual se avalia a estabilidade de um determinado estado estacionário. O estado estacionário pode ser obtido desconsiderando-se as derivadas temporais das variáveis nas equações de conservação. Apresenta-se também as condições de contorno do escoamento água-ar e as condições de contorno das equações de perturbação.

3.1 Modelagem do escoamento

Considerando escoamento unidimensional e supondo que não existe transferência de massa por vaporização entre as fases, as equações de continuidade para o líquido e para o gás podem ser escritas, respectivamente, como:

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial j_l}{\partial s} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P \alpha) + \frac{\partial}{\partial s} (P j_g) = 0 \quad (3.2)$$

α é a fração de vazio, j_g é a velocidade superficial do gás, j_l é a velocidade superficial de líquido, P é a pressão, t é o tempo e s é o comprimento de arco que indica a posição ao longo

Figura 3.1: Definição das variáveis na tubulação (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

da tubulação, como mostrado na Fig. 3.1. A dedução completa das equações de continuidade, baseado em (BALIÑO, 2008), é apresentada no Apêndice A.

Os resultados da simulação numérica (MASELLA et al., 1998; BALIÑO, 2008) mostram que, na grande maioria dos transientes de interesse na indústria de óleo e gás (transientes mais lentos), as ondas de pressão não têm um efeito significativo na iniciação e no transporte das ondas de fração de vazio. Estas ondas acústicas estão relacionadas com os termos de inércia das fases que se relacionam diretamente com as velocidades de propagação das mesmas, complicando o esquema numérico de resolução. A ordem de grandeza da velocidade de propagação dessas ondas acústicas é muito maior (velocidade do som no líquido ou no gás) do que a velocidade de propagação de *slugs* na tubulação. Por isso, adota-se o modelo NPW.

Neste trabalho, adota-se uma equação de conservação da quantidade de movimento linear para mistura, desprezando-se a inércia das fases e considerando-se o gradiente de pressão (ou queda de pressão), a força gravitacional e o atrito com a parede, resulta em:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\rho_m g \sin \theta - \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_A \quad (3.3)$$

onde ρ_m é a massa específica da mistura, g é a aceleração gravitacional, θ é a inclinação local com relação a horizontal e $(\partial P / \partial s)_A$ é a queda de pressão devido por atrito. A massa específica da mistura pode ser escrita como:

$$\rho_m = \rho_l (1 - \alpha) + \frac{P}{R_g T_g} \alpha \quad (3.4)$$

Para determinar a queda de pressão por atrito, define-se um multiplicador de duas fases, que relaciona essa queda de pressão por atrito e a queda de pressão por atrito para um escoamento monofásico de referência (apenas líquido, mantendo-se o fluxo mássico) (WALLIS, 1969):

$$\phi_{f0}^2 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_A}{-\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{Af0}} \quad (3.5)$$

onde $\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{Af0}$ é a queda de pressão correspondente à fase líquida escoando com o fluxo mássico da mistura, ou seja:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{Af0} = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.6)$$

As seguintes relações são válidas:

$$f_l = f_l(Re_l, \epsilon/D) \quad (3.7)$$

$$Re_l = \frac{G D}{\mu_l} \quad (3.8)$$

onde f_l é o fator de atrito de Darcy para a fase líquida, dependente do número de Reynolds para o líquido Re_l e da rugosidade relativa ϵ/D (onde ϵ é a rugosidade da tubulação e D é o diâmetro interno da tubulação) e é calculado a partir de uma correlação conveniente para escoamento monofásico. Neste trabalho foi adotada a correlação de (CHEN, 1979):

$$\frac{1}{\sqrt{f_l}} = -2 \log \left\{ \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re_l} \log \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re_l^{0.8981}} \right] \right\} \quad (3.9)$$

O fluxo mássico da mistura por unidade de área G é determinado por:

$$G = \frac{P}{R_g T_g} j_g + \rho_l j_l \quad (3.10)$$

Pode-se escrever:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_A = \frac{1}{2} \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.11)$$

Admite-se que o multiplicador depende algebricamente das variáveis locais, portanto:

$$\phi_{f0}^2 = \phi_{f0}^2(j_g, j_l, P, \theta) \quad (3.12)$$

Admite-se também que a fração de vazio é função algébrica das condições locais do escoamento:

$$\alpha = \alpha(j_g, j_l, P, \theta) \quad (3.13)$$

As Eqs. (3.12) e (3.13) serão discutidas na Seção 3.3.

3.1.1 Equações dinâmicas em forma matricial

Como existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e as outras variáveis, dada pela Eq. (3.13), a fração de vazio é eliminada, reduzindo-se a ordem do sistema. As equações dinâmicas para o modelo, Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3), podem ser escritas como:

$$\{A(\{v\})\} + \underline{B} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = 0 \quad (3.14)$$

onde $\{v\}$ é o vetor de variáveis de estado, $\{A\}$ é um vetor e $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são matrizes definidas como:

$$\{v\} = \begin{pmatrix} j_g \\ j_l \\ P \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$A_3 = \rho_m g \sin \theta + \frac{1}{2} \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.17)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$B_{11} = -\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (3.19)$$

$$B_{12} = -\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (3.20)$$

$$B_{13} = -\frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (3.21)$$

$$B_{23} = \alpha \quad (3.22)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$C_{12} = 1 \quad (3.24)$$

$$C_{21} = C_{22} = P \quad (3.25)$$

$$C_{23} = j_g \quad (3.26)$$

$$C_{33} = 1 \quad (3.27)$$

A dedução dos parâmetros pode ser vista no Apêndice B.

3.1.2 Modelo simplificado - *Pipeline* a parâmetros concentrados e reservatório *buffer*

Nesta seção, apresentam-se as equações adotadas para o modelo a parâmetros concentrados. Uma comparação entre os modelos foi apresentada em (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017). Estas modelagens simplificadas fornecem duas condições de contorno ao sistema de equações da modelagem do escoamento no *riser* (modelagem a parâmetros distribuídos).

Como apresentado em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), o *pipeline*, apresentado na Fig. 3.2, pode tanto estar em condição de acumulação de líquido ($x > 0$) ou em condição de penetração de gás constante ($x = 0$), onde x é a posição da frente de acúmulo de líquido. Contudo, como o estado estacionário está relacionado à condição de penetração constante de gás, as equações para o *pipeline* serão consideradas na condição de $x = 0$.

Com base na Fig. 3.2, para o *pipeline* tem-se as seguinte equações de governo, respectivamente, da fase líquida e da fase gasosa:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} - \frac{1}{L} (j_{lb} - j_{l0}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{dP_g}{dt} + \frac{P_g (j_{gb} + j_{lb} - j_{l0}) - \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0}}{L\alpha_p + L_e} = 0 \quad (3.29)$$

onde j_{lb} e j_{gb} são, respectivamente, as velocidades superficiais para o líquido e para o gás na base do *riser*, L é o comprimento do *pipeline*, L_e é o comprimento equivalente de *buffer* $L_e = \frac{\nu_g}{A}$, ν_g é volume do vaso e A é a área da seção transversal da tubulação, T_g é a temperatura do

Figura 3.2: Definição das variáveis no *pipeline* (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

gás, t é o tempo, β é a ângulo de inclinação do *pipeline* com relação a horizontal, P_b e P_g são, respectivamente, a pressão na base do *riser* e a pressão de gás. Para $x = 0$ resulta em $P_b = P_g$, pois considerando as variações hidrostáticas, a pressão na base do *pipeline* resulta:

$$P_b = P_g + \rho_l g x \sin \beta \quad (3.30)$$

As velocidades superficiais na condição de referência para o gás e para o líquido, respectivamente j_{g0} e j_{l0} , usadas para representar os mapas de estabilidade, são definidas como:

$$j_{g0} = \frac{R_g T_0 \dot{m}_{g0}}{P_0 A} \quad (3.31)$$

$$j_{l0} = \frac{Q_{l0}}{A} \quad (3.32)$$

onde $\dot{m}_{g0}$ é a vazão mássica de gás, R_g é a constante do gás e Q_{l0} é a vazão volumétrica de líquido injetado na base do *pipeline*. A condição de referência é definida para pressão $P_0 = 1.013 \text{ bara}$ e temperatura $T_0 = 293 \text{ K}$.

Para dedução completa, consultar Apêndice H.

3.1.2.1 Modelo de fração de vazio constante

Uma segunda simplificação à modelagem do *pipeline* é admitir que a variação da fração de vazio com o tempo é pouco significativa na resposta dinâmica (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010)

para pequenos comprimentos equivalentes de *buffer*. Como adotado em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; NEMOTO; BALIÑO, 2012; BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017), tem-se:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = 0 \quad (3.33)$$

E, portanto, as equações de conservação de líquido e de gás no *pipeline* podem ser reescritas como:

$$j_{lb} = j_{l0} \quad (3.34)$$

$$\frac{dP_b}{dt} = \frac{-P_b j_{gb} + \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0}}{L \alpha_p + L_e} \quad (3.35)$$

3.1.3 Modelo generalizado - Reservatório *buffer*

Nesta seção é apresentado uma abordagem na qual o *pipeline* é descrito da mesma maneira que o *riser*, isto é, um modelo a parâmetros distribuídos. Esta é uma das principais contribuições originais desta tese com relação ao trabalhos já realizados (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; BALIÑO, 2012; NEMOTO; BALIÑO, 2012; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b). Esta abordagem permite a modelagem da flutuação da fração de vazio com o tempo, propagação de ondas de fração de vazio e a variação das variáveis de estado ao longo da posição no *pipeline*. Assim, resulta uma abordagem mais realística do ponto de vista físico.

Dessa maneira, como o trecho *pipeline* já é considerado na modelagem generalizada, apenas a existência do reservatório *buffer* com volume v_e foi considerado para simular comprimentos equivalentes de *pipeline* $L_e = \frac{v_e}{A}$, onde A é a área de passagem do escoamento ($A = \frac{1}{4} \pi D^2$, onde D é o diâmetro interno).

Com base na Fig. 3.3, para o volume referente ao *buffer*, têm-se as seguintes equações de governo, respectivamente, da fase líquida e da fase gasosa:

$$j_{lb} = \frac{Q_{l0}}{A} \quad (3.36)$$

$$L_e \frac{dP_g}{dt} = P_b j_{gb} - \frac{\dot{m}_{g0} R_g T_g}{A} \quad (3.37)$$

onde j_{lb} e j_{gb} são, respectivamente, as velocidades superficiais de líquido e de gás na entrada da tubulação, P_b e P_g são, respectivamente, a pressão na entrada da tubulação e a pressão do gás e

Figura 3.3: Definição das variáveis no volume *buffer*.

T_g é a temperatura do gás. Por simplificação, admite-se que a pressão no interior do volume de *buffer* não varia, e portanto, tem-se:

$$P_b = P_g \quad (3.38)$$

Portanto, a Eq. (3.37) pode ser reescrita como:

$$L_e \frac{dP_g}{dt} = P_g j_{gb} - \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0} \quad (3.39)$$

Para dedução completa, consultar Apêndice H.

3.2 Condições de contorno

Nesta seção apresenta-se as condições de contorno adotadas em ambas as modelagens.

3.2.1 Injeção de gás

Neste texto é considerado a possibilidade de injeção de gás em uma posição s_l ao longo do *riser*. Considerando o balanço das equações de conservação com um termo fonte de massa de gás injetada, pode se mostrar que a injeção de gás introduz a seguinte descontinuidade na velocidade superficial de gás e na fração de vazio, enquanto que a pressão P_l é continua (BALIÑO, 2008):

$$j_g^+ = j_g^- + \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{P_l} j_{g0l} \quad (3.40)$$

$$\alpha^+ = \alpha^+ (j_g^+, j_l, P_l) \quad (3.41)$$

onde P_l é a pressão no ponto de injeção, j_{g0l} é a velocidade superficial de gás injetada na condição de referência e os índices $-$ e $+$ denotam, respectivamente, valores avaliados nas posição anterior e posterior de s_l . A velocidade superficial de gás injetada é definida como:

$$j_{g0l} = \frac{R_g T_0 \dot{m}_{gl}}{P_0 A} \quad (3.42)$$

onde $\dot{m}_{gl}$ é a vazão mássica de gás injetada.

3.2.2 Válvula de *choke*

Em condições normais de operação, a válvula reguladora de fluxo tem por finalidade restringir a vazão do fluido o que permite uma produção compatível com as características do reservatório (BALIÑO, 2008). Em relação a intermitência severa, o fechamento da válvula de *choke* atua como um elemento estabilizador do sistema. Existem basicamente dois tipos de condições de escoamento: escoamento subsônico (ou subcrítico) e escoamento sônico (ou crítico).

Para baixas pressões, típicas de laboratórios de sistemas água-ar, a válvula opera na condição subcrítica; neste caso, o escoamento depende da diferença de pressão através da válvula (Fig. 3.4). O modelo considera uma válvula baseada no modelo homogêneo para o escoamento água-ar, no qual não há escorregamento entre as fases:

$$P_t - P_s = \frac{1}{2} K_v \rho_{mt} j_t |j_t| \quad (3.43)$$

$$\rho_{mt} = \alpha_t \frac{P_t}{R_g T_g} + (1 - \alpha_t) \rho_l \quad (3.44)$$

onde j_t , P_t , α_t e ρ_{mt} são respectivamente a velocidade superficial total, a pressão, a fração de vazio e a densidade da mistura, todas avaliados no topo da tubulação. P_s é a pressão no separador e K_v é constante de perda válvula. Outra expressão para a queda de pressão na válvula foi utilizada em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996):

$$P_t - P_s = C j_{lt} |j_{lt}| \quad (3.45)$$

Figura 3.4: Definição de variáveis para a válvula de *choke* (BALIÑO, 2012; JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996).

onde j_{lt} é a velocidade superficial de líquido no topo da tubulação e C é uma constante dimensional da válvula. É evidente que o modelo homogêneo e o modelo de Jansen (respectivamente Eqs. (3.43) e (3.45)) não fornecem a mesma queda de pressão para diferentes velocidades superficiais de gás; o modelo de Jansen não depende da velocidade superficial de gás, o que não fornece valores realistas.

3.2.3 Continuidade entre subsistemas

Considera-se que a área de passagem entre os subsistemas é a mesma, a pressão é contínua e admite-se uma evolução isotérmica do escoamento o que resulta em velocidades superficiais j_{lb} e j_{gb} contínuas. Pode-se escrever:

$$P(s = 0, t) = P_b(t) \quad (3.46)$$

$$j_l(s = 0, t) = j_{lb}(t) \quad (3.47)$$

$$j_g^-(s = 0, t) = j_{gb}(t) \quad (3.48)$$

A pressão no topo da tubulação (posição s_t) satisfaz:

$$P(s_t, t) = P_s \quad (3.49)$$

3.3 Leis de fechamento

Nesta seção divide-se novamente a modelagem: para o modelo simplificado adota-se as correlações de fração de vazio e queda de pressão de atrito como adotado por (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017); para o modelo generalizado adota-se as correlações de (CHEXAL et al., 1992) e de (TAITEL; DUKLER, 1976) para fração de vazio e (MÜLLER-STEINHAGEN; HECK, 1986) para queda de pressão por atrito.

3.3.1 Modelo simplificado

Neste texto é adotado, para o cálculo da queda de pressão por atrito, o modelo homogêneo para a mistura. Pode-se demonstrar (WALLIS, 1969) que o multiplicador de duas fases resulta:

$$(\phi_{f0}^2)_{mh} = \frac{f_m}{f_l} \frac{\rho_l}{\rho_m} \quad (3.50)$$

Portanto, a queda de pressão por atrito pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_A = \frac{1}{2} \frac{f_m}{D} j |j| \quad (3.51)$$

$$f_m = f \left(Re_m, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad (3.52)$$

$$Re_m = \frac{\rho_m D |j|}{\mu_m} \quad (3.53)$$

$$\mu_m = \mu_l (1 - \alpha) + \mu_g \alpha \quad (3.54)$$

$$j = j_l + j_g \quad (3.55)$$

onde j_g , j_l e j são, respectivamente as velocidades superficiais de gás, líquido e total, P é a pressão, μ_g , μ_l e μ_m são, respectivamente, as viscosidades dinâmicas do gás, do líquido e da mistura e ρ_l é a massa específica do líquido.

O fator de atrito de Darcy f_m depende do número de Reynolds da mistura Re_m e da rugosidade relativa ϵ/D (onde ϵ é a rugosidade da tubulação), e é calculado a partir de (CHEN, 1979) utilizando um modelo homogêneo para mistura bifásica.

Para o cálculo da fração de vazio, admite-se a relação algébrica entre a fração de vazio e as condições locais do escoamento:

$$\alpha = \alpha(j_g, j_l, P, \theta) \quad (3.56)$$

A Eq. (3.56) permite utilizar diversos tipos de correlações de fração de vazio empíricas, assim como correlações que são baseadas no modelo de fluxo de deriva:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d} \quad (3.57)$$

Admite-se que os parâmetros de deriva C_d (parâmetro de distribuição) e U_d (velocidade de deriva) dependem basicamente das condições locais do escoamento e da inclinação local $\theta = \theta(s)$, isto é, $C_d = C_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta)$ e $U_d = U_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta)$.

É adotada a correlação de (BENDIKSEN, 1984) para o trecho ascendente. A correlação de Bendiksen é usualmente adotada para escoamentos do tipo *plugs* e *slugs*, contudo ela superestima a velocidade do gás para configurações do tipo *churn* e anular que são comuns no transiente da fase de expulsão do gás (*blowdown*) (BALIÑO, 2008). Pode-se escrever:

$$C_d = \begin{cases} 1.05 + 0.15 \sin \theta & \text{for } Fr_j < 3.5 \\ 1.2 & \text{for } Fr_j > 3.5 \end{cases} \quad (3.58)$$

$$U_d = \begin{cases} \sqrt{gD} (0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta) & \text{for } Fr_j < 3.5 \\ 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta & \text{for } Fr_j > 3.5 \end{cases} \quad (3.59)$$

onde o número de Froude, Fr_j , é definido como:

$$Fr_j = \frac{j}{\sqrt{gD}} \quad (3.60)$$

Observa-se que tanto C_d quando U_d são funções apenas da inclinação local da geometria e do diâmetro interno do tubo.

Para o cálculo da fração de vazio no trecho descendente ou (*pipeline* é adotado o modelo de (TAITEL; DUKLER, 1976) que será detalhado na Seção 3.4.2.

3.4 Modelo generalizado

Em (SHOHAM, 2006) propõe-se um modelo, que baseado em propriedades do escoamento e na inclinação local, em que é possível prever o padrão de escoamento para qualquer inclinação. Esta abordagem é adotada neste texto para prever o tipo de padrão e uma eventual transição entre eles.

Em instalações de laboratório, para escoamentos água-ar, observa-se que condições de baixa vazões de gás, baixas vazões de líquido e baixas pressões são predominantes. Para essas condições, admite-se que os padrões de escoamento associados às inclinações ascendentes e descendentes, respectivamente, são os padrões intermitente e estratificado. (SHOHAM, 2006) também verifica esses padrões a partir de seu modelo numérico.

Com o objetivo de fechar o modelo e resolver o sistema de equações diferenciais de governo, é necessário definir leis de fechamento adequadas. Para o modelo generalizado, a partir do momento em que o padrão de escoamento foi definido, o modelo irá determinar quais correlações para queda de pressão por atrito e fração de vazio serão adotadas. Essa abordagem também permite prever onde ocorre a transição entre o padrão estratificado e o padrão intermitente.

Além disso, é necessário obter uma fronteira de transição de escoamento, pois a intermitência severa não ocorre para escoamentos com padrão não-estratificados (BØE, 1981; ALMEIDA; GONCALVES, 1999). Assim, tem-se por objetivo incluir um critério que possa fornecer a informação de transição ao modelo, já que o mesmo seria o limite para ocorrência do fenômeno de intermitência severa.

De acordo com (SHOHAM, 2006), o mecanismo de crescimento de uma onda é usado para prever a transição (Fig. 3.5). Admite-se que existe uma onda na interface gás-líquido de um escoamento estratificado em equilíbrio (ver Apêndice E).

Estendendo-se a análise da teoria invíscida de Kelvin-Helmholtz para se analisar a estabilidade dessa onda em um tubo, (TAITEL; DUKLER, 1976) sugerem que quando a força de pressão de sucção é maior do que a força de gravidade, a onda tende a crescer e o escoamento estratificado não é preservado. Essa análise leva ao seguinte critério:

$$u_g > \left(1 - \frac{h_l}{D}\right) \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) g \cos \theta A_g}{\rho_g \frac{dA_l}{dh_l}} \right]^{1/2} \quad (3.61)$$

Figura 3.5: Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz.

onde h_L é o nível de líquido, A_L é a área de seção transversal preenchida por líquido e θ é a inclinação local.

3.4.1 Escoamento intermitente

Nos testes realizados, foram implementadas três correlações de fração de vazio com base no modelo de fluxo de deriva: (BENDIKSEN, 1984), (CHEXAL et al., 1997) e (BHAGWAT; GHAJAR, 2014); três correlações para o multiplicador de duas fases: (MÜLLER-STEINHAGEN; HECK, 1986; FRIEDEL, 1979) e um multiplicador de duas fases baseado no modelo homogêneo para mistura.

De maneira geral, adota-se a correlação de (CHEXAL et al., 1997) para a fração de vazio e a correlação de (MÜLLER-STEINHAGEN; HECK, 1986) para o cálculo do multiplicador de duas fases. Nos testes, as duas correlações apresentaram resultados mais consistentes quando compara-se os resultados para mapas de estabilidade, a partir da simulação numérica, com os resultados disponíveis na literatura.

3.4.1.1 Fração de vazio

As velocidades superficiais para as fases são determinadas utilizando-se a relação de fluxo de deriva (Apêndice D), admitida válida localmente:

$$j_g = \alpha (C_d j + U_d) \quad (3.62)$$

Define-se para (CHEXAL et al., 1997):

$$C_d = \frac{L}{K_0 + (1 - K_0) \alpha^r} \quad (3.63)$$

$$L = F_r L_v + (1 - F_r) L_h \quad (3.64)$$

$$F_r = \left(\frac{\theta}{90^\circ} \right)^{0.2} \quad (3.65)$$

$$L_v = \min(1.15\alpha^{0.45}, 1) \quad (3.66)$$

$$L_h = \min(1.125\alpha^{0.6}, 1) [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \quad (3.67)$$

$$K_0 = B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \quad (3.68)$$

$$r = \frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \quad (3.69)$$

$$B_1 = F_r B_{1v} + (1 - F_r) B_{1h} \quad (3.70)$$

$$B_{1(v,h)} = \min(0.8, A_{1(v,h)}) \quad (3.71)$$

$$A_{1(v,h)} = \frac{1}{1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)} \quad (3.72)$$

$$Re_v = \begin{cases} Re_g & \text{para } Re_g > Re_l \\ Re_l & \text{para } Re_g < Re_l \end{cases} \quad (3.73)$$

$$Re_h = \begin{cases} |Re_g| & \text{para } |Re_g| > |Re_l| \\ |Re_l| & \text{para } |Re_g| < |Re_l| \end{cases} \quad (3.74)$$

$$U_d = 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \quad (3.75)$$

onde σ é a tensão superficial e:

$$C_1 = (1 - \alpha)^{B_1} \quad (3.76)$$

$$\text{Para } (\rho_l/\rho_g) \leq 18 : C_2 = 0.4757 \left[\ln \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right) \right]^{0.7} \quad (3.77)$$

$$\text{Para } (\rho_f/\rho_g) > 18 : \begin{cases} \text{if } C_5 \geq 1, & C_2 = 1 \\ \text{if } C_5 < 1, & C_2 = 1 - \exp \left(\frac{-C_5}{1 - C_5} \right) \end{cases} \quad (3.78)$$

$$C_5 = \sqrt{\frac{150}{(\rho_l/\rho_g)}} \quad (3.79)$$

$$C_3 = F_r C_{3v} + (1 - F_r) C_{3h} \quad (3.80)$$

$$C_{3v} = \max [0.5, 2 \exp (-Re_l/300000)] \quad (3.81)$$

$$C_{3h} = \max (0.125, 0.5 \exp (-Re_l/300000)) \quad (3.82)$$

$$C_4 = \begin{cases} 1 & \text{for } C_7 \geq 1 \\ \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{C_7}{1 - C_7}\right)} & \text{for } C_7 < 1 \end{cases} \quad (3.83)$$

$$C_7 = \left(\frac{0.09144}{D}\right)^{0.6} \quad (3.84)$$

No Apêndice D.3 e D.4 a correlação é apresentada de maneira completa.

3.4.1.2 Queda de pressão por atrito

Neste texto, para o escoamento intermitente, adota-se a correlação de (MÜLLER-STEINHAGEN; HECK, 1986) para o multiplicador de duas fases:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{G_c (1 - x)^{1/3} + Bx^3}{A} \quad (3.85)$$

onde,

$$G_c = A + 2(B - A)x \quad (3.86)$$

$$A = \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_{Af0} = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.87)$$

$$B = \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_{Ag0} = \frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \quad (3.88)$$

O fator de atrito de Darcy pode ser calculado para ambas as fases como:

$$f_{l,g} = \frac{64}{Re_{l,g}} \quad \text{para } Re_{l,g} \leq 1187 \quad (3.89)$$

Ou

$$f_{l,g} = \frac{0.3164}{Re_{l,g}^{0.25}} \quad \text{para } Re_{l,g} > 1187 \quad (3.90)$$

onde,

$$Re_{l,g} = \frac{G D}{\mu_{l,g}} \quad (3.91)$$

A correlação de (MÜLLER-STEINHAGEN; HECK, 1986) mostrou-se ter o menor desvio médio quando comparada a outras correlações segundo os trabalhos de (NAKLA; ALSURAKJI,

Figura 3.6: Definição de variáveis no escoamento estratificado.

2013; EDVARSEN, 2015) e nas simulações realizadas para este texto.

3.4.2 Escoamento estratificado

Baseado na Fig. 3.6 e na abordagem de (TAITEL; DUKLER, 1976), pode-se escrever as equações de momento para a fase líquida e para a fase gasosa. Combinando as duas relações, resulta nas equações que determinam a fração de vazio e a queda de pressão por atrito para o escoamento estratificado.

3.4.2.1 Fração de vazio

A fração de vazio para o escoamento estratificado pode ser obtido resolvendo implicitamente:

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta = 0 \quad (3.92)$$

onde,

$$\tau_{wg} = \frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \quad (3.93)$$

$$\tau_{wl} = \frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (3.94)$$

$$\tau_i = \frac{1}{8} \rho_g f_i \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left| \frac{j_g}{\alpha} - u_i \right| \quad (3.95)$$

O termos f_g , f_l são os fatores de atrito de Darcy para a fase gasosa e para fase líquida, respectivamente, calculados a partir de [Chen \(1979\)](#) e u_i é a velocidade média na interface gás-líquido que é estimada como:

$$u_i = \frac{\varepsilon j_l}{1 - \alpha} \quad (3.96)$$

onde $\varepsilon = 1.8$ se $Re_l \leq 2000$ e $\varepsilon = 1$ se $Re_l > 2200$. O fator de atrito na interface f_i , como em [Baliño \(2008\)](#), é admitido constante e $f_i = 0.0142$. De maneira simplificada escreve-se:

$$f_{g,l} = f_{g,l}(Re_{g,l}, D_{g,l}) \quad (3.97)$$

onde $Re_{g,l}$ e $D_{g,l}$ se referem ao número de Reynolds e ao diâmetro hidráulico de cada fase. Pode-se escrever:

$$Re_g = \frac{\rho_g D_g |j_g|}{\mu_g \alpha} \quad (3.98)$$

$$Re_l = \frac{\rho_l D_l |j_l|}{\mu_l (1 - \alpha)} \quad (3.99)$$

$$D_g = \frac{4 \alpha A}{S_g + S_i} \quad (3.100)$$

$$D_l = \frac{4 (1 - \alpha) A}{S_l} \quad (3.101)$$

Os perímetros molhados S_g , S_l e S_i podem ser calculados como:

$$S_g = (1 - \gamma) \pi D \quad (3.102)$$

$$S_l = \gamma \pi D \quad (3.103)$$

$$S_i = D \sin(\pi \gamma) \quad (3.104)$$

O parâmetro γ pode ser calculado implicitamente a partir de:

$$\alpha + \gamma - \frac{\sin(2\pi\gamma)}{2\pi} - 1 = 0 \quad (3.105)$$

O Apêndice [E](#) detalha a dedução as equações para o cálculo da fração de vazio para o escoamento estratificado.

3.4.2.2 Queda de pressão por atrito

A queda de pressão por atrito para o escoamento estratificado pode ser calculado a partir do multiplicador de atrito multifásico:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{\rho_l}{\pi D G^2} \left[\frac{f_g S_g \rho_g j_g^2}{f_l \alpha^2} + \frac{S_l \rho_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \right] \quad (3.106)$$

O Apêndice E apresenta a dedução da equação do multiplicador.

3.5 Estado estacionário

O estado estacionário, quando estável, é o regime permanente operacional do escoamento. Ele é usado como condição inicial para simulações transientes e também como solução base para a análise de estabilidade linear.

O estado estacionário pode ser obtido desconsiderando-se as derivadas temporais nas equações de governo do sistema. As variáveis no estado estacionário são denotadas pelo sobrescrito $\sim$. É importante ressaltar que o estado estacionário só existe quando não há comprimento de penetração de líquido no *pipeline* e $s_u = s_t$ no *riser*, onde s_u é o nível da coluna de líquido e s_t é a posição no topo da tubulação (BALIÑO, 2008).

Combinando as Eqs. (3.1) e (3.2), as condições de acoplamento Eqs. (3.46) a (3.47) e a condição de descontinuidade, Eq. (3.40), resulta em:

$$\tilde{j}_l = j_{l0} \quad (3.107)$$

$$\tilde{j}_g = \begin{cases} \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}} j_{g0} & \text{for } s < s_l \\ \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}} (j_{g0} + j_{g0l}) & \text{for } s > s_l \end{cases} \quad (3.108)$$

A fração de vazio e o multiplicador de duas fases podem ser calculados respectivamente, em regime permanente, a partir das Eq. (3.13) e (3.12) como:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\tilde{j}_g, \tilde{j}_l, \tilde{P}, \theta) \quad (3.109)$$

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\tilde{j}_g, \tilde{j}_l, \tilde{P}, \theta) \quad (3.110)$$

A distribuição de pressão pode ser calculada pela integração numérica da Eq. (3.3), já que todos os termos são função da pressão e a inclinação local é função da posição. A pressão para o estado estacionário satisfaz:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} = -\tilde{\rho}_m g \sin \theta - \frac{1}{2} \tilde{\phi}^2 \frac{\tilde{f}_l \tilde{G}^2}{\rho_l D} \quad (3.111)$$

3.5.1 Injeção de gás

As relações estacionárias correspondentes à injeção de gás (Eq. (3.40) e (3.41)) são:

$$\tilde{j}_g^+ = \tilde{j}_g^- + \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_l} \tilde{j}_{g0l} \quad (3.112)$$

$$\tilde{\alpha}^+ = \tilde{\alpha}^+(\tilde{j}_g^+, \tilde{j}_l, \tilde{P}, \theta) \quad (3.113)$$

3.5.2 Válvula de *choke*

Como $\tilde{j}_t > 0$, as relações estacionárias correspondentes à válvula de *choke* (modelo homogêneo), Eq. (3.43) e (3.44), são escritas como:

$$\tilde{P}_t - P_s = \frac{1}{2} K_v \tilde{\rho}_{mt} \tilde{j}_t^2 \quad (3.114)$$

$$\tilde{\rho}_{mt} = \tilde{\alpha}_t \frac{\tilde{P}_t}{R_g T_g} + (1 - \tilde{\alpha}_t) \rho_l \quad (3.115)$$

Para o modelo de válvula usado em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996) a Eq. (3.45) resulta em:

$$\tilde{P}_t - P_s = C \tilde{j}_{lt}^2 \quad (3.116)$$

3.5.3 Acoplamento entre subsistemas

O estado estacionário correspondente às Eqs. (3.46) e (3.48) pode ser escrito como:

$$\tilde{j}_g^-(s=0) = \tilde{j}_{gb} \quad (3.117)$$

$$\tilde{j}_l(s=0) = \tilde{j}_{lb} \quad (3.118)$$

$$\tilde{P}(s=0) = \tilde{P}_b \quad (3.119)$$

3.6 Equações de perturbação

O primeiro passo na análise de estabilidade linear é introduzir uma pequena perturbação nas equações de governo do sistema. Em seguida, as equações são linearizadas em torno do estado estacionário. As variáveis envolvidas na dinâmica do sistema são escritas em termos do estado estacionário mais uma perturbação (termos de perturbação são indicados pelo sobre-escrito $\hat{\cdot}$):

$$j_g = \tilde{j}_g(s) + \hat{j}_g(s, t) \quad (3.120)$$

$$j_l = \tilde{j}_l(s) + \hat{j}_l(s, t) \quad (3.121)$$

$$P = \tilde{P}(s) + \hat{P}(s, t) \quad (3.122)$$

As equações diferenciais para o vetor de perturbação das variáveis de estado são escritas em função dos elementos da representação matricial das equações dinâmicas (Seção 3.1.1) como:

$$\tilde{A}\{\hat{v}\} + \tilde{B}\left\{\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right\} + \tilde{C}\left\{\frac{\partial \hat{v}}{\partial s}\right\} = 0 \quad (3.123)$$

onde:

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \hat{j}_g \\ \hat{j}_l \\ \hat{P} \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_k \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^\sim \quad (3.125)$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij})^\sim \quad (3.126)$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij})^\sim \quad (3.127)$$

O sobre-escrito $\sim$ indica uma avaliação na condição estacionária. Os parâmetros do sistema matricial da Eq. (3.123) podem ser escritos como:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{21} & 0 & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

$$\tilde{A}_{21} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \quad (3.129)$$

$$\tilde{A}_{23} = \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} \quad (3.130)$$

$$\tilde{A}_{31} = g \sin \theta \frac{\partial \tilde{\rho}_m}{\partial \tilde{j}_g} + \frac{1}{2 \rho_l D} \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_g} \left(\tilde{\phi}_{f0}^2 \tilde{f}_l \tilde{G}^2 \right) \quad (3.131)$$

$$\tilde{A}_{32} = g \sin \theta \frac{\partial \tilde{\rho}_m}{\partial \tilde{j}_l} + \frac{1}{2 \rho_l D} \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_l} \left(\tilde{\phi}_{f0}^2 \tilde{f}_l \tilde{G}^2 \right) \quad (3.132)$$

$$\tilde{A}_{33} = g \sin \theta \frac{\partial \tilde{\rho}_m}{\partial \tilde{P}} + \frac{1}{2 \rho_l D} \frac{\partial}{\partial \tilde{P}} \left(\tilde{\phi}_{f0}^2 \tilde{f}_l \tilde{G}^2 \right) \quad (3.133)$$

$$\underline{\tilde{B}} = \begin{Bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (3.134)$$

$$\tilde{B}_{11} = -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{j}_g} \quad (3.135)$$

$$\tilde{B}_{12} = -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{j}_l} \quad (3.136)$$

$$\tilde{B}_{13} = -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{P}} \quad (3.137)$$

$$\tilde{B}_{23} = \tilde{\alpha} \quad (3.138)$$

$$\underline{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

$$\tilde{C}_{12} = \tilde{C}_{33} = 1 \quad (3.140)$$

$$\tilde{C}_{21} = \tilde{C}_{22} = \tilde{P} \quad (3.141)$$

$$\tilde{C}_{23} = \tilde{j}_g \quad (3.142)$$

Os parâmetros das matrizes $\underline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{B}}$ e $\underline{\tilde{C}}$ são deduzidos no Apêndice C.

3.6.1 Injeção de gás

A equação linearizada da perturbação para a injeção de gás pode ser escrita como:

$$\hat{j}_g^+ = \hat{j}_g^- + C_{pl} \hat{P}_l \quad (3.143)$$

onde:

$$C_{pl} = -\frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_l^2} j_{g0l} \quad (3.144)$$

3.6.2 Válvula de *choke*

A equação linearizada para válvula de *choke* no topo do *riser* pode ser escrita como:

$$C_{gt} \hat{j}_{gt} + C_{lt} \hat{j}_{lt} + C_{pt} \hat{P}_t = 0 \quad (3.145)$$

Para a válvula com modelo homogêneo, os coeficientes são:

$$C_{gt} = \frac{1}{2} K_v \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_{gt}} (\tilde{\rho}_{mt} \tilde{j}_t^2) \quad (3.146)$$

$$C_{lt} = \frac{1}{2} K_v \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_{lt}} (\tilde{\rho}_{mt} \tilde{j}_t^2) \quad (3.147)$$

$$C_{pt} = \frac{1}{2} K_v \tilde{j}_t^2 \frac{\partial \tilde{\rho}_{mt}}{\partial \tilde{P}_t} - 1 \quad (3.148)$$

Para o modelo de válvula usado em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996) os coeficientes são:

$$C_{gt} = 0 \quad (3.149)$$

$$C_{lt} = 2 C \tilde{j}_{lt} \quad (3.150)$$

$$C_{pt} = -1 \quad (3.151)$$

3.6.3 Modelo simplificado - *Pipeline* e reservatório *buffer*

Considerando as Eqs. (3.28) e (3.29), a equação de continuidade da perturbação para o líquido no *pipeline* pode ser escrita como:

$$\frac{d\hat{\alpha}_p}{dt} - \frac{\hat{j}_{lb}}{L} = 0 \quad (3.152)$$

No qual,

$$\frac{d\hat{\alpha}_p}{dt} = \frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{j}_{gb}} \frac{d\hat{j}_{gb}}{dt} + \frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{j}_{lb}} \frac{d\hat{j}_{lb}}{dt} + \frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{P}_b} \frac{d\hat{P}_b}{dt} \quad (3.153)$$

Portanto, de maneira simplificada, tem-se

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{j}_{gb}} \frac{d\hat{j}_{gb}}{dt} + \frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{j}_{lb}} \frac{d\hat{j}_{lb}}{dt} + \frac{\partial \tilde{\alpha}_p}{\partial \tilde{P}_b} \frac{d\hat{P}_b}{dt} - \frac{\hat{j}_{lb}}{L} = 0 \quad (3.154)$$

A equação de continuidade da perturbação para o gás no *pipeline* resulta em:

$$\frac{d\hat{P}_b}{dt} + C_{gb} \hat{j}_{gb} + C_{lb} \hat{j}_{lb} + C_{pb} \hat{P}_b = 0 \quad (3.155)$$

onde

$$C_{gb} = \frac{\tilde{P}_b}{L\alpha_p + L_e} \quad (3.156)$$

$$C_{lb} = \frac{\tilde{P}_b}{L\alpha_p + L_e} \quad (3.157)$$

$$C_{pb} = \frac{j_{g0}}{L\alpha_p + L_e} \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_b} \quad (3.158)$$

3.6.3.1 Pipeline com fração de vazio constante

Considerando a modelagem no qual a variação de fração de vazio com relação ao tempo é desprezada, Eq. (3.34) e (3.35), as equações de perturbação para o *pipeline* resultam em:

$$\hat{j}_{lb} = 0 \quad (3.159)$$

$$\frac{d\hat{P}_b}{dt} + C_{gb} \hat{j}_{gb} + C_{pb} \hat{P}_b = 0 \quad (3.160)$$

onde:

$$C_{gb} = \frac{\tilde{P}_b}{L\alpha_p + L_e} \quad (3.161)$$

$$C_{pb} = \frac{j_{g0}}{L\alpha_p + L_e} \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_b} \quad (3.162)$$

3.6.4 Modelo generalizado - Reservatório *buffer*

Considerando a modelagem para o comprimento equivalente de *buffer*, Eqs. (3.36) e (3.39), as equações de perturbação resultam em:

$$\hat{j}_{lb} = 0 \quad (3.163)$$

$$C_{tgb} \frac{d\hat{P}_b}{dt} + C_{gb} \hat{j}_{gb} + C_{pb} \hat{P}_b = 0 \quad (3.164)$$

onde:

$$C_{tgb} = L_e \quad (3.165)$$

$$C_{gb} = \tilde{P}_b \quad (3.166)$$

$$C_{pb} = j_{g0} \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_b} \quad (3.167)$$

3.6.5 Acoplamento entre subsistemas

As relações de perturbação correspondentes às Eqs. (3.46) a Eq. (3.48) podem ser escritas como:

$$\hat{j}_g(s=0) = \hat{j}_{gb} \quad (3.168)$$

$$\hat{j}_l(s=0) = \hat{j}_{lb} = 0 \quad (3.169)$$

$$\hat{P}(s=0) = \hat{P}_b \quad (3.170)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste Capítulo apresenta-se a abordagem matemática para se discretizar as equações de governo das perturbações, o critério de estabilidade e sua implementação numérica para avaliar a estabilidade do estado estacionário, definido pela solução do problema de autovalores/autovetores generalizado e a implementação numérica para a construção dos mapas de estabilidade.

4.1 Equações discretizadas

O comprimento da tubulação é dividido em N_i intervalos. Cada um desses intervalos tem uma única inclinação, exceto para o caso de *riser* em catenária. O comprimento de cada intervalo é discretizado em N_t nós e a Eq. (3.123) é integrada no intervalo $s_i \leq s \leq s_{i+1}$. O número total de nós no problema é $N = N_t \times N_i$.

Nesta abordagem dois tipos de nós são definidos, como mostrado na Fig. 4.1: O primeiro, no interior de cada intervalo, onde a inclinação local é contínua entre o nó e seus nós adjacentes; o segundo, nas extremidades de cada intervalo, onde pode ocorrer uma descontinuidade na inclinação local. Nesta segunda situação, condições de continuidade são impostas entre variáveis de estado para o par de nós.

Valores representativos para qualquer função ϕ no intervalo de integração são funções calculadas a partir da média entre os nós adjacentes:

$$\phi(\tilde{v}) = \phi_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} [\phi(\tilde{v}_i) + \phi(\tilde{v}_{i+1})] \quad (4.1)$$

Valores representativos das variáveis de perturbação, assim como a derivada espacial e a derivada temporal são calculadas, respectivamente, como:

$$\hat{v}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right)_{i+1/2} \simeq \frac{\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i}{\Delta s_i} \quad (4.3)$$

Figura 4.1: Definição dos nós para discretização.

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{v}_i}{dt} + \frac{d\hat{v}_{i+1}}{dt}\right) \quad (4.4)$$

onde $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$. O seguinte conjunto de equações é obtido:

$$\underline{G} \left\{ \frac{d\hat{v}}{dt} \right\} + \underline{H} \{\hat{v}\} = 0 \quad (4.5)$$

onde:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \underline{G_{11}} & \underline{G_{12}} & \underline{G_{13}} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{G_{23}} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{H_{12}} & \underline{0} \\ \underline{H_{21}} & \underline{H_{22}} & \underline{H_{23}} \\ \underline{H_{31}} & \underline{H_{32}} & \underline{H_{33}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Na Eq. (4.5), $\underline{G}$ e $\underline{H}$ são matrizes retangulares esparsas com dimensão $[3 \times N_i \times (N_t - 1)] \times 3N$, enquanto que $\underline{\hat{v}}$ é o vetor com os valores nodais das variáveis perturbadas ($3N$ componentes) definidos como:

$$\{\underline{\hat{v}}\}_j = \begin{cases} \hat{J}_{gj} & \text{para } 1 \leq j \leq N \\ \hat{J}_{l_{j-N}} & \text{para } N+1 \leq j \leq 2N \\ \hat{P}_{j-2N} & \text{para } 2N+1 \leq j \leq 3N \end{cases} \quad (4.8)$$

As matrizes definidas nas Eqs. (4.6) e (4.7) são matrizes retangulares com dimensão $(N_t - 1) \times N$, com os seguintes elementos diferentes de zero:

$$\{G_{11}\}_{i,i} = \{G_{11}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{B}_{11} \right\}_{i+1/2} \quad (4.9)$$

$$\{G_{12}\}_{i,i} = \{G_{12}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{B}_{12} \right\}_{i+1/2} \quad (4.10)$$

$$\{G_{13}\}_{i,i} = \{G_{13}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{B}_{13} \right\}_{i+1/2} \quad (4.11)$$

$$\{G_{23}\}_{i,i} = \{G_{23}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{B}_{23} \right\}_{i+1/2} \quad (4.12)$$

$$\{H_{12}\}_{i,i} = -\{H_{12}\}_{i,i+1} = -\frac{\left\{ \tilde{C}_{12} \right\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.13)$$

$$\{H_{21}\}_{i,i} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{A}_{21} \right\}_{i+1/2} - \frac{\left\{ \tilde{C}_{21} \right\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.14)$$

$$\{H_{21}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{A}_{21} \right\}_{i+1/2} + \frac{\left\{ \tilde{C}_{21} \right\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.15)$$

$$\{H_{22}\}_{i,i} = -\{H_{22}\}_{i,i+1} = \frac{\{\tilde{C}_{22}\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.16)$$

$$\{H_{23}\}_{i,i} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{23}\}_{i+1/2} - \frac{\{\tilde{C}_{23}\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.17)$$

$$\{H_{23}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{23}\}_{i+1/2} + \frac{\{\tilde{C}_{23}\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.18)$$

$$\{H_{31}\}_{i,i} = \{H_{31}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{31}\}_{i+1/2} \quad (4.19)$$

$$\{H_{32}\}_{i,i} = \{H_{32}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{32}\}_{i+1/2} \quad (4.20)$$

$$\{H_{33}\}_{i,i} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{33}\}_{i+1/2} - \frac{\{\tilde{C}_{33}\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.21)$$

$$\{H_{33}\}_{i,i+1} = \frac{1}{2} \{\tilde{A}_{33}\}_{i+1/2} + \frac{\{\tilde{C}_{33}\}_{i+1/2}}{\Delta s_i} \quad (4.22)$$

4.1.1 Modelo simplificado

O modelo simplificado considera apenas um trecho para discretização: neste caso apenas o trecho ascendente ou *riser* e, portanto, $N_i = 1$. Para fechar o sistema de equações da modelagem simplificada, é necessário considerar mais três relações adicionais, correspondentes às relações de condição de contorno. A partir da Eq. (3.169), obtém-se:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \quad (4.23)$$

Considerando injeção de gás na base do *riser* ($s_l = 0$), as Eqs. (3.155), (3.143) e (3.168) fornecem:

$$\frac{d\hat{P}_1}{dt} + C_{g1}\hat{j}_{g1} + C_{p1}\hat{P}_1 = 0 \quad (4.24)$$

onde:

$$C_{g1} = C_{gb} \quad (4.25)$$

$$C_{p1} = C_{pb} - C_{gb} C_{pl} = \frac{j_{g0} + j_{g0l}}{L\alpha_p + L_e} \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_1} \quad (4.26)$$

Finalmente, considerando a válvula de *choke* no topo do *riser*, a Eq. (3.159) fornece:

$$C_{gN} \hat{j}_{gN} + C_{lN} \hat{j}_{lN} + \hat{P}_N = 0 \quad (4.27)$$

onde:

$$C_{gN} = \frac{C_{gt}}{C_{pt}} \quad (4.28)$$

$$C_{lN} = \frac{C_{lt}}{C_{pt}} \quad (4.29)$$

As matrizes quadradas $\underline{G}^*$ e $\underline{H}^*$ (dimensão $3N \times 3N$) são definidas como as matrizes $\underline{G}$ e $\underline{H}$ ampliadas com as condições de contorno das Eqs. (4.40), (4.41) e (4.45), o que resulta em:

$$\{H^*\}_{3N-2, N+1} = 1 \quad (4.30)$$

$$\{G^*\}_{3N-1, 2N+1} = 1 \quad (4.31)$$

$$\{H^*\}_{3N-1, 1} = C_{g1} \quad (4.32)$$

$$\{H^*\}_{3N-1, 2N+1} = C_{p1} \quad (4.33)$$

$$\{H^*\}_{3N, N} = C_{gN} \quad (4.34)$$

$$\{H^*\}_{3N, 2N} = C_{lN} \quad (4.35)$$

$$\{H^*\}_{3N, 3N} = 1 \quad (4.36)$$

4.1.2 Modelo generalizado

Para fechar o sistema de equações do modelo generalizado, é necessário considerar três relações adicionais, correspondentes às relações de condição de contorno, e $3 \times (N_i - 1)$ relações de continuidade entre os intervalos. Para as relações de continuidade, escreve-se:

$$\hat{j}_{g \ k \times N_t} = \hat{j}_{g \ k \times N_t + 1} \quad (4.37)$$

$$\hat{j}_{l \ k \times N_t} = \hat{j}_{l \ k \times N_t + 1} \quad (4.38)$$

$$\hat{P}_{k \times N_t} = \hat{P}_{k \times N_t + 1} \quad (4.39)$$

onde $1 \leq k \leq N_i - 1$. É importante ressaltar que o número de nós N_t de cada intervalo pode

variar. Neste texto, adota-se o mesmo número N_t de nós para cada intervalo.

A partir da Eq. (3.169), obtém-se:

$$\hat{j}_{l1} = 0 \quad (4.40)$$

Considerando injeção de gás na entrada da tubulação ($s_l = 0$), as Eqs. (3.164), (3.143), (3.170) e (3.168) fornecem:

$$C_{tg1} \frac{d\hat{P}_1}{dt} + C_{g1} \hat{j}_{g1} + C_{p1} \hat{P}_1 = 0 \quad (4.41)$$

onde:

$$C_{tg1} = C_{tgb} \quad (4.42)$$

$$C_{g1} = C_{gb} \quad (4.43)$$

$$C_{p1} = C_{pb} - C_{gb} C_{pl} = (j_{g0} + j_{g0l}) \frac{T_g}{T_0} \frac{P_0}{\tilde{P}_1} \quad (4.44)$$

Finalmente, considerando a válvula de *choke* no topo da tubulação, a Eq. (3.159) fornece:

$$C_{gN} \hat{j}_{gN} + C_{lN} \hat{j}_{lN} + \hat{P}_N = 0 \quad (4.45)$$

onde:

$$C_{gN} = \frac{C_{gt}}{C_{pt}} \quad (4.46)$$

$$C_{lN} = \frac{C_{lt}}{C_{pt}} \quad (4.47)$$

As matrizes quadradas $\underline{G}^*$ e $\underline{H}^*$ (dimensão $3N \times 3N$) são definidas como as matrizes $\underline{G}$ e $\underline{H}$ ampliadas com as condições de contorno das Eqs. (4.40), (4.41) e (4.45), o que resulta em:

$$\{H^*\}_{3N-2, N+1} = 1 \quad (4.48)$$

$$\{G^*\}_{3N-1, 2N+1} = C_{tg1} \quad (4.49)$$

$$\{H^*\}_{3N-1, 1} = C_{g1} \quad (4.50)$$

$$\{H^*\}_{3N-1, 2N+1} = C_{p1} \quad (4.51)$$

$$\{H^*\}_{3N, N} = C_{gN} \quad (4.52)$$

$$\{H^*\}_{3N, 2N} = C_{lN} \quad (4.53)$$

$$\{H^*\}_{3N, 3N} = 1 \quad (4.54)$$

E para as condições de continuidade Eqs.(4.37) a (4.39), escreve-se:

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+1, N_i} = 1 \quad (4.55)$$

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+1, N_i+1} = -1 \quad (4.56)$$

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+2, N+N_i} = 1 \quad (4.57)$$

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+2, N+N_i+1} = -1 \quad (4.58)$$

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+3, 2N+N_i} = 1 \quad (4.59)$$

$$\{H^*\}_{3N_i(N_t-1)+3(k-1)+3, 2N+N_i+1} = -1 \quad (4.60)$$

onde $1 \leq k \leq N_i - 1$.

4.2 Espectro de autovalores e critério de estabilidade

Considerando o sistema de equações ampliado:

$$\underline{G}^* \left\{ \frac{\partial \underline{\hat{v}}}{\partial t} \right\} + \underline{H}^* \{ \underline{\hat{v}} \} = 0 \quad (4.61)$$

a seguinte transformação é aplicada ao sistema:

$$\{ \underline{\hat{v}} \} = \{ \underline{\hat{r}} \} \exp(\lambda t) \quad (4.62)$$

onde λ é o conjunto de autovalores e $\underline{\hat{r}}$ são os autovetores associados. A partir das Eqs. (4.61) e (4.62) resulta:

$$(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) \{ \underline{\hat{r}} \} = 0 \quad (4.63)$$

A transformação apresentada na Eq. (4.62) reduz a Eq. (4.61) a um problema de autovalores/autovetores generalizado. Assim, a Eq. (4.63) só apresenta solução não-trivial quando λ satisfaz o polinômio característico:

$$\det(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) = 0 \quad (4.64)$$

Para o modelo apresentado no Capítulo 3, a matriz $\underline{G}^*$ é singular e, portanto, a dimensão do espectro de autovalores a ser considerado é igual ao posto da matriz $\underline{G}^*$.

A estabilidade do estado estacionário obtida na Seção 3.5 é dada pelo comportamento da parte real dos autovalores da Eq. (4.63). Se a parte real de todos os autovalores for negativa, o estado estacionário é estável; se pelo menos um autovalor tiver parte real positiva, o estado

estacionário é instável. Esta definição é o critério de estabilidade adotado neste texto.

Consequentemente, pode-se construir a curva de estabilidade neutra que é definida como uma hiper-superfície no espaço de parâmetros do sistema onde a parte real do autovalor menos estável é zero. A curva de estabilidade é a fronteira entre a região instável e a região estável.

4.3 Procedimento numérico

O procedimento numérico é separado em duas partes: a primeira consiste em se determinar a estabilidade de um determinado estado estacionário. A segunda consiste de, utilizando o comportamento estável/instável de diversos estados estacionários, obter a curva de estabilidade de neutra, ou fronteira de estabilidade, que separa a região estável da região instável no espaço de parâmetros no plano das velocidades superficiais.

Primeiramente, apresenta-se a análise de estabilidade para um estado estacionário. Em seguida, este resultado é incorporado à rotina que constrói a curva de estabilidade.

4.3.1 Estabilidade do estado estacionário

A rotina que determina comportamento estável/instável do estado estacionário, quando chamada no corpo principal do código, devolve a informação de estabilidade (0-instável) e (1-estável).

Inicialmente, são definidas as condições gerais do escoamento: temperatura T_0 e pressão P_0 de referência, massa específica do líquido ρ_l , viscosidade do gás μ_g , viscosidade do líquido μ_l , constante do gás R_g e a aceleração da gravidade g .

São definidas as propriedades gerais para a construção da curva: velocidades superficiais de referência de gás e de líquido, j_{g0} e j_{l0} , precisão do cálculo e o fator de sub-relaxamento.

Definem-se as propriedades geométricas: diâmetro interno da tubulação D , rugosidade ϵ e número de intervalos da geometria N_i . Em uma tabela com N_i linhas define-se: número de nós de cada intervalo, tipo de intervalo (reto ou catenária), a inclinação local (se catenária: abscissa X_r) e comprimento do intervalo (se catenária: altura Z_r).

Em seguida, são definidas as condições de contorno: comprimento equivalente de *buffer* L_e , pressão de separador P_s , velocidade superficial de gás injetado j_{glo} , constante da válvula de *choke* K_v ou C_j , tipo de correlação de deriva por tipo de padrão (Bendiksen, Chexal, Bghawat

ou Teoria de Equilíbrio local) e tipo de correlação para o multiplicador multifásico por padrão (Mistura homogênea, Muller, Friedel ou Teoria de Equilíbrio local)

Com todos os parâmetros definidos, determina-se a geometria da tubulação: a coordenada de posição s e a inclinação local θ , ambas determinadas para cada nó.

Com as propriedades geométricas e as condições do escoamento definidas, realiza-se o cálculo do estado estacionário com base nas equações da Seção 3.5.

Inicia-se o cálculo a partir do topo da tubulação, onde é conhecida a pressão no separador (pressão no nó N , P_N). Caso seja considerado uma válvula no topo, utiliza-se as Eqs. (3.114) e (3.116) para se determinar P_N .

Em sequência, com os valores de $\dot{m}_{g0}$ e Q_{l0} define-se $\tilde{j}_{gN}$ e $\tilde{j}_{lN}$ e avalia-se em função da inclinação local o padrão de escoamento a partir da Eq. (3.61). Com o padrão definido no nó N , define-se as correlações de fração de vazio e de multiplicador multifásico, consequentemente, calcula-se $\tilde{\alpha}_N$.

O seguinte algoritmo é adotado para o cálculo a partir do nó $N - 1$:

- Para cada intervalo de N_i , iniciando em $j = N_i$ até $j = 1$, tem-se:
 - Para cada nó de N_i , iniciando de $i = N_t$ até $i = 1$, tem-se:
 - * Dá-se uma estimativa inicial de $\tilde{P}_i = \tilde{P}_{i+1}$, onde $\tilde{P}_{i+1}$ é a pressão anterior;
 - * Calcula-se $\tilde{j}_{gi}$, define-se o padrão de escoamento e calcula-se $\tilde{\alpha}_i$;
 - * Inicia-se um processo iterativo para determinar as variáveis no nó i até a convergência da pressão P_i :
 - Avalia-se uma nova pressão $P_{Predita}$ a partir da Eq. (3.111);
 - Calcule-se $\tilde{j}_{gi}$ a partir da nova pressão $P_{Predita}$;
 - Calcula-se $\tilde{\alpha}_i$;
 - Avalia-se a convergência da P_i :

$$Erro = |\tilde{P}_i - P_{Predita}| / \tilde{P}_i \quad (4.65)$$
 - Se a pressão convergir, se o parâmetro $Erro$ for menor do que o valor de convergência, segue-se ao próximo nó; caso contrário, a iteração é reiniciada;
 - Define-se a pressão $\tilde{P}_i$ sub-relaxando a pressão $P_{Predita}$;
 - * Após a convergência da pressão no nó i , define-se o padrão de escoamento para o nó $i - 1$ e reinicia-se o procedimento para o nó $i - 1$;

- Após o cálculo do estado estacionário no intervalo, aplica-se a condição de continuidade entre intervalos, se $j > 1$, e reinicia-se o *loop* no intervalo $N_i - 1$:

$$\tilde{P}_{N_t, \text{intervalo } j-1} = \tilde{P}_{1, \text{intervalo } j} \quad (4.66)$$

$$\tilde{J}_{gN_t, \text{intervalo } j-1} = \tilde{J}_{g1, \text{intervalo } j} \quad (4.67)$$

$$\tilde{J}_{lN_t, \text{intervalo } j-1} = \tilde{J}_{l1, \text{intervalo } j} \quad (4.68)$$

- Se e $j = 1$, o estado estacionário está definido.

São calculados os parâmetros das matrizes A, B e C , conforme Seção 3.6, e as matrizes G e H são construídas. Incluem-se as condições do contorno, da entrada e do topo da tubulação e condições de continuidade entre intervalos. As matrizes G e H são ampliadas para G^* e H^* e faz-se o cálculo dos autovalores.

Como a matriz G^* não tem posto cheio, despreza-se a parte não finita dos autovalores, referente às equações de conservação de momento, as relações de continuidade entre intervalos e as condições de contorno que não apresentam termos na matriz G . A quantidade de autovalores considerados para a análise de estabilidade é da ordem do posto da matriz G .

Se existir pelos menos um autovalor com parte real positiva no parte finita do espectro, o estado estacionário é instável. Caso contrário, o estado estacionário é estável.

O procedimento numérico para o cálculo dos autovalores foi implementado utilizando o software Matlab (MAGRAB et al., 2005). A sub-rotina EIGS foi utilizada para o cálculo dos autovalores. Ela é a implementação do código ARPACK, inicialmente desenvolvido em Fortran 77. As rotinas do ARPACK são um conjunto de rotinas baseadas em um variação do processo de Arnoldi chamado de Método do Reinício implícito Arnoldi/Lanczos (IRAM-*Implicitly Restarted Arnoldi/Lanczos Method*) (LEHOUCQ; SORENSEN; YANG, 1997).

4.3.2 Construção da curva de estabilidade

Em (BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013) uma grade fixa foi considerada no plano das velocidades superficiais, determinando-se as estabilidade para cada ponto da grade.

Neste texto, apresenta-se uma rotina que procura a curva de estabilidade, iniciando a busca por um ponto localizado na região superior (baixa velocidade de gás e alta velocidade de líquido). Adota-se um método de bisseção para se determinar, com a precisão desejada, a condição de estabilidade neutra ou fronteira de estabilidade.

Inicialmente, define-se um ponto, no plano de velocidades superficiais, tal que o estado estacionário seja instável, ponto $O (j_{g0}, j_{l0})$. O ponto O define a origem do plano usado para determinação da curva. Todo valor de velocidade superficial que for menor do que os valores de velocidade do ponto O é desprezado.

Aumenta-se velocidade superficial de líquido em um incremento Δj_l e define-se um novo ponto no plano, ponto $O' (j_{g0}, j_{l0} + \Delta j_l)$. Verifica-se a estabilidade deste ponto. Caso o mesmo seja instável, aumenta-se a velocidade de líquido no mesmo incremento e o procedimento é continuado até que se cruze a fronteira de estabilidade; se o ponto for estável, subtrai-se da velocidade de líquido um valor $\Delta j_l/2$.

A cada nova iteração em que a fronteira de estabilidade é cruzada, o valor incremental é reduzido pela metade e a operação de soma ou subtração é invertida. Dessa maneira, sucessivamente, após k iterações obtém-se o primeiro ponto sobre a curva de estabilidade, ponto $P_0 (j_{g0}, j_{l1})$, tal que $|(j_{lk} - j_{lk-1}) / j_{lk}|$ seja menor que a precisão desejada.

O ponto P_0 determina a origem da curva de estabilidade no plano e a partir dele os demais pontos serão determinados.

Com centro em P_0 e raio r_c , Fig. 4.2, define-se uma circunferência que cruza a fronteira de estabilidade. O objetivo deste passo é percorrer a circunferência e determinar o intervalo onde se encontra a intersecção da circunferência com a fronteira.

Define-se um ponto sobre a circunferência a partir do centro, ponto $P_i (j_{gi}, j_{li})$, tal que:

$$j_{gi} = j_{g0} + r_c \cos(\gamma + \phi i) \quad (4.69)$$

$$j_{li} = j_{l1} + r_c \sin(\gamma + \phi i) \quad (4.70)$$

onde ϕ é o incremento angular sobre a qual circunferência é percorrida e γ é o ângulo que a reta que passa pelos dois pontos anteriores da curva de estabilidade (P_0 e o anterior) faz com a horizontal. Neste caso, por definição, γ é zero, pois P_0 é o primeiro dos pontos. O índice i se refere ao ponto sobre a circunferência e é a partir de seu incremento que percorre-se a circunferência.

Dessa maneira, avalia-se a estabilidade de diversos pontos ao longo da circunferência, até que se encontre dois, nos quais a estabilidade altera-se entre eles, ou seja, procura-se dois pontos, P_i e P_{i+1} , tal que P_i seja estável e P_{i+1} seja instável.

O próximo ponto sobre a curva de estabilidade está a uma distância r_c do ponto P_0 e entre os ângulos Φ_- ($\Phi_- = \gamma + \phi i$) e Φ_+ ($\Phi_+ = \gamma + \phi(i + 1)$) com relação à reta que passa

Figura 4.2: Procedimento numérico.

pelo ponto P_0 e a horizontal.

Com base nos ângulos Φ_- e Φ_+ , utiliza-se o método da bissetção para encontrar, com a precisão desejada, a intersecção, ou seja, o ponto sobre a curva de estabilidade. Primeiramente, determina-se o ângulo Φ_m , tal que:

$$\Phi_m = \frac{\Phi_- + \Phi_+}{2} \quad (4.71)$$

e dentro do intervalo, calcula-se o ponto $P_m (j_{gm}, j_{lm})$ tal que:

$$j_{gm} = j_{g0} + r_c \sin \Phi_m \quad (4.72)$$

$$j_{lm} = j_{l1} + r_c \cos \Phi_m \quad (4.73)$$

Com as velocidades superficiais determinadas, avalia-se a estabilidade do estado estacionário correspondente. Se for estável, então:

$$\Phi_- = \Phi_m \quad (4.74)$$

Caso contrário,

$$\Phi_+ = \Phi_m \quad (4.75)$$

e calcula-se Φ_m novamente. Repete-se todo o processo até que seja obtido o ponto correspondente a P_1 , tal que $|(\Phi_{m(j)} - \Phi_{m(j-1)}) / \Phi_{m(j)}|$ seja menor do que a precisão desejada.

Com o ponto P_1 calculado, determina-se a inclinação da reta que une os dois pontos anteriores da curva de estabilidade, pontos P_1 e o P_0 . Esta inclinação é utilizada na estimativa inicial do primeiro ponto sobre a circunferência para a próxima interação, ou seja, será adotado na determinação de P_2 . Com essa inclinação garante-se que a busca pela intersecção da circunferência com curva estabilidade se inicie sempre em uma próxima da curva de estabilidade, limitando o número de iterações.

Repete-se todo o procedimento para a determinação da curva de estabilidade. Quando se determinar um ponto da curva tal que $j_{li} < j_{lmin}$ ou $j_{gi} < j_{gmin}$, a rotina se encerra e a curva de estabilidade está determinada.

5 RESULTADOS

Neste Capítulo apresentam-se os resultados para duas as modelagens, simplificada e generalizada, comparações entre resultados obtidos para cada um dos modelos e validações com dados experimentais e numéricos de outras referências.

Nos gráficos apresentados nas próximas seções, as curvas contínuas representam os modelos de referência, as curvas tracejadas representam os resultados dos modelos propostos e os pontos representam dados experimentais para cada caso, o comportamento instável ou estável. Para efeito de simplificação, a curva ou fronteira de estabilidade neutra será chamada somente de curva de estabilidade.

5.1 Modelo simplificado

Nesta seção serão discutidos os resultados obtidos com o modelo simplificado para diversos casos investigados na literatura. O capítulo se inicia com uma análise de convergência do modelo e de malha; na sequência apresentam-se os resultados envolvendo os mecanismos de mitigação de intermitência para um *riser* vertical (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996); apresentam-se também os resultados para um *riser* em catenária (WORDSWORTH et al., 1998); em seguida são comparados as previsões com os resultados obtidos na bancada de escoamento multifásico POLI-USP (YAMAGUCHI, 2015); e, finalmente, apresentam-se os resultados obtidos para o *riser* vertical de (TAITEL, 1986). Nestas simulações, como já mencionado anteriormente, o modelo simplificado adota o trecho do *pipeline* com fração de vazio constante e modelado a parâmetros concentrados.

5.1.1 Análise de convergência

O primeiro estudo de convergência do modelo foi realizado considerando-se um comprimento equivalente de *buffer*, $L_e = 10\text{ m}$, e uma nodalização de $N = 50$. Para ilustrar o bom comportamento do espectro de autovalores, a análise de estabilidade foi feita fixando-se a velocidade

Tabela 5.1: Casos estudados para a análise de espectros ($j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$), parâmetros de (TAITEL, 1986).

Casos	Estado	$j_g(\text{m/s})$
Caso 1	Instável	0.3
Caso 2	Instável	0.4
Caso 3	Instável	0.5
Caso 4	Estável	0.6
Caso 5	Estável	0.7
Caso 6	Estável	0.8

superficial de líquido em $j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$ e gradualmente aumentou-se a velocidade superficial de gás de tal maneira que se cruzasse a curva de estabilidade. Os resultados se baseiam nos seis casos propostos na Tabela 5.1.

A Fig. 5.1 apresenta o comportamento dos autovalores na proximidade da condição de estabilidade. Observa-se que, com o aumento gradual da velocidade superficial de gás, a parte real do espectro com parte real positiva diminui e estes autovalores, eventualmente, cruzam o eixo imaginário em direção a parte do plano complexo com parte real negativa. A velocidade superficial de gás predita para a curva de estabilidade é $j_{g0} = 0.5997 \text{ m/s}$, para $j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$, e está em concordância com $j_{g0} = 0.6165 \text{ m/s}$, velocidade obtida através das simulações numérica no domínio do tempo apresentada em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

No segundo estudo de convergência, adotou-se um comprimento equivalente de *buffer* de $L_e = 1.69 \text{ m}$, para se estudar a influência da nodalização sobre a curva de estabilidade e número de nós suficiente para convergência. Foram construídos mapas para $N_t = 2, 3, 4, 20$ e 50 nós, como mostrado na Fig. 5.2.

Observa-se que para todas as nodalizações foi possível construir uma curva de estabilidade. Porém, para uma discretização grosseira ($N_t = 2$) apresenta-se um desvio muito significativo com relação ao resultado obtido para $N_t = 50$, utilizando o mesmo modelo do Capítulo 3, até mesmo para pequenos *risers*. Contudo, a curva de estabilidade obtida para $N_t = 2$ tem boa concordância com os resultado apresentados por (ZAKARIAN, 2000).

Observa-se que com o aumento da nodalização, os desvios diminuem e para $N_t = 20$ e $N_t = 50$ já não existe diferença visível entre as curvas. A nodalização de $N_t = 50$ é a mesma adotada em (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010). Com base nesses resultados, adota-se nas simulações $N_t = 20$, pois ela já suficiente para capturar os mapa de estabilidade com precisão.

Figura 5.1: Comportamento da parte real do espectro de autovalores no entorno da condição de estabilidade, parâmetros de (TAITEL, 1986).

Figura 5.2: Mapa de estabilidade para um *riser* vertical com diferentes nodalizações, parâmetros de (TAITEL, 1986).

5.1.2 Comparação com dados de (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996)

Em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996), a influência de uma válvula de *choke* e injeção de gás sobre a intermitência severa foram estudadas. Os dados experimentais foram gerados com o mesmo aparato experimental utilizado por (TAITEL, 1986), Tabela 5.5 apresentada na Seção 5.1.5, exceto pelos parâmetros presentes na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros para *riser* vertical (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996).

Definição	Parâmetro	Valor	Unidade
Comprimento de <i>buffer</i>	L_e	10	m
Inclinação do <i>pipeline</i>	β	1	grau
Parâmetro da válvula de <i>choke</i>	C	1.2×10^5	$Pa \cdot s^2/m^2$
Velocidade superficial de injeção de gás	j_{g0l}	9.10×10^{-2}	m/s

Na Fig. 5.3 apresentam-se os dados experimentais e curva de estabilidade considerando injeção de gás na base do *riser*, sem válvula de *choke* (despreza-se a queda de pressão na válvula). Observa-se que a injeção de gás tem um efeito estabilizador no sistema, contudo este efeito não é muito significativo como já havia sido discutido em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996). A curva de estabilidade está em concordância com essa observação.

Observa-se uma pequena redução de região instável na área do mapa com altas vazões de gás e baixas vazões de líquido. Enquanto que na região de altas vazões de líquido praticamente não há alteração. O modelo consegue prever o comportamento da influência da injeção de gás, mesmo que tal efeito seja pouco significativo sobre a estabilidade.

Nestas análises é desprezado o efeito dos mecanismos de mitigação sobre a amplitude da intermitência severa. Experimentalmente é esperado que o fenômeno, mesmo que não se estabilize, ao menos seja atenuado. Numericamente, a informação pode ser obtida através da análise de estabilidade não-linear e de simulações no domínio do tempo. Um sistema linear não seria capaz de capturar a intermitência severa, pois ela é um fenômeno intrinsecamente não-linear.

A Fig. 5.4 apresenta os dados experimentais e a curva de estabilidade na qual se considera uma válvula de *choke* no topo do *riser* e despreza-se a injeção de gás na base. Nesta simulação, o modelo homogêneo para a mistura é usado para modelar a perda de carga na válvula de *choke*.

O coeficiente equivalente da válvula, K_v , é definido de tal maneira que seja obtida a

Figura 5.3: Mapa de estabilidade para um *riser* vertical com injeção de gás na base do *riser*, parâmetros de (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996).

mesma condição de queda pressão na válvula, porém em uma situação que só há escoamento de líquido, como descrito na Seção 3.2.2. Obteve-se a seguinte relação:

$$K_v = \frac{C}{\rho_l} \quad (5.1)$$

Sob as condições do experimento de (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996), o coeficiente da válvula é $K_v = 120$. Pode-se observar que a válvula de *choke* tem um efeito estabilizador sobre o sistema. A curva de estabilidade tem boa concordância com os dados experimentais. Como referência, apresenta-se a curva de estabilidade sem válvula.

Pode-se observar que a válvula tem um efeito estabilizador sobre todo o mapa de estabilidade, justamente por ser função tanto da vazão de líquido quanto da vazão de gás. Tal observação não pode ser feita para a análise analítica apresentada em (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996), onde a perda de carga é função apenas da vazão de líquido, resultando, para região de baixa vazão de líquido, uma influência pouco significativa sobre a estabilidade.

Figura 5.4: Mapa de estabilidade para um *riser* vertical com válvula de *choke* no topo de *riser*, parâmetro de (JANSEN; SHOHAM; TAITEL, 1996) - Comparação com os dados experimentais e o efeito da válvula de *choke* sobre a curva de estabilidade.

5.1.3 Comparação com dados de (WORDSWORTH et al., 1998)

Em (WORDSWORTH et al., 1998) estudou-se a influência da pressão do separador como mitigador de intermitência severa, sobre o comportamento de um escoamento água-ar em um sistema *pipeline-riser* em geometria de catenária. Em particular, o início e a caracterização da intermitência severa foram analisados experimentalmente. Simulações no domínio do tempo para estas configurações experimentais foram apresentadas em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), a partir dos parâmetros apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetros para *riser* em catenária (WORDSWORTH et al., 1998).

Definição	Parâmetro	Valor	Unidade
Viscosidade do líquido	μ_l	1×10^{-3}	$kg/m/s$
Viscosidade do gás	μ_g	1.8×10^{-5}	$kg/m/s$
Densidade do líquido	ρ_l	1000	kg/m^3
Constante do gás	R_g	287	$m^2/s^2/K$
Temperatura	T_g	298	K
Comprimento do <i>pipeline</i>	L	57.4	m
Comprimento equivalente de <i>buffer</i>	L_e	0	m
Diâmetro de tubulação	D	5.25×10^{-2}	m
Rugosidade da tubulação	ϵ	4.6×10^{-5}	m
Inclinação do <i>pipeline</i>	β	2	grau
Altura do <i>riser</i>	Z	9.89	m
Abcissa do <i>riser</i>	X	6.44	m
Constante da catenária	A	3.02	-
Comprimento do <i>riser</i>	s_t	12.55	m

As Figs. 5.5, 5.6 e 5.7 mostram que o modelo consegue recuperar as curvas de estabilidade com uma excelente concordância quando comparado às curvas de estabilidade via simulação no domínio do tempo. Além disso, em cada um delas os resultados experimentais também validam as curvas obtidas pela teoria de estabilidade linear.

A Fig. 5.8 mostra as curvas de estabilidade correspondentes à diferentes pressões no separador para $N = 20$. As temperaturas são levemente diferentes, com objetivo de simular os valores médios correspondentes às configurações experimentais.

Como esperado, a região instável (Fig. 5.8) é reduzida quando a pressão do separador aumenta, ou seja, o aumento da pressão no separador tem um efeito estabilizador sobre o sistema. A comparação com as curvas de estabilidade, obtida via simulações no domínio do tempo (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), mostra uma excelente concordância, assim como a comparação com os dados experimentais.

Figura 5.5: Mapa de estabilidade - $P_s = 2.0 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998)

Figura 5.6: Mapa de estabilidade - $P_s = 2.7 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDS WORTH et al., 1998)

Figura 5.7: Mapa de estabilidade - $P_s = 4.1 \text{ bar}$; Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998)

Figura 5.8: Comparação das curvas para estabilidade em *riser* catenária.

5.1.4 Comparação com dados de (YAMAGUCHI, 2015)

Com base nos ensaios experimentais apresentados por (YAMAGUCHI, 2015) e realizados no laboratório Multi-propósito de Escoamentos multifásicos da Universidade de São Paulo, nesta seção são apresentados os mapas de estabilidade para duas condições experimentais: sistema *pipeline-riser* com duas inclinações distintas de $\theta = 5^\circ$ e $\theta = 10^\circ$ para o *pipeline* considerando um *riser* vertical com uma pressão constante no separador. Os parâmetros para simulação são apresentados na Tabela 5.4. Os resultados numéricos são comparados aos dados experimentais fornecidos, dados experimentais instáveis e estáveis.

Tabela 5.4: Parâmetros para geometria com *riser* vertical da bancada multifásica - POLI-USP.

Definição	Parâmetro	Valor	Unidade
Viscosidade do líquido	μ_l	1×10^{-3}	$kg/m/s$
Viscosidade do gás	μ_g	1.8×10^{-5}	$kg/m/s$
Massa específica do líquido	ρ_l	1000	kg/m^3
Constante do gás	R_g	287	$m^2/s^2/K$
Temperatura	T_g	298	K
Comprimento de <i>buffer</i>	L_e	0	m
Diâmetro de tubulação	D	5.25×10^{-2}	m
Rugosidade da tubulação	ϵ	4.6×10^{-5}	m
Pressão no separador	P_s	1.013×10^5	Pa

A Fig. 5.11 compara os dois mapas de estabilidade para $\theta = 5^\circ$ e $\theta = 10^\circ$. Pode-se observar que com o aumento da inclinação do *pipeline* existe um aumento da região instável como observado nos pontos experimentais.

Dos dados experimentais, para a mesma faixa de valores de j_{l0} e j_{g0} o mapa com $\theta = 10^\circ$ apresenta mais pontos instáveis, o que sugere que a região instável para essa condição é maior. O modelo simplificado consegue capturar essa tendência.

Figura 5.9: Mapa de estabilidade - $\theta = 5^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).

Figura 5.10: Mapa de estabilidade - $\theta = 10^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).

Figura 5.11: Comparação dos mapas de estabilidade em função da inclinação do *pipeline*.

5.1.5 Comparação com dados de (TAITEL, 1986)

Os parâmetros apresentados na Tabela 5.5 são escolhidos para se comparar os resultados obtidos com os dados experimentais de (TAITEL, 1986) e com as curvas de estabilidade via simulação no campo temporal.

Tabela 5.5: Parâmetros para *riser* vertical (TAITEL, 1986).

Definição	Parâmetro	Valor	Unidade
Viscosidade do líquido	μ_l	1×10^{-3}	$kg/(m\ s)$
Viscosidade do gás	μ_g	1.8×10^{-5}	$kg/(m\ s)$
Densidade do líquido	ρ_l	1000	kg/m^3
Constante do gás	R_g	287	$m^2/(s^2\ K)$
Temperatura	T_g	293	K
Comprimento do <i>pipeline</i>	L	10	m
Comprimento do equivalente de <i>buffer</i>	L_e	1.69, 5.1, 10	m
Diâmetro da tubulação	D	2.54×10^{-2}	m
Rugosidade tubulação	ϵ	1.5×10^{-6}	m
Inclinação do <i>pipeline</i>	β	5	-
Altura do <i>riser</i>	Z	3	m
Pressão no separador	P_s	1.03×10^5	Pa

O sistema descrito em (TAITEL, 1986) consiste de um *pipeline*, com inclinação descendente de 5° com relação à horizontal, seguido por *riser* vertical conectado a um separador. Não foram considerados mecanismos de injeção de gás e válvula de *choke*. Além disso, considera-se um volume de *buffer* variável conectado ao *pipeline*.

Em cada curva de estabilidade apresentada, fixa-se os parâmetros de simulação e aumenta-se gradualmente o comprimento equivalente de *buffer*. O aumento do *buffer* representa, fisicamente, um aumento no comprimento do total do *pipeline*, pois o mesmo tem como função simular um *pipeline* mais longo, em condições experimentais.

Observa-se que para os três casos apresentados (Fig. 5.12, 5.13 e 5.14) tem-se excelentes resultados comparando-as curvas de estabilidade de aos resultados de (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010).

A Fig. 5.15 apresenta uma comparação entre as curvas de estabilidade obtidas via simulação numérica no domínio do tempo com aquelas obtidas via análise de estabilidade linear (com $N = 20$), para diferentes comprimentos de *buffer*. Observa-se uma excelente concordância entre as duas metodologias. O aumento do comprimento de *buffer* gera uma desestabilização no sistema (TAITEL, 1986) e o modelo proposto consegue capturar este comportamento.

Figura 5.12: Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

Figura 5.13: Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1 \text{ m}$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

Figura 5.14: Mapa de estabilidade - $L_e = 10\text{ m}$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

Entretanto quando as curvas de estabilidade são comparadas com os dados experimentais, apenas os resultados apresentados para o comprimento de *buffer* de 1.69 m tem-se concordância. O aumento do comprimento de *buffer* resulta em uma desestabilização mais significativa para o modelo simplificado do que sobre os pontos experimentais. Assim, o modelo é mais sensível ao aumento do comprimento de *buffer* do que o experimento em si.

Na Fig. 5.15 também é apresentada a fronteira de transição entre os padrões de escoamento estratificado e não-estratificado. Pode-se observar que um trecho da curva de estabilidade para o caso de $L_e = 10\text{ m}$ encontra-se acima da fronteira de transição para o escoamento estratificado. A hipótese de escoamento estratificado no *pipeline* já não é mais válida. Essa comparação entre as curvas de estabilidade e a fronteira de transição sugere que o modelo não representa bem a física do fenômeno para esses casos estudados, especialmente quando ocorre o aumento do comprimento equivalente de *buffer*.

A fronteira de transição é construída a partir do *software* de (SHOHAM, 2006), consi-

Figura 5.15: Mapas de estabilidade para um *riser* vertical com diferentes comprimentos equivalentes de *buffer*, parâmetros de (TAITEL, 1986). Fronteira de transição calculada a partir de (SHOHAM, 2006).

Figura 5.16: Comparação de correlações - Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 \text{ m}$.

derando uma pressão na base do pipeline $P_b = 1.46 \text{ bar}$. Esta pressão corresponde ao estado estacionário para o ponto $(j_{g0} = 0.11 \text{ m/s}, j_{l0} = 3.73 \text{ m/s})$. Esse ponto pertence a curva de estabilidade para o modelo simplificado e tem a maior pressão na base do riser para um caso instável.

O ponto em questão é aquele sobre a curva de estabilidade original (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), para o qual haveria a menor região de escoamento estratificado para esta geometria, pois uma maior pressão diminui a região estratificada, portanto, este seria o ponto mais crítico em que pode-se admitir a existência do padrão estratificado (SHOHAM, 2006).

Para tentar entender esse comportamento, foram avaliadas mudanças no modelo que poderiam corrigir ou melhorar os resultados: mudanças nas correlações de fração de vazio e de queda de pressão por atrito e melhorias na modelagem do trecho do *pipeline*.

As Figs. 5.16 e 5.17 mostram uma comparação no qual altera-se as correções de fração

Figura 5.17: Comparação de correlações - Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1 \text{ m}$.

de vazio para comparar o efeito das mesmas sobre o mapa de estabilidade para os casos de $L_e = 1.69 \text{ m}$ e $L_e = 5.1 \text{ m}$. Pode-se observar que para os dois casos apresentados, não há diferença significativa entre os resultados. Assim, apenas a mudança de correlação de fração de vazio não é suficiente para justificar as diferenças apresentadas nas figuras anteriores.

Os resultados para a alteração da modelagem do *pipeline* e a incorporação dessas novas correlações é apresentada na próxima seção.

5.2 Modelo generalizado

Nesta seção serão discutidos os resultados obtidos a partir do modelo generalizado para diversos casos apresentados na seção anterior. Os resultados são apresentados a partir de uma análise de convergência do modelo e de malha; apresenta-se resultados obtidos para o *riser* vertical de (TAITEL, 1986); em seguida apresenta-se resultados para o *riser* em catenária de (WORDSWORTH et al., 1998); seguido pelos resultados para o *riser* vertical da bancada de experimentos multifásicos POLI-USP apresentado em (YAMAGUCHI, 2015); e, finalmente, resultados para a geometria com *riser* em forma de S de (PARK; NYDAL, 2014).

As curvas que representam a geometria para cada caso são apresentadas da mesma maneira que os dados de geometria são introduzidos nas rotinas desenvolvidas nessa tese.

5.2.1 Análise de convergência

O primeiro estudo de convergência do modelo foi realizado considerando-se um comprimento equivalente de *buffer* $L_e = 10 \text{ m}$ e uma nodalização de $N_t = 20$ por intervalo, para o caso de *riser* vertical de (TAITEL, 1986). Para ilustrar o bom comportamento do espectro de autovalores, a análise de estabilidade foi feita fixando-se a velocidade superficial de líquido em $j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$ e gradualmente aumentou-se a velocidade de superficial de gás de tal maneira que se cruzasse a curva de estabilidade. Os resultados se baseiam nos seis casos propostos na Tabela 5.6.

A Fig. 5.18 apresenta o comportamento dos autovalores na proximidade da condição de estabilidade. Observa-se que, com o aumento gradual da velocidade superficial de gás, a parte real do espectro com parte real positiva diminui e estes autovalores, eventualmente, cruzam o eixo imaginário em direção a parte do plano complexo com parte real negativa.

No segundo estudo de convergência, adotou-se os dados da geometria com *riser* em forma de S de (PARK; NYDAL, 2014), para se estudar a influência da nodalização sobre a curva de estabilidade, o número de nós suficiente para convergência e o comportamento da parte real

Tabela 5.6: Casos estudados para a análise dos espectros de autovalores ($j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$), parâmetros de (TAITEL, 1986).

Casos	Estado	$j_g(\text{m/s})$
Caso 1	Instável	0.8
Caso 2	Instável	0.9
Caso 3	Instável	1.0
Caso 4	Estável	1.1
Caso 5	Estável	1.2
Caso 6	Estável	1.3

Figura 5.18: Comportamento da parte real do espectro de autovalores próximo da condição de estabilidade, parâmetros de (TAITEL, 1986).

dos autovalores na proximidade da fronteira de estabilidade.

A análise de estabilidade é realizada fixando-se a velocidade superficial de líquido em $j_{l0} = 0.3 \text{ m/s}$ e gradualmente incrementa-se a velocidade superficial gás de tal maneira que se observa o cruzamento da fronteira de estabilidade, neste caso, de $j_{g0} = 0.3 \text{ m/s}$ até $j_{g0} = 5 \text{ m/s}$.

A Fig. 5.19 apresenta o maior autovalor de cada espectro na proximidade da condição de estabilidade; pode-se observar que com o aumento da velocidade superficial de gás, a parte real do autovalor com maior parte real positiva diminui e esse maior autovalor eventualmente atravessa o eixo imaginário em direção ao plano com parte real negativa, como discutido no caso anterior da Fig. 5.18. O modelo funciona bem para os dois casos, tanto o *riser* vertical quanto o caso em *riser* em S.

Para se analisar a influência na nodalização, foram construídas curvas que representam a maior parte real positiva do espectro de autovalores em função de j_{g0} e da nodalização para j_{l0} fixo. Pode-se observar que com o aumento da nodalização existe a tendência de convergência das curvas, ou seja, uma convergência de malha. A partir de $N_t = 20$ já não existe uma diferença significativa entre curvas geradas. Nesta seção, todas as simulações serão realizadas para $N_t = 20$ nós por intervalo.

5.2.2 Comparação com dados de (TAITEL, 1986)

A geometria apresentada na Fig. 5.20 é construída a partir dos dados da Tabela 5.7. Os parâmetros para simulação são apresentados na Tabela 5.5. O sistema descrito em (TAITEL, 1986) e

Tabela 5.7: Geometria para o *riser* vertical.

Intervalo	Nós	Tipo	Comprimento (m) ou Altura (m)	Inclinação ($^{\circ}$) ou Abscissa (m)
1	20	Reto	9.1	-5
2	20	Reto	3	90

apresentado na Seção 5.1.5 é novamente adotado para realizar as simulações.

Os três casos apresentados (Figs. 5.21, 5.22 e 5.23) são comparados aos resultados obtidos pelo modelo simplificado e resultados experimentais de (TAITEL, 1986). Pode-se observar que os resultados obtidos a partir do modelo generalizado têm boa concordância com os dados experimentais. De maneira geral, o modelo generalizado melhora os resultados, em relação ao modelo simplificado, trazendo as curvas de estabilidade para uma região mais próxima dos

Figura 5.19: Convergência da nodalização.

Figura 5.20: Geometria com *riser* vertical de (TAITEL, 1986).

Figura 5.21: Mapa de estabilidade - $L_e = 1.69 m$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

Figura 5.22: Mapa de estabilidade - $L_e = 5.1$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

Figura 5.23: Mapa de estabilidade - $L_e = 10\text{ m}$. Dados experimentais de (TAITEL, 1986).

dados experimentais instáveis.

A Fig. 5.24 apresenta uma comparação entre as curvas de estabilidade obtidas pelo modelo simplificado com os resultados obtidos pelo modelo generalizado, para diferentes comprimentos de *buffer*. Observa-se uma boa concordância entre as duas metodologias. O aumento do comprimento equivalente de *buffer* gera uma desestabilização no sistema (TAITEL, 1986) e o modelo generalizado consegue capturar este comportamento.

Pode-se observar que para comprimentos de *buffer* de $L_e = 1.69\text{ m}$ e $L_e = 5.1\text{ m}$, os modelos fornecem resultados consistentes entre si e com a hipótese de escoamento estratificado no *pipeline*. Porém, comparando-se as duas curvas para $L_e = 10\text{ m}$, é possível observar que o modelo simplificado fornece uma fronteira de estabilidade acima da fronteira de transição de estratificado para intermitente, o que invalidaria no modelo a hipótese de padrão escoamento estratificado. Como (BØE, 1981) e (ALMEIDA; GONCALVES, 1999) afirmam, a transição para um escoamento intermitente é limitante para a intermitência severa e o resultado obtido não está

Figura 5.24: Mapas de estabilidade para um *riser* vertical com diferentes comprimentos de *buffer*, parâmetros de (TAITEL, 1986).

coerente com essa observação. Por outro lado, a curva de estabilidade do caso $L_e = 10 \text{ m}$ para o modelo generalizado encontra-se na região da interna da fronteira de transição, mais próxima dos pontos experimentais instáveis. O modelo generalizado mostra-se menos sensível ao aumento do comprimento equivalente de *buffer* assim como os dados experimentais.

O modelo de (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) e o modelo simplificado são baseados em um modelo a parâmetros concentrados para o *pipeline*, no qual ondas de fração de vazio são desprezadas, a fração de vazio é admitida constante e é assumido um padrão estratificado no *pipeline*. No modelo generalizado, o *pipeline* é modelado a parâmetros distribuídos, é permitido a variação da fração de vazio, das variáveis ao longo do *pipeline* e propagação de ondas de fração de vazio. Além disso, o modelo determina que tipo de padrão de escoamento ocorrerá em cada ponto baseado em critérios analíticos e sem a subjetividade de precisar admitir um padrão de escoamento em um determinado ponto do escoamento. O resultado apresentado consegue recuperar uma fronteira de estabilidade mais coerente em relação

aos dados experimentais, bem abaixo da transição.

Com o objetivo de se evitar problemas relacionados ao cruzamento das fronteiras de transição e de estabilidade, adotou-se no modelo generalizado a parâmetros distribuídos correlações de fração de vazio e de queda de pressão por atrito adequadas tanto para o escoamento estratificado quanto para o intermitente e um critério de transição (SHOHAM, 2006) entre esses padrões.

Observa-se que para valores baixos de vazão de líquido j_{l0} e de gás j_{g0} , o comportamento da curva de estabilidade muda, a partir de $j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$. Esta incoerência apresentada está relacionada à correlação de fração de vazio adotada. A faixa de vazão que apresenta distorções está próxima do limite de validade da correlação de (CHEXAL et al., 1997) para as vazões de líquido e de gás. A mesma análise pode ser feita para a outra ponta da curva de estabilidade. Nesta seção, adota-se a velocidade superficial de gás inicial de $j_{g0} = 0,5 \text{ m/s}$, pois a simulação não obteve resultados consistentes para valores menores.

5.2.3 Comparação com dados de (WORDSWORTH et al., 1998)

A geometria apresentada na Fig. 5.25 é construída a partir dos dados da Tabela 5.8. Os resultados foram determinados com base nos parâmetros apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.8: Geometria para o *riser* em catenária.

Intervalo	Nós	Tipo	Comprimento (m) ou Altura (m)	Inclinação ($^{\circ}$) ou Abscissa (m)
1	20	Reto	57.4	-2
2	20	Catenária	9.89	6.44

As Figs. 5.26, 5.27 e 5.28 mostram que o modelo consegue recuperar as curvas de estabilidade com uma excelente concordância quando comparado às curvas de estabilidade do modelo simples e de (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010). Além disso, em cada um delas os resultados experimentais também validam as curvas obtidas pela teoria de estabilidade linear com excelente concordância.

A Fig. 5.29 mostra as curvas de estabilidade correspondentes à diferentes pressões no separador, para $N_t = 20$ por intervalo. Como esperado, a região instável (Fig. 5.29) é reduzida quando a pressão do separador aumenta, ou seja, o aumento da pressão no separador tem um efeito estabilizador sobre o sistema. A comparação com as curvas de estabilidade, obtida a partir do modelo simplificado mostram uma boa concordância. Esse resultado mostra que não existe diferença significativa entre os modelos propostos e, portanto, o modelo simplificado já seria uma boa aproximação.

Figura 5.25: Geometria com *riser* em catenária.

Figura 5.26: Mapa de estabilidade - $P_s = 2.0 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).

Figura 5.27: Mapa de estabilidade - $P_s = 2.7 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).

Figura 5.28: Mapa de estabilidade - $P_s = 4.1 \text{ bar}$. Dados experimentais de (WORDSWORTH et al., 1998).

Figura 5.29: Comparação das curvas para estabilidade para *riser* catenária.

5.2.4 Comparação com dados da bancada multifásica POLI-USP

As geometria apresentadas na Fig. 5.30 são construídas a partir dos dados das Tabela 5.9 e 5.10. Os parâmetros para simulação foram apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.9: Geometria para o *riser* vertical - 1º caso.

Intervalo	Nós	Tipo	Comprimento (m) ou Altura (m)	Inclinação (°) ou Abscissa (m)
1	20	Reto	6	-5
2	20	Reto	7.5	90

Tabela 5.10: Geometria para o *riser* vertical - 2º caso.

Intervalo	Nós	Tipo	Comprimento (m) ou Altura (m)	Inclinação (°) ou Abscissa (m)
1	20	Reto	6	-10
2	20	Reto	7.5	90

A Fig. 5.30 mostra as duas geometrias sobrepostas para ilustrar como é a instalação do laboratório. Na figura observa-se que o trechos ascendentes (*riser*) estão sobrepostos e que os trechos descendentes apresentam diferenças na inclinação. Entretanto, tal ilustração não interfere na simulação, pois em ambos os casos os resultados são obtidos a partir do ponto de $s = 0$ que é na entrada do *pipeline*, sendo esta figura meramente ilustrativa para apresentar as diferenças da geometria experimental.

Pode-se observar na Fig. 5.31 a curva de estabilidade apresentada está localizada bem acima da região instável referente aos dados experimentais, incluindo também boa parte dos pontos estáveis do experimento.

Apesar de ser um resultado conservador, se estivesse em operação poderia ser um mapa de estabilidade adequado, a curva de estabilidade é construída em uma região que a correlação de (CHEXAL et al., 1997) pode apresentar resultados não muito coerentes como mostrados na Seção 5.1.5. Tal situação é caracterizada por vazões muito baixas de gás e de líquido, próximo da faixa de $j_{l0} = 0.1 \text{ m/s}$, tornando o resultado numérico não tão realista quanto o desejado. Em (YAMAGUCHI, 2015) é relatado dificuldades para se avaliar condições instáveis para vazões muito baixas de líquido e de gás. É possível que tais dificuldades também estejam presentes na correlação de fração de vazio adotada.

Para o segundo caso, $\theta = 10^\circ$ o mesmo comportamento anterior é observado. A curva de estabilidade fica bem acima da região instável dos pontos experimentais. Contudo, assim

Figura 5.30: Geometria de *riser* vertical - POLI-USP. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).

Figura 5.31: Mapa de estabilidade - Inclinação $\theta = -5^\circ$. Dados experimentais de (YAMAGUCHI, 2015).

Figura 5.32: Mapa de estabilidade - Inclinação $\theta = -10^\circ$.

como existe um aumento da região instável no experimento e no modelo simplificado (Fig. 5.11), a área sob a curva de estabilidade também aumenta.

O aumento da área da região instável é coerente com o comportamento experimental. Novamente, assim como na seção anterior, a diferença entre as fronteiras é apresentada na Fig. 5.33 onde é possível comparar o efeito do aumento da inclinação sobre a mapa de estabilidade.

Acredita-se que a diferença entre as curvas não é tão significativa justamente devido as dificuldades da correlação de fração de vazio, limitando a análise. De maneira geral, as fronteiras de estabilidade são resultados conservadores para este caso.

Figura 5.33: Comparação de mapa de estabilidade variando a inclinação.

5.2.5 Comparação com dados de (PARK; NYDAL, 2014)

Os parâmetros da Tabela 5.11 são escolhidos para a comparação com os dados experimentais de (PARK; NYDAL, 2014) correspondente a uma geometria com *riser* em forma S conectado a um separador. Também é considerado um comprimento equivalente de *buffer* na entrada da tubulação.

Tabela 5.11: Parâmetros para o *riser* em S. (PARK; NYDAL, 2014).

Definição	Parâmetro	Valor	Unidade
Viscosidade do líquido	μ_l	1×10^{-3}	$kg/(m\ s)$
Viscosidade do gás	μ_g	1.8×10^{-5}	$kg/(m\ s)$
Massa específica do líquido	ρ_l	1000	kg/m^3
Constante do gás	R_g	287	$m^2/(s^2\ K)$
Temperatura	T_g	293	K
Comprimento <i>buffer</i>	L_e	130.5	m
Diâmetro do tubo	D	5.08×10^{-2}	m
Rugosidade do tubo	ϵ	1.5×10^{-6}	m
Pressão do separador	P_s	1.03×10^5	Pa

A Fig. 5.34 representa a instalação experimental na qual os dados experimentais foram obtidos. Neste texto, considera-se a mesma geometria para as simulações com exceção dos números de nós por intervalo, onde foram considerados $N_t = 20$ nós por intervalo. No trabalho original (PARK; NYDAL, 2014), adotou-se números de nós variável por intervalo.

Tabela 5.12: Geometria para o *riser* em S (PARK; NYDAL, 2014).

Intervalo	Nós	Comprimento (m)	Inclinação ($^\circ$)
1	20	2.50	-5.0
2	20	6.05	-4.0
3	20	1.20	-1.8
4	20	0.50	16.0
5	20	0.50	50.0
6	20	4.00	61.8
7	20	0.60	20.8
8	20	2.00	-31.2
9	20	0.50	-12.0
10	20	0.50	24.0
11	20	0.70	64.0
12	20	1.60	77.0
13	20	1.20	90.0
14	20	1.00	0.0

Figura 5.34: Geometria com *riser* em formato de S.

Figura 5.35: Mapa de estabilidade - Comparação entre a curva de estabilidade e os dados experimentais.

A Fig. 5.35 apresenta uma comparação entre os dados experimentais para intermitência severa (pontos estáveis e instáveis) e a curva de estabilidade numérica obtida pelo modelo generalizado. Pode-se observar que o modelo tem uma boa concordância com os dados experimentais, inclusive tem uma forma semelhante à curva de estabilidade experimental, curva que se localizaria entre os pontos estáveis e instáveis. O modelo segue a tendência da curva experimental, porém ainda apresenta erros sistemáticos de cerca de 30% em relação a j_{g0} .

A Fig. 5.36 apresenta o efeito da mudança de padrão de escoamentos sobre a curva de estabilidade e como a mudança reduz e controla a região instável no trecho superior da curva de estabilidade. Nesta modelagem é evidente que cada uma das mudanças de padrão tem influência sobre a estabilização do sistema. Por exemplo, iniciando a análise pela base da fronteira e ($j_{l0} = 0,1 \text{ m/s}$) incrementando a velocidade superficial de líquido, pode-se observar que após a cada intersecção das curvas, a fronteira se direciona para região instável, onde surge uma descontinuidade.

Figura 5.36: Efeito da transição sobre a fronteira de estabilidade.

Neste ponto de descontinuidade, o modelo especificou diferentes correlações de fração de vazio e queda de atrito. Portanto, o modelo cria descontinuidades devido a mudanças no estado estacionário, ou seja, devido à mudança de padrão e, consequentemente, ocorre uma estabilização do sistema. Pode-se observar que cada inclinação afeta da mesma maneira o formato da curva. A descontinuidade cria uma nova fronteira que possui a mesma forma da curva de mudança de padrão que a criou, evidenciando que a mudança é o fenômeno responsável pela estabilização.

Desse resultado, pode-se inferir que a transição para uma padrão intermitente tem um efeito estabilizador sobre a intermitência severa. Portanto, a curva de transição é também um limite para intermitência severa ocorrer para uma dada inclinação. Caso a estabilização não tenha ocorrido antes da mudança de padrão, ela atuará como um estabilizador.

Para a Fig. 5.36, cada estado estacionário (par j_{g0} e j_{t0}) e inclinação possui uma específica fronteira de transição. Por isso, as fronteiras apresentadas foram criadas baseando-se

em uma condição de referência para se poder simplificar a análise do seu efeito e poder ser comparadas no mesmo mapa de estabilidade. Os valores de pressão adotados para a construção das fronteiras de transição é baseado no estado estacionário calculado a partir do maior par j_{g0} e j_{l0} dos dados experimentais usados na simulação.

O menor valor de velocidade superficial de gás considerado para a construção das curvas de estabilidade é $j_{g0} = 0.5 \text{ m/s}$, devido a limitação da correlação de ([CHEXAL et al., 1997](#)).

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esta seção resume os principais resultados e observações relatados nos capítulos anteriores.

O estudo da intermitência severa tem crescido muito nos últimos anos, justamente pela indústria perceber seu impacto em suas operações e as vantagens financeiras de se poder operar em faixas seguras dentro da região do espaço de parâmetros. Além disso, a simulação numérica no domínio do tempo e a análise de estabilidade linear são soluções baratas e complementares para se caracterizar o fenômeno.

Neste texto, foram apresentadas duas abordagens de análise de estabilidade para intermitência severa a partir da teoria de estabilidade linear em um sistema *pipeline-riser* de geometria variável. Apresentou-se um modelo eficiente para prever a influência de diferentes mecanismos de mitigação e diferentes condições de operação na ocorrência de intermitência severa. No modelo simplificado, o *pipeline* é modelado a parâmetros concentrados e as correlações de fração de vazio são pré-determinadas. No modelo generalizado, considera-se a determinação do padrão de escoamento e, em seguida, a definição das correlações para determinar a fração de vazio e a queda de pressão por atrito. Dessa maneira, pode-se também obter a fronteira transição do padrão de escoamento.

Primeiramente, foram discutidos resultados de convergência. A abordagem numérica se mostrou robusta para o cálculo do autovalores. A parte finita do espectro apresentou autovalores bem comportados (Fig. 5.1 e 5.18), apresentando resultados consistentes com os resultados obtidos via simulação do tempo, na proximidade da fronteira de estabilidade. Discutiu-se o efeito da discretização para a construção dos mapas de estabilidade (Fig. 5.2 e 5.19). Observou-se que, para o modelo unidimensional, 20 nós de discretização seriam suficiente para capturar a curva de estabilidade com a precisão desejada.

Os mapas de estabilidade obtidos, para *riser* vertical e catenária, mostraram uma boa concordância com os mapas obtidos através de simulações no domínio do tempo (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) e com os dados experimentais, com exceção da curva para *riser* vertical de $L_e = 10$.

No modelo simplificado (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017) as hipóteses de desprezo da flutuação de fração de vazio com tempo e a modelagem a parâmetros concentrados não são suficientes para capturar curvas de estabilidade com a presença de comprimento de *buffer* maiores do que $L_e = 5.1 \text{ m}$. O modelo generalizado apresentado neste texto mostrou resultados melhores para estes mapas de estabilidade, pois permite flutuação da fração de vazio, a propagação de ondas de fração de vazio e a variação das variáveis de estado ao longo do tempo e na posição no *pipeline*.

Como mostrado em (BØE, 1981; ALMEIDA; GONCALVES, 1999), a estabilização do sistema está relacionada à transição do escoamento estratificado para o intermitente e, numericamente, foi possível recuperar este resultado. O modelo simplificado, para maiores comprimentos equivalentes de *buffer* fornece um trecho horizontal da fronteira de estabilidade além da fronteira de transição, incoerente fisicamente, enquanto que a abordagem generalizada apresentam um resultado bem abaixo da transição e menos sensível ao aumento do comprimento equivalente de *buffer*. Os resultados apresentados neste texto e em (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017) mostram que uma modelagem generalizada é necessária para capturar a influência da transição do escoamento estratificado sobre a estabilidade.

Contudo, os mapas de estabilidade para o caso vertical apresentam inconsistência para baixos de valores de vazão de gás e de líquido. Acredita-se que tais dificuldades estejam relacionadas ao limites de validade da correlação de fração de vazio adotada. Desse resultado, evidência-se que a modelagem sempre dependerá da qualidade e da região de aplicação das correlações.

Para os mapas de estabilidade para o *riser* vertical, baseado em (YAMAGUCHI, 2015), os resultados do modelo generalizado apresentaram inconsistência com os dados experimentais. Apesar de recuperar o comportamento esperado, o aumento da inclinação do *pipeline* amplia a região instável, o mapa de estabilidade resultante está distante do resultado experimental. Neste caso também, as dificuldades são devido aos limites de aplicação da correlação de fração de vazio, já que todo o mapa construído situa-se em uma região crítica para correlação de (CHEXAL et al., 1997), valores muito baixos de vazão de líquido e de gás. O modelo simplificado consegue apresentar resultados mais consistentes com os dados experimentais.

O quarto caso analisado se refere a geometria com *riser* em S apresentado por (PARK; NYDAL, 2014). Os resultados obtidos apresentaram concordância com os dados experimentais. Também foi possível observar a influência da transição do padrão de escoamento sobre o mapa de estabilidade. Este resultado confirma que a transição do escoamento estratificado para intermitente (BØE, 1981; ALMEIDA; GONCALVES, 1999; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b) estabiliza

o sistema e para um *solver* geral de estabilidade essa consideração precisaria ser incluída.

A metodologia apresentada mostrou-se uma ferramenta robusta como *solver* de estabilidade para escoamento água-ar baseado na teoria de estabilidade linear. Apesar de ter sido aplicada neste trabalho apenas a algumas geometrias (*riser* vertical, catenária e em formato de S), pode estender sua aplicação a qualquer tipo de geometria, somente trocando as correlações de fração de vazio e de queda de atrito para outros padrões de escoamento. Essa metodologia é uma abordagem geral para qualquer sistema *pipeline-riser* para prever a ocorrência de intermitência severa e é a principal contribuição deste trabalho.

Vale destacar que a modelagem adotada, que é baseada na teoria de estabilidade linear, não consegue avaliar a amplitude do fenômeno ou intensidade da intermitência severa, não sendo possível identificar o tipo de instabilidade. Neste texto estudou-se de que maneiras as diversas condições afetariam o mapa de estabilidade. É possível que muitas das condições apresentadas também afetem a magnitude do fenômeno, porém seria necessário uma análise não-linear ou ainda simulações no domínio do tempo para compreender o efeito dessas condições. Tal análise não é foco deste trabalho.

Como a intermitência severa é uma questão relevante para o desenvolvimento de projetos de sistemas produção petróleo *offshore*, é evidente a necessidade de se incluir uma análise de estabilidade deduzida de modelos dinâmicos em códigos computacionais. Para o caso de códigos de simulações estacionárias é ainda mais relevante, pois a simulação dinâmica não está disponível e a solução estacionária pode não existir fisicamente.

Se o objetivo é somente determinar a estabilidade do sistema, um módulo de estabilidade seria uma ferramenta útil em códigos de simulação dinâmica, já que o custo computacional é muito menor comparado a simulações no domínio do tempo para se avaliar o comportamento de uma determinada condição de operação.

Esta tese de doutorado faz parte de uma linha de pesquisa que tem como objetivo entender e modelar a intermitência severa. Tendo um modelo funcional para a captura dos mapas de estabilidade, o foco seria desenvolver um *software* (ou *solver*) de estabilidade, juntamente com o outros trabalhos já desenvolvidos envolvendo simulações no domínio do tempo (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; BALIÑO, 2012; NEMOTO; BALIÑO, 2012). O *solver* para estabilidade é uma ferramenta complementar ao modelo transiente desenvolvido.

6.1 Perspectivas

Como sugestão para melhorias futuras na metodologia apresentada, os seguintes pontos foram considerados:

- Apesar da modelagem descrita neste texto, a solução sempre dependerá da física considerada no problema, representada pelas correlações de fração de vazio e de atrito; dessa maneira incluir correlações mais precisas torna a resposta fornecida pelo modelo cada vez mais próxima da realidade;
- Buscar unificar um grupo de correlações no mesmo código e fazer com que a própria rotina calcule esse parâmetros. Buscar combinação de diversas correlações para diversos padrões e condições, para otimizar a solução;
- Modelar a transição entre padrões e suavizar a mudança de tal maneira que a troca das correlações adotadas seja mais suave, limitando descontinuidade numéricas que podem causar instabilidades numérica durante a simulação;
- Inclusão e análises dos termos de inércia na equação de conservação quantidade de movimento e avaliar sua influência sobre os mapas de estabilidade, especialmente em condições operacionais reais, onde a ordem de grandeza das velocidades superficiais é muito maior quando comparado aos casos experimentais presentes neste texto;
- Estudos referentes a inclusão de uma terceira fase na modelagem (óleo), transferência de massa entre fases e a inclusão da compressibilidade do líquido. Resultados desse trabalho podem ser aplicados em sistema de reais de produção. Tais estudos já vem sendo desenvolvidos, pode-se citar ([NEMOTO; BALIÑO, 2009](#); [NEMOTO; BALIÑO, 2012](#); [ANDREOLLI; AZEVEDO; BALIÑO, 2017a](#); [ANDREOLLI; AZEVEDO; BALIÑO, 2017b](#));
- Estudos de análise de estabilidade não-linear. Este estudos descreveriam aproximadamente os ciclos limites e a determinação das regiões dos tipo de intermitência severa SS1, SS2, SS3 e OSC.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. R.; GONCALVES, M. A. L. Venturi for severe slug elimination. *Proceedings of 9th International Conference Multiphase*, American Society of Mechanical Engineers, p. 10, 1999.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Linear stability theory analysis for oil flowlines. *Proceedings JEM 2017*, ABCM, p. 10, 2017.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Stability solver for offshore oil flows. *OTC Brasil 2017*, Offshore Technology Conference, p. 10, 2017.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging in air-water systems considering different mitigation mechanisms. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 73, p. 238–250, 2015.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging: sensitivity to void fraction correlations. In: *Proceeding of the 7th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2015)*. Bergeggi, Italy: [s.n.], 2015. p. 10.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis of severe slugging including inertial effects. In: ABCM. *Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2015)*. Campinas, SP, Brazil, 2015. p. 10.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging. *Chemical Engineering Science*, v. 161, p. 1–130, 2017.
- BALIÑO, J. L. *Análise de intermitência severa em risers de geometria catenária*. 141 p. Tese (Tese (Livro Docência)) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- BALIÑO, J. L. *Desenvolvimento de modelos para medição, dinâmica e estabilidade de escoamentos multifásicos em sistemas de produção de petróleo*. São Paulo: Projeto Petrobras/FUSP 0050.0036706.07.2., 2009.
- BALIÑO, J. L. Modeling and simulation of severe slugging in air-water systems including inertial effects. In: *The 6th. International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2012)*. Wien, Austria: [s.n.], 2012. p. 10.
- BALIÑO, J. L. Modeling and simulation of severe slugging in air-water systems including inertial effects. *Journal of Computational Science*, v. 5, p. 482–495, 2014.
- BALIÑO, J. L.; BURR, K. P.; NEMOTO, R. H. Modeling and simulation of severe slugging in air-water pipeline-riser systems. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 36, p. 643–660, 2010.

BENDIKSEN, K. H. An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 10, n. 4, p. 467–483, 1984.

BENDIKSEN, K. H.; MALNES, D.; MOE, S. N. R. The dynamic two-fluid model olga: theory and application. *SPE Prod. Eng. J*, v. 6, p. 171–180, 1991.

BHAGWAT, S. M.; GHAJAR, A. J. Similarities and differences in the flow patterns and void fraction in vertical upward and downward two phase flow. *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 39, p. 213–227, 2012.

BHAGWAT, S. M.; GHAJAR, A. J. A flow pattern independent drift flux model based void fraction correlation for a wide range of gas-liquid two phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 59, p. 186–205, 2014.

BØE, A. *Severe slugging characteristics. Part I: Flow regime for severe slugging. Part II: Point model simulation study*. Trondheim, Norway: [s.n.], 1981.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Campo*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC, 2006. 435 p.

BURR, K. P.; BALIÑO, J. L.; AZEVEDO, G. R. Discretization effects on the linear numerical stability analysis of two-phase flows in pipeline-riser systems. In: *Proceedings do XXII International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*. Ribeirão Preto, SP, Brazil: [s.n.], 2013. p. 12.

CHAUDHRY, M. H. *Applied Hydraulic Transients*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1987.

CHEN, N. H. An explicit equation for friction factor in pipe. *Ind. Engng. Chem. Fundam.*, v. 18, p. 296–297, 1979.

CHEXAL, B.; LELLOUCHE, G.; HORROWITZ, J.; HEALER, J. A void fraction correlation for generalized applications. *Progress in nuclear energy*, v. 27, n. 4, p. 255–295, 1992.

CHEXAL, B.; MERILO, M.; MAULBETSCH, J.; HOROWITZ, J.; HARRISON, J.; WESTACOTT, J.; PETERSON, C.; KASTNER, W.; SCHMIDT, H. *Void Fraction Technology for Design and Analysis*. Palo Alto, California, USA: EPRI, 1997. 204 p.

COLLIER, J. G.; THOME, J. R. *Convective Boiling and Condensation*. Oxford: Clarendon Press, 1994. 596 p.

DREW, D. A.; PASSMAN, S. L. *Theory of Multicomponent Fluids*. New York: Springer-Verlag, 1999. 308 p.

EDVARDBSEN, S. Tese de doutorado, *Modeling multiphase flow in downhole valves*. Trondheim, Noruega: [s.n.], 2015. 181 p.

FABRE, J.; PRESSON, L. L.; CORTEVILLE, J.; ODELLO, R.; BOURGEOIS, T. Severe slugging in pipeline-riser systems. *SPE 16846*, 1987.

FRIEDEL, L. Improved friction pressure drop correlations for horizontal and vertical two-phase. In: *European Two-Phase Flow Group Meeting*. Ispra, Italy: [s.n.], 1979.

- GRIFFITHS, M. J.; SCHLEGEL, J. P.; CLARK, C.; CHEN, S. W.; HIBIKI, T.; ISHII, M.; KINOSHITA, I. Uncertainty evaluation of the chexal-lellouche correlation for void fraction in rod bundles. *Progress in Nuclear Energy*, v. 74, p. 143–153, 2014.
- JANSEN, F. E.; SHOHAM, O.; TAITEL, Y. The elimination of severe slugging - experiments and modeling. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 22, n. 6, p. 1055–1072, 1996.
- LEHOUCQ, R. B.; SORENSEN, D. C.; YANG, C. *ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicit Restarted Arnoldi Methods*. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>: [s.n.], 1997.
- MAGRAB, E. B.; AZARM, S.; BELACHANDRAN, B.; DUNCAN, J. H.; HEROLD, K. H.; WALSH, G. C. *An Engineer's Guide to MATLAB*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2005.
- MALEKZADEH, R.; BELFROID, S. P. C.; MUDDE, R. F. Transient drift flux modeling of severe slugging in pipeline-riser systems. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 46, p. 32–37, 2012.
- MASELLA, J. M.; TRAN, Q. H.; FERRE, D.; PAUCHON, C. Transient simulation of two-phase flows in pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 24, p. 739–755, 1998.
- MCCAIN, W. D. *The properties of petroleum fluids*. Tulsa: PennWell Books, 1990. 548 p.
- MÜLLER-STEINHAGEN, H.; HECK, K. A simple friction pressure drop correlation for two-phase flow in pipes. *Chem. Eng. Process.*, v. 20, p. 297–308, 1986.
- NAKLA, A. A.-S. E. M.; ALSURAKJI, I. A look-up table for two-phase frictional pressure drop multiplier. *Nuclear Engineering and Design*, v. 265, p. 450–468, 2013.
- NEMOTO, R. H.; BALIÑO, J. L. Characteristic values and compatibility conditions for the no-pressure-wave model applied to petroleum systems. In: *Proceeding of the 20th International Congress of Mechanical Engineering*. Gramado, RS, Brazil: [s.n.], 2009.
- NEMOTO, R. H.; BALIÑO, J. L. Modeling and simulation of severe slugging with mass transfer effects. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 40, p. 144–157, 2012.
- PARK, S.; NYDAL, O. J. Study on severe slugging in an s-shaped riser: small-scale experiments compared with simulations. *Oil and Gas Facilities*, p. 72–80, 2014.
- POTS, B. F. M.; BROMILOW, I. G.; KONIJN, M. J. W. F. Severe slug flow in offshore flowline/riser systems. *SPE Production Engineering*, p. 319–324, 1987.
- SARICA, C.; SHOHAM, O. A simplified transient model for pipeline-riser systems. *Chemical Engineering Science*, v. 46, n. 9, p. 2167–2179, 1991.
- SCHMIDT, Z. *Experimental study of two-phase slug flow in a pipeline-riser system*. Tese (Doutorado) — The University of Tulsa, Tulsa, 1977.
- SCHMIDT, Z.; BRILL, J.; BEGGS, H. Experimental study of severe slugging in a two phase flow pipeline-riser system. *SPE, Paper 8306*, v. 20, n. 5, p. 407–414, 1979.
- SHI, H.; HOLMES, J.; DURLOFSKY, L.; AZIZ, K.; DIAZ, L.; ALKAYA, B.; ODDIE, G. Drift-flux modeling of two-phase flow in wellbores. *SPE J.*, v. 10, p. 24–33, 2005.

SHOHAM, O. *Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2006.

STORKAS, E.; SKOGESTAD, S. Contrallability analysis of two-phase pipeline-riser systems at riser slugging conditions. *Control Engineering Practice*, v. 15, p. 567–581, 2007.

TAITEL, Y. Stability of severe slugging. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 12, n. 2, p. 203–217, 1986.

TAITEL, Y.; DUKLER, A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*, v. 22, n. 1, p. 47–55, 1976.

TAITEL, Y.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Transient two-phase flow in low velocity hilly terrain pipelines. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 16, n. 1, p. 69–77, 1990.

TAITEL, Y.; VIERKAND, S.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Severe slugging in a riser system: experiments and modeling. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 16, n. 1, p. 57–68, 1990.

TENGESDAL, J. T.; SARICA, C.; THOMPSON, L. Severe slugging attenuation for deepwater multiphase pipeline and riser systems. *SPE Annual Technical Conference*, 2002.

TENGESDAL, J. T.; THOMPSON, L.; SARICA, C. A design approach for self-lifting method to eliminate severe slugging in offshore production systems. *SPE Annual Technical Conference*, 2003.

TIN, V.; SARSHAR, M. An investigation of severe slugging characteristics in flexible risers. In: . [S.l.: s.n.], 1993.

WALLIS, G. B. *One-dimensional Two-phase Flow*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969. 408 p.

WOLDESEMAYAT, M. A.; GHAJAR, A. J. Comparison of void fraction correlations for different flow patterns in horizontal and upward inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 33, p. 347–370, 2007.

WORDSWORTH, C.; DAS, I.; LOH, W. L.; MCNULTY, G.; LIMA, P. C.; BARBUTO, F. *Multiphase Flow Behavior in a Catenary Shaped Riser*. Bedford, UK: CALtec Report No.: CR 6820, 1998. 157 p.

YAMAGUCHI, J. L. B. A. J. Experimental study of severe slugging in an air-water pipeline-riser system. In: ABCM. *Multiphase Flow Journeys - JEM 2015*. Campinas, São Paulo, Brasil, 2015. p. 1–9.

ZAKARIAN, E. Analysis of two-phase flow instabilities in pipe-riser systems. In: ASME. *2000 ASME Pressure Vessel and Piping Conference*. Seattle, Washington, USA, 2000. p. 1–9.

ZUBER, N.; FINDLAY, J. Average volumetric concentration in two-phase flow system. *Journal of Heat Transfer*, v. 87, p. 453, 1965.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Neste Apêndice apresentada-se a dedução das três equações de conservação utilizadas na modelagem do Capítulo 3, a equação de conservação de líquido, a equação de conservação de gás e a equação de conservação de momento para mistura.

A.1 Dedução da equação de conservação de líquido

Seja a equação de conservação de massa para fase k , como demonstrado em (COLLIER; THOME, 1994),

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial s} (A \alpha_k \rho_k u_k) = \Gamma_k \quad (\text{A.1})$$

onde A é a área de passagem, α_k é a fração de vazio referente à fase k , ρ_k é a massa específica do fluido k , u_k é a velocidade da fase e Γ_k é a transferência de massa para a fase k a partir das interfaces com as outras fases, tal que a soma da transferência de massa entre as fases no escoamento é nula.

Por hipótese, a fase líquida é incompressível, a área de passagem é constante ao longo da tubulação e não há transferência de massa entre as fases. Portanto, para a fase líquida pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_l) + \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_l u_l) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Como,

$$\alpha + \alpha_l = 1 \Rightarrow \alpha_l = 1 - \alpha \quad (\text{A.3})$$

$$j_l = \alpha_l u_l = (1 - \alpha) u_l \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se as Eqs. (A.3) e (A.4) na Eq. (A.2), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) + \frac{\partial}{\partial s} (j_l) = 0 \quad (\text{A.5})$$

e, portanto,

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial j_l}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.6})$$

A.2 Dedução da equação de conservação de gás

Nesta Seção, a injeção de gás na tubulação não é considerada na dedução. Analogamente à Seção A.1, tem-se a equação de conservação de massa para a fase k :

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial s} (A \alpha_k \rho_k u_k) = \Gamma_k \quad (\text{A.7})$$

Pode-se escrever para a fase gasosa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \alpha \rho_g) + \frac{\partial}{\partial s} (A \alpha \rho_g u_g) = \Gamma_g \quad (\text{A.8})$$

onde α é a fração de vazio para a fase gasosa, u_g é a velocidade da fase gasosa, ρ_g é a densidade do gás e Γ_g é transferência de massa para a fase gasosa.

Da maneira análoga, a área de passagem, A , é constante e não há transferência de massa, $\Gamma_g = 0$. Na tese foi considerado uma fonte de massa por unidade de comprimento. A densidade do gás é deduzida da relação de gás ideal:

$$\rho_g = \frac{P}{R_g T_g} \quad (\text{A.9})$$

Considerando essas hipóteses na Eq. (A.8), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{R_g T_g} \alpha \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{P}{R_g T_g} \alpha u_g \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Além disso, a velocidade superficial de gás pode ser definida como:

$$j_g = \alpha u_g \quad (\text{A.11})$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} (P \alpha) + \frac{\partial}{\partial s} (P j_g) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Rearranjando-se a Eq. (A.12), tem-se:

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial \alpha}{\partial t} + j_g \frac{\partial P}{\partial s} + P \frac{\partial j_g}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.13})$$

A.3 Dedução da equação de conservação de quantidade de movimento

Seja a equação de conservação de momento para a fase k , como demonstrado em Collier e Thome (1994),

$$\begin{aligned} -A \alpha_k \frac{\partial P}{\partial s} \delta s - \tau_{kw} P_{kw} \delta s + \sum \tau_{knz} P_{kn} \delta s - A \alpha_k \rho_k \delta s g \sin \theta + u_k \Gamma_k = \\ \frac{\partial}{\partial t} (A \alpha_k \rho_k u_k \delta s) + \delta s \frac{\partial}{\partial s} (A \alpha_k \rho_k u_k u_k) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde Γ_k representa a transferência de massa entre os fluidos. Como a área A e o comprimento δs são constantes e não há transferência de massa, pode-se escrever:

$$-\alpha_k \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\tau_{kw} P_{kw}}{A} + \sum \frac{\tau_{knz} P_{kn}}{A} - \alpha_k \rho_k g \sin \theta = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k u_k) + \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_k \rho_k u_k^2) \quad (\text{A.15})$$

onde τ_{kw} é tensão entre a fase k e a parede, P_{kw} é o perímetro molhado entre a fase k e a parede, τ_{knz} é a tensão entre a fase k e as n fases, indicado pela somatória. A somatória representa o esforço que a fase k exerce sobre a outras fases. P_{knz} é o perímetro de contato entre as fases. Aplica-se a Eq. (A.15) à fase gasosa e à fase líquida e soma-se as duas relações:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\tau_{kg} P_{kg}}{A} - \frac{\tau_{kl} P_{kl}}{A} + \frac{\tau_{gl} P_{gl}}{A} + \frac{\tau_{lg} P_{lg}}{A} - \rho_m g \sin \theta = \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_g u_g) + \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_l \rho_l u_l^2) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A força que a fase gasosa exerce sobre a fase líquida é igual a força que a fase líquida exerce sobre a fase gasosa. Por isso, em um balanço de forças, a soma desses esforço é nulo. Além disso adota-se o modelo NPW e, portanto, os termos inercias podem ser desprezados. Tem-se:

$$-\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\tau_{kg} P_{kg}}{A} - \frac{\tau_{kl} P_{kl}}{A} - \rho_m g \sin \theta = 0 \quad (\text{A.17})$$

Neste texto adota-se a abordagem do multiplicador de duas fases para o cálculo da queda de pressão por atrito, no qual os termos referentes a tensão de cisalhamento das fases com a parede

são aproximados por um único termo:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_A = \frac{\tau_{kg} P_{kg}}{A} + \frac{\tau_{kl} P_{kl}}{A} = \frac{1}{2} \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (\text{A.18})$$

O multiplicador de duas fases, como definido no Capítulo 3, relaciona a queda de pressão por atrito e a queda de pressão para um escoamento monofásico de referência ([Wallis \(1969\)](#)).

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS EM FORMA MATRICIAL

Neste Apêndice será apresentada a dedução do sistema de equações que governa o modelo em forma matricial, a partir da eliminação da fração de vazio.

Admitiu-se no Capítulo 3 que a fração de vazio é calculada a partir de uma relação algébrica entre variáveis de estado, sendo esta condição uma das lei de fechamento do sistema. Portanto, escreve-se:

$$\alpha = \alpha(j_g, j_l, P, \theta) \quad (\text{B.1})$$

Deriva-se a Eq. (B.1) com relação ao tempo, considerando que $\theta = \theta(s)$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \frac{\partial j_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a Eq. (B.2), na equação de conservação de líquido, Eq. (A.6), resulta em:

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \frac{\partial j_g}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \frac{\partial j_l}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial j_l}{\partial s} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Substituindo a Eq. (B.2) na equação de conservação de gás, Eq. (A.13), resulta em:

$$P \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \frac{\partial j_g}{\partial t} + P \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \frac{\partial j_l}{\partial t} + \left(\alpha + P \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + j_g \frac{\partial P}{\partial s} + P \frac{\partial j_g}{\partial s} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando a Eq. (B.3) por P e somando com a Eq. (A.10), resulta em:

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} + j_g \frac{\partial P}{\partial s} + P \frac{\partial j_l}{\partial s} + P \frac{\partial j_g}{\partial s} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Ordenando o sistema formado pelas Eqs. (B.3), (B.5) e (3.3) pode-se obter, por inspeção, as Eqs. (3.14) a (3.27).

APÊNDICE C – DEDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE PERTURBAÇÃO

Neste Apêndice apresenta-se a dedução das equações perturbadas, que governam as perturbações, a partir do sistema de equações matricial. Eq. (3.14)

Inicialmente, perturba-se o vetor de variáveis de estado. Em notação indicial escreve-se:

$$v_i = \tilde{v}_i(s) + \hat{v}_i(s, t) \quad (\text{C.1})$$

onde o sobre-escrito $\sim$ representa uma avaliação na condição estacionária e o sobre-escrito $\hat{}$ representa as perturbações.

Seja a Eq. (3.14) escrita em notação indicial:

$$A_i + \sum_j B_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_j C_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial s} = 0 \quad (\text{C.2})$$

faz-se uma expansão em série de Taylor em torno do estado estacionário e, considerando uma perturbação infinitesimal, despreza-se os termos de segunda ordem nas perturbações das variáveis dependentes. Os termos A_i , B_{ij} e C_{ij} são escritos, respectivamente, como:

$$A_i \simeq (A_i)^\sim + \sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} \right)^\sim \hat{v}_j \quad (\text{C.3})$$

$$B_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} \simeq (B_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t}, \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} = 0 \right) \quad (\text{C.4})$$

$$C_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial s} \simeq \left(C_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim + \sum_k \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial v_k} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim \hat{v}_k + (C_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial s} \quad (\text{C.5})$$

Substituindo as Eqs. (C.3) a (C.5) na Eq. (C.2), resulta em:

$$\begin{aligned}
& (A_i)^\sim + \sum_j \left(C_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim + \sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} \right)^\sim \hat{v}_j + \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial v_k} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim \hat{v}_k + \\
& + \sum_j (B_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t} + \sum_j (C_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial s} = 0
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Pode-se escrever:

$$\sum_j \sum_k \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial v_k} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim \hat{v}_k = \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^\sim \hat{v}_j \tag{C.7}$$

Do estado estacionário escreve-se:

$$\tilde{A}_j + \sum_j \left(C_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial s} \right)^\sim = 0 \tag{C.8}$$

resultando em

$$\sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_k \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^\sim \hat{v}_j + \sum_j (B_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial t} + \sum_j (C_{ij})^\sim \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial s} = 0 \tag{C.9}$$

Portanto,

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_k \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^\sim \tag{C.10}$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij})^\sim \tag{C.11}$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij})^\sim \tag{C.12}$$

APÊNDICE D – DEDUÇÃO DA CORRELAÇÃO DE FLUXO DE DERIVA E DERIVADAS E CORRELAÇÕES DE FRAÇÃO DE VAZIO

Neste Apêndice apresenta-se a dedução da correlação de fluxo deriva, a dedução das derivadas da correlação de fluxo de deriva em função das variáveis j_g , j_l , P e θ e as correlações de fração de vazio semi-empíricas e suas derivadas

D.1 Dedução da formulação do modelo de fluxo de deriva

Nesta Seção será apresentada a dedução da relação de fluxo de deriva, conforme discutido por [Chexal et al. \(1992\)](#).

A formulação de fluxo de deriva fornece uma maneira de se considerar tanto os efeitos da velocidade relativa local entre as fases como os efeitos de não uniformidade do escoamento e distribuições de concentração.

Esta abordagem foi formalizado por [Zuber e Findlay \(1965\)](#). O desenvolvimento deste trabalho e de seus experimentos para a velocidade local da fase gasosa e para a fração de vazio em função da distribuição volumétrica é a base da formulação de fluxo de deriva.

Como a fração de vazio média na tubulação é a variável de interesse, é conveniente definir um valor escalar médio F , tal que:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{A} \int_A F dA \quad (\text{D.1})$$

Valores médios na área de seção transversal do escoamento são úteis, já que todos os parâmetros referentes as três dimensões do escoamento podem ser reduzidos à uma forma quase-

unidimensional. Contudo, as informações a respeito de alterações na direção normal ao escoamento podem ser perdidas, devido à simplificação pela média da seção. Portanto, é necessário reinserir estas informações na modelagem, através de relações de informação empírica ou pelo uso de modelos simplificados.

Diante disso, utilizando a Eq. (D.1), a fração de vazio média na tubulação é dada por:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{A} \int_A \alpha dA \quad (D.2)$$

Para uma densidade de fase constante, o fluxo volumétrico da fase gasosa, através da tubulação, pode ser expresso em termos da velocidade da fase gasosa e pela fração de vazio:

$$Q_g = \int_A (u_g \alpha) dA \quad (D.3)$$

O fluxo também pode ser escrito em termos da fração de vazio média na tubulação, pela velocidade média da fase gasosa e pela área da seção:

$$Q_g = A \langle \alpha \rangle \bar{u}_g \quad (D.4)$$

Resolvendo-se para a velocidade da fase gasosa, tem-se:

$$\bar{u}_g = \frac{Q_g}{\langle \alpha \rangle A} = \frac{1}{\langle \alpha \rangle A} \int_A (u_g \alpha) dA \quad (D.5)$$

Na Eq. (D.5), se fluxo volumétrico é conhecido, especificando-se a velocidade média da fase gasosa, a fração de vazio médio na seção pode ser determinada. Em Zuber e Findlay (1965) as velocidades locais das fases são escritas em termos dos fluxos volumétricos locais. Portanto,

- $j_g = \text{fluxo volumétrico de gás} = \alpha u_g$
- $j_l = \text{fluxo volumétrico de líquido} = (1 - \alpha) u_l$

e o fluxo volumétrico da mistura é dado por:

$$j = j_g + j_l$$

A velocidade local da fase gasosa é especificada em termos do fluxo volumétrico de mistura e uma velocidade de deriva, u_{gj} , que é a velocidade da fase gasosa em relação a velocidade da mistura (velocidade relativa). Portanto, a velocidade de deriva pode ser escrita como:

$$u_g = j + u_{gj} \quad (D.6)$$

Resolvendo para u_g e substituindo a Eq. (D.6) na Eq. (D.5), tem-se:

$$\bar{u}_g = \frac{1}{\langle \alpha \rangle A} \int_A (j\alpha) dA + \frac{1}{\langle \alpha \rangle A} \int_A (u_{gj}\alpha) dA$$

ou

$$\bar{u}_g = \bar{j} + \bar{u}_{gj} \quad (\text{D.7})$$

Na Eq. (D.7), o primeiro termo é referente a densidade média do fluxo volumétrico da mistura, $\bar{j}$, e o segundo termo é a velocidade de deriva média, $\bar{u}_{gj}$. Finalmente, um parâmetro de distribuição, C_0 , pode ser definido como a razão entre a densidade média volumétrica da mistura, $\bar{j}$, e a densidade do fluxo volumétrico média na seção, $\langle j \rangle$.

$$C_0 = \frac{\bar{j}}{\langle j \rangle} = \frac{1}{\langle j \rangle} \left[\frac{1}{\langle \alpha \rangle A} \int_A (j\alpha) dA \right] = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \quad (\text{D.8})$$

Resultando, na seguinte relação para a velocidade da fase gasosa:

$$\bar{u}_g = C_0 \langle j \rangle + \bar{u}_{gj} \quad (\text{D.9})$$

Na Eq. (D.9), a velocidade da fase gasosa está relacionada ao parâmetro de distribuição, C_0 , e a velocidade de deriva do gás, $\bar{u}_{gj}$. A vantagem que a Eq. (D.9) tem, em relação aos outros modelos para o cálculo da fração de vazio, é oferecer uma relação em que os efeitos da densidade e da distribuição das fases no escoamento sejam separados dos efeitos das diferenças das velocidades entre fases localmente.

A velocidade média da fase gasosa pode ser expressado em termos da fração da vazio:

$$\bar{u}_g = \frac{\langle \alpha u_g \rangle}{\langle \alpha \rangle} = \frac{\langle j_g \rangle}{\langle \alpha \rangle} \quad (\text{D.10})$$

o que resulta na relação geral da formulação do fluxo de deriva para a determinação da fração de vazio:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\langle j_g \rangle}{C_0 \langle j \rangle + \bar{u}_{gj}} \quad (\text{D.11})$$

O parâmetro de distribuição C_0 e a velocidade de deriva $\bar{u}_{gl}$ são os parâmetros no modelo de fluxo de deriva. Pode-se observar que quando $\bar{u}_{gl}$ é igual a zero e C_0 é igual a 1, a relação de fluxo de deriva descreve um escoamento homogêneo. Se $\bar{u}_{gl}$ é igual a zero, mas C_0 não é igual a um, a relação de fluxo de deriva descreve um equação de escorregamento.

Usualmente, adota-se a Eq. (D.11) com a seguinte nomenclatura:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d} \quad (\text{D.12})$$

D.2 Dedução das derivadas parciais da fração de vazio com relação as variáveis: j_g , j_l , P e θ

Seja a relação constitutiva do modelo de fluxo deriva:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d} \quad (\text{D.13})$$

no qual, C_d é o parâmetro de distribuição, U_d é a velocidade de deriva e j é a velocidade superficial total ($j = j_g + j_l$). Além disso, os dois parâmetros são funções das variáveis envolvidas.

$$C_d = C_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta) \quad (\text{D.14})$$

$$U_d = U_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta) \quad (\text{D.15})$$

D.2.1 Derivada de α com relação à j_g

Deriva-se a Eq. (D.13) com relação a j_g :

$$\frac{\partial}{\partial j_g}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = \frac{1}{C_d j + U_d} - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{D.17})$$

D.2.2 Derivada de α com relação à j_l

Deriva-se a Eq. (D.13) com relação a j_l :

$$\frac{\partial}{\partial j_l}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{D.19})$$

D.2.3 Derivada de α com relação à P

Deriva-se a Eq. (D.13) com relação a P :

$$\frac{\partial}{\partial P}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{D.21})$$

D.3 Correlação de Chexal-Lellouche

A correlação de (CHEXAL et al., 1997) cobre uma ampla faixa de condições e orientações de escoamento, assim como diferentes tipos de fluidos (vapor-água, ar-água e refrigerantes), tornando-a ajustável para sistemas de alta pressão como sistemas nucleares e também em sistemas na indústria de óleo e gás; por esta razão, a correlação foi implementada em vários códigos para análise termo-hidráulica.

Os parâmetros da correlação são contínuos, tem primeira derivada finita e restringem a fração de vazio a valores entre 0 e 1. Mais do que isso, os parâmetros satisfazem condições limites para pressões críticas, assim como para frações de vazio com valor igual a zero e um. A fração de vazio é determinada iterativamente e os parâmetros são dependentes das variáveis de estado.

O mapa de possíveis direções de escoamento de líquido e de gás é usualmente apresentado em termos dos quadrantes da Fig. D.1. Para escoamentos ascendentes tem-se que as velocidades tem sinal positivo, no escoamento descendente as velocidades tem sinal negativo e no caso de contra-corrente adota a velocidade de gás com sinal positivo e a velocidade de líquido com sinal negativo.

Figura D.1: Terminologia de direções do escoamento entre gás e líquido.

O modelagem apresenta uma dependência da inclinação local em todos os quadrantes com escoamentos fisicamente possíveis, onde a inclinação da tubulação θ é medida a partir da vertical. Portanto, adota-se $\theta = 0^\circ$ para inclinação horizontal e $\theta = 90^\circ$ para inclinação vertical. A inclinação local da tubulação sempre se encontra entre 0° e 90° .

- Parâmetro de orientação do escoamento (F_r)

A relação para se avaliar a dependência angular dos parâmetros é uma média ponderada entre o componente vertical e horizontal de cada parâmetro:

$$\zeta = F_r \zeta_v + (1 - F_r) \zeta_h \quad (\text{D.22})$$

onde ζ_v e ζ_h são os parâmetros do modelo avaliado, respectivamente, para o escoamento vertical e horizontal. F_r é o parâmetro de orientação do escoamento definido como:

$$F_r = \left(1 - \frac{\theta}{90}\right)^{0.2} \quad (\text{D.23})$$

onde θ é o ângulo local de orientação da tubulação medido a partir do eixo vertical.

- Parâmetro de distribuição (C_D)

$$C_d = \frac{L}{k_0 + (1 - k_0)\alpha^r} \quad (\text{D.24})$$

- Parâmetro Fluido Chexal-Lellouche L :

A escolha do parâmetro L é importante para o ajuste da correlação com os dados experimentais de fração de vazio. O parâmetro é definido de tal maneira que é assegurado o comportamento contínuo entre os limites de fração de vazio entre 0 e 1. Diferentes relações de L são usadas para diferentes fluidos, além de dependente da inclinação local. Escreve-se:

$$L = F_r L_v + (1 - F_r) L_r \quad (\text{D.25})$$

Tabela D.1: Termo L - Escoamento água-ar

	$L_v(\text{Vertical})$	$L_{1h}(\text{Horizontal})$
Co-corrente ascendente	$\min(1.15 \alpha^{0.45}, 1)$	$\min(1.125 \alpha^{0.6}, 1) * \min \left[1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2 \right]$
Contracorrente	$\min(1.15 \alpha^{0.45}, 1)$	$\min(1.125 \alpha^{0.6}, 1) * \min \left[1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2 \right]$
Co-corrente descendente	$\min(1.05 \alpha^{0.25}, 1)$	$\min(1.125 \alpha^{0.6}, 1) * \min \left[1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2 \right]$

- Parâmetros de correlação k_0 e r :

Os parâmetros k_0 e r são função de B_1 , o qual tem uma dependência da inclinação angular e da razão entre massa específicas (ρ_g/ρ_l). Tanto k_0 e r tem a mesma forma para os quadrantes considerados. Segue:

$$k_0 = B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \quad (\text{D.26})$$

$$r = \frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \quad (\text{D.27})$$

O termo B_1 é a média ponderada dos componentes vertical e horizontal, tal que:

$$B_1 = F_r B_{1v} + (1 - F_r) B_{1h} \quad (\text{D.28})$$

$$B_{1(v,h)} = \min(0.8, A_{1(v,h)}) \quad (\text{D.29})$$

$$A_{1(v,h)} = \frac{1}{1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)} \quad (\text{D.30})$$

As equações para A_1 e B_1 são as iguais para a orientação vertical e horizontal. A diferença entre elas está na escolha do número de Reynolds adotado.

$$Re_v = \begin{cases} Re_g & \text{for } Re_g > Re_l \\ Re_l & \text{for } Re_g < Re_l \end{cases} \quad (\text{D.31})$$

$$Re_h = \begin{cases} |Re_g| & \text{for } |Re_g| > |Re_l| \\ |Re_l| & \text{for } |Re_g| < |Re_l| \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

- Velocidade de deriva U_d :

A velocidade de deriva, U_d , para qualquer inclinação ($0 \leq \theta \leq 90$) é definida como:

$$U_d = 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g g_c}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \quad (\text{D.33})$$

onde σ é a tensão superficial, g é a aceleração da gravidade e g_c é um adimensional para conversão de unidades. Neste texto, adota-se $g_c = 1$.

- Parâmetro C_1 :

$$C_1 = (1 - a)^{C_{1x}} \quad (\text{D.34})$$

$$C_{1x} = F_r C_{1v} + (1 - F_r) C_{1h} \quad (\text{D.35})$$

O expoente de C_1 é função de B_1 , no qual se existe uma dependência da inclinação local. Além disso, C_{1x} tem uma dependência angular adicional devido à lógica de seleção da expressão que é função da direção do escoamento.

Tabela D.2: Parâmetro C_1

	C_{1v} (Vertical)	C_{1h} (Horizontal)
Co-corrente ascendente	B_{1v}	B_{1h}
Contracorrente	B_{1v}	B_{1h}
Co-corrente descendente	0.5	B_{1h}

- Parâmetro C_2 :

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) \leq 18 : C_2 = 0.4757 \left[\log \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} \right) \right]^{0.7} \quad (\text{D.36})$$

$$\text{Para } (\rho_f/\rho_g) < 18 : \begin{cases} \text{if } C_5 \geq 1, & C_2 = 1 \\ \text{if } C_5 < 1, & C_2 = 1 - \exp\left(\frac{-C_5}{1-C_5}\right) \end{cases} \quad (\text{D.37})$$

onde

$$C_5 = \sqrt{\frac{150}{(\rho_l/\rho_g)}} \quad (\text{D.38})$$

– Parâmetro C_3 :

$$C_3 = F_r C_{3v} + (1 - F_r) C_{3h} \quad (\text{D.39})$$

A determinação de C_3 é a mais complexa entre os parâmetros C_i . O modelo deve se adequar apropriadamente a cada um dos três quadrantes de operação e precisa apresentar uma transição suave entre eles.

Tabela D.3: Parâmetro C_3

	C_{3v} (Vertical)	C_{3h} (Horizontal)
Co-corrente ascendente	$\max \begin{cases} 0.5 \\ 2 \exp\left(\frac{-Re_f}{300000}\right) \end{cases}$	$\max \begin{cases} 0.125 \\ 0.5 \exp\left(\frac{-Re_f}{300000}\right) \end{cases}$
Contracorrente	$2 \left(\frac{C_{10}}{2}\right)^{B_2}$	$4.5 \left(\frac{Re_f}{450000}\right)^{0.19} + 0.5 \exp\left(\frac{- Re_f }{600}\right)$
Co-corrente descendente	$\min \left[10.2 \left(\frac{C_{10}}{2}\right)^{B_2} \right]$	$\max \begin{cases} 0.125 \\ 0.5 \exp\left(\frac{-Re_f}{300000}\right) \end{cases}$

No qual,

$$B_2 = \left[\frac{1}{1 + 0,05 \left(\frac{|Re_f|}{350000}\right)} \right]^{0.4} \quad (\text{D.40})$$

$$C_{10} = 2 \exp\left(\frac{|Re_f| + \Upsilon}{350000}\right)^{0.4} +$$

$$-1.7|Re_f|^{0.035} \exp\left[\frac{-|Re_f|}{35000 J_{f_{rx}} + 25000} \left(\frac{D_1}{D}\right)^2\right] +$$

$$[0.26 J_{f_{rx}} + 0.85 (1 - J_{f_{rx}})] \left(\frac{D_1}{D} \right)^{0.1} |Re_f|^{0.001} \quad (D.41)$$

onde $D_1 = 0.0381 m$

Tabela D.4: Parâmetros Υ e $J_{f_{rx}}$

	Υ (Vertical)	$J_{f_{rx}}$ (Horizontal)
Contracorrente	$8^{(0.5 D_1/D)} Re_g J_{f_{rx}} \exp \left(\frac{-10}{ Re_f } \right)$	$\left(1 - \frac{j_l}{j_{l(CCFL)}} \right)^Z$
Co-corrente descendente	0	1

Onde $j_{l(CCFL)}$ é a velocidade superficial do líquido no ponto de CCFL para velocidade de gás.

$$Z = \begin{cases} 0.8 & , \text{ para } \frac{j_l}{j_{l(CCFL)}} < 0.3 \\ 0.8 - \left(\frac{j_l}{j_{l(CCFL)}} - 0.3 \right) & \text{ para } \frac{j_l}{j_{l(CCFL)}} \geq 0.3 \end{cases} \quad (D.42)$$

Os termos Υ , Z e $J_{f_{rx}}$ atuam em conjunto no modelo de escoamento contra-corrente para que ambos se ajustem aos dados de fração de vazio e a linha de CCFL.

– Parâmetro C_4 :

$$C_4 = \begin{cases} 1 & C_7 \geq 1 \\ \frac{1}{1 - \exp(-C_8)} & C_7 < 1 \end{cases} \quad (D.43)$$

$$C_8 = \frac{C_7}{1 - C_7} \quad (D.44)$$

$$C_7 = \left(\frac{D_2}{D} \right)^{0.6} \quad (D.45)$$

onde $D_2 = 0.09144$

D.4 Derivada dos parâmetros e da correlação de **Chexal et al. (1997)** - Escoamento co-corrente ascendente

Nesta seção, apresenta-se a derivada dos coeficientes C_d e U_d para a correlação de **Chexal et al. (1997)** em função das variáveis j_g , j_l , P e α , como variáveis independentes.

D.4.1 Derivada de C_d e U_D em função de j_g

D.4.1.1 $\partial C_d / \partial j_g$

Pode-se escrever para C_d :

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{L}{K_0 + (1 - K_0) \alpha^r} \right] \quad (\text{D.46})$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_g} = \frac{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r] \frac{\partial L}{\partial j_g} - L \left[(1 - \alpha^r) \frac{\partial K_0}{\partial j_g} + (1 - K_0) \alpha^r \ln \alpha \frac{\partial r}{\partial j_g} \right]}{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r]^2} \quad (\text{D.47})$$

Onde,

$$\frac{\partial L}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [F_r L_v + (1 - F_r) L_h] \quad (\text{D.48})$$

$$\frac{\partial L}{\partial j_g} = F_r \frac{\partial L_v}{\partial j_g} + (1 - F_r) \frac{\partial L_h}{\partial j_g} \quad (\text{D.49})$$

Portanto,

$$\frac{\partial L_v}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [\min(0, 1.15 \alpha^{0.45})] = 0 \quad (\text{D.50})$$

$$\frac{\partial L_h}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \{ \min(1, 1.25 \alpha^{0.6}) [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \} = 0 \quad (\text{D.51})$$

$$\frac{\partial K_0}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \quad (\text{D.52})$$

Portanto,

$$\frac{\partial K_0}{\partial j_g} = \left[1 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \frac{\partial B_1}{\partial j_g} \quad (\text{D.53})$$

$$\frac{\partial r}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \right] \quad (\text{D.54})$$

Portanto,

$$\frac{\partial r}{\partial j_g} = \frac{\left[1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)\right]}{(1 - B_1)^2} \frac{\partial B_1}{\partial j_g} \quad (\text{D.55})$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [F_r B_{1,v} + (1 - F_r) B_{1,h}] \quad (\text{D.56})$$

Portanto,

$$\frac{\partial B_1}{\partial j_g} = F_r \frac{\partial B_{1,v}}{\partial j_g} + (1 - F_r) \frac{\partial B_{1,h}}{\partial j_g} \quad (\text{D.57})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [\min(0.8, A_{1(v,h)})] \quad (\text{D.58})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial j_g} = \begin{cases} 0 & A_{1(v,h)} \geq 0.8 \\ \frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_g} & A_{1(v,h)} < 0.8 \end{cases} \quad (\text{D.59})$$

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{1}{1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)} \right] \quad (\text{D.60})$$

Portanto,

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_g} = \frac{\exp(-Re_{v,h}/60000)}{[1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)]^2} \frac{\partial Re_{v,h}}{\partial j_g} \quad (\text{D.61})$$

$$\frac{\partial Re_v}{\partial j_g} = \begin{cases} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} & Re_g \geq Re_l \\ \frac{\partial Re_l}{\partial j_g} & Re_g < Re_l \end{cases} \quad (\text{D.62})$$

$$\frac{\partial Re_h}{\partial j_g} = \begin{cases} \frac{\partial |Re_g|}{\partial j_g} & |Re_g| \geq |Re_l| \\ \frac{\partial |Re_l|}{\partial j_g} & |Re_g| < |Re_l| \end{cases} \quad (\text{D.63})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g D j_g}{\mu_g} \right) \quad (\text{D.64})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_g} = \frac{\rho_g D}{\mu_g} \quad (\text{D.65})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\rho_l D j_l}{\mu_l} \right) = 0 \quad (\text{D.66})$$

O parâmetro L não é dependente de j_g , pois α é considerado uma variável independente nesta dedução.

D.4.1.2 $\partial U_d / \partial j_g$

Pode-se escrever para U_D :

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left\{ 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \right\} \quad (D.67)$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_g} = 1.41 C_4 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} \left(C_2 C_3 \frac{\partial C_1}{\partial j_g} + C_1 C_3 \frac{\partial C_2}{\partial j_g} + C_1 C_2 \frac{\partial C_3}{\partial j_g} \right) \quad (D.68)$$

Onde,

$$\frac{\partial C_1}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[(1 - \alpha)^{B_1} \right] = \frac{\partial}{\partial j_g} \{ \exp [B_1 \ln (1 - \alpha)] \} \quad (D.69)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial j_g} = \ln (1 - \alpha) (1 - \alpha)^{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial j_g} \quad (D.70)$$

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) \leq 18 : \frac{\partial C_2}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left\{ 0.4757 \left[\ln \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} \right) \right]^{0.7} \right\} = 0 \quad (D.71)$$

Portanto,

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) < 18 : \begin{cases} \text{if } C_5 \geq 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_g} = 0 \\ \text{if } C_5 < 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[1 - \exp \left(\frac{-C_5}{1 - C_5} \right) \right] = \frac{-\frac{\partial C_5}{\partial j_g} \exp \left(\frac{-C_5}{1 - C_5} \right)}{(1 - C_5)^2} \end{cases} \quad (D.72)$$

$$\frac{\partial C_5}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\left(\frac{150}{\rho_l / \rho_g} \right)^{0.5} \right] = 0 \quad (D.73)$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [F_r C_{3,v} + (1 - F_r) C_{3,h}] \quad (D.74)$$

Portanto,

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_g} = F_r \frac{\partial C_{3,v}}{\partial j_g} + (1 - F_r) \frac{\partial C_{3,h}}{\partial j_g} \quad (D.75)$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \{ \min [0.5, 2 \exp (-Re_l / 300000)] \} \quad (D.76)$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_g} = \begin{cases} \frac{-2 \exp(-Re_l/300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_g} & C_{3v} \geq 0.5 \\ 0 & C_{3v} < 0.5 \end{cases} \quad (D.77)$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \{ \min [0.125, 0.5 \exp(-Re_l/300000)] \} \quad (D.78)$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_g} = \begin{cases} \frac{-0.5 \exp(-Re_l/300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_g} & C_{3h} \geq 0.125 \\ 0 & C_{3h} < 0.125 \end{cases} \quad (D.79)$$

O parâmetro C_4 não é dependente de j_g .

D.4.2 Derivada de C_d e U_d em função de j_l

D.4.2.1 $\partial C_d / \partial j_l$

Pode-se escrever para C_d :

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{L}{K_0 + (1 - K_0) \alpha^r} \right] \quad (D.80)$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_l} = \frac{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r] \frac{\partial L}{\partial j_l} - L \left[(1 - \alpha^r) \frac{\partial K_0}{\partial j_l} + (1 - K_0) \alpha^r \ln \alpha \frac{\partial r}{\partial j_l} \right]}{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r]^2} \quad (D.81)$$

Onde,

$$\frac{\partial B_1}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [F_r L_v + (1 - F_r) L_h] \quad (D.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial j_l} = F_r \frac{\partial L_v}{\partial j_l} + (1 - F_r) \frac{\partial L_h}{\partial j_l} \quad (D.83)$$

Portanto,

$$\frac{\partial L_v}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [\min(0, 1.15 \alpha^{0.45})] = 0 \quad (D.84)$$

$$\frac{\partial L_h}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \min(1, 1.25 \alpha^{0.6}) [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \} = 0 \quad (D.85)$$

$$\frac{\partial K_0}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \quad (\text{D.86})$$

Portanto,

$$\frac{\partial K_0}{\partial j_l} = \left[1 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \frac{\partial B_1}{\partial j_l} \quad (\text{D.87})$$

$$\frac{\partial r}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \right] \quad (\text{D.88})$$

Portanto,

$$\frac{\partial r}{\partial j_l} = \frac{\left[1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \right]}{(1 - B_1)^2} \frac{\partial B_1}{\partial j_l} \quad (\text{D.89})$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [F_r B_{1,v} + (1 - F_r) B_{1,h}] \quad (\text{D.90})$$

Portanto,

$$\frac{\partial B_1}{\partial j_l} = F_r \frac{\partial B_{1,v}}{\partial j_l} + (1 - F_r) \frac{\partial B_{1,h}}{\partial j_l} \quad (\text{D.91})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [\min(0.8, A_{1(v,h)})] \quad (\text{D.92})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial j_l} = \begin{cases} 0 & A_{1(v,h)} \geq 0.8 \\ \frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_l} & A_{1(v,h)} < 0.8 \end{cases} \quad (\text{D.93})$$

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{1}{1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)} \right] \quad (\text{D.94})$$

Portanto,

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial j_l} = \frac{\exp(-Re_{v,h}/60000)}{[1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)]^2} \frac{\partial Re_{v,h}}{\partial j_l} \quad (\text{D.95})$$

$$\frac{\partial Re_v}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{\partial Re_g}{\partial j_l} & Re_g \geq Re_l \\ \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} & Re_g < Re_l \end{cases} \quad (\text{D.96})$$

$$\frac{\partial Re_h}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{\partial |Re_g|}{\partial j_l} & |Re_g| \geq |Re_l| \\ \frac{\partial |Re_l|}{\partial j_l} & |Re_g| < |Re_l| \end{cases} \quad (\text{D.97})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g D j_g}{\mu_g} \right) = 0 \quad (\text{D.98})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_l} = \frac{\rho_g D}{\mu_g} \quad (\text{D.99})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\rho_l D j_l}{\mu_l} \right) = 0 \quad (\text{D.100})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{\rho_l D}{\mu_l} \quad (\text{D.101})$$

O parâmetro L não é dependente de j_l , pois α é considerado uma variável independente nesta dedução.

D.4.2.2 $\partial U_d / \partial j_l$

Pode-se escrever para U_d :

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left\{ 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \right\} \quad (\text{D.102})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_l} = 1.41 C_4 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} \left(C_2 C_3 \frac{\partial C_1}{\partial j_l} + C_1 C_3 \frac{\partial C_2}{\partial j_l} + C_1 C_2 \frac{\partial C_3}{\partial j_l} \right) \quad (\text{D.103})$$

Onde,

$$\frac{\partial C_1}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[(1 - \alpha)^{B_1} \right] = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \exp [B_1 \ln (1 - \alpha)] \} \quad (\text{D.104})$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial j_l} = \ln (1 - \alpha) (1 - \alpha)^{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial j_l} \quad (\text{D.105})$$

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) \leq 18 : \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left\{ 0.4757 \left[\ln \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} \right) \right]^{0.7} \right\} = 0 \quad (\text{D.106})$$

Portanto,

$$\text{Para } (\rho_f/\rho_g) < 18 : \begin{cases} \text{if } C_5 \geq 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = 0 \\ \text{if } C_5 < 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[1 - \exp \left(\frac{-C_5}{1-C_5} \right) \right] = \frac{-\frac{\partial C_5}{\partial j_l} \exp \left(\frac{-C_5}{1-C_5} \right)}{(1-C_5)^2} \end{cases} \quad (\text{D.107})$$

$$\frac{\partial C_5}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\left(\frac{150}{\rho_l/\rho_g} \right)^{0.5} \right] = 0 \quad (\text{D.108})$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [F_r C_{3,v} + (1 - F_r) C_{3,h}] \quad (\text{D.109})$$

Portanto,

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_l} = F_r \frac{\partial C_{3,v}}{\partial j_l} + (1 - F_r) \frac{\partial C_{3,h}}{\partial j_l} \quad (\text{D.110})$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \min [0.5, 2 \exp (-Re_l/300000)] \} \quad (\text{D.111})$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{-2 \exp (-Re_l/300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} & C_{3v} \geq 0.5 \\ 0 & C_{3v} < 0.5 \end{cases} \quad (\text{D.112})$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \min [0.125, 0.5 \exp (-Re_l/300000)] \} \quad (\text{D.113})$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{-0.5 \exp (-Re_l/300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} & C_{3h} \geq 0.125 \\ 0 & C_{3h} < 0.125 \end{cases} \quad (\text{D.114})$$

O parâmetro C_4 não é dependente de j_l .

D.4.3 Derivada de C_d e U_d em função de P

D.4.3.1 $\partial C_d / \partial P$

Pode-se escrever para C_d :

$$\frac{\partial C_d}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{L}{K_0 + (1 - K_0) \alpha^r} \right] \quad (\text{D.115})$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial P} = \frac{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r] \frac{\partial L}{\partial P} - L \left[(1 - \alpha^r) \frac{\partial K_0}{\partial P} + (1 - K_0) \alpha^r \ln \alpha \frac{\partial r}{\partial P} \right]}{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r]^2} \quad (\text{D.116})$$

Onde,

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} [F_r L_v + (1 - F_r) L_h] \quad (\text{D.117})$$

Portanto,

$$\frac{\partial L}{\partial P} = F_r \frac{\partial L_v}{\partial P} + (1 - F_r) \frac{\partial L_h}{\partial P} \quad (\text{D.118})$$

$$\frac{\partial L_v}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} [\min(0, 1.15 \alpha^{0.45})] = 0 \quad (\text{D.119})$$

$$\frac{\partial L_h}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \{ \min(1, 1.25 \alpha^{0.6}) [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \} = 0 \quad (\text{D.120})$$

$$\frac{\partial K_0}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \quad (\text{D.121})$$

Portanto,

$$\frac{\partial K_0}{\partial P} = \left[1 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] \frac{\partial B_1}{\partial P} + 0.25 \left(\frac{1 - B_1}{\rho_l^{0.25}} \right) \rho_g^{-0.75} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \quad (\text{D.122})$$

$$\frac{\partial r}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \right] \quad (\text{D.123})$$

Portanto,

$$\frac{\partial r}{\partial P} = \frac{\frac{1.57(1 - B_1)}{\rho_L} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \left[1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \right] \frac{\partial B_1}{\partial P}}{(1 - B_1)^2} \quad (\text{D.124})$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} [F_r B_{1,v} + (1 - F_r) B_{1,h}] \quad (\text{D.125})$$

Portanto,

$$\frac{\partial B_1}{\partial P} = F_r \frac{\partial B_{1,v}}{\partial P} + (1 - F_r) \frac{\partial B_{1,h}}{\partial P} \quad (\text{D.126})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} [\min(0.8, A_{1,(v,h)})] \quad (\text{D.127})$$

$$\frac{\partial B_{1(v,h)}}{\partial P} = \begin{cases} 0 & A_{1(v,h)} \geq 0.8 \\ \frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial P} & A_{1(v,h)} < 0.8 \end{cases} \quad (\text{D.128})$$

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1}{1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)} \right] \quad (\text{D.129})$$

Portanto,

$$\frac{\partial A_{1(v,h)}}{\partial P} = \frac{1}{60000} \frac{\exp(-Re_{v,h}/60000)}{[1 + \exp(-Re_{v,h}/60000)]^2} \frac{\partial Re_{v,h}}{\partial P} \quad (\text{D.130})$$

$$\frac{\partial Re_v}{\partial P} = \begin{cases} \frac{\partial Re_g}{\partial P} & Re_g \geq Re_l \\ \frac{\partial Re_l}{\partial P} & Re_g < Re_l \end{cases} \quad (\text{D.131})$$

$$\frac{\partial Re_h}{\partial P} = \begin{cases} \frac{\partial |Re_g|}{\partial P} & |Re_g| \geq |Re_l| \\ \frac{\partial |Re_l|}{\partial P} & |Re_g| < |Re_l| \end{cases} \quad (\text{D.132})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g D j_g}{\mu_g} \right) = \frac{j_g D}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \quad (\text{D.133})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\rho_l D j_l}{\mu_l} \right) = 0 \quad (\text{D.134})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{1}{R_g T_g} \quad (\text{D.135})$$

O parâmetro L não é dependente de P , pois α é considerado uma variável independente nesta dedução.

D.4.3.2 $\partial U_d / \partial P$

Pode-se escrever para U_d :

$$\frac{\partial U_d}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left\{ 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \right\} \quad (\text{D.136})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial P} = 1.41 C_4 \left[\frac{\sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} \left\{ \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} \left(C_2 C_3 \frac{\partial C_1}{\partial P} + \right. \right. \quad (\text{D.137})$$

$$C_1 C_3 \frac{\partial C_2}{\partial P} + C_1 C_2 \frac{\partial C_3}{\partial P} \Big) - 0.25 C_1 C_2 C_3 \rho_g^{-0.75} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \Big\} \quad (\text{D.138})$$

Onde,

$$\frac{\partial C_1}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[(1 - \alpha)^{B_1} \right] = \frac{\partial}{\partial P} \{ \exp [B_1 \ln (1 - \alpha)] \} \quad (\text{D.139})$$

Portanto,

$$\frac{\partial C_1}{\partial P} = \ln (1 - \alpha) (1 - \alpha)^{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial P} \quad (\text{D.140})$$

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) \leq 18 : \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left\{ 0.4757 \left[\ln \left(\frac{\rho_f}{\rho_g} \right) \right]^{0.7} \right\} = 0 \quad (\text{D.141})$$

Portanto,

$$\text{Para } (\rho_f / \rho_g) < 18 : \begin{cases} \text{if } C_5 \geq 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = 0 \\ \text{if } C_5 < 1, & \frac{\partial C_2}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[1 - \exp \left(\frac{-C_5}{1-C_5} \right) \right] = \frac{-\frac{\partial C_5}{\partial j_l} \exp \left(\frac{-C_5}{1-C_5} \right)}{(1-C_5)^2} \end{cases} \quad (\text{D.142})$$

$$\frac{\partial C_5}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\left(\frac{150}{\rho_l / \rho_g} \right)^{0.5} \right] = 0 \quad (\text{D.143})$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [F_r C_{3,v} + (1 - F_r) C_{3,h}] \quad (\text{D.144})$$

Portanto,

$$\frac{\partial C_3}{\partial j_l} = F_r \frac{\partial C_{3,v}}{\partial j_l} + (1 - F_r) \frac{\partial C_{3,h}}{\partial j_l} \quad (\text{D.145})$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \min [0.5, 2 \exp (-Re_l / 300000)] \} \quad (\text{D.146})$$

$$\frac{\partial C_{3v}}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{-2 \exp (-Re_l / 300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} & C_{3v} \geq 0.5 \\ 0 & C_{3v} < 0.5 \end{cases} \quad (\text{D.147})$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \{ \min [0.125, 0.5 \exp (-Re_l / 300000)] \} \quad (\text{D.148})$$

$$\frac{\partial C_{3h}}{\partial j_l} = \begin{cases} \frac{-0.5 \exp(-Re_l/300000)}{300000} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} & C_{3h} \geq 0.125 \\ 0 & C_{3h} < 0.125 \end{cases} \quad (D.149)$$

O parâmetro C_4 não é dependente de P .

D.4.4 Derivadas de C_d e U_d em função de α

D.4.4.1 $\partial C_d / \partial \alpha$

Pode-se escrever para C_d :

$$\frac{\partial C_d}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{L}{K_0 + (1 - K_0) \alpha^r} \right] \quad (D.150)$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial \alpha} = \frac{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r] \frac{\partial L}{\partial \alpha} - L \left[(1 - \alpha^r) \frac{\partial K_0}{\partial \alpha} + (1 - K_0) \alpha^r \left(\ln \alpha \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{r}{\alpha} \right) \right]}{[K_0 + (1 - K_0) \alpha^r]^2} \quad (D.151)$$

Onde,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [F_r L_v + (1 - F_r) L_h] \quad (D.152)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = F_r \frac{\partial L_v}{\partial \alpha} + (1 - F_r) \frac{\partial L_h}{\partial \alpha} \quad (D.153)$$

$$\frac{\partial L_v}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\min(1, 1.15 \alpha^{0.45})] \quad (D.154)$$

Portanto,

$$\frac{\partial L_v}{\partial \alpha} = \begin{cases} 0 & L_v \geq 1 \\ 0.5175 \alpha^{-0.55} & L_v < 1 \end{cases} \quad (D.155)$$

$$\frac{\partial L_h}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \min(1, 1.25 \alpha^{0.6}) [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \} \quad (D.156)$$

Se $L_{h0} = 1.25 \alpha^{0.6} \geq 1$, então:

$$\frac{\partial L_h}{\partial \alpha} = 0.05 \alpha - 0.95 (1 - \alpha)^2 - 2 \alpha^{0.05} (1 - \alpha) \quad (D.157)$$

Se $L_{h0} = 1.25 \alpha^{0.6} < 1$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_h}{\partial \alpha} = 1.25 \alpha^{0.6} [0.05 \alpha^{-0.95} (1 - \alpha)^2 - 2 \alpha^{0.05} (1 - \alpha)] \\ + 0.75 \alpha^{-0.4} [1 + \alpha^{0.05} (1 - \alpha)^2] \end{aligned} \quad (\text{D.158})$$

$$\frac{\partial K_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B_1 + (1 - B_1) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.25} \right] = 0 \quad (\text{D.159})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1 + 1.57 \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)}{1 - B_1} \right] = 0 \quad (\text{D.160})$$

Os parâmetros K_0 , r e B_1 não são dependentes de α .

D.4.4.2 $\partial U_d / \partial \alpha$

Pode-se escrever para U_d :

$$\frac{\partial U_d}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_1 C_2 C_3 C_4 \right\} \quad (\text{D.161})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial \alpha} = 1.41 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) \sigma g}{\rho_l^2} \right]^{0.25} C_2 C_3 C_4 \frac{\partial C_1}{\partial \alpha} \quad (\text{D.162})$$

Onde,

$$\frac{\partial C_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - \alpha)^{B_1} \right] = -B_1 (1 - \alpha)^{B_1-1} \quad (\text{D.163})$$

Os parâmetros C_2 , C_3 , C_4 e B_1 não são dependentes de α .

APÊNDICE E – DEDUÇÃO DAS RELAÇÕES PARA ESCOAMENTO ESTRATIFICADO

Neste Apêndice é apresentado as relações para o escoamento estratificado água-ar baseado na abordagem original de (TAITEL; DUKLER, 1976) com tubulação horizontal e levemente inclinada. Serão deduzidas as relações para o cálculo da fração de vazio, da perda de carga por atrito e das derivadas dessas relações em função das variáveis j_g , j_l e P .

Baseado na Fig. E.1 e na abordagem de (TAITEL; DUKLER, 1976), as seguintes equações de conservação de momento para as duas fases podem ser escritas:

$$- A_l \frac{dP}{ds} - \tau_{wl} S_l + \tau_i S_i + \rho_l A_l g \sin \theta = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$- A_g \frac{dP}{ds} - \tau_{wg} S_g - \tau_i S_i + \rho_g A_g g \sin \theta = 0 \quad (\text{E.2})$$

onde P é a pressão, s é a posição ao longo da tubulação, τ_{wg} , τ_{wl} e τ_i são as tensões de cisalhamento, respectivamente, entre gás e a parede, entre o líquido e a parede e entre a interface gás-líquido. S_g , S_l e S_i são, respectivamente, o perímetro molhado do gás, o perímetro molhado do líquido e o perímetro molhado na interface gás-líquido.

Quando as Eqs. (E.1) e (E.2) são combinadas, obtém-se a fração de vazio e a queda de pressão por atrito para o escoamento estratificado.

Figura E.1: Definição para escoamento estratificado

E.1 Fração de vazio

Baseado em (BALIÑO, 2008), combina-se as Eqs. (E.1) e (E.2), eliminando-se a queda de pressão total, obtém-se:

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{A_g} - \frac{\tau_{wl} S_l}{A_l} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{A_g} + \frac{1}{A_l} \right) + (\rho_l - \rho_g) g \sin \theta = 0 \quad (\text{E.3})$$

A Eq. (E.3) pode ser reescrita em termos da fração de vazio α e, portanto:

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta = 0 \quad (\text{E.4})$$

A fração de vazio para o escoamento estratificado pode ser estimada implicitamente pela resolução da Eq. (E.4). Onde,

$$\tau_{wg} = \frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \quad (\text{E.5})$$

$$\tau_{wl} = \frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (\text{E.6})$$

$$\tau_i = \frac{1}{8} \rho_g f_i \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left| \frac{j_g}{\alpha} - u_i \right| \quad (\text{E.7})$$

O termos f_g , f_l são os fatores de atrito de Darcy para a fase gasosa e para fase líquida,

respectivamente, calculados a partir de (CHEN, 1979) e u_i é a velocidade média na interface gás-líquido que é estimada como:

$$u_i = \frac{\varepsilon j_l}{1 - \alpha} \quad (\text{E.8})$$

onde $\varepsilon = 1.8$ se $Re_l \leq 2000$ e $\varepsilon = 1$ se $Re_l > 2200$. O fator de atrito na interface f_i , como em (BALIÑO, 2008), é admitido constante e $f_i = 0.0142$. De maneira simplificada escreve-se:

$$f_{g,l} = f_{g,l}(Re_{g,l}, D_{g,l}) \quad (\text{E.9})$$

onde $Re_{g,l}$ e $D_{g,l}$ se referem ao número de Reynolds e ao diâmetro hidráulico de cada fase. Pode-se escrever:

$$Re_g = \frac{\rho_g D_g |j_g|}{\mu_g \alpha} \quad (\text{E.10})$$

$$Re_l = \frac{\rho_l D_l |j_l|}{\mu_l (1 - \alpha)} \quad (\text{E.11})$$

$$D_g = \frac{4 \alpha A}{S_g + S_i} \quad (\text{E.12})$$

$$D_l = \frac{4 (1 - \alpha) A}{S_l} \quad (\text{E.13})$$

Os perímetros molhados S_g , S_l e S_i podem ser obtidos a partir de uma análise geométrica da Fig. E.2, que representa a seção transversal de um tubo durante um escoamento estratificado.

$$S_g = (1 - \gamma) \pi D \quad (\text{E.14})$$

$$S_l = \gamma \pi D \quad (\text{E.15})$$

$$S_i = D \sin(\pi\gamma) \quad (\text{E.16})$$

A fração de vazio pode ser calculada geometricamente a partir das relações entre as áreas das fases gasosa e líquida. Da Fig. E.2, a área da fase líquida pode ser escrita em função de γ , pois ela é formada pela áreas do triângulo EOB, A_{EOB} , e pela região da circunferência delimitada pelos pontos EOBC, A_{EOBC} . Escreve-se:

Figura E.2: Representação geométrica das variáveis.

$$A_l = A_{EOB} + EOBC \quad (\text{E.17})$$

$$A_l = \frac{1}{2} \frac{D^2}{4} \sin(2\pi - 2\pi\gamma) + \frac{2\pi\gamma}{2\pi} A \quad (\text{E.18})$$

A área referente à fase gasosa por ser escrita como:

$$A_g = A - A_l \quad (\text{E.19})$$

E, portanto,

$$\alpha A = A - \frac{1}{2} \frac{D^2}{4} \sin(2\pi - 2\pi\gamma) - \frac{2\pi\gamma}{2\pi} A \quad (\text{E.20})$$

Divide-se a Eq. (E.20) por A e rearranjando-a, tem-se:

$$\alpha + \gamma - \frac{\sin(2\pi\gamma)}{2\pi} - 1 = 0 \quad (\text{E.21})$$

Pode-se mostrar facilmente que o ângulo $E\hat{O}B$ é do dobro do ângulo $E\hat{C}O$ e, portanto, escreve-se:

$$\tan\left(\frac{\pi - \gamma\pi}{2}\right) = \frac{S_i}{2h_l} \quad (\text{E.22})$$

E, portanto, define-se o nível de líquido como:

$$h_l = \frac{S_i}{2 \tan \left(\frac{\pi - \gamma \pi}{2} \right)} \quad (\text{E.23})$$

Analisando-se a Eq. (E.23) e a Fig.E.2 pode-se afirmar que para $\gamma = 0$ resulta em $h_l = 0$ e para $\gamma = 1$ resulta em $h_l = D$.

Nesta seção todas as derivadas do fator de atrito Darcy com relação ao número de Reynolds e ao diâmetro não serão deduzidos. A dedução das relações baseadas na correlação de (CHEN, 1979) encontra-se no Apêndice G.

E.1.1 Derivadas da fração de vazio em função de j_g

Deriva-se a relação implícita Eq. (E.4) com relação a j_g :

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) Ag \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{E.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_g} \left(- \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] = 0 \quad (\text{E.25})$$

E.1.1.1 Primeiro termo da Eq. (E.25)

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.26})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_g} + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.27})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_g} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.28})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g(Re_g(\alpha(j_g), j_g), D_g(\alpha(j_g))) \quad (\text{E.29})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.30})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_g} = \frac{4 A \rho_g}{\mu_g (S_g + S_i)} \quad (\text{E.31})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_g j_g}{\mu_g (S_g + S_i)^2} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{E.32})$$

$$\frac{\partial D_g}{\partial \alpha} = 4A \left[\frac{1}{S_g + S_i} - \frac{\alpha}{(S_g + S_i)^2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (\text{E.33})$$

onde

$$\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} = \frac{-\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{E.34})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} = \frac{\pi D \cos(\gamma\pi)}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{E.35})$$

Substitui-se as Eqs. (E.27), (E.30) e (E.28) na Eq. (E.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) &= \frac{S_g}{\alpha} \left[\frac{\rho_g j_g^2}{8\alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \\ &+ \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.36) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) &= \frac{S_g j_g \rho_g}{4 \alpha^3} \left(f_g + \frac{j_g}{2} \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} \right) + \\ &\left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4 \alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \Theta_{1,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.38})$$

E.1.1.2 Segundo termo da Eq. (E.25)

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = -\frac{S_l}{1-\alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \frac{\partial S_l}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.39})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1-\alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.40})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_g} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.41})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l(Re_l(\alpha(j_g)), D_l(\alpha(j_g))) \quad (\text{E.42})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.43})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_l j_l}{\mu_l S_l^2} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \quad (\text{E.44})$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A}{S_l} \left(1 + \frac{1-\alpha}{S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{E.45})$$

onde

$$\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} = \frac{\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{E.46})$$

Substitui-se as Eqs. (E.40), (E.43) e (E.41) na Eq. (E.39), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\frac{S_l}{1-\alpha} \left[\frac{\rho_l j_l^2}{8 (1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \\ & - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.47) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = - \left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4 (1-\alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \frac{S_l}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.48})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.49})$$

E.1.1.3 Terceiro termo da Eq. (E.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial j_g} + \\ &+ \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.50})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{E.51})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \frac{\partial u_i}{\partial j_g} \right) \quad (\text{E.52})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial j_g} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.53})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_g é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial j_g} = \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.54})$$

Substitui-se a Eq. (E.54) em Eq. (E.52), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \left[\frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \right\} \quad (\text{E.55})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4 \alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.56})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4 \alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.57})$$

Substitui-se as Eqs. (E.57) e (E.53) na Eq. (E.50), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left[\frac{\psi f_i \rho_g}{4 \alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \\ &+ \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.58) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] &= \frac{\psi S_i f_i \rho_g}{4 \alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \\ &+ \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1 - \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] = \Theta_{3,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.60})$$

E.1.1.4 Função $\partial \alpha / \partial j_g$ simplificada

A partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (E.25), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente $\partial \alpha / \partial j_g$. A Eq. (E.25) pode ser reescrita em função das Eqs. (E.60), (E.49) e (E.38), tal que:

$$\Theta_{1,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \Theta_{3,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = 0 \quad (\text{E.61})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = - \frac{\Theta_{1,g} + \Theta_{3,g}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right]} \quad (\text{E.62})$$

E.1.2 Derivadas da fração de vazio em função de j_l

Deriva-se a relação implícita Eq. (E.4) com relação a j_l :

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{E.63})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_l} \left(- \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] = 0 \quad (\text{E.64})$$

E.1.2.1 Primeiro termo da Eq. (E.64)

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.65})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_l} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.66})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_l} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.67})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g(Re_g(\alpha(j_l)), D_g(\alpha(j_l))) \quad (\text{E.68})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_l} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.69})$$

Substitui-se Eq. (E.66), (E.69) e (E.28) na Eq. (E.65), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{4 \alpha} \left[\frac{\rho_g j_g^2}{2 \alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.70})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.70) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4 \alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.71})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.72})$$

E.1.2.2 Segundo termo da Eq. (E.64)

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = -\frac{S_l}{1 - \alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \frac{\partial S_l}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.73})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l f_l j_l}{4 (1 - \alpha)^2} + \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.74})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_l} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.75})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l(Re_l(\alpha(j_l), j_l), D_l(\alpha(j_l))) \quad (\text{E.76})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.77})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{4 A \rho_l}{\mu_l S_l} \quad (\text{E.78})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_l j_l}{\mu_l S_l^2} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \quad (\text{E.79})$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \alpha} = -\frac{4A}{S_l} \left(1 + \frac{1-\alpha}{S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{E.80})$$

onde

$$\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} = \frac{\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{E.81})$$

Substitui-se as Eqs. (E.74), (E.77) e (E.75) na Eq. (E.73), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\frac{S_l}{4(1-\alpha)} \left[\frac{\rho_l f_l j_l}{(1-\alpha)^2} + \frac{\rho_l j_l^2}{2(1-\alpha)^2} \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{(1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{E.82})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.82) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\frac{S_l \rho_l j_l}{4(1-\alpha)^3} \left[f_l + \frac{j_l}{2} \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} \right] + \\ & - \left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4(1-\alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \frac{S_l}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{E.83})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = \Theta_{2,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.84})$$

E.1.2.3 Terceiro termo da Eq. (E.64)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = & S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial j_l} + \\ & + \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{E.85})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{E.86})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(-\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \frac{\partial u_i}{\partial j_l} \right) \quad (\text{E.87})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial j_l} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.88})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_l é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial j_l} = \frac{\varepsilon}{1 - \alpha} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.89})$$

Substitui-se a Eq. (E.89) em Eq. (E.87), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left\{ -\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \left[\frac{\varepsilon}{1 - \alpha} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \right\} \quad (\text{E.90})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = -\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4 (1 - \alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.91})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = -\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4 (1 - \alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.92})$$

Substitui-se as Eq. (E.92) e (E.88) na Eq. (E.85), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left[-\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4 (1 - \alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \\ &+ \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{E.93})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.93) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] &= -\frac{\psi \varepsilon S_i f_i \rho_g}{4 (1 - \alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \\ &+ \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1 - \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{E.94})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = \Theta_{3,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.95})$$

E.1.2.4 Função $\partial \alpha / \partial j_l$ simplificada

As partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (E.64), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente $\partial \alpha / \partial j_l$. A Eq. (E.64) pode ser reescrita em função das Eqs. (E.95), (E.84) e (E.72), tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \Theta_{2,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \Theta_{3,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = 0 \quad (\text{E.96})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = - \frac{\Theta_{2,l} + \Theta_{3,l}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right]} \quad (\text{E.97})$$

E.1.3 Derivadas da fração de vazio em função de P

Deriva-se a relação implícita Eq. (E.4) com relação a P :

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{E.98})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left(- \frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial P} [(\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta] = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.99})$$

E.1.3.1 Primeiro termo da Eq. (E.99)

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial P} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.100})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{f_g j_g^2}{8 \alpha^2 R_g T_g} + \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial P} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.101})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial P} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.102})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g(Re_g(\alpha(P), P), D_g(\alpha(P))) \quad (\text{E.103})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.104})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial P} = \frac{4 A j_g}{R_g T_g \mu_g (S_g + S_i)} \quad (\text{E.105})$$

Substitui-se Eqs. (E.101), (E.104) e (E.102) na Eq. (E.100), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) &= \frac{S_g}{4 \alpha} \left[\frac{f_g j_g^2}{2 \alpha^2 R_g T_g} + \frac{\rho_g j_g^2}{2 \alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{E.106})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.106) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) &= \frac{S_g j_g^2}{8 \alpha^3} \left(\frac{f_g}{R_g T_g} + \rho_g \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} \right) + \\ &\quad \left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4 \alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{E.107})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \Theta_{1,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.108})$$

E.1.3.2 Segundo termo da Eq. (E.99)

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = -\frac{S_l}{1-\alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \frac{\partial S_l}{\partial P} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.109})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1-\alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial P} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.110})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial P} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.111})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l(Re_l(\alpha(P)), D_l(\alpha(P))) \quad (\text{E.112})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.113})$$

Substitui-se as Eqs. (E.110), (E.111) e (E.113) na Eq. (E.109), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\frac{S_l}{4 (1-\alpha)} \left[\frac{\rho_l j_l^2}{2 (1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{(1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] + \\ & -\frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{E.114})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.114) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = - \left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4 (1-\alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \frac{S_l}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.115})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.116})$$

E.1.3.3 Terceiro termo da Eq. (E.99)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial P} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial P} + \\ &+ \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{E.117})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{E.118})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial P} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.119})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α .

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 + \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(-\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \frac{\partial u_i}{\partial P} \right) \quad (\text{E.120})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_g é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial P} = \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.121})$$

Substitui-se a Eq. (E.121) na Eq. (E.120), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \quad (\text{E.122})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.123})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.124})$$

Substitui-se as Eqs. (E.124) e (E.119) na Eq. (E.117), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left[\frac{\psi f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right]$$

$$+ \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.125})$$

Reorganiza-se a Eq. (E.125) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= \frac{\psi S_i f_i}{8 R_g T_g} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 + \\ &+ \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{E.126})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = \Theta_{3,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.127})$$

E.1.3.4 Quarto termo da Eq. (E.99)

$$\frac{\partial}{\partial P} [(\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta] = 0 \quad (\text{E.128})$$

Portanto,

$$\Theta_{4,p} = - \frac{A g \sin \theta}{R_g T_g} \quad (\text{E.129})$$

E.1.3.5 Função $\partial \alpha / \partial P$ simplificada

As partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (E.99), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente $\partial \alpha / \partial P$. A Eq. (E.99) pode ser reescrita em função das Eqs. (E.108), (E.116), (E.127) e (E.129) tal que:

$$\Theta_{1,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \Theta_{3,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \Theta_{4,p} \quad (\text{E.130})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{\Theta_{1,p} + \Theta_{3,p} + \Theta_{4,p}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right]} \quad (\text{E.131})$$

E.2 Queda de pressão devido ao atrito

A partir da combinação das Eqs. (E.1) e (E.2), escreve-se:

$$\frac{dP}{ds} + \frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} + g \sin \theta \left(\frac{\rho_g A_g + \rho_l A_l}{A} \right) = 0 \quad (\text{E.132})$$

onde as seguintes relações podem ser escritas:

$$\left. \frac{dP}{ds} \right|_A = \frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \quad (\text{E.133})$$

$$\tau_{wg} = \frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \quad (\text{E.134})$$

$$\tau_{wl} = \frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (\text{E.135})$$

Pode-se obter uma relação equivalente para o multiplicador de duas fases ϕ_{f0}^2 para um escoamento estratificado. As Eqs. (3.5), (E.133), (E.134) e (E.135) são combinadas e o multiplicador de duas fases pode ser escrito como:

$$\phi_{f0}^2 \left(\frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) = \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) \frac{S_g}{A} + \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \right) \frac{S_l}{A} \quad (\text{E.136})$$

Resultando em:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{\rho_l}{\pi D G^2} \left[\frac{f_g S_g \rho_g j_g^2}{f_l \alpha^2} + \frac{S_l \rho_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \right] \quad (\text{E.137})$$

E.2.1 Derivada da queda de pressão com relação a j_g

Deriva-se a Eq. (E.133) em função de j_g :

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{dP}{ds} \right|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{E.138})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{dP}{ds} \right|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial j_g} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial j_g} \right) \quad (\text{E.139})$$

Onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_g} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} \quad (\text{E.140})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{8 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.141})$$

E.2.2 Derivada da queda de pressão com relação a j_l

Deriva-se a Eq. (E.133) em função de j_l

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{E.142})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial j_l} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial j_l} \right) \quad (\text{E.143})$$

Onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_l} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.144})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{2 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \frac{\rho_l f_l j_l}{4 (1 - \alpha)^2} \quad (\text{E.145})$$

E.2.3 Derivada da queda de pressão com relação a P

Deriva-se a Eq. (E.133) em função de P

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{E.146})$$

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial P} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial P} \right) \quad (\text{E.147})$$

Onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial P} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{f_g j_g^2}{8 R_g T_g \alpha^2} \quad (\text{E.148})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{8 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial P} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{E.149})$$

E.3 Critério de transição

Em [Shoham \(2006\)](#) discute-se uma abordagem, baseada nas propriedades dos fluidos e da tubulação, na qual é possível prever o padrão de escoamento em função das velocidades e da inclinação local.

Na modelagem de transição de padrão estratificado para não-estratificado, o nível de líquido no equilíbrio é determinado admitindo-se que existe uma condição na qual o escoamento é estratificado. A questão a ser respondida é, para um determinado conjunto de condições, o escoamento é estável ou não. Se o escoamento é estável, resulta um padrão estratificado. Se a resposta for instável, então haverá transição para outros padrões. Para se analisar tal comportamento instável/estável é feito uma análise de estabilidade. Neste caso, uma análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz simplificada é adotada.

De maneira geral, a abordagem de Kelvin-Helmholtz lida com duas camadas de fluidos de diferentes densidades ρ_1 e ρ_2 , escoamento com velocidades v_1 e v_2 , respectivamente, entre placas paralelas horizontais. A teoria prediz que uma pequena (infinitesimal) perturbação na interface leva à uma interface estável com uma estrutura em onda ou instável com uma onda crescente que destrói a estratificação entre as camadas. A análise de Kelvin-Helmholtz pode ser aplicada para escoamentos invíscidos ou víscidos. Os mecanismos de governo de acordo com essa análise são a gravidade e as forças de tensão superficial que tendem a estabilizar o escoamento. Por outro lado, o movimento relativo entre as camadas cria uma força de pressão de sucção sobre a onda, predominando sobre o efeito Bernoulli, tendendo a destruir a estrutura estratificada do escoamento. A partir desta análise, um critério de estabilidade é desenvolvido em termos da velocidade de propagação das ondas e do comprimento de onda.

[Taitel e Dukler \(1976\)](#) estendeu-se a análise para escoamento invíscido inicialmente para o caso do escoamento entre placas paralelas, com uma onda finita sobre uma camada de fio de líquido embaixo e gás por cima. Em sequência, a análise foi estendida para o caso de uma onda finita sobre a interface gás-líquido de um escoamento estratificado em um tubo inclinado. Para ambos os casos, o efeito de tensão superficial é desprezado. A [Fig. 3.5](#) apresenta o esquema para o primeiro caso (placas paralelas). As alturas de equilíbrio para as camadas de líquido e de gás são, respectivamente, h_l e h_g , enquanto que as respectivas alturas dos picos das ondas são h_l' e h_g' .

Figura E.3: Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz

A força gravitacional, sob unidade de área, atuando sobre a onda é:

$$F_G = (h_g - h_g') (\rho_l - \rho_g) g \quad (\text{E.150})$$

Admite-se uma onda estacionária e, portanto, a força de sucção por unidade de área, que causa o crescimento da onda é dado por:

$$p - p' = \frac{1}{2} \rho_g (u_g'^2 - u_g^2) \quad (\text{E.151})$$

A partir da relação de continuidade, obtém-se:

$$u_g h_g = u_g' h_g' \quad (\text{E.152})$$

A condição para crescimento de onda, que leva a uma desestabilização de configuração estratificada, se caracteriza quando a força de sucção for maior do que a força gravitacional. Dessa maneira, combinando-se as Eqs. (E.150) Eq. (E.151), obtém-se o critério de estabilidade:

$$u_g > c_1 \left[\frac{g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_g} \right]^{0.5} \quad (\text{E.153})$$

onde c_1 depende do comprimento de onda:

$$c_1 = \left[\frac{2}{\left(\frac{h_g}{h_g'} \right) \left(\frac{h_g}{h_g'} + 1 \right)} \right]^{0.5} \quad (\text{E.154})$$

Para uma onda infinitesimal, $h_g/h_g' \rightarrow 1$, $c_1 \rightarrow 1$ a Eq. (E.153) se reduz ao critério de crescimento de onda para escoamento de invíscido original de Kelvin-Helmholtz.

A análise apresentada para placas paralelas pode ser estendida a escoamentos estratifi-

cados em tubulações inclinadas de maneira direta, resultando em:

$$u_g > \left[\frac{2(\rho_l - \rho_g) g \cos \theta}{\rho_g} \frac{A_g'^2}{A_g^2 - A_g'^2} \right]^{0.5} \quad (\text{E.155})$$

Para uma pequena onda, A_g' pode ser expandido em série de Taylor em torno de A_g , resultando em:

$$u_g > c_2 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) g \cos \theta A_g}{\rho_g S_i} \right]^{0.5} \quad (\text{E.156})$$

Onde,

$$c_2 = \left[2 \frac{\left(\frac{A_g'}{A_g} \right)^2}{1 + \frac{A_g'}{A_g}} \right]^{0.5} \quad (\text{E.157})$$

Para um baixo nível de líquido na tubulação, $A_g' = A_g$; Portanto, $c_2 = 1$. De maneira similar, para um alto nível de líquido na tubulação, $A_g' \rightarrow 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Com base nessa análise, admite-se a seguinte hipótese:

$$c_2 = 1 - \frac{h_l}{D} \quad (\text{E.158})$$

Substitui-se a Eq. (E.158) em Eq. (E.156), resultando na forma final do critério para a fronteira de transição:

$$u_g > \left(1 - \frac{h_l}{D} \right) \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) g \cos \theta A_g}{\rho_g \frac{dA_l}{dh_l}} \right]^{0.5} \quad (\text{E.159})$$

APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA DERIVADAS DA QUEDA DE PRESSÃO POR ATRITO PELA ABORDAGEM DO MULTIPLICADOR MULTIFÁSICO

Nesta Apêndice é apresenta a dedução das derivadas da queda de atrito através pelo multiplicador de multifásico em função das variáveis do problema: j_g , j_l e P .

Seja,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_A = \frac{\partial P}{\partial s} (j_g, j_l, P) = \frac{1}{2\rho_l D} \phi^2 f_l G^2 \quad (\text{F.1})$$

Perturba-se a Eq. F.1 e obtém-se:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_A = \frac{\partial P}{\partial s} (\tilde{j}_g + \hat{j}_g, \tilde{j}_l + \hat{j}_l, \tilde{P} + \hat{P}) \quad (\text{F.2})$$

Faz-se uma expansão em série de Taylor próximo a condição estacionária, despreza-se os termos a partir de segunda ordem e, finalmente, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_A = \left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right|_A + \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_g} \left(\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right|_A \right) \hat{j}_g + \frac{\partial}{\partial \tilde{j}_l} \left(\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right|_A \right) \hat{j}_l + \frac{\partial}{\partial \tilde{P}} \left(\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right|_A \right) \hat{P} \quad (\text{F.3})$$

F.1 Dedução das derivadas para queda atrito em função de j_g

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{1}{2\rho_l D} \phi^2 f_l G^2 \right) \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \Big|_A \right) = \frac{1}{2\rho_l D} \left(f_l G^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial j_g} + \phi^2 G^2 \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + \phi^2 f_l \frac{\partial G^2}{\partial j_g} \right) \quad (\text{F.5})$$

Onde G é o fluxo mássico por unidade de área, ϕ é o multiplicador de duas fases e f_l é o fator de atrito de Darcy para a fase líquida. Onde

$$f_l = f_l (Re_l(G(j_g))) \quad (\text{F.6})$$

E o Reynolds para a fase líquida pode ser escrito como:

$$Re_l = \frac{G D}{\mu_l} \quad (\text{F.7})$$

Portanto, $\partial f_l / \partial j_g$ é definido como

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_g} \quad (\text{F.8})$$

E, finalmente,

$$\frac{\partial Re_l}{\partial G} = \frac{D}{\mu_l} \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{\partial G}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) = \rho_g \quad (\text{F.10})$$

F.2 Dedução das derivadas para queda atrito em função de j_l

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{1}{2\rho_l D} \phi^2 f_l G^2 \right) \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \Big|_A \right) = \frac{1}{2\rho_l D} \left(f_l G^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial j_l} + \phi^2 G^2 \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + \phi^2 f_l \frac{\partial G^2}{\partial j_l} \right) \quad (\text{F.12})$$

Onde,

$$f_l = f_l (Re_l(G(j_l))) \quad (\text{F.13})$$

Portanto, $\partial f_l / \partial j_l$ é definido como

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_l} \quad (\text{F.14})$$

E, finalmente,

$$\frac{\partial G}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) = \rho_l \quad (\text{F.15})$$

F.3 Dedução das derivadas para queda atrito em função de P

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{2 \rho_l D} \phi^2 f_l G^2 \right) \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \Big|_A \right) = \frac{1}{2 \rho_l D} \left(f_l G^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial P} + \phi^2 G^2 \frac{\partial f_l}{\partial P} + \phi^2 f_l \frac{\partial G^2}{\partial P} \right) \quad (\text{F.17})$$

Onde,

$$f_l = f_l(Re_l(G(P))) \quad (\text{F.18})$$

Portanto, $\partial f_l / \partial P$ é definido como

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial P} \quad (\text{F.19})$$

E, finalmente,

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) = \frac{j_g}{R_g T_g} \quad (\text{F.20})$$

F.4 Derivadas do multiplicador multifásico de **Müller-Steinhagen e Heck (1986)** em função das variáveis j_g , j_l e P

Neste texto, para escoamentos não estratificados, adota-se a correlação de **Müller-Steinhagen e Heck (1986)** para o multiplicador multifásico:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{G_c (1 - x)^{1/3} + B x^3}{A} \quad (\text{F.21})$$

onde

$$G_c = A + 2(B - A)x \quad (\text{F.22})$$

$$A = \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{Af0} = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (\text{F.23})$$

$$B = \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{Ag0} = \frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \quad (\text{F.24})$$

$$x = \frac{\rho_g j_g}{\rho_g j_g + \rho_l j_l} \quad (\text{F.25})$$

Os fatores de atrito podem ser calculados como:

$$f_{l,g} = \frac{64}{Re_{l,g}} \quad \text{para } Re_{l,g} \leq 1187 \quad (\text{F.26})$$

ou

$$f_{l,g} = \frac{0.3164}{Re_{l,g}^{0.25}} \quad \text{para } Re_{l,g} > 1187 \quad (\text{F.27})$$

onde,

$$Re_{l,g} = \frac{G D}{\mu_{l,g}} \quad (\text{F.28})$$

F.4.1 Derivada de ϕ^2 com relação a j_g

$$\frac{\partial}{\partial j_g} (\phi_{f0}^2) = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3}{A} \right] \quad (\text{F.29})$$

$$\frac{\partial \phi_{f0}^2}{\partial j_g} = \frac{\frac{\partial G_c}{\partial j_g} (1-x)^{1/3} + \frac{\partial B}{\partial j_g} x^3 + \left[3Bx^2 - \frac{G_c (1-x)^{-2/3}}{3} \right] \frac{\partial x}{\partial j_g} - \left[G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3 \right] \frac{\partial A}{\partial j_g}}{A^2} \quad (\text{F.30})$$

onde,

$$\frac{\partial G_c}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} [A + 2(B-A)x] = (1-2x) \frac{\partial A}{\partial j_g} + 2x \frac{\partial B}{\partial j_g} + 2(B-A) \frac{\partial x}{\partial j_g} \quad (\text{F.31})$$

$$\frac{\partial B}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \right) = \frac{1}{2 D \rho_g} \left(G^2 \frac{\partial f_g}{\partial j_g} + 2 f_g G \frac{\partial G}{\partial j_g} \right) \quad (\text{F.32})$$

$$\frac{\partial A}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) = \frac{1}{2 D \rho_l} \left(G^2 \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + 2 G f_l \frac{\partial G}{\partial j_g} \right) \quad (\text{F.33})$$

As seguintes relações envolvendo propriedades do problema podem ser escritas:

$$\frac{\partial x}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g j_g}{\rho_g j_g + \rho_l j_l} \right) = \frac{\rho_g \rho_l j_l}{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)^2} \quad (\text{F.34})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_g} \quad (\text{F.35})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_g} \quad (\text{F.36})$$

$$\frac{\partial f_{l,g}}{\partial Re_{l,g}} = \frac{-64}{Re_{l,g}^2} \quad \text{para } Re_{l,g} \leq 1187 \quad (\text{F.37})$$

or

$$\frac{\partial f_{l,g}}{\partial Re_{l,g}} = \frac{-0.0791}{Re_{l,g}^{1.25}} \quad \text{para } Re_{l,g} > 1187 \quad (\text{F.38})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial G} = \frac{D}{\mu_g} \quad (\text{F.39})$$

F.4.2 Derivada de ϕ^2 com relação a j_l

$$\frac{\partial}{\partial j_l} (\phi_{f0}^2) = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3}{A} \right] \quad (\text{F.40})$$

$$\frac{\partial \phi_{f0}^2}{\partial j_l} = \frac{\frac{\partial G_c}{\partial j_l} (1-x)^{1/3} + \frac{\partial B}{\partial j_l} x^3 + \left[3Bx^2 - \frac{G_c (1-x)^{-2/3}}{3} \right] \frac{\partial x}{\partial j_l} - \left[G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3 \right] \frac{\partial A}{\partial j_l}}{A^2} \quad (\text{F.41})$$

onde,

$$\frac{\partial G_c}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} [A + 2(B-A)x] = (1-2x) \frac{\partial A}{\partial j_l} + 2x \frac{\partial B}{\partial j_l} + 2(B-A) \frac{\partial x}{\partial j_l} \quad (\text{F.42})$$

$$\frac{\partial B}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \right) = \frac{1}{2 D \rho_g} \left(G^2 \frac{\partial f_g}{\partial j_l} + 2 f_g G \frac{\partial G}{\partial j_l} \right) \quad (\text{F.43})$$

$$\frac{\partial A}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) = \frac{1}{2 D \rho_l} \left(G^2 \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + 2 G f_l \frac{\partial G}{\partial j_l} \right) \quad (\text{F.44})$$

As seguintes relações podem ser escritas:

$$\frac{\partial x}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\rho_g j_g}{\rho_g j_g + \rho_l j_l} \right) = \frac{-\rho_g \rho_l j_g}{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)^2} \quad (\text{F.45})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_l} \quad (\text{F.46})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_l} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial j_l} \quad (\text{F.47})$$

F.4.3 Derivada de ϕ^2 com relação a P

$$\frac{\partial}{\partial P} (\phi_{f0}^2) = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3}{A} \right] \quad (\text{F.48})$$

$$\frac{\partial \phi_{f0}^2}{\partial P} = \frac{\frac{\partial G_c}{\partial P} (1-x)^{1/3} + \frac{\partial B}{\partial P} x^3 + \left[3Bx^2 - \frac{G_c (1-x)^{-2/3}}{3} \right] \frac{\partial x}{\partial P} - \left[G_c (1-x)^{1/3} + Bx^3 \right] \frac{\partial A}{\partial P}}{A^2} \quad (\text{F.49})$$

onde,

$$\frac{\partial G_c}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} [A + 2(B-A)x] = (1-2x) \frac{\partial A}{\partial P} + 2x \frac{\partial B}{\partial P} + 2(B-A) \frac{\partial x}{\partial P} \quad (\text{F.50})$$

$$\frac{\partial B}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \right) = \frac{G}{2D\rho_g} \left(G \frac{\partial f_g}{\partial j_l} + 2f_g \frac{\partial G}{\partial j_l} - \frac{f_l G}{\rho_g R_g T_g} \right) \quad (\text{F.51})$$

$$\frac{\partial A}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) = \frac{G}{2D\rho_l} \left(G \frac{\partial f_l}{\partial P} + 2f_l \frac{\partial G}{\partial P} \right) \quad (\text{F.52})$$

As seguintes relações podem ser escritas:

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\rho_g j_g}{\rho_g j_g + \rho_l j_l} \right) = \frac{\rho_l j_g j_l}{R_g T_g (\rho_g j_g + \rho_l j_l)^2} \quad (\text{F.53})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial P} \quad (\text{F.54})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial P} \quad (\text{F.55})$$

APÊNDICE G – DEDUÇÃO DAS RELAÇÕES DA CORRELAÇÃO DE (CHEN,1979) PARA O FATOR DE ATRITO

Neste Apêndice é apresentado a dedução das derivadas da correlação de fator de atrito de Darcy (CHEN, 1979) para um escoamento água-ar em função do número de Reynolds e do diâmetro hidráulico. A correlação é válida para ambos fluidos sobre qualquer situação, já que a mesma foi desenvolvida para um modelo de mistura homogênea.

Seja a expressão para fator de atrito Darcy a partir de (CHEN, 1979):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\} \quad (G.1)$$

Manuseando a Eq. G.1:

$$f = 0.25 \left\langle \log \left\{ \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\} \right\rangle^{-2} \quad (G.2)$$

Onde ϵ é a rugosidade da tubulação, D é o diâmetro, f é o fator de atrito de Darcy e Re é o número de Reynolds.

G.1 Derivada de f em relação a Re

Escreve-se a derivada de f em relação a Re como:

$$\frac{\partial f}{\partial Re} = \frac{\partial}{\partial Re} \left[0.25 \left\langle \log \left\{ \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\} \right\rangle^{-2} \right] \quad (G.3)$$

Para facilitar a dedução, adota-se a seguinte nomenclatura:

$$Y = \frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \quad (G.4)$$

$$X = \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \quad (\text{G.5})$$

Portanto,

$$X = \frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log Y \quad (\text{G.6})$$

Dessa maneira, a Eq. (G.3) resulta em:

$$\frac{\partial f}{\partial Re} = \frac{\partial}{\partial Re} [0.25 (\log X)^{-2}] = -0.5 (\log X)^{-3} \frac{1}{X \ln 10} \frac{\partial X}{\partial Re} \quad (\text{G.7})$$

Escreve-se,

$$\frac{\partial X}{\partial Re} = \frac{\partial}{\partial Re} \left(\frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log Y \right) = \frac{5.0452}{Re^2} \log Y - \frac{5.0452}{Re} \frac{1}{Y \ln 10} \frac{\partial Y}{\partial Re} \quad (\text{G.8})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Re} = \frac{\partial}{\partial Re} \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] = -\frac{5.2544}{Re^{1.8981}} \quad (\text{G.9})$$

G.2 Derivada de f em relação a D

Adota-se a mesma abordagem para derivação como na Seção G.1:

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} [0.25 (\log X)^{-2}] = -0.5 (\log X)^{-3} \frac{1}{X \ln 10} \frac{\partial X}{\partial D} \quad (\text{G.10})$$

Escreve-se,

$$\frac{\partial X}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\epsilon}{3.7065 D} - \frac{5.0452}{Re} \log Y \right) = -\frac{\epsilon}{3.7065 D^2} + \frac{5.0452}{Re} \frac{1}{Y \ln 10} \frac{\partial Y}{\partial D} \quad (\text{G.11})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left[\frac{1}{2.8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] = -0.3927 \frac{\epsilon^{1.1098}}{D^{2.1098}} \quad (\text{G.12})$$

APÊNDICE H – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES REFERENTES AO *PIPELINE*

Nesta Apêndice é apresentada a dedução das equações referentes trecho do pipeline, tanto para o modelo simplificado quanto para o modelo generalizado

H.1 Modelo simplificado - *Pipeline* a parâmetros concentrados e reservatório *buffer*

Nesta seção, apresenta-se o equacionamento adotado para o modelo a parâmetros concentrados. Uma comparação entre os modelos foi apresentada em (AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017). Estas modelagens simplificadas fornecem duas condições de contorno ao sistema de equações da modelagem do escoamento no *riser* (modelagem a parâmetros distribuídos).

Como apresentado em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010), o *pipeline*, apresentado na Fig. 3.2, pode tanto estar em condição de acumulação de líquido ($x > 0$) ou em condição de penetração de gás constante ($x = 0$), onde x é a posição da frente de acúmulo de líquido. Contudo, como o estado estacionário está relacionado à condição de penetração constante de gás, as equações para o *pipeline* serão consideradas na condição de $x = 0$.

Com base na Fig. 3.2, escreve-se a equação de continuidade para o líquido no *pipeline*:

$$\frac{d}{dt}(\rho_l v_l) + \rho_l u_{lb}(1 - \alpha_p)A - \rho_l Q_{l0} = 0 \quad (\text{H.1})$$

E,

$$v_l = (1 - \alpha_p) A(L - x) + xA \quad (\text{H.2})$$

Como hipótese, admite-se que a fase líquida é incompressível e o sistema se encontra em situação de penetração constante de gás no *riser*. Pode-se escrever:

$$-L \frac{d\alpha_p}{dt} + u_{lb}(1 - \alpha_p) - \frac{Q_{l0}}{A} = 0 \quad (\text{H.3})$$

A equação de continuidade para o gás no *pipeline* pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(\rho_g v_g) + \rho_{gb} u_{gb} A_g - \dot{m}_{g0} = 0 \quad (\text{H.4})$$

E,

$$v_g = L A_g + v_e \quad (\text{H.5})$$

onde u_{lb} , u_{gb} e ρ_{gb} são, respectivamente, a velocidade de líquido da saída, a velocidade de gás na saída e massa específica do gás.

Admitindo-se gás ideal, a seguinte relação é válida:

$$P_g = \rho_g R_g T_g \quad (\text{H.6})$$

Substituindo-se as Eqs. (H.5) e (H.6) na Eq. (H.4), tem-se:

$$(L \alpha_p + L_e) \frac{dP_g}{dt} + L P_g \frac{d\alpha_p}{dt} + \alpha_p u_{gb} P_g - \frac{R_g T_g}{A} \dot{m}_{g0} = 0 \quad (\text{H.7})$$

A existência de um recipiente com volume de gás, v_e , é considerado com objetivo de simular um comprimento equivalente adicional de *pipeline*, $L_e = \frac{v_e}{A}$, onde A é a área transversal à passagem do fluidos ($A = \frac{1}{4} \pi D^2$) e D é o diâmetro interno da tubulação.

Rescreve-se as Eqs. (H.7) e (H.3) e em termos das velocidades superficiais de gás e de líquido, onde, de maneira geral, tem-se:

$$j_l = u_l (1 - \alpha) \quad (\text{H.8})$$

E,

$$\dot{j}_g = u_g \alpha \quad (\text{H.9})$$

onde, j_g e j_l são, respectivamente, as velocidades superficiais de gás e líquido; assim, resultam:

$$-L \frac{d\alpha_p}{dt} + j_{lb} - \frac{Q_{l0}}{A} = 0 \quad (\text{H.10})$$

$$(L \alpha_p + L_e) \frac{dP_g}{dt} + L P_g \frac{d\alpha_p}{dt} + j_{gb} P_g - \frac{R_g T_g}{A} \dot{m}_{g0} = 0 \quad (\text{H.11})$$

Para o *pipeline* tem-se as seguinte equações, respectivamente, a equação de continuidade da fase líquida e a equação de continuidade da fase gasosa:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} - \frac{1}{L} (j_{lb} + j_{l0}) = 0 \quad (\text{H.12})$$

$$\frac{dP_g}{dt} + \frac{P_g (j_{gb} + j_{lb} - j_{l0}) - \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0}}{L\alpha_p + L_e} = 0 \quad (\text{H.13})$$

onde j_{lb} e j_{gb} são, respectivamente, as velocidades superficiais para o líquido e para o gás na base do *riser*, L é o comprimento do *pipeline*. T_g é a temperatura do gás, t é o tempo e β é a ângulo de inclinação do *pipeline* com relação a horizontal. P_b e P_g são, respectivamente, a pressão na base do *riser* e a pressão de gás. Para $x = 0$ resulta em $P_b = P_g$, pois considerando as variações hidrostáticas, a pressão na base do *pipeline*:

$$P_b = P_g + \rho_l g x \sin \beta \quad (\text{H.14})$$

H.1.1 Modelo de fração de vazio constante

Uma segunda simplificação à modelagem do *pipeline* é admitir que a variação da fração de vazio com o tempo é pouco significativa na resposta dinâmica (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010) para pequenos comprimentos equivalentes de *buffer*. Como adotado em (BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; NEMOTO; BALIÑO, 2012; BURR; BALIÑO; AZEVEDO, 2013; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2017), tem-se:

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = 0 \quad (\text{H.15})$$

E, portanto, as equações de conservação de líquido e de gás no *pipeline* podem ser reescritas como:

$$j_{lb} = j_{l0} \quad (\text{H.16})$$

$$\frac{dP_b}{dt} = \frac{-P_b j_{gb} + \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0}}{L\alpha_p + L_e} \quad (\text{H.17})$$

H.2 Modelo generalizado - Reservatório *buffer*

Nesta seção é apresentado uma abordagem na qual o *pipeline* é descrito da mesma maneira que o *riser* é modelado, um modelo a parâmetros distribuídos. Esta é uma das principais contribuições originais desta tese com relação ao trabalhos já realizados (BALIÑO, 2008; BALIÑO; BURR; NEMOTO, 2010; BALIÑO, 2012; NEMOTO; BALIÑO, 2012; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015a; AZEVEDO; BALIÑO; BURR, 2015b). Esta abordagem permite a flutuação da fração de vazio com o tempo, propagação de ondas de fração de vazio e a variação das variáveis de estado ao longo da posição no *pipeline*. Sendo esta uma abordagem mais realística do ponto de vista físico.

Dessa maneira, como o trecho *pipeline* já é considerado na modelagem generalizada, apenas a existência do reservatório *buffer* com volume v_e foi considerado para simular comprimentos equivalentes de *pipeline* $L_e = \frac{v_e}{A}$, onde A é a área de passagem do escoamento ($A = \frac{1}{4} \pi D^2$, onde D é o diâmetro interno).

Com base na Fig. 3.3, escreve-se a equação de continuidade para o líquido no volume de controle:

$$\frac{d}{dt} (\rho_l v_l) + \rho_{lb} u_{lb} (1 - \alpha_p) A - \rho_{l0} Q_{l0} = 0 \quad (\text{H.18})$$

onde v_l é o volume de líquido desde o ponto de injeção até a entrada na tubulação, α_p é a fração de vazio na entrada da tubulação e u_{lb} é velocidade no líquido na base da entrada da tubulação. Os parâmetros ρ_{lb} , ρ_{l0} e Q_{l0} são respectivamente a massa específica do líquido na entrada da tubulação, a massa específica do líquido na condição de referência e a vazão volumétrica de líquido.

Como hipótese, admite-se que a fase líquida é incompressível e o volume v_l é constante. Portanto, pode-se escrever:

$$\rho_{lb} = \rho_0 \quad (\text{H.19})$$

e

$$j_{lb} = u_{lb} (1 - \alpha_p) \quad (\text{H.20})$$

A Eq. (H.18) pode ser reescrita como:

$$j_{lb} = \frac{Q_{l0}}{A} \quad (\text{H.21})$$

onde j_{lb} é a velocidade de líquido na entrada da tubulação.

De maneira análoga, a equação de continuidade para o gás no volume referente ao *buffer* pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} (\rho_g v_g) + \rho_{gb} u_{gb} \alpha_p A - \dot{m}_{g0} = 0 \quad (\text{H.22})$$

e,

$$v_g = v_e = L_e A \quad (\text{H.23})$$

onde u_{gb} , ρ_{gb} , ρ_g são, respectivamente, a velocidade de gás na saída na entrada da tubulação, a massa específica do gás na entrada da tubulação e a massa específica do gás. Admite-se a hipótese de gás ideal tal que:

$$P_g = \rho_g R_g T_g \quad (\text{H.24})$$

$$P_b = \rho_{gb} R_g T_g \quad (\text{H.25})$$

A Eq. (H.22) pode ser reescrita como:

$$L_e \frac{dP_g}{dt} = P_b j_{gb} - \frac{\dot{m}_{g0} R_g T_g}{A} \quad (\text{H.26})$$

onde j_{lb} e j_{gb} são, respectivamente, as velocidades superficiais de líquido e de gás na entrada da tubulação, P_b , P_g e P_0 são, respetivamente, a pressão na entrada da tubulação, a pressão do gás e a pressão na condição de referência, T_g é a temperatura do gás e t é o tempo. Por simplificação, admite-se que a pressão no interior do volume de *buffer* não varia, e portanto, tem-se:

$$P_b = P_g \quad (\text{H.27})$$

Portanto, a Eq. (H.26) pode ser reescrita como:

$$L_e \frac{dP_g}{dt} = P_g j_{gb} - \frac{T_g}{T_0} P_0 j_{g0} \quad (\text{H.28})$$

APÊNDICE I – PUBLICAÇÕES