UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

IVANILTO ANDREOLLI

ESTABILIDADE LINEAR APLICADA AO ESCOAMENTO
MULTIFÁSICO DE PETRÓLEO

São Paulo

- 2018 -

IVANILTO ANDREOLLI

**ESTABILIDADE LINEAR APLICADA AO ESCOAMENTO
MULTIFÁSICO DE PETRÓLEO**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. Mecânica
de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

São Paulo

- 2018 -

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Andreolli, Ivanilto

Estabilidade linear aplicada ao escoamento multifásico de petróleo / I. Andreolli -- versão corr. -- São Paulo, 2018.

213 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Dinâmica dos fluídos 2.Escoamento multifásico 3.Sistemas lineares 4.Tubos flexíveis (estabilidade) 5.Petrologia (produção) I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

BANCA EXAMINADORA

IVANILTO ANDREOLLI
ESTABILIDADE LINEAR APLICADA AO ESCOAMENTO
MULTIFÁSICO DE PETRÓLEO

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Eng. Mecânica
de Energia e Fluidos

Tese aprovada pela banca examinadora em: 25 de maio de 2018

Banca examinadora

Professor	Função na banca	Instituição
Dr. Jorge Luis Baliño	Presidente	USP
Dr. Rafael dos Santos Gioria	Titular	USP
Dr. Aristeu da Silveira Neto	Titular	UFU - Externo
Dr ^a . Edith Beatriz Camaño Schettini	Titular	UFRGS- Externo
Dr. Marcelo Souza de Castro	Titular	UNICAMP - Externo

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Jorge Luis Baliño pela orientação ímpar em meus trabalhos de pesquisa, sempre de portas abertas para esclarecer dúvidas e incentivar mesmo quando não havia tempo disponível. Um verdadeiro orientador! Agradeço também pela amizade e conselhos. Muito obrigado Prof. Baliño.

Agradeço ao colega e amigo Gabriel Romualdo de Azevedo por todo o auxílio e paciência ao longo da tese, no esclarecimento de dúvidas e no auxílio na programação. Muito obrigado Gabriel.

Agradeço ao amigo Maciel Zortea por toda ajuda e paciência na programação. Muito obrigado Maciel.

Agradeço aos colegas, professores e funcionários do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) pelo ótimo convívio.

Agradeço a Marisa da Silva Amado Lara e a Regianne Fernandes Augusto do Amaral da Secretaria da Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da USP por todo o auxílio prestado.

Agradeço a PETROBRAS pelo incentivo e pelo apoio na publicação de artigos técnicos.

Agradeço à Universidade Santa Cecília - UNISANTA por apoiar a ideia do Doutorado.

Agradeço à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo por permitir o desenvolvimento dessa pesquisa.

Agradeço a Juliana Dalpian pelo incentivo de fazer o Doutorado.

Agradeço aos familiares. Embora distantes sempre estiveram por perto no meu pensamento me mostrando, nas dificuldades, que era preciso seguir em frente para, de alguma forma, contribuir na construção de um mundo melhor.

”Olha as estrelas. Enquanto elas brilharem haverá esperança na vida.” (Érico Veríssimo)

RESUMO

Neste trabalho, é apresentada uma análise de estabilidade linear para um sistema *flowline-riser*. O modelo utiliza as equações de continuidade para as fases líquidas e gasosas e uma equação de momento para a mistura onde são considerados os efeitos de atrito. A mistura água-óleo é modelada de forma homogênea. Para a determinação da fração de vazio, adota-se o modelo de fluxo de deriva, baseado em várias correlações *drift*. Se o escoamento é estratificado a fração de vazio é modelada através do modelo de equilíbrio local de [Taitel e Dukler \(1976\)](#). Para a caracterização dos fluidos é adotado um modelo de equilíbrio de fase *black-oil* onde a transferência de massa é considerada entre as correntes óleo e gás em função das condições locais de pressão e temperatura. É considerada a abordagem de parâmetros distribuídos, onde diversas geometrias com discretização variável podem ser consideradas tais como *riser* em catenária e *riser lazy wave*. Para realizar a análise de estabilidade linear, as equações do modelo são linearizadas em torno do estado estacionário e discretizadas pelo método das diferenças finitas, onde foi utilizado um programa escrito em Matlab. A partir do sistema linearizado, é avaliada a estabilidade do estado estacionário pelas raízes do polinômio característico, que são solução do problema de autovalores e autovetores. É avaliada a convergência numérica do modelo e mapas de estabilidade são apresentados para vários sistemas de produção de petróleo. Os resultados obtidos numericamente são comparados com pontos operacionais de sistemas reais de produção de petróleo. Observou-se que o modelo convergiu para todos os casos avaliados e apresentou ótima concordância com os dados de campo.

Palavras-chave: *Intermitência severa, Sistema flowline-riser, Escoamento água-ar, Estabilidade hidrodinâmica, Tecnologia de produção de petróleo.*

ABSTRACT

This work presents a linear stability analysis for a flowline-riser system. The model considers continuity equations for the liquid and gas phases, and a momentum equation for the mixture that accounts for friction effects. The water-oil mixture is modeled as being homogeneous. The void fraction is determined by using the drift-flux model based on several drift correlations. For stratified flow, the void fraction is expressed by the local equilibrium model of Taitel and Dukler (1976). Fluid characterization uses a black-oil model that considers mass transfer between the oil and gas flows as a function of the local pressure and temperature conditions. In the proposed approach with distributed parameters, several geometries with variable discretization can be considered, such as catenary and lazy wave risers. To perform the linear stability analysis, the equations of the model are linearized around the stationary state and discretized using the finite difference method, implemented using custom-written code in Matlab. From the linearized system, the stability of the steady state is evaluated by computing the roots of the characteristic polynomial equation of the eigenvalues and eigenvectors problem. Convergence of the numerical model is evaluated and stability maps for several oil production systems were presented. Numerical results were compared with the actual measurements of oil production systems. The model converged in all cases tested and presented an excellent agreement with field data.

Keywords: *Severe slugging, Flowline-riser system, Gas-liquid flow, Hydrodynamic stability, Petroleum production technology.*

SUMÁRIO

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Siglas	xv
Lista de Símbolos	xvii
Símbolos alfabéticos	xvii
Símbolos gregos	xxi
Lista de Publicações	xxv
Artigos publicados/submetidos em periódicos	xxv
Artigos publicados em anais de conferências	xxv
1 Introdução	1
1.1 Intermitência severa	3
1.2 A intermitência severa na produção de petróleo	6
1.3 Objetivos	8
1.4 Estrutura da tese	10
2 Revisão Bibliográfica	11
2.1 Modelagem de escoamentos multifásicos	11
2.2 Modelagem da intermitência severa na indústria de petróleo	15
2.3 Análise da estabilidade do escoamento multifásico	21
2.4 Conclusões da revisão bibliográfica	25

3	Modelo	27
3.1	Modelagem do sistema de produção	27
3.2	Geometria do sistema	29
3.3	Equações de balanço	29
3.4	Relações de fechamento	31
3.4.1	Homogeneização das fases óleo e água	31
3.4.2	Modelagem do atrito	32
3.4.3	Modelo de equilíbrio local	32
3.4.4	Fração de vazio	33
3.4.5	Caracterização de fluidos	34
3.4.6	Termo de transferência de massa	35
3.5	Condições de contorno	35
3.6	Estado estacionário	36
3.7	Equações dinâmicas na forma matricial	37
3.8	Sistema matricial perturbado	39
4	Implementação Numérica	41
4.1	Geometria do sistema	41
4.2	Equações perturbadas discretizadas	41
4.3	Espectro de autovalores e critério de estabilidade	42
4.4	Procedimento numérico	44
4.4.1	Estabilidade do estado estacionário	44
4.4.2	Construção da curva de estabilidade	46
5	Resultados	49
5.1	Análise do modelo estacionário	49
5.2	Análise de convergência do modelo	56

5.2.1	Convergência de elementos de matriz e máximo autovalor	56
5.2.2	Convergência do estado estacionário	59
5.2.3	Análise dos autovalores	63
5.3	Análise dinâmica do sistema de Nemoto e Baliño (2012)	65
5.4	Análise dinâmica de sistemas de campo	69
5.4.1	Análise do sistema Catenária 1	70
5.4.2	Análise do sistema <i>Lazy Wave</i>	76
5.4.3	Análise do sistema Catenária 2	81
5.4.4	Análise do sistema Catenária 3	87
6	Conclusões e Recomendações	95
6.1	Conclusões	95
6.2	Recomendações	98
	Referências	101
	Apêndice A – Caracterização dos fluidos	107
A.1	Introdução	107
A.2	Variáveis independentes	110
A.2.1	Densidade do óleo na condição de referência e densidade API	110
A.2.2	Razão gás-óleo	111
A.2.3	Razão água-óleo e razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos	111
A.2.4	Densidade do gás livre na condição de referência	111
A.2.5	Parâmetros de conversão para S.I.	112
A.3	Fator volume de formação de gás	112
A.3.1	Fator de compressibilidade do gás	113
A.3.2	Pressão e temperatura pseudo-críticas	113

A.4	Massa específica do gás	114
A.5	Razão de solubilidade	114
A.6	Pressão de bolha	114
A.7	Fator volume de formação de óleo	115
A.8	Massa específica do óleo	116
A.9	Fator volume de formação de água	116
A.10	Massa específica da água	117
A.11	Viscosidade do gás	117
A.12	Viscosidade do óleo	118
A.12.1	Viscosidade do óleo morto	118
A.12.2	Viscosidade do óleo saturado	119
A.12.3	Viscosidade do óleo subsaturado	119
A.13	Viscosidade da água	120
A.13.1	Viscosidade da água na pressão de referência	120
A.13.2	Viscosidade da água na condição do escoamento	121
A.14	Relações algébricas <i>black-oil</i> para a fase líquida	121
A.14.1	Razão de solubilidade do líquido R_{sl}	121
A.14.2	Fator volume de formação do líquido B_l	122
A.14.3	Massa específica do líquido ρ_{l0}	122
A.14.4	Massa específica do líquido ρ_l	122
A.14.5	Viscosidade do líquido μ_l	122

Apêndice B – Correlações de *drift flux* e de multiplicador de duas fases 125

B.1	Introdução	125
B.2	Correlações de <i>drift flux</i> utilizadas	125
B.2.1	Correlação de Bhagwat e Ghajar (2012)	125
B.2.2	Correlação de Bendiksen (1984)	126

B.2.3	Correlação de Woldesemayat e Ghajar (2007)	126
B.3	Correlações de multiplicadores de duas fases utilizadas	127
B.3.1	Multiplicador de duas fases com centro de massa e de volume	128
B.3.2	Multiplicador de duas fases- Muller-Steinhagen e Heck (1986)	129
Apêndice C – Termo de transferência de massa		131
C.1	Introdução	131
C.2	Equacionamento	131
Apêndice D – Estado estacionário		135
D.1	Introdução	135
D.2	Equacionamento	135
Apêndice E – Equações dinâmicas em forma matricial		139
E.1	Introdução	139
E.1.1	Termo de transferência de massa	139
E.1.2	Equação de balanço da fase líquida	140
E.1.3	Equação de balanço da fase gás	141
E.1.4	Sistema na forma matricial	142
Apêndice F – Equações perturbadas em forma matricial		147
F.1	Introdução	147
F.2	Sistema perturbado	147
F.2.1	Matriz perturbada $\tilde{A}$	150
F.2.2	Matriz perturbada $\tilde{B}$	151
F.2.3	Matriz perturbada $\tilde{C}$	152
F.2.4	Condições de contorno	154

Apêndice G – Equações perturbadas discretizadas em forma matricial	155
G.1 Introdução	155
G.2 Equações discretizadas das perturbações	155
Apêndice H – Derivadas do sistema perturbado	165
H.1 Introdução	165
H.2 Derivadas de funções termodinâmicas	165
H.2.1 Derivadas da razão de solubilidade gás-líquido	165
H.2.2 Derivadas da razão de solubilidade gás-óleo	166
H.2.3 Derivadas do fator volume de formação do líquido	167
H.2.4 Derivadas do fator volume de formação do óleo	167
H.2.5 Derivadas do fator volume de formação da água	170
H.2.6 Derivadas do fator de compressibilidade do gás	170
H.2.7 Derivadas da massa específica do gás	171
H.2.8 Derivadas da massa específica do líquido	172
H.2.9 Derivadas da viscosidade do gás	173
H.2.10 Derivadas da viscosidade do óleo	173
H.2.11 Derivadas da viscosidade da água	174
H.2.12 Derivadas da viscosidade do líquido	174
H.3 Derivadas da fração de vazio	174
H.3.1 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$	175
H.3.2 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$	175
H.3.3 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$	176
H.3.4 Derivadas da correlação de Bhagwat e Ghajar (2012)	177
H.4 Derivadas da mistura	178
H.4.1 Termos relacionados à equação de balanço da quantidade de movimento linear	179

H.4.1.1	Termos do modelo centro de massa	180
H.4.1.2	Termos do modelo centro de volume	180
H.4.1.3	Termos do modelo estratificado	181
H.4.2	Derivadas da massa específica da mistura	181
H.4.3	Derivadas da viscosidade da mistura	182
H.4.4	Derivadas da velocidade da mistura	182
H.4.5	Derivadas do Reynolds da mistura	183
H.4.6	Derivada do fator de atrito em relação ao Reynolds	184
H.4.7	Derivadas relacionadas ao termo $f_m v_m^2$	184
H.5	Derivadas relacionadas à temperatura	185
Apêndice I – Relações para escoamento estratificado		187
I.1	Introdução	187
I.2	Fração de vazio	188
I.2.1	$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$	191
I.2.1.1	Primeiro termo da Eq. (I.25)	192
I.2.1.2	Segundo termo da Eq. (I.25)	193
I.2.1.3	Terceiro termo da Eq. (I.25)	195
I.2.1.4	Função $\partial \alpha / \partial j_g$ simplificada	196
I.2.2	$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$	197
I.2.2.1	Primeiro termo da Eq. (I.66)	197
I.2.2.2	Segundo termo da Eq. (I.66)	198
I.2.2.3	Terceiro termo da Eq. (I.66)	199
I.2.2.4	Função $\partial \alpha / \partial j_l$ simplificada	201
I.2.3	$\frac{\partial \alpha}{\partial P}$	201
I.2.3.1	Primeiro termo da Eq. (I.102)	202
I.2.3.2	Segundo termo da Eq. (I.102)	203

I.2.3.3	Terceiro termo da Eq. (I.102)	204
I.2.3.4	Quarto termo da Eq. (I.102).....	206
I.2.3.5	Função $\partial\alpha/\partial P$ simplificada	206
I.3	Queda de pressão devido ao atrito	207
I.3.1	$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{dP}{ds} \Big _A \right)$	207
I.3.2	$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big _A \right)$	208
I.3.3	$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big _A \right)$	209
I.4	Crêterios de transição	210

LISTA DE FIGURAS

Figura - 1.1	Ilustração de um sistema submarino de desenvolvimento da produção (fonte: banco de imagens da Petrobras).	2
Figura - 1.2	Estágios do ciclo de intermitência severa. Reproduzido de Taitel (1986).	5
Figura - 1.3	Geometria de um poço de petróleo que apresenta instabilidades.	8
Figura - 1.4	Instabilidades de um poço de petróleo em três seções observadas.	9
Figura - 2.1	Curva de estabilidade obtida por Nemoto (2012); j_{o0} e j_{g0} representam, respectivamente, as velocidades superficiais do óleo e do gás.	20
Figura - 3.1	Geometria geral do sistema onde as equações de balanço são aplicadas.	30
Figura - 5.1	Geometria do sistema considerada nesse estudo para análise do estado estacionário (<i>Lazy Wave</i>).	50
Figura - 5.2	Curvas TPR na ANM para três correlações <i>drift-flux</i> (Bendiksen (1984) (B), Woldesemayat e Ghajar (2007) (W&G) e Bhagwat e Ghajar (2012) (B&G)) e duas abordagens da velocidade da mistura para multiplicador de duas fases, baseado no centro de volume (j) e centro de massa (v_m).	55
Figura - 5.3	Perfil de pressão da ANM para a plataforma para o melhor conjunto de correlações selecionadas de acordo com os dados experimentais disponíveis.	56
Figura - 5.4	Geometria do sistema para análise da convergência do modelo.	57
Figura - 5.5	Geometria do sistema Nemoto e Baliño (2012).	59
Figura - 5.6	Perfil de pressão para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.	60
Figura - 5.7	Velocidades superficiais do gás e do líquido para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.	61
Figura - 5.8	Fração de vazio para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.	62
Figura - 5.9	Geometria considerada na análise dos maiores autovalores.	63
Figura - 5.10	Comportamento do maior autovalor para a faixa de vazões de óleo de $50 \text{ m}^3/\text{d}$	

a $950\text{ m}^3/d$ variando-se a discretização da Fig. 5.9.	64
Figura - 5.11 Comportamento maior autovalor para a faixa de vazões de óleo de $1050\text{ m}^3/d$ a $2050\text{ m}^3/d$ variando-se a discretização da Fig. 5.9.	65
Figura - 5.12 Curva de estabilidade obtida por Nemoto e Baliño (2012) e pelo modelo proposto considerando a abordagem de centro de volume para velocidade superficial da mistura e correlação <i>drift-flux</i> de Bendiksen (1984).	67
Figura - 5.13 Diversas curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo considerando a abordagem centro de volume e centro de massa e confrontando com a curva de estabilidade de Nemoto e Baliño (2012).	68
Figura - 5.14 Geometria do sistema Catenária 1.	70
Figura - 5.15 Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 1).	72
Figura - 5.16 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 20\text{ bar}$, $WOR = 4\%$	73
Figura - 5.17 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 39\text{ bar}$, $WOR = 4\%$	74
Figura - 5.18 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 29\text{ bar}$, $WOR = 4\%$	75
Figura - 5.19 Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (<i>Lazy Wave</i>).	77
Figura - 5.20 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (<i>Lazy Wave</i>). $P_{sep} = 22\text{ bar}$, $WOR = 20\%$	78
Figura - 5.21 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (<i>Lazy Wave</i>). $P_{sep} = 25\text{ bar}$, $WOR = 4\%$	79
Figura - 5.22 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (<i>Lazy Wave</i>). $P_{sep} = 40\text{ bar}$, $WOR = 0,5\%$	80
Figura - 5.23 Geometria do sistema Catenária 2.	81
Figura - 5.24 Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 2).	83
Figura - 5.25 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 44\text{ bar}$, $WOR = 0,1\%$	84
Figura - 5.26 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo in-	

corporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 25 \text{ bar}$, $WOR = 15\%$.	85
Figura - 5.27 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 40 \text{ bar}$, $WOR = 150\%$.	86
Figura - 5.28 Geometria do sistema Catenária 3.	87
Figura - 5.29 Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 3).	89
Figura - 5.30 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 11 \text{ bar}$, $WOR = 4,2\%$.	90
Figura - 5.31 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 10 \text{ bar}$, $WOR = 8,2\%$.	91
Figura - 5.32 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 9,8 \text{ bar}$, $WOR = 15\%$.	92
Figura - 5.33 Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 9,8 \text{ bar}$, $WOR = 29\%$.	93
Figura - A.1 Processo flash da condição (P , T) para a condição de referência (SC). ...	108
Figura - I.1 Definição para escoamento estratificado.	188
Figura - I.2 Representação geométrica das variáveis.	190
Figura - I.3 Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz. ..	212

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Geometria da Fig. 5.1.	51
Tabela 5.2	Dados básicos de entrada para simulação (<i>Lazy Wave</i>).	52
Tabela 5.3	Dados de campo para o sistema <i>Lazy Wave</i>	53
Tabela 5.4	Erro relativo da pressão na ANM em relação aos dados experimentais considerando 3 correlações para multiplicadores de duas fases ϕ^2_{f0} e as abordagens para <i>drift-flux</i> propostas por Bendiksen (1984), Woldesemayat e Ghajar (2007) e Bhagwat e Ghajar (2012).	54
Tabela 5.5	Dados de entrada para as simulações de convergência.	58
Tabela 5.6	Análise de convergência de elementos das matrizes do sistema: a 2 ^o coluna (3 nós) apresenta o valor da variável. As demais colunas (aumento da discretização) apresentam a razão entre o valor da coluna (i) e o valor anterior ($i - 1$). A linha “ <i>Maior</i> ” representa o maior autovalor para cada discretização.	58
Tabela 5.7	Geometria da Fig. 5.5, onde nós (i) representam nós internos.	66
Tabela 5.8	Geometria da Fig. 5.14 (Catenária 1), onde nós (i) representam nós internos.	71
Tabela 5.9	Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 1).	71
Tabela 5.10	Nós centrais da geometria da Fig. 5.23 (Catenária 2).	81
Tabela 5.11	Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 2).	82
Tabela 5.12	Nós centrais da geometria da Fig. 5.28 (Catenária 3).	88
Tabela 5.13	Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 3).	88
Tabela A.1	Faixas de validade da correlação de Lee, Gonzalez e Eakin (1966).	118

LISTA DE SIGLAS

ANM	Árvore de Natal Molhada
API	<i>American Petroleum Institute</i>
Catenária1	Sistema real avaliado quanto à estabilidade
Catenária2	Sistema real avaliado quanto à estabilidade
Catenária3	Sistema real avaliado quanto à estabilidade
CM	Centro de massa - Abordagem para a velocidade da mistura
CV	Centro de volume - Abordagem para a velocidade da mistura
E&P	Exploração e Produção
FPSO	<i>Floating production storage and offloading</i> - Unidade flutuante de produção, armazenamento e transferência
IPR	<i>Inflow performance relationship</i> - Curva de pressão disponível
<i>Lazy Wave</i>	Sistema real avaliado quanto à estabilidade
NPW	<i>No-pressure-wave</i> - Modelo sem ondas de pressão
P.I.	<i>Plant Information</i> - Sistema online de informações da planta de processo e do sistema <i>subsea</i> das plataformas de petróleo
PVT	Pressão-volume-temperatura
SC	<i>Standard condition</i> - Condição de referência, definida como 60 °F e 1 atm, também designada de condição padrão
S.I.	Sistema internacional de unidades
TPR	<i>Tubing performance relationship</i> - Curva de pressão requerida

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos alfabéticos

A	Área da seção transversal da tubulação [m^2]
A_g	Área de gás na seção transversal da <i>flowline</i> ou <i>riser</i> [m^2]
A_l	Área de líquido na seção transversal da <i>flowline</i> ou <i>riser</i> [m^2]
$^{\circ}API$	Escala de densidade do óleo morto da norma API [—]
b	Parâmetro da equação de viscosidade de Beggs e Robinson (1975) para gás saturado [m^3/sm^3]
B_g	Fator volume de formação do gás [m^3/sm^3]
B_l	Fator volume de formação do líquido [m^3/sm^3]
B_o	Fator volume de formação do óleo [m^3/sm^3]
B_{ob}	Fator volume de formação do óleo no ponto de bolha [m^3/sm^3]
B_w	Fator volume de formação da água [m^3/sm^3]
B_{sw}	A razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos [—]
C_d	Parâmetro de distribuição na relação fluxo de deriva [—]
C_{g1}	Parâmetro da condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de gás [$(m/s)/Pa$]
C_{l1}	Parâmetro da condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de líquido [$(m/s)/Pa$]
C_o	Fator de compressibilidade do óleo acima da pressão de bolha [Pa^{-1}]
C_1	Parâmetro um para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [—]
C_2	Parâmetro dois para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [—]
C_3	Parâmetro três para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [$^{\circ}F$]
C_4	Parâmetro quatro para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [—]

C_5	Parâmetro cinco para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. $[-]$
D	Diâmetro interno da tubulação $[m]$
$\frac{D}{D_t}$	Operador de derivada material $[-]$
D_g	Diâmetro hidráulico do gás na <i>flowline</i> ou <i>riser</i> $[m]$
D_l	Diâmetro hidráulico do líquido na <i>flowline</i> ou <i>riser</i> $[m]$
f	Fator de atrito de forma genérica $[-]$
f_{cv}	Fator de atrito do centro de volume $[-]$
f_{cm}	Fator de atrito do centro de massa $[-]$
f_m	Fator de atrito para a mistura $[-]$
f_g	Fator de atrito para a fase gasosa $[-]$
f_l	Fator de atrito para a fase líquida $[-]$
Fr	Número de Froude $[-]$
F_1, F_2, F_3	Parâmetros da equação de viscosidade de gás $[-]$
g	Aceleração da gravidade $[m/s^2]$
G	Fluxo mássico da mistura $[kg/s\ m^2]$
G_c	Fluxo mássico da correlação de Muller-Steinhagen e Heck (1986) $[kg/s^2\ m^2]$
GOR	Razão-gás-óleo $[sm^3/sm^3]$
$GORI$	Razão-gás-óleo de injeção $[sm^3/sm^3]$
h	Altura do <i>riser</i> vertical $[m]$
I_1, I_2	Parâmetros da equação de viscosidade da água $[-]$
j_g	Velocidade superficial de gás $[m/s]$
j_{g0}	Velocidade superficial de gás na condição SC $[m/s]$
j_l	Velocidade superficial do líquido $[m/s]$
j_{l0}	Velocidade superficial do líquido na condição SC $[m/s]$
j_o	Velocidade superficial do óleo $[m/s]$
j_{o0}	Velocidade superficial do óleo na condição SC $[m/s]$
j_w	Velocidade superficial da água $[m/s]$

j_{w0}	Velocidade superficial da água na condição SC [m/s]
l	Comprimento da <i>flowline</i> [m]
M_a	Massa molar do ar [kg/mol]
M_g	Massa molar do gás livre [kg/mol]
m_{dg}	Massa total de gás dissolvida <i>in situ</i> [kg]
m_{dgo}	Massa de gás dissolvida no óleo <i>in situ</i> [kg]
m_{dgw}	Massa de gás dissolvida na água <i>in situ</i> [kg]
m_1	Parâmetro da equação de viscosidade de Beal (1946) $[-]$
m_2	Parâmetro da equação de viscosidade de Vasquez e Beggs (1980) para óleo subsaturado $[-]$
N	Número de nós de discretização $[-]$
P	Pressão no <i>riser</i> [Pa , bar , kgf/cm^2]
P_{ANM}	Pressão na ANM [Pa]
P_b	Pressão de bolha [Pa]
P_{pc}	Pressão pseudocrítica [Pa]
P_{pr}	Pressão pseudoreduzida [Pa]
P_{sep}	Pressão no separador [Pa]
P_0	Pressão de referência [Pa]
Q_g	Vazão volumétrica de gás <i>in situ</i> [m^3/s]
Q_{g0}	Vazão volumétrica de gás na condição na condição SC [m^3/s]
Q_{gl0}	Vazão volumétrica de gás livre na condição SC [m^3/s]
Q_{gs0}	Vazão volumétrica de gás solubilizado na condição SC [m^3/s]
Q_l	Vazão volumétrica de líquido <i>in situ</i> [m^3/s]
Q_{l0}	Vazão volumétrica de líquido na condição SC [m^3/s]
Q_o	Vazão volumétrica de óleo <i>in situ</i> [m^3/s]
Q_{o0}	Vazão volumétrica de óleo na condição SC [m^3/s]
Q_w	Vazão volumétrica de água <i>in situ</i> [m^3/s]

Q_{w0}	Vazão volumétrica de água na condição SC [m^3/s]
r	Conjunto de autovetores $[-]$
R_g	Constante universal dos gases [m^2/s^2K]
Re_{cv}	Número de Reynolds para o centro de volume $[-]$
Re_{cm}	Número de Reynolds para o centro de massa $[-]$
Re_g	Número de Reynolds para o gás $[-]$
Re_l	Número de Reynolds para o líquido $[-]$
Re_m	Número de Reynolds para a mistura $[-]$
R_{so}	Razão de solubilidade do óleo [sm^3/sm^3]
R_{sl}	Razão de solubilidade do líquido [sm^3/sm^3]
R_{sw}	Razão de solubilidade da água [sm^3/sm^3]
s	Coordenada de posição ao longo do <i>riser</i> [m]
S_g	Perímetro molhado de gás na <i>flowline</i> [m]
S_l	Perímetro molhado de líquido na <i>flowline</i> [m]
s_t	Nó mais a jusante, nó do separador de produção ($s = s_t$) [m]
t	Tempo [s]
T	Temperatura [K , $^{\circ}F$, $^{\circ}C$]
T_k	Temperatura em Kelvin [K]
T_o	Temperatura de referência [K]
T_{pc}	Temperatura pseudocrítica [K]
T_{pr}	Temperatura pseudoreduzida [K]
U_d	Velocidade de deriva na relação de fluxo de deriva [m/s]
v_m	Velocidade do centro de massa [m/s]
u_l	Velocidade do líquido [m/s]
u_o	Velocidade do óleo [m/s]
u_w	Velocidade da água [m/s]
V	Volume total da seção transversal da tubulação [m^3]

V_g	Volume de gás <i>in situ</i> [m^3]
V_{gl0}	Volume de gás livre na condição SC [m^3]
V_{gs0}	Volume de gás solubilizado na condição SC [m^3]
V_{gdl0}	Volume de gás dissolvido no líquido na condição SC [m^3]
V_{gdo0}	Volume de gás dissolvido no óleo na condição SC [m^3]
V_{gdw0}	Volume de gás dissolvido na água na condição SC [m^3]
V_o	Volume de óleo <i>in situ</i> [m^3]
V_{o0}	Volume de óleo na condição SC [m^3]
V_w	Volume de gás <i>in situ</i> [m^3]
V_{w0}	Volume de gás na condição SC [m^3]
WOR	Razão-água-óleo [sm^3/sm^3]
x	Coordenada de posição da direção horizontal [m]
Y	Percentual de salinidade da água em relação ao peso de sólidos [%]
z	Coordenada de posição da direção vertical [m]
Z_g	Fator de compressibilidade dos gases reais [—]

Símbolos gregos

α	Fração de vazio - fração volumétrica de gás [—]
α_l	Fração volumétrica de líquido [—]
α_o	Fração volumétrica de óleo [—]
α_w	Fração volumétrica de água [—]
α_p	Fração de vazio na <i>flowline</i> [—]
α'	Fração de vazio na região estratificada da <i>flowline</i> [—]
β	Inclinação da <i>flowline</i> com relação à horizontal [$^\circ$]
Δj_{o0}	Incremento de velocidade superficial do óleo na condição SC [m/s]
Δs	Tamanho dos elementos da malha unidimensional [m]
ΔV_{wT}	Parâmetro de correção do B_w em relação à temperatura [—]

ΔV_{wP}	Parâmetro de correção do B_w em relação à pressão $[-]$
ϵ	Rugosidade da tubulação $[m]$
ϵ_e	Erro relativo $[-]$
γ_{API}	Densidade do óleo morto na escala API $[^\circ API]$
γ_g	Densidade do gás nas condições locais $[-]$
γ_{g0}	Densidade do gás da condição SC $[-]$
γ_{gd}	Densidade do gás dissolvido $[-]$
γ_o	Densidade do óleo morto $[-]$
Γ	Termo de transferência de massa $[kg/(m^3 s)]$
λ	Conjunto de autovalores $[-]$
ϕ	Incremento angular $[^\circ]$
ϕ_{f0}	Multiplicador de duas fases $[-]$
μ_g	Viscosidade do gás $[Pa s]$
μ_l	Viscosidade do líquido $[Pa s]$
μ_m	Viscosidade da mistura $[Pa s]$
μ_o	Viscosidade do óleo saturado - óleo vivo $[Pa s]$
μ_{ob}	Viscosidade do óleo no ponto de bolha $[Pa s]$
μ_{od}	Viscosidade do óleo morto $[Pa s]$
μ_w	Viscosidade da água $[Pa s]$
μ_{w0}	Viscosidade da água na condição SC $[Pa s]$
ρ	Massa específica de forma genérica $[kg/m^3]$
ρ_{a0}	Massa específica do ar na condição SC $[kg/m^3]$
ρ_{cv}	Massa específica do centro de volume $[kg/m^3]$
ρ_g	Massa específica do gás $[kg/m^3]$
ρ_{g0}	Massa específica do gás na condição SC $[kg/m^3]$
ρ_{gd0}	Massa específica do gás dissolvido no óleo na condição SC $[kg/m^3]$
ρ_l	Massa específica do líquido $[kg/m^3]$

ρ_{l0}	Massa específica do líquido na condição SC [kg/m^3]
ρ_o	Massa específica do óleo [kg/m^3]
ρ_{o0}	Massa específica do óleo na condição SC [kg/m^3]
ρ_w	Massa específica da água [kg/m^3]
ρ_{w0}	Massa específica da água na condição SC [kg/m^3]
ρ_m	Massa específica da mistura [kg/m^3]
σ	Tensão superficial do líquido [Pa]
τ_i	Tensão de cisalhamento interfacial entre o líquido e o gás [Pa]
τ_{wg}	Tensão de cisalhamento entre o gás e a parede [Pa]
τ_{wl}	Tensão de cisalhamento entre o líquido e a parede [Pa]
τ_{wm}	Tensão de cisalhamento entre a mistura e a parede [Pa]
θ	Inclinação local do <i>riser</i> com relação a vertical [$^\circ$]
ζ	Coeficiente de sub-relaxamento [$-$]
θ	Inclinação local do <i>riser</i> com relação a vertical [$^\circ$]
ζ	Coeficiente de sub-relaxamento [$-$]

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Artigos publicados/submetidos em periódicos

ANDREOLLI, I.; ZORTEA, M.; BALIÑO, J. L. Modeling offshore steady flow field data using drift-flux and black-oil models. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 157, p. 14-26, 2017.

ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Stability solver for offshore oil production systems. Submetido a *Journal of Petroleum Science and Engineering*, maio de 2018.

Artigos publicados em anais de conferências

ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Linear stability theory analysis for oil flowlines. In: ABCM. *Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2017)*. São Paulo, SP, Brazil, 2017. p. 11.

ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Stability solver for offshore oil flows. In: *Proceeding of the Offshore Technology Conference (OTC 2017)*. Rio de Janeiro, Brazil, 2017. p. 15.

1 INTRODUÇÃO

A produção de petróleo no mar é realizada através de uma rede de poços distribuídos de forma a maximizar o volume recuperável para aquele conjunto de poços. A distribuição adequada dos poços é fundamental para a drenagem eficiente do reservatório devido a sua heterogeneidade. Os reservatórios de petróleo apresentam geometria complexa e variação espacial em diversas propriedades, por exemplo: espessura, campos de porosidade e de permeabilidade, além da presença de falhas. A modelagem desse sistema requer equações de escoamento multifásico em meio poroso, além do conhecimento de curvas de permeabilidades relativas, às quais são função das saturações de cada fluido presente no meio poroso. Pela natureza heterogênea que forma esse sistema e dos complexos fenômenos envolvidos, as previsões da produção apresentam incertezas, podendo impactar na estabilidade do escoamento nas tubulações, principalmente quando as vazões de produção são menores que as previstas. Além dos poços produtores, uma rede de poços injetores é parte integrante do projeto de desenvolvimento da produção, os quais tem por objetivo reduzir a queda de pressão no meio poroso à medida que os fluidos são extraídos. A Fig. 1.1 apresenta uma ilustração da distribuição dos poços de um determinado projeto de desenvolvimento da produção. É notável, ao se observar a distribuição dos poços no leito marinho, que algumas linhas serão descendentes, o que pode acarretar alguns problemas de estabilidade do escoamento como será visto adiante na própria Introdução. Analisando-se isoladamente um poço produtor, observa-se que a conexão do trecho de poço com o trecho submarino é feita através da Árvore de Natal Molhada (ANM). Esse equipamento é, simplificada, um bloco de aço (por volta de 40 toneladas) com diversas válvulas de operação remota cuja função é garantir a segurança do poço ([Andreolli \(2016\)](#)). Do fundo do poço até a ANM, os fluidos escoam através da coluna de produção, onde são instalados diversos equipamentos de poço entre eles, equipamentos de elevação artificial, como bombas e válvulas de *gas lift*. Da ANM até a plataforma os fluidos escoam através da tubulação de produção. Esse trecho normalmente é constituído de uma tubulação flexível de 6 polegadas, sendo o trecho de fundo designado de *flowline* e o trecho em catenária designado de *riser*. O trecho de *riser* pode também ser constituído em geometria mais complexa, como *lazy wave*, com objetivos de reduzir os carregamentos na plataforma principalmente em profundidades maiores, como ocorre no

Figura 1.1: Ilustração de um sistema submarino de desenvolvimento da produção (fonte: banco de imagens da Petrobras).

pré-sal e ilustrado na Fig. 1.1.

O dimensionamento do sistema de produção de petróleo, que inclui os poços produtores, envolve estudos complexos devido aos fenômenos envolvidos. Simplificações são geralmente adotadas, principalmente na indústria, cujas análises requeridas exigem, rotineiramente, tempos de respostas curtos e uma dessas simplificações é a consideração da modelagem *black-oil* para os fluidos. O petróleo, sendo uma substância composta, pode se apresentar nas três fases da matéria e isso traz desafios na modelagem em termos de caracterização dos fluidos e em termos da própria modelagem do escoamento. De acordo com [McCain \(1990\)](#) a caracterização do fluido pode ser feita através da modelagem composicional, que considera a caracterização componente a componente do petróleo, ou através da modelagem *black-oil* que considera o petróleo composto pela fase líquida (óleo mais gás) e pela fase gás. Este modelo considera correlações *black-oil* para o equacionamento da transferência de massa entre as fases e de suas compressibilidades. Além da complexidade em termos de fluidos, fenômenos tais como transferência de massa, transferência de calor, escoamento multifásico, escorregamento de fases, equilíbrio termodinâmico, formação de emulsão e aspectos da garantia do escoamento como hidratos, parafinas e incrustações inorgânicas, tornam a modelagem do sistema de produção complexa.

Além disso, alguns fenômenos físicos que ocorrem do escoamento multifásico, tais como instabilidades no escoamento ocasionadas pela ocorrência de escoamento descendente (designados na literatura por intermitência severa), são fenômenos de natureza transiente e mo-

delar esses sistemas exige grande esforço computacional com modelos altamente complexos, o que pode demandar tempos excessivos de resposta. Esse é um cenário em que um modelo de estabilidade que consiga resgatar as condições de escoamento mapeando a região de instabilidades do escoamento e sem que haja a necessidade de simular o problema transiente, pode trazer benefícios tanto na fase de projeto de desenvolvimento da produção como na fase produtiva. O desenvolvimento de modelos simples, mas que consigam representar a realidade dentro de um limite aceitável de incertezas, traz grandes benefícios para a indústria. Considerando o segmento de E&P (Exploração e Produção), modelos que consigam representar melhor os sistemas de escoamento são ferramentas importantes aos engenheiros que projetam os sistemas de desenvolvimento da produção de petróleo e um dos benefícios dessas ferramentas é a previsão mais realista das curvas de produção, possibilitando a alocação mais adequada dos recursos na carteira de projetos da empresa. Além disso, na fase produtiva, esse ferramental é fundamental para estudos complexos de otimização da produção. Com base nesses estudos, procedimentos operacionais são desenvolvidos e operacionalizados nas plataformas. Além disso, estudos de viabilidade técnica e econômica de intervenções e modificações em sistemas em produção são ancorados em previsões de produção feitas através desse ferramental de modelagem. Os valores envolvidos tanto na fase de projeto como na fase operacional são bastante elevados e esse ferramental computacional pode trazer grandes benefícios às empresas de petróleo principalmente quando os limites de incertezas dos modelos numéricos são reduzidos. A proposta desta tese se insere nessa linha, ou seja, desenvolver um modelo de estabilidade que consiga prever com razoável precisão as condições operacionais de poços produtores de petróleo sem, no entanto, simular o problema transiente. Modelos de estabilidade na indústria de petróleo já existem, mas apresentam muitas simplificações e os resultados, em muitos casos, se reduzem a informações qualitativas. Com a proposta do estudo será possível obter informações rápidas e mais realistas de estabilidade de poços produtores de petróleo, tornando possível avaliar a estabilidade em cenários de simulações em massa (grande número de simulações) como ocorre na definição do sistema de produção na fase de projeto.

1.1 Intermitência severa

Nos escoamentos multifásicos ocorrem alguns fenômenos que não são observados nos escoamentos monofásicos. Entre esses fenômenos típicos do escoamento multifásico está a ocorrência de instabilidades severas ou a intermitência severa (*severe slugging*, *terrain induced slug flow* ou *terrain-dominated slug flow*), cuja ocorrência é favorecida quando existem trechos descendentes. Segundo [Lorimer e Ellison \(2000\)](#), a intermitência severa é um fenômeno dominado

pela topografia, caracterizado pela formação e produção cíclica de longas golfadas de líquido e rápida expulsão de gás. O fenômeno pode ocorrer para baixas vazões de gás e líquido quando uma seção com inclinação descendente (*flowline*) é seguida por outra seção com inclinação ascendente (*riser*). A desestabilização do escoamento resulta de dois mecanismos que competem entre si: queda de pressão ao longo do *riser* (influenciada principalmente pela distribuição da fração de vazio) e compressibilidade do gás na *flowline*.

Pode-se analisar a intermitência severa através de quatro ciclos bem característicos, conforme apresentado na Fig. 1.2 (Taitel (1986)): (a) formação da golfada, (b) produção da golfada, (c) penetração de gás e (d) expulsão de gás. Caso não ocorra a intermitência severa, o estado permanente é alcançado e a Fig. 1.2(e) representa esse cenário.

No primeiro estágio, chamado de formação da golfada, o líquido proveniente da *flowline* acumula-se na base do *riser*, bloqueando a passagem de gás e fazendo com que o gás seja comprimido. Quando a altura do líquido atinge o topo do *riser*, o segundo estágio tem início com a movimentação da golfada para dentro do separador. Após o gás que estava bloqueado na *flowline* alcançar a base do *riser*, a golfada de líquido continua a adentrar o separador, mas com uma velocidade maior, o que caracteriza o estágio de penetração de gás. No último estágio, a bolha de gás atinge o topo do *riser*, ocorrendo uma violenta expulsão de gás e rápida decompressão, fazendo com que o líquido restante no *riser* recue para a base do tubo e o processo de formação da golfada reinicie.

Devido às flutuações das variáveis de controle do processo em uma plataforma, por exemplo, a pressão e o nível de líquido, a intermitência severa causa diversos transtornos operacionais e pode, em alguns casos, ocasionar o fechamento dos poços. Uma golfada severa de líquido que atinja o nível limite do separador ou um bolsão de gás que atinja o limite superior de pressão do separador acarreta o fechamento do poço com sérios transtornos operacionais. De acordo com Wordsworth et al. (1998), as consequências indesejáveis relacionadas com a intermitência severa são: (a) aumento da pressão na cabeça do poço, causando perdas de produção, (b) grandes vazões instantâneas, causando instabilidade no sistema de controle de líquido dos separadores e eventualmente paralisação da produção (*shutdown*), e (c) oscilações de vazão no reservatório. Consequentemente, prever e evitar a ocorrência da intermitência severa durante o projeto das instalações de exploração tem se tornado uma atividade indispensável, de maneira a assegurar produção contínua em níveis desejáveis, visando a lucratividade do empreendimento (Lorimer e Ellison (2000)).

Em sistemas já projetados em que se observa a ocorrência de instabilidades pode-se atuar em algumas variáveis de controle para mitigar os efeitos das oscilações como mostrado

Figura 1.2: Estágios do ciclo de intermitência severa. Reproduzido de [Taitel \(1986\)](#).

em sistemas reais de petróleo em Guerrero-Sarabia e Fairuzov (2013). A literatura também reporta experimentos e estudos teóricos para sistemas água-ar (Taitel (1986), Baliño, Burr e Nemoto (2010)) em que o aumento da pressão no separador, ou o aumento da pressão no topo do *riser*, tem efeito estabilizante; ou seja, aumentando-se a pressão no separador, observou-se a extinção da intermitência severa em casos nos quais o fenômeno ocorria. Há também relatos na literatura em que o uso de uma válvula *choke* (válvula que restringe o escoamento) no topo do *riser* levou à estabilização do escoamento água-ar em sistemas *flowline-riser* (Jansen, Shohan e Taitel (1996), Yocum (1973), Schmidt, Brill e Beggs (1980)). Outra técnica que permite eliminar a intermitência severa é o *gas-lift*, que consiste na injeção contínua de gás na base do *riser* (Jansen, Shohan e Taitel (1996), Schmidt, Doty e Dutta-Roy (1985)) ou na coluna de produção (Guerrero-Sarabia e Fairuzov (2013), Poblano, Camacho e Fairuzov (2005)).

1.2 A intermitência severa na produção de petróleo

Os modelos analíticos propostos para o estudo da intermitência severa em sistemas *flowline-riser* foram obtidos em geral para escoamento água-ar. Schmidt, Doty e Dutta-Roy (1985), Fabre et al. (1990), Taitel et al. (1990), Sarica e Shoham (1991), Baliño, Burr e Nemoto (2010), Mokhatab (2010) e Azevedo, Baliño e Burr (2015b) são alguns dos autores que investigaram o comportamento deste escoamento bifásico e propuseram diferentes métodos para determinar a estabilidade do sistema. As simulações numéricas e experimentos relatados na literatura utilizam água e ar como fluidos escoantes por questão de simplicidade. Embora os aspectos básicos da intermitência severa possam ser levados em consideração através de sistemas água-ar, existem muitas limitações ao se tentar extrapolar os resultados para sistemas de produção de petróleo. O comprimento da *flowline* e a altura do *riser* em sistemas de produção de petróleo são muito maiores (da ordem de quilômetros) que os valores observados nas instalações experimentais que se utilizam de ar e água. Assim, os níveis de pressão observados no escoamento de petróleo são muito diferentes dos modelos água-ar. As grandes razões entre a pressão na base e no topo do *riser* dão origem a importantes efeitos de expansão na fase gasosa, invalidando modelos baseados na suposição de uma fração de vazio constante no *riser* (Baliño, Burr e Nemoto (2010), Nemoto (2012)).

O próprio fluido (petróleo) apresenta importantes fenômenos que são desconsiderados em sistemas água-ar pela pouca relevância nesses sistemas. Água e ar são substâncias puras, enquanto o petróleo é composto de múltiplos hidrocarbonetos, sendo que as fases líquida e gasosa coexistem em condições de operação (McCain (1990)). A transferência de massa entre as fases é um fenômeno importante no escoamento do petróleo e é dependente da pressão e temperatura

locais, sendo, portanto, as vazões de gás e óleo dependentes do diagrama de fases ou diagrama pressão-volume-temperatura (PVT) do fluido em questão. Com as altas variações de pressão ao longo do *riser*, os efeitos da transferência de massa não podem ser ignorados como é feito no sistemas água-ar. Além disso, os hidrocarbonetos provenientes do reservatório estão misturados à água, de maneira que três fases ocorrem em geral (Rosa, Carvalho e Xavier (2006)). Há de se considerar também a formação de emulsão, a qual acarreta mudanças significativas no escoamento. A emulsão apresenta alta viscosidade, diversas vezes superior à do óleo que deu origem à mesma. Assim, embora os modelos água-ar sejam muito úteis para compreender os fenômenos de intermitência severa, modelos desenvolvidos para escoamento de petróleo são necessários para reduzir as incertezas nas previsões da estabilidade.

Os modelos de estabilidade ou de intermitência, sejam esses mais simplificados (água-ar) ou mais sofisticados (petróleo), indicam que uma forma de se reduzir significativamente as instabilidades é evitar trechos descendentes, como visto na Seção 1.1. Nos projetos de desenvolvimento da produção de petróleo procura-se reduzir os potenciais problemas de intermitência severa posicionando a plataforma de produção e distribuindo as linhas de produção de forma a manter os poços em escoamento ascendente em toda extensão no leito submarino. Nem sempre essa distribuição de geometria é possível devido a diversos fatores como as características topográficas de fundo. Além disso, os próprios *risers* de produção podem apresentar trechos descendentes como ocorre com o *risers* do tipo *lazy wave*. Uma estrutura de *riser lazy wave* está apresentada na Seção 5.1 através da Fig. 5.1. A Fig. 1.3 apresenta uma geometria de um poço produtor de petróleo. Nota-se que existe um trecho levemente descendente de aproximadamente 1500 m logo após a ANM. A Fig. 1.4 apresenta as oscilações de pressão observadas em 3 pontos notáveis do escoamento (fundo do poço, ANM e plataforma) mostrando a natureza transiente de produção desse poço. Nesses três pontos existem sensores de pressão que registram a pressão em curtos espaços de tempo, da ordem de alguns segundos. Observa-se que para esse poço ocorrem oscilações da ordem de 5 bar na plataforma, mas com eventos de menor frequência que podem atingir mais de 80 bar. Essas oscilações dificultam o controle do processo, acarretam perdas de produção e aumentam os riscos operacionais. A previsão desse comportamento na fase de projeto é importante para se projetar mecanismos mitigadores. Além disso, essa previsão é importante para que a curva de produção e os custos de produção sejam mais realistas face aos problemas operacionais desse sistema os quais acarretam perdas de produção e maiores custos. Modelos simples (aplicáveis à indústria) que consigam prever a estabilidade dos poços podem trazer significativos benefícios aos projetos e na operação de produção de petróleo.

Figura 1.3: Geometria de um poço de petróleo que apresenta instabilidades.

1.3 Objetivos

Esse trabalho tem por objetivo principal desenvolver um modelo de estabilidade para avaliar a estabilidade do escoamento multifásico através da teoria das pequenas perturbações e confrontar o modelo com dados de campo. Assim, será desenvolvida uma metodologia matemática para avaliar se uma determinada condição operacional é estável ou instável. A condição instável poderia conduzir à ocorrência da intermitência severa, que é um fenômeno indesejável na operação da produção de petróleo. O modelo tem por base uma técnica matemática chamada teoria da estabilidade linear, a qual será aplicada num modelo de escoamento de petróleo com transferência de massa e compressível tanto na fase líquida como na fase gasosa. Serão construídos mapas de estabilidade caracterizando, para diversas condições operacionais, em quais regiões do espaço de parâmetros uma determinada condição conduzirá ao fenômeno indesejável. Como objetivos específicos citam-se:

- Implementar um modelo *black-oil*, o qual será parte do modelo estacionário;

Figura 1.4: Instabilidades de um poço de petróleo em três seções observadas.

- Desenvolver um modelo estacionário, o qual será a base do modelo de estabilidade, e confrontá-lo com dados de campo;
- Desenvolver um modelo de estabilidade linear com base na teoria das pequenas perturbações;
- Confrontar curvas de estabilidade obtidas através do modelo de estabilidade linear com curvas de estabilidade obtidas através de simulações transientes;
- Confrontar o modelo dinâmico com pontos operacionais de produção em campo;
- Avaliar a capacidade do modelo dinâmico de estabilidade de capturar curvas de estabilidade para diferentes configurações de sistemas de produção;
- Avaliar o modelo dinâmico com diferentes modelos *drift-flux* e velocidades de campo que compõe o termo de atrito multifásico.

1.4 Estrutura da tese

No Capítulo 1 foi feita a introdução. O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica do escoamento multifásico, dos modelos de intermitência severa, dos critérios de estabilidade, do método da estabilidade linear e uma contextualização na indústria de E&P. Em seguida, no Capítulo 3 apresenta-se os modelos matemáticos do sistema de escoamento e as correlações utilizadas para o cálculo das propriedades dos fluidos. As equações do modelo proposto devem ser discretizadas de modo a possibilitar a resolução numérica das mesmas, tal procedimento é apresentado no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta os resultados das simulações numéricas utilizando o modelo proposto, o que possibilitou obter mapas de estabilidade e compará-los com os mapas obtidos pelo modelo transiente de Nemoto (2012). Além disso, dados de campo foram utilizados para avaliar o modelo estacionário e o próprio modelo de estabilidade. Ainda no Capítulo 5, mapas de estabilidade são apresentados em um estudo paramétrico para mostrar a influência de diferentes variáveis geométricas e relacionadas à caracterização dos fluidos sobre a ocorrência da intermitência severa. Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e futuras atividades são propostas. Além da estrutura base da tese que é dividida em 6 capítulos, 10 apêndices são anexados onde é mostrado em detalhes o equacionamento de cada parte do modelo. No Apêndice A é apresentado o modelo de fluidos. No Apêndice B são apresentados os modelos *drift-flux* e multiplicadores de duas fases utilizados na tese. No Apêndice C é deduzido o termo de transferência de massa. No Apêndice D é apresentada a dedução do modelo estacionário. No Apêndice E é apresentada a dedução do modelo matricial. No Apêndice F é apresentada a dedução do modelo das perturbações. No Apêndice G é apresentada a dedução do modelo discretizado para as simulações numéricas. No Apêndice H são apresentadas as deduções de cada derivada do sistema perturbado e finalmente no Apêndice I é apresentada a dedução do modelo estratificado e também o critério de determinação do regime estratificado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será feita uma revisão bibliográfica, dando continuidade à introdução feita inicialmente. Aqui será abordada com maior profundidade a modelagem do escoamento multifásico, a modelagem da intermitência severa e a análise da estabilidade do escoamento multifásico de petróleo. A abordagem inicial sobre o escoamento multifásico foi considerada importante nessa revisão visto que toda a base do modelo de estabilidade (o estado estacionário) está ancorada nos modelos de escoamento multifásico o que inclui a caracterização de fluidos. As demais seções estão relacionadas diretamente à análise de estabilidade do escoamento.

2.1 Modelagem de escoamentos multifásicos

Para se avaliar a estabilidade do escoamento multifásico é necessário primeiramente o desenvolvimento do modelo físico do escoamento, o qual se constitui das equações de balanço de massa, de quantidade de movimento linear, de energia e do próprio modelo de fluidos. Entretanto a modelagem dos sistemas de escoamento multifásico em tubulações envolve diversos fenômenos complexos e acoplados tais como: escorregamento de fases, processos termodinâmicos de equilíbrio de fases, transferência de calor, variação das propriedades dos fluidos ao longo do escoamento, entre outros, e simplificações são necessárias ([Shoham \(2006\)](#)). Para modelar esses sistemas dois tipos de modelos são utilizados: modelos de fases separadas (ou modelo de dois fluidos ou ainda modelos mecanicistas) e modelos de mistura. Como sumarizado por [Ishii e Hibiki \(2006\)](#), o balanço de massa, quantidade de movimento linear e energia em cada fase que são considerados nos modelos de dois fluidos, são governadas por dois conjuntos de equações de conservação (gás-líquido). Entretanto, existe interação entre as fases como a troca de massa, a existência de tensões interfaciais e a ocorrência do próprio escorregamento entre as fases o que as tornam dependentes. Como resultado um sistema de escoamento bifásico (líquido-gás) em termos macroscópicos pode ser descrito por seis equações diferenciais com mais três equações de interface. Por outro lado, os chamados modelos de mistura consideram uma ponderação entre as fases para determinar a fase da mistura. A equação de quantidade de movimento linear

é então escrita para a mistura. Neste caso, quatro equações de balanço (duas de massa, uma de quantidade de movimento linear e uma de energia) com uma equação adicional de interface são usados para modelar a mistura das fases, as trocas de massa e as trocas de quantidade de movimento linear, tornando essa modelagem bem mais simples que a anterior. Uma vantagem dos modelos de dois fluidos é que os processos de transferência de cada fase são modelados usando equações de balanço individualmente onde é esperado um melhor cômputo das trocas e iterações entre as fases do que nos modelos de mistura. Entretanto dois fatores tornam os modelos de dois fluidos complexos para aplicações industriais: (i) o número de equações e (ii) a necessidade de equações constitutivas para fechamento do modelo. Já os modelos de mistura têm como premissa computar a mistura das fases como um todo ao invés de separar as fases. Assim, os modelos de mistura têm vantagem em termos de simplicidade sobre os modelos de dois fluidos, mas consideram simplificações importantes na sua formulação e podem acarretar desvios significativos nas extrapolações. Embora essa limitação exista, esses modelos, pela simplicidade na sua formulação, são muito interessantes e muito utilizados na indústria e podem gerar resultados satisfatórios (Ishii e Zuber (1970), Ishii e Hibiki (2006)).

Os modelos de mistura são classificados na literatura em classes A, B e C (Brill e Mukherjee (1999), Shippen e Bailey (2012)). Esses modelos procuram representar os complexos fenômenos que ocorrem no escoamento multifásico usando um conjunto reduzido de parâmetros, frequentemente ajustados aos dados medidos em condições controladas de laboratório. Muitos desses testes para determinação dessas correlações foram obtidos em tubulações de pequeno diâmetro, sistemas em baixas pressões e fluidos água-ar. Espera-se, assim, desvios significativos em relação aos sistemas reais de produção de petróleo, cuja geometria é muito diferente, fluidos, em termos de viscosidades e das condições de equilíbrio de fase, muito distintos das condições laboratoriais e existência de altas pressões. Os modelos da classe A são modelos homogêneos nos quais não se considera um dos fenômenos fundamentais do escoamento multifásico: o escorregamento de fases. O modelo de Baxendell e Thomas (1961) é um exemplo desse grupo bastante citado na literatura. Modelos da classe B consideram o escorregamento, mas não consideram os padrões de escoamento ou mapas de escoamento, outro típico fenômeno que ocorre no escoamento multifásico. Apesar dessas simplificações, modelos da classe B ainda são vastamente utilizados na indústria, como o modelo de Hagedorn e Brown (1965) o qual é, em alguns simuladores comerciais de petróleo e quando condicionado a algumas correções, considerado como padrão para escoamento vertical ascendente. Já os modelos da classe C são modelos que incorporam não só o escorregamento, mas também os mapas de escoamento. Há uma maior complexidade nesses modelos em relação aos anteriores (classes A e B), mas são também vastamente utilizados na indústria, como o modelo de Beggs e Brill

(1973). O modelo de Beggs e Brill é também considerado como padrão em muitos simuladores e pode ser utilizado para escoamento horizontal, inclinado e vertical tanto ascendente como descendente.

Além desses modelos clássicos frequentemente utilizados na indústria de petróleo, há outra categoria de modelos de mistura que vem sendo investigados na indústria de petróleo. São os modelos *drift-flux*, também chamados de correlações de fração de vazio. São funções algébricas que relacionam a fração de vazio com dois parâmetros de distribuição e as velocidades superficiais das fases líquido e gás (Zuber e Findlay (1965)). Diferentes equações são propostas na literatura para equacionar os dois parâmetros de distribuição do modelo *drift-flux* resultando em muitas correlações, como apresentado por Woldesemayat e Ghajar (2007) e Bhagwat e Ghajar (2012). A modelagem por *drift-flux* é vastamente utilizada na Engenharia Nuclear e tem mostrado resultados promissores também na indústria de petróleo, como em estudos recentes apresentados por Baliño, Burr e Nemoto (2010), Nemoto e Baliño (2012), Choi et al. (2013) e Vieira e Garcia (2014).

Modelos *drift-flux* baseados em dados experimentais tem sido investigados e desenvolvidos por vários autores desde 1965 quando o modelo original foi proposto por Zuber e Findlay (1965). Alguns estudos importantes desses modelos nas últimas décadas foram desenvolvidos por Fabre e Liné (1992), Prado (1995), Coddington e Macian (2002), Goda et al. (2003), Choi et al. (2012) e Adekomaya (2014). Choi et al. (2012) resumiram alguns estudos *drift-flux*, tais como o estudo de Coddington e Macian (2002) em que os autores compararam a precisão de algumas correlações com experimentos realizados em nove instalações experimentais em uma ampla faixa de vazões e pressões, mostrando potencial uso das correlações *drift-flux* no escoamento multifásico.

Significativa parte das correlações *drift-flux* são para escoamento ascendente, porém, a ocorrência de golfadas severas está relacionada ao escoamento descendente. Goda et al. (2003) propuseram uma equação constitutiva para a distribuição de parâmetros para incorporar os efeitos do escoamento descendente. Nessa linha, Fabre e Liné (1992) introduziram uma correlação para determinação dos parâmetros em função do número de Reynolds da fase líquida, mostrando bom ajuste aos dados experimentais na zona de transição entre o escoamento laminar e turbulento.

Embora a classificação anteriormente apresentada seja do ponto de vista didático interessante, nem sempre os modelos encontrados na literatura podem ser classificados em apenas um grupo. Existem modelos, por exemplo, que são semi-mecanicistas, estando classificados entre as classes C e mecanicistas, (Aziz, Govier e Forgarasi (1972)). Os próprios modelos

drift-flux podem apresentar em sua formulação equações para a determinação dos parâmetros de distribuição em função dos mapas de escoamento. Porém, alguns modelos *drift-flux* mais simplificados não fazem essa distinção e adotam a abordagem da classe B para determinar um único conjunto de parâmetros. Uma classificação trazendo o histórico dos modelos de escoamento multifásico, categorizando em classes A, B, C, *drift-flux* e mecanicistas, pode ser encontrada em [Shippen e Bailey \(2012\)](#).

O grande número de correlações *drift-flux* existentes na literatura mostram as incertezas existentes na modelagem da fração de vazio, embora diversos estudos com base experimental tenha trazido uma melhora significativa nessas correlações à medida que mais variáveis do escoamento são incorporadas nos parâmetros de distribuição dessas correlações. Na linha das incertezas existentes na modelagem do escoamento multifásico um dos fatores de incertezas nos modelos de mistura está relacionado à velocidade de campo, ou na velocidade representativa da mistura que compõe os termos de inércia e de atrito. Uma forma de avaliar essa variável é através da abordagem do multiplicador de duas fases ([Wallis \(1969\)](#)). Essa abordagem incorpora as incertezas na modelagem da velocidade da mistura no multiplicador e diferentes modelos empíricos tem sido vastamente investigados para melhor representar esse parâmetro, ([Lockhart e Martinelli \(1949\)](#), [Chisholm \(1973\)](#), [Friedel \(1979\)](#), [Muller-Steinhagen e Heck \(1986\)](#)). Recentemente [Vieira e Garcia \(2014\)](#) apresentaram uma análise sobre o assunto comparando o gradiente de pressão teórico com dados experimentais obtidos em laboratório em baixas condições de pressão. Os autores consideraram modelos de mistura das classes B e C, além de modelos *drift-flux* e para esses modelos consideraram duas abordagens da velocidade da mistura: (i) velocidade do centro de massa e (ii) a velocidade do centro do volume. Os autores mostraram que, embora a abordagem do centro de massa tenha convergido para resultados mais satisfatórios, os resultados das duas abordagens ainda apresentaram desvios significativos em relação aos dados experimentais. De acordo com [Ishii e Hibiki \(2006\)](#) a primeira abordagem é baseada na conservação do momento linear e a segunda abordagem é baseada na conservação do fluxo volumétrico. A incorporação do multiplicador de duas fases no modelo pode ser interessante, pois permite testar diferentes modelos e, na presença de dados experimentais pode-se escolher o modelo de melhor desempenho reduzindo as incertezas na modelagem.

Assim, devido à complexidade do escoamento multifásico simplificações são adotadas, principalmente nos modelos de escoamento para aplicações industriais. Nessa linha um dos pontos de atenção está na modelagem dos fluidos. Isso se deve à complexidade dos compostos que compõem o petróleo. Esses compostos apresentam uma grande heterogeneidade de cadeias e frações nos diferentes petróleos, a ponto de poder se afirmar que não existem dois petróleos iguais assim como não existe dois vinhos iguais ([Andreolli \(2016\)](#)). A depender das

condições de pressão e temperatura o petróleo oriundo do reservatório pode se apresentar nas três fases da matéria em equilíbrio termodinâmico. Modelar corretamente esses compostos em função das condições termodinâmicas locais do escoamento é fundamental para reduzir as incertezas na modelagem do escoamento. Essa modelagem pode ser composicional ou *black oil* (McCain (1990)). Modelos composicionais são utilizados para óleos leves, usualmente acima de °API 30 e é essencial em alguns casos tais como na modelagem de fluidos retrógrados (ocorrência de condensação com redução da pressão). No caso de óleos mais pesados existe uma fração considerável de componentes com peso molecular elevado e com cadeias complexas com muitas ramificações. Nesse caso a caracterização componente a componente se torna proibitiva (Danesh (1998)). Para esses óleos, frequentemente são utilizados modelos *black-oil*, os quais consideram que os hidrocarbonetos são compostos somente por dois componentes: gás e óleo (Velarde, Blasingame e McCain (1999)). Nessa modelagem são incorporadas diversas correlações empíricas as quais foram determinadas para um range de dados experimentais e o propósito é determinar as propriedades dos fluidos como função das condições termodinâmicas locais do escoamento (Kartoatmodjo e Schmidt (1994)).

2.2 Modelagem da intermitência severa na indústria de petróleo

A maior parte dos estudos de intermitência severa foram desenvolvidos para *risers* verticais, onde se admite escoamento unidimensional, isotérmico e com uma equação de quantidade de movimento linear para a mistura na qual se considera relevante apenas o termo gravitacional. Além disso, os fluidos utilizados nesses sistemas são geralmente água-ar em baixas pressões onde se admite a incompressibilidade da fase líquida e a inexistência da transferência de massa. Assim, os modelos resultantes apresentam, normalmente, muitas simplificações para capturar os fenômenos reais que ocorrem nos sistemas de produção de petróleo (Azevedo (2017)). Embora esses modelos possuam muitas simplificações em suas formulações eles são importantes na indicação, ao menos qualitativamente, das variáveis que interferem na estabilização do escoamento multifásico de petróleo e no entendimento do fenômeno. Entre esses modelos que possuem relevante importância na evolução dos modelos de intermitência severa mais sofisticados estão: Schmidt, Brill e Beggs (1980), Schmidt, Doty e Dutta-Roy (1985), Taitel (1986), Taitel et al. (1990) e Sarica e Shoham (1991).

Schmidt, Brill e Beggs (1980) estudaram sistemas *flowline-riser* de pequeno diâmetro, 5,08 cm e comprimento de 30,48 m de *flowline* e 15,24 m de *riser* com fluido água-ar, sendo a inclinação da *flowline* variável entre -5° e 5° com a horizontal. Os fluidos utilizados foram ar

e querosene. Através de diversas medições e observações, os autores propuseram um modelo matemático de como a golfada de líquido é gerada na base do *riser*. As variáveis investigadas no modelo foram: a altura do líquido na *flowline* e *riser*, a velocidade do gás, a pressão na *flowline* e o tempo para formação da golfada de líquido no *riser*. Nesse modelo foi considerado que a força predominante envolvida no fenômeno é a gravidade e, devido ao movimento lento do líquido durante a formação da golfada foram considerados desprezíveis o atrito e a aceleração. Outras simplificações foram consideradas na formulação desse modelo: vazão mássica de gás e líquido na entrada da *flowline* e pressão no separador constantes, não há bolhas de gás nas golfadas de líquido, fração volumétrica de líquido uniforme ao longo de todo o comprimento da *flowline*, interfaces de gás e líquido horizontais, e processo isotérmico. O modelo proposto pelos autores indicou apenas a ocorrência da intermitência severa quando a *flowline* apresentava ângulo negativo e *riser* com ângulo positivo. Além desse resultado, os autores observaram que o aumento da pressão no topo, por exemplo, através da instalação de válvula reguladora de pressão, reduz a ocorrência do fenômeno. Embora o modelo de Schmidt, Brill e Beggs (1980) seja bastante limitado, o mesmo foi capaz de capturar duas variáveis que de fato interferem no fenômeno da intermitência severa: inclinação da *flowline* e a pressão no topo do *riser*.

Assim como observado por Schmidt, Brill e Beggs (1980), Schmidt, Doty e Dutta-Roy (1985) observaram que a ocorrência das golfadas na base do *riser* está condicionada à *flowline* apresentar trecho descendente. Além disso, os autores observaram que a ocorrência do fenômeno também está condicionada à formação do padrão de escoamento estratificado na *flowline*. Os autores analisaram a estabilidade através do balanço de forças no escoamento do fluido entre *riser* e *flowline* e indicaram três condições para eliminar a intermitência severa: (i) evolução do padrão de escoamento de estratificado ondulado para disperso ou golfada, (ii) aumento da vazão de gás na base do *riser* de forma a compensar o aumento da pressão na base do *riser* devido ao escorregamento do líquido no *riser* e da própria entrada de líquido oriundo da *flowline*, e (iii) evolução da estabilidade no *riser* através do aumento da vazão volumétrica de gás com consequente redução da pressão no *riser*. Esses resultados indicam que baixas velocidades das fases propiciam a formação de instabilidades do escoamento. Esses resultados também foram apontados posteriormente por Taitel (1986), que propôs um critério de estabilidade determinado pelo balanço de forças no líquido presente no *riser* no início da fase de expulsão do gás. Segundo os autores, a compressibilidade do gás é o que gera a força de expulsão do líquido da *flowline* e a pressão no topo do *riser* mais a pressão da coluna de líquido no *riser* atuam no sentido contrário à expulsão. Assim, se no momento em que o gás penetra no *riser*, a força oriunda da *flowline* (compressibilidade do gás) supera a força oriunda do *riser* (pressão do separador mais coluna estática de líquido), o sistema será instável. Note-se que esse resultado indica que um aumento

na pressão de separação tem resultado positivo na estabilização do sistema. Esse resultado está de acordo com os obtidos em estudos anteriores e em resultados observados na indústria de petróleo, como apontado em [Torre et al. \(1987\)](#), [Alhanati et al. \(1993\)](#), [Fairuzov \(2001\)](#) e [Guerrero-Sarabia e Fairuzov \(2013\)](#). O critério de estabilidade proposto por [Taitel \(1986\)](#), onde a geometria considerada é representada pela Fig. 1.2, é dado pela seguinte desigualdade:

$$P_{sep} > \rho_l g (1 - \alpha) \left[\left(\frac{\alpha_p}{\alpha'} \right) l - h \right] \quad (2.1)$$

onde P_{sep} é a pressão no separador, ρ_l é a massa específica do líquido, g é a aceleração da gravidade, α é a fração de vazio média no *riser*, α_p é a fração de vazio na região estratificada da *flowline*, α' é a fração de vazio da frente de gás que penetra no líquido contido no *riser*, l é o comprimento da *flowline* e h é a altura do *riser* vertical.

O critério proposto pela desigualdade da Eq. (2.1) indica que o aumento da pressão no separador até o nível em que a desigualdade é satisfeita, a intermitência severa será eliminada e o estado permanente será alcançado. Também a análise da Eq. (2.1) indica que o sistema se torna menos estável quanto maior o comprimento da *flowline* e mais estável quanto maior a altura do *riser*. Tipicamente os valores de α e α' se situam na faixa entre 0,8 e 1 sendo que a precisão desses valores influencia pouco nos resultados. Note que esse modelo ainda apresenta muitas simplificações como: parâmetros concentrados na *flowline* e *riser*, incompressibilidade do líquido e a inexistência de transferência de massa entre as fases.

[Sarica e Shoham \(1991\)](#) apresentaram um modelo para um sistema *flowline-riser* vertical com algumas evoluções em relação aos propostos anteriormente. Esse modelo apresenta as seguintes características: (i) escoamento unidimensional dominado pela gravidade (modelo de parâmetros distribuídos para o *riser* e de parâmetros concentrados para a *flowline*), (ii) uso de um modelo de *drift-flux* para o escoamento no *riser*; (iii) cálculo da fração de vazio na *flowline* em regime estratificado baseado no conceito de equilíbrio local e (iv) desconsideração da transferência de massa entre as fases. Esse modelo ainda é bastante simplificado em relação aos fenômenos que ocorrem na indústria de petróleo, mas mesmo assim alguns resultados importantes foram obtidos. O modelo apresentou resultados próximos aos obtidos experimentalmente por [Taitel \(1986\)](#); entretanto, observou-se um erro sistemático nos períodos da intermitência severa. Além disso, os autores observaram problemas de convergência para pontos de operação abaixo da linha de estabilidade proposta por [Taitel \(1986\)](#). A falta de convergência para esses casos teve como causa apontada pelos autores a importância, nesses cenários, dos termos inerciais na equação de quantidade de movimento linear (que não são considerados pelo modelo) frente aos gravitacionais.

Mais recentemente [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#) desenvolveram um modelo numérico buscando eliminar algumas simplificações dos modelos anteriormente propostos. Esse modelo foi posteriormente aplicado em estudos de estabilidade linear como em [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#) e [Azevedo \(2017\)](#), mostrando resultados condizentes com experimentos água-ar, como será visto na Seção 2.3. As seguintes características foram sintetizadas a partir das avaliações feitas por [Azevedo \(2017\)](#):

- Conduto descendente (*flowline*):

- Padrão de escoamento estratificado;
- Gás modelado como cavidade de pressão constante na posição, mas variável ao longo do tempo, evoluindo isotermicamente;
- Fração de vazio também constante na posição, na região com escoamento estratificado, mas variável ao longo do tempo;
- Volume de gás acrescentado para simular diferentes comprimentos equivalentes da *flowline* (recipiente *buffer*);
- Modelagem do comprimento de penetração de líquido, nas situações onde existe bloqueio de escoamento de gás na base do *riser*.

- Conduto ascendente (*riser*) de geometria variável:

- Equações de continuidade para as fases líquida e gasosa, evoluindo isotermicamente;
- Equação da quantidade de movimento para as fases escoando em conjunto, desprezando os termos de inércia. A desconsideração dos termos de inércia é aceitável visto que a resposta do sistema aos transientes de petróleo como na intermitência severa, são lentos de tal forma que as ondas de pressão podem ser desprezadas;
- Modelo de fluxo de deriva (*drift flux*) onde se considera que a relação constitutiva é válida para o ângulo de inclinação local do *riser*. Tanto a relação constitutiva quanto as transições entre padrões de escoamento (*slug*, *bubbly*, anular) são funções do ângulo de inclinação local;
- Localização (*tracking*) do nível de líquido e da fronteira de fração de vazio.

As características deste modelo permite simular uma grande variedade de dados experimentais encontrados na literatura para sistemas água-ar em *risers* verticais. Além disso,

baseado na existência ou não do fenômeno de desestabilização do comportamento dinâmico do sistema, é possível determinar as regiões para as quais o sistema é estável ou instável, ou seja, determinar uma envoltória que separa a região estável da região instável. Essa envoltória é conhecida como mapa de estabilidade e pode ser determinada numericamente através de simulações transientes (na força bruta) a partir de um modelo de escoamento. No trabalho de [Azevedo \(2017\)](#) a base desse modelo de escoamento foi utilizada e o modelo resultante adaptado para ser aplicado para análise de estabilidade linear (tema dessa tese) em diversos sistemas água-ar com resultados bastante satisfatórios. Embora o modelo proposto por [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#) e adaptado por [Azevedo \(2017\)](#) apresente grande evolução frente aos modelos anteriores água-ar, esse modelo ainda apresenta limitações importantes para aplicações em sistemas de petróleo, tais como: desconsideração da compressibilidade da fase líquida, transferência de massa entre as fases, consideração de apenas duas fases e parâmetros concentrados na *flowline*. Na linha do desenvolvimento de modelos mais realistas para a indústria de petróleo para a análise da estabilidade, [Nemoto \(2012\)](#) desenvolveu, a partir do modelo de [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#), um modelo transiente multifásico para petróleo caracterizando fenômenos não descritos nos modelos anteriores água-ar. Entre esses fenômenos caracterizados estão a transferência de massa entre as fases, a compressibilidade da fase líquida, a consideração do escoamento de três fases (água, óleo e gás) e a modelagem *black-oil* de fluidos. Ainda assim o modelo apresenta duas importantes limitações que são: (i) a consideração de parâmetros concentrados na *flowline* e (ii) a desconsideração das ondas acústicas por desprezar os termos de inércia na equação de quantidade de movimento, ou seja, modelo *no-pressure-wave* ([Masella et al. \(1998\)](#)). Mesmo com essas simplificações, o autor obteve curvas de estabilidade em toda a região do espectro de velocidades superficiais de gás e líquido como pode ser visto na Fig. 2.1, a qual mostra uma curva de estabilidade para um caso específico simulado. No modelo proposto na presente tese a primeira limitação foi eliminada tornando o modelo de escoamento mais representativo para o desenvolvimento do modelo de estabilidade linear. No Capítulo 5 é feita uma comparação da curva de estabilidade gerada pelo modelo transiente de [Nemoto \(2012\)](#) com o modelo de estabilidade linear proposto na presente tese.

Figura 2.1: Curva de estabilidade obtida por [Nemoto \(2012\)](#); j_{o0} e j_{g0} representam, respectivamente, as velocidades superficiais do óleo e do gás.

Devido aos extensos intervalos das velocidades superficiais em condições de superfície, a plotagem dos mapas de estabilidades são em geral realizados em escala log-log o que permite uma melhor visualização do mapa. A curva delimita a fronteira de estabilidade. Na região interna da curva da Fig. 2.1 situam-se os pontos de operação instáveis. Já na região externa situam-se os pontos estáveis.

É também importante observar a curvatura da parte superior da curva de estabilidade. Para baixas velocidades de gás observa-se que a região instável é reduzida com a curva apresentando comportamento descendente na direção da origem dos eixos. Esse fato ocorre pelo efeito da solubilização do gás no óleo. No caso de fluidos água-ar, a região instável é ampliada com a curva superior tendendo à horizontal como observado por [Azevedo \(2017\)](#). Esse efeito da solubilização do gás foi capturado pela curva de estabilidade, tanto no modelo transiente de [Nemoto \(2012\)](#) (Fig. 2.1) como no modelo de estabilidade proposto nessa tese conforme será

visto no Capítulo 5, indicando forte base física do modelo proposto.

2.3 Análise da estabilidade do escoamento multifásico

Um sistema de escoamento *offshore* é projetado para operar no estado permanente. Entretanto, é possível que essa condição não exista. A estabilidade de um sistema *offshore* depende de um conjunto de parâmetros que define o estado operacional e pode ser determinado numericamente. A solução do estado estacionário é dada como condição inicial para as simulações numéricas. Se a solução numérica não muda ao longo do tempo com a dada condição inicial, a solução estacionária é estável e este é o sistema permanente. Se a solução numérica muda com o tempo, o estado estacionário é instável, não há estado permanente e uma solução intermitente se desenvolve com o tempo. Simulações temporais para determinação da estabilidade podem ser vistas em [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#) para sistemas água-ar, e em [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) para sistemas de petróleo. [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) desenvolveram um modelo transiente multifásico para escoamento de petróleo considerando um modelo de parâmetros concentrados na *flowline* e de parâmetros distribuídos no *riser* e geometria com dimensões semelhantes às dimensões utilizadas na indústria de petróleo. A fase líquida foi modelada considerando que o óleo e a água escoam de forma homogênea (sem escorregamento entre as duas fases). A transferência de massa e a modelagem de fluidos foi considerada utilizando a modelagem *black-oil*. Para fechamento do modelo os autores utilizaram a correlação *drift-flux* de [Bendiksen \(1984\)](#). Curvas de estabilidade foram obtidas através de simulações numéricas temporais e os resultados obtidos se mostraram promissores. Essa técnica, porém, apresenta custo computacional elevado e pode ser inviável em sistemas que exijam um grande número de simulações como ocorre, por exemplo, na obtenção das curvas de produção em um projeto de desenvolvimento da produção.

Como alternativa às simulações numéricas transientes para se obter informações rápidas, porém limitadas, da estabilidade do sistema pode-se utilizar critérios simplificados de estabilidade como os propostos por [Bøe \(1981\)](#), [Taitel \(1986\)](#), [Jansen, Shohan e Taitel \(1996\)](#) e [Pots, Bromilow e Konijn \(1987\)](#). No entanto, nesses modelos, muitos fenômenos que ocorrem no escoamento de petróleo são desconsiderados e, assim, os resultados obtidos são limitados. Em [Bøe \(1981\)](#), por exemplo, um critério de estabilidade foi obtido com base na existência de um padrão de escoamento estratificado na *flowline* e um equilíbrio de pressão na base do *riser* considerando que o *riser* está completo de líquido apenas, sendo a modelagem bastante simplificada. A condição é estabelecida por meio da equalização da queda de pressão no *riser* devido à adição de líquido na parte inferior e a queda de pressão na *flowline* devido à adição de gás. Embora alguns dos critérios de estabilidade citados acima tenham sofrido evolução com

o tempo em relação aos primeiros critérios que surgiram, ainda assim eles não são deduzidos de modelos de sistemas dinâmicos completos, e sim de condições específicas nas quais muitos efeitos físicos podem ter sido desprezados e, conseqüentemente, sua aplicabilidade é limitada. Contudo, os critérios de estabilidade apresentados acima são úteis para uma primeira estimativa da região instável e são ainda hoje utilizados na indústria de petróleo ([Azevedo \(2017\)](#)).

Outra alternativa para avaliar a estabilidade do escoamento multifásico é representar os sistemas dinâmicos de uma forma mais realista, utilizar modelos mais completos de escoamento multifásico e aplicar a esses modelos a teoria da estabilidade linear. Para se avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos a partir da metodologia da estabilidade linear, é necessário um modelo dinâmico, caracterizado por um sistema de equações. A partir desse modelo dinâmico, o estado estacionário é obtido zerando suas derivadas temporais. As equações governantes são linearizadas com respeito à solução estacionária. Essas equações linearizadas determinam como as perturbações infinitesimais da solução estacionária evoluem com o tempo. A taxa de crescimento das perturbações é dada pela parte real dos autovalores do espectro e está relacionado com as equações linearizadas. Se todos os autovalores têm parte real negativa, então a solução estacionária é estável, mas, se pelo menos um autovalor tem parte real positiva, a solução estacionária é instável. Essa conclusão decorre das soluções do sistema linearizado que resultam de natureza exponencial e a evolução das perturbações vão a zero quando as exponenciais são negativas ([Andreolli, Azevedo e Baliño \(2017a\)](#)). Uma aplicação da análise de estabilidade linear para intermitência severa para escoamentos de ar-água pode ser encontrada em [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#). Dessas considerações, pode ser visto que o cálculo do estado estacionário (oriundo do sistema dinâmico) é crítico não somente para projetar a operação em estado permanente de um sistema *offshore*, mas também para a determinação da existência de tal estado permanente. Nesse aspecto é importante dar atenção não só às equações de conservação do modelo dinâmico, mas também ao modelo de fluidos e às equações de fechamento, tais como o modelo de fração de vazio (por exemplo *drift-flux*) e da transferência de massa ([Andreolli, Zortea e Baliño \(2017\)](#)).

Diversos estudos são encontrados na literatura sobre estabilidade linear aplicada ao escoamento multifásico com resultados promissores. A maior parte desses estudos foram aplicados em sistemas água-ar, como em [Zakarian \(2000\)](#), [Burr, Baliño e Azevedo \(2013\)](#), [Azevedo, Baliño e Burr \(2015a\)](#), [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#), [Azevedo, Baliño e Burr \(2015c\)](#), [Azevedo, Baliño e Burr \(2015d\)](#) e [Alwazzan e Than \(2005\)](#). Estudos aplicados diretamente ao petróleo também são encontrados na literatura, como em [Guerrero-Sarabia e Fairuzov \(2013\)](#) e [Fairuzov \(2001\)](#). Consideráveis simplificações são adotadas tanto nos modelos água-ar como nos modelos de petróleo, mesmo para os estudos mais recentes. Essas simplificações podem

conduzir a resultados limitados, embora em todos esses estudos a metodologia de estabilidade linear tem mostrado resultados promissores. Uma ou mais das seguintes simplificações foram adotadas pelos autores: desconsideração da compressibilidade da fase líquida, consideração de gás ideal, desconsideração da transferência de massa entre as fases, desconsideração do termo de inércia, modelo concentrado na *flowline* e desconsideração do termo de atrito. Mesmo para os modelos que adotam maiores simplificações como o modelo de [Zakarian \(2000\)](#), a metodologia de estabilidade linear mostrou resultados promissores. À medida que esses modelos se tornam mais completos, com equações de fechamento mais representativas da física do problema, incorporando fenômenos importantes de estabilização (como o atrito e a fração de vazio distribuída na *flowline*), essa técnica poderá ser aplicada à indústria de petróleo. Uma grande vantagem da técnica é no tempo de simulação. Curvas de estabilidade ou análises de pontos de operação para um sistema podem ser obtidos de forma bastante rápida quando comparados aos tempos em simulações transientes. Na indústria é comum se realizar análises de estabilidade do escoamento multifásico em tubulações através de modelos numéricos transientes com ferramenta computacional comercial como o através do simulador OLGA, cuja base é apresentada em [Bendiksen et al. \(1991\)](#). Porém, essas análises são bastante demoradas e em projetos cujo número de cenários a serem simulados são muitos a aplicação dessa técnica se torna impeditiva e a técnica da análise linear da estabilidade pode ser uma alternativa factível. Simuladores de escoamento, mesmo que estacionários, que incluíssem um módulo de estabilidade linear, poderiam acrescentar ganhos significativos nas simulações de cenários de produção na fase de projeto e na fase operacional.

Entre os pioneiros dessa técnica aplicada ao escoamento multifásico, embora ainda de uma forma bastante simplificada, está o trabalho de [Zakarian \(2000\)](#). O autor utilizou a análise de estabilidade linear em um sistema *flowline-riser* considerando como fluido água-ar. O modelo dinâmico utilizado foi simplificado, assim como a geometria. Na equação de quantidade de movimento linear foi considerado apenas o termo gravitacional e as variações das quantidades no *riser* se deram de forma linear no espaço. Um modelo *drift-flux* foi considerado para fechamento resultando em um sistema de equações algébrico-diferencial. A análise de estabilidade linear realizada pelo autor mostrou que quando a fronteira de estabilidade é cruzada da região estável para a região instável, o espectro apresenta dois autovalores complexos conjugados que cruzam o eixo imaginário (a parte real se torna positiva). Pode-se concluir que o fenômeno de intermitência severa pode ser visto como uma instabilidade hidrodinâmica. Os mapas de estabilidade obtidos mostraram uma boa concordância qualitativa com dados experimentais reportados na literatura, embora em alguns casos não tenha sido possível reproduzir a curva de estabilidade devido às simplificações adotadas. [Burr, Baliño e Azevedo \(2013\)](#) aperfeiçoaram

o modelo de [Zakarian \(2000\)](#) com a inclusão de efeitos de atrito e incorporando *risers* com inclinação qualquer, como *riser* em catenária. Além disso, os autores consideraram parâmetros distribuídos (discretizando a geometria em N nós) e utilizaram uma correlação *drift-flux* para fechamento do sistema de equações. Nesse modelo os autores conseguiram reproduzir a curva de estabilidade mesmo para os casos em que [Zakarian \(2000\)](#) não obteve sucesso. A conclusão dos autores, após diversas análises realizadas, foi que a melhoria do modelo tem influência significativa nos resultados de estabilidade, principalmente a consideração do termo de atrito. Estudos anteriores realizados por [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#), já mostravam a importância do termo de atrito nos modelos de estabilidade e apontaram que a desconsideração deste termo foi o responsável pela falta de convergência em modelos anteriores de [Taitel et al. \(1990\)](#) e [Sarica e Shoham \(1991\)](#).

Mais recentemente, [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#) realizaram um estudo numérico dos efeitos de mecanismos de mitigação sobre a estabilidade do estado estacionário para um escoamento água-ar em sistemas *flowline-riser*, com geometria vertical e em catenária. Os seguintes mecanismos foram investigados: injeção de gás na base do *riser*, utilização de válvula de *choke* e variação das condições de contorno. Esses mecanismos de mitigação são utilizados rotineiramente na produção de petróleo para estabilização de poços, como mostrado em [Torre et al. \(1987\)](#), [Alhanati et al. \(1993\)](#), [Hu \(2004\)](#) e [Guerrero-Sarabia e Fairuzov \(2013\)](#). O modelo matemático proposto por [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#) é uma extensão do modelo de [Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#) com a inclusão dos dispositivos de mitigação. Esse modelo considera equações de balanço de massa de gás e de líquido e uma equação de balanço da quantidade de movimento linear simplificada para a mistura, desprezando-se a inércia (NPW), além de uma equação *drift-flux* para fechamento. A injeção de gás foi feita na base do *riser* e um modelo de válvula de *choke* posicionada no topo do *riser* foi considerado. A partir desse modelo modificado foi aplicada a análise de estabilidade linear. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados experimentais presentes na literatura apresentando uma excelente concordância e mostrando potencial uso da metodologia.

Embora os resultados obtidos com a metodologia de estabilidade linear mostrem resultados promissores, simplificações nos modelos base acarretam desvios importantes que devem ser avaliados. Uma das simplificações mais comuns adotadas nos modelos descritos na literatura sobre a análise de estabilidade é a consideração de parâmetros concentrados na *flowline*. Essa abordagem pode apresentar inconsistências na determinação da curva de estabilidade real, como mostrado por [Azevedo, Baliño e Burr \(2015a\)](#). Os autores estenderam o modelo anterior de [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#) para comparar três diferentes abordagens para a *flowline*: (i) um modelo a parâmetros concentrados simplificado, usado na maioria dos modelos da literatura,

no qual a fração de vazio é considerada constante; (ii) um modelo a parâmetros concentrados, mas que permite a variação da fração de vazio; e (iii) um terceiro modelo que considera parâmetros distribuídos, adotando a mesma abordagem matemática utilizada para modelagem do *riser*. A conclusão foi que, para maiores comprimentos *buffer*, os modelos apresentam diferenças significativas e a simplificação usual da fração de vazio na *flowline* e fração de vazio constante, não é suficiente para capturar a estabilização no trecho superior do mapa de estabilidade. Segundo os autores o modelo a parâmetros distribuídos fornece melhores resultados, pois além de permitir flutuações da fração de vazio, ele é mais realístico do que os modelos a parâmetros concentrados, também permitindo a propagação de ondas de fração de vazio e variações das variáveis de estado com a posição ao longo da *flowline*.

2.4 Conclusões da revisão bibliográfica

Apesar da evolução observada nos modelos de estabilidade linear aplicada a sistema água-ar na última década, importantes fenômenos que ocorrem no escoamento de petróleo não estão considerados na base dos modelos água-ar sobre os quais a metodologia de estabilidade linear é aplicada. Assim, é necessário modificar o modelo de escoamento multifásico incorporando os principais fenômenos envolvidos, incluindo a modelagem de fluidos de substâncias compostas como ocorre com o petróleo ([Andreolli \(2016\)](#)). O modelo de [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) é um modelo transiente de gás-óleo-água, desenvolvido para escoamento multifásico de petróleo *flowline-riser*. Esse modelo apresenta parâmetros concentrados na *flowline* e distribuídos no *riser*. Na presente tese, o modelo é modificado incorporando parâmetros distribuídos em todo sistema *flowline-riser*, além da incorporação de outros modelos de fechamento como diferentes modelos *drift-flux* e de velocidade da mistura no termo do atrito. A modelagem estacionária é confrontada com dados de campo em sistemas reais de produção de petróleo como sintetizados em [Andreolli, Zortea e Baliño \(2017\)](#) para a escolha adequada das equações de fechamento. A teoria de estabilidade linear é então aplicada e avaliada para diversos sistemas reais de produção de petróleo, confrontando também com dados de campo, como apresentado em [Andreolli, Azevedo e Baliño \(2017a\)](#) e [Andreolli, Azevedo e Baliño \(2017b\)](#). A presente tese pode servir de base para a inserção de um módulo de estabilidade nos simuladores comerciais de escoamento multifásico. Assim, ao realizar análises de estado estacionário, o módulo de estabilidade poderia ser útil para avaliar se as soluções estacionárias de fato existem. A metodologia, se torna viável do ponto de vista de execução, mesmo nos cenários de grande número de simulações, pelo rápido tempo de resposta. Essas análises podem ser úteis tanto em projetos como na otimização da produção de petróleo.

3 MODELO

Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos adotados. As equações são apresentadas sem o algebrismo que deu origem a elas. As deduções podem ser encontradas nos respectivos apêndices.

O sistema apresentado é de produção de petróleo no mar em águas profundas, cuja complexidade exige simplificações. Assim, diversas simplificações na modelagem foram realizadas e abordadas nesse capítulo. No presente capítulo serão apresentados os seguintes tópicos: sistema de produção considerado, as equações de balanço de massa e quantidade de movimento linear, as leis de fechamento onde as simplificações são abordadas, o modelo principal na forma matricial (que inclui as simplificações) e, finalmente, o modelo perturbado originado da aplicação da teoria de estabilidade linear ao modelo principal matricial.

3.1 Modelagem do sistema de produção

A modelagem adotada na presente tese considera que o escoamento é unidimensional e trifásico em todo sistema de produção. Considera-se que óleo e água possuem a mesma velocidade e estão homogeneizados. A hipótese de fases homogeneizadas baseia-se no fato de que as massas específicas das fases possuem a mesma ordem de grandeza. Essa simplificação permite escrever o sistema de equações de balanço através de três equações apenas: balanço da quantidade de movimento da mistura e duas equações de balanço de massa (fase gasosa e fase líquida). Tanto na fase líquida como na fase gasosa é considerada a compressibilidade e as propriedades termodinâmicas através de correlações *black-oil* para hidrocarbonetos. Essa modelagem é vastamente utilizada na indústria de petróleo principalmente para petróleos de grau API abaixo de 30, (McCain (1990)). O modelo *black-oil* considera que o hidrocarboneto é constituído por uma mistura binária de óleo e gás e, através de correlações, estimam-se as propriedades da mistura em função da pressão, da temperatura e do grau API. A transferência de massa entre as fases é um fenômeno bastante importante no escoamento de poços produtores de petróleo e esse fenômeno também é modelado através da modelagem *black-oil*. Nas equações de balanço de massa

o termo de transferência de massa é incluído através de um termo fonte. O modelo *black-oil* completo utilizado nessa tese é descrito no Apêndice A.

O modelo base na forma mais geral é constituído em uma equação de continuidade para o gás, uma equação de continuidade para o líquido e uma equação de balanço da quantidade de movimento linear simplificada (sem os termos de inércia) para a mistura. O modelo sem os termos inerciais é designado de NPW (*no pressure wave*) (Masella et al. (1998)). Pela hipótese de modelo homogêneo adotada, a velocidade *in situ* da água e do óleo é a mesma, ou seja, não ocorre escorregamento. Essa abordagem permite escrever uma única equação da quantidade de movimento, desde que se conheça a relação de escorregamento entre a fase gasosa e líquida. Essa relação é obtida através de equações de fechamento.

Para o fechamento matemático, é considerado que existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e as variáveis de estado; esta modelagem permite utilizar correlações empíricas ou correlações baseadas no modelo de deriva (*drift flux*) (Ishii e Hibiki (2006)). Diversas correlações de deriva são testadas no presente estudo para padrões de escoamento distintos do estratificado. No caso do escoamento estratificado utiliza-se, ao invés do modelo de deriva, um modelo mecanicista de equilíbrio local adaptado de Baliño (2008). Ainda relacionado ao fechamento do modelo, uma abordagem do termo de atrito tendo por base o multiplicador de duas fases como apresentado por Wallis (1969) é considerado. Foram testados 3 modelos de multiplicadores: o modelo proposto por Muller-Steinhagen e Heck (1986) e outros dois originados da abordagem recente de Vieira e Garcia (2014) aplicado à indústria com os conceitos de velocidade de campo (centro de massa e de volume) como apresentado por Ishii e Hibiki (2006).

Após a inserção das simplificações no modelo de balanço de massa e quantidade de movimento linear o sistema é escrito na forma matricial em função das variáveis de estado. São variáveis de estado do modelo proposto: a velocidade superficial do gás j_g , a velocidade superficial do líquido j_l , a pressão P , e a temperatura T . O sistema matricial é então perturbado aplicando-se a metodologia de estabilidade linear onde são mantidos apenas os termos lineares. O capítulo é então fechado com a determinação do sistema matricial perturbado onde cada termo das matrizes é determinado. A temperatura foi carregada no modelo principal sendo eliminada na implementação numérica (capítulo seguinte) ao se adotar escoamento isotérmico. Assim, a ordem do sistema ficou reduzida para três variáveis de estado (j_g , j_l e P). A consideração de escoamento isotérmico é aceitável em muitas aplicações no escoamento de petróleo visto que as variações de temperatura são menores que as de pressão em sistemas de produção de petróleo (Andreolli, Zortea e Baliño (2017)). A temperatura tem maior relevância em análises

da garantia do escoamento como nos estudos de deposição e formação de parafinas e hidratos, embora possa ter importância em termos de escoamento em alguns sistemas específicos de produção. A implementação da equação da energia para o modelo de mistura e os efeitos térmicos são tema para um novo trabalho a ser desenvolvido no futuro.

Ao longo desse capítulo, cada etapa descrita acima será abordada em maiores detalhes. Quando o equacionamento se torna muito extenso, um apêndice é inserido.

3.2 Geometria do sistema

A Fig. 3.1 apresenta a geometria geral do sistema de produção considerado, o qual se constitui do trecho entre a árvore de natal molhada (ANM) e a plataforma, sendo o trecho constituído por uma linha de produção, *flowline* e de um *riser* conectado à plataforma. A geometria apresentada é apenas ilustrativa e pode ser constituída por trechos diversos como trechos ascendentes, descendentes, em catenária livre ou *lazy wave*. Essa geometria define a origem dos eixos (x, z) na ANM e seção final na plataforma. Na discretização do sistema, o primeiro nó (1) é posicionado na ANM e o último nó (N) é posicionado na plataforma. Na figura são explicitadas as coordenadas ao longo da trajetória s , as variáveis de estado (j_g, j_l e P), a fração de vazio α e o ângulo de orientação θ .

3.3 Equações de balanço

São descritas aqui as três equações de balanço: de massa da fase gasosa, de massa da fase líquida e de quantidade de movimento linear da mistura. A equação de balanço de massa da fase gasosa considerada no estudo é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho_g j_g) = \Gamma \quad (3.1)$$

A equação de balanço de massa da fase líquida considerada no estudo é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_l (1 - \alpha)] + \frac{\partial}{\partial s}(\rho_l j_l) = -\Gamma \quad (3.2)$$

onde s é a coordenada ao longo da direção do escoamento, t é o tempo, ρ_g e ρ_l são as massas específicas das fases (correspondentemente gás e líquido), j_g e j_l são as velocidades superficiais das fases (correspondentemente, gás e líquido), α é a fração volumétrica da fase gasosa (fração

Figura 3.1: Geometria geral do sistema onde as equações de balanço são aplicadas.

de vazio) e Γ é a taxa temporal de massa de gás por unidade de volume da mistura que deixa a solução e é adicionada ao gás livre (termo de transferência de massa que será descrito mais adiante nesse mesmo capítulo).

As velocidades superficiais são variáveis muito utilizadas na modelagem do escoamento multifásico. Estas variáveis são definidas em [Shoham \(2006\)](#) como a razão entre a vazão volumétrica *in situ* e a área total interna dessa seção. Assim, a velocidade superficial é diferente da velocidade da fase na referida seção.

Na maioria dos transientes que ocorrem no transporte de óleo e gás, por exemplo na intermitência severa, a resposta do sistema revela-se relativamente lenta, o que faz com que ondas de pressão não tenham um efeito determinante na iniciação e transporte de ondas de continuidade. Ondas de continuidade (*continuity waves*) ocorrem sempre que há relação entre vazão (ou velocidade superficial) e concentração (ou fração volumétrica): um valor em estado permanente propaga-se para outro valor sem que estejam presentes efeitos dinâmicos de inércia ou quantidade de movimento ([Wallis \(1969\)](#)). No modelo NPW, ou *no-pressure-wave* ([MASELLA et al., 1998](#)), ondas acústicas são desprezadas ao se descartar os termos de inércia na equação de

quantidade de movimento, resultando uma relação algébrica para o gradiente de pressão dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_F - \rho_m g \sin \theta \quad (3.3)$$

$$\rho_m = \rho_g \alpha + \rho_l (1 - \alpha) \quad (3.4)$$

onde P é a pressão, $\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_F$ é o gradiente de pressão por atrito, ρ_m é a massa específica da mistura e g é a aceleração da gravidade.

3.4 Relações de fechamento

Para fechar matematicamente o problema, algumas simplificações devem ser realizadas, como já mencionado no início do capítulo, que serão apresentadas na sequência.

3.4.1 Homogeneização das fases óleo e água

A densidade do líquido é definida como:

$$\rho_l = \frac{\rho_o \alpha_o + \rho_w \alpha_w}{1 - \alpha} \quad (3.5)$$

$$1 - \alpha = \alpha_o + \alpha_w \quad (3.6)$$

onde α_o and α_w são, respectivamente, as frações volumétricas de óleo e água; das Eq. (3.5) e (3.6), essas variáveis podem ser calculadas como:

$$\alpha_o = \frac{\rho_w - \rho_l}{\rho_w - \rho_o} (1 - \alpha) \quad (3.7)$$

$$\alpha_w = \frac{\rho_l - \rho_o}{\rho_w - \rho_o} (1 - \alpha) \quad (3.8)$$

A hipótese de escoamento homogêneo para as fases óleo e água faz com que a velocidade da água u_w e a velocidade do óleo u_o sejam idênticas e representadas pela velocidade da fase líquida (mistura de óleo e água), u_l , ou seja, $u_l = u_w = u_o$. As correspondentes

velocidades superficiais j_o , j_w e j_l podem ser calculadas como:

$$j_o = \frac{\alpha_o}{1 - \alpha} j_l = \frac{\rho_w - \rho_l}{\rho_w - \rho_o} j_l \quad (3.9)$$

$$j_w = \frac{\alpha_w}{1 - \alpha} j_l = \frac{\rho_l - \rho_o}{\rho_w - \rho_o} j_l \quad (3.10)$$

$$j_l = j_o + j_w = u_l (1 - \alpha) \quad (3.11)$$

3.4.2 Modelagem do atrito

O termo de atrito da equação de quantidade de movimento linear Eq. (3.3) é modelado usando o multiplicador de duas fases ϕ_{f0}^2 (Wallis (1969)), definido como a razão entre o gradiente de pressão de atrito e o gradiente de pressão considerando que o fluxo de massa total está escoando como líquido $-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l$:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_F}{-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l} \quad (3.12)$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.13)$$

$$G = \rho_l j_l + \rho_g j_g \quad (3.14)$$

onde f_l é o fator de atrito de Darcy para a fase líquida, G é o fluxo mássico total e D é o diâmetro do duto. Diferentes correlações podem ser utilizadas através dessa abordagem, como apresentado em Andreolli, Zortea e Baliño (2017). As correlações testadas nesse estudo estão no Apêndice B.3. Com essa abordagem a Eq. (3.3) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} = 0 \quad (3.15)$$

3.4.3 Modelo de equilíbrio local

Para trechos horizontais ou descendentes faz-se uma verificação através do critério de padrão de escoamento proposto por Taitel e Dukler (1976), conforme apresentado na Seção 1.4. Em

se verificando escoamento estratificado, considera-se o modelo de [Taitel e Dukler \(1976\)](#) para o balanço da quantidade de movimento linear, o qual é baseado na teoria de equilíbrio local do escoamento estratificado. As deduções das equações de balanço da quantidade de movimento linear e da fração de vazio podem ser encontrados no Apêndice I e tiveram por base o desenvolvimento apresentado por [Baliño \(2008\)](#) e [Azevedo \(2017\)](#). O modelo originalmente foi desenvolvido para água-ar. Assim foi necessário modificá-lo para incorporar as correntes água, óleo e gás natural, além da compressibilidade da fase líquida e de um modelo de gás real.

3.4.4 Fração de vazio

É assumido que há uma relação algébrica entre a fração de vazio e as condições locais de escoamento:

$$\alpha = \alpha(j_g, j_l, P, \theta) \quad (3.16)$$

A fração de vazio para trechos em que o escoamento não é estratificado é determinada pelo modelo *drift-flux*, proposto por [Zuber e Findlay \(1965\)](#):

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d} \quad (3.17)$$

Com essa abordagem é possível incorporar diferentes correlações empíricas para a determinação da fração de vazio as quais procuram, em função de um conjunto de variáveis do escoamento, prever os valores dos parâmetros C_d e U_d . De uma forma geral, os parâmetros C_d e U_d podem depender da geometria local e das condições do escoamento ([Bendiksen \(1984\)](#), [Chexal et al. \(1992\)](#), [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#), [Ghajar e Bhagwat \(2013\)](#)), ou seja, $C_d = C_d(\alpha, P, j, \theta)$ e $U_d = U_d(\alpha, P, j, \theta)$. No Apêndice B.2 são apresentados os três modelos *drift-flux* testados no presente estudo: [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#), [Bendiksen \(1984\)](#) e [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#).

No presente estudo, após análises com dados experimentais confrontando as três correlações *drift-flux* como apresentado no Capítulo 5, a correlação de melhor desempenho foi a correlação apresentada por [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#) e por [Ghajar e Bhagwat \(2013\)](#), Eq. (B.1). Nessa equação os parâmetros C_d e U_d dependem de α , tornando o processo de cálculo iterativo. A correlação de [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#) foi elaborada para atender tanto ao escoamento ascendente como descendente e está no Sistema Internacional de Unidades (S.I.). A correlação foi verificada com base em um conjunto de 5928 dados de fração vazio considerando quinze diâme-

tros de tubulação e oito combinações diferentes de fluidos, incluindo escoamentos ascendentes e descendentes.

3.4.5 Caracterização de fluidos

Nessa tese foi adotado o modelo *black-oil* como modelo de fluidos. A modelagem *black-oil* admite a existência de dois componentes na mistura, o líquido e o gás. Para uma determinada condição (P, T) o modelo *black-oil* considera que a fase líquida contém dissolvido gás e quando essa fase é estabilizada na condição de referência (SC) , a fase líquida é separada em gás e líquido. Além disso, em qualquer estado termodinâmico (P, T) a fase gasosa pode coexistir e a troca de massa entre as fases ocorre em função das condições termodinâmicas locais sendo representadas através de correlações *black-oil*. Essas correlações são um conjunto de equações empíricas as quais representam as propriedades dos fluidos como função das condições termodinâmicas locais.

Nessa seção são apresentadas apenas as relações fundamentais que permitem calcular as propriedades das fases nas condições locais (pressão e temperatura). As definições das diferentes variáveis, bem como as correlações usadas para calculá-las, podem ser vistas no Apêndice A. Nesse apêndice também são apresentadas as demais definições de variáveis *black-oil* e algumas relações algébricas importantes da mistura das fases. As correlações *black-oil* adotadas na tese tem sido vastamente aplicadas na indústria.

Muitas propriedades correspondentes às fases em condições locais podem ser estimadas com base em parâmetros na condição de referência ($1\ atm$ e $60\ ^\circ F$ para API, *American Petroleum Institute*) e um conjunto de quantidades dependendo da pressão, temperatura e composição, que serão considerados locais e instantaneamente válidos (Nemoto e Baliño (2012)).

As variáveis de entrada que caracterizam o fluido (medido na condição de referência) são: massas específicas de referência do óleo, gás e água, respectivamente ρ_{o0} , ρ_{g0} e ρ_{w0} , razão gás-óleo GOR e razão água-óleo WOR .

As massas específicas do óleo, gás, água e líquido nas condições locais de pressão e temperatura são calculadas como:

$$\rho_o = \frac{\rho_{o0} + \rho_{g0} R_{so}}{B_o} \quad (3.18)$$

$$\rho_g = \frac{\rho_{g0}}{B_g} \quad (3.19)$$

$$\rho_w = \frac{\rho_{w0}}{B_w} \quad (3.20)$$

$$\rho_l = \frac{\rho_{l0} + \rho_{g0} R_{sl}}{B_l} \quad (3.21)$$

onde $B_o(P, T)$, $B_g(P, T)$, $B_w(P, T)$ e $B_l(P, T)$ são, respectivamente, os fatores volume de formação do óleo, gás, água e líquido. $R_{so}(P, T)$ and $R_{sl}(P, T)$ são, respectivamente, a razão de solubilidade gás-óleo e gás-líquido e ρ_{l0} é a massa específica do líquido na condição de referência. De acordo com a caracterização do fluido, as massas específicas das fases são funções de pressão e temperatura.

3.4.6 Termo de transferência de massa

O modelo de transferência de massa adotado é o modelo desenvolvido por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) o qual utiliza a abordagem *black-oil*. Essa abordagem considera que a fase líquida, que se move na velocidade $u_l = \frac{j_l}{1-\alpha}$ contém os componentes líquido e gás dissolvido e a fase gasosa apenas o componente gás, sendo que as trocas de massa ocorrem em função das condições termodinâmicas locais e são tratadas através de correlações *black-oil*, resultando em:

$$\Gamma = -\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right) \quad (3.22)$$

Vale observar que para $\Gamma > 0$ devemos ter $\alpha_o > 0$ (deve haver óleo para ocorrer vaporização), enquanto que para $\Gamma < 0$ devemos ter $\alpha > 0$ (deve haver gás para ocorrer condensação).

A dedução completa da equação de transferência de massa, inclusive a abordagem em função das variáveis de estado, é feita no Apêndice [C](#).

3.5 Condições de contorno

Para completar a definição do problema, é necessário determinar as condições de contorno e as condições iniciais.

No nó final do sistema (nó mais a jusante) situa-se o separador de produção ($s = s_t$). Nesse nó foi definida uma pressão constante:

$$P(s_t, t) = P_s \quad (3.23)$$

No nó inicial do sistema (nó mais a montante) situa-se a ANM ($s = 0$) e é estabelecida uma condição de fluxo de massa constante das fases de óleo e gás. Para a fase aquosa não há transferência de massa, enquanto que para as fases de óleo e gás, a condição de limite para as velocidades superficiais são as compatíveis com um teste *flash* em condições locais na ANM:

$$j_g(0, t) = \frac{GOR - R_{so}}{1 + WOR} B_g j_{l0} \quad (3.24)$$

$$j_o(0, t) = \frac{B_o}{1 + WOR} j_{l0} \quad (3.25)$$

$$j_w(0, t) = \frac{WOR}{1 + WOR} B_w j_{l0} \quad (3.26)$$

onde j_{l0} é a velocidade superficial média do líquido na condição de referência. A velocidade superficial total da entrada pode ser escrita como:

$$j_l(0, t) = \frac{B_o + WOR B_w}{1 + WOR} j_{l0} \quad (3.27)$$

As velocidades superficiais na fronteira não são constantes no transiente porque da Eq. (3.24) à (3.26) são calculadas na condição local. A pressão local de entrada pode ser calculada integrando Eq. (3.15), resultando:

$$P(0, t) = P_s - \int_0^{s_t} \frac{\partial P}{\partial s} ds \quad (3.28)$$

3.6 Estado estacionário

O estado estacionário é usado como condição inicial para as simulações transientes e também como base para a análise de estabilidade linear. O estado estacionário pode ser obtido zerando os termos das derivadas temporais nas Eq. (3.1), (3.2) e (3.22). As considerações feitas na Seção 3.5 são válidas para qualquer posição no estado estacionário. As variáveis em estado estacionário são indicadas com o sobrescrito $\sim$. As seguintes relações devem ser resolvidas simultaneamente:

$$\tilde{j}_g = \frac{GOR - \tilde{R}_{so}}{1 + WOR} \tilde{B}_g \tilde{j}_{l0} \quad (3.29)$$

$$\tilde{j}_o = \frac{\tilde{B}_o}{1 + WOR} j_{l0} \quad (3.30)$$

$$\tilde{j}_w = \frac{WOR}{1 + WOR} \tilde{B}_w j_{l0} \quad (3.31)$$

A velocidade superficial do líquido é determinada como:

$$\tilde{j}_l = \frac{\tilde{B}_o + WOR \tilde{B}_w}{1 + WOR} j_{l0} \quad (3.32)$$

A pressão local pode ser calculada pela integração da Eq. (3.15), resultando:

$$\tilde{P} = P_s - \int_s^{s_t} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)^\sim ds \quad (3.33)$$

A fração de vazio e qualquer outra variável dependente são calculadas a partir das relações correspondentes avaliadas com os valores estacionários.

A dedução completa do estado estacionário está no Apêndice D.

3.7 Equações dinâmicas na forma matricial

Para aplicar a teoria da estabilidade linear, é útil reescrever as equações dinâmicas na forma de matriz. Como existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e o resto das variáveis, ela pode ser eliminada, reduzindo o número de variáveis de estado. Após alguma álgebra, as equações dinâmicas (3.1), (3.2) e (3.15) podem ser escritas como:

$$\{A\} + \underline{B} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = 0 \quad (3.34)$$

onde os vetores de variáveis de estado $\{v\}$ e $\{A\}$ (tamanho 3) e as matrizes quadradas $\underline{B}$ e $\underline{C}$ (tamanho 3×3) são definidos como:

$$\{v\} = \left\{ j_g \quad j_l \quad P \right\}^T \quad (3.35)$$

$$\{A\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad A_3 \right\}^T \quad (3.36)$$

$$A_3 = \rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (3.37)$$

A matriz $\underline{B}$ é dada por:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

onde:

$$B_{11} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (3.39)$$

$$B_{12} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (3.40)$$

$$B_{13} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (3.41)$$

$$B_{21} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (3.42)$$

$$B_{22} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (3.43)$$

$$B_{23} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (3.44)$$

A matriz $\underline{C}$ é dada por:

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

onde:

$$C_{12} = \rho_l \quad (3.46)$$

$$C_{13} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (3.47)$$

$$C_{21} = \rho_g \quad (3.48)$$

$$C_{23} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (3.49)$$

$$C_{33} = 1 \quad (3.50)$$

A dedução completa do sistema matricial partindo das equações de balanço de massa, de balanço da quantidade de movimento linear e da transferência de massa, escritas em função das variáveis de estado, está no Apêndice E.

3.8 Sistema matricial perturbado

O próximo passo na análise de estabilidade linear é linearizar a Eq. (3.34) em torno do estado estacionário. As variáveis de estado são escritas em termos de um valor de estado estacionário (somente dependente da posição) mais uma perturbação (dependente da posição e do tempo) indicada com o sobrescrito $\wedge$:

$$\{v\} = \{\tilde{v}(s)\} + \{\hat{v}(s, t)\} \quad (3.51)$$

Negligenciando os termos de segunda ordem nas perturbações, a forma de matriz para o sistema de equações diferenciais lineares para as perturbações das variáveis de estado é obtida como:

$$\underline{\tilde{A}} \{\hat{v}\} + \underline{\tilde{B}} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \underline{\tilde{C}} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = 0 \quad (3.52)$$

onde o vetor de perturbações das variáveis de estado $\{\hat{v}\}$ (tamanho 3) e as matrizes quadradas de coeficientes constantes $\underline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{B}}$ e $\underline{\tilde{C}}$ (tamanho 3×3) são definidas como:

$$\{\hat{v}\} = \left\{ \hat{j}_g \quad \hat{j}_l \quad \hat{P} \right\}^T \quad (3.53)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^{\sim} \quad (3.54)$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij})^{\sim} \quad (3.55)$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij})^{\sim} \quad (3.56)$$

onde o $\sim$ fora do parêntesis indica que a expressão entre parêntesis deve ser avaliada para o estado estacionário.

As condições de contorno para as equações de perturbação são as versões linearizadas das Eq. (3.23), (3.24) and (3.27):

$$\hat{P}(s_t, t) = 0 \quad (3.57)$$

$$\hat{j}_g(0, t) = \left[\left(GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left(\frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t) \quad (3.58)$$

$$\hat{j}_l(0, t) = \left[\left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left(\frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t) \quad (3.59)$$

A dedução completa do sistema matricial perturbado está no Apêndice F.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo apresenta-se a abordagem matemática para se discretizar as equações governantes das perturbações, o critério de estabilidade e sua implementação numérica para avaliar a estabilidade do estado estacionário, definido pelo cálculo dos autovalores e autovetores generalizado e a implementação numérica para a construção dos mapas de estabilidade.

4.1 Geometria do sistema

O modelo numérico desenvolvido no *software* Matlab (Magrab et al. (2010)) permite a entrada de geometrias diversas, sempre iniciando a discretização do nó mais a montante e com o último nó na plataforma (separador de produção). Na presente tese se consideraram diversos sistemas e, genericamente, a geometria é apresentada pela Fig. 3.1, onde a origem dos eixos (nó 1) é na ANM e o último nó (N) é na plataforma. A geometria é então discretizada em N nós onde o sistema matricial perturbado é integrado.

4.2 Equações perturbadas discretizadas

O comprimento da *flowline* é discretizado em N nós e a Eq. (3.52) é integrada no intervalo $s_i \leq s \leq s_{i+1}$. Os valores representativos para qualquer função ϕ ou qualquer variável dentro do intervalo de integração são aproximados pelo valor médio correspondente entre nós adjacentes, enquanto a derivada espacial é aproximada através de diferenças finitas:

$$\phi_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} [\phi(\tilde{v}_i) + \phi(\tilde{v}_{i+1})] \quad (4.1)$$

$$(\hat{v})_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} (\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{v}_i}{dt} + \frac{d\hat{v}_{i+1}}{dt}\right) \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{(\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i)}{\Delta s_i} \quad (4.4)$$

Como há $N - 1$ intervalos espaciais, as equações diferenciais ordinárias $3N - 3$ são geradas em termos dos valores nodais das perturbações das variáveis de estado. Para fechar o problema, o sistema de equações é aumentado com as versões linearizadas das condições de contorno, ou seja, Eq. (3.57) aplicado ao último nó, bem como as Eq. (3.58) e (3.59) aplicadas ao primeiro nó:

$$\hat{P}_N = 0 \quad (4.5)$$

$$\hat{j}_{g1} + C_{g1} \hat{P}_1 = 0 \quad (4.6)$$

$$\hat{j}_{l1} + C_{l1} \hat{P}_1 = 0 \quad (4.7)$$

onde:

$$C_{g1} = - \left[(GOR - \tilde{R}_{so}) \left(\frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (4.8)$$

$$C_{l1} = - \left[\left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left(\frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (4.9)$$

4.3 Espectro de autovalores e critério de estabilidade

Discretizando e integrando na posição a Eq. (3.52) entre $s_i \leq s \leq s_{i+1}$, incluindo as condições de contorno (sistema de equações ampliado) e após alguma álgebra, pode-se escrever o sistema discreto na notação matricial da seguinte forma:

$$\underline{G}^* \left\{ \frac{\partial \underline{\hat{v}}}{\partial t} \right\} + \underline{H}^* \{ \underline{\hat{v}} \} = \{ \underline{0} \} \quad (4.10)$$

$$\{\hat{v}\}_j = \begin{cases} \hat{J}_{gj} & \text{for } 1 \leq j \leq N \\ \hat{J}_{lj-N} & \text{for } N+1 \leq j \leq 2N \\ \hat{P}_{j-2N} & \text{for } 2N+1 \leq j \leq 3N \end{cases} \quad (4.11)$$

onde $\underline{G}^*$ e $\underline{H}^*$ (dimensão $3N \times 3N$) são matrizes quadradas e $\{\hat{v}\}$ é o vetor nodal de perturbações das variáveis de estado (tamanho $3N$). A seguinte transformação pode ser feita:

$$\{\hat{v}\} = \{\hat{r}\} \exp(\lambda t) \quad (4.12)$$

onde λ são os autovalores e $\{\hat{r}\}$ são os autovetores associados. De acordo com as Eqs. (4.10 e 4.12), tem-se:

$$(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) \{\hat{r}\} = 0 \quad (4.13)$$

A transformação apresentada na Eq. (4.12) reduz a Eq. (4.10) a um problema de autovalores/autovetores generalizado. Assim, a Eq. (4.13) só apresenta solução não-trivial quando λ satisfaz o polinômio característico:

$$\det(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) = 0 \quad (4.14)$$

Para o modelo apresentado no Capítulo 3, a matriz $\underline{G}^*$ é singular e, portanto, a dimensão do espectro de autovalores a ser considerado é igual ao posto da matriz $\underline{G}^*$. A estabilidade do estado estacionário obtido na Seção 3.6 é dada pelo comportamento da parte real dos autovalores da Eq. (4.13). Os valores de λ que satisfazem o polinômio característico é da forma $\lambda_R + i \lambda_I$, onde λ_R é a parte real e λ_I é a parte imaginária. Devido à natureza exponencial da solução da Eq. (4.13), se a parte real de todos os autovalores for negativa, o estado estacionário é estável; se pelo menos um autovalor tiver parte real positiva, o estado estacionário é instável. Esta definição é o critério de estabilidade adotado neste texto.

Consequentemente, pode-se construir a curva de estabilidade neutra que é definida como uma hiper-superfície no espaço de parâmetros do sistema onde a maior parte real dos autovalores é zero. A curva de estabilidade é a fronteira entre a região instável e a região estável.

No Apêndice G é apresentada a dedução completa do sistema de equações ampliado, Eq. (4.10).

4.4 Procedimento numérico

O procedimento numérico é separado em duas partes: a primeira consiste em se determinar a estabilidade de um determinado estado estacionário. A segunda consiste de, utilizando o comportamento estável/instável de diversos estados estacionários, obter a superfície de estabilidade neutra, ou fronteira de estabilidade, que separa a região estável da região instável no espaço de parâmetros das velocidades superficiais j_{g0} , j_{o0} e j_{w0} .

Primeiramente, apresenta-se a análise de estabilidade para um estado estacionário. Em seguida, este resultado é incorporado à rotina que constrói a curva de estabilidade.

4.4.1 Estabilidade do estado estacionário

A primeira etapa para se determinar os mapas de estabilidade é determinar o estado estacionário. Na sequência será descrito o procedimento que foi implementado no *software* Matlab (Magrab et al. (2010)). Também será apresentado o procedimento implementado para a análise da estabilidade linear. Esse procedimento teve por base as rotinas desenvolvidas por Azevedo, Baliño e Burr (2015b).

Definem-se as condições gerais do escoamento: temperatura T , grau API , massa específica da água na condição de referência ρ_{w0} , razão água-óleo WOR , a densidade do gás γ_g e a aceleração da gravidade g .

Definem-se as características geométricas: coordenadas da *flowline-riser* x e z , número de nós internos aos nós principais, rugosidade ϵ e diâmetro interno da tubulação D , tipo de critério para definir escoamento estratificado, correlação *drift-flux* para trechos em que se verifica escoamento não estratificado e tipo de multiplicador de duas fases ϕ_{f0}^2 .

Definem-se as propriedades gerais do modelo para a construção da curva: velocidades superficiais de referência j_{g0} e j_{l0} , precisão de cálculo, fator de sub-relaxamento e as GOR que definem o número de pontos da curva. Para cada GOR as rotinas procuram o ponto de estabilidade neutra através de um algoritmo de convergência que será descrito na Seção 4.4.2.

Em seguida, definem-se as condições de contorno: pressão de separador P_{sep} e vazões mássicas constantes na entrada no primeiro nó situado na ANM, calculadas a partir do processo termodinâmico *flash* (modelo *black-oil*) utilizando-se a velocidade superficial j_{o0} , GOR e WOR .

Com todos os parâmetros definidos, determina-se a geometria do sistema *flowline-*

riser, em função da discretização considerada (número de nós). Com todas as propriedades e condições do escoamento definidas, realiza-se o cálculo do estado estacionário com base nas equações da Seção 3.6. O cálculo é iterativo visto a dependência da pressão das equações bases e de fechamento. A iteração é feita em cada nó.

Inicia-se o cálculo a partir do topo da tubulação, onde é conhecida a pressão no separador (pressão no nó N). Em sequência, com os valores Q_{o0} , GOR e WOR calcula-se j_g e j_l no nó N e avalia-se, em função da inclinação local, o padrão de escoamento a partir da Eq. (I.182) ou da Eq. (I.183). Com o padrão definido no nó N , definem-se as correlações de fração de vazio e de multiplicador multifásico, consequentemente, calcula-se α no nó N .

O seguinte algoritmo é adotado sequencialmente para a iteração em cada nó:

Cálculo da pressão ao longo da tubulação a partir da discretização em N nós da Eq. (3.15), resultando na seguinte equação iterativa:

$$P_{i-1} = P_i + \bar{\rho}_m g (z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{2} \overline{\phi_{f0}^2 f_l} \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (4.15)$$

onde o traço superior denota o valor médio no intervalo $[i - 1, i]$, dado por:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi_{i-1} + \varphi_i) \quad (4.16)$$

Dada a pressão no nó N na plataforma, o método estima sequencialmente a pressão P_i , para $i = 1, \dots, N - 1$ nós. O algoritmo é descrito como segue:

1. Definir uma estimativa inicial para o valor previsto para a pressão;
2. Calcular as quantidades médias com P_{i-1}^{pred} and P_{i-1} a partir da Eq. (4.15);
3. Testar a convergência para P_{i-1} usando:

$$\varepsilon_r = \frac{|P_{i-1}^{pred} - P_{i-1}|}{P_{i-1}} \quad (4.17)$$

4. Se $\varepsilon_r \leq \delta$ ($\delta = 10^{-4}$ nesse teste) houve convergência para P_{i-1} . Se não, define-se um novo sub-relaxamento:

$$P_{i-1}^{pred} = P_{i-1}^{pred} + \zeta (P_{i-1} - P_{i-1}^{pred}) \quad (4.18)$$

onde ζ é o fator de sub-relaxamento ($0 < \zeta \leq 1$) e vai para passo 2.

Calculado o estado estacionário, o próximo passo é calcular os parâmetros das matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, conforme Seção 3.8, e construir as matrizes $\underline{G}$ e $\underline{H}$. Inclui-se as condições do contorno, referente às equações do *flowline-riser*. Amplia-se $\underline{G}$ e $\underline{H}$ para $\underline{G}^*$ e $\underline{H}^*$ e faz-se o cálculo dos autovalores.

Como a matriz $\underline{G}^*$ não tem posto cheio, é desconsiderada a parte não finita dos autovalores, de ordem $N - 1$, referente às equações de balanço da quantidade de movimento linear. Organiza-se os autovalores finitos em função da parte real, da maior para a menor.

Se existir pelos menos um autovalor com parte real positiva no espectro, o estado estacionário é instável. Caso contrário, o estado estacionário é estável. O procedimento numérico para o cálculo dos autovalores foi implementado utilizando o *software* Matlab (Magrab et al. (2010)). A sub-rotina EIGS foi utilizada para o cálculo dos autovalores. Ela é a implementação do código ARPACK, inicialmente desenvolvido em Fortran 77. As rotinas do ARPACK são um conjunto de rotinas baseadas em uma variação do processo de Arnoldi chamado de Método do Reinício Implícito Arnoldi/Lanczos (IRAM-*Implicitly Restarted Arnoldi/Lanczos Method*) (Lehoucq, Sorensen e Yang (1997)).

4.4.2 Construção da curva de estabilidade

Nessa seção, apresenta-se como a superfície de estabilidade é determinada numericamente. Conforme definido por Nemoto (2012), uma superfície de estabilidade mostra a região de determinado espaço de parâmetros na qual instabilidades, como a intermitência severa, ocorrem. Para o cálculo considera-se uma determinada geometria e um conjunto fixo de variáveis e varia-se as vazões volumétricas de líquido e gás de maneira a determinar as regiões estáveis e instáveis. Para sistemas água-ar, Baliño, Burr e Nemoto (2010) através da modelagem transiente e Azevedo, Baliño e Burr (2015b) através da estabilidade linear, obtiveram mapas de estabilidade em planos bi-dimensionais com propriedades termofísicas constantes, considerando o ar como um gás ideal. Essa aproximação é aceitável dado que o escoamento é considerado isotérmico e as variações de pressão não são grandes. Nas simulações e na construção do mapa de estabilidade foi possível variar de maneira independente as vazões de ar e água. No caso de sistemas de produção de petróleo, os fluidos produzidos podem ser classificados em água e hidrocarbonetos sendo que os hidrocarbonetos podem se apresentar em duas fases de interesse (gás e óleo) quando abaixo da pressão de ponto de bolha. Portanto, as vazões locais de gás e óleo dependem das condições de pressão e temperatura locais, diferentemente dos sistemas água-ar, nos quais as vazões de gás e líquido podiam variar de maneira independente. Além disso, a presença da fase água resulta em uma superfície de estabilidade quando considerada no terceiro

eixo a WOR , conforme apresentando em [Nemoto \(2012\)](#), através da modelagem transiente. A caracterização dos fluidos produzidos dá-se por meio do conhecimento da razão gás-óleo, GOR (ou solubilidade de gás em óleo no ponto de bolha), do grau API do óleo, da densidade relativa do gás, γ_g , da massa específica da água, ρ_{w0} e da razão água-óleo, WOR . Uma vez que estes parâmetros sejam conhecidos, as vazões de gás, óleo e água podem ser calculadas a partir da definição da pressão, temperatura e da velocidade superficial média de óleo j_{o0} (ou velocidade superficial média de gás j_{g0}) na condição de referência.

No presente trabalho a metodologia adotada foi a obtenção do mapa de estabilidade considerando a WOR constante. Além disso, em cada iteração para encontrar o ponto sobre a fronteira de estabilidade a GOR foi mantida constante. Nesse processo varia-se j_{o0} e, consequentemente, j_{g0} de forma a manter constante a razão GOR até encontrar o ponto sobre a fronteira de estabilidade segundo um critério de convergência. Em um mapa construído com base em um plano cartesiano, sendo o eixo das abscissas dado por j_{g0} e o eixo das ordenadas dado por j_{o0} , cada reta que cruza a origem dos eixos define uma mistura de hidrocarbonetos específica, dado que a inclinação da reta é definida pelo inverso de GOR . Desse modo, o mapa apresenta as regiões estáveis e instáveis para uma determinada geometria e um WOR fixo e contempla todos os GOR possíveis. Fazendo isso, as retas que cruzam a origem dos eixos continuam a definir diferentes misturas de hidrocarbonetos, pois a inclinação de cada reta ainda equivale ao inverso da GOR .

De maneira a permitir uma visualização mais detalhada para baixos valores de velocidades superficiais, é comum o uso do plano log-log para apresentação dos mapas de estabilidade. Os planos de estabilidade construídos no Capítulo 5 foram obtidos plotando-se, em escala log-log, no eixo horizontal j_{g0} e no eixo vertical j_{o0} fixando uma WOR . Observou-se que existe grande diferença entre a ordem de grandeza dessas duas variáveis de estado e critérios gerais baseados na bisseção como apresentado por [Azevedo \(2017\)](#) exigem um grande número de linhas de GOR para que o traçado do mapa seja representada adequadamente em todo o domínio de velocidades superficiais. Para tornar a determinação do mapa mais rápido, um conjunto de GOR representativas para o traçado são inseridos na rotina. Cada GOR representa uma linha que cruza a fronteira de estabilidade e o ponto sobre a curva é determinada com a precisão desejada. Ao se variar o conjunto de GOR , mantem-se constante a WOR e P_{sep} .

Inicialmente, define-se um ponto qualquer, no plano de velocidades superficiais. Verifica-se a estabilidade deste ponto. Aumenta-se a velocidade superficial de óleo em um incremento Δj_{o0} e define-se um novo ponto sobre a linha. Verifica-se a estabilidade deste ponto. Caso o mesmo seja instável, aumenta-se a velocidade de óleo em um incremento Δj_{o0} , caso contrário,

subtrai-se da velocidade de óleo um valor $\Delta j_{o0}/2$. O procedimento é continuado até que se cruze a fronteira de estabilidade.

A cada nova iteração em que a fronteira de estabilidade é cruzada, o valor incremental é reduzido a metade e a operação de soma ou subtração é invertida. Dessa maneira, sucessivamente, após k iterações obtém-se o primeiro ponto sobre a curva de estabilidade, tal que $|(j_{o0k} - j_{o0k-1})/j_{o0k}|$ seja menor que a precisão desejada.

Repete-se esse procedimento para cada GOR , obtendo-se assim a curva de estabilidade para um conjunto WOR e P_{sep} fixo. O procedimento como um todo pode ser repetido para outros conjuntos de WOR e P_{sep} obtendo-se outras curvas de estabilidade.

5 RESULTADOS

Nesta seção serão discutidos os resultados obtidos para o modelo de regime estacionário bem como para o modelo dinâmico de estabilidade. A análise do modelo estacionário será confrontada com dados experimentais de campo a partir de um poço produtor de petróleo. O modelo dinâmico de estabilidade será avaliado em três etapas: (i) análise da convergência do modelo, (ii) análise com base em estudo da literatura e (iii) análise com base em dados de campo de poços que apresentam instabilidades. A análise da convergência avalia se o modelo converge em todo o domínio de velocidades superficiais de gás e óleo. Além disso, avalia-se o comportamento de cada componente que compõe os elementos matriciais do sistema matricial perturbado. A análise com base em estudo da literatura confronta as curvas de estabilidade obtidas pelo modelo proposto com curvas de estabilidade obtidas através de simulações numéricas transientes por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#). A análise com base em dados de campo visa confrontar os resultados obtidos pelo modelo proposto com diversas condições reais operacionais a fim de avaliar a capacidade do modelo de prever a estabilidade de condições reais de produção.

5.1 Análise do modelo estacionário

O sistema estacionário foi avaliado considerando um sistema real de produção com geometria complexa em *lazy Wave* e foi publicado por [Andreolli, Zortea e Baliño \(2017\)](#). Com base nos dados de produção e dos registros de pressão em pontos notáveis do escoamento foi possível avaliar o desempenho do modelo estacionário para prever as pressões nesses pontos. Nessa análise foram consideradas três correlações *drift-flux* e três modelos de multiplicadores de duas fases. A existência, na literatura, de vários modelos *drift-flux* e de multiplicadores de duas fases reflete as muitas incertezas na modelagem da fração de vazio e do fator de atrito bifásico. Nesse estudo são testadas três correlações *drift-flux*: [Bendiksen \(1984\)](#), [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#) e [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#), além do modelo de equilíbrio local de [Baliño \(2008\)](#). Também foram consideradas três abordagens para a modelagem do fator de atrito multifásico (centro de massa, centro de volume e Müller). As correlações *drift-flux* estão no Apêndice B.2. O modelo

de equilíbrio local está no Apêndice I. Os multiplicadores de duas fases estão no Apêndice B.3. Incertezas estão também presentes nas correlações utilizadas para a caracterização dos fluidos. No presente estudo foi adotado o modelo *black-oil* descrito no Apêndice A.

A geometria do sistema é apresentada pela Fig. 5.1 e na Tabela 5.1. Nota-se que o trecho de *riser* apresenta uma espécie de corcova que é designada de *lazy wave* cujo objetivo é reduzir o carregamento na plataforma.

Figura 5.1: Geometria do sistema considerada nesse estudo para análise do estado estacionário (*Lazy Wave*).

Os dados de fluidos, diâmetro e rugosidades para as simulações do sistema *Lazy Wave* são apresentados na Tabela 5.2.

Dados experimentais de campo para um sistema real de produção foram utilizados para confrontar com o modelo numérico e são apresentados na Tabela 5.3. Um total de 16 pontos foram considerados com uma faixa de vazão de 1200 a 3000 sm^3/d e faixa de *WOR* de 0 a 22%. Esses dados, por serem de campo, foram medidos na condição real do escoamento (altas pressões) e foram utilizados para selecionar o modelo *drift-flux* e o multiplicador de duas fases, bem como para testar a convergência do algoritmo proposto resultando no modelo base para a determinação do estado estacionário nas análises dinâmicas de estabilidade. Alguns dos

Tabela 5.1: Geometria da Fig. 5.1.

Localização	$x(m)$	$z(m)$	Localização	$x(m)$	$z(m)$
Plataforma	7563	2159	<i>Riser</i>	6713	804
<i>Riser</i> *	7563	2129	<i>Riser</i>	6663	559
<i>Riser</i>	7513	1779	<i>Riser</i>	6613	379
<i>Riser</i>	7463	1579	<i>Riser</i>	6563	279
<i>Riser</i>	7363	1279	<i>Riser</i>	6463	99
<i>Riser</i>	7263	1079	<i>Riser</i>	6363	9
<i>Riser</i>	7163	979	<i>Riser</i>	6313	-11
<i>Riser</i>	7063	929	<i>Flowline</i>	6263	-11
<i>Riser</i>	6963	949	<i>Flowline</i>	5885	-11
<i>Riser</i>	6863	979	<i>Flowline</i>	1	0
<i>Riser</i>	6763	904	ANM	0	0

* Nível do mar.

dados medidos em campo incluem *gas lift* (ver a coluna *GORI* na Tabela 5.3), permitindo avaliar o desempenho do modelo também em tais condições. Os dados experimentais incluem as seguintes variáveis de fluxo: velocidade superficial em condição de referência, pressão na ANM, pressão na plataforma, razão-gás-óleo, razão-água-óleo, e temperatura média entre a ANM e a plataforma.

As análises do desempenho do modelo numérico é feita através do cálculo do erro padrão entre a pressão observada ($P_{ANM\ obs}$) e a pressão estimada ($P_{ANM\ est}$) na ANM, dada por:

$$Erro = \frac{P_{ANM\ obs} - P_{ANM\ est}}{P_{ANM\ obs}} \quad (5.1)$$

A Tabela 5.4 mostra os resultados obtidos combinando os três modelos de multiplicadores de duas fases com os três modelos *drift-flux* adotados nos estudos de Bendiksen (1984), Woldesemayat e Ghajar (2007) e Bhagwat e Ghajar (2012), cada qual combinado como: (i) modelo com velocidade de centro de volume, (ii) modelo com velocidade de centro de massa, e (iii) a correlação de Muller-Steinhagen e Heck (1986). Note que entre as correlações testadas para ϕ_{f0}^2 , a melhor foi a baseada na velocidade do centro de massa. É importante observar que há erros significativos nas três correlações testadas, o qual sugere limitações no modelo e correlações analisadas. Entre as correlações *drift-flux* analisadas a que apresentou pior desempenho foi a correlação de Bendiksen (1984) e a melhor foi a de Bhagwat e Ghajar (2012) apresentando erros inferiores a 15 % e com desempenho muito próximo da correlação Woldesemayat e Ghajar (2007) confirmando o melhor desempenho das correlações recentes de *drift-flux*.

Tabela 5.2: Dados básicos de entrada para simulação (*Lazy Wave*).

Símbolo	Variável	Valor
γ_{API}	Grau API	29,05
γ_{g0}	Densidade do gás em <i>SC</i>	0,83
T_r	Temperatura do reservatório	333 <i>K</i>
P_b	Pressão de bolha T_r	340 <i>bar</i>
T	Temperatura utilizada	305 <i>K</i>
GOR	Razão-gás-óleo	ver Tabela 5.3
$GORI$	Razão-gás-óleo de injeção	ver Tabela 5.3
WOR	Razão-água-óleo	veja Tabela 5.3
P_{sep}	Pressão no separador (na plataforma)	ver Tabela 5.3
P_{ANM}	Pressão na ANM	ver Tabela 5.3
T_k	Temperatura na ANM	ver Tabela 5.3
j_{o0}	Velocidade superficial do óleo em <i>SC</i>	ver Tabela 5.3
ε^*	Rugosidade	0,00021 <i>m</i>
D	Diâmetro interno	0,01524 <i>m</i>

* De acordo com [Bernardo et al. \(2016\)](#).

Quanto aos erros existentes na modelagem, destacam-se os erros oriundos; da consideração do escoamento isotérmico, da discretização, da caracterização dos fluidos e do modelo de fluxo.

O erro associado aos efeitos térmicos (escoamento não isotérmico) é esperado ser pequeno visto que a temperatura média do escoamento na ANM e na plataforma são, respectivamente, por volta de 320 *K* e 293 *K* sendo que a temperatura média de 305 *K* foi considerada no trecho, a qual representa um erro máximo de temperatura por volta de 5 %. Nos sistemas de escoamento de petróleo, em regime estacionário, as variações de temperatura são muito menores que as variações de pressão e a consideração de fluxo isotérmico em casos como esse de pequena variação térmica, acarreta erros pequenos.

Para avaliar o erro da discretização a geometria do sistema (apresentada na Fig. 5.1) foi discretizada por dez divisões igualmente espaçadas entre nós adjacentes mostrados na Fig. 5.1. Adicionalmente, foi avaliado o erro na discretização reduzindo a divisão entre nós adjacentes para um trecho e também aumentando para 100 trechos obtendo-se erro padrão, respectivamente, de 1,5% e 0,5%. Isso revela que, para as condições desse estudo, a solução numérica é pouco sensível à discretização. Portanto, a principal fonte de erro nas estimativas na Tabela 5.4 estão nas equações utilizadas no modelo e não na convergência numérica do modelo.

Na modelagem do fluido está outra fonte de erros. O modelo *black-oil* não distingue as densidades entre gás livre e solubilizado. Análise *flash*, entretanto, indica que o gás livre é

Tabela 5.3: Dados de campo para o sistema *Lazy Wave*.

Dados de campo						
j_{o0} (m/s)	P_{ANM} (bar)	P_{sep} (bar)	GOR (sm ³ /sm ³)	$GORI$ (sm ³ /sm ³)	WOR	T_k (K)
1,8774	201,0	41,6	221,1	—	0,00%	308,7
1,6700	203,6	52,2	223,9	—	0,00%	308,8
1,8632	175,0	25,0	212,4	—	0,60%	307,7
1,4244	145,0	23,2	223,7	—	4,70%	308,7
1,2286	131,9	22,6	221,9	—	9,90%	306,6
1,1655	128,1	22,3	218,1	—	11,10%	306,6
1,1329	125,8	22,2	214,8	—	13,60%	306,6
1,0973	122,4	22,0	214,3	—	13,60%	306,4
0,8872	114,7	21,6	220,2	—	19,10%	306,0
0,8124	111,5	21,4	228,8	—	19,00%	305,9
0,7883	109,8	21,4	223,7	—	20,90%	305,7
0,8192	106,2	21,9	215,6	94,6	18,10%	301,8
0,7403	106,9	24,2	199,5	101,7	22,00%	301,6
0,7286	100,2	21,4	200,5	110,6	22,00%	300,6
0,7035	103,8	22,2	194,9	117,1	15,10%	298,9
0,6860	104,6	22,2	196,4	117,2	15,60%	298,6

mais leve que o gás solubilizado. Esta abordagem, porém, não conduz a erros significativos, (McCain (1990)). Existem também erros associados às próprias correlações *black-oil* utilizadas. Foram escolhidas correlações vastamente utilizadas na indústria e inclusive correlações que estão disponíveis nos simuladores comerciais de escoamento multifásico. Não havia dados experimentais de caracterização de fluidos para uma análise do desempenho e, assim, não foi possível avaliar os erros associados ao modelo de fluidos.

Os resultados obtidos para esse sistema mostram concordância com os obtidos por Vieira e Garcia (2014) em termos de velocidade de campo. Vieira e Garcia (2014) analisaram dados obtidos para um sistema água-ar em baixas pressões em condições de laboratório e utilizando diferentes velocidades de campo para o termo do atrito, a exemplo do presente estudo, obteve velocidade do centro de massa como melhor modelo para representar a velocidade do termo de atrito. No presente estudo, além da velocidade do centro de massa, os melhores resultados são obtidos quando conjuntamente são utilizadas correlações *drift-flux* mais recentes, como a correlação de Bhagwat e Ghajar (2012). Portanto, quando o padrão de escoamento observado não é estratificado, o modelo considera a correlação *drift-flux* de Bhagwat e Ghajar (2012) em conjunto com o multiplicador bifásico baseado na velocidade de centro de massa.

A convergência e a continuidade do modelo numérico foi estudado utilizando curvas

Tabela 5.4: Erro relativo da pressão na ANM em relação aos dados experimentais considerando 3 correlações para multiplicadores de duas fases ϕ_{f0}^2 e as abordagens para *drift-flux* propostas por Bendiksen (1984), Woldesemayat e Ghajar (2007) e Bhagwat e Ghajar (2012).

	Bendiksen (1984)			Woldesemayat e Ghajar (2007)			Bhagwat e Ghajar (2012)		
j_{o0} (m/s)	ϕ_{f0}^2 vol.	ϕ_{f0}^2 mass	ϕ_{f0}^2 Müller	ϕ_{f0}^2 vol.	ϕ_{f0}^2 mass	ϕ_{f0}^2 Müller	ϕ_{f0}^2 vol.	ϕ_{f0}^2 mass	ϕ_{f0}^2 Müller
1,8774	-14%	-7%	-16%	-6%	-2%	-11%	-6%	-2%	-11%
1,6700	-12%	-7%	-13%	-4%	-2%	-8%	-5%	-2%	-8%
1,8632	-22%	-8%	-24%	-12%	-4%	-18%	-11%	-3%	-17%
1,4244	-28%	-12%	-30%	-14%	-4%	-21%	-12%	-3%	-20%
1,2286	-33%	-18%	-35%	-18%	-8%	-24%	-16%	-7%	-23%
1,1655	-35%	-20%	-36%	-19%	-9%	-25%	-17%	-8%	-24%
1,1329	-37%	-23%	-38%	-21%	-11%	-27%	-19%	-10%	-26%
1,0973	-39%	-24%	-40%	-22%	-12%	-28%	-20%	-11%	-27%
0,8872	-38%	-26%	-40%	-20%	-11%	-26%	-18%	-10%	-25%
0,8124	-40%	-27%	-40%	-20%	-11%	-24%	-19%	-10%	-24%
0,7883	-42%	-30%	-42%	-23%	-14%	-26%	-21%	-13%	-26%
0,8192	-46%	-26%	-46%	-25%	-11%	-31%	-23%	-11%	-30%
0,7403	-45%	-30%	-45%	-24%	-13%	-29%	-23%	-13%	-28%
0,7286	-51%	-32%	-50%	-28%	-14%	-33%	-26%	-14%	-32%
0,7035	-42%	-25%	-41%	-20%	-7%	-23%	-18%	-7%	-23%
0,6860	-40%	-24%	-39%	-18%	-5%	-21%	-17%	-6%	-21%

de TPR (*Tubing Performance Relationship*), as quais também ilustram as diferenças entre as correlações propostas em função da vazão de líquido escoada. Curvas TPR são vastamente utilizadas na indústria de petróleo para análise nodal (Mach, Proano e Brown (1979)). No presente estudo a curva de TPR foi avaliada na seção da ANM, seção na qual as pressões medidas são avaliadas. A Fig. 5.2 mostra as curvas TPR considerando as três correlações *drift-flux* e os multiplicadores bifásicos de massa e volume. Nessa análise foi considerado $GOR = 220 \text{ sm}^3/\text{sm}^3$, pressão no separador na plataforma $P_{sep} = 20 \text{ bar}$ e $WOR = 25\%$.

As análises mostram que o modelo proposto converge para todas as vazões. Além disso, para baixas vazões, (à esquerda do ponto de mínimo da TPR) as pressões aumentam com o decréscimo da vazão. Nessa região ocorre acúmulo de líquido nas tubulações pelas baixas velocidades e a parcela gravitacional domina fortemente. Esse comportamento está de acordo com o esperado. Com o aumento das vazões, os efeitos de atrito se tornam relevantes e a curva apresenta um comportamento ascendente à direita do ponto de mínimo e está novamente de acordo com o esperado o que mostra bom desempenho do modelo numérico.

Adicionalmente foi avaliado o comportamento dos perfis de pressão ao longo do esco-

Figura 5.2: Curvas TPR na ANM para três correlações *drift-flux* (Bendiksen (1984) (B), Woldeemayat e Ghajar (2007) (W&G) e Bhagwat e Ghajar (2012) (B&G)) e duas abordagens da velocidade da mistura para multiplicador de duas fases, baseado no centro de volume (j) e centro de massa (v_m).

amento. A Fig. 5.3 apresenta curvas do modelo selecionado de acordo com os dados experimentais, ou seja, modelo *drift-flux* de Bhagwat e Ghajar (2012) e correlação para fator de atrito baseado na velocidade de centro de massa. O perfil de pressão considera a origem dos eixos na ANM. Os parâmetros de simulação utilizados são: $GOR = 220 \text{ sm}^3/\text{sm}^3$, $WOR = 10\%$ e $P_{sep} = 20 \text{ bar}$. A Fig. 5.3 revela que para altas vazões, a contribuição do atrito se torna relevante indicando que a escolha adequada do modelo de multiplicador de duas fases é fundamental. É importante notar que uma vasta faixa de vazões e pressões foram testadas e o algoritmo proposto convergiu em todos os cenários.

Figura 5.3: Perfil de pressão da ANM para a plataforma para o melhor conjunto de correlações selecionadas de acordo com os dados experimentais disponíveis.

5.2 Análise de convergência do modelo

A análise de convergência do modelo foi feita avaliando-se: (i) a convergência dos coeficientes do sistema matricial principal, (ii) análise do comportamento das variáveis de estado e da fração de vazio em estado estacionário, e (iii) análise dos autovalores.

5.2.1 Convergência de elementos de matriz e máximo autovalor

Foi considerada para essa análise uma geometria simplificada de pequenas dimensões e com apenas três nós, sendo um trecho reto descendente e um trecho reto ascendente. A Fig. 5.4 mostra a geometria em forma gráfica. A Tabela 5.5 apresenta os dados utilizados para essa análise.

A análise é feita avaliando-se, à medida que a discretização é aumentada, a convergência do maior autovalor e de cada termo do sistema matricial perturbado. Os resultados dessa análise são apresentados na Tabela 5.6. Os valores da segunda coluna da tabela são os valores

Figura 5.4: Geometria do sistema para análise da convergência do modelo.

de cada variável avaliada para a discretização igual a três nós. Nas colunas subsequentes (onde a discretização é aumentada) são apresentados os valores relativos obtidos pela divisão do valor da respectiva coluna (i) pelo valor da coluna imediatamente anterior ($i - 1$). A convergência é observada se os valores no sentido esquerda para direita (aumento da discretização) de cada variável tende à unidade, como de fato é observado. A linha “*Maior*” (segunda linha da Tabela 5.6) representa os maiores autovalores para cada discretização.

Tabela 5.5: Dados de entrada para as simulações de convergência.

Símbolo	Variável	Valores
API	Densidade API	19
γ_{g0}	Densidade relativa do gás	0,6602
Q_{o0}	Vazão volumétrica de óleo na condição de referência	$0,0058 \text{ sm}^3/\text{s}$ ($500 \text{ sm}^3/\text{d}$)
GOR	Razão-gás-óleo	$130 \text{ sm}^3/\text{m}^3$
WOR	Razão-água-óleo	0,3
T	Temperatura	323 K
D	Diâmetro interno	$0,1016 \text{ m}$
ϵ	Rugosidade	$4,6 \times 10^{-5} \text{ m}$
P_{sep}	Pressão no separador	25 bar

Tabela 5.6: Análise de convergência de elementos das matrizes do sistema: a 2ª coluna (3 nós) apresenta o valor da variável. As demais colunas (aumento da discretização) apresentam a razão entre o valor da coluna (i) e o valor anterior ($i - 1$). A linha “*Maior*” representa o maior autovalor para cada discretização.

$N \rightarrow$	3	5	9	21	27	33
	valor	$i/(i-1)$	$i/(i-1)$	$i/(i-1)$	$i/(i-1)$	$i/(i-1)$
<i>Maior</i>	-2,336E+00	1,691E+00	1,185E+00	9,960E-01	9,957E-01	9,967E-01
<i>A12</i>	-6,703E-04	9,996E-01	9,998E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A13</i>	-1,153E-10	9,998E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A21</i>	2,689E-03	9,996E-01	9,998E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A23</i>	-4,022E-09	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A31</i>	1,939E+01	9,997E-01	9,998E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A32</i>	-9,552E+01	9,999E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>A33</i>	-6,068E-05	9,998E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>B11</i>	-3,198E-01	9,991E-01	9,995E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00
<i>B12</i>	9,487E+01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>B13</i>	-6,686E-06	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>B21</i>	6,518E-03	9,988E-01	9,994E-01	9,999E-01	9,999E-01	1,000E+00
<i>B22</i>	-1,933E+00	9,997E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>B23</i>	6,872E-06	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>C12</i>	9,319E+02	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>C13</i>	-3,813E-06	9,999E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>C21</i>	1,899E+01	9,998E-01	9,999E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>C23</i>	3,143E-05	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
<i>C33</i>	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00

5.2.2 Convergência do estado estacionário

Essa análise reforça os resultados obtidos de convergência do modelo estacionário abordado na Seção 5.1. Foi avaliado o comportamento das variáveis de estado: pressão P , velocidades superficiais do gás j_g e do líquido j_l . Também avaliou-se o comportamento da fração de vazio α . Para essas análises foram considerados os mesmos dados da Tabela 5.5. A geometria considerada nessa análise é a geometria apresentada na Fig. 5.5. Essa geometria é a mesma geometria utilizada por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#), ou seja, uma geometria com dimensões semelhantes aos sistemas reais de produção de petróleo. O intuito, novamente, é avaliar as principais variáveis do escoamento estacionário para sistemas que escoam em altas pressões como ocorre em sistemas reais de produção de petróleo.

Figura 5.5: Geometria do sistema [Nemoto e Baliño \(2012\)](#).

Na Fig. 5.6 apresenta-se o perfil de pressão ao longo do escoamento. Observa-se que a pressão é máxima na ANM e decresce ao longo da *flowline* e *riser*, sendo que a taxa de queda da pressão é maior no *riser* conforme esperado. Também observa-se que não existem

descontinuidades no gráfico da pressão.

Figura 5.6: Perfil de pressão para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.

Na Fig. 5.7 apresentam-se os perfis de velocidades superficiais do líquido e do gás ao longo do escoamento. Observa-se que a velocidade do gás aumenta ao longo do escoamento devido à compressibilidade e os efeitos da transferência de massa e a velocidade do líquido diminui devido aos efeitos da transferência de massa.

Na Fig. 5.8 apresenta-se a fração de vazio ao longo do escoamento. Observa-se que a fração de vazio apresenta baixa variação na *flowline* e alta variação no *riser* devido a maior presença de gás neste. Além disso, nota-se uma variação brusca próxima à base do *riser* indicando acúmulo de líquido.

Pelas análises das Fig. (5.6, 5.7 e 5.8) nota-se que o comportamento das variáveis (P , j_g , j_l e α) ao longo do escoamento apresentaram coerência com o escoamento multifásico mostrando bom desempenho do modelo estacionário.

Figura 5.7: Velocidades superficiais do gás e do líquido para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.

Figura 5.8: Fração de vazio para a geometria da Fig. 5.5 e dados de entrada da Tabela 5.5.

5.2.3 Análise dos autovalores

A análise dos autovalores permite também avaliar a consistência do modelo numérico. Nessa análise foi avaliado o maior autovalor considerando uma geometria fixa de três nós (semelhante a geometria da Fig. 5.4, porém em dimensões do sistema do [Nemoto e Baliño \(2012\)](#), o qual é um sistema semelhante ao utilizado na indústria. Assim, a geometria base consistiu de um trecho reto descendente de 1000 m e um trecho inclinado ascendente, conforme Fig. 5.9. O objetivo de se utilizar nessa análise uma geometria de dimensões encontradas em campos produtores de petróleo foi para avaliar o comportamento dos autovalores do modelo quando aplicado para um sistema com vazões da ordem das vazões observadas em campo onde os fenômenos complexos tais como de transferência de massa e da compressibilidade são mais relevantes. O comportamento do maior autovalor para cada vazão foi avaliado aumentando-se a discretização. Os dados de entrada são os dados da Tabela 5.5, exceto a vazão visto que essa foi considerada variável.

Figura 5.9: Geometria considerada na análise dos maiores autovalores.

A Fig. 5.10 apresenta os autovalores partindo da vazão de óleo de $50 \text{ m}^3/\text{d}$ até a vazão de $950 \text{ m}^3/\text{d}$ e aumentando a discretização de 3 nós até a discretização de 73 nós. Nota-se que de fato ocorre a convergência do maior autovalor para todas as vazões a medida que a discretização é aumentada. É importante observar que a análise de estabilidade deve ser avaliada considerando um número suficiente de nós. Por exemplo, se no sistema da Fig. 5.9 fosse considerado apenas três nós, o resultado da análise de estabilidade para baixas vazões indicaria que o sistema seria estável. No entanto, uma discretização maior indica que para baixas vazões o sistema é instável como se observa na Fig. 5.10.

Figura 5.10: Comportamento do maior autovalor para a faixa de vazões de óleo de $50 \text{ m}^3/\text{d}$ a $950 \text{ m}^3/\text{d}$ variando-se a discretização da Fig. 5.9.

A Fig. 5.11 apresenta os autovalores partindo da vazão de $1150 \text{ m}^3/\text{d}$ até a vazão de $2050 \text{ m}^3/\text{d}$ e aumentando a discretização de 3 nós até a discretização de 73 nós. Nota-se também para essa faixa de vazões que ocorre a convergência do maior autovalor para todas as vazões a medida que a discretização é aumentada.

Com todas as análises realizadas de convergência, conclui-se que o modelo de estabili-

Figura 5.11: Comportamento maior autovalor para a faixa de vazões de óleo de $1050 \text{ m}^3/\text{d}$ a $2050 \text{ m}^3/\text{d}$ variando-se a discretização da Fig. 5.9.

dade apresentou bom desempenho e convergiu para todo o domínio de velocidades superficiais das fases.

5.3 Análise dinâmica do sistema de Nemoto e Baliño (2012)

O primeiro sistema a ser analisada a estabilidade é o sistema estudado por Nemoto e Baliño (2012). A Tabela 5.5 apresenta os dados utilizados. A Tabela 5.7 apresenta a geometria do sistema, a qual está também representada na Fig. 5.5. Os autores obtiveram a curva de estabilidade através de simulações transientes. O modelo base que eles utilizaram apresenta diferenças importantes com relação ao modelo dessa tese. O modelo de Nemoto e Baliño (2012) considera os parâmetros concentrados no trecho *flowline*, no qual ondas de fração de vazio são desprezadas (a fração de vazio é admitida constante e tem-se um padrão estratificado), enquanto no presente

modelo considera-se parâmetros distribuídos. Além disso, na modelagem de fluidos os autores utilizaram correlações parametrizadas por [Velarde, Blasingame e McCain \(1999\)](#) e no presente estudo optou-se por utilizar um conjunto de correlações que são mais utilizadas na indústria de Petróleo no Brasil. Mesmo com essas diferenças é esperado que a curva de estabilidade apresente um traçado semelhante. A Fig. 5.12 apresenta a curva de estabilidade obtida pelo modelo proposto considerando a abordagem do centro de volume da velocidade superficial para o termo de atrito e a correlação *drift-flux* de [Bendiksen \(1984\)](#), mesmas abordagens adotadas por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#). Para esse caso estudado foi considerado que na *flowline* o escoamento é estratificado, ou seja, não foi considerado o critério de transição. Essa simplificação foi imposta porque foi também adotada no trabalho de [Nemoto e Baliño \(2012\)](#). Na mesma figura em cor vermelha está a curva obtida pelos autores.

Tabela 5.7: Geometria da Fig. 5.5, onde nós (i) representam nós internos.

Localização	$x(m)$	$z(m)$	nós (i)	Localização	$x(m)$	$z(m)$	nós (i)
Plataforma	1844,4	1265,1	-	<i>Riser</i>	1359,4	140,32	5
<i>Riser</i>	1799,4	1088,25	5	<i>Riser</i>	1319,4	101,58	5
<i>Riser</i>	1759,4	947,61	5	<i>Riser</i>	1279,4	68,28	5
<i>Riser</i>	1719,4	821,05	5	<i>Riser</i>	1239,4	40,08	5
<i>Riser</i>	1679,4	707,27	5	<i>Riser</i>	1199,4	16,68	5
<i>Riser</i>	1639,4	605,11	5	<i>Riser</i>	1159,4	-2,13	5
<i>Riser</i>	1599,4	513,54	5	<i>Riser</i>	1119,4	-16,57	5
<i>Riser</i>	1559,4	431,60	5	<i>Riser</i>	1079,4	-26,79	5
<i>Riser</i>	1519,4	358,48	5	<i>Riser</i>	1039,4	-32,87	5
<i>Riser</i>	1479,4	293,41	5	<i>Flowline</i>	999,4	-34,9	10
<i>Riser</i>	1439,4	235,75	5	ANM	0	0	10
<i>Riser</i>	1399,4	184,89	5	-	-	-	-

Nota-se que existem de fato diferenças entre as curvas, porém, o formato é semelhante, indicando que o presente modelo consegue capturar a curva de estabilidade sem a necessidade da modelagem transiente. Nota-se que em todo o domínio de velocidades superficiais houve convergência entre os modelos. A Fig. 5.13 apresenta a mesma análise anterior, porém considerando outros modelos *drift-flux* investigados nesse estudo e ambas abordagens da velocidade do termo de atrito (centro de massa e centro de volume). Em vermelho está a curva de Nemoto para comparação com os demais modelos. Em preto está a abordagem de centro de volume e correlação *drift* de Bendiksen. Em amarelo a abordagem centro de volume e correlação *drift* de Bhagwat e em azul a abordagem de centro de massa e correlação *drift* de Bhagwat. Novamente nota-se que as curvas apresentam o mesmo formato mostrando convergência entre os modelos.

Figura 5.12: Curva de estabilidade obtida por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) e pelo modelo proposto considerando a abordagem de centro de volume para velocidade superficial da mistura e correlação *drift-flux* de [Bendiksen \(1984\)](#).

Figura 5.13: Diversas curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo considerando a abordagem centro de volume e centro de massa e confrontando com a curva de estabilidade de [Nemoto e Baliño \(2012\)](#).

5.4 Análise dinâmica de sistemas de campo

Diversos sistemas produtivos que apresentam instabilidades serão avaliados nessa seção confrontando com dados experimentais. Os seguintes sistemas serão avaliados: Catenária 1 (ver Seção 5.4.1), *Lazy Wave* (ver Seções 5.1 e 5.4.2), Catenária 2 (ver Seção 5.4.3) e Catenária 3 (ver Seção 5.4.4). Os quatro sistemas apresentam dados de campos e são distintos em termos de velocidades superficiais, características de fluido, condições de contorno e geometria. Assim, esses sistemas serão fundamentais para testar o modelo, avaliando se o mesmo é capaz de capturar o estado de estabilidade de diversos pontos operacionais. A análise é realizada através da plotagem do mapa de estabilidade para o sistema de produção, cujos eixos cartesianos estão as velocidades superficiais do gás (eixo horizontal) e do líquido (eixo vertical). Nesse sistema são plotados os pontos operacionais obtidos através de testes de produção de petróleo, cujos erros nas variáveis de interesse são inferiores a 1%. Quando o teste está localizado internamente ao mapa, o modelo considera que o teste é instável, do contrário, estável, conforme visto na Seção 2.2.

Para a captura dos dados experimentais foi considerado um período de produção para cada um dos quatro sistemas e os dados capturados via sistema de aquisição *on line* de dados emitidos via cabos elétricos e sensores instalados no fundo do poço, na ANM e na plataforma. Este sistema é designado de P.I. (*Plant Information*, sistema *on line* de informações da planta de processo e do sistema *sub-sea* das plataformas). Os registros foram feitos de pressão e ocorrem aproximadamente a cada três segundos. Como o período de captura de dados é longo, pode ocorrer alguns intervalos com poço fechado ou com falha indicando baixa ou nula flutuação do poço, mas que ao se observar o comportamento dos registros graficamente pode-se desconsiderar tais intervalos. Além disso, pontos operacionais de produção (conhecidos na indústria como testes de produção) com registro das variáveis pressão na ANM e na plataforma, *GOR*, *WOR* e vazão de óleo foram capturados para avaliar a estabilidade desses pontos operacionais nos mapas de estabilidade gerados numericamente. Todos os pontos operacionais foram capturados com o *choke* de produção totalmente aberto. Assim, esse equipamento não foi incluído no modelo.

Em todos os sistemas analisados com dados de campo foi considerado um critério de verificação do padrão de escoamento na *flowline*. O modelo proposto para essa verificação se assemelha à abordagem física proposta por Taitel, Barnea e Brill (1995) e foi o adotado, embora haja diferenças entre os modelos físicos visto que Taitel, Barnea e Brill (1995) consideraram uma equação para a fase gás, uma para fase óleo e uma para fase água e no modelo dessa tese foi considerado escoamento homogêneo entre água e óleo resultando em fluxo bifásico líquido-gás.

Taitel e Dukler (1976) também apresentaram um modelo para verificação do fluxo estratificado para fluxo bifásico, mas considerando água-ar. Uma comparação em termos de curva de estabilidade foi realizada entre as duas modelagens e a diferença observada foi desprezível. Optou-se por se adotar o modelo de Taitel, Barnea e Brill (1995), porque o mesmo foi desenvolvido para petróleo. Na Seção I.4 são apresentadas as duas abordagens para o critério de verificação do padrão de escoamento.

5.4.1 Análise do sistema Catenária 1

Esse é um sistema real de escoamento que apresentou instabilidades desde o início da produção devido a vazões de produção muito aquém das esperadas. A geometria do sistema apresenta uma *flowline* e um *riser* em catenária, sendo a *flowline* constituída por um trecho levemente descendente de aproximadamente 2823 m de comprimento. Já o *riser* apresenta um comprimento de aproximadamente 1448 m. Essa geometria é apresentada pela Fig. 5.14 e através da Tabela 5.8.

Figura 5.14: Geometria do sistema Catenária 1.

Tabela 5.8: Geometria da Fig. 5.14 (Catenária 1), onde nós (i) representam nós internos.

Localização	$x(m)$	$z(m)$	nós (i)
Plataforma	3288	1289	-
<i>Riser</i>	3195	652	10
<i>Riser</i>	3009	110	10
<i>Riser</i>	2823	-26	6
<i>Flowline</i>	2275	-21	6
<i>Flowline</i>	1516	-14	6
ANM	0	0	10

Os dados de fluidos, diâmetro e rugosidades para as simulações do sistema Catenária 1 são apresentados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 1).

Símbolo	Variável	Valor
γ_{API}	$^{\circ}API$	32, 21
γ_{g0}	Densidade do gás em SC	0, 6
T_r	Temperatura do reservatório	365 K
P_b	Pressão de bolha na T_r	320 bar
T	Temperatura utilizada	310 K
GOR	Razão-gás-óleo	140 sm^3/sm^3
WOR	Razão-água-óleo	Entre 4, 2% e 42, 9%
P_{sep}	Pressão no separador	Entre 20 bar e 39 bar
ε	Rugosidade	0, 0006096 m
D	Diâmetro interno	0, 1524 m

Um período de dados de pressão desse sistema foi capturado via sistema de aquisição *on line* P.I. onde se observam instabilidades, as quais acarretam transtornos operacionais e perdas de produção. Como estratégia da indústria para reduzir os problemas operacionais, o *gas lift* foi implementado e utilizado para reduzir as instabilidades. A Fig. 5.15 apresenta dados de P.I. selecionados de forma a representar um período de produção instável. Nota-se que de fato o poço apresenta instabilidades severas detectadas pelos três sensores.

A Fig. 5.16 apresenta duas curvas de estabilidade considerando ambos os critérios de definição da velocidade de campo (centro de massa e centro de volume) e pressão de separação de 20 bar . Na mesma figura são plotados pontos amostrais de campo obtidos a partir de testes de produção. Esses pontos são instáveis com oscilações das variáveis de escoamento de forma considerável. A variável pressão, por exemplo, apresentou para esses pontos oscilações acima de 5 bar na plataforma. Nota-se que os pontos de fato se situam na região instável tendo sido

Figura 5.15: Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 1).

capturados pelo modelo. Algumas importantes simplificações do modelo em relação a realidade estão sendo consideradas. O sistema real de produção inclui o reservatório e a coluna de produção e o modelo de estabilidade considera apenas o trecho da ANM até a plataforma. Além disso, a condição de contorno na ANM é de fluxo mássico constante enquanto na realidade a condição de contorno é o meio poroso com respostas transitórias às oscilações. Apesar dessas simplificações o modelo foi capaz de capturar a instabilidade visto que os pontos se situam em uma região bastante instável. Possivelmente se os pontos se localizassem mais próximos à fronteira, o modelo proposto falhasse pelas simplificações adotadas. Observa-se que o modelo global converge para qualquer velocidade superficial. Por fim nota-se uma diferença considerável entre as duas abordagens da velocidade do termo de atrito. Como observado na análise estacionária a abordagem considerando a velocidade do centro de massa resultou em melhores resultados.

A Fig. 5.17 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição ope-

Figura 5.16: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 20 \text{ bar}$, $WOR = 4\%$.

racional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 20 bar para 39 bar . Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a instabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

A Fig. 5.18 apresenta uma análise semelhante à anterior, porém, alterando a pressão de separação de 39 bar para 29 bar , nova condição operacional. Novamente nota-se convergência do modelo de estabilidade para todo o domínio de velocidades superficiais. Também nota-se que o modelo capturou a condição operacional instável, mesmo com as simplificações propostas.

Figura 5.17: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 39 \text{ bar}$, $WOR = 4\%$.

Figura 5.18: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 1). $P_{sep} = 29 \text{ bar}$, $WOR = 4\%$.

5.4.2 Análise do sistema *Lazy Wave*

Esse é um sistema real de escoamento que começou a apresentar instabilidades após certo período de produção estável devido à queda da vazão de líquido pela redução do índice de produtividade do poço oriundos de fenômenos de garantia do escoamento, mais especificamente, de incrustação. A geometria do sistema apresenta uma *flowline* e um *riser* em *lazy wave*, sendo a *flowline* constituída por: um trecho levemente descendente de aproximadamente 5885 m de comprimento e um trecho horizontal de aproximadamente 728 m. Já o *riser* apresenta um comprimento de aproximadamente 2770 m. Essa geometria é apresentada pela Fig. 5.1 e através da Tabela 5.1. Os dados de fluido estão representados na Tabela 5.2.

Os dados de pressão desse sistema foram capturados via P.I. O poço vinha produzindo de forma estável, mas com a redução contínua da vazão, o poço começou a apresentar instabilidades causando transtornos operacionais e perdas de produção. A injeção de *gas lift* via válvula instalada na coluna de produção foi utilizada para reduzir as instabilidades. A Fig. 5.19 apresenta dados de P.I. selecionados de forma a representar esses três períodos de estabilidade. Nota-se que de fato o poço vinha produzindo de forma estável e começou a apresentar instabilidades detectadas pelos três sensores. O *gas lift* foi eficiente para retornar à estabilidade.

Pontos estáveis e instáveis, incluindo o período da Fig. 5.19, obtidos a partir de testes de produção, foram capturados e plotados em mapas de estabilidade desse sistema. A Fig. 5.20 apresenta duas curvas de estabilidade considerando a abordagem centro de massa e centro de volume, ambas com o critério trifásico de definição da ocorrência do escoamento estratificado na *flowline*. A pressão de separação nessa análise foi de 22 bar e $WOR = 20\%$. Na mesma figura são plotados os pontos amostrais de campo obtidos a partir de testes de produção. Parte desses pontos são instáveis, com oscilações consideráveis das variáveis de escoamento. A variável pressão, por exemplo, apresentou para esses pontos, oscilações acima de 5 bar na plataforma. Nota-se que os pontos amostrais instáveis de fato se situam na região instável tendo sido capturados pelo modelo. Os pontos amostrais estáveis se situaram na região externa às curvas de estabilidade (região estável), sendo também bem representados pelo modelo numérico. A comparação dos modelos centro de massa e centro de volume permite concluir que a abordagem pelo centro de massa acarreta uma região maior de instabilidades. Isso se deve a essa abordagem resultar em menor atrito, como já mostrado no início desse capítulo na análise do sistema estacionário. O conjunto de pontos selecionados nessa análise é importante para testar a capacidade do modelo de estabilidade de capturar o estado de estabilidade de pontos operacionais nas proximidades da fronteira. Os pontos instáveis de testes de produção foram obtidos em período subsequente ao estável, conforme a Fig. 5.19 e assim, a fronteira de estabilidade foi

Figura 5.19: Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (*Lazy Wave*).

representada através desses pontos. De fato, o modelo numérico capturou bem tanto os pontos estáveis como os instáveis em região atravessando a fronteira, (Fig. 5.20).

A Fig. 5.21 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 22 *bar* para 25 *bar* e a *WOR* de 20% para 4%. Nessa condição operacional, apenas pontos estáveis estavam disponíveis e estão plotados na Fig. 5.21. Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas com geometrias complexas de produção de petróleo.

A Fig. 5.22 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 25 *bar* para 40 *bar* e a *WOR* de 4% para 0, 5%. Nessa condição operacional, apenas pontos estáveis estavam disponíveis e estão plotados na Fig. 5.22. Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de

Figura 5.20: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (*Lazy Wave*). $P_{sep} = 22 \text{ bar}$, $WOR = 20\%$.

velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

Figura 5.21: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (*Lazy Wave*). $P_{sep} = 25 \text{ bar}$, $WOR = 4\%$.

Figura 5.22: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (*Lazy Wave*). $P_{sep} = 40 \text{ bar}$, $WOR = 0,5\%$.

5.4.3 Análise do sistema Catenária 2

Esse é também um sistema real de escoamento que apresentou instabilidades durante a produção. Esse sistema apresenta um diâmetro maior dos sistemas anteriormente apresentados (8 polegadas ao invés de 6 polegadas). A geometria do sistema apresenta uma *flowline* e um *riser* em catenária, sendo a *flowline* constituída por: um trecho descendente de aproximadamente 5233 m de comprimento e um trecho de *riser* com um comprimento de aproximadamente 1205 m, (Fig. 5.23 e Tabela 5.10).

Figura 5.23: Geometria do sistema Catenária 2.

Tabela 5.10: Nós centrais da geometria da Fig. 5.23 (Catenária 2).

Localização	$x(m)$	$z(m)$	Localização	$x(m)$	$z(m)$
Plataforma	5648,4	980,8	Flowline	4737,3	-83,6
Riser	5509,4	249,9	Flowline	3852,4	-68,0
Riser	5370,8	-22,9	Flowline	479,9	-8,5
Riser*	5232,2	-92,3	ANM	0,0	0,0

* Base do riser.

Os dados de fluidos, diâmetro e rugosidades para as simulações do sistema Catenária 2 são apresentados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 2).

Símbolo	Variável	Valor
γ_{API}	°API	18,32
γ_{g0}	Densidade do gás em SC	0,67
T_r	Temperatura do reservatório	343 K
P_b	Pressão de bolha na T_r	250 bar
T	Temperatura utilizada	315 K
GOR	Razão-gás-óleo	81 sm^3/sm^3
WOR	Razão-água-óleo	Entre 0,1% e 60%
P_{sep}	Pressão no separador	Entre 25 bar e 44 bar
ε	Rugosidade*	0,00027 m
D	Diâmetro interno	0,2032 m

* De acordo com [Bernardo et al. \(2016\)](#).

Os dados de pressão desse sistema foram capturados via P.I. O período analisado foi do mês 09/2009 ao mês 12/2010. A Fig. 5.24 apresenta dados de P.I. selecionados de forma a representar esses três períodos de estabilidade. Observa-se, através do três sensores, instabilidades as quais causam transtornos operacionais e perdas de produção.

Pontos instáveis no período representado na Fig. 5.24 obtidos a partir de testes de produção foram capturados e plotados em mapas de estabilidade desse sistema. A Fig. 5.25 apresenta duas curvas de estabilidade considerando a abordagem centro de massa e centro de volume ambas com o critério trifásico de definição da ocorrência do escoamento estratificado na *flowline*. A pressão de separação nessa análise foi de 44 bar e a $WOR = 0,1\%$. Na mesma figura é plotado um ponto operacional de campo obtido a partir de um teste de produção. Esse ponto é instável com oscilações das variáveis de escoamento de forma considerável. A variável pressão, por exemplo, apresentou para esse ponto oscilações acima de 15 bar na plataforma. Nota-se que o ponto amostral instável de fato se situa na região instável tendo sido capturado pelo modelo numérico. Conforme já mostrado nas análises dos sistemas anteriores, a comparação dos modelos centro de massa e centro de volume permite concluir que a abordagem pelo centro de massa acarreta uma região maior de instabilidades. Isso se deve a essa abordagem resultar em menor atrito, como já mostrado no início desse capítulo na análise do sistema estacionário.

A Fig. 5.26 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 44 bar para 25 bar e a WOR de 0,1% para 15%. O ponto operacional plotado com base em teste de produção é instável e de

Figura 5.24: Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 2).

fato ficou localizado na região instável do mapa. Novamente nota-se que o modelo numérico converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

A Fig. 5.27 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 22 *bar* para 40 *bar* e a *WOR* de 15% para 150%. Nesse cenário três testes de produção foram plotados, todos instáveis conforme observações de campo e esses pontos de fato ficaram localizados na região instável. Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

Figura 5.25: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 44 \text{ bar}$, $WOR = 0,1\%$.

Figura 5.26: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 25 \text{ bar}$, $WOR = 15\%$.

Figura 5.27: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 2). $P_{sep} = 40 \text{ bar}$, $WOR = 150\%$.

5.4.4 Análise do sistema Catenária 3

Esse é também um sistema real de escoamento que apresentou instabilidades durante a produção. Esse sistema se distingue dos anteriores pela menor lâmina de água, menores pressões e menor *GOR*. A geometria do sistema apresenta uma *flowline* e um *riser* em catenária, sendo a *flowline* constituída por: um trecho descendente de aproximadamente 4012 m de comprimento e um trecho de *riser* com um comprimento de aproximadamente 471 m. Essa geometria é apresentada pela Fig. 5.28 e através da Tabela 5.12. A profundidade da ANM desse sistema é de 260 m

Figura 5.28: Geometria do sistema Catenária 3.

Os dados de fluidos, diâmetro e rugosidades para as simulações do sistema Catenária 3 são apresentados na Tabela 5.13.

Os dados de pressão desse sistema foram capturados via sistema P.I. O período analisado foi do mês 09/13 a 05/17. Selecionou-se um período contido entre os meses 03/2017 a 05/2017 de forte instabilidades para representá-lo graficamente a partir de dados de P.I. A Fig. 5.29 apresenta dados de P.I. selecionados de forma a representar esse período. Nota-se

Tabela 5.12: Nós centrais da geometria da Fig. 5.28 (Catenária 3).

Localização	$x(m)$	$z(m)$	Localização	$x(m)$	$z(m)$
Plataforma	4268,47	259,9	<i>Riser</i>	4096,40	12,3
<i>Riser</i>	4264,59	234,9	<i>Riser</i>	4077,97	-0,6
<i>Riser</i>	4260,83	164,3	<i>Riser</i>	4059,50	-17,0
<i>Riser</i>	4257,51	136,9	<i>Riser</i>	4039,64	-30,3
<i>Riser</i>	4253,42	109,2	<i>Riser</i>	4013,91	-37,8
<i>Riser</i>	4244,27	71,7	<i>Riser*</i>	4011,99	-40,1
<i>Riser</i>	4227,54	35,7	<i>Flowline</i>	3821,09	-40,1
<i>Riser</i>	4205,33	16,9	<i>Flowline</i>	3451,12	-35,1
<i>Riser</i>	4181,62	11,1	<i>Flowline</i>	2541,08	-25,1
<i>Riser</i>	4152,84	15,4	<i>Flowline</i>	1541,13	-15,1
<i>Riser</i>	4129,55	18,5	<i>Flowline</i>	541,08	-5,1
<i>Riser</i>	4111,52	16,9	ANM	0,0	0,0

* Base do *riser*.

Tabela 5.13: Dados básicos de entrada para simulação (Catenária 3).

Símbolo	Variável	Valor
γ_{API}	$^{\circ}API$	33, 79
γ_{g0}	Densidade do gás em <i>SC</i>	0, 985
T_r	Temperatura do reservatório	454, 4 <i>K</i>
P_b	Pressão de bolha na T_r	83, 8 <i>bar</i>
T	Temperatura utilizada	338 <i>K</i>
<i>GOR</i>	Razão-gás-óleo	49, 6 sm^3/sm^3
<i>WOR</i>	Razão-água-óleo	Entre 4% e 29%
P_{sep}	Pressão no separador	Entre 9, 8 <i>bar</i> e 11 <i>bar</i>
ε	Rugosidade*	0, 00021 <i>m</i>
D	Diâmetro interno	0, 1524 <i>m</i>

* De acordo com [Bernardo et al. \(2016\)](#).

que de fato o poço apresentou fortes instabilidades detectadas pelos três sensores. Observa-se instabilidades severas as quais causam transtornos operacionais e perdas de produção.

Pontos instáveis no período 09/13 a 05/17 (o que inclui o período apresentado na Fig. 5.29) e obtidos a partir de testes de produção foram capturados e plotados em mapas de estabilidade desse sistema. A Fig. 5.30 apresenta duas curvas de estabilidade considerando a abordagem centro de massa e centro de volume ambas com o critério trifásico de definição da ocorrência do escoamento estratificado na *flowline*. A pressão de separação nessa análise foi de 11 *bar* e a $WOR = 4,8\%$. Na mesma figura são plotados pontos operacionais de campo obtido a partir de testes de produção. Os pontos em vermelho são instáveis com oscilações das variáveis de escoamento de forma considerável. A variável pressão, por exemplo, apre-

Figura 5.29: Dados de pressão obtidos através de P.I. Dados de fundo de poço, da ANM e da plataforma (Catenária 3).

sentou oscilações acima de 3 bar na plataforma. Nota-se que os pontos amostrais instáveis de fato se situam na região instável tendo sido capturado pelo modelo numérico. Os pontos em amarelo são considerados também instáveis pelo modelo numérico, mas na prática se observou que esses pontos apresentaram oscilações muito pequenas, da ordem de $0,2 \text{ bar}$. Tais oscilações são perfeitamente aceitáveis na produção de petróleo e, dessa forma, esses pontos, são, na prática considerados estáveis, embora numericamente sejam instáveis. Conforme já mostrados nas análises dos sistemas anteriores, a comparação dos modelos centro de massa e centro de volume permite concluir que a abordagem pelo centro de massa acarreta uma região maior de instabilidades. Isso se deve a essa abordagem resultar em menor atrito, como já mostrado no início desse capítulo na análise do sistema estacionário.

A Fig. 5.31 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 11 bar para 10 bar e a WOR de $4,8\%$ para $8,2\%$. Os pontos operacionais instáveis com base em teste de produção de fato

Figura 5.30: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 11 \text{ bar}$, $WOR = 4,2\%$.

ficaram localizados na região instável do mapa. Os pontos operacionais levemente instáveis, ou seja, com oscilações aleatórias muito pequenas, ficaram na região instável devido ao modelo numérico. Novamente nota-se que o modelo numérico converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

A Fig. 5.32 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi alterada de 10 bar para $9,8 \text{ bar}$ e a WOR de $8,2\%$ para 15% . Nesse cenário três testes de produção foram plotados, todos instáveis conforme observações de campo e esses pontos de fato ficaram localizados na região instável. Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

Figura 5.31: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 10 \text{ bar}$, $WOR = 8,2\%$.

A Fig. 5.33 apresenta as mesmas análises anteriores, porém, para uma condição operacional diferente onde a pressão de separação foi mantida em $9,8 \text{ bar}$ e a WOR alterada de 15% para 29%. Nesse cenário quatro testes de produção foram plotados, todos instáveis conforme observações de campo e esses pontos de fato ficaram localizados na região instável. Novamente nota-se que o modelo converge para todo o domínio de velocidades superficiais e mais uma vez o modelo foi capaz de prever a estabilidade dessa condição operacional mostrando potencial da metodologia proposta para estudos de estabilidade para sistemas de produção de petróleo.

Figura 5.32: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 9,8 \text{ bar}$, $WOR = 15\%$.

Figura 5.33: Curvas de estabilidade geradas pelos modelos desenvolvidos nesse estudo incorporando dados de campo (Catenária 3). $P_{sep} = 9,8 \text{ bar}$, $WOR = 29\%$.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nesse capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas dessa pesquisa e as recomendações para futuros trabalhos nessa linha de pesquisa.

6.1 Conclusões

A intermitência severa é um problema real na produção de petróleo e traz impactos negativos em termos de produção. Modelos confiáveis e ao mesmo tempo simples que possibilitam prever a ocorrência de instabilidades ainda na fase de projeto podem trazer benefícios importantes para a indústria como apontado na introdução do presente trabalho. No presente estudo propõe-se uma metodologia de análise da estabilidade em sistema de produção de petróleo com base na teoria da estabilidade linear. Com esse método é possível utilizar um modelo de escoamento multifásico mais completo e avaliar a estabilidade em sistemas de produção de petróleo sem, no entanto, simular temporalmente o escoamento. Os resultados obtidos pelo modelo proposto foram comparados com dados da literatura e dados de campo indicando resultados excelentes, considerando as simplificações e incertezas inerentes a este tipo de sistemas e escoamentos.

Análises do estado estacionário, estado base para o modelo de estabilidade, foram realizadas em um sistema real de produção de petróleo que escoar em altas pressões e os resultados numéricos comparados com dados de campo. Nessas análises, diversas relações de fechamento *drift flux* e multiplicadores de duas fases foram testadas sendo escolhido o conjunto de relações que resultaram em menores erros com relação aos dados amostrais utilizados. Os resultados obtidos, mostraram bom desempenho do modelo proposto com erros relativos em termos de pressões no escoamento menores que 15 %. Na análise do estado estacionário foram confrontados três correlações *drift-flux* e três correlações de multiplicadores de duas fases. O melhor desempenho observado foi ao se utilizar o multiplicador de duas fases com base na velocidade de centro de massa, conforme [Vieira e Garcia \(2014\)](#) e [Ishii e Hibiki \(2006\)](#), e a correlação de [Ghajar e Bhagwat \(2013\)](#). Os principais resultados do estado estacionário foram publicados por [Andreolli, Zortea e Baliño \(2017\)](#).

Diversas análises de convergência foram realizadas para testar o modelo em um amplo domínio de velocidades superficiais e pressão. As principais análises realizadas foram: (i) análise da convergência do estado estacionário, (ii) análise da convergência de cada termo matricial do modelo de estabilidade a medida que a discretização da geometria era aumentada e (iii) análise do comportamento do maior autovalor com o aumento da discretização da geometria. Várias geometrias foram testadas nessas análises, desde a geometria com apenas três nós até geometrias mais complexas, com mais de cem nós. Tanto o modelo estacionário como o modelo de estabilidade desenvolvido apresentaram boa convergência em todo domínio de velocidades superficiais. Um algoritmo foi desenvolvido para auxiliar na construção dos mapas de estabilidade mostrando bom desempenho em termos de convergência e rapidez na construção da curva.

O mapa de estabilidade construído por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) através de simulações transientes foi reproduzido de forma aproximada pelo modelo de estabilidade proposto. As pequenas diferenças observadas entre os mapas foram atribuídas às diferenças entre os modelos de escoamento e o modelo de fluidos. O modelo de escoamento proposto por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) é um modelo de parâmetros concentrados na *flowline*. Já o modelo de escoamento proposto na presente tese é um modelo de parâmetros distribuídos. Além disso, existem diferenças nas correlações *black-oil* utilizadas. No presente estudo optou-se por se selecionar um conjunto de correlações *black-oil* que são muito utilizadas na indústria. O fato do modelo de estabilidade proposto reproduzir mapas de estabilidade obtidos através de simulações transientes indica bom potencial dessa metodologia para aplicações na indústria. Um módulo de estabilidade, por exemplo, incorporado nos códigos de simuladores comerciais permanentes, poderia fornecer informações importantes, principalmente em cenários de simulações em que as análises transientes se tornam proibitivas devido ao tempo de resposta e à quantidade de simulações necessárias.

Quatro sistemas de campo com diversos pontos amostrais foram utilizados para avaliar a capacidade da metodologia proposta em prever a estabilidade desses pontos operacionais e a convergência. Os sistemas escolhidos apresentam características bem distintas entre si tais como: fluidos, geometrias, diâmetros, pressões e vazões. Os sistemas escolhidos foram: Catenária 1, *Lazy Wave*, Catenária 2 e Catenária 3. Nos três sistemas houve convergência em todo o domínio de velocidades superficiais e excelente captura da estabilidade dos pontos operacionais.

No sistema Catenária 1, três condições operacionais de *Psep* e *WOR* foram testadas, sendo a primeira condição operacional com nove testes de campo instáveis, a segunda e terceira condição operacional com um teste de campo instável cada um. Os onze testes instáveis foram

capturados pelo modelo proposto mostrando bom desempenho do modelo e da metodologia proposta. Um período de captura contínua de produção instável via sistema P.I. é também apresentado mostrando que esse sistema está escoando de fato de forma instável.

No sistema *Lazy Wave*, três condições operacionais de *Psep* e *WOR* foram testadas, sendo a primeira condição operacional com sete testes de campo, sendo três instáveis e quatro estáveis, a segunda e terceira condição operacional com dois testes de campo estável cada um. Os onze testes de estabilidade foram capturados pelo modelo proposto mostrando bom desempenho do modelo e da metodologia proposta. Um período de captura contínua de produção instável via sistema P.I. é também apresentado mostrando que esse sistema escoava na condição estável e, pela queda da vazão de líquido e gás, se tornou instável. O *gas lift* foi introduzido retornando à estabilidade mostrando também uma forma de controle da estabilidade.

No sistema Catenária 2 três condições operacionais de *Psep* e *WOR* foram testadas, sendo as duas primeiras condições operacionais com um teste de campo, sendo ambas instáveis e a terceira condição operacional, com três testes de campo, instável também. Os cinco testes de estabilidade foram capturados pelo modelo proposto mostrando bom desempenho do modelo e da metodologia proposta. Um período de captura contínua de produção instável via sistema P.I. é também apresentado mostrando que esse sistema escoava de fato de forma instável.

Finalmente no sistema Catenária 3 quatro condições operacionais foram testadas, sendo a primeira condição com nove testes de campo, com três instáveis e seis praticamente estáveis, a segunda sendo sete instáveis e dez praticamente estáveis, a terceira e quarta condição operacional com três e seis testes de campo instáveis cada um, respectivamente. Embora os testes de produção considerados praticamente estáveis pelas pequenas oscilações apresentadas, da ordem de 0,2 bar, não acarretem transtornos operacionais significativos, do ponto de vista da estabilidade hidrodinâmica esses testes são instáveis e, o modelo, mais uma vez capturou esta condição operacional.

Pode-se afirmar que para todos os pontos amostrais dos quatro sistemas de campo apresentados, quanto à estabilidade, foram confirmados com base no modelo proposto. Esse fato é importante, porque esses sistemas considerados são sistemas reais de produção multifásica de petróleo em altas pressões, cujos fenômenos envolvidos são complexos e de difícil representação numérica. Simplificações foram adotadas no modelo proposto, conforme as premissas consideradas, mas buscou-se representar os principais fenômenos físicos envolvidos e os bons resultados obtidos são consequência dessa modelagem. A modelagem do escoamento multifásico levando-se em consideração a física do problema através das equações de balanço, a modelagem *black-oil* dos fluidos, a transferência de massa entre as fases, as relações de fecha-

mento adequadas, a compressibilidade das fases e a aplicação da metodologia de estabilidade linear resultou em um módulo (*solver*) capaz de capturar, dentro de limites aceitáveis de erros, a estabilidade dos pontos operacionais do escoamento multifásico em sistemas bastante complexos.

Observando as análises realizadas, tanto em estado estacionário como os mapas de estabilidade, é notável a redução da parcela de atrito ao se utilizar a abordagem centro de massa para equacionar o termo de atrito. O impacto dessa abordagem na curva de estabilidade é uma região mais ampla de instabilidades tendo em vista que o atrito é fator estabilizador do escoamento.

É também importante destacar que a geração dos mapas de estabilidade através da metodologia proposta na presente tese é bastante rápida quando comparada à metodologia de obtenção dos mapas através de simulações transientes. Para a indústria esse aspecto é fundamental principalmente em cenários de muitas simulações do escoamento multifásico como ocorre, por exemplo, na geração das curvas de produção em projetos de desenvolvimento de campos de petróleo. Na obtenção dessas curvas são necessárias milhares de simulações devido aos muitos cenários a serem modelados e ao desacoplamento das simulações do escoamento entre meio poroso e tubulações. Nessas aplicações as simulações do campo transiente se tornam proibitivas devido ao tempo de resposta e, dessa forma, utilizam-se modelos estacionários. Um módulo de estabilidade, conforme apresentado na presente tese, acoplado ao modelo estacionário de escoamento multifásico resultaria crucial para gerar informações de estabilidade do escoamento, contribuindo; para a tomada de decisão e para a geração de curvas de produção mais realistas.

6.2 Recomendações

As seguintes recomendações são sugeridas para trabalhos futuros:

- Incorporar a equação da energia de forma a tornar as análises ainda mais realistas dos sistemas de produção de petróleo. A implementação da equação de energia adicionaria uma variável de estado ao sistema, a temperatura T , aumentando a ordem das matrizes;
- Testar o modelo já com a equação de energia para os sistemas analisados nessa tese e incluir novos sistemas e avaliar o desempenho do modelo;
- Incluir um modelo de *gas lift* que possa ser inserido em qualquer seção do escoamento;

- Incluir os trechos de coluna de produção no modelo de forma a avaliar o poço como um sistema integrado com reservatório;
- Incluir a condição de contorno de IPR (*Inflow Performance Relationship*), ([Mach, Proano e Brown \(1979\)](#)) na seção de fundo do poço;
- Incluir um modelo de *choke* de superfície e avaliar a influência desse equipamento nas curvas de estabilidade.

Todas essas considerações poderiam ser avaliadas parametricamente quanto às alterações na curva de estabilidade. Assim, essas seriam também variáveis de controle da estabilidade em sistemas reais de produção de petróleo.

REFERÊNCIAS

- ADEKOMAYA, O. A. An improved version of drift-flux model for predicting pressure-gradient and void-fraction in vertical and near vertical slug flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 116, p. 103–108, 2014.
- ALHANATI, F. J. S.; SCHMIDT, Z.; DOTY, D. R.; LAGERLEF, D. D. Continuous gas-lift instability: diagnosis, criteria, and solutions. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Houston, Texas: Society of Petroleum Engineers, 1993.
- ALWAZZAN, J.; THAN, C. Linear stability analysis and experimental verification of stratified air-water flow in a horizontal bend. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 50, p. 299–307, 2005.
- ANDREOLLI, I. *Introdução à elevação e escoamento monofásico e multifásico de petróleo*. Rio de Janeiro- RJ, Brasil: Interciência, 2016. 648 p.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L. Linear stability theory analysis for oil flowlines. In: *In: ABCM. Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2017)*. São Paulo, SP, Brazil: ABCM, 2017.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L. Stability solver for offshore oil flows. In: *In: OTC. Offshore Technology Conference Brasil (Paper: OTC-28155). Published in Onepetro-SPE*. Rio de Janeiro, RJ, Brazil: SPE, 2017.
- ANDREOLLI, I.; ZORTEA, M.; BALIÑO, J. L. Modeling offshore steady flow field data using drift-flux and black-oil models. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 157, p. 14–26, 2017.
- AZEVEDO, G. *Estabilidade linear para intermitência severa em sistemas água-ar*. 196 p. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging. In: *In: Proceedings of the 3th International Conference Of Numerical Analysis And Applied Mathematics (ICNAAM 2015)*. Rhodes, Greece: ICNAAM, 2015.
- AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging in air-water systems considering different mitigation mechanisms. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 73, p. 238–250, 2015.
- AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging: sensitivity to void fraction correlations. In: *In: Proceeding of the 7th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation*. Bergeggi, Italy: IMAACA, 2015.

- AZEVEDO, G.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis of severe slugging including inertial effects. In: *In: ABCM. Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2015)*. Campinas, SP, Brazil: ABCM, 2015.
- AZIZ, K.; GOVIER, G. W.; FORGARASI, M. Pressure drop in wells producing oil and gas. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Petroleum Society of Canada, v. 11, n. 03, p. 38–48, 1972.
- BALIÑO, J. L. *Análise de intermitência severa em risers de geometria catenária*. 141 p. Tese (Tese (Livre Docência)) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- BALIÑO, J. L.; BURR, K. P.; NEMOTO, R. H. Modeling and simulation of severe slugging in air-water pipeline-riser systems. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 36, n. 8, p. 643–660, 2010.
- BAXENDELL, P. B.; THOMAS, R. The calculation of pressure gradients in high-rate flowing wells. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 13, n. 10, p. 1–023, 1961.
- BEAL, C. The viscosity of air, water, natural gas, crude oils and its associated gases at oil field temperatures and pressures. *Trans. AIME*, v. 165, p. 94–112, 1946.
- BEGGS, D. H.; BRILL, J. P. A study of two-phase flow in inclined pipes. *Journal of Petroleum technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 25, n. 05, p. 607–617, 1973.
- BEGGS, H. D.; ROBINSON, J. R. Estimating the viscosity of crude oil systems. *Journal of Petroleum Technology*, v. 27, n. 9, p. 1140–1141, 1975.
- BENDIKSEN, K. H. An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 10, n. 4, p. 467–483, 1984.
- BENDIKSEN, K. H.; MAINES, D.; MOE, R.; NULAND, S. The dynamic two-fluid model OLGA: Theory and application. *SPE Production Engineering*, v. 6, n. 2, p. 171–180, 1991.
- BERNARDO, L. A.; ANDREOLLI, I.; TOCANTINS, M. W.; SANTOS, A. R. Roughness analysis within flexible water injection pipes in petroleum production projects. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 140, n. 2, p. 64–72, 2016.
- BHAGWAT, S. M.; GHAJAR, A. J. Flow pattern and pipe orientation independent semi-empirical void fraction correlation for a gas-liquid two phase flow based on the concept of drift flux model. In: *In: Proceedings of the ASME 2012 Summer Heat Transfer Conference*. Viena, Austria: ASME, 2012.
- BØE, A. *Severe slugging characteristics. Part I: Flow regime for severe slugging. Part II: Point model simulation study*. Trondheim, Norway: [s.n.], 1981.
- BRILL, J. P.; MUKHERJEE, H. *Multiphase Flows in Wells*. Richardson, EUA: SPE, 1999. 156 p.
- BROWN, G. G.; KATZ, D. L.; OBERFELL, G. G.; ALDEN, R. C. *Natural gasoline and the volatile hydrocarbons*. Tulsa: NGAA, 1948.

- BURR, K. P.; BALIÑO, J. L.; AZEVEDO, G. R. Discretization effects on the linear numerical stability analysis of two-phase flows in pipeline-riser systems. In: *XXII International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*. Ribeirão Preto, SP, Brazil: [s.n.], 2013. p. 1–12.
- CHEN, N. H. An explicit equation for friction factor in pipe. *Industrial & engineering chemistry fundamentals*, v. 18, n. 3, p. 296–297, 1979.
- CHEW, J.; Connally Jr, C. A. A viscosity correlation for gas-saturated crude oils. *Trans. AIME*, v. 216, p. 23–25, 1959.
- CHEXAL, B.; LELLOUCHE, G.; HOROWITZ, J.; HEALZER, J. A void fraction correlation for generalized applications. *Progress in Nuclear Energy*, v. 27, n. 4, p. 255–295, 1992.
- CHISHOLM, D. Pressure gradients due to friction during the flow of evaporating two-phase mixtures in smooth tubes and channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 347–358, 1973.
- CHOI, J.; PEREYRA, E.; SARICA, C.; PARK, C.; KANG, J. N. An efficient drift-flux closure relationship to estimate liquid holdups of gas-liquid two-phase flow in pipes. *Energies*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 5, n. 12, p. 5294–5306, 2012.
- CHOI, J.; PEREYRA, E.; SARICA, C.; LEE, H.; JANG, I. S.; KANG, J. Development of a fast transient simulator for gas-liquid two-phase flow in pipes. *Journal of Petroleum science and engineering*, Elsevier, v. 102, p. 27–35, 2013.
- CODDINGTON, P.; MACIAN, R. A study of the performance of void fraction correlations used in the context of drift-flux two-phase flow models. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 215, n. 3, p. 199–216, 2002.
- COLLINS, A. G. Petroleum engineering handbook. In: BRADLEY, H. B. (Ed.). Dallas: SPE, 1987. cap. Properties of produced waters.
- DANESH, A. *PVT and phase behaviour of petroleum reservoir fluids*. Oxford, UK: Elsevier publications, 1998. 388 p.
- FABRE, J.; LINÉ, A. Modeling of two-phase slug flow. *Annual review of fluid mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 24, n. 1, p. 21–46, 1992.
- FABRE, J.; PERESSON, L. L.; CORTEVILLE, J.; ODELLO, R.; BOURGEOIS, T. Severe slugging in pipeline/riser systems. *SPE Production Engineering*, v. 5, n. 3, p. 299–305, 1990.
- FAIRUZOV, Y. V. Stability analysis of stratified oil/water flow in inclined pipelines. *SPE Production & Facilities*, v. 16, n. 1, p. 14–21, 2001.
- FRIEDEL, L. Improved friction pressure drop correlations for horizontal and vertical two-phase pipe flow. In: *European two-phase flow group meeting, Paper E*. [S.l.: s.n.], 1979. v. 2, p. 1979.
- GHAJAR, A. J.; BHAGWAT, S. M. Effect of void fraction and two-phase dynamic viscosity models on prediction of hydrostatic and frictional pressure drop in vertical upward gas-liquid two-phase flow. *Heat Transfer Engineering*, v. 34, n. 13, p. 1044–1059, 2013.

GODA, H.; HIBIKI, T.; KIM, S.; ISHII, M.; UHLE, J. Drift-flux model for downward two-phase flow. *International journal of heat and mass transfer*, Elsevier, v. 46, n. 25, p. 4835–4844, 2003.

GUERRERO-SARABIA, I.; FAIRUZOV, Y. V. Linear and non-linear analysis of flow instability in gas-lift wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 108, p. 162–171, 2013.

HAGEDORN, A. R.; BROWN, K. E. Experimental study of pressure gradients occurring during continuous two-phase flow in small-diameter vertical conduits. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 17, n. 04, p. 475–484, 1965.

HU, B. *Characterizing gas-lift instabilities*. 178 p. Tese (Doctoral thesis) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2004.

ISHII, M.; HIBIKI, T. *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. New York, USA: Springer, 2006. 462 p.

ISHII, M.; ZUBER, N. Thermally induced flow instabilities in two-phase mixtures. In: *4th International Heat Transfer Conference*. VERSAILLES-Paris, França: [s.n.], 1970. p. 12p.

JANSEN, F. E.; SHOHAN, O.; TAITEL, Y. The elimination of severe slugging - experiments and modeling. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 22, n. 6, p. 1055–1072, 1996.

KARTOATMODJO, T.; SCHMIDT, Z. Large data bank improves crude physical property correlations. *Oil and Gas Journal*; (United States), v. 92, n. 27, 1994.

LEE, A. L.; GONZALEZ, M. H.; EAKIN, B. E. The viscosity of natural gases. *Journal of Petroleum Technology*, v. 18, n. 8, p. 997–1000, 1966.

LEHOUCQ, R. B.; SORENSEN, D. C.; YANG, C. *ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicit Restarted Arnoldi Methods*. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>: [s.n.], 1997.

LOCKHART, R. W.; MARTINELLI, R. C. Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes. *Chem. Eng. Prog*, v. 45, n. 1, p. 39–48, 1949.

LORIMER, S. E.; ELLISON, B. T. Design guideline for subsea oil systems. In: *Proceeding of the Facilities 2000: Facilities engineering into the next millenium*. [S.l.: s.n.], 2000.

MACH, J.; PROANO, E.; BROWN, K. E. A nodal approach for applying systems analysis to the flowing and artificial lift oil or gas well. *SPE Production Engineering*, 1979.

MAGRAB, E. B.; AZARM, S.; BELACHANDRAN, B.; DUNCAN, J. H.; HEROLD, K. H.; WALSH, G. C. *An Engineer's Guide to MATLAB*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA, 2010.

MASELLA, J. M.; TRAN, Q. H.; FERRE, D.; PAUCHON, C. Transient simulation of two-phase flows in pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 24, n. 5, p. 739–755, 1998.

MCCAIN, W. D. *The properties of petroleum fluids*. Tulsa: PennWell Books, 1990. 548 p.

MOKHATAB, S. *Severe slugging in offshore production systems*. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2010. 105 p.

MULLER-STEINHAGEN, H.; HECK, K. A simple friction pressure drop correlation for two-phase flow in pipes. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, v. 20, n. 6, p. 297–308, 1986.

NEMOTO, R. H. *MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE INTERMITÊNCIA SEVERA COM EFEITOS DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA*. 195 p. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

NEMOTO, R. H.; BALIÑO, J. L. Modeling and simulation of severe slugging with mass transfer effects. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 40, p. 144–157, 2012.

POBLANO, E.; CAMACHO, R.; FAIRUZOV, Y. V. Stability analysis of continuous-flow gas lift wells. *SPE Production Facilities*, p. 70–79, 2005.

POTS, B. F. M.; BROMILOW, I. G.; KONIJN, M. J. W. F. Severe slug flow in offshore flowline/riser systems. *SPE Production Engineering*, p. 319–324, 1987.

PRADO, M. G. *A Block Implicit Numerical Solution Technique for Two-Phase Multi-dimensional Steady State Flow*. Tese (PhD Thesis) — The University of Tulsa, Tulsa, 1995.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 808 p.

SARICA, C.; SHOHAM, O. A simplified transient model for pipeline-riser systems. *Chemical Engineering Science*, v. 46, n. 9, p. 2167–2179, 1991.

SCHMIDT, Z.; BRILL, J. P.; BEGGS, H. D. Experimental study of severe slugging in a two-phase-flow pipeline-riser system. *SPE Journal*, v. 20, n. 5, p. 407–414, 1980.

SCHMIDT, Z.; DOTY, D. R.; DUTTA-ROY, K. Severe slugging in offshore pipeline riser-pipe systems. *SPE Journal*, v. 25, n. 1, p. 27–38, 1985.

SHIPPEN, M.; BAILEY, W. J. Steady-state multiphase flow—past, present, and future, with a perspective on flow assurance. *Energy & Fuels*, v. 26, p. 4145–4157, 2012.

SHOHAM, O. *Mechanistic modeling of gas-liquid two-phase flow in pipes*. [S.l.]: Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers, 2006.

STANDING, M. B. *Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems*. Dallas: SPE, 1981.

STANDING, M. B.; KATZ, D. L. Density of natural gases. *Trans. AIME*, v. 146, p. 140–149, 1942.

SWAMEE, P. K. Design of submarine oil pipeline. *Journal of Transportation Engineering*, v. 119, n. 1, p. 159–170, 1993.

TAITEL, Y. Stability of severe slugging. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 12, n. 2, p. 203–217, 1986.

TAITEL, Y.; BARNEA, D.; BRILL, J. P. Stratified three phase flow in pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 21, n. 1, p. 53–60, 1995.

TAITEL, Y.; DUKLER, A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*, v. 22, n. 1, p. 47–55, 1976.

TAITEL, Y.; VIERKANDT, S.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Severe slugging in a riser system: experiments and modeling. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 16, n. 1, p. 57–68, 1990.

TORRE, A. J.; SCHMIDT, Z.; BLAIS, R. N.; DOTY, D. R.; BRILL, J. P. Casing heading in flowing oil wells. *SPE Production Engineering*, v. 2, n. 4, p. 297–304, 1987.

VASQUEZ, M.; BEGGS, H. D. Correlations for fluid physical properties prediction. *Journal of Petroleum Technology*, v. 32, n. 6, p. 968–970, 1980.

VELARDE, J.; BLASINGAME, T. A.; MCCAIN, W. D. Correlation of black oil properties at pressures below bubblepoint pressure – a new approach. *Journal of canadian petroleum technology*, v. 38, n. 13, p. Paper 97–93, 1999.

VIEIRA, R. A. M.; GARCIA, A. P. Combination of petroleum correlations and drift-flux approaches: a new model for two-phase flow pressure gradient calculation for horizontal and slightly inclined upward flowlines. In: ASME. *Proc. of the ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2014*. San Francisco, EUA: OMAE, 2014.

WALLIS, G. B. *One-dimensional two-phase flow*. United States: McGraw-Hill Book Company, 1969. 408 p.

WOLDESEMAYAT, M. A.; GHAJAR, A. J. Comparison of void fraction correlations for different flow patterns in horizontal and upward inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 33, n. 4, p. Paper 347–370, 2007.

WORDSWORTH, C.; DAS, I.; LOH, W. L.; MCNULTY, G.; LIMA, P. C.; BARBUTO, F. *Multiphase flow behavior in a catenary shaped riser*. California: CALtec Report No.: CR 6820, 1998. 157 p.

YOCUM, B. T. Offshore riser slug flow avoidance: mathematical model for design and optimization. In: *SPE European Meeting*. London: paper SPE4312, 1973.

ZAKARIAN, E. *Modélisation et Analyse des Instabilités de Écoulements Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type Pipeline-riser*. 240 p. Tese (PhD Thesis) — Université Paris 13, Institut Galilée, Paris, 2000.

ZUBER, N.; FINDLAY, J. Average volumetric concentration in two-phase flow system. *Journal of Heat Transfer, ASME Trans*, v. 10, p. 951–965, 1965.

APÊNDICE A – CARACTERIZAÇÃO DOS FLUIDOS

A.1 Introdução

Neste apêndice serão apresentadas algumas definições de propriedades termodinâmicas dos fluidos envolvidos, assim como as correlações analíticas utilizadas para calculá-las. O apêndice é um complemento à Seção 3.4.5.

Nessa tese foi adotado o modelo *black-oil* para caracterizar os fluidos. No modelo *black-oil* deve-se escolher um conjunto de correlações empíricas para representar as propriedades dos fluidos em função das condições termodinâmicas locais. Essas estão normalmente nas unidades americanas, embora se observe também em determinadas correlações a mistura de diferentes sistemas de unidades o que pode gerar alguma confusão na modelagem do escoamento. Por essa razão, optou-se em se converter as equações empíricas adotadas nesse estudo para as unidades S.I. usando 5 constantes: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 as quais são apresentadas na Seção A.2.5. Nesse apêndice são apresentados o modelo *black-oil* completo e o conjunto de correlações adotadas no estudo. As principais correlações *black-oil* estão relacionadas às viscosidades das fases bem como a um conjunto de propriedades relacionadas principalmente à compressibilidade e solubilidade (razão de solubilidade do óleo R_{so} , fatores volumes de formação do óleo, água e gás, respectivamente B_o , B_w , B_g , razão gás-óleo GOR e razão água-óleo WOR) definidas através do processo *flash* da condição (P, T) até a condição de referência, *standard condition* (SC) conforme Fig. A.1. A condição SC é definida pelo API (*American Petroleum Institute*) como 1 atm e 60 °F. As variáveis mostradas na Fig. A.1 na condição (P, T) são, respectivamente, os volumes de gás, óleo vivo e água: $V_{g(P,T)}$, $V_{o(P,T)}$, $V_{w(P,T)}$. Já na condição SC tem-se, respectivamente, o volume de gás livre, gás solubilizado no óleo, óleo morto e água: V_{gl0} , V_{gs0} , V_{o0} , V_{w0} . No presente modelo estão sendo desprezadas a solubilidade do gás na água e a vaporização da água, considerados muito pequenos (Brill e Mukherjee (1999)).

Considerando a Fig. A.1 e uma determinada condição (P, T) do escoamento, pode-se

Figura A.1: Processo flash da condição (P, T) para a condição de referência (SC) .

definir as variáveis (razão de solubilidade do óleo R_{so} , fatores volumes de formação do óleo, água e gás, respectivamente B_o , B_w , B_g , razão gás-óleo GOR e razão água-óleo WOR). Isso será feito na sequência. As correlações que relacionam essas e outras variáveis com a pressão, a temperatura e as densidades das fases são descritas ao longo desse apêndice.

É importante salientar que o teste *flash* é realizado em condições de equilíbrio termodinâmico. Desta maneira, sua utilização nas condições dinâmicas constitui uma aproximação. Nas deduções seguintes, consideraremos que as razões de volumes representativos são iguais às correspondentes razões de vazões volumétricas médias e, se as áreas de passagem forem as mesmas, as correspondentes velocidades superficiais médias.

A razão gás-óleo, GOR é definida como a razão entre o volume total de gás e o volume de óleo, ambos medidos em condição de referência:

$$GOR = \frac{V_{gl0} + V_{gs0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{gl0} + Q_{gs0}}{Q_{o0}} = \frac{j_{g0}}{j_{o0}} \quad (A.1)$$

onde Q_{gl0} , Q_{gs0} e Q_{o0} são as vazões volumétricas médias, respectivamente do gás livre, gás solubilizado no óleo e óleo na SC .

A razão água-óleo é definida como a razão entre o volume de água e o volume de óleo, ambos medidos na condição de referência:

$$WOR = \frac{V_{w0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{w0}}{Q_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{o0}} \quad (\text{A.2})$$

onde Q_{w0} é a vazão volumétrica média de água na SC e j_{o0} e j_{w0} são, respectivamente, as velocidades superficiais do óleo e da água na SC .

A razão de solubilidade do óleo R_{so} é definida como a razão entre o volume de gás solubilizado no óleo na condição (P, T) e o respectivo volume de óleo, ambos medidos na SC :

$$R_{so} = \frac{V_{gs0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{gs0}}{Q_{o0}} \quad (\text{A.3})$$

A razão de solubilidade do líquido R_{sl} é definida como a razão entre o volume de gás solubilizado no líquido na condição (P, T) e o respectivo volume de líquido, ambos medidos na SC . Como o gás solubilizado é unicamente oriundo da fase óleo, pode-se escrever:

$$R_{sl} = \frac{V_{gs0}}{V_{l0}} = \frac{Q_{gs0}}{Q_{l0}} \quad (\text{A.4})$$

onde V_{l0} e Q_{l0} são respectivamente o volume e vazão volumétrica em SC do líquido. O fator volume de formação do óleo B_o é definido como a razão entre o volume de água na condição (P, T) pelo volume de óleo na SC :

$$B_o = \frac{V_o}{V_{o0}} = \frac{Q_{o(P,T)}}{Q_{o0}} \quad (\text{A.5})$$

onde $Q_{o(P,T)}$ é a vazão volumétrica média de óleo na condição (P, T) . O fator volume de formação de água é definido como a razão entre o volume de água na condição (P, T) pelo volume de água na condição SC :

$$B_w = \frac{V_w(P,T)}{V_{w0}} = \frac{Q_w(P,T)}{Q_{w0}} \quad (\text{A.6})$$

onde $Q_w(P,T)$ é a vazão volumétrica média de água na condição (P, T) . O fator volume de formação do gás é definida pela razão entre o volume de gás na condição (P, T) e o respectivo volume de gás na SC , considerando a mesma massa de gás:

$$B_g = \frac{V_g(P,T)}{V_{gl0}} = \frac{\rho_{g0}}{\rho_g} \quad (\text{A.7})$$

onde ρ_{g0} e ρ_g são, respectivamente, a massa específica do gás na SC e na (P, T) .

De acordo com a aproximação de *black-oil* (MCCAIN, 1990), a densidade relativa do gás (composição) não muda com variações de pressão e temperatura.

$$\gamma_g \cong \gamma_{g0} \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_{dg} \cong \gamma_{g0} \quad (\text{A.9})$$

onde γ_g é a densidade do gás nas condições locais definida na Seção A.2.4 e γ_{dg} é a densidade do gás dissolvido no óleo. Como a densidade do gás, obtido na condição de referência, não varia ao longo do escoamento, no texto será adotada unicamente a simbologia simplificada γ_{g0} .

A hipótese de densidade constante significa que as concentrações (números moleculares) das misturas de diferentes hidrocarbonetos são constantes nas fases gasosa e líquida, de maneira que a mistura gás-óleo possa ser considerada como um pseudo-fluido ao invés de uma solução multicomponente. Essa aproximação é válida para fluidos com baixas razões gás-óleo ($GOR < 2000 \text{ scf}/STB$) e baixas densidades API ($API < 45$). Em uma situação real, componentes mais leves vaporizam em maiores pressões e uma melhor representação do fenômeno poderia ser obtida com o modelo composicional.

A.2 Variáveis independentes

As variáveis independentes são os dados de entrada para a utilização das correlações. Além da pressão P e temperatura T , esta seção reúne as outras variáveis independentes que serão utilizadas no cálculo das propriedades termodinâmicas.

Como visto anteriormente, de acordo com o *American Petroleum Institute*, a condição de referência é definida como $P_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ e $T_0 = 60^\circ F = 288,7 \text{ K} = 15,6^\circ C$.

A.2.1 Densidade do óleo na condição de referência e densidade API

O grau API é definido como:

$$API = \frac{141,5}{\gamma_{o0}} - 131,5 \quad (\text{A.10})$$

onde a densidade do óleo γ_{o0} (adimensional) é definida na condição de referência e é dada por:

$$\gamma_{o0} = \frac{\rho_{o0}}{\rho_{w0}} \quad (\text{A.11})$$

onde ρ_{o0} é a massa específica do óleo e $\rho_{w0} = 999,014 \text{ kg/m}^3 = 62,37 \text{ lbm/ft}^3$ é a massa específica da água, as duas na condição de referência.

A.2.2 Razão gás-óleo

A razão gás-óleo GOR (adimensional), também chamada de razão de solubilidade no ponto de bolha $R_{s\text{bolha}}$ já foi definida através da Eq. (A.1).

A.2.3 Razão água-óleo e razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos

A razão água-óleo WOR (adimensional) foi definida através da Eq. (A.2).

A razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos BSW (adimensional) é definida como:

$$BSW = \frac{V_{w0}}{V_{w0} + V_{o0}} = \frac{Q_{w0}}{Q_{w0} + Q_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{w0} + j_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{l0}} \quad (\text{A.12})$$

A relação entre as duas variáveis é dada pela expressão:

$$WOR = \frac{BSW}{1 - BSW} \quad (\text{A.13})$$

A.2.4 Densidade do gás livre na condição de referência

A densidade do gás livre (adimensional) é definida, na condição de referência γ_{g0} , como a razão entre a massa específica do gás e a massa específica do ar, ambas medidas na condição de referência:

$$\gamma_{g0} = \frac{\rho_{g0}}{\rho_{a0}} \quad (\text{A.14})$$

onde $\rho_{a0} = 1,223202 \text{ kg/m}^3 = 0,076362 \text{ lbm/ft}^3$ é a massa específica do ar de referência na condição de referência e γ_{g0} está no intervalo $(0,57 \leq \gamma_{g0} \leq 1,68)$.

onde Z_g é o fator de compressibilidade do gás. Utilizando a equação dos gases reais e consi-

derando que o fator de compressibilidade na condição de referência é igual à unidade, ou seja, que os gases se comportam como gases ideais, pode-se mostrar que:

$$\gamma_{g0} = \frac{M_g}{M_a} \quad (\text{A.15})$$

onde M_g é a massa molar da mistura de gás livre na condição de referência e $M_a = 28,966 \text{ g/mol}$ é a massa molecular aparente da mistura de gases correspondente ao ar.

A.2.5 Parâmetros de conversão para S.I.

As equações *black-oil* em geral utilizam unidades em diferentes sistemas. Nessa seção serão apresentados os valores de cinco (5) parâmetros que são utilizados nas equações *black-oil* descritas ao longo desse apêndice que possibilita a utilização no sistema S.I. os parâmetros são:

$$C_1 = 5,61456349;$$

$$C_2 = 0,000145037738;$$

$$C_3 = 1,8T_k - 459,67 \text{ (conversão de K para } ^\circ\text{F)};$$

$$C_4 = 0,001;$$

$$C_5 = 1,8.$$

A.3 Fator volume de formação de gás

Para o fator volume de formação de gás, pode-se determinar uma relação em função de (P, T) a partir da equação dos gases reais e considerando-se dois estados termodinâmicos: (P, T) e (P_0, T_0) no que resulta:

$$\frac{P_o}{\rho_{g0} Z_{g0} T_0} = \frac{P}{\rho_g Z_g T} \quad (\text{A.16})$$

Como $Z_{g0} = 1$, resulta para o fator volume de formação de gás:

$$B_g = \frac{\rho_{g0}}{\rho_g} = \frac{P_0}{T_0} \frac{Z_g T}{P} \quad (\text{A.17})$$

Finalmente, escrevendo as variáveis na condição de referência ($P_0 = 101325 \text{ Pa}$, $T_0 = 288,7^\circ\text{K}$), obtem-se:

$$B_g = 350,96 \frac{Z_g T}{P} \quad (\text{A.18})$$

onde a temperatura está em Kelvin e a pressão em Pa .

A.3.1 Fator de compressibilidade do gás

Correlacionando os dados do gráfico de [Standing e Katz \(1942\)](#), o fator de compressibilidade do gás (adimensional) pode ser obtido como:

$$Z_g = 1 - \frac{3,52 P_{pr}}{10^{0,9813 T_{pr}}} + \frac{0,274 P_{pr}^2}{10^{0,8157 T_{pr}}} \quad (\text{A.19})$$

$$P_{pr} = \frac{P}{P_{pc}} \quad (\text{A.20})$$

$$T_{pr} = \frac{T}{T_{pc}} \quad (\text{A.21})$$

onde P_{pr} e T_{pr} são, respectivamente, a pressão e temperatura pseudo-reduzidas da mistura de gás, enquanto P_{pc} e T_{pc} são, respectivamente, a pressão e temperatura absolutas pseudo-críticas (dependentes da composição molar) da mistura.

A.3.2 Pressão e temperatura pseudo-críticas

Para sistemas de gás natural, [Standing \(1981\)](#) correlacionou os dados apresentados na carta de [Brown et al. \(1948\)](#) em função da densidade do gás, resultando:

$$P_{pc} = \frac{1}{C_2} (677 + 15,0 \gamma_g - 37,5 \gamma_g^2) \quad (\text{A.22})$$

$$T_{pc} = \frac{1}{C_5} (168 + 325 \gamma_g - 12,5 \gamma_g^2) \quad (\text{A.23})$$

onde a temperatura está em Kelvin e a pressão em Pascal.

A.4 Massa específica do gás

De acordo com a aproximação de *black-oil*, a densidade do gás não muda com variações de pressão e temperatura, sendo assumida na condição de referência. Portanto, a partir da Eq. (A.7), obtém-se:

$$\rho_g \cong \frac{\rho_{g0}}{B_g} \quad (\text{A.24})$$

Também pode-se escrever:

$$\rho_g = \frac{P M_g}{R_g T Z_g} \quad (\text{A.25})$$

ou ainda a partir da Eq. (A.15):

$$\rho_g = \frac{P \gamma_g M_a}{R_g T Z_g} \quad (\text{A.26})$$

A.5 Razão de solubilidade

Foi adotada a equação de [Standing \(1981\)](#) para a razão de solubilidade dada por:

Para $P < P_b$:

$$R_{so} = \gamma_g \left[\left(\frac{P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125API - 0,00091T)} \right]^{1,2048} \quad (\text{A.27})$$

Para $P \geq P_b$:

$R_{so} = GOR$, onde P_b é a pressão de bolha. No S.I. a Eq. (A.27) fica:

$$R_{so} = \frac{1}{C_1} \gamma_g \left[\left(\frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125API - 0,00091 C_3)} \right]^{1,2048} \quad (\text{A.28})$$

A.6 Pressão de bolha

A determinação da pressão de bolha P_b é feita através da própria Eq. (A.27) substituindo R_{so} por GOR e P por P_b . Assim, tem-se:

$$P_b = 18,2 \left[\left(\frac{GOR}{\gamma_g} \right)^{0,83} 10^{0,00091T - 0,0125API} - 1,4 \right] \quad (A.29)$$

No S.I. a Eq. (A.29) fica

$$P_b = \frac{1}{C_2} 18,2 \left[\left(\frac{C_1 GOR}{\gamma_g} \right)^{0,83} 10^{0,00091 C_3 - 0,0125API} - 1,4 \right] \quad (A.30)$$

A.7 Fator volume de formação de óleo

A correlação de [Standing \(1981\)](#) será adotada para a obtenção do B_o ao longo do escoamento. Para pressões menores que P_b , tem-se:

$$B_o = 0,9759 + 0,00012 \left[R_{so} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25T \right]^{1,2} \quad (A.31)$$

Na Eq. (A.31), A temperatura é em $^{\circ}F$ e R_{so} em scf/stb.

No S.I. a Eq. (A.31) fica:

$$B_o = 0,9759 + 0,00012 \left[C_1 R_{so} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{1,2} \quad (A.32)$$

Para pressões maiores que P_b , o gás não sai de solução e o fator B_o representa puramente a compressibilidade do líquido:

$$B_o = B_{ob} \exp [-c_o(P - P_b)] \quad (A.33)$$

sendo B_{ob} o fator volume de formação no ponto de bolha obtido através da Eq. (A.31) fazendo $R_{so} = GOR$ e $B_o = B_{ob}$.

Na Eq. (A.33), c_o foi obtido pela equação de [Vasquez e Beggs \(1980\)](#):

$$c_o = \frac{-1433 + 5 GOR + 17,2T - 1180 \gamma_g + 12,61 API}{10^5 P} \quad (A.34)$$

No S.I. a Eq. (A.33) não precisa ser modificada. Já a Eq. (A.34) fica:

$$c_o = \frac{-1433 + 5 C_1 GOR + 17,2 C_3 - 1180 \gamma_g + 12,61 API}{10^5 P} \quad (\text{A.35})$$

A.8 Massa específica do óleo

Através de balanço de materiais, considerando que o óleo vivo é composto por massa de gás solubilizado e massa de óleo, pode-se deduzir que (McCain (1990)):

$$\rho_o = \frac{\rho_{o0} + \rho_{g0} R_{so}}{B_o} \quad (\text{A.36})$$

Na Eq. (A.36) considerou-se que a densidade do gás em solução é a mesma da densidade do gás livre (aproximação *black-oil*). Essa equação abrange também a faixa de pressões $P > P_b$. Nesse caso $R_{so} = GOR$ e B_o varia conforme a condição acima ou abaixo da P_b , determinado na Seção A.7.

A.9 Fator volume de formação de água

A correlação para o fator volume de formação de água B_w , obtido de McCain (1990), é dada por:

$$B_w = (1 + \Delta V_{wP}) (1 + \Delta V_{wT}) \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta V_{wT} = -1,0001 (10^{-2}) + 1,33391 (10^{-4}) T + 5,50654 (10^{-7}) T^2 \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{wP} = & -1,95301 (10^{-9}) PT - 1,72834 (10^{-13}) P^2 T \\ & -3,58922 (10^{-7}) P - 2,25341 (10^{-10}) P^2 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

A correlação é válida para temperaturas na faixa $90^\circ F < T < 255^\circ F$ e pressões na faixa $1 \text{ kpsia} < P < 5 \text{ kpsia}$.

No S.I. a Eq. (A.37) não precisa ser modificada. Já as Eqs. (A.38 e A.39) ficam:

$$\Delta V_{wT} = -1,0001 (10^{-2}) + 1,33391 (10^{-4}) C_3 + 5,50654 (10^{-7}) C_3^2 \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{wP} = & -1,95301 (10^{-9}) (C_2 P) C_3 - 1,72834 (10^{-13}) (C_2 P)^2 C_3 \\ & - 3,58922 (10^{-7}) (C_2 P) - 2,25341 (10^{-10}) (C_2 P)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

A.10 Massa específica da água

A massa específica da água na condição local de temperatura e pressão é determinada por meio da seguinte expressão:

$$\rho_w = \frac{\rho_{w0}}{B_w} \quad (\text{A.42})$$

A.11 Viscosidade do gás

Para o cálculo da viscosidade do gás na condição de medição utiliza-se a correlação de [Lee, Gonzalez e Eakin \(1966\)](#), válida para pressões pseudo-reduzidas $P_{pr} < 10$ e temperaturas pseudo-reduzidas segundo a densidade relativa do gás, dadas na tabela [A.1](#), da forma:

$$\mu_g = F_1 10^{-4} \exp \left[F_2 (\rho_g)^{F_3} \right] \quad (\text{A.43})$$

onde:

$$F_1 = \frac{(9,379 + 16,07 M_g) T^{1,5}}{209,2 + 19260 M_g + T} \quad (\text{A.44})$$

$$F_2 = 3,448 + \frac{986,4}{T} + 10,09 M_g \quad (\text{A.45})$$

$$F_3 = 2,447 - 0,2224 F_2 \quad (\text{A.46})$$

A viscosidade μ_g é dada em cP , ρ_g é a massa específica em g/cm^3 , M_g é a massa molar do gás dada em kg/mol e T é a temperatura em R .

No S.I. resulta em:

Tabela A.1: Faixas de validade da correlação de [Lee, Gonzalez e Eakin \(1966\)](#).

Densidade relativa do gás	Temperatura pseudo-reduzida
$0,56 < \gamma_g < 0,9$	$1,3 < T_{pr} < 2,5$
$0,9 < \gamma_g < 1,2$	$1,1 < T_{pr} < 2,0$
$1,2 < \gamma_g < 1,5$	$1,1 < T_{pr} < 1,7$
$1,5 < \gamma_g < 1,7$	$1,1 < T_{pr} < 1,6$

$$\mu_g = C_4 F_1 10^{-4} \exp \left[F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (\text{A.47})$$

$$F_1 = \frac{(9,379 + 16,07 M_g) (C_5 T)^{1,5}}{209,2 + 19260 M_g + (C_5 T)} \quad (\text{A.48})$$

$$F_2 = 3,448 + \frac{986,4}{(C_5 T)} + 10,09 M_g \quad (\text{A.49})$$

$$F_3 = 2,447 - 0,2224 F_2 \quad (\text{A.50})$$

A.12 Viscosidade do óleo

Para a viscosidade do óleo deve-se considerar três condições termodinâmicas: óleo morto (P_0), óleo vivo ($P_0 < P \leq P_b$) e óleo subsaturado ($P \geq P_b$). O comportamento da viscosidade muda para cada uma das três condições e diferentes correlações são propostas na literatura.

A.12.1 Viscosidade do óleo morto

A viscosidade do óleo morto foi determinada pela correlação de [Beal \(1946\)](#) dada por:

$$\mu_{od} = \left(0,32 + \frac{1,8 \cdot 10^7}{API^{4,53}} \right) \left(\frac{360}{T + 200} \right)^{m_1} \quad (\text{A.51})$$

em que:

$$m_1 = 10^{(0,43 + \frac{8,33}{API})}$$

onde T está em $^{\circ}F$.

No S.I., o parâmetro m_1 não muda e a Eq. (A.51) fica:

$$\mu_{od} = C_4 \left(0,32 + \frac{1,8 \cdot 10^7}{API^{4,53}} \right) \left(\frac{360}{C_3 + 200} \right)^{m_1} \quad (A.52)$$

A.12.2 Viscosidade do óleo saturado

As curvas de viscosidade do óleo saturado μ_o (em cP) em função da viscosidade do óleo morto μ_{od} , propostas por [Chew e Connally Jr \(1959\)](#), foram correlacionadas por [Beggs e Robinson \(1975\)](#) da seguinte maneira:

$$\mu_o = [10,715 (R_{so} + 100)^{-0,515}] (\mu_{od})^b \quad (A.53)$$

$$b = 5,44 (R_{so} + 150)^{-0,338} \quad (A.54)$$

onde R_{so} está em scf/stb . As faixas de validade para a correlação são: temperatura até $295^\circ F$ e pressão até 5250 psig .

No S.I. as Eqs. (A.53 e A.54) ficam:

$$\mu_o = C_4 [10,715 (C_1 R_{so} + 100)^{-0,515}] \left(\frac{1}{C_4} \mu_{od} \right)^b \quad (A.55)$$

$$b = 5,44 (C_1 R_{so} + 150)^{-0,338} \quad (A.56)$$

A.12.3 Viscosidade do óleo subsaturado

A viscosidade do óleo subsaturado foi correlacionada por [Vasquez e Beggs \(1980\)](#) da seguinte forma:

$$\mu_o = \mu_{ob} \left(\frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \quad (A.57)$$

$$m_2 = 2,6 P^{1,187} \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} P) \quad (A.58)$$

onde μ_{ob} é a viscosidade no ponto de bolha avaliada pela equação (A.53) para $R_{so} = GOR$ e

as pressões estão em *psia*. A correlação é válida para pressões de até 9500 *psig*.

No S.I. a Eq. (A.57) não precisa ser alterada sendo que μ_{ob} é avaliada pela Eq. (A.55). Já a Eq. (A.58) fica:

$$m_2 = 2,6 (C_2 P)^{1,187} \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} (C_2 P)) \quad (\text{A.59})$$

A.13 Viscosidade da água

A viscosidade da água é definida para a condição P_0 e para a condição do escoamento, $P > P_0$

A.13.1 Viscosidade da água na pressão de referência

Segundo Collins (1987), a viscosidade da água, em centiPoise, na pressão de referência, pode ser expressa como:

$$\mu_{w0} = I_1 T^{I_2} \quad (\text{A.60})$$

$$I_1 = 109,574 - 8,40564 Y + 0,313314 Y^2 + 8,72213 \cdot 10^{-3} Y^3 \quad (\text{A.61})$$

$$I_2 = -1,12166 + 2,63951 \cdot 10^{-2} Y - 6,79461 \cdot 10^{-4} Y^2 - 5,47119 \cdot 10^{-5} Y^3 + 1,55586 \cdot 10^{-6} Y^4 \quad (\text{A.62})$$

onde T está em $^{\circ}F$ e a salinidade Y está em porcentagem de peso de sólidos. As faixas de valores das variáveis para a correlação são: $100^{\circ}F \leq T \leq 400^{\circ}F$ e salinidades de até 26 %.

No S.I. a única equação que precisa ser modificada é a Eq. (A.60):

$$\mu_{w0} = C_4 I_1 C_3^{I_2} \quad (\text{A.63})$$

A.13.2 Viscosidade da água na condição do escoamento

Segundo Collins (1987), a viscosidade da água à condição de escoamento pode ser expressa como:

$$\mu_w = \mu_{w0} [0,9994 + 4,0295 \cdot 10^{-5} (P + 14,7) + 3,1062 \cdot 10^{-9} (P + 14,7)^2] \quad (\text{A.64})$$

As faixas de valores das variáveis para a correlação são: $86,5^\circ F \leq T \leq 167^\circ F$ e pressão até 14000 *psia*. P está em *psi*.

No S.I. a Eq. (A.64) fica:

$$\mu_w = \mu_{w0} [0,9994 + 4,0295 \cdot 10^{-5} (C_2 P + 14,7) + 3,1062 \cdot 10^{-9} (C_2 P + 14,7)^2] \quad (\text{A.65})$$

A.14 Relações algébricas *black-oil* para a fase líquida

Nessa seção serão apresentadas as seguintes relações *black-oil* para fase líquida, úteis pois o modelo considera uma homogeneização das fases óleo e água.

A.14.1 Razão de solubilidade do líquido R_{sl}

Considerando o caso geral do óleo e da água solubilizar gás, tem-se:

$$R_{sl} = \frac{V_{gdw0} + V_{gdo0}}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (\text{A.66})$$

A Eq. (A.66) pode ser escrita como:

$$R_{sl} = \frac{\frac{V_{gdw0}}{V_{w0}} \frac{V_{w0}}{V_{o0}} + \frac{V_{gdo0}}{V_{o0}}}{\frac{V_{o0}}{V_{o0}} + \frac{V_{w0}}{V_{o0}}} \quad (\text{A.67})$$

Simplificando, a Eq. (A.67) pode ser escrita como:

$$R_{sl} = \frac{WOR}{1 + WOR} R_{sw} + \frac{1}{1 + WOR} R_{so} \quad (\text{A.68})$$

Ao se desprezar o termo R_{sw} , resulta finalmente em:

$$R_{sl} = \left(\frac{1}{1 + WOR} \right) R_{so} \quad (\text{A.69})$$

A.14.2 Fator volume de formação do líquido B_l

$$B_l = \frac{V_o + V_w}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (\text{A.70})$$

A Eq. (A.70) pode ser escrita como:

$$B_l = \frac{\frac{V_o}{V_{o0}} + \frac{V_w}{V_{w0}} \frac{V_{w0}}{V_{o0}}}{\frac{V_{o0}}{V_{o0}} + \frac{V_{w0}}{V_{o0}}} \quad (\text{A.71})$$

Simplificando, a Eq. (A.71) pode ser escrita como:

$$B_l = \frac{WOR}{1 + WOR} B_w + \frac{1}{1 + WOR} B_o \quad (\text{A.72})$$

A.14.3 Massa específica do líquido ρ_{l0}

$$\rho_{l0} = \frac{\rho_{o0} V_{o0} + \rho_{w0} V_{w0}}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (\text{A.73})$$

Dividindo a Eq. (A.73) por V_{o0} , resulta:

$$\rho_{l0} = \frac{WOR}{1 + WOR} \rho_{w0} + \frac{1}{1 + WOR} \rho_{o0} \quad (\text{A.74})$$

A.14.4 Massa específica do líquido ρ_l

$$\rho_l = \frac{m_l}{v_l} = \frac{\rho_{g0} V_{gdl0} + \rho_{l0} V_{l0}}{B_l V_{l0}} \quad (\text{A.75})$$

A Eq. (A.75) pode ser escrita como:

$$\rho_l = \frac{\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0}}{B_l} \quad (\text{A.76})$$

A.14.5 Viscosidade do líquido μ_l

A viscosidade do líquido, μ_l é calculada como:

$$\mu_l = \left(\frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_o + \left(\frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_w \quad (\text{A.77})$$

Pode-se mostrar que a viscosidade da fase líquida pode também ser expressa por:

$$\mu_l = \left(\frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \mu_o + \left(1 - \frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \mu_w \quad (\text{A.78})$$

APÊNDICE B – CORRELAÇÕES DE *DRIFT FLUX* E DE MULTIPLICADOR DE DUAS FASES

B.1 Introdução

Nesse apêndice são apresentadas as correlações *drift flux* bem como as correlações de multiplicadores de duas fases utilizados na presente tese. Foram utilizadas três correlações *drift flux* muito citadas na literatura com aplicações voltados à indústria de petróleo e três correlações de multiplicadores de duas fases igualmente bastante citadas na literatura e de interesse da indústria de petróleo.

B.2 Correlações de *drift flux* utilizadas

As três correlações *drift flux* testadas foram: [Bendiksen \(1984\)](#), [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#) e [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#).

B.2.1 Correlação de [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#)

Essa correlação foi a adotada no modelo de estabilidade após ter sido confrontada com as outras duas correlações e tendo essa apresentado melhores resultados.

$$\begin{cases} C_d = \left[\frac{1}{(1 + \cos \theta)^{1,25}} \right]^{\sqrt{1-\alpha}} + 0,18 \left(\frac{j_l}{j} \right)^{0,1} \\ U_d = \left[\frac{\mu_l}{\mu_w} \right]^{-0,25} (0,35 \sin \theta + 0,54 \cos \theta) k_8 \\ k_8 = \sqrt{\frac{gD(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l}} \frac{1}{(1 - \alpha)^{0,5 \sin \theta}} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Na Eq. (B.1), os parâmetros C_d e U_d dependem de α , tornando o processo de cálculo iterativo. A correlação de [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#) foi elaborada para atender tanto ao escoamento ascendente como descendente e está no S.I. A correlação de [Bhagwat e Ghajar \(2012\)](#) foi verificada com base em um conjunto de 5928 dados de fração vazio considerando quinze diâmetros de tubulação e oito combinações diferentes de fluidos, incluindo escoamentos ascendentes e descendentes.

B.2.2 Correlação de [Bendiksen \(1984\)](#)

[Bendiksen \(1984\)](#) fez experimentos em tubos retos com ângulos de inclinação entre -30° and 90° usando ar e água. Essa correlação permite o cálculo dos parâmetros C_d e U_d como uma função da velocidade superficial total j e da inclinação local θ . A correlação de fluxo de deriva resultante é:

$$C_d = \begin{cases} 1,05 + 0,15 \sin \theta & \text{para } Fr_j < 3,5 \\ 1,2 & \text{para } Fr_j \geq 3,5 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$U_d = \begin{cases} \sqrt{gD} (0,35 \sin \theta + 0,54 \cos \theta) & \text{para } Fr_j < 3,5 \\ 0,35 \sqrt{gD} \sin \theta & \text{para } Fr_j \geq 3,5 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

onde $j = j_g + j_l$ é velocidade superficial total e Fr_j é o número de Froude, definido como:

$$Fr_j = \frac{j}{\sqrt{gD}} \quad (\text{B.4})$$

Essa correlação foi utilizada em trabalhos anteriores ([Baliño, Burr e Nemoto \(2010\)](#), [Azevedo, Baliño e Burr \(2015b\)](#)) devido à sua simplicidade (fração vazio é explícita e os parâmetros de *drift* são independentes de variáveis de estado). A principal desvantagem é que a base de dados utilizada é apenas para o escoamento de ar-água de baixa pressão e para um padrão de escoamento intermitente, por isso deve ser extrapolada em outras condições.

B.2.3 Correlação de [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#)

Em [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#) foi feita uma comparação do desempenho de 68 correlações de fração de vazio para tubos horizontais e com inclinação ascendente com base em conjunto de dados (2845 pontos de dados) cobrindo uma ampla gama de parâmetros. Na correlação de [Woldesemayat e Ghajar \(2007\)](#), os parâmetros C_d e U_d são função de ρ_g , ρ_l , da tensão interfacial

σ , de j_g , de j , de P e da inclinação local θ . Essa correlação foi modificada para ser utilizada no S.I. como segue:

$$C_d = \frac{j_g}{j} \left[1 + \left(\frac{j_l}{j_g} \right) \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,1} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$U_d = 1,0784 (1 + \sin \theta)^{\frac{14,7}{P C_2^2}} \left[\frac{1136,214 D \sigma (1 + \cos \theta) (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right]^{0,25} \quad (\text{B.6})$$

A tensão interfacial foi adotada igual a $0,072969478 \text{ N/m}$. A constante C_2 está na Seção A.2.5. Neste estudo, esta correlação é extrapolada para o escoamento descendente (ângulos de inclinação negativa).

B.3 Correlações de multiplicadores de duas fases utilizadas

Como apontado em diversos estudos na literatura como em [Vieira e Garcia \(2014\)](#) e [Ishii e Hibiki \(2006\)](#) existem incertezas na determinação do termo da atrito principalmente relacionadas à determinação da velocidade da mistura. A introdução do multiplicador de duas fases no termo de atrito permite utilizar diferentes correlações para modelar o atrito e assim definir o multiplicador mais adequado em cada cenário de escoamento. O multiplicador de duas fases ϕ_{f0}^2 é definido por [Wallis \(1969\)](#) como a razão entre o gradiente de pressão de atrito e o gradiente de pressão considerando que o fluxo de massa total está fluindo como líquido:

O multiplicador de duas fases é definido pela Eq. (3.12)

$$\phi_{f0}^2 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_F}{-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l}$$

Dessa forma o termo de atrito da equação de balanço da quantidade de movimento linear é representada pela Eq. (3.13):

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_F = \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D}$$

$$G = \rho_l j_l + \rho_g j_g$$

Na modelagem do atrito foram considerados três multiplicadores de duas fases: o multiplicador proposto por [Muller-Steinhagen e Heck \(1986\)](#) e outros dois propostos por [Vieira e Garcia \(2014\)](#). Os dois multiplicadores propostos por [Vieira e Garcia \(2014\)](#) consideram as definições de velocidade do centro de volume j e a velocidade do centro de massa v_m conforme abordado em [Ishii e Hibiki \(2006\)](#). A diferença básica entre as duas abordagens, segundo [Ishii e Hibiki \(2006\)](#) está na velocidade que compõe o termo do atrito sendo que ao se considerar j há conservação do fluxo volumétrico e ao se considerar v_m há conservação da quantidade de movimento linear. O modelo de ϕ_{f0}^2 proposto por [Muller-Steinhagen e Heck \(1986\)](#) é um dos mais citados na literatura.

B.3.1 Multiplicador de duas fases com centro de massa e de volume

A velocidade v_m é definida como:

$$v_m = \frac{\rho_l j_l + \rho_g j_g}{\rho_m} = \frac{G}{\rho_m} \quad (\text{B.7})$$

O fator ϕ_{f0}^2 , para modelos de mistura, pode ser representado de uma forma geral como:

$$\phi_{f0}^2 = \left(\frac{f}{f_l} \right) \left(\frac{\rho_l}{\rho} \right) \quad (\text{B.8})$$

onde f e ρ são, respectivamente, o fator de atrito e a massa específica, ambos de forma genérica, assumindo valores específicos conforme o modelo de multiplicador de duas fases adotado.

O fator de atrito de Darcy f_k é calculado como uma função do número de Reynolds Re_k e a rugosidade relativa $\frac{\varepsilon}{D}$ usando a correlação dada por [Swamee \(1993\)](#):

$$f_k = \left\{ \left(\frac{64}{Re_k} \right)^8 + 9.5 \left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re_k^{0.9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re_k} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0.125} \quad (\text{B.9})$$

Para o fator de atrito da fase líquida f_l , o valor representativo de $Re_l = \frac{GD}{\mu_l}$ é escolhido.

Para a abordagem da velocidade do centro de volume, o valor representativo da massa específica é $\rho_{cv} = \frac{G^2}{\rho_m j^2}$, enquanto o fator de atrito f_{cv} é calculado com o valor representativo $Re_{cv} = \frac{\rho_m j D}{\mu_m}$.

Para a abordagem da velocidade do centro de massa, o valor representativo da massa específica é $\rho_{cm} = \rho_m$, enquanto o fator de atrito f_{cm} é calculado com o valor representativo $Re_{cm} = \frac{\rho_m v_m D}{\mu_m}$, onde μ_m é a viscosidade da mistura e μ_l é a viscosidade do líquido, definidas respectivamente por:

$$\mu_m = \mu_g \alpha + \mu_o \alpha_o + \mu_w \alpha_w \quad (\text{B.10})$$

$$\mu_l = \left(\frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_o + \left(\frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_w \quad (\text{B.11})$$

onde μ_g , μ_o e μ_w são, respectivamente, as viscosidades do gás, óleo e água.

B.3.2 Multiplicador de duas fases- Muller-Steinhagen e Heck (1986)

Em Muller-Steinhagen e Heck (1986) é proposta uma correlação para ϕ_{f0}^2 que é uma interpolação empírica entre as perdas de carga de atrito correspondentes a qualquer condição de escoamento com líquido e gás, ou seja, desde 100 % a 100 % gás. Essa correlação foi verificada com outras quatorze correlações usando um banco de dados de 9300 medições para uma variedade de fluidos e condições de escoamento. O multiplicador de duas fases proposto é:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{G_c (1 - x)^{1/3} + B_M x^3}{A_M} \quad (\text{B.12})$$

onde:

$$G_c = A_M + 2 (B_M - A_M) x \quad (\text{B.13})$$

$$A_M = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (\text{B.14})$$

$$B_M = \frac{1}{2} f_g \frac{G^2}{\rho_g D} \quad (\text{B.15})$$

É interessante notar que, embora o banco de dados utilizado para a correlação incluísse

escoamentos em tubulações horizontais e verticais, a correlação resultante é independente do ângulo de inclinação.

Para a obtenção de f_l e f_g é utilizada a Eq. (B.9), sendo os respectivos números de Reynolds obtidos por:

$$Re_l = \frac{G D}{\mu_l} \quad (\text{B.16})$$

$$Re_g = \frac{G D}{\mu_g} \quad (\text{B.17})$$

APÊNDICE C – TERMO DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA

C.1 Introdução

O modelo de transferência de massa adotado é o desenvolvido por [Nemoto e Baliño \(2012\)](#) sendo considerada a modelagem *black-oil*. A modelagem *black-oil* de equilíbrio de fases admite a existência de dois componentes na mistura: componente líquido e componente gás. A fase líquida contém os componentes líquido e gás dissolvido e a fase gasosa apenas o componente gás livre, sendo que as trocas de massa ocorrem em função das condições termodinâmicas e são tratadas através de correlações *black-oil*.

C.2 Equacionamento

O termo de transferência de massa, representado por Γ , é dado por:

$$\Gamma = -\frac{1}{V} \frac{Dm_{dg}}{Dt} \quad (\text{C.1})$$

Considerando que o óleo se desloca com velocidade $u_o = u_l$, a derivada material $\frac{D}{Dt}$ é representada por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial s} \quad (\text{C.2})$$

Considerando um teste *flash*, a massa dissolvida do gás na condição (P, T) , m_{dg} , é dada por:

$$m_{dg} = m_{dgo} + m_{dgw} = \rho_{g0} V_{gdo0} + \rho_{g0} V_{gdw0} = \rho_{g0} V_{o0} [R_{so} + WOR R_{sw}] \quad (\text{C.3})$$

Assim o termo $\frac{Dm_{dg}}{Dt}$ resulta em:

$$\frac{Dm_{dg}}{Dt} = \rho_{g0} V_{o0} \frac{D}{Dt} (R_{so} + WOR R_{sw}) \quad (C.4)$$

Substituindo a Eq. (C.4) na Eq. (C.1) e multiplicando em cima e embaixo por V_o resulta:

$$\Gamma = -\frac{V_{o0}}{V} \frac{V_o}{V_o} \rho_{g0} \frac{D}{Dt} (R_{so} + WOR R_{sw}) \quad (C.5)$$

$$\Gamma = -\frac{\alpha_o}{B_o} \rho_{g0} \frac{D}{Dt} (R_{so} + WOR R_{sw}) \quad (C.6)$$

Da Seção A.14, tem-se:

$$R_{sl} = \frac{WOR}{1 + WOR} R_{sw} + \frac{1}{1 + WOR} R_{so}$$

O termo R_{sw} é muito pequeno, mesmo para pressões elevadas e em geral é desprezado (Brill e Mukherjee (1999)). No presente estudo esse termo será desprezado. Assim, pode-se escrever:

$$R_{sl} = \frac{1}{1 + WOR} R_{so} \quad (C.7)$$

Dessa forma o termo Γ se torna:

$$\Gamma = -\frac{\rho_{g0} \alpha_o}{B_o} (1 + WOR) \frac{DR_{sl}}{Dt} \quad (C.8)$$

ou ainda:

$$\Gamma = -\frac{\alpha_o}{B_o} \rho_{g0} (1 + WOR) \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + u_l \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right) \quad (C.9)$$

Das relações de modelo homogêneo da Seção 3.4.1, pode-se escrever:

$$\alpha_o = j_o \frac{1 - \alpha}{j_l} = j_{o0} B_o \frac{1 - \alpha}{j_l} \Rightarrow \frac{\alpha_o}{B_o} = j_{o0} \frac{1 - \alpha}{j_l} \quad (C.10)$$

Assim, resulta em:

$$\Gamma = -\frac{1-\alpha}{j_l} \rho_{g0} j_{o0} (1 + WOR) \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{j_l}{1-\alpha} \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right) \quad (\text{C.11})$$

Como $j_{o0} (1 + WOR) = j_{l0}$, resulta finalmente, na Eq. (3.22):

$$\Gamma = -\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right)$$

APÊNDICE D – ESTADO ESTACIONÁRIO

D.1 Introdução

O estado estacionário é utilizado como condição inicial para as simulações transientes. Nesta seção serão deduzidas as equações resultantes para o seu cálculo. É necessário calcular o estado estacionário em uma malha que representa a geometria discretizada em nós. Em cada trecho (representado por dois nós consecutivos com coordenadas (x, z)) é possível determinar qualquer discretização inserindo nós intermediários e, assim, a malha de nós formada não é equidistante sendo possível discretizar mais trechos onde exista essa necessidade.

D.2 Equacionamento

Calcular o estado estacionário significa calcular os valores das variáveis de estado em cada nó da discretização utilizada, considerando as equações de balanço de massa, quantidade de movimento e de propriedades dos fluidos conforme deduzidas anteriormente onde foram zeradas as derivadas em relação ao tempo. As variáveis em estado estacionário são denotadas com o sobrescrito $\sim$.

Da equação de balanço da fase gasosa, Eq. (3.1) e do termo de transferência de massa, Eq. (3.22), avaliados para o estado estacionário, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g) = -\rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial \tilde{R}_{sl}}{\partial s} \quad (\text{D.1})$$

Como $j_{l0} R_{sl} = j_{o0} R_{so}$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g) = -j_{o0} \rho_{g0} \frac{\partial \tilde{R}_{so}}{\partial s} \quad (\text{D.2})$$

Integrando a Eq. (D.2) em relação ao espaço, entre a condição de referência e a condição (P, T) e considerando que $R_{so}(P_0, T_0) = 0$, resulta:

$$\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g - \rho_{g0} j_{g0} = -\rho_{g0} j_{o0} \tilde{R}_{so} \quad (\text{D.3})$$

Isolando a velocidade superficial do gás $\tilde{j}_g$, obtém-se:

$$\tilde{j}_g = \frac{\rho_{g0} j_{g0} - \rho_{g0} j_{o0} \tilde{R}_{so}}{\tilde{\rho}_g} \quad (\text{D.4})$$

Da definição de B_g , Eq. (A.7), tem-se:

$$\tilde{j}_g = \tilde{B}_g (j_{g0} - j_{o0} \tilde{R}_{so}) \quad (\text{D.5})$$

Pela definição de GOR , Eq. (A.1), pode-se escrever:

$$\tilde{j}_g = \tilde{B}_g j_{o0} (GOR - \tilde{R}_{so}) \quad (\text{D.6})$$

Como $j_{o0}(1 + WOR) = j_{l0}$, resulta finalmente, na Eq. (3.29):

$$\tilde{j}_g = \frac{GOR - \tilde{R}_{so}}{1 + WOR} \tilde{B}_g j_{l0}$$

Para se determinar a velocidade superficial do óleo $\tilde{j}_o$ em função da velocidade do óleo na condição de referência j_{o0} pode-se utilizar a definição de B_o :

$$\tilde{j}_o = j_{o0} \tilde{B}_o \quad (\text{D.7})$$

Utilizando a relação $j_{o0}(1 + WOR) = j_{l0}$, resulta na Eq. (3.30):

$$\tilde{j}_o = \frac{\tilde{B}_o}{1 + WOR} j_{l0}$$

Para se determinar a velocidade superficial da água $\tilde{j}_w$ em função de j_{o0} pode utilizar a definição de B_w e de WOR :

$$\tilde{j}_w = j_{o0} WOR \tilde{B}_w \quad (\text{D.8})$$

Utilizando a relação $j_{o0} (1 + WOR) = j_{l0}$, resulta na Eq. (3.31):

$$\tilde{j}_w = \frac{WOR}{1 + WOR} \tilde{B}_w j_{l0}$$

Para se determinar a velocidade superficial do líquido, $\tilde{j}_l$, pode-se seguir o mesmo método da determinação da velocidade do gás sendo necessário utilizar a equação de balanço de massa da fase líquida, Eq. (3.2). Uma forma mais simples de se determinar é somar as velocidades superficiais de óleo, Eq. (D.7) e de água, Eq. (D.8) resultando em:

$$\tilde{j}_l = j_{o0} (WOR \tilde{B}_w + \tilde{B}_o) \quad (\text{D.9})$$

Utilizando a relação $j_{o0} (1 + WOR) = j_{l0}$, resulta na Eq. (3.32):

$$\tilde{j}_l = \frac{\tilde{B}_o + WOR \tilde{B}_w}{1 + WOR} j_{l0}$$

A fração de vazio é calculada utilizando-se o modelo de *drift-flux*, dada pela Eq. (3.17). A fração volumétrica para a fase óleo é calculada por meio de uma relação entre as Eqs. (3.9), (3.10) e (3.11), resultando em:

$$\tilde{\alpha}_o = \frac{1 - \tilde{\alpha}}{\frac{\tilde{j}_w}{\tilde{j}_o} + 1} \quad (\text{D.10})$$

Para a fase água, a fração volumétrica é calculada por:

$$\tilde{\alpha}_w = 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_o \quad (\text{D.11})$$

A velocidade superficial total $\tilde{j}$ é calculada pela soma das velocidades superficiais de cada corrente de fluido:

$$\tilde{j} = \tilde{j}_o + \tilde{j}_w + \tilde{j}_g \quad (\text{D.12})$$

A massa específica da mistura é calculada pela Eq. (3.4).

$$\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_g \tilde{\alpha} + \tilde{\rho}_l (1 - \tilde{\alpha})$$

A pressão ao longo do sistema é calcula por meio da discretização da equação de balanço da quantidade de movimento linear, Eq. (3.15).

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} + \tilde{\rho}_m g \sin \theta + \tilde{\phi}_{f0}^2 \frac{1}{2} \tilde{f}_l \frac{\tilde{G}^2}{\tilde{\rho}_l D} = 0$$

APÊNDICE E – EQUAÇÕES DINÂMICAS EM FORMA MATRICIAL

E.1 Introdução

Nesse apêndice é apresentado o sistema com as três equações de balanço colocadas em função das variáveis de estado e a estruturação desse sistema na forma matricial, que é importante para a aplicação da técnica de estabilidade linear. Além disso, a apresentação do sistema na forma matricial é importante na implementação numérica.

E.1.1 Termo de transferência de massa

O termo de transferência de massa, Eq. (3.22), foi apresentada na Seção 3.4.6. No Apêndice C esse termo é deduzido e repetido aqui por conveniência. Nessa seção esse termo será escrito em função das variáveis de estado.

$$\Gamma = -\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right)$$

Como $R_{sl} = f(P, T)$, então pode-se escrever R_{sl} em função das variáveis de estado da seguinte forma:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial t} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial s} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (\text{E.2})$$

Substituindo as Eqs. (E.1) e (E.2) na Eq. (3.22) resulta em:

$$\Gamma = \frac{\partial P}{\partial t} \left[-\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \right) \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \right] + \frac{\partial T}{\partial t} \left[-\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \right) \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[-\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[-\rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \right] \quad (\text{E.3})$$

E.1.2 Equação de balanço da fase líquida

Nessa seção será determinada a equação de balanço da fase líquida em função das variáveis de estado. Essa expressão, juntamente com as demais expressões de balanço, serão importantes para a determinação do sistema matricial.

A equação de balanço de massa da fase líquida é a Eq. (3.2), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \alpha)] + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_l j_l) = -\Gamma$$

Abrindo as derivadas da Eq. (3.2), com o objetivo de colocá-la em função das variáveis de estado, resulta em:

$$(1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial t} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial s} + \rho_l \frac{\partial j_l}{\partial s} = -\Gamma \quad (\text{E.4})$$

Para expandir cada derivada da Eq. (E.4) consideramos que existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e as variáveis de estado dada pela Eq. (3.16), onde o ângulo de inclinação local não depende do tempo; isto permite eliminar a fração de vazio, reduzindo o número de variáveis de estado. Aliás, a massa específica do líquido depende unicamente da pressão e da temperatura. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \frac{\partial j_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} = \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial s} = \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (\text{E.7})$$

Substituindo as Eqs. (E.5), (E.6) e (E.7) na Eq. (E.4) resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial s} [\rho_l] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] = -\Gamma \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Finalmente, substituindo o termo de transferência de massa dado pela Eq. (E.3), na Eq. (E.8), resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] \\ & - \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial t} \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] \\ & - \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} + \frac{\partial j_l}{\partial s} [\rho_l] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial s} \left[j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

E.1.3 Equação de balanço da fase gás

A equação de balanço de massa da fase gás é a Eq. (3.1), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho_g j_g) = \Gamma$$

Abrindo as derivadas da Eq. (3.1) com o objetivo de escrevê-la em função das variáveis de estado, resulta em:

$$\alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial s} + \rho_g \frac{\partial j_g}{\partial s} = \Gamma \quad (\text{E.10})$$

Para expandir cada derivada da Eq. (E.10) consideramos a relação algébrica entre a fração de vazio e as variáveis de estado e que a massa específica do gás depende unicamente da pressão e da temperatura. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{E.11})$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial s} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (\text{E.12})$$

Substituindo as Eqs. (E.5), (E.11) e (E.12) na Eq. (E.10) resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_g}{\partial s} [\rho_g] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right] = \Gamma \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Finalmente, substituindo o termo de transferência de massa dado pela Eq. (E.3), na Eq. (E.13), resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial t} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1-\alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_g}{\partial s} [\rho_g] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \right. \\ & \left. \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

E.1.4 Sistema na forma matricial

As Eqs. (3.15), (E.9) e (E.14) podem ser reescritas em uma forma mais compacta considerando-se a abordagem matricial. Colectando os termos em função das derivadas temporais e espaciais das variáveis de estado, podemos escrever:

$$B_{11} \frac{\partial j_g}{\partial t} + B_{12} \frac{\partial j_l}{\partial t} + B_{13} \frac{\partial P}{\partial t} + B_{14} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{12} \frac{\partial j_l}{\partial s} + C_{13} \frac{\partial P}{\partial s} + C_{14} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$B_{21} \frac{\partial j_g}{\partial t} + B_{22} \frac{\partial j_l}{\partial t} + B_{23} \frac{\partial P}{\partial t} + B_{24} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{21} \frac{\partial j_g}{\partial s} + C_{23} \frac{\partial P}{\partial s} + C_{24} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (\text{E.16})$$

$$C_{33} \frac{\partial P}{\partial s} + A_{31} = 0 \quad (\text{E.17})$$

onde os coeficientes A_{ij} , B_{ij} e C_{ij} são os coeficientes que acompanham as variáveis de estado

das Eqs. (3.15), (E.9) e (E.14).

Após alguma álgebra pode-se escrever o sistema de equações dinâmicas na forma matricial conforme apresentado na Seção 3.7, Eq. (3.34):

$$\{A\} + \underline{B} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = 0$$

onde os vetores de variáveis de estado $\{v\}$ e $\{A\}$ (tamanho 4) e as matrizes quadradas $\underline{B}$ e $\underline{C}$ (tamanho 4×4) são definidos como:

$$\{v\} = \left\{ \begin{matrix} j_g & j_l & P & T \end{matrix} \right\}^T \quad (\text{E.18})$$

$$\{A\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & A_3 & 0 \end{matrix} \right\}^T \quad (\text{E.19})$$

$$A_3 = \rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (\text{E.20})$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.21})$$

$$B_{11} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.22})$$

$$B_{12} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.23})$$

$$B_{13} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (\text{E.24})$$

$$B_{14} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \quad (\text{E.25})$$

$$B_{21} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{E.26})$$

$$B_{22} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{E.27})$$

$$B_{23} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (\text{E.28})$$

$$B_{24} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \left(\frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \quad (\text{E.29})$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.30})$$

$$C_{12} = \rho_l \quad (\text{E.31})$$

$$C_{13} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (\text{E.32})$$

$$C_{14} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \quad (\text{E.33})$$

$$C_{21} = \rho_g \quad (\text{E.34})$$

$$C_{23} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \quad (\text{E.35})$$

$$C_{24} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \quad (\text{E.36})$$

$$C_{33} = 1 \quad (\text{E.37})$$

A última linha de cada matriz foi zerada, visto que não foi considerada a equação de energia. Embora a variável de estado T tenha sido contemplada até esse ponto do modelo, não foi considerada a equação de energia nas rotinas computacionais. Como será apresentada na próxima seção, a consideração de escoamento isotérmico será adotada e esse foi o motivo

de não se considerar a equação de energia. Na Seção 3.7, o sistema de equações dinâmicas matricial é apresentado sem a variável de estado T .

A Eq. (3.34) representa o sistema de equações dinâmicas final. A partir desse sistema é aplicada a teoria da estabilidade linear.

APÊNDICE F – EQUAÇÕES PERTURBADAS EM FORMA MATRICIAL

F.1 Introdução

Neste apêndice apresenta-se a dedução das equações das perturbações. Tanto o vetor de variáveis de estado como o estado estacionário é perturbado fazendo-se uma expansão em série de Taylor e, considerando pequenas perturbações, desprezam-se os termos de segunda ordem.

F.2 Sistema perturbado

O sistema dinâmico na forma matricial é representado pela Eq. (3.34), repetida aqui por conveniência:

$$\{A\} + \underline{B} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = 0$$

Pela teoria da estabilidade linear deve-se perturbar cada termo da Eq. (3.34) da seguinte forma:

$$\{A\} \simeq \{\tilde{A}\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \{\hat{v}\} \quad (\text{F.1})$$

$$\{\underline{B}\} \simeq \{\tilde{\underline{B}}\} + \left\{ \frac{\partial \underline{B}}{\partial v} \right\}^{\sim} \{\hat{v}\} \quad (\text{F.2})$$

$$\{\underline{C}\} \simeq \{\tilde{\underline{C}}\} + \left\{ \frac{\partial \underline{C}}{\partial v} \right\}^{\sim} \{\hat{v}\} \quad (\text{F.3})$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \quad (\text{F.4})$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} = \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} \quad (\text{F.5})$$

O sobrescrito $\sim$ indica uma avaliação na condição estacionária. Substituindo-se na Eq. (3.34), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{A} \right\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} + \left(\left\{ \tilde{B} \right\} + \left\{ \frac{\partial B}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \\ \left(\left\{ \tilde{C} \right\} + \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left(\left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \right) \simeq \{0\} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Reeordenando os termos, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{A} \right\} + \left\{ \tilde{C} \right\} \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} + \left\{ \tilde{B} \right\} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \left\{ \tilde{C} \right\} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} + \\ \left(\left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left(\left\{ \frac{\partial B}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \left(\left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \simeq \{0\} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Do estado estacionário, resulta:

$$\left\{ \tilde{A} \right\} + \left\{ \tilde{C} \right\} \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} = \{0\} \quad (\text{F.8})$$

Os últimos dois termos da Eq. (F.7) são de ordem superior e podem ser desprezados. Além disso, pode-se escrever:

$$\left(\left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \{ \hat{v} \} \right) \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} = \left(\left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \right) \{ \hat{v} \} \quad (\text{F.9})$$

Resulta, finalmente:

$$\left(\left\{ \frac{\partial \{A\}}{\partial v} \right\}^{\sim} + \left\{ \frac{\partial \underline{C}}{\partial v} \right\}^{\sim} \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \right) \{ \hat{v} \} + \{ \underline{\tilde{B}} \} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \{ \underline{\tilde{C}} \} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \simeq \{0\} \quad (\text{F.10})$$

Pode-se escrever a Eq. (3.34) como:

$$\underline{\tilde{A}} \{ \hat{v} \} + \underline{\tilde{B}} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \underline{\tilde{C}} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = 0 \quad (\text{F.11})$$

Assim, comparando-se a Eq. (F.11) com Eq. (F.10) resultam que os coeficientes das matrizes perturbadas $\underline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{B}}$ e $\underline{\tilde{C}}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\underline{\tilde{A}} = \left\{ \frac{\partial \{A\}}{\partial v} \right\}^{\sim} + \left\{ \frac{\partial \underline{C}}{\partial v} \right\}^{\sim} \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \quad (\text{F.12})$$

$$\underline{\tilde{B}} = \{ \underline{B} \}^{\sim} \quad (\text{F.13})$$

$$\underline{\tilde{C}} = \{ \underline{C} \}^{\sim} \quad (\text{F.14})$$

Na forma indicial os termos que compõem as matrizes perturbadas $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$ e $\tilde{C}_{ij}$ são:

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^{\sim} \quad (\text{F.15})$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij})^{\sim} \quad (\text{F.16})$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij})^{\sim} \quad (\text{F.17})$$

As matrizes quadradas de coeficientes constantes $\underline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{B}}$ e $\underline{\tilde{C}}$ apresentam tamanho 4×4 são. O vetor de perturbações das variáveis de estado $\{ \hat{v} \}$ apresenta tamanho 4 e é representado por:

$$\{\hat{v}\} = \left\{ \begin{matrix} \hat{j}_g & \hat{j}_l & \hat{P} & \hat{T} \end{matrix} \right\}^T \quad (\text{F.18})$$

F.2.1 Matriz perturbada $\tilde{A}$

Utilizando-se a Eq. (F.15), obtém-se todos os termos da matriz $\underline{A}$. Os termos relacionados à equação de balanço da quantidade de movimento linear, $\tilde{A}_{31}$, $\tilde{A}_{32}$, $\tilde{A}_{33}$ e $\tilde{A}_{34}$ podem ser escritos em duas parcelas, sendo a primeira parcela relacionada a derivada do termo gravitacional e a segunda parcela relacionada à derivada da parcela de atrito.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{31} = \frac{\partial}{\partial \dot{j}_g} (A_3) \tilde{=} & \frac{\partial}{\partial \dot{j}_g} \left(\rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{=} \\ & \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial \dot{j}_g} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial \dot{j}_g} \left(\phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{=} \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{32} = \frac{\partial}{\partial \dot{j}_l} (A_3) \tilde{=} & \frac{\partial}{\partial \dot{j}_l} \left(\rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{=} \\ & \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial \dot{j}_l} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial \dot{j}_l} \left(\phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{=} \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{33} = \frac{\partial}{\partial P} (A_3) \tilde{=} & \frac{\partial}{\partial P} \left(\rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{=} \\ & \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial P} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial P} \left(\phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{=} \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{34} = \frac{\partial}{\partial T} (A_3) \tilde{=} & \frac{\partial}{\partial T} \left(\rho_m g \sin \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{=} \\ & \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial T} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial T} \left(\phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{=} \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

$$\tilde{A}_{11} = 0 \quad (\text{F.23})$$

$$\tilde{A}_{21} = \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right)^\sim \quad (\text{F.24})$$

$$\tilde{A}_{12} = \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right)^\sim \quad (\text{F.25})$$

$$\tilde{A}_{22} = 0 \quad (\text{F.26})$$

$$\tilde{A}_{13} = \left[\frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial j_l}{\partial s} + \left(j_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \right) \frac{\partial P}{\partial s} \right]^\sim \quad (\text{F.27})$$

$$\tilde{A}_{23} = \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left(j_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \right) \frac{\partial P}{\partial s} \right]^\sim \quad (\text{F.28})$$

$$\tilde{A}_{14} = \left[\frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial j_l}{\partial s} + \left(j_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial T^2} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right]^\sim \quad (\text{F.29})$$

$$\tilde{A}_{24} = \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left(j_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right]^\sim \quad (\text{F.30})$$

A matriz $\tilde{A}$ resulta, finalmente, em:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & 0 & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.31})$$

F.2.2 Matriz perturbada $\tilde{B}$

Utilizando a Eq. (F.16), obtém-se:

$$\tilde{B}_{11} = \left(-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right)^\sim \quad (\text{F.32})$$

$$\tilde{B}_{21} = \left(\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right)^\sim \quad (\text{F.33})$$

$$\tilde{B}_{31} = 0 \quad (\text{F.34})$$

$$\tilde{B}_{12} = \left(-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right)^\sim \quad (\text{F.35})$$

$$\tilde{B}_{22} = \left(\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right)^\sim \quad (\text{F.36})$$

$$\tilde{B}_{32} = 0 \quad (\text{F.37})$$

$$\tilde{B}_{13} = \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial \tilde{P}} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right]^\sim \quad (\text{F.38})$$

$$\tilde{B}_{23} = \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right]^\sim \quad (\text{F.39})$$

$$\tilde{B}_{33} = 0 \quad (\text{F.40})$$

$$\tilde{B}_{14} = \left[-\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right]^\sim \quad (\text{F.41})$$

$$\tilde{B}_{24} = \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right]^\sim \quad (\text{F.42})$$

A matriz $\underline{\tilde{B}}$ resulta, finalmente, em:

$$\underline{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} & \tilde{B}_{14} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \tilde{B}_{23} & \tilde{B}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.43})$$

F.2.3 Matriz perturbada $\tilde{C}$

Utilizando a Eq. (F.17), obtém-se:

$$\tilde{C}_{11} = 0 \quad (\text{F.44})$$

$$\tilde{C}_{21} = (\rho_g)^\sim \quad (\text{F.45})$$

$$\tilde{C}_{31} = 0 \quad (\text{F.46})$$

$$\tilde{C}_{12} = (\rho_l)^\sim \quad (\text{F.47})$$

$$\tilde{C}_{22} = 0 \quad (\text{F.48})$$

$$\tilde{C}_{32} = 0 \quad (\text{F.49})$$

$$\tilde{C}_{13} = \left(j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right)^\sim \quad (\text{F.50})$$

$$\tilde{C}_{23} = \left(j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right)^\sim \quad (\text{F.51})$$

$$\tilde{C}_{33} = 1 \quad (\text{F.52})$$

$$\tilde{C}_{14} = \left(j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right)^\sim \quad (\text{F.53})$$

$$\tilde{C}_{24} = \left(j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right)^\sim \quad (\text{F.54})$$

$$\tilde{C}_{34} = 0 \quad (\text{F.55})$$

A matriz $\underline{\tilde{C}}$, resulta, finalmente, em:

$$\underline{\tilde{C}} = \begin{Bmatrix} 0 & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} \\ \tilde{C}_{21} & 0 & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{F.56})$$

As derivadas que compõem os coeficientes das matrizes $\underline{\tilde{A}}$, $\underline{\tilde{B}}$ e $\underline{\tilde{C}}$ são deduzidas no Apêndice H.

O escoamento isotérmico será adotado para a implementação numérica. Assim, todas as derivadas relacionadas à variável de estado T serão zeradas e as matrizes anteriores serão reduzidas para ordem 3.

F.2.4 Condições de contorno

Para fechar o sistema de equações, ainda necessita-se considerar mais três relações adicionais, correspondentes às relações de condição de contorno. As condições de contorno foram consideradas a partir de informações de entrada do problema. No nó inicial do sistema (nó mais a montante) situa-se a ANM ($s = 0$) e é estabelecida uma condição de fluxo de massa constante das fases de óleo e gás. Para a fase aquosa não há transferência de massa, enquanto que para as fases de óleo e gás, a condição de limite para as velocidades superficiais são as compatíveis com um teste *flash* em condições locais na ANM. No nó final do sistema (nó mais a jusante) situa-se o separador de produção ($s = s_t$). Nesse nó foi definida uma pressão constante P_{sep} . Perturbando as Eq. (3.23), (3.24) e (3.27) e considerando as relações de estado estacionário das Eq. (3.29) e (3.32), obtemos, respectivamente, as Eqs. (3.57), (3.58) e (3.59), repetidas aqui por conveniência:

$$\hat{P}(s_t, t) = 0$$

$$\hat{j}_g(0, t) = \left[\left(GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left(\frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t)$$

$$\hat{j}_l(0, t) = \left[\left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left(\frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t)$$

APÊNDICE G – EQUAÇÕES PERTURBADAS DISCRETIZADAS EM FORMA MATRICIAL

G.1 Introdução

Nesse apêndice é apresentada a discretização do sistema de equações perturbadas ao longo da geometria tornando o problema contínuo em um problema discreto com um número finito de graus de liberdade. A geometria é discretizada em N nós onde o sistema matricial perturbado é integrado. As condições de contorno são linearizadas e incorporadas ao sistema discretizado de forma a se obter a igualdade entre o número de equações e o número de variáveis.

G.2 Equações discretizadas das perturbações

Seja o sistema matricial representado pela Eq. (3.52) e repetida aqui por conveniência:

$$\tilde{A} \{ \hat{v} \} + \tilde{B} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \tilde{C} \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = 0$$

O sistema da Eq. (3.52) é discretizado em N nós e é integrado no intervalo $s_i \leq s \leq s_{i+1}$. Valores representativos no intervalo de integração de uma função qualquer ϕ são calculados em função da média dos valores dos nós adjacentes.

$$\phi_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} [\phi(\tilde{v}_i) + \phi(\tilde{v}_{i+1})] \quad (\text{G.1})$$

$$(\hat{v})_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} (\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) \quad (\text{G.2})$$

As derivadas espaciais são calculadas através de diferenças finitas:

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{(\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i)}{\Delta s_i} \quad (\text{G.3})$$

As derivadas temporais são calculadas da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{v}_i}{dt} + \frac{d\hat{v}_{i+1}}{dt} \right) \quad (\text{G.4})$$

O sistema da Eq. (3.52) pode ser escrito na forma explícita, representando respectivamente as equações perturbadas de balanço de massa da fase líquida, de balanço de massa da fase gasosa e de balanço da quantidade de movimento linear da seguinte forma:

$$\tilde{A}_{11} \hat{j}_g + \tilde{A}_{12} \hat{j}_l + \tilde{A}_{13} \hat{P} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \tilde{B}_{13} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{C}_{11} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{12} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{13} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = 0 \quad (\text{G.5})$$

$$\tilde{A}_{21} \hat{j}_g + \tilde{A}_{22} \hat{j}_l + \tilde{A}_{23} \hat{P} + \tilde{B}_{21} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \tilde{B}_{23} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{C}_{21} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{22} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{23} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = 0 \quad (\text{G.6})$$

$$\tilde{A}_{31} \hat{j}_g + \tilde{A}_{32} \hat{j}_l + \tilde{A}_{33} \hat{P} + \tilde{B}_{31} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{32} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \tilde{B}_{33} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{C}_{31} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{32} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{33} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} = 0 \quad (\text{G.7})$$

Integrando na posição o sistema de equações entre $s_i \leq s \leq s_{i+1}$, após alguma álgebra pode-se escrever a equação perturbada de balanço de massa da fase líquida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{11})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{11})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{11})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{11})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} = 0 \tag{G.8}
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento para a equação perturbada de balanço de massa da fase gás, a mesma pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{22})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{22})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{22})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{22})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} = 0 \tag{G.9}
\end{aligned}$$

Analogamente, a equação perturbada de balanço da quantidade de movimento linear pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{31})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{31})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{32})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{32})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[\frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{33})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[\frac{1}{2}(\tilde{B}_{33})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} = 0 \tag{G.10}
\end{aligned}$$

As Eq. (G.8), (G.9) e (G.10) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
& (G_{11})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{11})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{12})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{12})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{13})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{13})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + (H_{11})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{11})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& \quad + (H_{12})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{12})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{13})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{13})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} = 0 \tag{G.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (G_{21})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{21})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{22})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{22})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{23})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{23})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + (H_{21})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{21})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& \quad + (H_{22})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{22})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{23})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{23})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} = 0 \tag{G.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (G_{31})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{31})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{32})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{32})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{33})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{33})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& + (H_{31})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{31})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& + (H_{32})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{32})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{33})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{33})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} = 0
\end{aligned} \tag{G.13}$$

Comparando-se cada termo perturbado, Eq. (G.8) com Eq. (G.11), Eq. (G.9) com Eq. (G.12) e Eq. (G.10) com Eq. (G.13) pode-se determinar as submatrizes $\underline{G}_{ij}$ e $\underline{H}_{ij}$. Como existem $N - 1$ intervalos de integração para as Eq. (G.11) a (G.13), essas submatrizes são retangulares com dimensões $(N - 1) \times N$, com elementos dados por:

$$(G_{11})_{i,i} = (G_{11})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \tag{G.14}$$

$$(G_{12})_{i,i} = (G_{12})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \tag{G.15}$$

$$(G_{13})_{i,i} = (G_{13})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \tag{G.16}$$

$$(H_{11})_{i,i} = (H_{11})_{i,i+1} = 0 \tag{G.17}$$

$$(H_{12})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \tag{G.18}$$

$$(H_{12})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \tag{G.19}$$

$$(H_{13})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \tag{G.20}$$

$$(H_{13})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.21})$$

$$(G_{21})_{i,i} = (G_{21})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.22})$$

$$(G_{22})_{i,i} = (G_{22})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.23})$$

$$(G_{23})_{i,i} = (G_{23})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.24})$$

$$(H_{21})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.25})$$

$$(H_{21})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.26})$$

$$(H_{22})_{i,i} = (H_{22})_{i,i+1} = 0 \quad (\text{G.27})$$

$$(H_{23})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.28})$$

$$(H_{23})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.29})$$

$$(G_{31})_{i,i} = (G_{31})_{i,i+1} = 0 \quad (\text{G.30})$$

$$(G_{32})_{i,i} = (G_{32})_{i,i+1} = 0 \quad (\text{G.31})$$

$$(G_{33})_{i,i} = (G_{33})_{i,i+1} = 0 \quad (\text{G.32})$$

$$(H_{31})_{i,i} = (H_{31})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.33})$$

$$(H_{32})_{i,i} = (H_{32})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.34})$$

$$(H_{33})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.35})$$

$$(H_{33})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (\text{G.36})$$

O sistema constituído pelas Eqs. (G.8) a (G.10) pode ser escrito na notação matricial da seguinte forma:

$$\underline{G} \left\{ \frac{\partial \underline{\hat{v}}}{\partial t} \right\} + \underline{H} \{ \underline{\hat{v}} \} = \{ \underline{0} \} \quad (\text{G.37})$$

onde:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{G.38})$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{G.39})$$

Na Eq. (G.37), $\underline{G}$ e $\underline{H}$ são matrizes retangulares esparsas com dimensões $(3N - 3) \times 3N$, enquanto $\underline{\hat{v}}$ é o vetor dos valores nodais das variáveis de estado perturbadas com $3N$ componentes definido pela Eq. (4.11), repetida aqui por conveniência:

$$\{ \underline{\hat{v}} \}_j = \begin{cases} \hat{g}_j & \text{para } 1 \leq j \leq N \\ \hat{l}_{j-N} & \text{para } N+1 \leq j \leq 2N \\ \hat{P}_{j-2N} & \text{para } 2N+1 \leq j \leq 3N \end{cases}$$

Substituindo os elementos nulos nas matrizes $\underline{G}$ e $\underline{H}$ resulta:

$$\underline{G} = \begin{Bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{G.40})$$

$$\underline{H} = \begin{Bmatrix} 0 & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} \\ \underline{H}_{21} & 0 & \underline{H}_{23} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{G.41})$$

É ainda necessário considerar as condições de contorno para o fechamento do sistema em termos de se obter a igualdade entre o número variáveis e o número de equações. Considerando a numeração dos nós da ANM, 1 e na plataforma, N e considerando as Eq. (3.57), (3.58) e (3.59), nas condições linearizadas, pode-se escrever:

$$\hat{P}_N = 0 \quad (\text{G.42})$$

$$\hat{j}_{g1} + C_{g1} \hat{P}_1 = 0 \quad (\text{G.43})$$

$$\hat{j}_{l1} + C_{l1} \hat{P}_1 = 0 \quad (\text{G.44})$$

onde:

$$C_{g1} = - \left[\left(GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left(\frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (\text{G.45})$$

$$C_{l1} = - \left[\left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left(\frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (\text{G.46})$$

As matrizes quadradas $\underline{G}^*$ e $\underline{H}^*$ (dimensão $3N \times 3N$) são definidas como as matrizes $\underline{G}$ e $\underline{H}$ ampliadas com as condições de contorno das Eqs. (G.42) a (G.44), o que resulta em:

$$\{H^*\}_{3N-2,1} = 1 \quad (\text{G.47})$$

$$\{H^*\}_{3N-2,2N+1} = C_{g1} \quad (\text{G.48})$$

$$\{H^*\}_{3N-1, N+1} = 1 \quad (\text{G.49})$$

$$\{H^*\}_{3N-1, 2N+1} = C_{l1} \quad (\text{G.50})$$

$$\{H^*\}_{3N, 3N} = 1 \quad (\text{G.51})$$

Assim, o problema completo de autovalores a ser resolvido é dado pela Eq. (4.10), repetido aqui por conveniência:

$$\underline{G}^* \left\{ \frac{\partial \underline{\hat{v}}}{\partial t} \right\} + \underline{H}^* \{ \underline{\hat{v}} \} = \{ \underline{0} \}$$

APÊNDICE H – DERIVADAS DO SISTEMA PERTURBADO

H.1 Introdução

Nessa seção é apresentado o cálculo das derivadas que compõem os termos $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$ e $\tilde{C}_{ij}$ das matrizes perturbadas. Cada derivada foi calculada analiticamente para redução do erro do modelo numérico. Devido à dependência implícita de diversas variáveis das funções que compõem os termos das matrizes perturbadas, a regra da cadeia de derivação é aplicada.

H.2 Derivadas de funções termodinâmicas

Nesta seção serão apresentadas as expressões das derivadas de funções relacionadas diretamente às propriedades dos fluidos e que são utilizadas nos coeficientes das matrizes perturbadas $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$ e $\tilde{C}_{ij}$ da Seção 3.8. Os coeficientes descritos explicitamente estão no Apêndice F.

H.2.1 Derivadas da razão de solubilidade gás-líquido

Partindo da Eq. (A.69) pode-se escrever:

Derivada $\frac{\partial R_{sl}}{\partial P}$:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.1})$$

Derivando a Eq. (A.69) pode-se escrever $\frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}}$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}} = \frac{1}{1 + WOR} \quad (\text{H.2})$$

Substituindo, resulta:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.3})$$

Derivada $\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2}$:

Partindo da Eq. (H.3) pode-se escrever a derivada segunda da R_{sl} como:

$$\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \quad (\text{H.4})$$

H.2.2 Derivadas da razão de solubilidade gás-óleo

Para $P \leq P_b$:

Derivada $\frac{\partial R_{so}}{\partial P}$:

Partindo da equação de Standing (1981) no S.I. Eq. (A.28) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} = & \frac{1,2048 \gamma_g}{C_1} \left[\frac{C_2}{18,2} 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right] \\ & \times \left[\left(\frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^{0,2048} \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

Derivada $\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2}$:

Para a derivada segunda considerando a Eq. (H.5) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} = & \frac{0,24674304 \gamma_g}{C_1} \left[\frac{C_2}{18,2} 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^2 \\ & \times \left[\left(\frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^{-0,7952} \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Para $P > P_b$ tem-se:

$$\frac{\partial R_{so}}{\partial P} = 0 \quad (\text{H.7})$$

$$\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} = 0 \quad (\text{H.8})$$

H.2.3 Derivadas do fator volume de formação do líquido

Derivada $\frac{\partial B_l}{\partial P}$:

A partir da Eq. (A.72) pode-se escrever:

$$\frac{\partial B_l}{\partial P} = \frac{\partial B_l}{\partial B_o} \frac{\partial B_o}{\partial P} + \frac{\partial B_l}{\partial B_w} \frac{\partial B_w}{\partial P} \quad (\text{H.9})$$

Ainda considerando a Eq. (A.72), pode-se determinar $\frac{\partial B_l}{\partial B_o}$ e $\frac{\partial B_l}{\partial B_w}$

$$\frac{\partial B_l}{\partial B_o} = \frac{1}{1 + WOR} \quad (\text{H.10})$$

$$\frac{\partial B_l}{\partial B_w} = \frac{WOR}{1 + WOR} \quad (\text{H.11})$$

Substituindo resulta:

$$\frac{\partial B_l}{\partial P} = \left(\frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_o}{\partial P} + \left(\frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_w}{\partial P} \quad (\text{H.12})$$

Derivada $\frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2}$:

A partir da Eq. (H.12) pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2} = \left(\frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} + \left(\frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2} \quad (\text{H.13})$$

H.2.4 Derivadas do fator volume de formação do óleo

Para $P \leq P_b$:

Derivada $\frac{\partial B_o}{\partial P}$:

Com base na Eq. (A.32) no S.I. pode-se escrever:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \frac{\partial B_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.14})$$

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = 0,000144 \left[C_1 R_{so} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,2} \left[C_1 \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \right] \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.15})$$

Derivada $\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2}$:

Para a derivada segunda designando a função (ϕ_1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \phi_1 \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.16})$$

onde:

$$\phi_1 = \frac{\partial B_o}{\partial R_{so}} = 0,000144 C_1 \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \left[C_1 R_{so} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,2} \quad (\text{H.17})$$

Tem-se, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} = \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial P} \right] + \phi_1 \left[\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \right] \quad (\text{H.18})$$

Assim, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} &= 2,88.10^{-5} \left[C_1 \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right]^2 \\ &\times \left[C_1 R_{so} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{-0,8} + \phi_1 \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

Para $P > P_b$:

Derivada $\frac{\partial B_o}{\partial P}$:

Tem-se, a partir das Eqs. (A.33) e (A.35) e da regra da cadeia de derivação:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_{c_o} + \left(\frac{\partial B_o}{\partial c_o} \right) \frac{\partial c_o}{\partial P} \quad (\text{H.20})$$

onde:

$$\left(\frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_{c_o} = -B_{ob} c_o \exp [-c_o (P - P_b)] = \phi \quad (\text{H.21})$$

$$\left(\frac{\partial B_o}{\partial c_o} \right) = -B_{ob} (P - P_b) \exp [-c_o (P - P_b)] = \psi \quad (\text{H.22})$$

$$\frac{\partial c_o}{\partial P} = \frac{1433 - 5 C_1 GOR - 17,2 C_3 + 1180 \gamma_g - 12,61 API}{10^5 P^2} = \varphi \quad (\text{H.23})$$

Derivada $\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2}$:

Para a derivada segunda considerando as funções ϕ , ψ e φ definidas acima, tem-se:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \phi + \psi \varphi \quad (\text{H.24})$$

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} = \frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\partial \phi}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial P} + \varphi \left[\frac{\partial \psi}{\partial P} + \frac{\partial \psi}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial P} \right] + \psi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial P} \right] \quad (\text{H.25})$$

onde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial P} = B_{ob} c_o^2 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (\text{H.26})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c_o} = \frac{\partial \psi}{\partial P} = -B_{ob} \exp [-c_o (P - P_b)] + B_{ob} c_o (P - P_b) \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (\text{H.27})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_o} = B_{ob} (P - P_b)^2 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (\text{H.28})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = \frac{-2 (1433 - 5 C_1 GOR - 17,2 C_3 + 1180 \gamma_g - 12,61 API)}{10^5 P^3} \quad (\text{H.29})$$

H.2.5 Derivadas do fator volume de formação da água

Derivada $\frac{\partial B_w}{\partial P}$:

Com base nas Eqs. (A.37) e (A.41), obtemos:

$$\frac{\partial B_w}{\partial P} = (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial \Delta V_{wP}}{\partial P} \quad (\text{H.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta V_{wP}}{\partial P} = & -1,95301 \cdot 10^{-9} C_2 C_3 - 3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 C_3 P - \\ & 3,58922 \cdot 10^{-7} C_2 - 4,50682 \cdot 10^{-10} C_2^2 P \end{aligned} \quad (\text{H.31})$$

Derivada $\frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2}$:

A derivada segunda do B_w é dada por:

$$\frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2} = (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial^2 \Delta V_{wP}}{\partial P^2} \quad (\text{H.32})$$

onde:

$$\frac{\partial^2 \Delta V_{wP}}{\partial P^2} = -3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 C_3 - 4,50682 \cdot 10^{-10} C_2^2 \quad (\text{H.33})$$

H.2.6 Derivadas do fator de compressibilidade do gás

Derivada $\frac{\partial Z_g}{\partial P}$:

Considerando a Eq. (A.19), a derivada primeira é dada por:

$$\frac{\partial Z_g}{\partial P} = - \left(\frac{3,52}{P_{pc}} \right) (10^{-0,9813 T_{pr}}) + \left(\frac{0,548 P}{P_{pc}^2} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (\text{H.34})$$

Derivada $\frac{\partial^2 Z_g}{\partial P^2}$:

A derivada segunda é obtida a partir da Eq. (H.34):

$$\frac{\partial^2 Z_g}{\partial P^2} = \left(\frac{0,548}{P_{pc}^2} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (\text{H.35})$$

H.2.7 Derivadas da massa específica do gás

Derivada $\frac{\partial \rho_g}{\partial P}$:

Partindo da Eq. (A.25) pode-se determinar:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial P} + \frac{\partial \rho_g}{\partial Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \quad (\text{H.36})$$

Derivando (A.25) e substituindo na Eq. (H.36), resulta:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{M_g}{R_g} \frac{1}{T Z_g} - \frac{M_g}{R_g} \frac{P}{T Z_g^2} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \quad (\text{H.37})$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{M_g}{R_g} \frac{1}{T Z_g} \left[1 - \frac{P}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \right] \quad (\text{H.38})$$

Derivada $\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2}$:

Designando as seguintes funções: $\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \Phi$, $\frac{\partial Z_g}{\partial P} = \Psi$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = f(Z_g, P, \Psi) \quad (\text{H.39})$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right)_{Z_g, \Psi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial P} \quad (\text{H.40})$$

Derivando cada uma das funções que constituem a Eq. (H.40) e substituindo na mesma, resulta em:

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} = \frac{M_g}{R_g T Z_g^2} \left[\frac{\partial Z_g}{\partial P} \left(-2 + \frac{2P}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \right) - P \frac{\partial^2 Z_g}{\partial P^2} \right] \quad (\text{H.41})$$

H.2.8 Derivadas da massa específica do líquido

Derivada $\frac{\partial \rho_l}{\partial P}$:

Considerando a Eq. (A.76) pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial P} = \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (\text{H.42})$$

Derivando a Eq. (A.76) em relação a R_{sl} , tem-se:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} = \frac{\rho_{g0}}{B_l} \quad (\text{H.43})$$

Derivando a Eq. (A.76) em relação a B_l , tem-se:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} = -\frac{(\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0})}{B_l^2} \quad (\text{H.44})$$

Derivada $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2}$:

Considerando a Eq. (H.42) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} + \\ \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \right) \frac{\partial B_l}{\partial P} + \frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \end{aligned} \quad (\text{H.45})$$

As únicas derivadas que ainda não foram calculadas são: $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial R_{sl}^2}$ e $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial B_l^2}$. Utilizando as Eq. (H.43) e (H.44), pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial R_{sl}^2} = -\frac{\rho_{g0}}{B_l^2} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (\text{H.46})$$

$$\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial B_l^2} = -\frac{\rho_{g0}}{B_l^2} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{2(\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0})}{B_l^3} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (\text{H.47})$$

H.2.9 Derivadas da viscosidade do gás

Considerando a Eq. (A.47), pode-se escrever:

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} = \frac{\partial \mu_g}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \quad (\text{H.48})$$

Derivando a Eq. (A.47) e substituindo da Eq. (H.48), resulta em:

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} = (10^{-4} C_4^{F_3+1} \rho_g^{F_3-1} F_1 F_2 F_3) \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \exp \left[F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (\text{H.49})$$

H.2.10 Derivadas da viscosidade do óleo

Para $P \leq P_b$:

Com base nas equação no S.I. definido para óleo saturado ($P \leq P_b$), Eqs. (A.55) e (A.56) e considerando a regra da cadeia de derivação, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial P} = \frac{\partial \mu_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} + \frac{\partial \mu_o}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (\text{H.50})$$

onde:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial R_{so}} = -5,518225 C_1 C_4 \left(\frac{\mu_{od}}{C_4} \right)^b (C_1 R_{so} + 100)^{-1,515} \quad (\text{H.51})$$

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial b} = 10,715 C_4 (C_1 R_{so} + 100)^{-0,515} \left(\frac{\mu_{od}}{C_4} \right)^b \ln \left(\frac{\mu_{od}}{C_4} \right) \quad (\text{H.52})$$

$$\frac{\partial b}{\partial R_{so}} = -1,83872 C_1 (C_1 R_{so} + 150)^{-1,338} \quad (\text{H.53})$$

Para $P > P_b$:

Com base nas equações no S.I. definido para óleo subsaturado ($P > P_b$), Eqs. (A.57) e (A.59) tem-se, considerando a regra da cadeia de derivação:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial P} = \frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial P} + \left(\frac{\partial \mu_o}{\partial P} \right)_{m_2} \frac{\partial P}{\partial P} \quad (\text{H.54})$$

onde:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} = \mu_{ob} \left(\frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \ln \left(\frac{P}{P_b} \right) \quad (\text{H.55})$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial P} = \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} C_2 P) \left[3,0862 C_2^{1,187} P^{0,187} - 2,3348 \cdot 10^{-4} C_2^{2,187} P^{1,187} \right] \quad (\text{H.56})$$

$$\left(\frac{\partial \mu_o}{\partial P} \right)_{m_2} = \mu_{ob} P_b^{-m_2} m_2 P^{m_2-1} \quad (\text{H.57})$$

H.2.11 Derivadas da viscosidade da água

Com base na Eq. (A.65) tem-se:

$$\frac{\partial \mu_w}{\partial P} = \mu_{w0} \left[4,0295 \cdot 10^{-5} C_2 + 6,2124 \cdot 10^{-9} (C_2 P + 14,7) C_2 \right] \quad (\text{H.58})$$

H.2.12 Derivadas da viscosidade do líquido

Com base na Eq. (A.77) tem-se:

$$\frac{\partial \mu_l}{\partial P} = \left(\frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_o}{\partial P} + \left(\frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_w}{\partial P} \quad (\text{H.59})$$

H.3 Derivadas da fração de vazio

Seja a relação constitutiva do modelo de fluxo de deriva, Eq. (3.16), repetida aqui por conveniência:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d}$$

onde C_d é o parâmetro de distribuição, U_d é a velocidade de deriva e j é a velocidade superficial total $j = j_g + j_l$. Além disso, os dois parâmetros são funções das variáveis de estado e da inclinação local.

$$C_d = C_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta) \quad (\text{H.60})$$

$$U_d = U_d(\alpha, j_g, j_l, P, \theta) \quad (\text{H.61})$$

H.3.1 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$

Deriva-se a Eq. (3.16) com relação a j_g :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = \frac{1}{C_d j + U_d} - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) \quad (\text{H.62})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{H.63})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{1}{C_d j + U_d} - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \quad (\text{H.64})$$

Isolando a derivada procurada, resulta:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{1 - \alpha \left(C_d + j \frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left(j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (\text{H.65})$$

H.3.2 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$

Deriva-se a Eq. (3.16) com relação a j_l :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) \quad (\text{H.66})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{H.67})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[j \left(\frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \quad (\text{H.68})$$

Isolando a derivada procurada, resulta:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = - \frac{\alpha \left(C_d + j \frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left(j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (\text{H.69})$$

H.3.3 Derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$

Deriva-se a Eq. (3.16) com relação a P :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) \quad (\text{H.70})$$

$$\frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) = j \left(\frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{H.71})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[j \left(\frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \quad (\text{H.72})$$

Isolando a derivada procurada, resulta:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{\alpha \left(j \frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial P} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left(j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (\text{H.73})$$

H.3.4 Derivadas da correlação de Bhagwat e Ghajar (2012)

A partir da correlação de Bhagwat e Ghajar (2012) (ver Seção B.2.1) pode-se escrever as derivadas necessárias para os termos descritos nas Seções (H.3.1), (H.3.2) e (H.3.3).

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_g} = -0,018 j_l^{0,1} j^{-1,1} \quad (\text{H.74})$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial \alpha} = - \left(\frac{1}{(1 + \cos \theta)^{1,25}} \right)^{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}} \ln \left(\frac{1}{(1 + \cos \theta)^{1,25}} \right) \quad (\text{H.75})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_g} = 0 \quad (\text{H.76})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial j_l} = 0 \quad (\text{H.77})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} = \left[\frac{\mu_l}{\mu_w} \right]^{-0,25} (0,35 \sin \theta + 0,54 \cos \theta) \sqrt{\frac{g D (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l}} \\ \times (0,5 \sin \theta) (1 - \alpha)^{-0,5 \sin \theta - 1} \end{aligned} \quad (\text{H.78})$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial j_l} = 0,018 \left(\frac{j_l}{j} \right)^{-0,9} \left(\frac{1}{j} - \frac{j_l}{j^2} \right) \quad (\text{H.79})$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial P} = \frac{\partial U_d}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{H.80})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial \mu_l} = & -0,25 \mu_w^{0,25} \mu_l^{-1,25} (0,35 \operatorname{sen} \theta + 0,54 \cos \theta) \\ & \times \sqrt{\frac{g D (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l}} \frac{1}{(1 - \alpha)^{0,5} \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (\text{H.81})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial \mu_w} = & 0,25 \mu_w^{-0,75} \mu_l^{-0,25} (0,35 \operatorname{sen} \theta + 0,54 \cos \theta) \\ & \times \sqrt{\frac{g D (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l}} \frac{1}{(1 - \alpha)^{0,5} \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (\text{H.82})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial \rho_l} = & \frac{g D \rho_g}{2 \rho_l^2} \sqrt{\frac{\rho_l}{g D (\rho_l - \rho_g)}} \left[\frac{\mu_l}{\mu_w} \right]^{-0,25} (0,35 \operatorname{sen} \theta + 0,54 \cos \theta) \\ & \times \frac{1}{(1 - \alpha)^{0,5} \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (\text{H.83})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_d}{\partial \rho_g} = & -\frac{g D}{2 \rho_l} \sqrt{\frac{\rho_l}{g D (\rho_l - \rho_g)}} \left[\frac{\mu_l}{\mu_w} \right]^{-0,25} (0,35 \operatorname{sen} \theta + 0,54 \cos \theta) \\ & \times \frac{1}{(1 - \alpha)^{0,5} \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (\text{H.84})$$

$$\frac{\partial C_d}{\partial P} = 0 \quad (\text{H.85})$$

H.4 Derivadas da mistura

Nesta seção serão apresentadas as expressões das derivadas de funções relacionadas diretamente à mistura dos fluidos que são utilizadas nos coeficientes das matrizes perturbadas $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$ e $\tilde{C}_{ij}$ da Seção 3.8. Os coeficientes descritos explicitamente estão no Apêndice F.2.

H.4.1 Termos relacionados à equação de balanço da quantidade de movimento linear

De acordo com o estudo dessa tese, foi considerado um modelo específico (modelo estratificado de equilíbrio local) para o caso de escoamento horizontal ou descendente em que se verifica escoamento estratificado. Nos demais casos considerou-se duas abordagens para o termo do atrito (velocidade do centro de massa e velocidade do centro de volume) conforme descrito no Apêndice B. Assim, esses termos apresentam três formas (alterando-se adequadamente o multiplicador de duas fases ϕ_{f0}^2) de acordo com o modelo adotado no trecho específico da tubulação.

Para o caso de se adotar o modelo do centro de massa, o termo ϕ_{f0}^2 assume a seguinte forma:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{f_m \rho_m v_m^2 \rho_l}{f_l G^2} \quad (\text{H.86})$$

Na equação de balanço da quantidade de movimento linear, Eq. (3.15), substituindo-se o termo ϕ_{f0}^2 , Eq. (H.86) resulta, para o caso de trechos em padrão não estratificado, a seguinte equação:

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \rho_m g \sin \theta + \frac{1}{2} f_m \frac{\rho_m v_m^2}{D} = 0 \quad (\text{H.87})$$

No caso de se adotar a velocidade do centro de volume j , resulta:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{f_m \rho_m j^2 \rho_l}{f_l G^2} \quad (\text{H.88})$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \rho_m g \sin \theta + \frac{1}{2} f_m \frac{\rho_m j^2}{D} = 0 \quad (\text{H.89})$$

Para trechos horizontais e descendentes em que se observa escoamento estratificado pelo critério adotado, a Eq. (I.138) é utilizada. Nessa equação o ângulo θ é negativo para trechos descendente e considerando a massa específica da mistura, resulta em:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{2 \rho_l D (\tau_{wg} S_g + \tau_{wl} S_l)}{A f_l G^2} \quad (\text{H.90})$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} + \rho_m g \sin \theta = 0 \quad (\text{H.91})$$

Os termos matriciais perturbados relacionados à equação de balanço da quantidade de movimento linear são: $\tilde{A}_{31}$, $\tilde{A}_{32}$, $\tilde{A}_{33}$ e $\tilde{A}_{34}$. Esses termos podem ser escritos em duas parcelas, sendo uma parcela relacionada a derivada do termo gravitacional e a outra parcela relacionada à derivada do atrito.

H.4.1.1 Termos do modelo centro de massa

Com base na Seção F.2.1 e na Eq. (H.87), pode-se escrever:

$$A_{31} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m v_m^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} + \rho_m \frac{\partial}{\partial j_g} (f_m v_m^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.92})$$

$$A_{32} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m v_m^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} + \rho_m \frac{\partial}{\partial j_l} (f_m v_m^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.93})$$

$$A_{33} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial P} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m v_m^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial P} + \rho_m \frac{\partial}{\partial P} (f_m v_m^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.94})$$

$$A_{34} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial T} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m v_m^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial T} + \rho_m \frac{\partial}{\partial T} (f_m v_m^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.95})$$

H.4.1.2 Termos do modelo centro de volume

Com base na Seção F.2.1 e na Eq. (H.89), pode-se escrever:

$$A_{31} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m j^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} + \rho_m \frac{\partial}{\partial j_g} (f_m j^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.96})$$

$$A_{32} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m j^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} + \rho_m \frac{\partial}{\partial j_l} (f_m j^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.97})$$

$$A_{33} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial P} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m j^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial P} + \rho_m \frac{\partial}{\partial P} (f_m j^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.98})$$

$$A_{34} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial T} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left(f_m j^2 \frac{\partial \rho_m}{\partial T} + \rho_m \frac{\partial}{\partial T} (f_m j^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.99})$$

H.4.1.3 Termos do modelo estratificado

Com base na Seção F.2.1 e na Eq. (H.91), pode-se escrever:

$$A_{31} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g + \tau_{wl} S_l}{A} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.100})$$

$$A_{32} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g + \tau_{wl} S_l}{A} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.101})$$

$$A_{33} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial P} g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g + \tau_{wl} S_l}{A} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.102})$$

$$A_{34} = \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial T} g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\tau_{wg} S_g + \tau_{wl} S_l}{A} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (\text{H.103})$$

As derivadas relacionadas ao atrito desse modelo são calculadas no Apêndice I.

H.4.2 Derivadas da massa específica da mistura

Considerando a Eq. (3.4), pode-se escrever:

Derivada $\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g}$:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{H.104})$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} (\rho_g - \rho_l) \quad (\text{H.105})$$

Derivada $\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l}$:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{H.106})$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} (\rho_g - \rho_l) \quad (\text{H.107})$$

Derivada $\frac{\partial \rho_m}{\partial P}$:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial P} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{H.108})$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial P} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + \frac{\partial \alpha}{\partial P} (\rho_g - \rho_l) \quad (\text{H.109})$$

H.4.3 Derivadas da viscosidade da mistura

Considerando a Eq. (B.10), pode-se escrever:

Derivada $\frac{\partial \mu_m}{\partial j_g}$:

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial j_g} = \mu_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \mu_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{H.110})$$

Derivada $\frac{\partial \mu_m}{\partial j_l}$:

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial j_l} = \mu_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \mu_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{H.111})$$

Derivada $\frac{\partial \mu_m}{\partial P}$:

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial P} = (\mu_g - \mu_l) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \mu_g}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \quad (\text{H.112})$$

H.4.4 Derivadas da velocidade da mistura

Considerando a Eq. (B.7), pode-se escrever:

Derivada $\frac{\partial v_m}{\partial j_g}$:

$$\frac{\partial v_m}{\partial j_g} = \frac{\rho_g}{\rho_m} - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho_m^2} \frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} \quad (\text{H.113})$$

Derivada $\frac{\partial v_m}{\partial j_l}$:

$$\frac{\partial v_m}{\partial j_l} = \frac{\rho_l}{\rho_m} - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho_m^2} \frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} \quad (\text{H.114})$$

Derivada $\frac{\partial v_m}{\partial P}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial P} &= \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial P} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho_m^2} \frac{\partial \rho_m}{\partial P} = \\ &= \frac{1}{\rho_m} \left(j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho_m^2} \frac{\partial \rho_m}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{H.115})$$

H.4.5 Derivadas do Reynolds da mistura

Essas derivadas são utilizadas ao se derivar o termo $f_m v_m^2$. Na abordagem do multiplicador de duas fases com base no centro de massa na Seção B.3.1, obteve-se uma expressão para número de Reynolds, $Re_{cm} = \frac{\rho_m v_m D}{\mu_m}$. Assim, pode-se escrever:

Derivada $\frac{\partial Re_m}{\partial j_g}$:

$$\frac{\partial Re_m}{\partial j_g} = \frac{\partial Re_m}{\partial \rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} + \frac{\partial Re_m}{\partial v_m} \frac{\partial v_m}{\partial j_g} + \frac{\partial Re_m}{\partial \mu_m} \frac{\partial \mu_m}{\partial j_g} \quad (\text{H.116})$$

$$\frac{\partial Re_m}{\partial \rho_m} = \frac{D v_m}{\mu_m} \quad (\text{H.117})$$

$$\frac{\partial Re_m}{\partial v_m} = \frac{\rho_m D}{\mu_m} \quad (\text{H.118})$$

$$\frac{\partial Re_m}{\partial \mu_m} = -\frac{\rho_m D v_m}{\mu_m^2} \quad (\text{H.119})$$

Derivada $\frac{\partial Re_m}{\partial j_l}$:

$$\frac{\partial Re_m}{\partial j_l} = \frac{\partial Re_m}{\partial \rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} + \frac{\partial Re_m}{\partial v_m} \frac{\partial v_m}{\partial j_l} + \frac{\partial Re_m}{\partial \mu_m} \frac{\partial \mu_m}{\partial j_l} \quad (\text{H.120})$$

Derivada $\frac{\partial Re_m}{\partial P}$:

$$\frac{\partial Re_m}{\partial P} = \frac{\partial Re_m}{\partial \rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial P} + \frac{\partial Re_m}{\partial v_m} \frac{\partial v_m}{\partial P} + \frac{\partial Re_m}{\partial \mu_m} \frac{\partial \mu_m}{\partial P} \quad (\text{H.121})$$

H.4.6 Derivada do fator de atrito em relação ao Reynolds

Essas derivadas são utilizadas ao se derivar o termo $f_m v_m^2$. Considerando a equação do fator de atrito, conforme Eq. (B.9), pode-se escrever:

$$\frac{\partial f_m}{\partial Re_m} = 0,125 R_1^{-0,875} \frac{\partial R_1}{\partial Re_m} \quad (\text{H.122})$$

$$R_1 = \left(\frac{64}{Re_m} \right)^8 + 9,5 \left[\ln \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re_m^{0,9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re_m} \right)^6 \right]^{-16} \quad (\text{H.123})$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial Re_m} = -8 \left(\frac{64}{Re_m} \right)^7 \frac{64}{Re_m^2} - 152 R_2^{-17} \frac{\partial R_2}{\partial Re_m} \quad (\text{H.124})$$

$$R_2 = \ln \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re_m^{0,9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re_m} \right)^6 \quad (\text{H.125})$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial Re_m} = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re_m^{0,9}}} \right) \left(\frac{-5,166}{Re_m^{1,9}} \right) + \frac{15000}{Re_m^2} \left(\frac{2500}{Re_m} \right)^5 \quad (\text{H.126})$$

H.4.7 Derivadas relacionadas ao termo $f_m v_m^2$

Derivada $\frac{\partial}{\partial j_g}(f_m v_m^2)$:

Com base nas equações apresentadas na Seção B.3.1, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial j_g}(f_m v_m^2) = v_m^2 \frac{\partial f_m}{\partial Re_m} \frac{\partial Re_m}{\partial j_g} + 2 f_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial j_g} \quad (\text{H.127})$$

Derivada $\frac{\partial}{\partial j_l}(f_m v_m^2)$:

Analogamente às deduções feitas para $\frac{\partial}{\partial j_g}(f_m v_m^2)$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial j_l}(f_m v_m^2) = v_m^2 \frac{\partial f_m}{\partial Re_m} \frac{\partial Re_m}{\partial j_l} + 2 f_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial j_l} \quad (\text{H.128})$$

Derivada $\frac{\partial}{\partial P}(f_m v_m^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial P}(f_m v_m^2) = v_m^2 \frac{\partial f_m}{\partial Re_m} \frac{\partial Re_m}{\partial P} + 2f_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial P} \quad (\text{H.129})$$

H.5 Derivadas relacionadas à temperatura

Como o modelo é isotérmico, não é necessário calcular as derivadas em relação à temperatura.

APÊNDICE I – RELAÇÕES PARA ESCOAMENTO ESTRATIFICADO

I.1 Introdução

Neste apêndice são apresentadas as relações para escoamento estratificado baseado na abordagem original de [Taitel e Dukler \(1976\)](#) para escoamento bifásico água-ar, tubulação horizontal e levemente inclinada. O modelo aqui apresentado foi adaptado diretamente do modelo desenvolvido por [Baliño \(2008\)](#) e [Azevedo \(2017\)](#). Os autores desenvolveram o modelo para água-ar. Partindo desse modelo, na presente tese foi incorporada a compressibilidade da fase líquida, a não idealidade do gás e incluído um critério para determinação do padrão de escoamento estratificado para fluxo de petróleo com base em [Taitel, Barnea e Brill \(1995\)](#). Serão deduzidas nesse apêndice as relações para o cálculo da fração de vazio, da perda de carga por atrito e das derivadas dessas relações em função das variáveis j_g , j_l e P . A Fig. [I.1](#) apresenta o sistema físico em escoamento estratificado descendente. Na dedução das equações é considerado nessa seção que o ângulo θ é positivo.

Figura I.1: Definição para escoamento estratificado.

Baseado na Fig. I.1 e na abordagem de Taitel e Dukler (1976), pode-se escrever as seguintes equações de balanço da quantidade de movimento linear para as duas fases:

$$- A_l \frac{dP}{ds} - \tau_{wl} S_l + \tau_i S_i + \rho_l A_l g \sin \theta = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$- A_g \frac{dP}{ds} - \tau_{wg} S_g - \tau_i S_i + \rho_g A_g g \sin \theta = 0 \quad (\text{I.2})$$

onde P é a pressão, s é a posição ao longo da tubulação, τ_{wl} , τ_{wg} e τ_i são as tensões de cisalhamento, respectivamente, entre gás e a parede, entre o líquido e a parede e entre a interface gás-líquido. S_l , S_g e S_i são, respectivamente, o perímetro molhado do gás, o perímetro molhado do líquido e o perímetro molhado na interface gás-líquido. O ângulo θ é assumido positivo para fluxo descendente.

Quando a Eq. (I.1) e Eq. (I.2) são combinadas, obtém-se a fração de vazio e a queda de pressão por atrito para o escoamento estratificado.

I.2 Fração de vazio

Baseado em Baliño (2008), combina-se a Eq. (I.1) e Eq.(I.2), eliminando-se a queda de pressão total, e obtém-se:

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{A_g} - \frac{\tau_{wl} S_l}{A_l} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{A_g} + \frac{1}{A_l} \right) + (\rho_l - \rho_g) g \sin \theta = 0 \quad (\text{I.3})$$

Eq. (I.3) pode ser reescrita em termos da fração de vazio α e, portanto:

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta = 0 \quad (\text{I.4})$$

A fração de vazio para o escoamento estratificado pode ser estimada implicitamente pela resolução da Eq. (I.4). onde:

$$\tau_{wg} = \frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \quad (\text{I.5})$$

$$\tau_{wl} = \frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (\text{I.6})$$

$$\tau_i = \frac{1}{8} \rho_g f_i \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left| \frac{j_g}{\alpha} - u_i \right| \quad (\text{I.7})$$

Os termos f_g , f_l são os fatores de atrito de Darcy para a fase gasosa e para fase líquida respectivamente, calculados a partir de [Chen \(1979\)](#), e u_i é a velocidade média na interface gás-líquido. A velocidade média da interface u_i é calculada como:

$$u_i = \frac{\varepsilon j_l}{1 - \alpha} \quad (\text{I.8})$$

onde $\varepsilon = 1,8$ se $Re_l \leq 2000$ e $\varepsilon = 1$ se $Re_l > 2000$. O fator de atrito na interface f_i , como em [Baliño \(2008\)](#), é admitido constante e $f_i = 0,0142$. De maneira simplificada escreve-se:

$$f_{g,l} = f(Re_{g,l}, D_{g,l}) \quad (\text{I.9})$$

onde $Re_{g,l}$ e $D_{g,l}$ se referem ao número de Reynolds e ao diâmetro hidráulico de cada fase. Pode-se escrever:

$$Re_g = \frac{\rho_g D_g |j_g|}{\mu_g a} \quad (\text{I.10})$$

$$Re_l = \frac{\rho_l D_l |j_l|}{\mu_l (1 - a)} \quad (\text{I.11})$$

Figura I.2: Representação geométrica das variáveis.

$$D_g = \frac{4 \alpha A}{S_g + S_i} \quad (\text{I.12})$$

$$D_l = \frac{4 (1 - \alpha) A}{S_l} \quad (\text{I.13})$$

Os perímetros molhados S_g , S_l e S_i podem ser obtidos a partir de uma análise geométrica da Fig. I.2, que representa seção transversal de um tubo na presença de escoamento estratificado.

$$S_g = (1 - \gamma) \pi D \quad (\text{I.14})$$

$$S_l = \gamma \pi D \quad (\text{I.15})$$

$$S_i = D \sin(\pi\gamma) \quad (\text{I.16})$$

A fração de vazio pode ser calculada geometricamente a partir das relações entre as áreas das fases gasosa e líquida. Da Fig. I.2, a área da fase líquida pode ser escrita em função de γ , pois ela é formada pela área do triângulo EOB, A_{EOB} , e pela região da circunferência delimitada pelos pontos EOBC, A_{EOBC} . Escreve-se:

$$A_l = A_{EOB+EOBC} \quad (\text{I.17})$$

$$A_l = \frac{1}{2} \frac{D^2}{4} \text{sen}(2\pi - 2\pi\gamma) + \frac{2\pi\gamma}{2\pi} A \quad (\text{I.18})$$

A área referente à fase gasosa por ser escrita como:

$$A_g = A - A_l \quad (\text{I.19})$$

E, portanto,

$$\alpha A = A - \frac{1}{2} \frac{D^2}{4} \text{sen}(2\pi - 2\pi\gamma) - \frac{2\pi\gamma}{2\pi} A \quad (\text{I.20})$$

Divide-se a Eq. (I.20) por A e rearranjando-a, tem-se:

$$\alpha + \gamma - \frac{\text{sen}(2\pi\gamma)}{2\pi} - 1 = 0 \quad (\text{I.21})$$

Pode-se mostrar facilmente que o ângulo $E\hat{O}B$ é o dobro do ângulo $E\hat{C}O$ e, portanto, escreve-se:

$$\tan\left(\frac{\pi - \gamma\pi}{2}\right) = \frac{S_i}{2h_l} \quad (\text{I.22})$$

E, portanto, define-se o nível de líquido (*liquid hold-up*) como:

$$h_l = \frac{S_i}{2 \tan\left(\frac{\pi - \gamma\pi}{2}\right)} \quad (\text{I.23})$$

Analisando-se a Eq.(I.23) e a Fig. I.2 pode-se afirmar que para $\gamma = 0$ resulta em $h_l = 0$ e para $\gamma = 1$ resulta em $h_l = D$.

I.2.1 $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$

Deriva-se a relação implícita Eq. (I.4) com relação a j_g :

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) + (\rho_g - \rho_l) A g \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.25})$$

I.2.1.1 Primeiro termo da Eq. (I.25)

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.26})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_g} + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.27})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_g} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.28})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g \{ Re_g [\alpha(j_g), j_g], D_g [\alpha(j_g)] \} \quad (\text{I.29})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.30})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.31})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_g} = \frac{4 A \rho_g}{\mu_g (S_g + S_i)} \quad (\text{I.32})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_g j_g}{\mu_g (S_g + S_i)^2} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{I.33})$$

$$\frac{\partial D_g}{\partial \alpha} = 4A \left[\frac{1}{S_g + S_i} - \frac{\alpha}{(S_g + S_i)^2} \left(\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (\text{I.34})$$

onde

$$\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} = \frac{-\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{I.35})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} = \frac{\pi D \cos(\gamma\pi)}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{I.36})$$

Substitui-se as Eq. (I.27), Eq. (I.31) e Eq. (I.28) em Eq. (I.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \left[\frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} - \right. \\ \left. \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.37) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g j_g \rho_g}{4 \alpha^3} \left(f_g + \frac{j_g}{2} \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} \right) + \\ \left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4 \alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \Theta_{1,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.39})$$

I.2.1.2 Segundo termo da Eq. (I.25)

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = -\frac{S_l}{1 - \alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \frac{\partial S_l}{\partial j_g} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.40})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.41})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_g} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.42})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l\{Re_l[\alpha(j_g)], D_l[\alpha(j_g)]\} \quad (\text{I.43})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.45})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_l j_l}{\mu_l S_l^2} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \quad (\text{I.46})$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A}{S_l} \left(1 + \frac{1 - \alpha}{S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{I.47})$$

onde

$$\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} = \frac{\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{I.48})$$

Substitui-se as Eq. (I.41), Eq. (I.45) e Eq. (I.42) em Eq. (I.40), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = & -\frac{S_l}{1 - \alpha} \left[\frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \\ & - \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.49) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = - \left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \frac{S_l}{1 - \alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.50})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.51})$$

I.2.1.3 Terceiro termo da Eq. (I.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial j_g} + \\ &+ \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.52})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{I.53})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \frac{\partial u_i}{\partial j_g} \right) \quad (\text{I.54})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial j_g} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.55})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_g é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial j_g} = \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.56})$$

Substitui-se a Eq. (I.56) em Eq. (I.54), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \left[\frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \right\} \quad (\text{I.57})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4 \alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.58})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_g} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4\alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.59})$$

Substitui-se as Eq. (I.59) e Eq. (I.55) em Eq. (I.52), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left[\frac{\psi f_i \rho_g}{4\alpha} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \\ &+ \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.60) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= \frac{\psi S_i f_i \rho_g}{4\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \\ &+ \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = \Theta_{3,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.62})$$

I.2.1.4 Função $\partial \alpha / \partial j_g$ simplificada

As partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (I.25), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente a $\partial \alpha / \partial j_g$. A Eq. (I.25) pode ser reescrita em função de Eq. (I.62), Eq. (I.51) e Eq. (I.39), tal que:

$$\begin{aligned} \Theta_{1,g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \Theta_{3,g} + \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = - \frac{\Theta_{1,g} + \Theta_{3,g}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right]} \quad (\text{I.64})$$

I.2.2 $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$

Deriva-se a relação implícita Eq. (I.4) com relação a j_l :

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_g - \rho_l) A g \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{I.65})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_l} \left(- \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.66})$$

I.2.2.1 Primeiro termo da Eq. (I.66)

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.67})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_l} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.68})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_l} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.69})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g \{ Re_g [\alpha(j_l)], D_g [\alpha(j_l)] \} \quad (\text{I.70})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_l} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.71})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_l} = \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.72})$$

Substituindo-se a Eq. (I.68) e Eq. (I.72) em Eq. (I.67), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{4\alpha} \left[\frac{\rho_g j_g^2}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.73})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.73) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4\alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.74})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.75})$$

I.2.2.2 Segundo termo da Eq. (I.66)

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = -\frac{S_l}{1-\alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \frac{\partial S_l}{\partial j_l} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.76})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1-\alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l f_l j_l}{4(1-\alpha)^2} + \frac{\rho_l j_l^2}{8(1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4(1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.77})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_l} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.78})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l\{Re_l[\alpha(j_l), j_l], D_l[\alpha(j_l)]\} \quad (\text{I.79})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.80})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.81})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{4 A \rho_l}{\mu_l S_l} \quad (\text{I.82})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_l j_l}{\mu_l S_l^2} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \quad (\text{I.83})$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A}{S_l} \left(1 + \frac{1 - \alpha}{S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{I.84})$$

onde

$$\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} = \frac{\pi D}{\cos(2\pi\gamma) - 1} \quad (\text{I.85})$$

Substituindo-se as Eq. (I.77), Eq. (I.81) e Eq. (I.78) em Eq. (I.76), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = & -\frac{S_l}{4(1 - \alpha)} \left[\frac{\rho_l f_l j_l}{(1 - \alpha)^2} + \frac{\rho_l j_l^2}{2(1 - \alpha)^2} \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{(1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] - \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{I.86})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.86) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = & -\frac{S_l \rho_l j_l}{4(1 - \alpha)^3} \left[f_l + \frac{j_l}{2} \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} \right] + \\ & - \left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4(1 - \alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1 - \alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \frac{S_l}{1 - \alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{I.87})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) = \Theta_{2,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.88})$$

I.2.2.3 Terceiro termo da Eq. (I.66)

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] = S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial j_l} +$$

$$+ \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.89})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{I.90})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(-\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \frac{\partial u_i}{\partial j_l} \right) \quad (\text{I.91})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial j_l} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.92})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_l é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial j_l} = \frac{\varepsilon}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.93})$$

Substituindo-se a Eq. (I.93) em Eq. (I.91), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left\{ -\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \left[\frac{\varepsilon}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \right\} \quad (\text{I.94})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = -\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4(1-\alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.95})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial j_l} = -\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4(1-\alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.96})$$

Substituindo-se as Eq. (I.96) e Eq. (I.92) em Eq. (I.89), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left[-\frac{\psi \varepsilon f_i \rho_g}{4(1-\alpha)} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{I.97})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.97) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= -\frac{\psi \varepsilon S_i f_i \rho_g}{4(1-\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) + \\ &\quad + \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \end{aligned} \quad (\text{I.98})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = \Theta_{3,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.99})$$

I.2.2.4 Função $\partial \alpha / \partial j_l$ simplificada

As partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (I.66), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente $\partial \alpha / \partial j_l$. A Eq. (I.66) pode ser reescrita em função de Eq. (I.99), Eq. (I.88) e Eq. (I.75), tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \Theta_{2,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \Theta_{3,l} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = -\frac{\Theta_{2,l} + \Theta_{3,l}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right]} \quad (\text{I.100})$$

I.2.3 $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$

Deriva-se a relação implícita Eq. (I.4) com relação a P :

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) + (\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta \right] = 0 \quad (\text{I.101})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial P} [(\rho_l - \rho_g) A g \sin \theta] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

I.2.3.1 Primeiro termo da Eq. (I.102)

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{\alpha} \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \frac{\partial S_g}{\partial P} - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.103})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{8} \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^2} \right) = \frac{f_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial P} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.104})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial P} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.105})$$

Pode-se escrever f_g em função de Re_g e D_g

$$f_g = f_g \{ Re_g[\alpha(P), \rho_g(P), \mu_g(P)], D_g[\alpha(P)] \} \quad (\text{I.106})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_g}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.107})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.108})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial P} = \left[\frac{\partial Re_g}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\partial Re_g}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial P} \right] = \frac{4 A j_g}{\mu_g (S_g + S_i)} \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial P} \right] \quad (\text{I.109})$$

Substituindo-se as Eq. (I.104), Eq. (I.108) e Eq. (I.105) em Eq. (I.103), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g}{4\alpha} \left[\frac{f_g j_g^2}{2\alpha^2} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\rho_g j_g^2}{2\alpha^2} \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) \right. \\ \left. - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{\alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) - \frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{I.110})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.110) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \frac{S_g j_g^2}{8\alpha^3} \left(f_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} \right) + \\ \left[\frac{S_g \rho_g j_g^2}{4\alpha^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha} - \frac{f_g}{\alpha} \right) + \frac{\tau_{wg}}{\alpha} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} - \frac{S_g}{\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{I.111})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) = \Theta_{1,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.112})$$

I.2.3.2 Segundo termo da Eq. (I.102)

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = -\frac{S_l}{1-\alpha} \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} - \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \frac{\partial S_l}{\partial P} - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.113})$$

onde:

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1}{8} \frac{\rho_l f_l j_l^2}{(1-\alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8(1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial P} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{4(1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{f_l j_l^2}{8(1-\alpha)^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \quad (\text{I.114})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial P} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.115})$$

Pode-se escrever f_l em função de Re_l e D_l

$$f_l = f_l \{ Re_l[\alpha(P), \rho_l(P), \mu_l(P)], D_l[\alpha(P)] \} \quad (\text{I.116})$$

Portanto,

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial P} + \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.117})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial P} + \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.118})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial P} = \left[\frac{\partial Re_l}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + \frac{\partial Re_l}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \right] = \frac{4 A j_l}{\mu_l S_l} \left[\frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \frac{\rho_l}{\mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \right] \quad (\text{I.119})$$

Substituindo-se as Eq. (I.114), Eq. (I.115) e Eq. (I.118) em Eq. (I.113), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\frac{S_l}{4(1-\alpha)} \left[\frac{\rho_l j_l^2}{2(1-\alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\rho_l j_l^2 f_l}{(1-\alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{f_l j_l^2}{2(1-\alpha)^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \\ & -\frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) - \frac{\tau_{wl} S_l}{(1-\alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \frac{\rho_l j_l^2 S_l}{2(1-\alpha)^3} \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial P} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.120})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.120) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = & -\left[\frac{S_l \rho_l j_l^2}{4(1-\alpha)^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_l}{\partial \alpha} + \frac{f_l}{1-\alpha} \right) + \frac{\tau_{wl}}{1-\alpha} \left(\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{S_l}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \frac{S_l f_l j_l^2}{8(1-\alpha)^3} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \frac{\rho_l j_l^2 S_l}{2(1-\alpha)^3} \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial P} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.121})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \Theta_{2,P} \quad (\text{I.122})$$

I.2.3.3 Terceiro termo da Eq. (I.102)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = & S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \tau_i}{\partial P} + \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial P} + \\ & + \tau_i S_i \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

onde

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\psi \frac{f_i \rho_g}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \right] \quad (\text{I.124})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial P} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.125})$$

onde $\psi = 1$ se j_g/α é maior do que u_i e $\psi = -1$ se u_i é maior do que j_g/α .

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left(-\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \frac{\partial u_i}{\partial P} \right) \quad (\text{I.126})$$

A derivada da velocidade interfacial média u_i em função de j_g é escrita como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial P} = \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.127})$$

Substituindo-se a Eq. (I.127) em Eq. (I.126), tem-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \quad (\text{I.128})$$

Rearranja-se e obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \frac{\psi f_i \rho_g}{4} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right) \left[\frac{j_g}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon j_l}{(1 - \alpha)^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.129})$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial P} = \frac{\psi f_i}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.130})$$

Substitui-se as Eq. (I.130) e Eq. (I.125) em Eq. (I.123), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] &= S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left[\frac{\psi f_i}{8} \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \\ &+ \tau_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \tau_i S_i \left[\frac{1}{(1 - \alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{I.131})$$

Reorganiza-se a Eq. (I.131) em função de $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] &= \frac{\psi S_i f_i}{8} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \left(\frac{j_g}{\alpha} - u_i \right)^2 \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \\ &+ \left[S_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha} + \tau_i \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \tau_i S_i \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \end{aligned} \quad (\text{I.132})$$

De maneira simplificada, escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] = \Theta_{3,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.133})$$

I.2.3.4 Quarto termo da Eq. (I.102)

A derivada a calcular é:

$$\frac{\partial}{\partial P} [(\rho_l - \rho_g) A g \sen \theta] \quad (\text{I.134})$$

Portanto,

$$\Theta_{4,p} = A g \sen \theta \left[\frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right] \quad (\text{I.135})$$

I.2.3.5 Função $\partial \alpha / \partial P$ simplificada

A partir do procedimento analítico sobre cada termo da Eq. (I.102), pode-se combinar as equações para se determinar analiticamente a $\partial \alpha / \partial P$. A Eq. (I.102) pode ser reescrita em função de Eq. (I.112), Eq. (I.122), Eq. (I.133) e Eq. (I.135) tal que:

$$\begin{aligned} \Theta_{1,p} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1-\alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \Theta_{2,p} + \Theta_{3,p} + \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \right] \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \Theta_{4,p} \end{aligned} \quad (\text{I.136})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{\Theta_{1,p} + \Theta_{2,p} + \Theta_{3,p} + \Theta_{4,p}}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\tau_i S_i \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right]} \quad (\text{I.137})$$

I.3 Queda de pressão devido ao atrito

A partir da combinação da Eq. (I.1) e Eq. (I.2), considerando que o ângulo θ é positivo para tubulação descendente, escreve-se:

$$\frac{dP}{ds} + \frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} - g \sin \theta \left(\frac{\rho_g A_g + \rho_l A_l}{A} \right) = 0 \quad (\text{I.138})$$

onde a perda de pressão por atrito pode ser escrita como:

$$\left. \frac{dP}{ds} \right|_A = \frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \quad (\text{I.139})$$

I.3.1 $\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{dP}{ds} \right|_A \right)$

Deriva-se a Eq. (I.139) em função de j_g

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{dP}{ds} \right|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{I.140})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} \left(\left. \frac{dP}{ds} \right|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial j_g} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial j_g} \right) \quad (\text{I.141})$$

onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_g} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} + \frac{\rho_g f_g j_g}{4 \alpha^2} \quad (\text{I.142})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{8 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_g} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.143})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_g} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.144})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_g} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.145})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_g} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial j_g} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.146})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_g} = \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (\text{I.147})$$

$$\frac{\partial Re_g}{\partial j_g} = \frac{4 A \rho_g}{(S_g + S_i) \mu_g} \quad (\text{I.148})$$

As seguintes relações estão presentes nas outras derivadas:

$$\frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_g j_g}{(S_g + S_i)^2 \mu_g} \left(\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_i}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{I.149})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A \rho_l j_l}{S_l^2 \mu_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \quad (\text{I.150})$$

$$\frac{\partial D_g}{\partial \alpha} = \frac{4 A}{S_g + S_i} \left[1 - \frac{\alpha}{S_g + S_i} \left(\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (\text{I.151})$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \alpha} = -\frac{4 A}{S_l} \left[1 + \frac{1 - \alpha}{S_l} \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \right] \quad (\text{I.152})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial \alpha} = -\frac{\pi D}{\cos(2 \pi D) - 1} \quad (\text{I.153})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial \alpha} = \frac{\pi D}{\cos(2 \pi D) - 1} \quad (\text{I.154})$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \alpha} = \frac{\pi D \cos(\gamma \pi)}{\cos(2 \pi \gamma) - 1} \quad (\text{I.155})$$

I.3.2 $\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right)$

Deriva-se a Eq. (I.139) em função de j_l

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{I.156})$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial j_l} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial j_l} \right) \quad (\text{I.157})$$

onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial j_l} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.158})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{8 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial j_l} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} + \frac{\rho_l f_l j_l}{4 (1 - \alpha)^2} \quad (\text{I.159})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial j_l} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.160})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial j_l} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.161})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial j_l} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.162})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial j_l} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial j_l} + \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (\text{I.163})$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial j_l} = \frac{4 A \rho_l}{S_l \mu_l} \quad (\text{I.164})$$

I.3.3 $\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right)$

Deriva-se a Eq. (I.139) em função de P

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\tau_{wg} S_g}{A} + \frac{\tau_{wl} S_l}{A} \right) \quad (\text{I.165})$$

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_A \right) = \frac{1}{A} \left(S_g \frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} + \tau_{wg} \frac{\partial S_g}{\partial P} + S_l \frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} + \tau_{wl} \frac{\partial S_l}{\partial P} \right) \quad (\text{I.166})$$

onde,

$$\frac{\partial \tau_{wg}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\rho_g j_g^2 f_g}{8 \alpha^2} \right) = \frac{\rho_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial f_g}{\partial P} - \frac{\rho_g f_g j_g^2}{4 \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{f_g j_g^2}{8 \alpha^2} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \quad (\text{I.167})$$

$$\frac{\partial \tau_{wl}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\rho_l j_l^2 f_l}{8 (1 - \alpha)^2} \right] = \frac{\rho_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial f_l}{\partial P} + \frac{\rho_l f_l j_l^2}{4 (1 - \alpha)^3} \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \frac{f_l j_l^2}{8 (1 - \alpha)^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \quad (\text{I.168})$$

$$\frac{\partial S_g}{\partial P} = \frac{\partial S_g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.169})$$

$$\frac{\partial S_l}{\partial P} = \frac{\partial S_l}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.170})$$

$$\frac{\partial f_g}{\partial P} = \frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial P} + \left(\frac{\partial f_g}{\partial Re_g} \frac{\partial Re_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_g}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.171})$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial P} = \frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial P} + \left(\frac{\partial f_l}{\partial Re_l} \frac{\partial Re_l}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_l}{\partial D_l} \frac{\partial D_l}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (\text{I.172})$$

Onde as derivadas $\frac{\partial Re_g}{\partial P}$ e $\frac{\partial Re_l}{\partial P}$ já foram deduzidas anteriormente e repetidas aqui por conveniência.

$$\frac{\partial Re_g}{\partial P} = \left[\frac{\partial Re_g}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \frac{\partial Re_g}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial P} \right] = \frac{4 A j_g}{\mu_g (S_g + S_i)} \left[\frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial P} \right]$$

$$\frac{\partial Re_l}{\partial P} = \left[\frac{\partial Re_l}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + \frac{\partial Re_l}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \right] = \frac{4 A j_l}{\mu_l S_l} \left[\frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \frac{\rho_l}{\mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \right]$$

I.4 Critérios de transição

Em [Shoham \(2006\)](#), discute-se uma abordagem baseada nas propriedades dos fluidos e na tubulação, na qual é possível prever o padrão de escoamento em função das velocidades e da inclinação local.

Na modelagem de transição de padrão estratificado para não-estratificado, como discu-

tido por [Shoham \(2006\)](#), o nível de líquido no equilíbrio é determinado admitindo-se que existe uma condição na qual o escoamento é estratificado. A questão a ser respondida é, para um determinado conjunto de condições se o escoamento é estável ou não. Se o escoamento é estável, resulta em um padrão estratificado. Se a resposta for instável, então haverá transição para outros padrões. Para se analisar o comportamento instável/estável é feita uma análise de estabilidade. Neste caso, uma análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz simplificada é adotada.

De maneira geral, a abordagem de Kelvin-Helmholtz lida com duas camadas de fluidos de diferentes densidades ρ_1 e ρ_2 , escoamento com velocidades v_1 e v_2 , respectivamente, entre placas paralelas horizontais. A teoria prediz que uma pequena (infinitesimal) perturbação na interface leva à uma interface estável com uma estrutura em onda ou instável com uma onda crescente que destrói a estratificação entre as camadas. A análise de Kelvin-Helmholtz pode ser aplicada para escoamentos invíscidos ou víscidos. Os mecanismos de governo de acordo com essa análise são, por um lado, a gravidade e as forças de tensão superficial que tendem a estabilizar o escoamento. Por outro lado, o movimento relativo entre as camadas cria uma força de pressão de sucção sobre a onda, predominando sobre o efeito Bernoulli, tendendo a destruir a estrutura estratificada do escoamento. A partir desta análise, um critério de estabilidade é desenvolvido em termos da velocidade de propagação das ondas e do comprimento de onda.

Em [Taitel e Dukler \(1976\)](#), estendeu-se a análise para escoamento invíscido primeiro para o caso do escoamento entre placas paralelas, com uma onda finita sobre uma camada de fio de líquido embaixo e gás por cima. Em sequência, a análise foi estendida para o caso de uma onda finita sobre a interface gás-líquido do escoamento estratificado em um tubo inclinado. Para ambos os casos, o efeito de tensão superficial é desprezado. A Fig. [I.3](#) apresenta o esquema para o primeiro caso (placas paralelas). As alturas de equilíbrio para as camadas de líquido e de gás são, respectivamente, h_l e h_g , enquanto que as respectivas alturas dos picos das ondas são h_l' e h_g' .

A força gravitacional por unidade de área projetada na direção perpendicular ao escoamento, atuando sobre a onda é:

$$(h_g - h_g') (\rho_l - \rho_g) g \quad (\text{I.173})$$

Admitindo-se uma onda estacionária, a força de sucção por unidade de área projetada na direção perpendicular ao escoamento, que causa o crescimento da onda é dado por:

$$p - p' = \frac{1}{2} \rho_g (u_g'^2 - u_g^2) \quad (\text{I.174})$$

Figura I.3: Esquema simplificado para análise de estabilidade de Kelvin-Helmholtz.

A partir da relação de continuidade, obtém-se:

$$u_g h_g = u_g' h_g' \quad (\text{I.175})$$

A condição para crescimento de onda, que leva a uma desestabilização de configuração estratificada, se caracteriza quando a força de sucção é maior do que a força gravitacional. Dessa maneira, combinando as Eq. (I.173) e Eq. (I.174), obtém-se o critério de estabilidade:

$$u_g > c_1 \left[\frac{g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_g} \right]^{0.5} \quad (\text{I.176})$$

onde c_1 depende do comprimento de onda:

$$c_1 = \left[\frac{2}{\left(\frac{h_g}{h_g'} \right) \left(\frac{h_g}{h_g'} + 1 \right)} \right]^{0.5} \quad (\text{I.177})$$

Para uma onda infinitesimal, $h_g/h_g' \rightarrow 1$, $c_1 \rightarrow 1$ e Eq. (I.176) se reduz ao critério de crescimento de onda para escoamento invíscido original de Kelvin-Helmholtz.

A análise apresentada para placas paralelas pode ser estendida para escoamentos estratificados em tubulações inclinadas de maneira direta, resultando em:

$$u_g > \left[\frac{2 (\rho_l - \rho_g) g \cos \theta}{\rho_g} \frac{A_g'^2}{A_g^2 - A_g'^2} \right]^{0.5} \quad (\text{I.178})$$

Para uma pequena onda, A_g' pode ser expandido em série de Taylor em torno de A_g ,

resultando em:

$$u_g > c_2 \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) g \cos \theta A_g}{\rho_g S_i} \right]^{0.5} \quad (\text{I.179})$$

onde,

$$c_2 = \left[\frac{\left(\frac{A'_g}{A_g} \right)^2}{1 + \frac{A'_g}{A_g}} \right]^{0.5} \quad (\text{I.180})$$

Para baixo nível de líquido na tubulação, $A'_g = A_g$; Portanto, $c_2 = 1$. De maneira similar, para alto nível de líquido na tubulação, $A'_g \rightarrow 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Com base nessa análise, admite-se a seguinte hipótese:

$$c_2 = 1 - \frac{h_l}{D} \quad (\text{I.181})$$

Substitui-se a Eq. (I.181) em Eq. (I.179), resultando na forma final do critério para a fronteira de transição:

$$u_g > \left(1 - \frac{h_l}{D} \right) \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) A_g g \cos \theta}{\rho_g \frac{dA_l}{dh_l}} \right]^{0.5} \quad (\text{I.182})$$

Mais recentemente, Taitel, Barnea e Brill (1995) desenvolveram um critério de estabilidade para escoamento trifásico considerando uma equação de quantidade de movimento para a água, outra para o óleo e uma terceira para o gás. O critério obtido pelos autores é dado por:

$$u_g - u_o > \left(1 - \frac{h_l}{D} \right) \left[\frac{(\rho_o - \rho_g) A_g g \cos \theta}{\rho_g \frac{dA_l}{dh_l}} \right]^{0.5} \quad (\text{I.183})$$

Na presente tese, os dois modelos foram comparados apresentando resultados muito próximos.