

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

RICARDO LUIZ LABOZETTO

**Modelo de Spalart-Allmaras modificado com modelagem alternativa para a
escala de comprimento**

São Paulo
2016

RICARDO LUIZ LABOZETTO

**Modelo de Spalart-Allmaras modificado com modelagem alternativa para a
escala de comprimento**

**Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
título de Doutor em Ciências**

**Área de Concentração:
Engenharia Mecânica de Energia de Fluidos**

**Orientador:
Prof. Dr. Fabio Saltara**

São Paulo

2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catlogação-na-publicação

Labozetto, Ricardo Luiz

Modelo de Apalart-Allmaras modificado com modelagem alternativa para escala de comprimento / R. L. Labozetto -- versão corr. -- São Paulo, 2016.
66 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1.ESCOAMENTO (SIMULAÇÃO NUMÉRICA) 2.TURBULÊNCIA
(MODELAGEM COMPUTACIONAL) 3.MECÂNICA DOS FLUIDOS
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia Mecânica II.t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Escola Politécnica e ao Núcleo de Dinâmica dos Fluidos (NDF) pelo apoio e pela disponibilização de laboratórios e dos meios necessários.

Agradeço aos professores que me ajudaram transmitindo seu conhecimento e pelo incentivo.

Eu quero agradecer a todos os que participaram, direta ou indiretamente, de mais essa jornada me acompanhando nas dificuldades e nos dias mais difíceis.

Quero agradecer a minha mãe Ondina, meu pai Luiz e meu irmão Douglas pela paciência, pela ajuda e incentivo sempre ao meu lado nos melhores e piores momentos.

Quero agradecer à minha noiva e futura esposa Amanda pela paciência e incentivo nesses últimos anos dessa longa jornada que se encerra.

Meu agradecimento especial vai para o meu amigo e orientador Fabio Saltara que tanto me ajudou e me orientou, não só neste trabalho, mas também em coisas que só um amigo pode ajudar. Esse tempo de convivência, durante o curso, além de ter sido muito prazeroso foi mais uma ótima oportunidade de aproveitar seu conhecimento, sabedoria e amizade. Muito obrigado por tudo.

RESUMO

Foram feitas simulações de um jato plano livre e incompressível usando o modelo de uma equação Spalart-Allmaras padrão e um modelo Spalart-Allmaras modificado através da alteração da escala de comprimento turbulenta. Sabe-se da literatura que no caso de jatos livres o modelo Spalart-Allmaras não consegue prever adequadamente os resultados observados experimentalmente. Os resultados das simulações foram comparados com experimentos da literatura através de perfis de velocidade e da taxa de expansão do jato. Como esperado, os resultados obtidos das simulações utilizando o modelo Spalart-Allmaras padrão foram considerados insatisfatórios, porém o modelo Spalart-Allmaras modificado teve uma melhor concordância com os resultados experimentais.

Além disso, o modelo Spalart-Allmaras modificado foi usado para simular os casos do escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão e o escoamento em um degrau com separação e gradiente adverso de pressão. Quando comparados com resultados experimentais da literatura e com resultados obtidos usando o modelo padrão, os resultados do modelo modificado obtidos para ambos os casos foram muito satisfatórios, concluindo-se que a modificação da escala de comprimento permite obter uma maior generalidade para o modelo Spalart-Allmaras.

Palavras-chave: *Jato plano livre. Turbulência. Escoamento incompressível. Spalart-Allmaras. Simulação CFD.*

ABSTRACT

Simulations of a plane and incompressible free jet using the standard Spalart-Allmaras model and a Spalart-Allmaras model modified by changing the turbulent length scale were carried out. It is known from literature that, in the case of the free jet, the Spalart-Allmaras model fails to adequately predict the experimentally observed results. The results of our simulations were compared with published experiments using the velocity profiles and the jet spreading rate. As expected, the results of simulations using the standard Spalart-Allmaras model were considered unsatisfactory while the modified Spalart-Allmaras model had a better agreement with the experimental results.

Furthermore, the modified Spalart-Allmaras model was used to simulate the cases of flow over a flat plate with no pressure gradient and flow through a backward facing step with separation and adverse pressure gradient. When compared with experimental results from the literature and with results obtained using the standard model, the results of the modified model for both cases were very satisfactory, allowing the conclusion that the change in the length scale provided a greater generality for the Spalart-Allmaras model.

Keywords: *Free jet plan. Turbulence. Incompressible flow. Spalart-Allmaras. CFD simulation.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1- Representação esquemática de um jato plano livre.....	24
Figura 3.1-Perfis de viscosidade turbulenta $\tilde{\nu}^+ = \tilde{\nu} / \nu$ em função de y^+ obtidos para o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão, na posição $Re_x = 5 \times 10^6$, para os valores $n = 2$ e $n = 5$ na Equação (3.4).	28
Figura 4.1 - Célula genérica para integração da Equação (4.4). Figura retirada da página 75 de JASAK (1996).	31
Figura 5.1 - Perfil de velocidade parabólico de um escoamento laminar. Figura elaborada com base em ÇENGEL e CIMBALA (2015), página 365.	37
Figura 5.2 - Perfil de velocidades mostrando as regiões da camada limite. Figura elaborada com base em ÇENGEL e CIMBALA (2015), página 365.	37
Figura 5.3 - Gráfico mostrando uma comparação da lei da parede e os perfis de velocidade da lei logarítmica com dados experimentais para escoamento totalmente desenvolvido em um tubo. Figura adaptada da página 366 de ÇENGEL e CIMBALA (2015).	39
Figura 5.4 - Geometria e condições de contorno para o escoamento sobre uma placa plana. .	41
Figura 5.5 - Imagem da malha grosseira mostrando uma maior concentração de células junto ao bordo de ataque e à superfície da placa plana.	41
Figura 5.6 - Gráfico mostrando uma comparação dos resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras modificado para a malha grosseira junto com os perfis de velocidade da subcamada viscosa, lei logarítmica, dados experimentais de WIEGHARDT e TILLMAN (1951) apud SREENIVASAN (1989) e resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras padrão.	42

- Figura 5.7 - Gráfico mostrando uma comparação dos resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras modificado para a malha fina junto com os perfis de velocidade da subcamada viscosa, lei logarítmica, dados experimentais de WIEGHARDT e TILLMAN (1951) apud SREENIVASAN (1989) e resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras padrão.43
- Figura 5.8 - Gráfico mostrando uma comparação do coeficiente de atrito na parede obtido através da equação de Prandtl com os resultados do modelo Spalart Allmaras e do modelo Spalart Allmaras modificado para simulações com malha grosseira.44
- Figura 5.9 - Gráfico mostrando uma comparação do coeficiente de atrito na parede obtido através da equação de Prandtl com os resultados do modelo Spalart Allmaras e do modelo Spalart Allmaras modificado para simulações com malha fina.44
- Figura 5.10 - Dimensões e condições de contorno utilizadas na simulação para o degrau com gradiente adverso de pressão.47
- Figura 5.11 - Malha grosseira utilizada na simulação do degrau com gradiente adverso de pressão47
- Figura 5.12 - Detalhe da malha grosseira na região do degrau com gradiente adverso de pressão.47
- Figura 5.13 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 1H$49

- Figura 5.14 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 4H$49
- Figura 5.15 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 6H$50
- Figura 5.16 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 10H$50
- Figura 5.17 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha fina.51
- Figura 5.18 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha fina.51
- Figura 5.19 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha fina.52
- Figura 5.20 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha fina.52

Figura 5.21 – Comparação entre os resultados do coeficiente de atrito obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha grosseira.53

Figura 5.22 – Comparação entre os resultados do coeficiente de atrito obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985 apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015))), os obtidos com o modelo de Spalart Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart Allmaras modificado com malha fina.54

Figura 5.23 - Geometria e condições de contorno para a simulação do jato plano livre.57

Figura 5.24 - Malha grosseira usada nas simulações do jato plano livre.57

Figura 5.25 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras usando a malha grosseira comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).58

Figura 5.26 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras modificado usando a malha grosseira comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).59

Figura 5.27 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras usando a malha fina comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997)..59

Figura 5.28 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras modificado usando a malha fina comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).60

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Comparação dos resultados experimentais da taxa de expansão S de um jato plano livre com as simulações usando a malha grosseira.	61
Tabela 5.2 - Comparação dos resultados experimentais da taxa de expansão S de um jato plano livre com as simulações usando a malha fina.	61

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas

C_1	constante do modelo $k - \varepsilon$
C_2	constante do modelo $k - \varepsilon$
C_D	coeficiente de arrasto
$C_{\omega 1}, C_{\omega 2}$	constantes de fechamento do modelo Spalart-Allmaras
C_μ	constante utilizada no cálculo da viscosidade turbulenta
L_{VK}	escala de comprimento de Von Kármán
L_t	comprimento de escala turbulento
Re	número de Reynolds
S	norma da taxa de deformação; magnitude da vorticidade; taxa de expansão para um jato
S_{ij}	taxa de deformação do campo de velocidades instantâneo
\tilde{S}	medida escalar usada no modelo Spalart-Allmaras
T	tempo total
V	volume, volume do elemento

Letras romanas minúsculas

d	distância da parede do modelo Spalart-Allmaras
g	aceleração da gravidade
k	energia cinética turbulenta
l	escala de comprimento característica
p	pressão
\bar{p}	pressão média em escoamento turbulento
p'	flutuação da pressão em escoamento turbulento
t	tempo
t_0	tempo inicial

u	componente da velocidade na direção x
u_1, u_2, u_3	velocidades nas direções do sistema cartesiano
\bar{u}_i	velocidade média em escoamento turbulento em direção genérica i
u'_i	componente da flutuação da velocidade em escoamento turbulento em direção genérica i
v	componente da velocidade na direção y
\bar{v}	velocidade média do escoamento turbulento na direção y
v'	componente da flutuação da velocidade do escoamento turbulento na direção y
x_i	coordenada genérica
x_1, x_2, x_3	coordenadas do sistema cartesiano
w	componente da velocidade na direção z
\bar{w}	velocidade média do escoamento turbulento na direção z
w'	componente da flutuação da velocidade do escoamento turbulento na direção z

Letras gregas maiúsculas

Π_{ij}	tensor das tensões
------------	--------------------

Letras gregas minúsculas

α	constante do modelo $k-\omega$
β	constante do modelo $k-\omega$
β^*	constante do modelo $k-\omega$
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε	taxa de dissipação da energia cinética turbulenta
ρ	massa específica
σ	constante do modelo $k-\omega$
σ^*	constante do modelo $k-\omega$
σ_ε	constante do modelo $k-\varepsilon$
σ_k	constante do modelo $k-\varepsilon$
μ	viscosidade absoluta ou dinâmica

μ_t	viscosidade turbulenta
ω	taxa de dissipação de energia por unidade de volume no tempo
ν	viscosidade cinemática
ϕ	propriedade genérica
$\bar{\phi}$	propriedade genérica média
ϕ'	componente da flutuação da propriedade genérica
τ_{ij}	tensor das tensões viscosas

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	1
2.REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
2.1.As primeiras tentativas de modelagem de turbulência	4
2.2.Equações locais instantâneas	5
2.2.1.Equação da continuidade.....	5
2.2.2.Equação do momento linear	6
2.3.Equações médias do escoamento turbulento.....	7
2.3.1.Equação média da continuidade	8
2.3.2.Equação média do momento linear	9
2.3.3.Viscosidade turbulenta	9
2.4.Modelo $k - \varepsilon$	11
2.5.Modelos $k - \omega$ e $k - \omega$ SST	13
2.6.Modelo de Menter de uma equação de transporte para a viscosidade turbulenta.....	18
2.7.Modelo de Spalart-Allmaras	21
3.O MODELO DE SPALART-ALLMARAS MODIFICADO.....	26
4.METODOLOGIA COMPUTACIONAL	30
5.RESULTADOS	36
5.1.Placa Plana sem Gradiente de Pressão.....	36
5.1.1. Características gerais do escoamento.....	36
5.1.2.Parâmetros das Simulações para a Placa Plana.....	40
5.1.3.Comparação dos resultados numéricos com os experimentais.....	41
5.2.Simulações do Escoamento em um Degrau com Gradiente Adverso de Pressão.....	45
5.2.1.Parâmetros da Simulação.....	46
5.2.2.Comparação dos resultados numéricos com os experimentais.....	48
5.3.Simulação do escoamento de uma jato plano livre incompressível.....	54
5.3.1.Parâmetros da Simulação.....	55
5.3.2.Resultado das simulações para o jato plano livre.....	58
6.CONCLUSÕES.....	62
REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos escoamentos turbulentos é de extrema importância. Eles compõem a grande maioria dos escoamentos encontrados na natureza. A grande maioria dos escoamentos que ocorrem em processos industriais são escoamentos turbulentos e são estudados nas mais diversas áreas da engenharia. Esses escoamentos são compostos de estruturas instáveis que variam no tempo e no espaço o que dificulta sua completa compreensão.

Dentre as ferramentas para o estudo de escoamentos turbulentos estão os programas de Dinâmica dos Fluidos Computacional ("*Computational Fluid Dynamics*" ou CFD) munidos de modelos que buscam representar os fortes efeitos difusivos da turbulência.

Embora os modelos de duas equações, como o $k-\varepsilon$ e o $k-\omega$, tenham sido sempre os preferidos dos praticantes de CFD, com o passar do tempo os modelos de uma equação ganharam muitos adeptos.

Esse fenômeno pode ser creditado ao fato de que tais modelos em geral são mais robustos que os modelos de duas equações. Além disso, tem condições de contorno relativamente simples. Modelos como o de BALDWIN e BARTH (1990), SPALART e ALLMARAS (1992, 1994) e MENTER (1996) trabalham com uma equação de transporte para uma viscosidade turbulenta $\tilde{\nu}$, que assume simplesmente o valor de $\tilde{\nu} = 0$ em superfícies sólidas. Para escoamentos externos pode-se adotar um valor de $\tilde{\nu}$ como um múltiplo ou fração da viscosidade molecular, controlando assim os efeitos da corrente livre. Em contrapartida, ε e ω têm condições de contorno complicadas sobre paredes, obrigando a implementação de leis de parede. Tais variáveis também não têm condições de contorno óbvias para a corrente livre quando da simulação de escoamentos externos.

Atualmente o modelo de uma equação mais utilizado é o modelo de Spalart-Allmaras, presente em praticamente todos os códigos comerciais de CFD. Esse modelo tem sido muito bem sucedido em numerosas aplicações, mas nota-se que há uma família de escoamentos em particular para a qual o modelo parece não funcionar: BARDINA et al (1997) verificaram que o modelo parece não prever corretamente o escoamento em jatos livres planos ou axissimétricos.

Aparentemente, o modelo de Spalart-Allmaras prediz uma difusão excessiva do jato, levando a um taxa de expansão ("*spreading ratio*") bem maior que a verificada experimentalmente por BRADBURY (1965).

Uma das explicações para esse comportamento do modelo Spalart-Allmaras parece residir na forma como é definida a escala de comprimento turbulenta, relacionada simplesmente com a distância em relação à parede.

No entanto, o modelo de MENTER (1996) derivado a partir do modelo $k-\varepsilon$ com o auxílio da hipótese de BRADSHAW (1967) parece fornecer resultados muito superiores ao modelo de Spalart-Allmaras quando utilizado na simulação de jatos livres.

O modelo de Menter usa como escala de comprimento turbulenta o comprimento de Von Kármán $L_{VK} = \Omega / |\nabla \Omega|$, onde Ω é o módulo do vetor da vorticidade. Porém, a escala de comprimento de Von Kármán apresenta uma dificuldade própria quando usada em aplicações de baixo número de Reynolds. Na subcamada viscosa $L_{VK} \rightarrow \infty$, o que não parece muito natural.

Foi dessa constatação que surgiu a ideia de propor uma modificação do modelo de Spalart-Allmaras que combinasse o uso da distância em relação à parede na subcamada viscosa com o uso da escala de comprimento de Von Kármán na camada logarítmica.

Para esclarecer o desenvolvimento dessa modificação do modelo de Spalart-Allmaras, inicialmente será explicada como a média de Reynolds é usada para introduzir a viscosidade turbulenta na equação de Navier-Stokes. Em seguida, os modelos $k-\varepsilon$ e o $k-\omega$, fundamentais no desenvolvimento, por Menter, de seu modelo de uma equação.

A seguir, serão expostas por quais razões Menter preferiu derivar seu modelo de uma equação a partir do modelo $k-\varepsilon$ e não do modelo $k-\omega$.

Uma vez introduzido o modelo de uma equação de Menter, será explicada como ele inspirou a modificação do modelo de Spalart-Allmaras.

Feito isso, será detalhado como a modificação do modelo de Spalart-Allmaras pode ser implementada no programa de código aberto OpenFOAM® e de que forma esse programa foi usado para conduzir as simulações usadas na validação do modelo de Spalart-Allmaras modificado.

Finalmente, serão apresentadas as simulações pelas quais será validada a modificação proposta no modelo de Spalart-Allmaras. Foram selecionados os casos do escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão, escoamento em um degrau com gradiente adverso de pressão ("*backward facing step*") e o escoamento em um jato plano incompressível livre. Verificou-se que a modificação proposta não prejudica as características preditivas do modelo de Spalart-Allmaras original quando aplicado aos escoamentos sobre a placa plana e através

do degrau, verificou-se também que o modelo modificado melhorou as predições da taxa de expansão do jato plano livre.

Finalmente, foram apresentadas as conclusões do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 As primeiras tentativas de modelagem de turbulência

Os primeiros estudos ligados à turbulência são devidos a Osborne Reynolds e ao Lorde Rayleigh. Em 1883, em seu trabalho para a Royal Society, Reynolds apresentou estudos realizados no interior de tubos onde são apresentados os regimes laminar e turbulento bem como, entre outras coisas, o parâmetro adimensional que mostra se um escoamento é laminar ou turbulento, hoje conhecido como número de Reynolds $Re = \rho U D / \mu$, onde ρ é a massa específica, U é a escala de velocidade, D é uma escala de comprimento e μ é a viscosidade absoluta do fluido. Reynolds determinou que o escoamento no interior de um tubo era estável (laminar) com um valor abaixo de 1900 e instável como um valor acima de 2000 (REYNOLDS, 1884).

Na mesma época em que Reynolds realizava seus trabalhos experimentais, Rayleigh realizava trabalhos teóricos sobre instabilidades de escoamentos paralelos de fluidos não viscosos permitindo a determinação de quando uma perturbação pequena na forma de um trem de ondas infinito se amplifica ou se amortece com o passar do tempo (RAYLEIGH, 1880).

Em 1877 o matemático e físico francês Joseph Valentin Boussinesq fez uma das primeiras propostas para descrever as tensões turbulentas fazendo uma correlação entre estas e as tensões viscosas. Assim a tensão turbulenta, ou tensão de Reynolds, na camada limite pode ser representada por $\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \partial \bar{u} / \partial y$. Nesta última equação μ_t é a chamada viscosidade turbulenta ou turbilhonar. É importante salientar que essa viscosidade, diferentemente da viscosidade dinâmica μ , não é uma propriedade do fluido e sim do escoamento, podendo variar no tempo e no espaço e sendo, usualmente, maior que μ .

Já em 1925 Prandtl, com a introdução do conceito de comprimento de mistura, criou o primeiro modelo de turbulência através de uma maneira direta para calcular a viscosidade turbulenta. Uma descrição do modelo de comprimento de mistura pode ser encontrada em SCHLICHTING e GERSTEN (2000). O modelo de comprimento de mistura de Prandtl serviu como inspiração para o desenvolvimento posterior de inúmeros modelos algébricos como o modelo de CEBECI e SMITH (1974) e BALDWIN e LOMAX (1978).

Mas, de acordo com WILCOX (1993) foi Kolmogorov, em 1942, que propôs o primeiro modelo completo de turbulência, com duas equações de transporte, uma para a

energia cinética da turbulência k e outra para o inverso da escala de tempo ω . Desta forma, era possível determinar, através das duas equações de transporte, as escalas de tempo e comprimento da turbulência. O modelo de Kolmogorov só não teve maiores aplicações, segundo WILCOX (1993), devido à falta de computadores capazes de realizar os cálculos necessários.

2.2 Equações locais instantâneas

Aqui foram apresentadas as relações necessárias para descrever o movimento de uma partícula de fluido a partir dos princípios fundamentais da conservação da massa, resultando na equação da continuidade e da quantidade de movimento, resultando na equação do momento linear.

2.2.1 Equação da continuidade

Aplicando a lei da Conservação da Massa aplicada a um fluido escoando através de um volume de controle infinitesimal fixo, tem-se que:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido e u_j a sua velocidade. O primeiro termo desta equação representa a variação da massa específica dentro do volume de controle e o segundo termo representa o fluxo líquido de massa através das faces do volume de controle por unidade de volume. A Eq. (2.1) foi obtida usando-se o formalismo Euleriano utilizando um volume de controle fixo. Esta equação está escrita com notação tensorial onde as três coordenadas do sistema cartesiano são escritas como x_1, x_2, x_3 ou, de forma genérica, x_i com i assumindo os valores que vão de 1 a 3.

Para um escoamento incompressível, onde a massa específica é constante, a Eq. (2.1) resulta:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

2.2.2 Equação do momento linear

Utilizando-se a lei de conservação da quantidade de movimento para um fluido passando através de um volume de controle infinitesimal fixo tem-se que:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.3)$$

Onde o primeiro termo do lado esquerdo desta equação representa a variação do momento dentro do volume de controle por unidade de volume. O segundo termo representa a variação do momento por unidade de volume devido à convecção através das faces do volume de controle.

O primeiro termo do lado direito da equação representa as forças de superfície por unidade de volume aplicadas por tensões externas no elemento fluido, que podem ser divididas em tensões normais e cisalhantes. São representadas pelas componentes do tensor de tensões Π_{ij} . O segundo termo do lado direito da igualdade representa a força do campo gravitacional por unidade de volume que age sobre o fluido dentro do volume de controle.

O tensor de tensões, Π_{ij} é dado por:

$$\Pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.4)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker sendo que $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e, p é a pressão estática do fluido.

A Eq. (2.3) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(-p) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) + \rho g_i \quad (2.5)$$

Para um fluido newtoniano e incompressível, a tensão viscosa pode ser expressa como:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.6)$$

onde μ é a viscosidade absoluta ou dinâmica do fluido.

Substituindo as relações entre as tensões e taxas de deformação na Eq. (2.5) tem-se a equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(-p) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \quad (2.7)$$

Considerando-se um escoamento incompressível e desprezando o efeito da gravidade, tem-se assim as equações da continuidade e do momento linear:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.9)$$

onde ν é a viscosidade cinemática. As equações acima formam um sistema que contém as seguintes incógnitas: u_i (u_1, u_2, u_3) e p . Com as condições de contorno convenientes, este sistema pode ser resolvido, já que possui mesmo número de equações e de incógnitas.

2.3 Equações médias do escoamento turbulento

Em casos onde o escoamento é turbulento, as variáveis do escoamento podem ser descritas como uma soma de um valor médio no tempo e uma flutuação, assim

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (2.10)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.11)$$

O mesmo pode ser feito com os parâmetros do escoamento instantâneo. Para as três componentes de velocidade e a componente de pressão:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; \\ v &= \bar{v} + v'; \\ w &= \bar{w} + w'; \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (2.12)$$

A média temporal de uma quantidade em um ponto fixo no espaço é dada por

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt \quad (2.13)$$

Para que os valores médios sejam independentes do intervalo de tempo, este deve ser suficientemente grande, sendo que todas as propriedades médias descrevendo flutuações devem ser nulas, resultando:

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = \bar{p}' = 0 \quad (2.14)$$

2.3.1 Equação média da continuidade

Aplicando-se a média de Reynolds na Eq. (2.2), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_j + u'_j) = 0 \quad (2.15)$$

Manuseando-se a Eq. 2.15 e obtendo o valor médio:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.16)$$

Subtraindo-se esta última equação da anterior:

$$\frac{\partial(u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17)$$

2.3.2 Equação média do momento linear

Aplicando-se a decomposição de Reynolds na Eq. (2.9), obtendo-se a chamada equação de Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (2.18)$$

A Eq. (2.18), que é a equação do momento linear para um escoamento turbulento, difere da Eq. (2.9) instantânea devido ao termo do produto das componentes da flutuação da velocidade.

Com o aparecimento do termo $-\overline{u'_i u'_j}$, que é chamado tensor de Reynolds, o sistema não pode ser resolvido pois, desta vez, o número de incógnitas é superior ao de equações. Surge o chamado "problema de fechamento".

2.3.3 Viscosidade turbulenta

A forma mais simples de resolver o problema de fechamento consiste em adotar a hipótese de Boussinesq relacionando o tensor das tensões com o tensor taxa de deformação através da chamada viscosidade turbilhonar. A expressão (1.2) pode ser generalizada para o tensor das tensões de Reynolds através da expressão (RODI, 1980):

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.19)$$

onde ν_t é a viscosidade cinemática turbulenta, que como visto anteriormente não é uma propriedade do fluido como acontece com a viscosidade molecular, e sim uma propriedade que depende do escoamento.

O primeiro termo do lado direito da Eq. 2.19 possui uma parcela onde está presente o tensor delta de Kronecker (δ_{ij}) que é necessário para obter as tensões normais, quando $i = j$. A energia cinética k do escoamento turbulento é dada por:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) \quad (2.20)$$

Como mostrado na equação acima, a energia cinética turbulenta (k) é, por definição, uma quantidade positiva. A energia cinética é uma grandeza escalar e as tensões normais, da mesma forma que as forças de pressão, agem perpendicularmente às faces do volume de controle.

A substituição da eq. (2.19) na equação (2.18) resulta:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ef}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.21)$$

Onde temos uma pressão e viscosidade efetivas:

$$p_{ef} = \bar{p} + \rho \frac{2}{3} k \quad (2.22)$$

$$\nu_{ef} = \nu + \nu_t \quad (2.23)$$

Em geral, a influência de energia cinética na pressão efetiva não é significativa. Porém, em geral, a parcela turbulenta da viscosidade efetiva predomina sobre a parcela devida à viscosidade molecular. Seguindo as ideias de Kolmogorov, os modelos de turbulência, através de equações de transporte para variáveis características da turbulência como a energia cinética k e sua taxa de dissipação ε , possibilitam a obtenção da viscosidade turbulenta através de argumentos dimensionais.

Embora a hipótese de Boussinesq funcione como uma ferramenta útil para resolver o problema de fechamento, deve-se ressaltar que a base teórica sobre a qual se assenta é frágil. Como discutido por RODI (1980), a analogia entre tensões turbulentas e viscosas não se verifica, pois a interação entre turbilhões no escoamento turbulento não é similar às colisões

entre moléculas. Porém, do ponto de vista computacional, até hoje a hipótese de Boussinesq representa a alternativa menos complicada para representar os efeitos difusivos dos escoamentos turbulentos.

2.4 Modelo $k - \varepsilon$

Uma maneira de se classificar os modelos de turbulência é quanto ao número de equações de transporte que pode variar a partir de zero equação, quando não há equação de transporte (modelo algébrico), até múltiplas equações de transporte dependendo do número de grandezas turbulentas transportadas. Quanto maior o número de equações de transporte, para um maior número de grandezas turbulentas, os modelos tornam-se mais próximos dos eventos reais aumentando inclusive a possibilidade da descrição de fenômenos de maior complexidade.

O modelo de duas equações $k - \varepsilon$ tem como grandezas transportadas a energia cinética turbulenta (k) e a taxa de dissipação de energia cinética da turbulência (ε). Foi proposto por LAUNDER e SPALDING (1972), aprofundando ideia de CHOU (1945) tendo por base o fato de que é possível obter equações de transporte exatas para essas grandezas. Em WILCOX (1993), verifica-se:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} \right) + P_k - \varepsilon \quad (2.24)$$

Onde a produção de energia cinética turbulenta P_k e a taxa de dissipação ε são dadas por:

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (2.26)$$

A Eq. (2.25) permite, através da hipótese de Boussinesq e do gradiente de velocidades do escoamento médio, calcular a produção P_k . No entanto, para determinar ε a Eq. (2.26) é de pouca valia, e se faz necessária uma equação de transporte. De WILCOX (1993):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \varepsilon)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \overline{\nu u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} - 2\nu \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m}} \right) \\
&\quad - 2\nu \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\
&\quad - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} - 2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

A dedução das Eqs. (2.24) e (2.27) pode ser encontrada em CELIK (1999).

Uma vez que as Eqs. (2.24) e (2.27) são muito complexas, foram propostas equações modeladas para k e ε . Assim, segundo JONES e LAUNDER (1972):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2.29}$$

Nestas duas últimas equações, σ_k , σ_ε , C_1 e C_2 são constantes calibradas com resultados experimentais. Uma quinta constante, C_μ , surge da definição, por argumentos dimensionais, da viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2.30}$$

Os valores usados para as constantes do assim chamado modelo k - ε padrão foram definidos por LAUNDER e SHARMA (1974). Calibrando o escoamento para a situação de equilíbrio da camada logarítmica e para o decaimento de energia cinética turbulenta em um escoamento uniforme, obtém-se $C_1 = 1,44$, $C_2 = 1,92$, $C_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

O modelo k - ε padrão foi um dos primeiros modelos de turbulência a ser usado extensivamente em programas comerciais de Dinâmica dos Fluidos Computacional quando se iniciou a popularização dessa tecnologia. No entanto, rapidamente suas deficiências foram

descobertas. A principal é uma tendência a produzir excesso de viscosidade turbulenta em escoamentos com gradientes adversos de pressão, como ressaltado por RODI e SCHEUERER (1986). O excesso de difusão turbulenta tende a diminuir as regiões de recirculação capturadas pelo modelo.

2.5 Modelos $k-\omega$ e $k-\omega$ SST

O modelo $k-\omega$ padrão foi proposto por WILCOX (1988) como um aprofundamento das idéias de Kolmogorov. Nesse modelo, ao invés de termos uma equação de transporte para ε , temos uma equação de transporte para o que se chama dissipação específica ω , onde $\omega = \varepsilon/(k.C_\mu)$.

As equações do modelo $k-\omega$ padrão são:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma^* v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta^* k \omega \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 \quad (2.32)$$

A viscosidade turbilhonar é dada por:

$$v_t = \frac{k}{\omega} \quad (2.33)$$

As constantes foram calibradas da mesma forma que as constantes do modelo $k-\varepsilon$, resultando $\alpha=5/9=0,556$, $\beta=3/40=0,075$, $\beta^* = 0,09$, $\sigma=1/2$, $\sigma^*=1/2$. A constante β^* é equivalente à constante C_μ do modelo $k-\varepsilon$.

O modelo $k-\omega$ padrão fornece resultados muito superiores para a simulação de escoamentos internos com gradientes adversos de pressão do que o modelo $k-\varepsilon$. No entanto, rapidamente descobriu-se uma grave deficiência. Como pode ser visto em MENTER (1994), o modelo $k-\omega$ padrão é fortemente influenciado, na simulação de escoamentos externos, pelo valor da condição de contorno de ω na corrente livre. Quando usados valores de ω muito baixos na corrente livre, verificam-se valores excessivos de viscosidade turbilhonar nas partes mais altas da camada limite. O modelo $k-\varepsilon$, por outro lado, não apresenta essa deficiência.

Uma explicação para as diferenças de comportamento entre os modelos $k-\varepsilon$ e $k-\omega$ pode ser obtida quando usamos a definição de ω , $\omega = \varepsilon/(k.C_\mu) = \varepsilon/(k.\beta^*)$ e usando a regra da cadeia do cálculo diferencial tentamos derivar sua equação. Seguindo MENTER (1994), temos que:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\beta^*k} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad (2.34)$$

Agora, substituímos as equações de transporte de k e ε e consideramos que $\sigma_k \cong \sigma_\varepsilon$. Após muita álgebra:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + (C_1 - 1) \frac{\omega}{k} P_k - (C_2 - 1) \beta^* \omega^2 + \frac{2}{\sigma_\varepsilon} \frac{v_t}{k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.35)$$

Em relação à Eq. (2.32) surgem duas modificações menores, relativas a valores diferentes de α e β , pois pelas constantes do modelo $k-\varepsilon$ temos $\alpha=(C_1-1)=0,44$ e $\beta=(C_2-1)\beta^*=0,0828$. Porém, tem-se uma grande diferença correspondente ao último termo do lado direito da Eq. (2.35), chamado de termo de difusão cruzada.

Na camada limite, quando mais distante da parede, $\partial k/\partial y > 0$ e $\partial \omega/\partial y < 0$. Logo, o termo de difusão cruzada funciona como um termo de destruição da dissipação, favorecendo o incremento da viscosidade turbilhonar. Se lembrando que a Eq. (2.35) foi obtida a partir do modelo $k-\varepsilon$, tem-se uma explicação para a excessiva difusão turbulenta relacionada a esse modelo e verificada por RODI e SCHEUERER (1986).

Por outro lado, indo na direção na parte mais alta da camada limite, $\partial k/\partial y < 0$ e $\partial \omega/\partial y < 0$. O termo de difusão cruzada funciona como um termo de produção de dissipação, baixando a viscosidade turbilhonar. Isso diminui a difusão e conseqüentemente a influência da condição de contorno do escoamento externo. Nesse caso, a presença desse termo é benéfica, combatendo a influência negativa de um baixo valor de ω na corrente livre. Porém, o termo de difusão cruzada está ausente da equação original de ω , Eq. (2.32).

Por essas razões, MENTER (1994) propôs uma modificação do modelo $k-\omega$ que incluisse o termo de difusão cruzada na equação de ω indo em direção à região da camada limite mais próxima do escoamento externo, mantendo esse termo ausente na vizinhança da parede. O modelo proposto por Menter é o chamado modelo $k-\omega$ SST (Shear Stress

Transport). Esse modelo faz uso de uma função, chamada F_1 , cuja forma garante que $F_1 \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$, e $F_1 \rightarrow 1$ quando $y \rightarrow 0$. A equação de ω fica:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{2}{\sigma_\varepsilon} (1 - F_1) \frac{v_t}{k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.36)$$

Com $\alpha = 0,556F_1 + 0,44(1 - F_1)$, $\beta = 0,075F_1 + 0,0828(1 - F_1)$ e $\sigma = 0,5F_1 + 0,856(1 - F_1)$. A função F_1 é dada por:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.37)$$

Onde \arg_1 é dado por:

$$\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 v}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right) \quad (2.38)$$

A constante $\sigma_{\omega 2} = 0,856$ e $CD_{k\omega}$ é dado por:

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (2.39)$$

Outra modificação importante introduzida no modelo $k-\omega$ SST por Menter foi a inclusão da chamada "hipótese de Bradshaw". Segundo BRADSHAW (1967), a relação entre a tensão turbulenta e a energia cinética numa camada limite, independentemente do gradiente de pressão, é dada por:

$$-\overline{u'v'} \cong a_1 k \quad (2.40)$$

Nesta última expressão, a_1 é uma constante, $a_1 = C_\mu^{1/2} = 0,31$.

Ocorre que, para um modelo de duas equações, usando a hipótese de Boussinesq, a tensão de Reynolds também pode ser escrita como:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.41)$$

Tal equação pode ser transformada em:

$$-\overline{u'v'} = \sqrt{\nu_t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \sqrt{\nu_t} \quad (2.42)$$

A primeira raiz corresponde, para uma camada limite bidimensional, à raiz da produção de turbulência. Assim:

$$-\overline{u'v'} = \sqrt{P_k} \cdot \sqrt{C_\mu} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.43)$$

Desta forma, para um modelo de duas equações, chegamos à expressão:

$$-\overline{u'v'} = \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} a_1 k \quad (2.44)$$

Que, obviamente, não está de acordo com a hipótese de Bradshaw, Eq. (2.40), sempre que produção e destruição de turbulência diferirem sensivelmente. Isso é particularmente verdadeiro quando encontram-se gradientes adversos de pressão, situação em que a relação entre produção e destruição de turbulência costuma ser bem maior que a unidade.

Para resolver esse problema inerente aos modelos de duas equações, MENTER (1994) propôs calcular a viscosidade turbulenta como:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, F_2 S)} \quad (2.45)$$

Nesta última expressão, F_2 é uma função que vale 1 na proximidade da parede e tende a zero a medida que aproxima-se do escoamento externo, e S é a norma do tensor taxa de deformação:

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (2.46)$$

Onde tem-se:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.47)$$

O cálculo da viscosidade turbilhonar pela Eq. (2.45) garante que, em situações de gradiente adverso de pressão, quando $P_k > \varepsilon$, a hipótese de Bradshaw seja respeitada. Observe-se que:

$$\sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\nu_t S^2}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{S^2}{C_\mu \omega^2}} \quad (2.48)$$

Ou seja, quando $P_k > \varepsilon$ tem-se $S > a_1 \omega$, e o cálculo da viscosidade turbilhonar pela Eq. (2.45) garante que a tensão de Reynolds seja dada pela Eq. (2.41), satisfazendo a hipótese de Bradshaw.

Quanto à função F_2 , ela é dada por:

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (2.49)$$

Onde tem-se:

$$\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \quad (2.50)$$

O modelo k- ω SST tem sido o modelo de turbulência de duas equações mais bem sucedido até agora no sentido de representar uma ampla gama de escoamentos. Tornou-se particularmente o modelo preferido em aplicações aeronáuticas para escoamentos externos com gradientes adversos de pressão.

2.6 Modelo de Menter de uma equação de transporte para a viscosidade turbulenta

Uma das conclusões do trabalho de RODI e SCHEURER (1986) foi que mesmo modelos com uma equação podem prever escoamentos com gradientes adversos de pressão melhor que o modelo $k-\varepsilon$ padrão. Assim como existem aqueles que preferem introduzir uma maior complexidade na modelagem de turbulência, com o objetivo de perseguir uma maior generalidade, existem também aqueles que buscam, ao contrário, simplificar ao máximo os modelos. Nessa linha, MENTER (1997) derivou um modelo de transporte de uma equação de transporte para a viscosidade turbulenta a partir dos modelos $k-\varepsilon$ e $k-\omega$.

A abordagem é simples: se a nossa viscosidade turbilhonar é $\tilde{\nu} = \nu_t$, usando o modelo $k-\varepsilon$:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = C_\mu \left(2 \frac{k}{\varepsilon} \frac{Dk}{Dt} - \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{D\varepsilon}{Dt} \right) \quad (2.51)$$

Considerando apenas uma camada limite bidimensional, pode-se escrever a produção de energia cinética apenas como:

$$P_k = \tilde{\nu} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2 \quad (2.52)$$

Introduzindo também a hipótese de Bradshaw:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = a_1 k \quad (2.53)$$

Substituindo as equações de transporte de k e ε , Eqs. (2.28) e (2.29), na Eq. (2.51), e considerando que $\sigma_k \cong \sigma_\varepsilon$, resulta:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{\nu}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial y} \right) + C_{1\tilde{\nu}} \tilde{\nu} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| - C_{2\tilde{\nu}} \frac{\tilde{\nu}^2}{L_{VK}^2} \quad (2.54)$$

Nesta última equação, L_{VK} é a chamada escala de comprimento de Von Kármán:

$$L_{VK} = \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|} \quad (2.55)$$

A escala de comprimento tende a zero quando aproxima-se do escoamento irrotacional externo. Assim, Menter tomou de empréstimo do modelo de BALDWIN e BARTH (1990) o seu termo de destruição de turbulência para substituir a escala de Von Kármán quando $y \rightarrow \infty$. Generalizando o modelo para um escoamento tridimensional e introduzindo funções de amortecimento para a subcamada viscosa, resulta finalmente (MENTER, 1997):

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{1\tilde{\nu}} D_1 \tilde{\nu} \Omega - C_{2\tilde{\nu}} C_{3\tilde{\nu}} \min \left(\frac{\tilde{\nu}^2}{C_{3\tilde{\nu}} L_{VK}^2}, \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \quad (2.56)$$

A escala de comprimento de Von Kármán L_{VK} é dada por:

$$L_{VK} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j}}} = \frac{\Omega}{|\nabla \Omega|} \quad (2.57)$$

Nas equações (2.56) e (2.57) Ω é a magnitude do vetor da vorticidade. A viscosidade turbilhonar usada no tensor de Reynolds e as funções de amortecimento são dadas por:

$$\nu_t = D_2 \tilde{\nu} \quad (2.58)$$

$$D_1 = \frac{\nu_t + \nu}{\tilde{\nu} + \nu} \quad (2.59)$$

$$D_2 = 1 - e^{-[\tilde{\nu}/(A^+ \kappa \nu)]^2} \quad (2.60)$$

E, finalmente, as constantes são $C_{1\tilde{\nu}}=0,144$, $C_{2\tilde{\nu}}=1,86$, $C_{3\tilde{\nu}}=7$, $\sigma_{\tilde{\nu}}=1$, $A^+=13$ e a constante de Von Kármán $\kappa=0,41$.

No denominador da Eq. (2.57) soma-se um pequeno número (por exemplo, 10^{-20}) ao módulo do gradiente de vorticidade, de modo que no escoamento externo à camada limite, $L_{VK} \rightarrow 0$.

Se a derivação deste modelo for efetuada a partir do modelo $k-\omega$ resulta, segundo MENTER (1997), um termo levemente modificado para a destruição de $\tilde{\nu}$:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{1\tilde{\nu}} D_1 \tilde{\nu} \Omega - C_{2\tilde{\nu}} C_{3\tilde{\nu}} \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{C_{3\tilde{\nu}} L_{VK}} \cdot \sqrt{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}, \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \quad (2.61)$$

O modelo de uma equação de Menter apresenta resultados curiosos. Utilizando a formulação derivada do modelo $k-\omega$, ELKHOURY (2011) verificou dependência dos resultados em relação ao valor da condição de contorno na corrente livre de $\tilde{\nu}$. Altos valores de $\tilde{\nu}$ como condição de contorno resultam em excesso de difusão turbulenta na camada limite. O problema parece ser herdado diretamente do modelo $k-\omega$.

Por outro lado, quando usada a formulação resultante da derivação a partir do modelo $k-\varepsilon$, bons resultados são obtidos para escoamentos com gradientes adversos de pressão. MENTER (1997) obteve ótima concordância com resultados experimentais na simulação do escoamento em um degrau. Aparentemente o uso na derivação do modelo de uma equação, da hipótese de Bradshaw dada pela Eq. (2.53), minimizou as deficiências inerentes ao modelo $k-\varepsilon$.

MENTER (1997) considera que seu modelo se compara favoravelmente em relação ao modelo de SPALART e ALLMARAS (1994) pelo fato de não ser necessário determinar a distância de cada nó da malha em relação à parede. De fato, o uso da distância em relação à parede como escala de comprimento, como se faz no modelo Spalart-Allmaras, é sob certos aspectos uma desvantagem, pois a determinação da distância em relação à parede para cada nó, em uma malha tridimensional não-estruturada, é tarefa complexa e demanda tempo computacional. Por outro lado, deve-se ressaltar que a escala de comprimento de Von Kármán, como calculada pela Eq. (2.57), resulta a própria distância y em relação à parede para a camada logarítmica:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (2.62)$$

Onde $u^+ = \bar{u}/u^*$, $y^+ = u^* y/\nu$ e a velocidade de atrito é $u^* = \sqrt{\tau_o/\rho}$, com τ_o sendo a tensão na parede. No entanto, na subcamada viscosa, onde $u^+ = y^+$, o cálculo da escala de comprimento de Von Kármán pela Eq. (2.57) resulta $L_{VK} \rightarrow \infty$, o que é um resultado indesejável, uma vez que na subcamada viscosa se quer uma destruição elevada de turbulência.

2.7 Modelo de Spalart-Allmaras

SPALART e ALLMARAS (1992),(1994) desenvolveram seu modelo de uma equação seguindo a ideia de BALDWIN e BARTH (1990) de utilizar uma equação de transporte para a própria viscosidade turbilhonar. Enquanto posteriormente MENTER (1997) derivou seu modelo de uma equação a partir do modelo $k-\varepsilon$ usando regras simples de cálculo diferencial, Spalart e Allmaras chegaram a sua equação de transporte apenas por argumentos dimensionais. Para o termo de destruição de turbulência decidiram usar como escala de comprimento a própria distância da parede d obtida do modelo de comprimento de mistura de Prandtl. Chegaram a uma equação básica:

$$\frac{Dv_t}{Dt} = c_{b1} v_t S + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_t \frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \left(\frac{\partial v_t}{\partial x_j} \frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right) \right] - c_{w1} f_w \left(\frac{v_t}{d} \right)^2 \quad (2.63)$$

A partir dessa última expressão, calibraram as constantes e funções de amortecimento para que uma viscosidade turbilhonar transformada $\tilde{\nu}$ relacionada com ν_t tivesse uma lei de variação linear entre a parede e a camada logarítmica:

$$\tilde{\nu} = \kappa u^* d \quad (2.64)$$

Dessa calibração resulta a equação de transporte:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (2.65)$$

Onde a viscosidade turbulenta usada na hipótese de Boussinesq é:

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu} \quad (2.66)$$

A produção de viscosidade turbulenta é dada por:

$$\tilde{S} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (2.67)$$

E Ω é a magnitude da vorticidade dada por:

$$\Omega = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (2.68)$$

Com o tensor de rotação definido como:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.69)$$

As funções f_{v1} , f_{v2} e f_w são dadas por:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad (2.70)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (2.71)$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (2.72)$$

Onde χ e g são:

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.73)$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad (2.74)$$

O parâmetro r é dado por:

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (2.75)$$

Finalmente, o modelo é fechado com as constantes:

$$c_{b1} = 0,1355 \quad c_{b2} = 0,622 \quad c_{v1} = 7,1 \quad \sigma = 2/3 \quad (2.76)$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \quad c_{w2} = 0,3 \quad c_{w3} = 2 \quad \kappa = 0,41 \quad (2.77)$$

Devem ser adotadas condições de contorno definindo os valores de $\tilde{\nu}$, sendo $\tilde{\nu} = 0$ junto à parede.

Além de apresentar boa convergência, segundo WILCOX (1993) o modelo Spalart-Allmaras produz bons resultados tanto em regiões onde a camada limite possui gradientes de pressão favoráveis como adversos.

No entanto, o modelo de Spalart-Allmaras fornece resultados distantes dos experimentais para jatos planos e circulares.

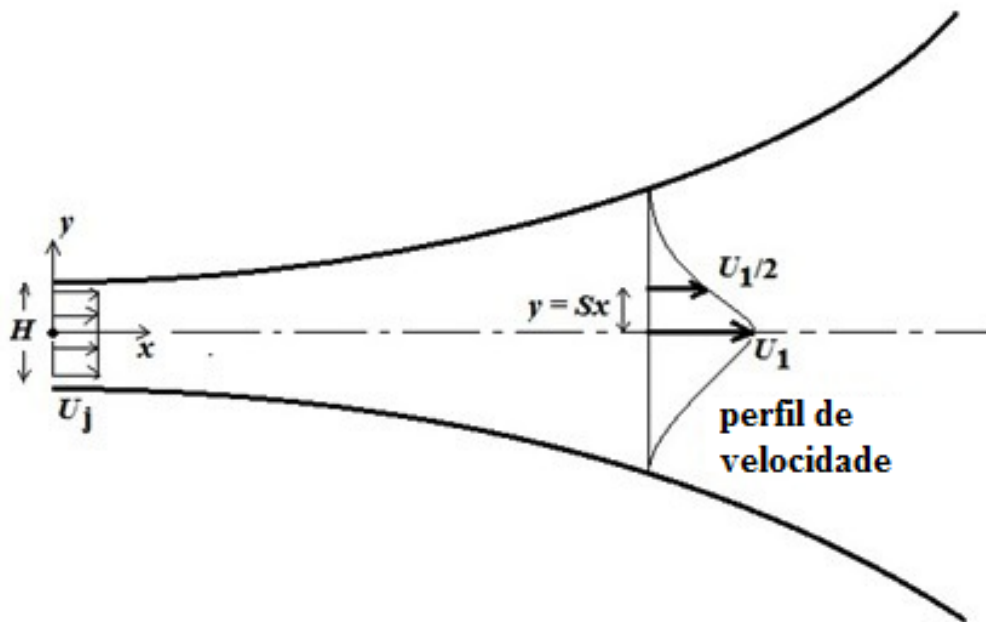


Figura 2.1 - Representação esquemática de um jato plano livre.

Na Fig. (2.1) pode-se ver a representação esquemática de um jato plano. Define-se a taxa de expansão S ("spreading rate") de um jato como a cota transversal do perfil de velocidade para a qual a velocidade é igual à metade da velocidade na linha de centro, dividida pela distância x até a origem do jato. Assim, para o perfil de velocidades do jato, $S=y/x$ onde y é a cota para a qual a velocidade \bar{u} é igual a $U_1/2$, sendo U_1 a velocidade para $y=0$.

Resultados experimentais de BRADBURY (1965) mostram que, para um jato plano incompressível, $S = 0,100 - 0,110$, e para um jato circular, experimentos resultam em $S = 0,086 - 0,095$ segundo WYGNANSKI e FIEDLER (1969). BARDINA et al (1997) obtiveram em suas simulações usando o modelo de Spalart e Allmaras $S = 0,143$ para o jato plano e $S = 0,253$ para o jato circular. Esses resultados foram muito inferiores aos resultados obtidos com os modelos $k-\varepsilon$ de LAUNDER e SHARMA (1974), $k-\omega$ de WILCOX (1988) e $k-\omega$ SST de Menter (1994).

Mais recentemente STROHER et al (2007), simulando um jato circular subônico compressível com os modelos $v2-f$ (DURBIN, 1995) e Spalart-Allmaras, também chegaram a conclusão que o modelo Spalart-Allmaras apresenta deficiências para esse tipo de escoamento, predizendo excessiva difusão do jato.

Uma teoria para o comportamento do modelo de Spalart-Allmaras reside no uso da distância até à parede no termo de destruição de turbulência. À medida em que $d \rightarrow \infty$ o termo

de destruição $\tilde{\nu}^2 / d^2 \rightarrow 0$ e o modelo prediz uma viscosidade turbulenta excessiva, resultando em uma taxa de expansão elevada.

O modelo de Spalart-Allmaras tem sido muito bem sucedido em cálculos aerodinâmicos de aerofólios e perfis de asa, onde o uso da distância d como escala de comprimento reproduz corretamente a camada limite. Porém, não se pode esperar que tal definição da escala de comprimento resulte em previsões corretas para jatos livres distantes de uma parede. Para essa categoria de escoamentos outra solução deve ser buscada.

3 O MODELO DE SPALART-ALLMARAS MODIFICADO

Para a simulação de jatos livres o modelo de uma equação de Menter apresenta resultados superiores ao modelo de Spalart-Allmaras. Em MENTER (1997), verifica-se que para o jato livre plano esse modelo fornece como resultado uma taxa de expansão $S = 0,111$, resultado muito bom quando comparado com o experimento de BRADBURY (1965), onde se verifica $S = 0,100 - 0,110$. Para o jato livre circular, o modelo de uma equação de Menter fornece uma taxa de expansão $S = 0,131$ enquanto os resultados experimentais de WYGNANSKI e FIEDLER (1969) fornecem $S = 0,086 - 0,095$. Embora o resultado para o jato circular não seja tão bom quanto o resultado para o jato plano, verifica-se de qualquer forma que mesmo para o jato circular o resultado do modelo de Menter é muito melhor que o resultado obtido pelo modelo Spalart-Allmaras ($S = 0,253$).

Por outro lado, como visto, o modelo de Menter possui dentro da subcamada viscosa uma incoerência na estimativa da escala de comprimento turbulenta a partir da escala de comprimento de Von Kármán, que resulta como herança da derivação a partir do modelo $k-\varepsilon$.

Verifica-se que a equação de transporte de $\tilde{\nu}$ usada no modelo de Menter, Eq. (2.56), pode ser re-escrita em termos de uma escala de comprimento turbulenta da seguinte maneira:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{1\tilde{\nu}} D_1 \tilde{\nu} \Omega - C_{2\tilde{\nu}} \frac{\tilde{\nu}^2}{L_t^2} \quad (3.1)$$

Onde é possível definir uma escala de comprimento turbulenta L_t da seguinte maneira:

$$L_t = \max(L_{VK}, L_{\tilde{\nu}}) \quad (3.2)$$

A escala de comprimento $L_{\tilde{\nu}}$ é construída a partir dos termos de destruição propostos por BALDWIN e BARTH (1990):

$$L_{\tilde{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{C_{3\tilde{\nu}}}} \frac{\tilde{\nu}}{\sqrt{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}} = \frac{1}{\sqrt{C_{3\tilde{\nu}}}} \frac{\tilde{\nu}}{|\nabla \tilde{\nu}|} \quad (3.3)$$

No denominador da Eq. (3.3) pode-se somar um número pequeno (10^{-20} por exemplo), da mesma forma que se fez com a Eq. (2.57), de forma a evitar divisões por zero. Enquanto no caso da escala de Von Kármán isso garante que $L_{VK} \rightarrow 0$ no escoamento irrotacional, isso faz com que na mesma região $L_{\tilde{\nu}} \rightarrow \infty$, pois o valor de $\tilde{\nu}$ é o valor da condição de contorno da corrente livre e, sendo uniforme, temos $\nabla \tilde{\nu} \rightarrow 0$ quando nos aproximamos do escoamento externo.

Assim, o modelo de Menter usa a escala de comprimento de Von Kármán L_{VK} quando perto da parede e na camada logarítmica, mudando para $L_{\tilde{\nu}}$ na parte alta da camada limite e na região externa. Na região da corrente livre a destruição de $\tilde{\nu}$ se torna nula, num comportamento similar ao do modelo de Spalart-Allmaras quando $d \rightarrow \infty$.

Finalmente, deve-se notar que, escrita dessa forma, a equação de transporte de $\tilde{\nu}$ do modelo de Menter se torna muito similar à equação de transporte do modelo de Spalart-Allmaras.

Lembrando que o modelo de Spalart-Allmaras foi calibrado para que $\tilde{\nu} = \kappa u^* d$, pode-se observar que o uso da escala de comprimento de Von Kármán não é incompatível com essa calibração na camada logarítmica. De fato, na camada logarítmica, o comprimento de Von Kármán $\Omega/|\nabla\Omega| = d$.

Portanto, surge a ideia de usar a escala de comprimento da Eq. (3.2) em conjunto com a distância em relação à parede d para formar uma nova escala de comprimento a ser usada no modelo de Spalart-Allmaras.

Essa nova escala de comprimento, que será chamada de \tilde{d} (em analogia com o que se faz em DES quando a distância à parede é comparada com a escala de comprimento da malha), deve preservar o uso da distância em relação à parede d na subcamada viscosa e usar a escala de comprimento de Von Kármán na camada logarítmica.

Várias técnicas podem ser usadas para fazer essa transição entre as escalas de comprimento. Convém lembrar que, no próprio modelo de Spalart-Allmaras, a função f_{v1} desempenha um processo importante em fazer com que a viscosidade turbulenta ν_t passe de $\nu_t = \tilde{\nu}$ na camada logarítmica para $\nu_t = 0$ na subcamada viscosa.

Assim, será usada como escala de comprimento:

$$\tilde{d} = \max[f_{v1}^n L_{vk} + (1 - f_{v1}^n) d, L_{\tilde{\nu}}] \quad (3.4)$$

Por um processo de tentativa e erro, concluiu-se que $n = 5$ é o melhor valor para preservar a linearidade de $\tilde{\nu}$ na camada limite, em todo o percurso da camada logarítmica até a parede.

Simulações foram realizadas para o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão com $Re_L = 10^7$. Na Fig. (3.1) pode-se ver os resultados obtidos para os perfis da viscosidade turbulenta adimensional $\tilde{\nu}^+ = \tilde{\nu}/\nu$ em $Re_x = 5 \times 10^6$ para duas simulações, uma usando $n = 5$ e outra usando $n = 2$ na Eq. (3.4). O modelo Spalart-Allmaras padrão tem suas constantes calibradas para fornecer $\tilde{\nu} = \kappa u^* y$, ou seja, $\tilde{\nu}^+ = \kappa y^+$. Pode-se ver que $n = 5$ aproxima sensivelmente melhor o resultado esperado $\tilde{\nu}^+ = \kappa y^+$ do que $n = 2$.

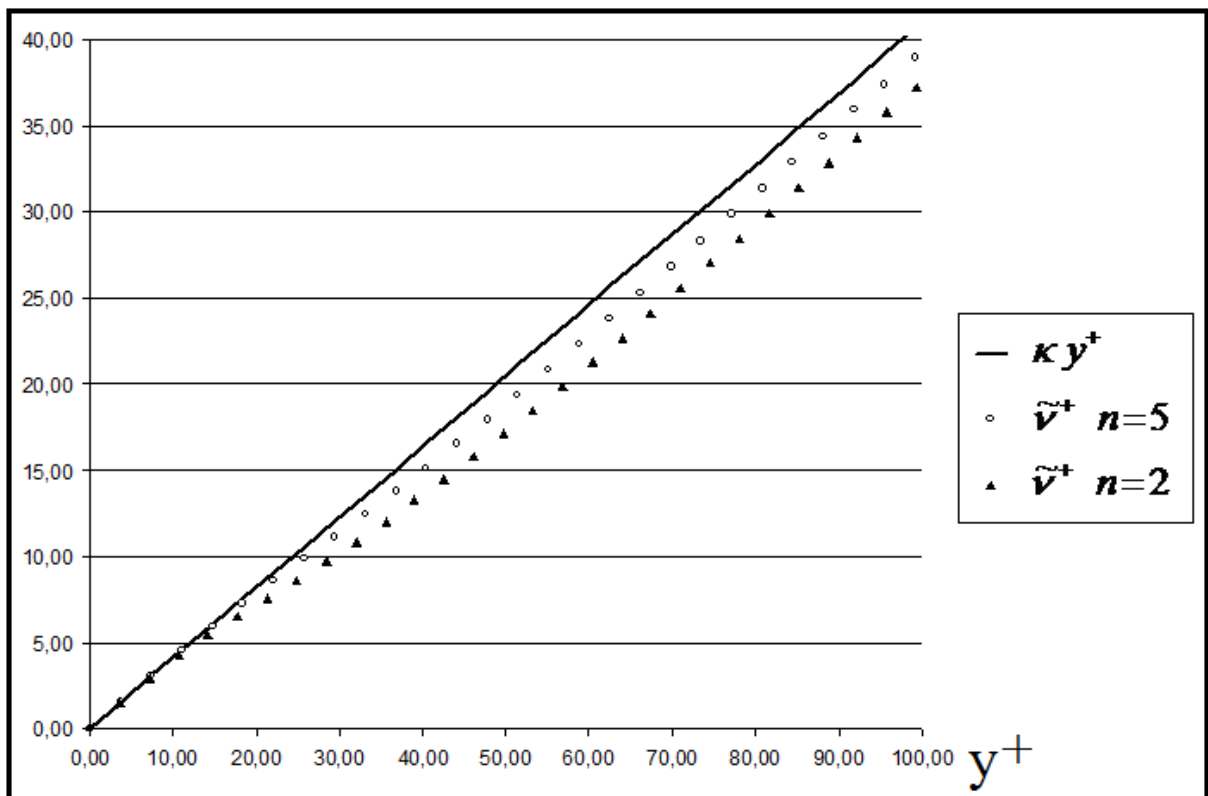


Figura 3.1 - Perfis de viscosidade turbulenta $\tilde{\nu}^+ = \tilde{\nu}/\nu$ em função de y^+ obtidos para o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão, na posição $Re_x = 5 \times 10^6$, para os valores $n = 2$ e $n = 5$ na Equação (3.4).

Com a adoção da escala de comprimento calculada pela Eq. (3.4), pretende-se diminuir a influência da distância em relação à parede em escoamentos altamente livres e altamente turbulentos como jatos. Tal alteração não deve fazer diferença em regiões de camada limite. Assim, o modelo de Spalart-Allmaras fica:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \tilde{v})}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} + c_{b1} \tilde{S} \tilde{v} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{d}} \right)^2 \quad (3.5)$$

Com os parâmetros \tilde{S} e r dados por:

$$\tilde{S} = \Omega + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 \tilde{d}^2} f_{v2} \quad (3.6)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 \tilde{d}^2} \quad (3.7)$$

4 METODOLOGIA COMPUTACIONAL

Uma vez proposta a alteração para o modelo de Spalart-Allmaras (SPALART e ALLMARAS 1992, 1994) surgiu a necessidade de implementá-la em algum código computacional.

Atualmente a grande maioria dos códigos computacionais usados em CFD fazem uso do Método dos Volumes Finitos. Como referências úteis sobre o método, temos os trabalhos de PATANKAR (1980) e VERSTEEG e MALALASEKERA (2007). Nesse método, as equações de transporte são integradas em volumes de controle. De forma geral toda equação de transporte por ser escrita como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (4.1)$$

Nesta última equação, ϕ é a grandeza transportada e Γ_ϕ é o seu coeficiente de difusão. O termo S_ϕ representa a produção e/ou destruição da grandeza ϕ . O primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (4.1) representa a variação local da grandeza ϕ , o segundo termo do lado esquerdo representa o transporte de ϕ por advecção, o primeiro termo do lado direito representa o transporte de ϕ por difusão e o último termo é o que pode ser chamado de termo fonte de ϕ .

A Eq. (4.1) pode ser integrada em um volume de controle, resultando:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} d\forall = \int_{\forall} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) d\forall + \int_{\forall} S_\phi d\forall \quad (4.2)$$

Fazendo uso do teorema de Gauss:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_S \phi \rho u_j n_j dS = \int_S \Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} n_j dS + \int_{\forall} S_\phi d\forall \quad (4.3)$$

Essa última equação pode ser representada de forma simbólica como:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_S \phi \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \vec{n} dS + \int_{\forall} S_\phi d\forall \quad (4.4)$$

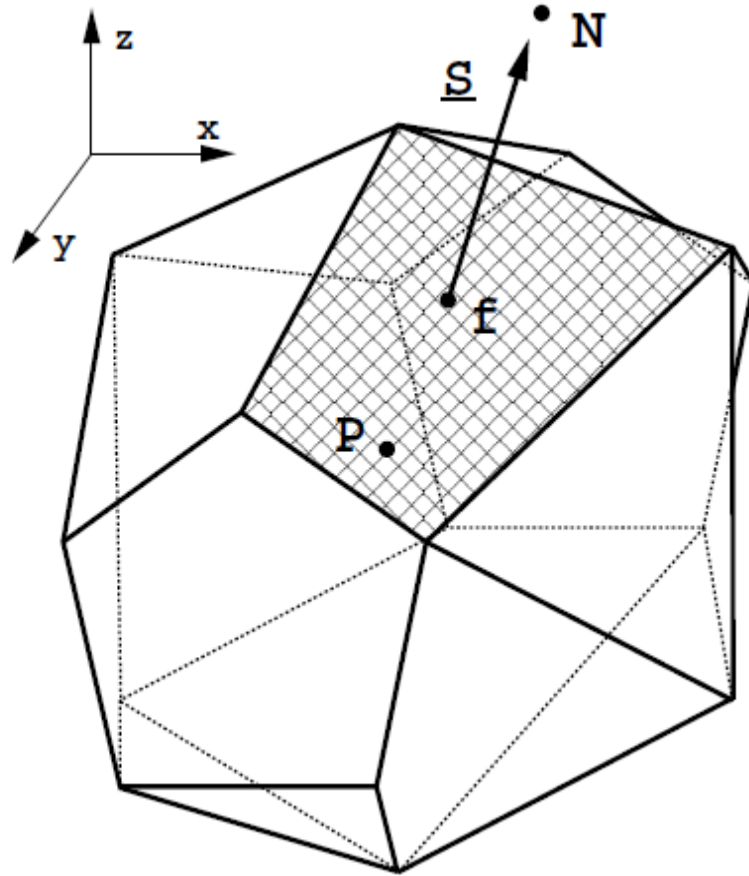


Figura 4.1 - Célula genérica para integração da Equação (4.4). Figura retirada da página 75 de JASAK (1996).

A integração da Eq. (4.4) pode ser realizada sobre um volume (também chamado célula) de formato arbitrário, compartilhando suas faces com m células vizinhas. Na Fig. (4.1), retirada da tese de doutoramento de JASAK (1996), vemos que a célula de centroide P compartilha a face f com uma célula vizinha N . A Eq. (4.4) fica:

$$\frac{\partial(\rho_P \phi_P)}{\partial t} \forall_P + \sum_m \phi_f \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{n}_f S_f = \sum_m \Gamma_{\phi_f} \nabla \phi_f \cdot \vec{n}_f S_f + S_{\phi_P} \forall_P \quad (4.5)$$

Se a vazão em massa através de uma face for definida como $\dot{m} = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} S$:

$$\frac{\partial(\rho_P \phi_P)}{\partial t} \forall_P + \sum_m \phi_f \dot{m}_f = \sum_m \Gamma_{\phi_f} \nabla \phi_f \cdot \vec{n}_f S_f + S_{\phi_P} \forall_P \quad (4.6)$$

Aqui surge uma das questões fundamentais em CFD, a avaliação da grandeza ϕ_f nas faces do volume de controle. Segundo VERSTEEG e MALALASEKERA (2007) a interpolação linear entre os centroides P e N , chamada de método das diferenças centradas, provoca instabilidades numéricas.

Uma solução, segundo PATANKAR (1980), é usar o método chamado de interpolação a montante ("*upwind*"). Nesse método, considera-se, na avaliação de ϕ_f , o sentido do escoamento através da face. Assim:

$$\begin{aligned} \text{se } \dot{m}_f \geq 0 &\Rightarrow \phi_f = \phi_P \\ \text{se } \dot{m}_f < 0 &\Rightarrow \phi_f = \phi_N \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dessa forma, se o escoamento deixa a célula, ϕ_f é o próprio valor de ϕ da célula ϕ_P . Se o escoamento entra na célula, ϕ recebe o valor da célula vizinha ϕ_N .

Desafortunadamente, embora ao método de interpolação a montante tenha excelentes propriedades de estabilidade, sabe-se que trata-se de um método com erro de 1ª ordem, segundo PATANKAR (1980) causa o fenômeno chamado de difusão falsa, diminuindo a precisão dos cálculos e dissipando os gradientes das grandezas do escoamento.

Uma solução usada em simulações de média de escoamentos turbulentos usando média de Reynolds é usar o chamado método de interpolação a montante linear ("*linear upwind*" ou "*second order upwind*"), descrito em VERSTEEG e MALALASEKERA (2007):

$$\begin{aligned} \text{se } \dot{m}_f \geq 0 &\Rightarrow \phi_f = \phi_P + \nabla \phi_P \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_P) \\ \text{se } \dot{m}_f < 0 &\Rightarrow \phi_f = \phi_N + \nabla \phi_N \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_N) \end{aligned} \quad (4.8)$$

O método de interpolação a montante linear é um método com erro de 2ª ordem e diminui substancialmente a difusão falsa.

A avaliação do gradiente da grandeza ϕ faz-se necessária para utilizar o método de interpolação a montante linear e para avaliar o termo de transporte difusivo. Um dos métodos mais simples para isso é usar o próprio teorema de Gauss:

$$\int_{\forall} \nabla \phi_P d\forall = \int_S \phi \bar{n} dS \quad (4.9)$$

Logo:

$$\nabla \phi_P = \frac{1}{\forall} \int_S \phi \bar{n} dS = \frac{1}{\forall} \sum_m \phi_f \bar{n}_f S_f \quad (4.10)$$

Na Eq. (4.10) a avaliação de ϕ_f é feita por interpolação linear entre as centroides P e N .

Finalmente, o termo de variação temporal pode ser avaliado por vários métodos diferentes, como o método implícito de Euler:

$$\frac{\rho_P(t + \Delta t)\phi_P(t + \Delta t) - \rho_P(t)\phi_P(t)}{\Delta t} \nabla_P = \left[-\sum_m \phi_f \dot{m}_f + \sum_m \Gamma_{\phi f} \nabla \phi_f \cdot \bar{n}_f S_f + S_{\phi P} \nabla_P \right]_{t+\Delta t} \quad (4.11)$$

Dado que o método implícito de Euler tem erro temporal de 1ª ordem, pode-se usar em seu lugar um método implícito de 2ª ordem, como pode ser visto em JASAK (1997):

$$\frac{\frac{3}{2}\rho_P(t + \Delta t)\phi_P(t + \Delta t) - 2\rho_P(t)\phi_P(t) + \frac{1}{2}\rho_P(t - \Delta t)\phi_P(t - \Delta t)}{\Delta t} \nabla_P = \left[-\sum_m \phi_f \dot{m}_f + \sum_m \Gamma_{\phi f} \nabla \phi_f \cdot \bar{n}_f S_f + S_{\phi P} \nabla_P \right]_{t+\Delta t} \quad (4.12)$$

A discretização da Eq. (4.12) para cada célula da malha resulta em um sistema linear do tipo:

$$a_P \phi_P - \sum_m a_f \phi_f = b \quad (4.13)$$

Onde b é o carregamento do sistema linear.

O Método dos Volumes Finitos é um método de programação e interpolações mais simples, e por sua flexibilidade acabou dominando a área de CFD. A maioria dos códigos comerciais utilizam o Método dos Volumes Finitos.

Para implementação da modificação no modelo Spalart-Allmaras, inicialmente pensou-se em usar um código comercial que permitisse a implementação de funções definidas pelo usuário. Após alguma reflexão, mudou-se o rumo e decidiu-se adotar um código aberto baseado no Método dos Volumes Finitos.

O código escolhido foi o OpenFOAM®, da OpenFOAM Foundation Ltd. Particularidades sobre os códigos podem ser encontradas em GREENSHIELDS (2015). Como os escoamentos a serem simulados eram permanentes e incompressíveis, optou-se pelo *solver* específico simpleFoam, que utiliza o algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) de PATANKAR e SPALDING (1972) para fazer o acoplamento entre pressão e velocidade. O solver simpleFoam resolve a equação de Navier-Stokes para um escoamento turbulento:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.14)$$

Devido a não-linearidade da equação de Navier-Stokes e a natureza do algoritmo SIMPLE, foi necessário usar sub-relaxação na solução dos sistemas lineares, de forma que a cada iteração i tínhamos:

$$\phi_{P_i} = \alpha \frac{\sum a_f \phi_f + b}{a_p} + (1 - \alpha) \phi_{P_{i-1}} \quad (4.15)$$

Nesta última equação, α é um coeficiente de sub-relaxação dependente da variável resolvida, $\alpha \leq 1$.

O método de interpolação a montante linear foi usado para todas as variáveis, ou seja, velocidades e viscosidade turbilhonar. Assim, pode-se dizer que as soluções encontradas têm erro espacial de 2ª ordem e estão relativamente livres de difusão falsa.

Os sistemas lineares para resolver velocidades e viscosidade turbulenta foram resolvidos usando um método de Gradiente Biconjugado com pré-condicionador do tipo Decomposição Incompleta LU. Para resolver o sistema linear da pressão utilizou-se sempre um método de MULTIGRID Algébrico. Detalhes podem ser vistos em GREENSHIELDS (2015).

Por ser um código aberto, foi relativamente simples implementar modificações no código, escrito em c++. Cuidado teve que ser tomado com os modelos originais do OpenFOAM®, pois a versão do modelo Spalart-Allmaras implementada no código não era a versão do modelo padrão de SPALART e ALLMARAS (1992, 1994). Primeiramente o código teve que ser corrigido para essa versão padrão.

Dado que todos os escoamentos resolvidos eram bidimensionais, microcomputadores INTEL I7 com 6GB de memória RAM e sistema operacional LINUX foram suficientes para rodar todos os casos. Dada a relativa simplicidade geométrica, usaram-se sempre malhas estruturadas de quadriláteros.

5 RESULTADOS

5.1 Placa Plana sem Gradiente de Pressão

Uma vez proposta a alteração do modelo Spalart-Allmaras, torna-se imperativo verificar se essa alteração não tem efeitos deletérios nas propriedades preditivas do modelo. Um dos escoamentos mais básicos que devem ser reproduzidos por qualquer modelo de turbulência é o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão. Por essa razão serão apresentados agora resultados de simulações para esse escoamento usando tanto o modelo Spalart-Allmaras com a modificação proposta quanto o modelo Spalart-Allmaras padrão.

5.1.1 Características gerais do escoamento

O perfil de velocidades de uma camada limite turbulenta é bem diferente do perfil de velocidades de um escoamento laminar.

Como mostrado na figura 5.1, extraída de ÇENGEL e CIMBALA (2015), o perfil de velocidade de um escoamento laminar totalmente desenvolvido é parabólico. Já a figura 5.2, também extraída de ÇENGEL e CIMBALA (2015), mostra que o perfil de velocidade de um escoamento turbulento pode ser dividido em quatro regiões, dependendo da distância à parede. Segundo ÇENGEL e CIMBALA (2015), a subcamada viscosa, ou laminar, é uma camada muito fina próxima à parede onde os efeitos viscosos são mais significativos. Como a variação de velocidade é muito brusca, nessa região, o perfil de velocidade é praticamente linear, o que pode-se observar experimentalmente. A região seguinte é a camada amortecedora que é muito influenciada por efeitos viscosos, mas já tem-se a presença de efeitos turbulentos. A seguir, tem-se a camada de superposição ou camada logarítmica, onde começam a preponderar os efeitos turbulentos. E, por último, tem-se a camada externa turbulenta, onde os efeitos da viscosidade podem ser negligenciados.

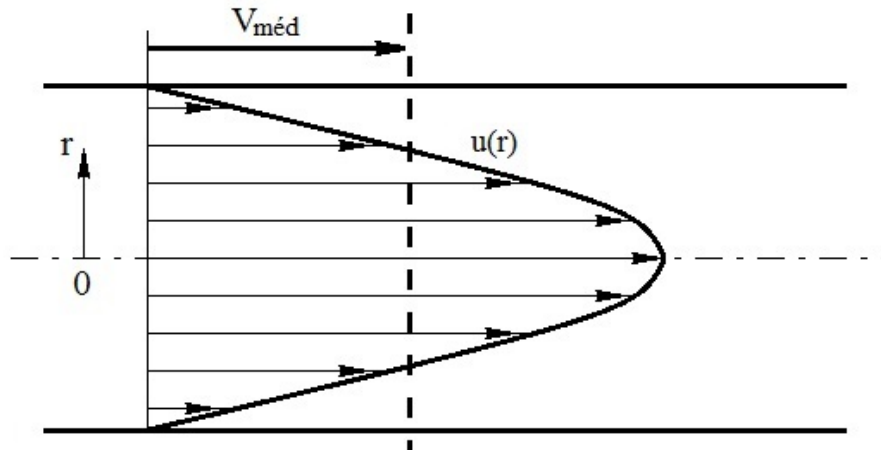


Figura 5.1 - Perfil de velocidade parabólico de um escoamento laminar. Figura extraída e adaptada de ÇENGEL e CIMBALA (2015), página 365.

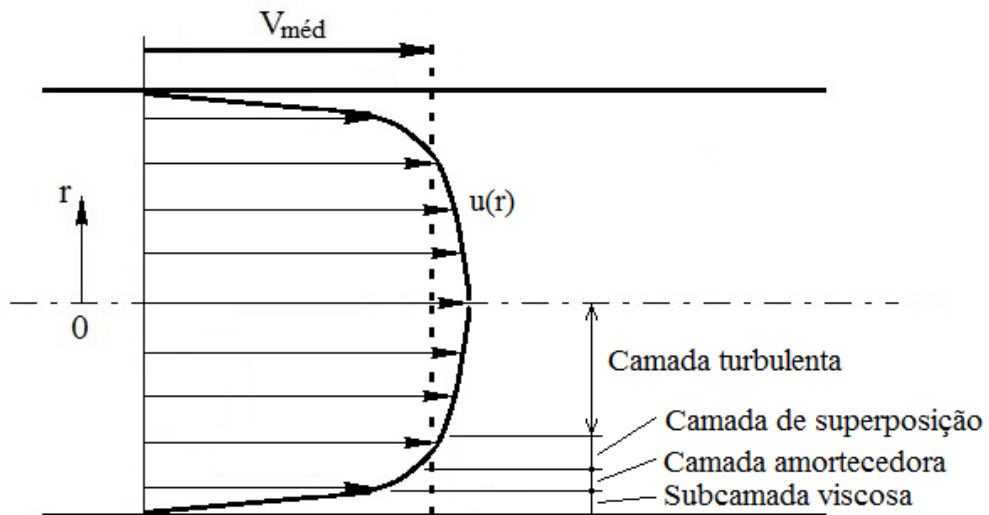


Figura 5.2 - Perfil de velocidades mostrando as regiões da camada limite. Figura extraída e adaptada de ÇENGEL e CIMBALA (2015), página 365.

Considerando que a subcamada viscosa seja muito pequena, ela possui tensões viscosas elevadas amortecendo o movimento turbilhonar o que faz com que o escoamento nessa região seja laminar. Como o perfil é linear, o gradiente de velocidade é constante nessa região e tem-se $du / dy = u / y$. A tensão de cisalhamento τ_0 na parede é expressa por:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\nu \bar{u}}{y} \quad (5.1)$$

Segundo ÇENGEL e CIMBALA (2015) a raiz quadrada do termo τ_o / ρ tem dimensão de velocidade e é representada por $u^* = \sqrt{\tau_o / \rho}$, sendo chamada de velocidade de cisalhamento. Substituindo esse resultado na Equação 5.1, pode-se representar o perfil de velocidade da subcamada laminar na forma adimensional como:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{y u^*}{\nu} \quad (5.2)$$

Conhecida como lei de parede, essa relação é bem concordante com dados experimentais para casos de superfícies lisas em que $0 \leq y u^* / \nu \leq 5$, e disso resulta a espessura da subcamada viscosa:

$$\frac{u^* \delta_{\text{subcamada}}}{\nu} = 5 \quad (5.3)$$

A distância e a velocidade adimensionalizadas são dadas por:

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad \text{e} \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad (5.4)$$

Desta forma, pode-se escrever a Equação 5.2 como:

$$u^+ = y^+ \quad (5.5)$$

No caso da camada de superposição (ou logarítmica) os dados da experimentais da velocidade seguem uma linha reta quando comparados com o logaritmo da distância à parede. O perfil de velocidade é dado por:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (5.6)$$

Essa equação é conhecida como lei logarítmica e os valores de κ (chamada constante de Von Kármán) e B são obtidos experimentalmente e apresentados em várias fontes da literatura como estando entre 0,40 - 0,41 e 5,0 - 5,5, respectivamente.

A figura 5.3, extraída e modificada de ÇENGEL e CIMBALA (2015), mostra, assim, um perfil de velocidade universal do escoamento turbulento que vale tanto para tubos como para placas planas, por exemplo. A Eq. (5.5) representa o perfil para $y^+ < 5$ e a Eq. (5.6) representa o perfil para $y^+ > 30$. Faz-se uso da escala logarítmica para melhor visualizar o perfil de velocidades na subcamada viscosa, que é normalmente extremamente fina.

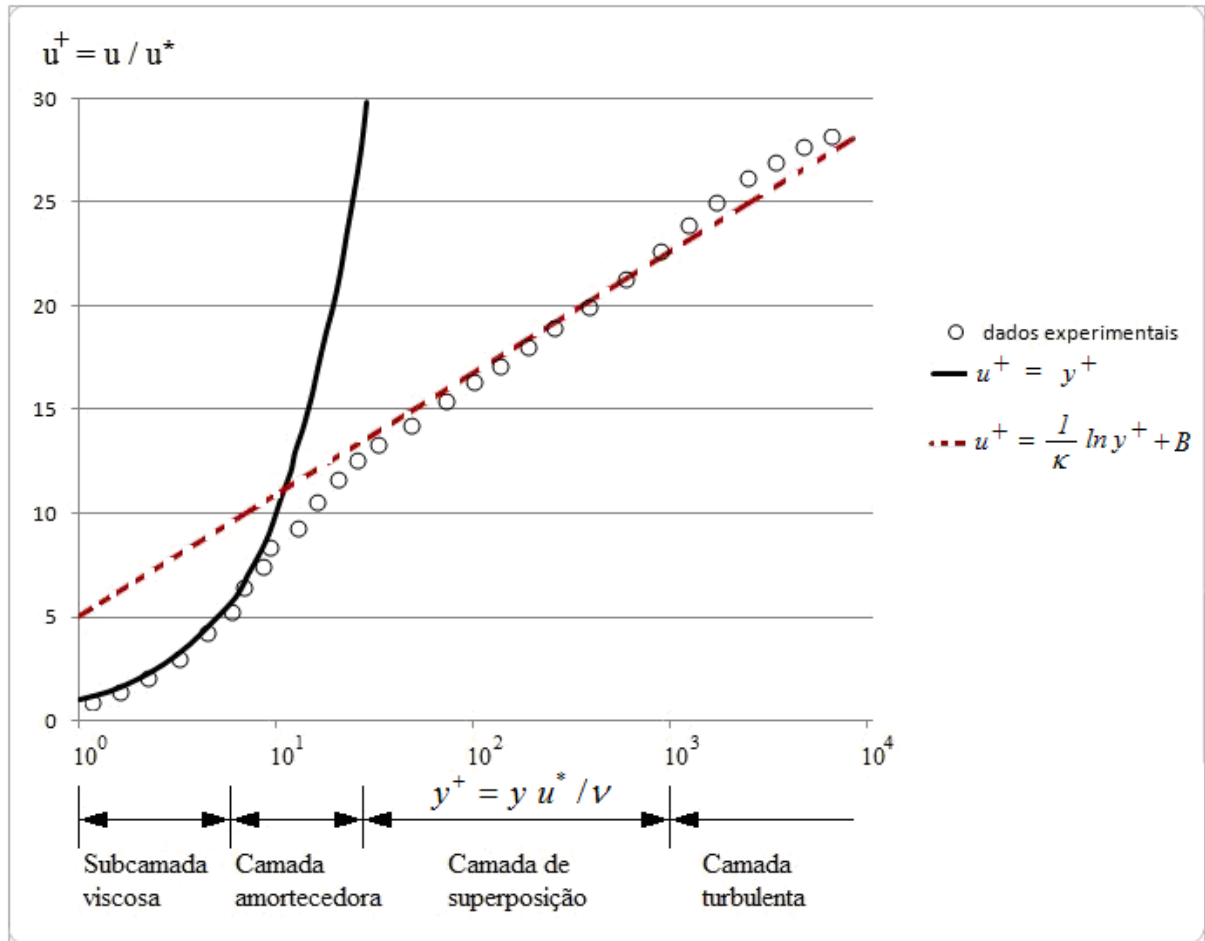


Figura 5.3 - Gráfico mostrando uma comparação da lei da parede e os perfis de velocidade da lei logarítmica com dados experimentais para escoamento totalmente desenvolvido em um tubo. Figura adaptada da página 366 de ÇENGEL e CIMBALA (2015).

5.1.2 Parâmetros das Simulações para a Placa Plana

Este item faz um estudo comparativo entre dados experimentais e os resultados obtidos em simulação utilizando o modelo Spalart-Allmaras e o Spalart-Allmaras modificado para o escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão.

Os perfis de velocidade obtidos com as simulações foram comparados com o perfil de velocidades adimensionalizado de SREENIVASAN (1989) compilado a partir dos experimentos de WIEGHARDT e TILLMAN (1951).

A Fig. (5.4) apresenta as dimensões do domínio e condições de contorno. O domínio se estende de $-0,2L \leq x \leq L$ na direção horizontal e $0 \leq y \leq 0,2L$ na direção vertical, onde L é o comprimento da placa. O bordo de ataque da placa se situa em $x = 0$. Uma malha grosseira com 20000 células e outra malha fina com 80000 células foram utilizadas nas simulações, para verificar independência de malha.

Observando a Fig. (5.4), tem-se que a placa é precedida, para $y = 0$ e $-0,2L \leq x \leq 0$, por uma região em que se considera um plano de simetria ou parede com escorregamento, de forma a permitir ao escoamento se acomodar quando atinge o bordo de ataque. A placa se situa em $y = 0$ e $0 \leq x \leq L$, sendo utilizada a condição de não escorregamento e $\tilde{v} = 0$. Para a fronteira em $x = -0,2L$, $0 \leq y \leq 0,2L$, considera-se uma condição de entrada de fluxo, com uma velocidade U e uma viscosidade turbulenta $\tilde{\nu} = 3\nu$. Note que isso equivale a ter uma viscosidade turbulenta $\nu_t = 0,07\nu$ por conta da definição da função f_{vI} do modelo de Spalart-Allmaras.

Nas fronteiras $x = L$, $0 \leq y \leq 0,2$ e $y = 0,2$, $-0,2L \leq x \leq L$ temos uma pressão arbitrariamente definida como $p = 0$ uniforme, de modo a caracterizar gradiente nulo de pressão ao longo da placa. A viscosidade cinemática ν recebe um valor apropriado para termos $Re_L = UL / \nu = 10^7$.

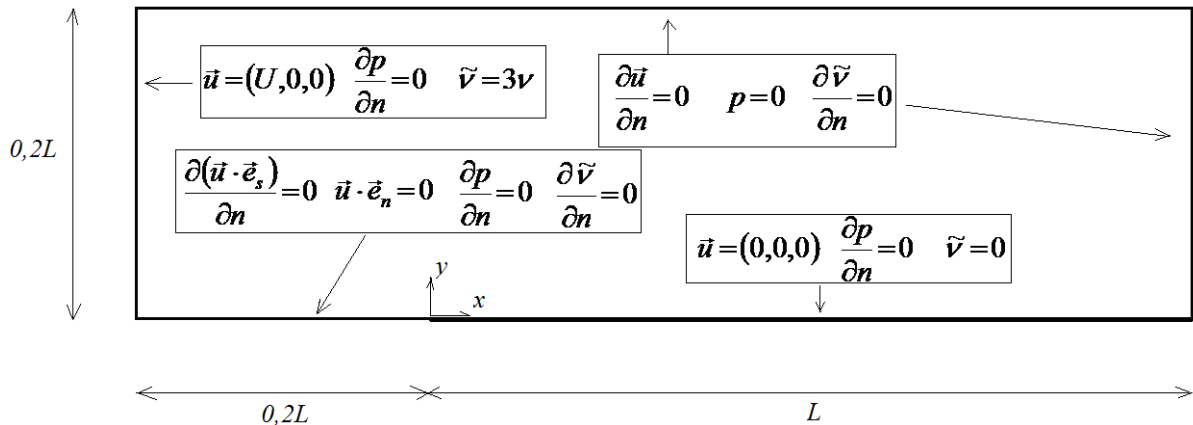


Figura 5.4 - Geometria e condições de contorno para o escoamento sobre uma placa plana.

A figura (5.5) mostra a malha grosseira utilizada nas simulações. Note que as células estão concentradas junto ao bordo de ataque e da superfície da placa. Após as simulações, verificou-se que o valor do y^+ da primeira célula é por volta de 0,73 para a malha fina e 1,19 para a malha grosseira.

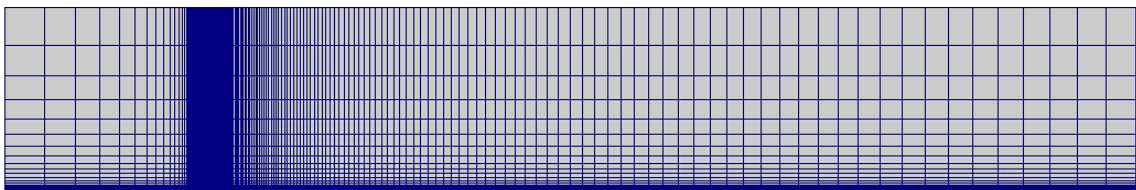


Figura 5.5 - Imagem da malha grosseira mostrando uma maior concentração de células junto ao bordo de ataque e à superfície da placa plana.

5.1.3 Comparação dos resultados numéricos com os experimentais

A Fig. (5.6) mostra uma comparação entre o perfil de velocidade adimensional dos resultados experimentais e teóricos e os perfis obtidos na simulação utilizando-se tanto o modelo Spalart-Allmaras modificado quanto o padrão e a malha grosseira, para uma posição x exatamente no centro da placa, ou seja, $Re_x=5 \times 10^6$. Para a Fig. (5.7) tem-se os mesmos resultados repetidos para as simulações usando a malha fina.

As simulações foram realizadas tanto com o modelo Spalart-Allmaras usando a modificação proposta para a escala de comprimento quanto para o modelo Spalart-Allmaras padrão. Junto com os resultados das simulações estão plotadas as Equações (5.5) de subcamada viscosa e (5.6) da camada logarítmica, usando $\kappa = 0,41$ e $B = 5,0$. Estão também plotados os resultados experimentais citados em SREENIVASAN (1989) compilados a partir dos experimentos de WIEGHARDT e TILLMAN (1951).

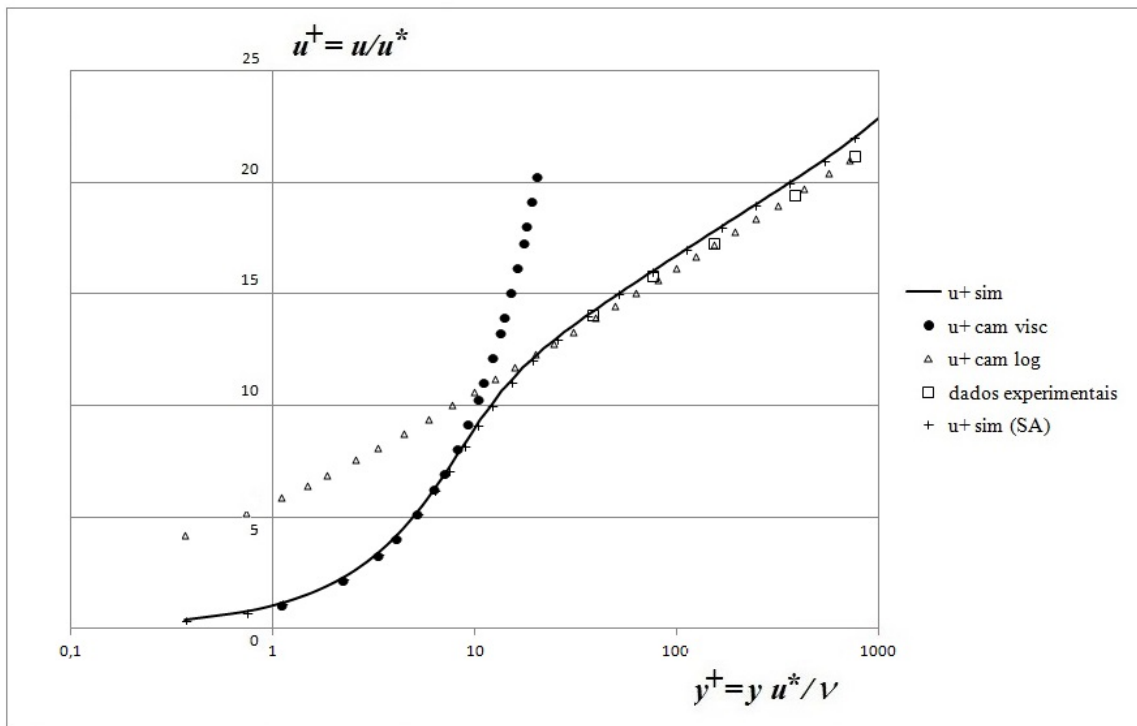


Figura 5.6 - Gráfico mostrando uma comparação dos resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras modificado para a malha grosseira junto com os perfis de velocidade da subcamada viscosa, lei logarítmica, dados experimentais de WIEGHARDT e TILLMAN (1951) apud SREENIVASAN (1989) e resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras padrão.

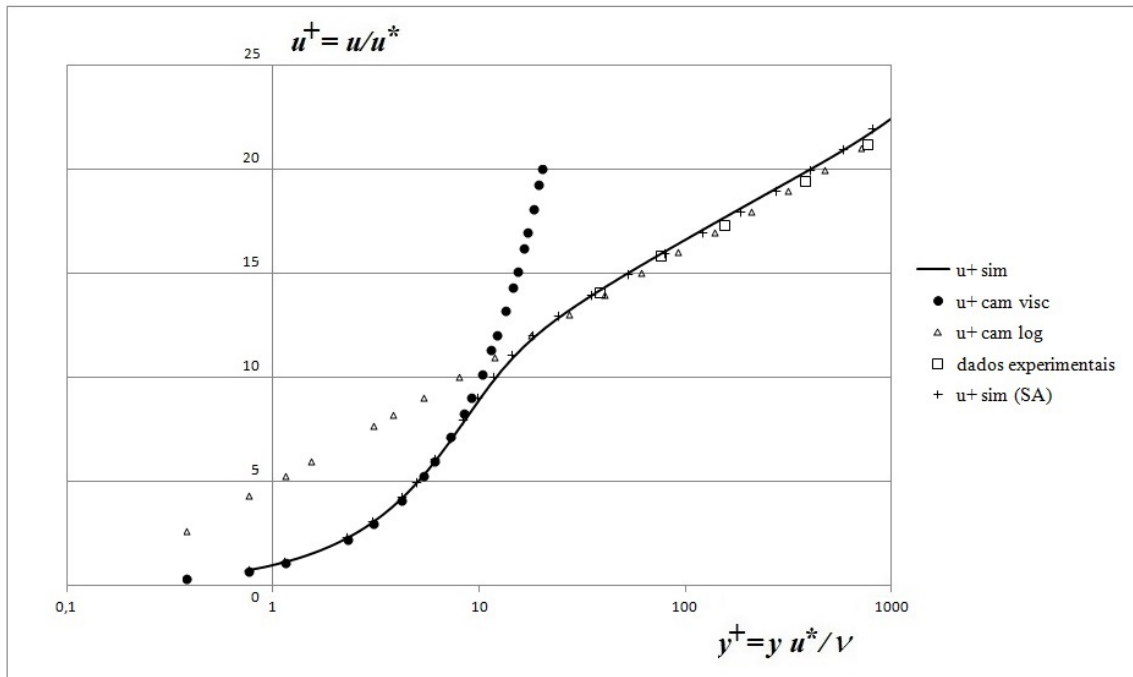


Figura 5.7 - Gráfico mostrando uma comparação dos resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras modificado para a malha fina junto com os perfis de velocidade da subcamada viscosa, lei logarítmica, dados experimentais de WIEGHARDT e TILLMAN (1951) apud SREENIVASAN (1989) e resultados da simulação usando o modelo Spalart-Allmaras padrão.

A Fig. (5.8) mostra uma comparação do coeficiente de atrito junto na parede obtido através da Equação (5.7) proposta por Prandtl (ver WHITE, 1999) com os resultados de simulações usando o modelo Spalart-Allmaras e o modelo Spalart-Allmaras modificado utilizando a malha grosseira.

$$C_f \approx \frac{0,027}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad (5.7)$$

A Fig. (5.9) mostra os mesmos resultados para as simulações utilizando a malha fina.

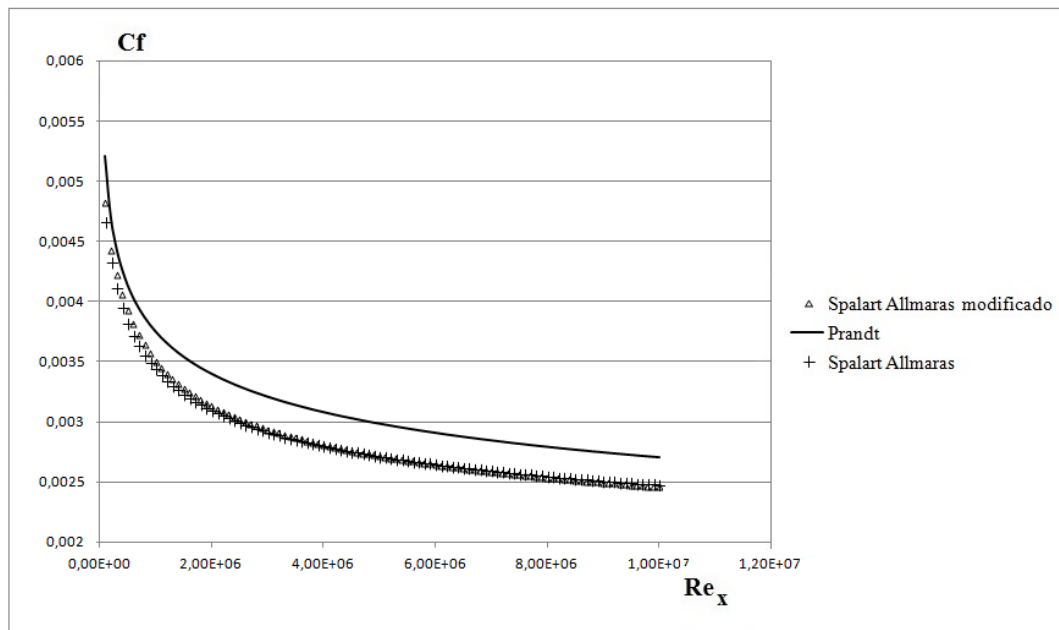


Figura 5.8 - Gráfico mostrando uma comparação do coeficiente de atrito na parede obtido através da equação de Prandtl com os resultados do modelo Spalart-Allmaras e do modelo Spalart-Allmaras modificado para simulações com malha grosseira.

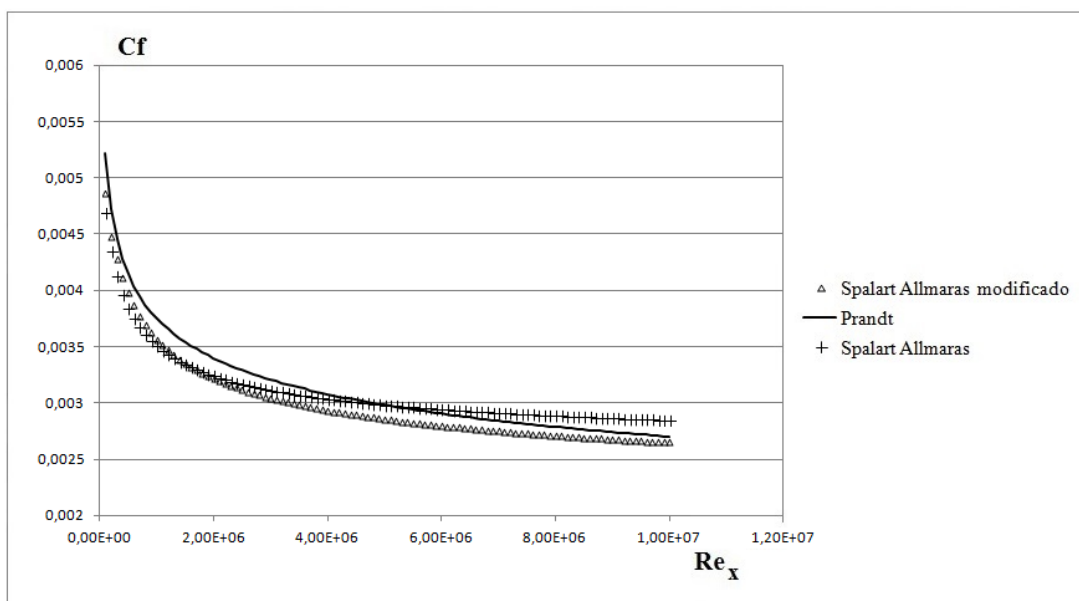


Figura 5.9 - Gráfico mostrando uma comparação do coeficiente de atrito na parede obtido através da equação de Prandtl com os resultados do modelo Spalart-Allmaras e do modelo Spalart-Allmaras modificado para simulações com malha fina.

De uma forma geral, é perceptível que o modelo Spalart-Allmaras modificado produziu resultados muito próximos do modelo Spalart-Allmaras padrão. As simulações tanto

com a malha grosseira quanto com a malha fina produziram resultados muito próximos aos esperados.

5.2 Simulações do escoamento em um Degrau com Gradiente Adverso de Pressão

Uma vez que o modelo Spalart-Allmaras modificado foi considerado validado para a placa plana sem gradiente de pressão, serão apresentados agora resultados de simulações para o escoamento em um degrau com gradiente adverso de pressão (aquilo que em inglês se chama "*backward facing step*").

A lógica da escolha desse escoamento para verificar as capacidades preditivas do modelo Spalart-Allmaras modificado resulta do fato que gradientes adversos de pressão, devido ao surgimento de regiões de separação, são fundamentais para a determinação da perda de carga em escoamentos internos e do arrasto em escoamentos externos. Logo, é desejável que um modelo de turbulência tenha boas propriedades preditivas quando empregado na simulação desses escoamentos. Infelizmente, como pode ser visto em RODI e SCHEUERER (1986), o modelo de duas equações k - ε padrão, apesar de sua popularidade, sempre se mostrou deficiente para esse tipo de problema. Os desenvolvimentos que resultaram nos trabalhos de WILCOX (1988) e MENTER (1994) em grande parte foram motivados pela busca de modelos que reproduzissem as características de escoamentos com gradientes adversos de pressão e grandes regiões de recirculação.

SPALART e ALLMARAS (1994) reportaram que seu modelo reproduzia bem escoamentos com gradientes de pressão não muito severos, típicos de aplicações em aerofólios, mas não esperavam resultados animadores para o degrau com um gradiente de pressão adverso abrupto. No entanto, o sítio do laboratório LANGLEY RESEARCH CENTER (2015), da NASA, mostra resultados de simulações para o degrau em que resultados razoáveis em comparação com os experimentos de DRIVER e SEEGMILLER (1985) foram obtidos usando o modelo Spalart-Allmaras padrão.

Assim, decidiu-se testar a modificação proposta do modelo Spalart-Allmaras para o mesmo escoamento.

5.2.1 Parâmetros da Simulação

A Fig. (5.10) mostra a geometria e as condições de contorno obtidas a partir de consulta ao sítio do LANGLEY RESEARCH CENTER (2015). Considera-se a origem do sistema de coordenadas no canto inferior do degrau de altura H .

Para $x = -130H$, com $H \leq y \leq 9H$, temos a região de entrada do escoamento, onde se estipulam uma velocidade U e uma viscosidade turbulenta $\tilde{\nu} = 3\nu$.

Seguem-se, para $-130H \leq x \leq -110H$, em $y = H$ e $y = 9H$, duas regiões consideradas como sendo paredes com escorregamento (ou planos de simetria). Essas duas regiões servem para acomodar o escoamento que irá atingir os bordos de ataque das paredes superior e inferior que conduzirão o fluxo até o degrau.

Para $-110H \leq x \leq 50H$ e $y = 9H$ tem-se a parede superior do canal, com condição de não-escorregamento.

Para $-110H \leq x \leq 0$ e $y = H$ tem-se a primeira parte da parede inferior, que conduz o fluxo até o degrau, com condição de não-escorregamento.

Para $x = 0$ e $0 \leq y \leq H$ tem-se o degrau, com condição de não-escorregamento.

Para $0 \leq x \leq 50H$ e $y = 0$ tem-se a segunda parte da parede inferior, com condição de não-escorregamento.

Para $x = 50H$ e $0 \leq y \leq 9H$ tem-se a saída com imposição de uma pressão arbitrária $p = 0$.

Finalmente, a viscosidade cinemática foi estipulada de forma que se tenha um número de Reynolds baseado na altura H do degrau igual a 36000, ou seja, $UH / \nu = 36000$.

Foram geradas duas malhas para as simulações, uma malha grosseira com 40520 células e uma malha fina com 157280 células. Dos resultados das simulações com o modelo Spalart-Allmaras modificado se verificou que em todas as paredes se obteve um valor máximo de y^+ igual a 0,70 para a malha fina e igual a 1,18 para a malha grosseira. A vista geral da malha grosseira pode ser vista na Fig. (5.11). Um detalhe da malha na região do degrau pode ser visto na Fig. (5.12).

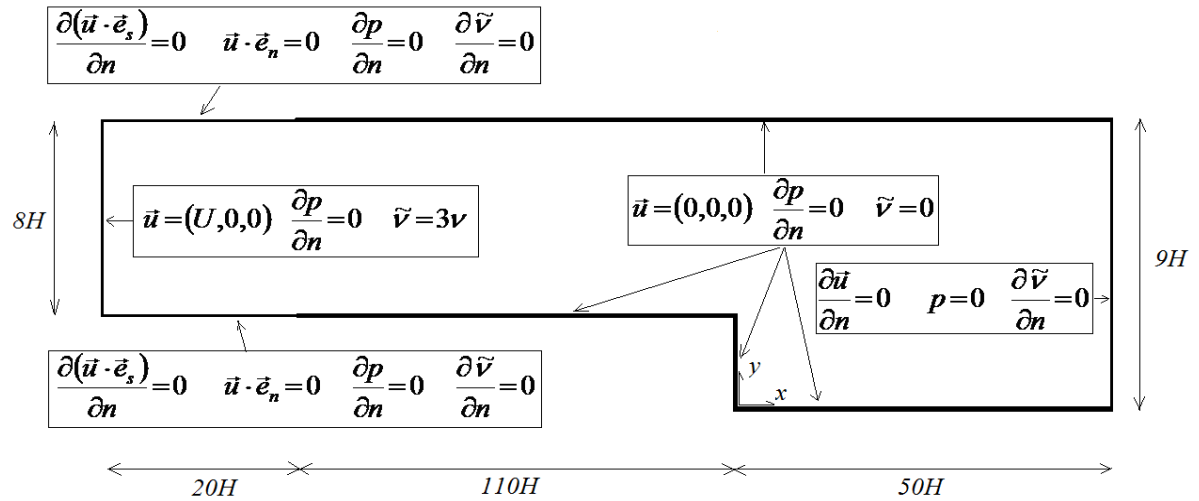


Figura 5.10 - Dimensões e condições de contorno utilizadas na simulação para o degrau com gradiente adverso de pressão.

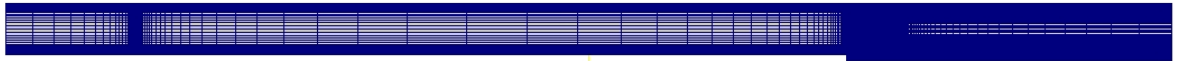


Figura 5.11 - Malha grosseira utilizada na simulação do degrau com gradiente adverso de pressão.

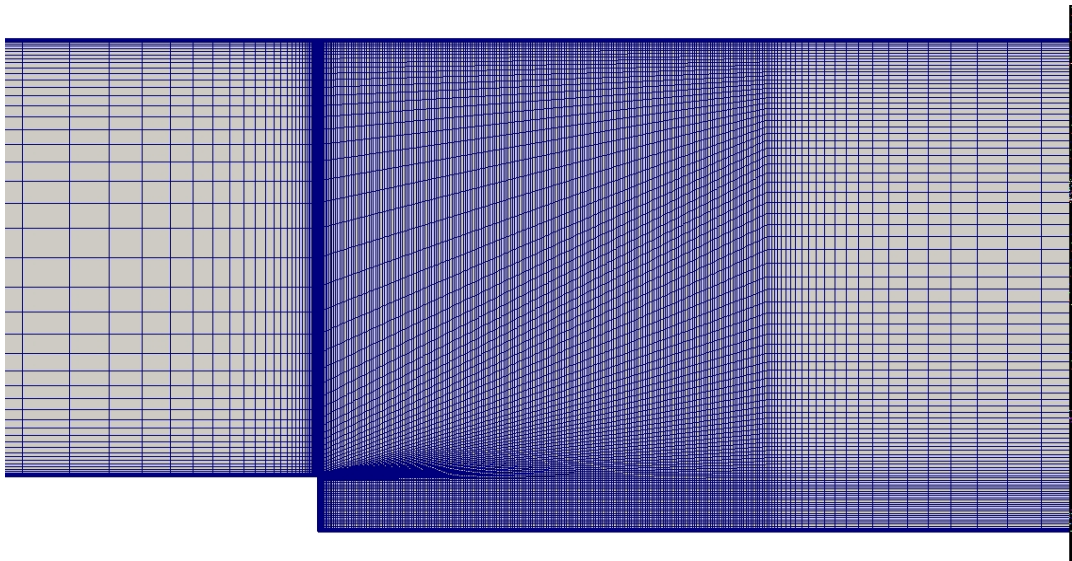


Figura 5.12 - Detalhe da malha grosseira na região do degrau com gradiente adverso de pressão.

5.2.2 Comparação dos resultados numéricos com os experimentais

A comparação dos resultados experimentais foi feita através de perfis de velocidade para as posições $x/H = 1$, $x/H = 4$, $x/H = 6$ e $x/H = 10$. Esses perfis estão disponíveis no sítio de LANGLEY RESEARCH CENTER (2015) e apresentam resultados experimentais de DRIVER e SEEGMILLER (1985).

Os perfis apresentam a velocidade \bar{u} adimensionalizada por uma velocidade de referência U_{ref} obtida no ponto $x = -4H$, $y = 5H$. Nesse perfil a velocidade adimensional \bar{u}/U_{ref} está dada para $0 < y < 3H$.

Os gráficos das Figs. (5.13), (5.14), (5.15) e (5.16) mostram uma comparação entre o perfil de velocidade adimensional dos resultados experimentais e os perfis obtidos na simulação utilizando-se o modelo Spalart-Allmaras e o Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira. É possível ver a grande concordância entre os dados experimentais e os obtidos através do Spalart-Allmaras modificado.

Os gráficos das Figs. (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20) mostram uma comparação entre o perfil de velocidade adimensional dos resultados experimentais e os perfis obtidos na simulação utilizando-se o modelo Spalart-Allmaras e o Spalart-Allmaras modificado com malha fina. Os resultados pouco diferem dos obtidos com a malha grosseira e mais uma vez é possível ver a grande concordância entre os dados experimentais e os obtidos através do Spalart-Allmaras modificado.

Notável é que o modelo modificado apresentou resultados bem melhores que o modelo Spalart-Allmaras padrão para $x/H = 1$.

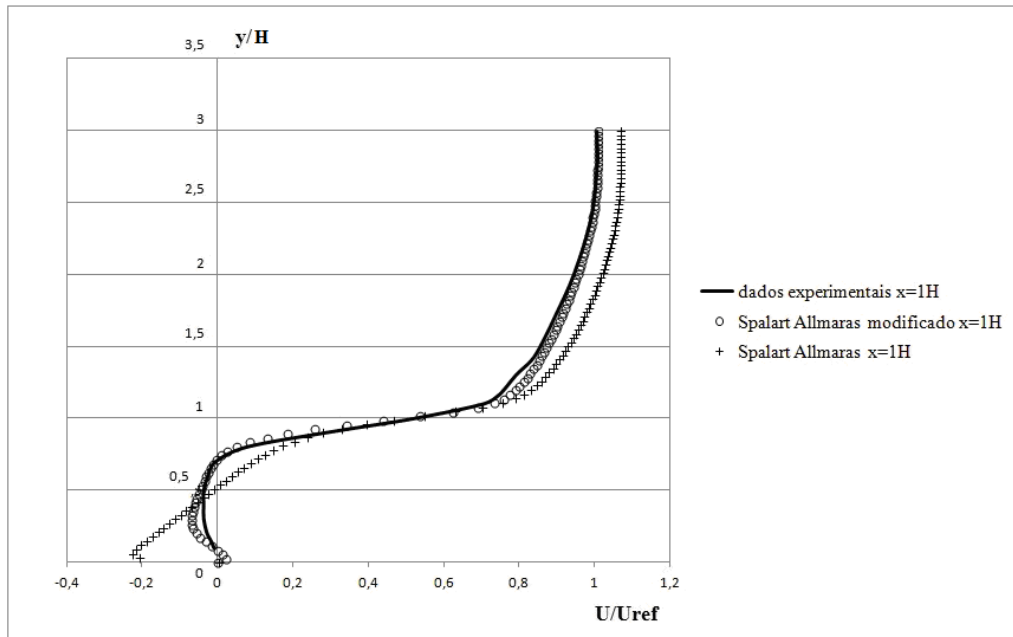


Figura 5.13 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 1H$.

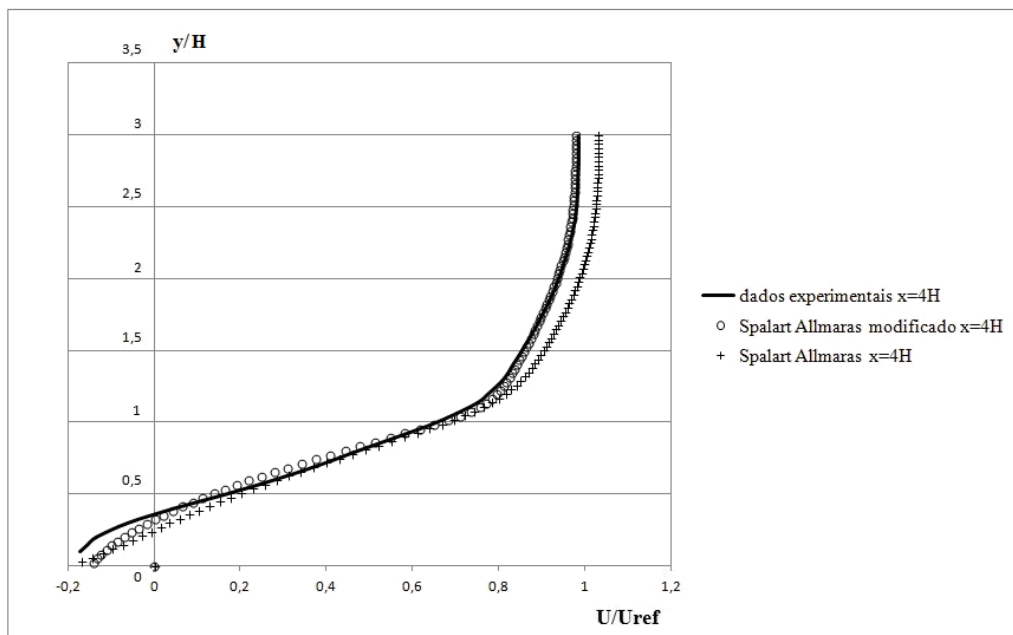


Figura 5.14 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985)) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 4H$.

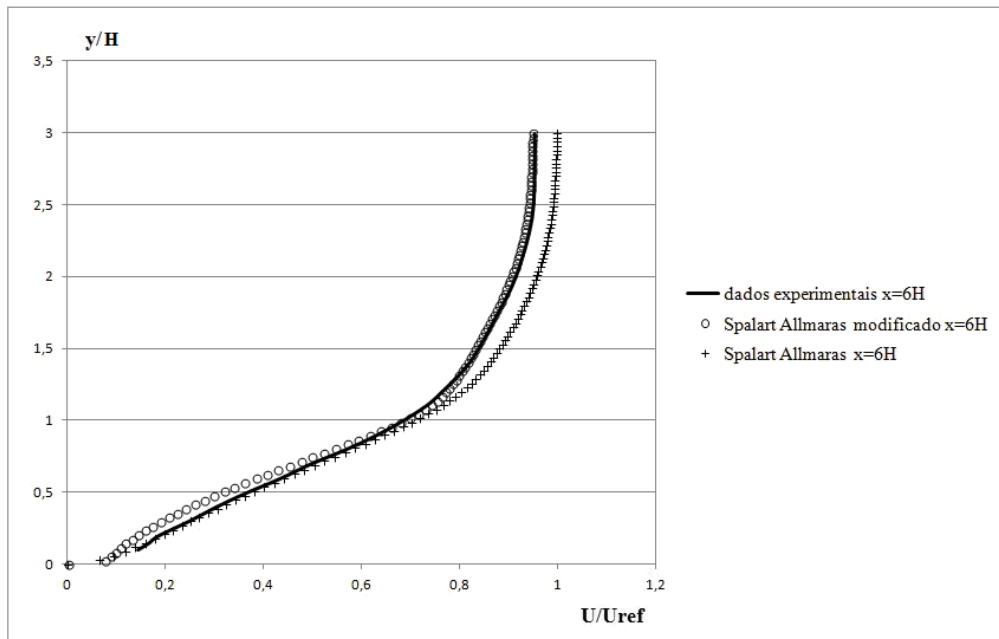


Figura 5.15 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 6H$.

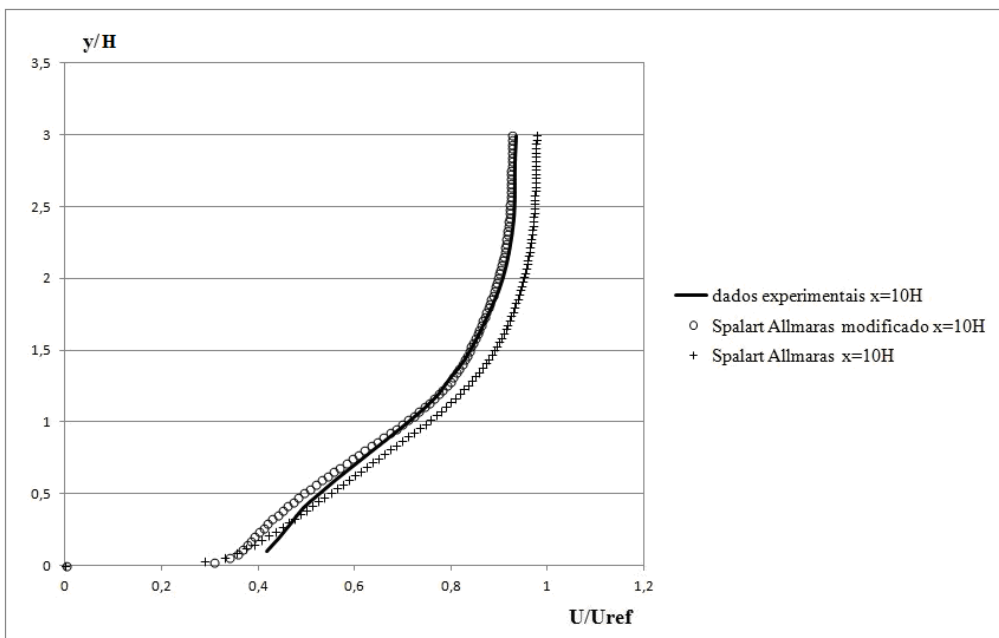


Figura 5.16 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira para $x = 10H$.

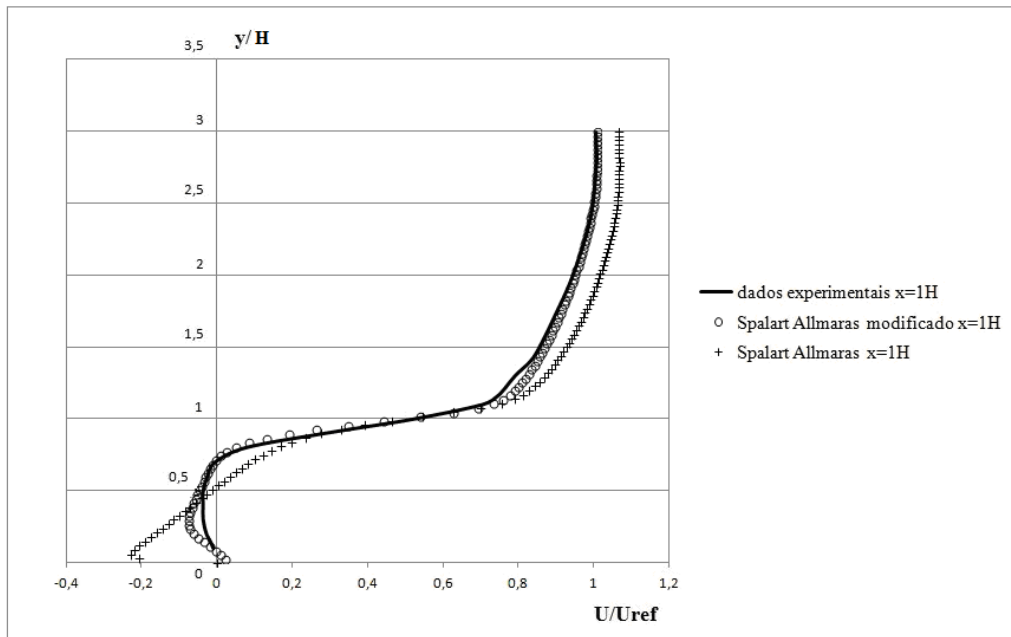


Figura 5.17 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha fina para $x = 1H$.

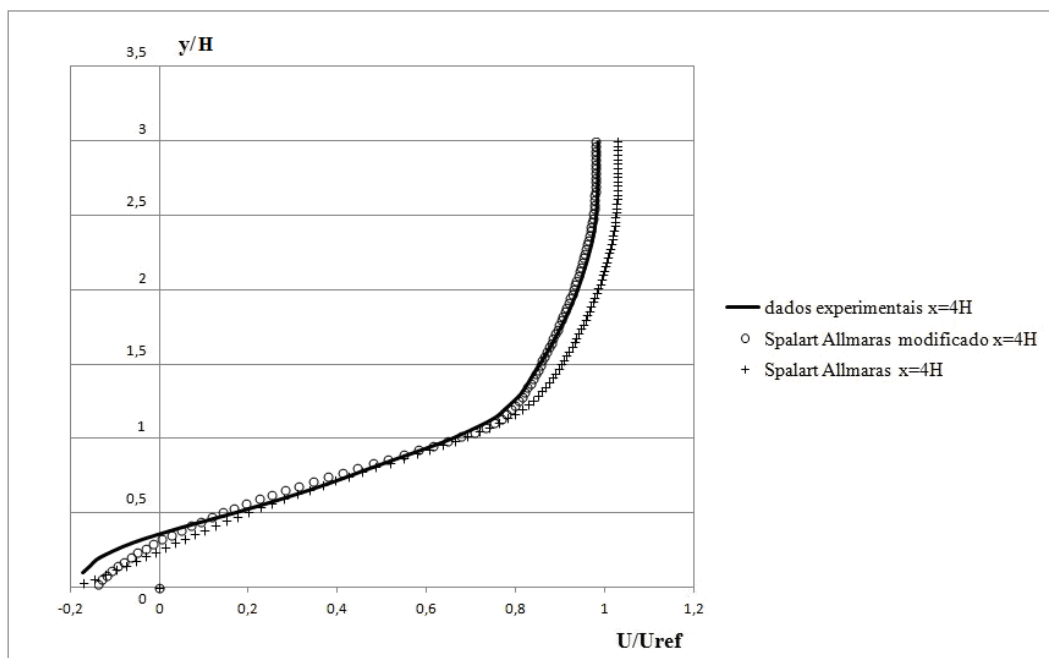


Figura 5.18 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha fina para $x = 4H$.

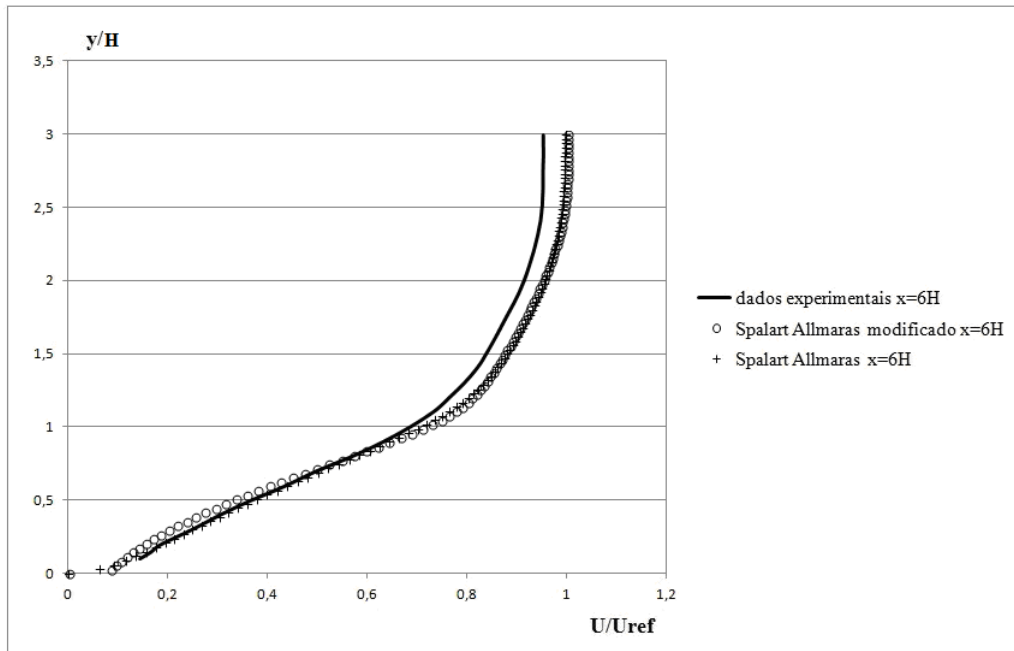


Figura 5.19 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha fina para $x = 6H$.

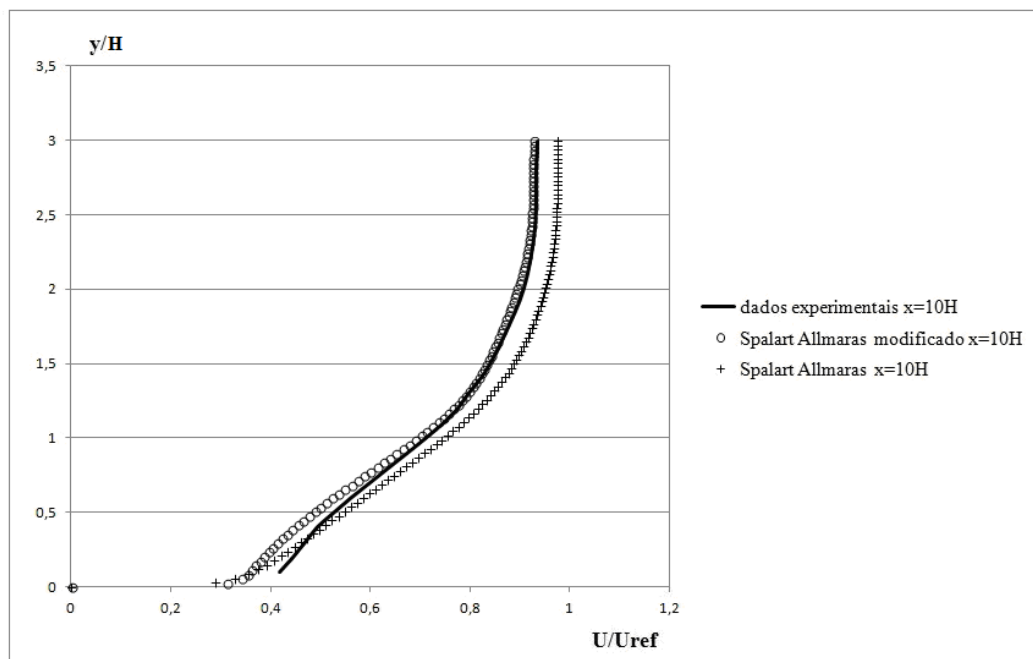


Figura 5.20 – Comparação entre os resultados obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)), os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha fina para $x = 10H$.

Além dos perfis de velocidade, foram realizadas comparações sobre o coeficiente de atrito C_f na parede inferior logo após o degrau. Na Fig. (5.21) pode-se ver a comparação entre experimentos e simulações para a malha grosseira e na Fig. (5.22) pode-se ver a comparação entre experimentos e simulações para a malha fina.

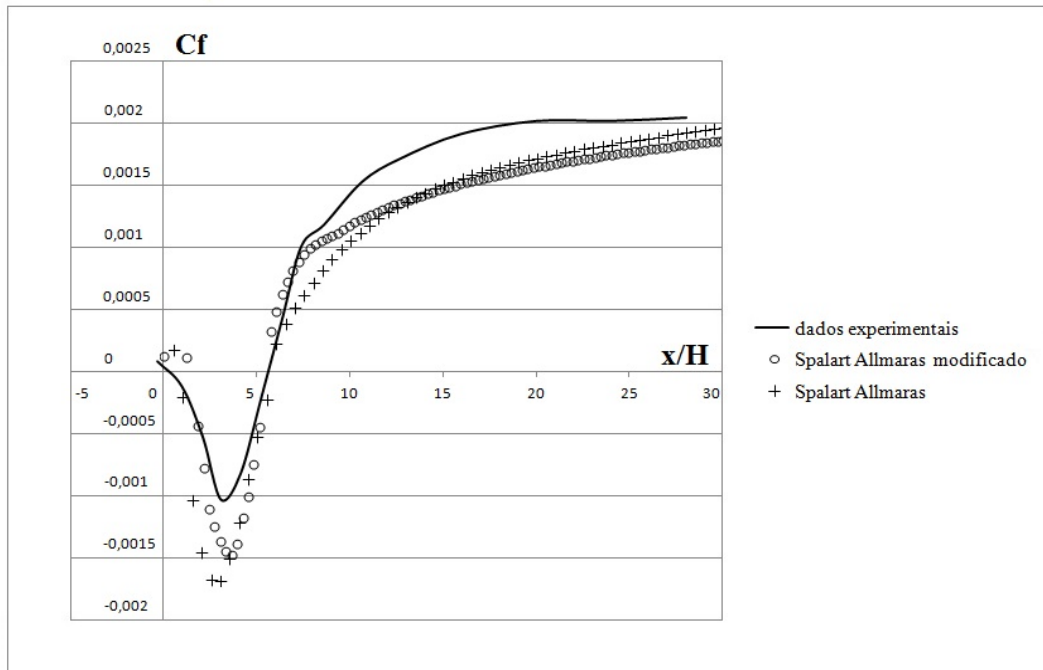


Figura 5.21 – Comparação entre os resultados do coeficiente de atrito obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)) e os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha grosseira.

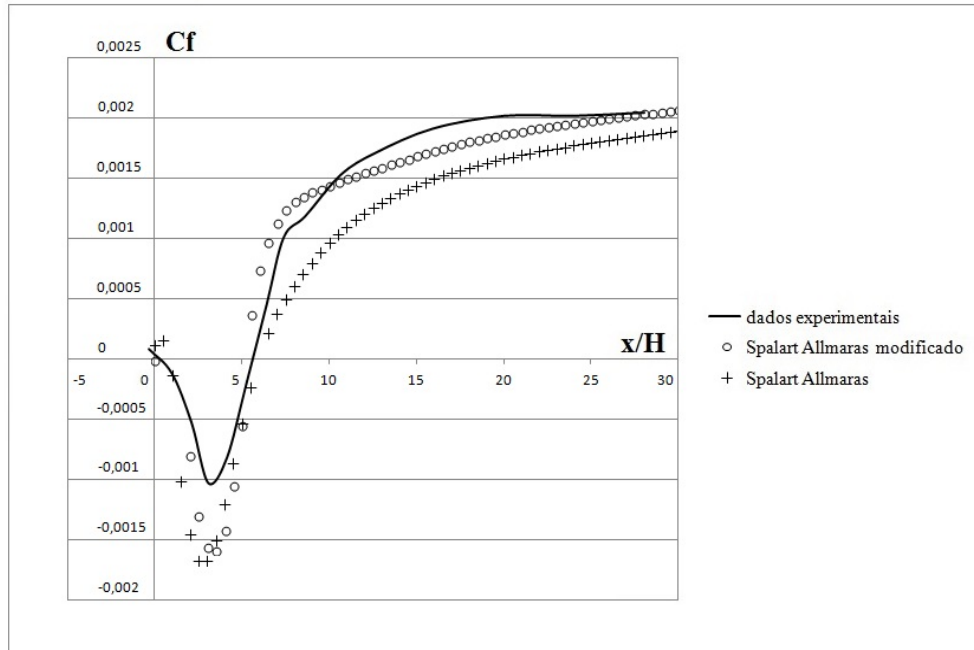


Figura 5.22 – Comparação entre os resultados do coeficiente de atrito obtidos experimentalmente (DRIVER and SEEGMILLER (1985) apud LANGLEY RESEARCH CENTER (2015)) e os obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras e os obtidos com o modelo Spalart-Allmaras modificado com malha fina.

Verifica-se dos resultados da simulação que o modelo Spalart-Allmaras modificado produziu resultados muito próximos ao modelo Spalart-Allmaras padrão, redundando numa pequena melhora quanto ao perfil de velocidades no início da bolha de separação.

5.3 Simulação do escoamento de um jato plano livre incompressível

Após simulações do escoamento sobre uma placa plana sem gradiente de pressão e do escoamento em um degrau com gradiente adverso de pressão, chegou-se à conclusão que o modelo modificado mantém as características do modelo Spalart-Allmaras padrão. A simulação do jato visa indicar se a modificação proposta na escala de comprimento turbulenta resulta em algum ganho significativo na simulação de jatos livres.

Devido sua grande importância em muitas áreas da engenharia, o escoamento de jatos turbulentos têm sido objeto de muitos estudos, tanto experimentais como numéricos. As primeiras investigações eram limitadas apenas a medições de pressões e velocidades mas maiores conhecimentos sobre a estrutura dos jatos foi conseguida a partir da disponibilização dos anemômetros de fio quente. Mais tarde, através da utilização de Anemômetros Laser-

Doppler (LDA), descobriu-se a existência do fluxo reverso e mais informações foram obtidas sobre as fronteiras do jato (NAMER, 1988).

Os perfis de velocidade obtidos com as simulações foram comparados com o perfil de velocidades de BARDINA et al. (1997) compilado a partir dos experimentos de BRADBURY (1965):

$$\begin{aligned}
 y/x = & [0,000; 0,009; 0,018; 0,026; 0,034; 0,035; 0,044; 0,053; 0,061; 0,062; 0,070; \\
 & 0,079; 0,088; 0,096; 0,097; 0,106; 0,110; 0,110; 0,114; 0,123; 0,123; 0,132; \\
 & 0,141; 0,142; 0,150; 0,158; 0,167; 0,169; 0,176; 0,185; 0,188; 0,194; 0,202; \\
 & 0,211; 0,220] \\
 U/U_1 = & [1,000; 0,996; 0,983; 0,962; 0,916; 0,933; 0,898; 0,856; 0,784; 0,809; 0,758; \\
 & 0,703; 0,646; 0,553; 0,588; 0,529; 0,500; 0,468; 0,471; 0,400; 0,414; 0,358; \\
 & 0,305; 0,284; 0,256; 0,210; 0,168; 0,174; 0,131; 0,099; 0,084; 0,072; 0,050; \\
 & 0,033; 0,020]
 \end{aligned}$$

Seguindo a Fig. (2.1), a velocidade U_1 é a velocidade no centro do jato. A partir dos perfis obtidos, será possível obter a chamada taxa de expansão ("*spreading rate*") S do jato, que corresponde à distância y/x para a qual a velocidade do perfil é igual à $U_1/2$.

5.3.1 Parâmetros da Simulação

Na Fig. (5.23) tem-se a geometria e condições de contorno para a simulação do jato plano livre. O origem do sistema de coordenadas está no canto inferior esquerdo. Para $x = 0$, $0 \leq y \leq 0,5H$ tem-se a origem do jato de velocidade uniforme U e uma elevada viscosidade turbulenta $\tilde{\nu} = 90\nu$. Para $y=0$, $0 \leq x \leq 60H$ tem-se um plano de simetria. Portanto, H é a espessura original do jato.

Para $x = 0$, $0,5H \leq y \leq 60H$ tem-se uma parede. Para $y = 60H$, $0 \leq x \leq 60H$ e para $x = 60H$, $0 \leq y \leq 60H$ tem-se uma fronteira com pressão uniforme e arbitrária $p = 0$. Nessa fronteira foi definida uma condição de Neumann para a velocidade. Porém, experimentos numéricos mostraram que essa fronteira não é em toda sua extensão uma fronteira de saída de fluxo. De fato, na fronteira $y = 60H$, $0 \leq x \leq 60H$ existem várias células em que o fluxo penetra no domínio. Por isso, utilizou-se uma condição de contorno para $\tilde{\nu}$ que considera a direção do fluxo. Para faces onde o escoamento deixa o domínio, usou-se uma condição de Neumann para $\tilde{\nu}$. Para faces onde o escoamento entra no domínio, usou-se uma condição de Dirichlet $\tilde{\nu} = 3\nu$, o que, pela definição da função $f_{\nu I}$ do modelo de Spalart-Allmaras, corresponde a $\nu_t = 0,07\nu$.

A condição de contorno de $\tilde{\nu} = 90\nu$ visa tornar o escoamento altamente turbulento e razoavelmente independente do número de Reynolds. Optou-se arbitrariamente por usar um número de Reynolds $Re_H = UH / \nu = 10000$.

Foram usadas duas malhas, uma grosseira com 19680 células e outra fina com 76464 células. A malha grosseira pode ser vista na Fig. (5.24).

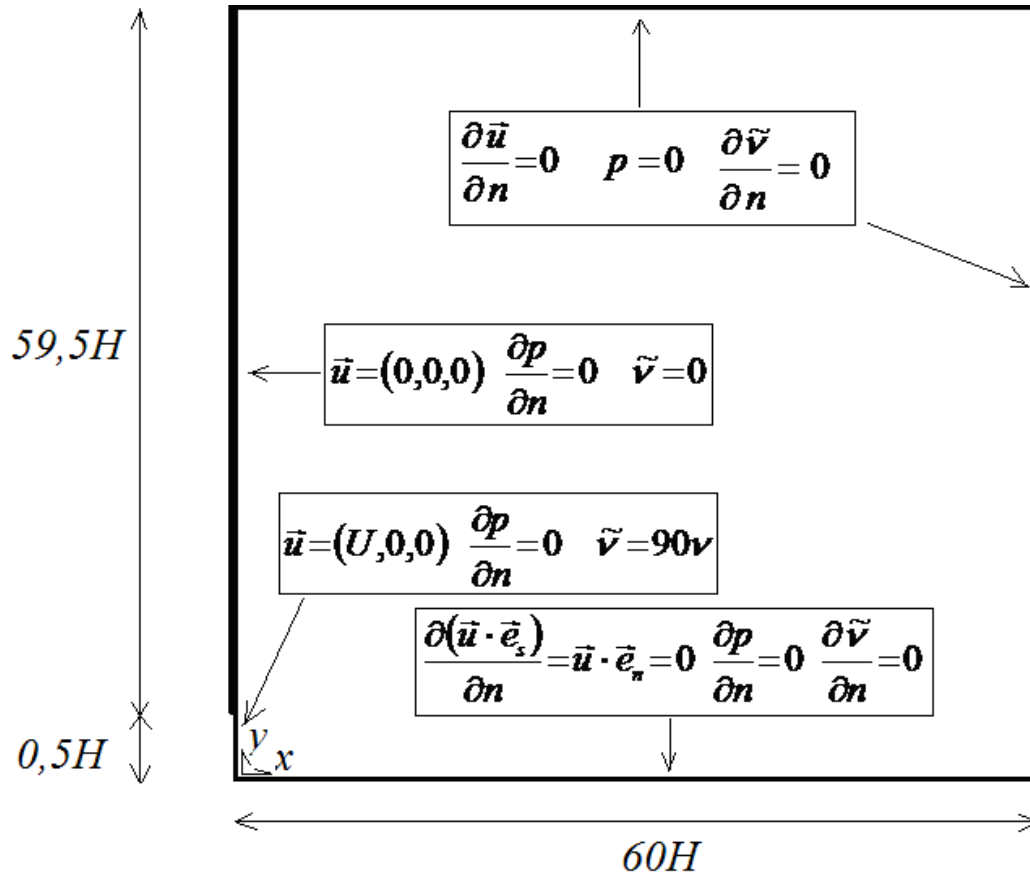


Figura 5.23 - Geometria e condições de contorno para a simulação do jato plano livre.

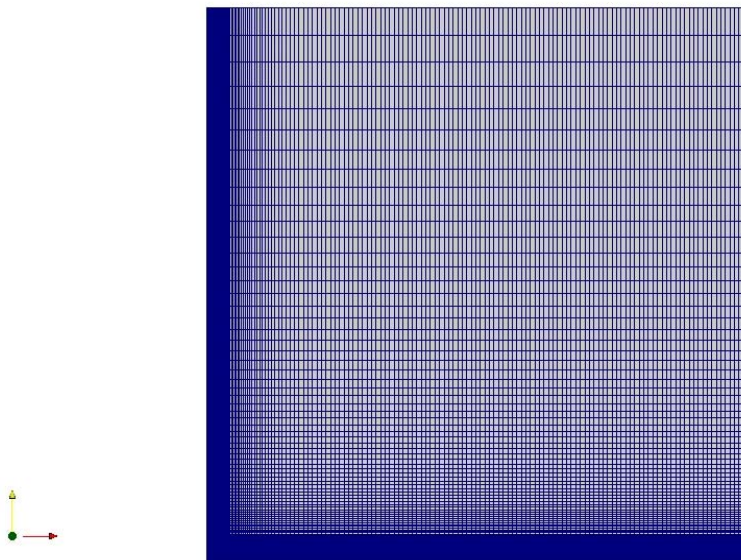


Figura 5.24 - Malha grosseira usada nas simulações do jato plano livre.

5.3.2 Resultado das simulações para o jato plano livre

Os gráficos das Figuras 5.25 e 5.26 mostram uma comparação entre o perfil de velocidade dos resultados experimentais de BARDINA et al. (1997) compilados a partir dos experimentos de BRADBURY (1965) e os perfis obtidos na simulação utilizando-se o modelo Spalart-Allmaras padrão e Spalart-Allmaras modificado nos planos $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ com malha grosseira.

Os gráficos das Figuras 5.27 e 5.28 mostram uma comparação entre o perfil de velocidade dos resultados experimentais de BARDINA et al. (1997) compilados a partir dos experimentos de BRADBURY (1965) e os perfis obtidos na simulação utilizando-se o modelo Spalart-Allmaras padrão e Spalart-Allmaras modificado nos planos $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ com malha fina.

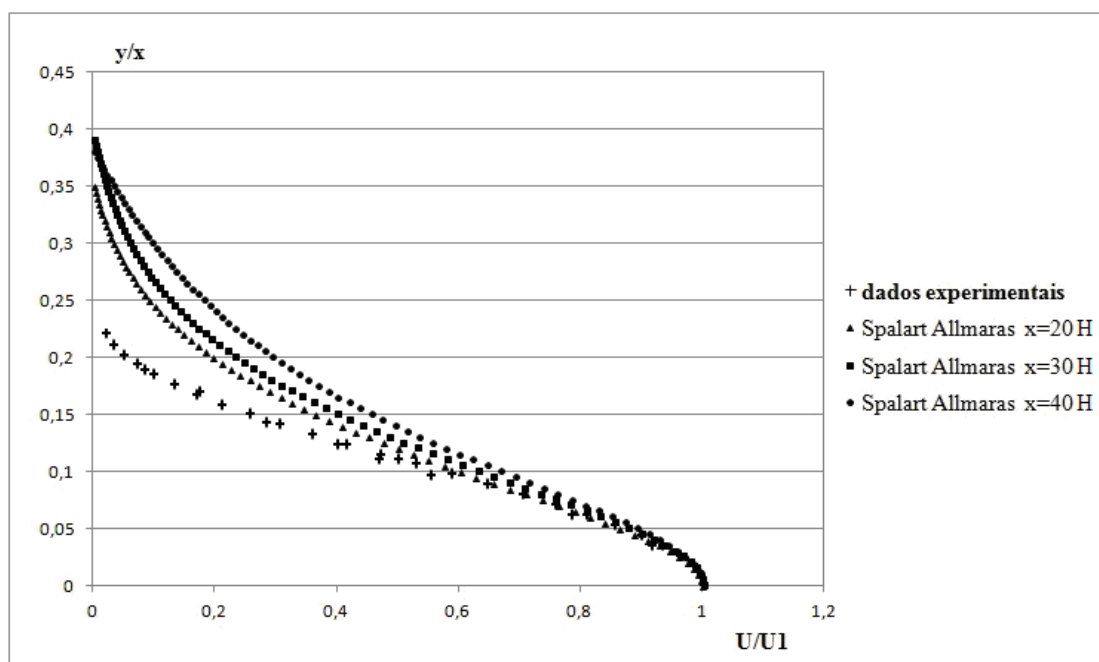


Figura 5.25 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras usando a malha grosseira comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).

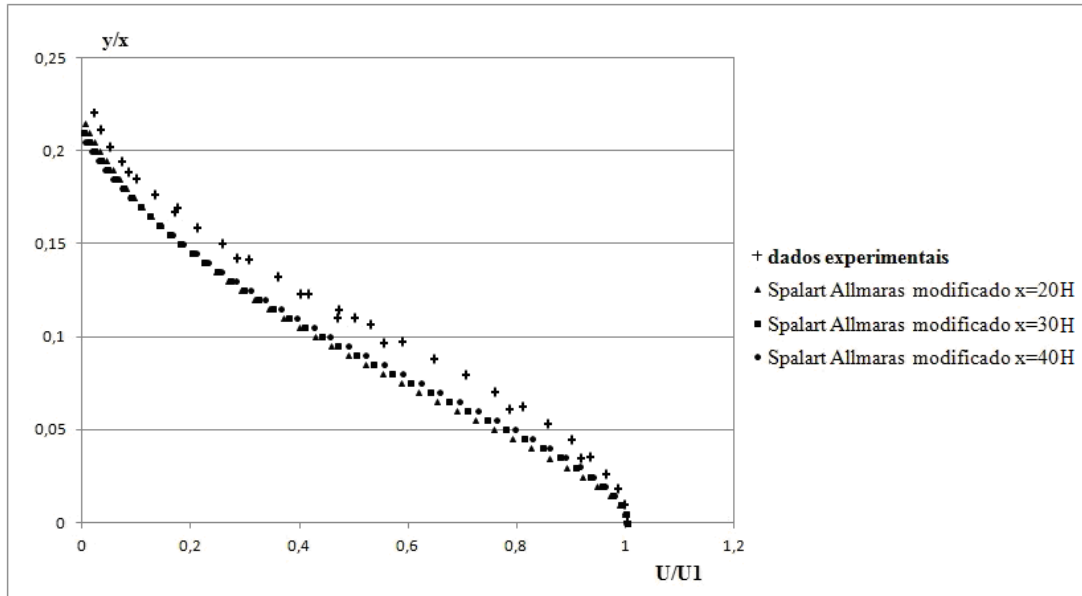


Figura 5.26 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras modificado usando a malha grosseira comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).

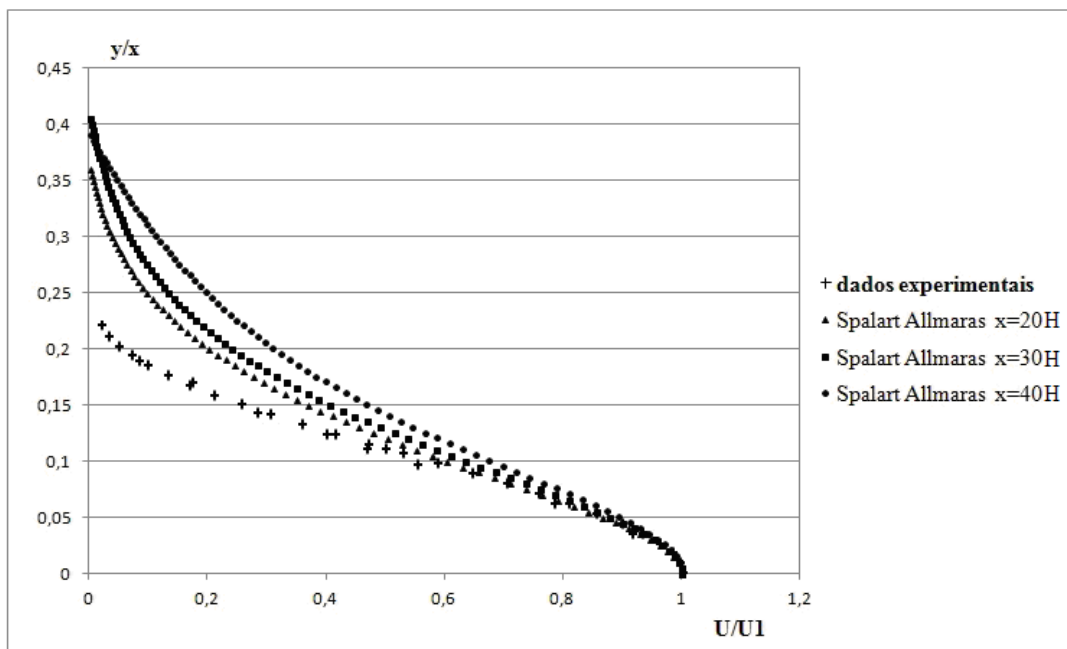


Figura 5.27 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras usando a malha fina comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).

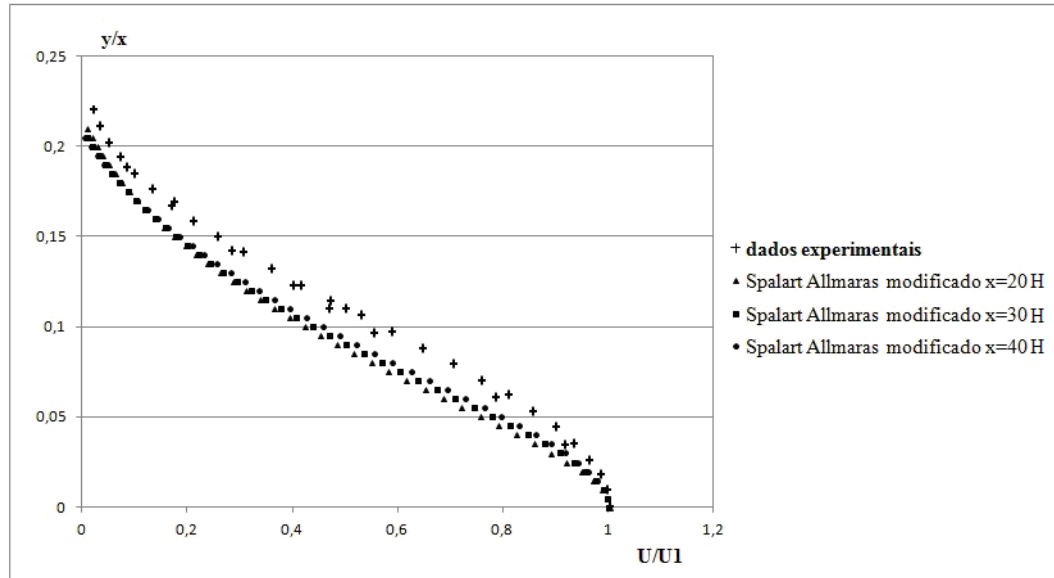


Figura 5.28 - Perfis de velocidade para $x/H = 20$, $x/H = 30$ e $x/H = 40$ obtidos utilizando-se o modelo de turbulência Spalart Allmaras modificado usando a malha fina comparados com o perfil de velocidade experimental de BRADBURY (1965) apud BARDINA et al. (1997).

A observação dos perfis obtidos pelo modelo Spalart-Allmaras padrão, nas Figs. (5.25) e (5.27), permite verificar que existe uma influência da distância da parede nos resultados. Tem-se três perfis distintos para cada uma das posições onde esses perfis foram avaliados. Já os perfis obtidos através do modelo Spalart-Allmaras modificado, observados nas Figs, (5.26) e (5.28), são basicamente idênticos para as três posições x/H .

Os resultados para a taxa de expansão ("spreading rate") podem ser vistos para a malha grosseira na Tabela (5.1) e para a malha fina na Tabela (5.2).

Tabela 5.1 - Comparação dos resultados experimentais da taxa de expansão S de um jato plano livre com as simulações usando a malha grosseira.

modelo	“Spreading rate” S	$x/H=20$	$x/H=30$	$x/H=40$
experimental	$\sim 0,100 - 0,110$	-	-	-
Spalart-Allmaras	$0,122 - 0,139$	0,122	0,127	0,139
Spalart-Allmaras modificado	$0,089 - 0,093$	0,089	0,091	0,093

Tabela 5.2 - Comparação dos resultados experimentais da taxa de expansão S de um jato plano livre com as simulações usando a malha fina.

modelo	“Spreading rate” S	$x/H=20$	$x/H=30$	$x/H=40$
experimental	$\sim 0,100 - 0,110$	-	-	-
Spalart-Allmaras	$0,120 - 0,142$	0,120	0,129	0,142
Spalart-Allmaras modificado	$0,088 - 0,093$	0,088	0,090	0,093

Os resultados para malha grosseira e malha fina são praticamente idênticos. Nota-se que continua havendo uma pequena influência da distância da parede para o modelo Spalart-Allmaras modificado, mas essa influência é muito menor que a registrada no modelo Spalart-Allmaras padrão. A medida que o escoamento se afasta da parede, o modelo Spalart-Allmaras padrão prediz uma excessiva difusão do jato. Isso corrobora percepção de que no termo de destruição original, $\tilde{\nu}^2 / d^2 \rightarrow \infty$ criando um excesso de viscosidade turbulenta $\tilde{\nu}$. O modelo modificado diminui esse efeito, pelo menos no centro do jato onde a viscosidade turbulenta é elevada aumentando o fator $\chi = \tilde{\nu} / \nu$ e favorecendo a influência da escala de comprimento de Von Kármán L_{VK} .

6 CONCLUSÕES

Verifica-se que a modificação proposta para o modelo de Spalart-Allmaras, com a utilização de uma expressão que substitui a distância em relação a parede pela escala de comprimento de Von Kármán em regiões de elevada turbulência, não alterou sensivelmente os resultados do modelo nos casos do escoamento sobre uma placa plana e do escoamento em um degrau com gradiente adverso de pressão.

No entanto, para o caso do escoamento turbulento em um jato livre plano, a modificação eliminou a grande influência da distância em relação à parede sobre a taxa de expansão do jato que se verifica em simulações usando o modelo de Spalart-Allmaras original.

Esses resultados permitem inferir que o modelo de uma equação de Menter, derivado do modelo $k-\varepsilon$, também pode ser aprimorado.

Inicialmente, pensava-se em eliminar completamente o uso da distância em relação à parede. Pode-se observar que a determinação dessa grandeza tem um custo alto em malhas tridimensionais não estruturadas, além de ser um fator complicador em problemas com objetos móveis. Uma das vantagens propaladas por Menter para seu modelo reside na ausência, em seu equacionamento, da distância em relação à parede.

No entanto, a escala de comprimento de Von Kármán não parece ser uma boa alternativa para a subcamada viscosa. A combinação da distância em relação à parede com a escala de comprimento de Von Kármán parece a melhor opção para conferir maior flexibilidade e generalidade para modelos de uma equação.

REFERÊNCIAS

BALDWIN, B.S.; BARTH, T. J. **A One-Equation Turbulence Model for High Reynolds Number Wall Bounded Flows.** NASA TM-102847, 1990.

BALDWIN, B.S.; LOMAX, H. O. **Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows.** AIAA paper 78-257, 1978.

BARDINA, J. E.; HUANG, P. G.; COAKLERY, T. J. **Turbulence modeling validation, testing, and development.** *NASA Technical Memorandum* 110446, 1997.

BRADBURY, L. J. S. **The structure of a self-preserving turbulent plane jet.** *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 23, part 1, p. 31-64, 1965.

BRADSHAW, P. **The Turbulence Structure of Equilibrium Boundary Layers.** *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 29, 1967.

CEBECI, T.; SMITH, A. M. O. **Analysis of turbulent boundary layers.** *Academic Press*, London, 1974.

CELIK, I.B. **Introductory Turbulence Modeling.** Lecture Notes, West Virginia University, Morgantown, 1999.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações.** 3a Edição, AMGH Editora Ltda., 2015.

CHOU, P. Y. **On the Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation.** *Quart. Appl. Math*, v. 3, p. 38, 1945.

DRIVER, D. M.; SEEGMILLER, H. L. **Features of reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow.** *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 2, pp. 163-171, Feb 1985.

DURBIN, P. A. **Separated Flow Computations with the $k-\varepsilon-v^2$ Model.** *AAIA Journal*, Vol. 33, No. 4, pp. 659-664, 1995.

ELKHOURY, M. **Modified Menter Model in Comparison with Recently Developed Single-Equation Turbulence Closures.** *AAIA Journal*, Vol. 49, No. 72, pp. 1399-1408, July 2011.

GREENSHIELDS, C. J. **OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox - User Guide.** CFD Direct Ltd., 2015.

JASAK, H. **Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows.** PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.

LANGLEY RESEARCH CENTER. **Turbulence Modeling Resource.** Disponível em <http://turbmodels.larc.nasa.gov/backstep_val.html>. Acesso em 14 de Dezembro de 2015, 2015.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, B. I. **Lectures in Mathematical Models of Turbulence.** Academic Press, London, 1972.

LAUNDER, B. E.; SHARMA, D. B. **Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc.** *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, No. 2, pp 131-138, 1974.

MENTER, F. R. **Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications.** *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605, 1994.

MENTER, F. R. **Eddy Viscosity Transport Equations and Their Relation to the $k-\varepsilon$ Model.** *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, pp. 876-884, December 1997.

NAMER, I.; ÖTÜGEN, M. V. **Velocity measurements in a plane turbulent air jet at moderate Reynolds numbers.** *Experiments in Fluids*, Vol. 6, p. 387-399, 1988.

PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. **A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows.** *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp 1787-1806, 1972.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.** Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

POPE, S. B. **Turbulent Flows.** Cambridge University Press, Cambridge, New York, EUA, (2000).

RAYLEIGH, L. **On the stability or instability of certain fluid motions.** *Proc. London Math. Soc.* 11, 57-70. Scientific papers. Cambridge University Press, Vol. 1, pp. 474-487, 1980.

REYNOLDS, O. **On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and determination of the criterion.** *Philos. Trans. R. Soc.*, London 186, pp. 123-161, 1884.

RODI, W. **Turbulence models and their application in Hydraulics.** International Association for Hydraulic Research, 1980.

RODI, W.; SCHEUERER G. **Scrutinizing the k- ϵ turbulence model under adverse pressure gradient conditions.** *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 108, pp. 174-179, June 1986.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary Layer Theory.** 8th Revised and Enlarged Edition, Springer, 2000.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. **A one-equation turbulence model for aerodynamic flows.** *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, paper 92-0439, 1992.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. **A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows.** *La Recherche Aerospaciale*, No. 1, 5-21, 1994.

SREENIVASAN, K. R. **The Turbulent Boundary Layer.** *Frontiers in Experimental Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, pp 159-209, 1989.

STROHER, G. R.; DE ANDRADE, C. R.; ZAPAROLLI, E. L. **Numerical Study of Axisymmetric Subsonic Turbulent Free Jet Problem.** Proceedings of COBEM 2007, 19th International Congress of Mechanical Engineering, Brasília, Brazil, 2007.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method**, 2nd Edition, Pearson Education, 2007.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics.** 4^a Ed. McGraw-Hill Inc., 1999.

WIEGHARDT, K.; TILLMAN, W. **On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure.** NACA TM-1314, 1951.

WILCOX, D. C. **Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models.** *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 11, pp. 1414-1421, 1988.

WILCOX, D. C. **Turbulence modelling for CFD.** 1st Edition, DCW Industries Inc., La Cañada, California, 1993.

WYGNANSKI, I.; FIEDLER, H. E. **Some Measurements in the Self-Preserving Jet.** *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 38, Pt. 3, pp. 577-612, 1969.