LEONIDIO BUK JUNIOR

**ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO FIXO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

São Paulo
2007

LEONIDIO BUK JUNIOR

**ESTUDO NUMÉRICO DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UM
CILINDRO FIXO**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica de Energia e Fluidos

Orientador:
Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha

São Paulo
2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 25 de abril de 2007.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Buk Junior, Leonidio

**Estudo numérico do escoamento ao redor de um cilindro fixo / L. Buk Junior. -- ed.rev. -- São Paulo, 2007.
62 p.**

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Hidrodinâmica 2.Vibração induzida pelo escoamento 3.Cilindro fixo 4.Método das penalidades 5.Método dos elementos finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

A meus pais, Leonidio e Rachel

AGRADECIMENTOS

À FAPESP, que viabilizou o início deste trabalho.

À PETROBRAS, nas pessoas de Cezar Paulo e Louise, que incentivaram e proporcionaram a conclusão deste.

Ao meu orientador prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha, pessoa de conhecimento admirável, opiniões precisas e sempre pronto para auxiliar a contornar as dificuldades encontradas.

Aos outros professores do NDF, Júlio Meneghini, Fábio Saltara, Clóvis e Jorge, pelos conselhos relevantes e outras contribuições que muito somaram.

Aos meus amigos do NDF Bruno, Lauro, Raupp, Gustavo, Rafael Giória, Pepe, Rafael Tanaka, Fernanda, Pedro, Paulo Jabardo e, em especial, Alessandro e Iago, sem os quais a conclusão desse trabalho não teria sido possível. Apesar da nossa breve convivência, muito do que aprendi nesse período devo a esse grupo.

Aos meus amigos da Tecnologia Submarina do CENPES, que encheriam várias dessas páginas caso eu citasse cada uma dentre as suas diversas sugestões.

Às secretárias do NDF, Ivone e Zuleide, e do CENPES, Eliana e Suane, verdadeiras facilitadoras, essenciais em vários momentos.

À Mônica, por todo o apoio no período da qualificação.

Ao Hirão, o revisor dessas linhas.

Às minhas irmãs Cristiane, Regiane (meu braço direito, esquerdo, minhas pernas em São Paulo), Luciane e Viviane, cunhados Gilberto, Rodrigo e Márcio, e meus sobrinhos Lucas, Murilo e Sophia, arrimos da minha vida.

A meus pais, os responsáveis diretos por toda essa história.

“Simplicidade é a sofisticação máxima.”

Leonardo da Vinci

“Algo só é impossível até que alguém
duvide e acabe provando o contrário.”

Albert Einstein

“Triste não é mudar de idéia. Triste é não
ter idéia pra mudar.”

Francis Bacon

RESUMO

Neste trabalho, o escoamento incompressível ao redor de um cilindro fixo é estudado numericamente através do método de elementos finitos. Foram realizadas simulações bidimensionais no domínio do tempo, com números de Reynolds variando entre 100 e 600, utilizando-se, para tanto, malhas não-estruturadas com elementos triangulares. Pretende-se aqui analisar a eficácia da solução das equações de Navier-Stokes utilizando o método das penalidades, meio pelo qual o acoplamento pressão-velocidade foi tratado. Avalia-se a convergência da solução para diferentes valores do fator de penalidade e sugere-se um método para estimá-lo. Analisa-se, ainda, a sensibilidade da resposta à utilização da matriz de inércia nos formatos consistente e concentrada. Por fim, é realizada a comparação dos coeficientes de arrasto médio, flutuação do coeficiente de sustentação e número de Strouhal obtidos neste trabalho com resultados de outras publicações.

Palavras chave: Vibração Induzida pelo Escoamento. Cilindro Fixo. Elementos Finitos. Método das Penalidades.

ABSTRACT

In this work, the incompressible flow around a stationary cylinder is investigated by using the Finite Element Method. Two-dimensional simulations in time domain have been carried out, with Reynolds number varying from 100 to 600, using non-structured meshes with triangular elements. The aim of this work is to analyze the efficiency of Penalty Methods, which is the way that the velocity-pressure coupling problem is treated here, in Navier-Stokes equations solution. The solution convergence from different values of penalty parameter is evaluated and it is suggested a method to estimate it. In addition, it is studied the sensibility of response when using the mass matrix in consistent or lumped format. At last, a comparison between average drag coefficient, fluctuating lift and Strouhal number obtained here and those found in other publications is shown.

Keywords: Flow-induced Vibration. Stationary Cylinder. Finite Element Methods. Penalty Methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Foto de um duto flexível no fundo do mar	2
Figura 2.1: Esteira idealizada por von Kármán, formada por duas fileiras de vórtices pontuais.....	5
Figura 2.2: Relação entre o número de Reynolds e a formação da esteira de vórtices. Extraída de Blevins (1990).....	6
Figura 2.3: Modelo do mecanismo de formação da esteira de vórtices proposto por Gerrard (1966). Extraído de Meneghini (2002).	7
Figura 2.4: Bolha formada na região anterior do cilindro, escoamento com $Re=26$. Extraída de van Dyke (1982).....	8
Figura 2.5: Esteira de von Kármán formada à jusante do cilindro para $Re=140$. Extraída de van Dyke (1982).....	8
Figura 2.6: Representação dos modos tridimensionais, A e B, na curva $S_t \times Re$ para regime laminar. Extraída de Williamson (1996a).....	9
Figura 2.7: Visualizações dos modos A ($Re=200$) e B ($Re=270$). Extraída de Williamson (1996a).	10
Figura 2.8: Espectros de velocidade na faixa de transição entre os modos A e B. Reproduzida de Williamson (1996a).	11
Figura 2.9: Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro. Reproduzida de Williamson (1999c).....	12
Figura 3.1: Funções de forma lineares. (a) Velocidade $u(x)$ normal ao lado comum dos elementos contíguos, com uma função de forma linear. (b) descontinuidade da derivada $\partial u/\partial x$	17
Figura 4.1: Condições de contorno impostas ao problema: condição de parede no cilindro (em verde), velocidade u unitária e v nula na entrada do fluxo (em vermelho) e derivadas da velocidade nulas na região de saída do fluxo (em azul).	28
Figura 4.2: Malhas geradas para as simulações numéricas. A partir da esquerda, aumento gradativo do numero de nós, no sentido horário.	29
Figura 4.3: Espectro da série temporal de CI para $Re=100$ e $\varepsilon=10^{-10}$	30
Figura 4.4: Espectro da série temporal de CI para $Re=600$ e $\varepsilon=10^{-10}$	30

Figura 4.5: Detalhe da malha na região próxima ao cilindro.....	31
Figura 4.6: Comparação de coeficientes de arrasto entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=100$ e $\varepsilon=10^{-6}$	34
Figura 4.7: Comparação de coeficientes de sustentação entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=100$ e $\varepsilon=10^{-6}$	34
Figura 4.8: Desenvolvimento da esteira: contornos de vorticidade para $Re=100$, nos instantes $t=3, 5, 10, 15, 25, 40, 45, 50, 55, 65$. Simulações com Matriz de Inércia consistente.	35
Figura 4.9: Comparação de coeficientes de arrasto entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=600$ e $\varepsilon=10^{-6}$	36
Figura 4.10: Comparação de coeficientes de sustentação entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=600$ e $\varepsilon=10^{-6}$	36
Figura 4.11: Desenvolvimento da esteira: contornos de vorticidade para $Re=600$, nos instantes $t=3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$. Simulações com Matriz de Inércia consistente.	37
Figura 4.12: Número de Strouhal em função do número de Reynolds. Extraída de Henderson (1997).	38
Figura 4.13: Contornos de vorticidade no instante $t=95$ para números de Reynolds iguais a 100, 200, 300, 400, 500 e 600.	39
Figura 4.14: Linhas de Corrente para $Re=100$ no instante $t=95$	39
Figura 4.15: Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds. Extraída de Henderson (1997).	40
Figura 4.16: Contornos de pressão no instante 95 para números de Reynolds iguais a 100, 200, 300, 400, 500 e 600.	41
Figura 4.17: Curva de Cl_{rms} x Re dos valores obtidos neste trabalho.	42
Figura 4.18: Curva flutuação de Cl x Re . Extraída de Norberg (2002).	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Principais parâmetros das malhas utilizadas.....	29
Tabela 4.2: Avaliação da qualidade das malhas geradas. Foram utilizados Re igual a 600 e ε igual a 10^{-10}	29
Tabela 4.3: Efeito da variação de ε no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds Re=100.....	32
Tabela 4.4: Efeito da variação de ε no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds Re=600.....	32
Tabela 4.5: Valores de Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms calculados através de expansão em Série de Taylor para simulação com número de Reynolds Re=600.	32
Tabela 4.6: Influência do formato da Matriz de Inércia no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds Re=100.....	33
Tabela 4.7: Influência do formato da Matriz de Inércia no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds Re=600.....	33
Tabela 4.8: Comparação de resultados de St e Cd médio para Re = 100.....	43
Tabela 4.9: Comparação de resultados de St e Cd médio para Re = 200.....	44
Tabela C.1: Principais resultados obtidos nas simulações.	67

LISTA DE SÍMBOLOS

C_d	coeficiente de arrasto
C_l	coeficiente de sustentação
$C_l \text{ rms}$	flutuação do coeficiente de sustentação
D	diâmetro do cilindro
D	termo dissipativo discreto
F_x	força de arrasto
F_y	força de sustentação
h	função de forma
M	matriz de inércia
N	operador convectivo discreto
p	pressão
R	operador gradiente discreto
R^t	operador divergente discreto
Re	número de Reynolds
S_e	área do elemento
St	número de Strouhal
t	tempo
u	velocidade na direção x
U	velocidade da corrente livre
U_∞	velocidade da corrente livre
v	velocidade na direção y
x	direção da corrente livre
y	direção transversal à corrente livre
ε	fator de penalidade
μ	viscosidade dinâmica
ν	viscosidade cinemática
ρ	massa específica do fluido

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 ESTRUTURA DO TEXTO	3
2 O ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS	4
2.1 TRIDIMENSIONALIDADES DO FENÔMENO	7
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	12
2.3 O MÉTODO DAS PENALIDADES: UM BREVE HISTÓRICO	13
3 AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES DISCRETAS E A SOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS PENALIDADES	15
3.1 O MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR PARTES	18
3.2 O MÉTODO DAS PENALIDADES.....	20
3.3 MATRIZ CONSISTENTE X MATRIZ CONCENTRADA	22
3.4 A ACELERAÇÃO LOCAL	23
3.5 A LINEARIZAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO	24
3.6 ESTIMATIVA DE ε	25
4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	27
4.1 MALHAS GERADAS.....	28
4.2 INFLUÊNCIA DO FATOR DE PENALIDADE.....	31
4.3 INFLUÊNCIA DO FORMATO DA MATRIZ DE INÉRCIA.....	33
4.4 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE OUTRAS PUBLICAÇÕES.....	38
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
APÊNDICE A - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	51
APÊNDICE B - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....	54
APÊNDICE C - RESULTADOS TABELADOS.....	67

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho estuda o escoamento ao redor de um cilindro fixo, para números de Reynolds variando entre 100 e 600, no domínio do tempo. O problema é modelado utilizando o Método dos Elementos Finitos, aplicado a malhas não-estruturadas com elementos triangulares.

O objetivo deste trabalho é avaliar a eficiência da utilização do Método das Penalidades no tratamento do acoplamento pressão-velocidade, que representa uma das grandes dificuldades na solução das equações de Navier-Stokes. Uma preocupação adicional consiste em avaliar a influência da modelagem do termo inercial, verificando quão sensível se mostra a solução se utilizada uma matriz de massa num formato simplificado.

1.1 Motivação

Embora o cilindro possua uma geometria extremamente simples e o escoamento ao seu redor já tenha sido exhaustivamente estudado ao longo dos últimos anos, não podemos afirmar que estamos perto de sua solução. A ocorrência simultânea de diversos fenômenos físicos traz complexidade ao problema que, por consequência, acarretou a fragmentação do estudo em diversas linhas de pesquisa, atacando fenômenos específicos isoladamente na busca de uma maior compreensão da contribuição dos mesmos na Vibração Induzida pelo Escoamento (VIE). O fenômeno de vibrações induzidas pelo escoamento ocorre principalmente quando uma estrutura fica exposta a uma corrente que interage com ela, provocando vibrações transversais e paralelas ao fluxo.

Diversas são as aplicações práticas do escoamento ao redor de cilindros. Na engenharia civil, por exemplo, os cabos de sustentação de pontes suspensas e as chaminés estão sujeitas ao fenômeno de VIE. Na engenharia mecânica, destaca-se a extensiva utilização de trocadores de calor do tipo casco e tubos, nos quais o fenômeno também está presente. Já na engenharia naval, as plataformas de

produção de petróleo do tipo *tension leg* têm seus tendões submetidos a oscilações oriundas das grandes flutuações de forças geradas pelo VIE.

O grande motivador, porém, deste trabalho, são os chamados *risers*, *flowlines* e umbilicais de controle presentes nos sistemas oceânicos de produção de petróleo. A PETROBRAS, empresa expoente na produção de petróleo *offshore*, possui atualmente cerca de 4500 quilômetros de linhas flexíveis instaladas na Bacia de Campos em profundidades que alcançam 1800 metros, sujeitas geralmente a correntes irregulares, não-uniformes e multidirecionais. O fenômeno de desprendimento de vórtices causa a vibração dessas estruturas que, por sua vez, pode ocasionar a fadiga das mesmas.

Figura 1.1: Foto de um duto flexível no fundo do mar

À medida que a exploração e a produção de petróleo caminham para águas mais profundas, as análises de VIE adquirem maior importância. Este fenômeno se torna vital em lâminas d'água ultra-profundas (acima de 2000m), pois, atualmente, não é possível a utilização de *risers* flexíveis, ficando como única opção à utilização de *risers* rígidos em catenária, *risers* rígidos verticais ou sistemas de *risers* alternativos. Essas soluções, porém, são muito mais suscetíveis à fadiga causada pelo VIE do que as linhas flexíveis.

1.2 Estrutura do texto

O texto deste trabalho se divide em cinco capítulos, cujos conteúdos são descritos abaixo.

- i. O Capítulo 1 apresenta uma descrição dos aspectos fundamentais que motivaram a execução deste trabalho;
- ii. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados ao fenômeno de Vibração induzida por vórtices e um histórico de aplicações do método dos elementos finitos e do método das penalidades.
- iii. O Capítulo 3 apresenta a aplicação da metodologia na solução da equação de Navier-Stokes, discorrendo sobre o método das penalidades, o tratamento dispensado aos termos temporal e convectivo, a utilização da matriz de inércia no formato consistente ou concentrada e a estimativa do fator de penalidade.
- iv. O Capítulo 4 contempla os resultados obtidos neste trabalho, suas análises e discussões.
- v. O Capítulo 5 traz a conclusão do trabalho e sugestões de novas linhas de pesquisa.

2 O ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS

Segundo Blevins (1990), a vibração induzida por vórtices já era conhecida desde a antiguidade, quando os gregos descreveram a existência dos *Aeolian Tones*, que nada mais eram do que a vibração de cordas de harpa quando expostas ao vento. No século XV, Leonardo da Vinci esboçou uma fileira de vórtices em uma esteira de um pilar de ponte sujeito à correnteza. Mas foi apenas em 1878 que Strouhal realizou um estudo mais profundo do assunto, observando que os *Aeolian Tones* eram proporcionais à velocidade do vento dividida pelo diâmetro das cordas. Observou ainda que o som emitido pelas cordas aumentava quando os tons naturais destas coincidiam com os *Aeolian Tones* e que suas frequências podiam ser determinadas a partir da seguinte equação:

$$f_s = 0,185 \cdot \frac{U}{D} \quad (2.1)$$

onde U é a velocidade do ar, D o diâmetro da corda e f_s é a frequência do som emitido.

Em 1879, Lord Rayleigh descobriu, enquanto observava a corda de um violino vibrar devido a uma corrente de ar, que as oscilações ocorriam na direção transversal à direção do escoamento, diferentemente do que se acreditava à época. Em 1896, Lord Rayleigh definiu um número adimensional conhecido hoje como número de Strouhal, St, dado pela equação 2.2.

$$St = \frac{f_s D}{U} \quad (2.2)$$

Em 1908, Benard associou a periodicidade da esteira à geração de vórtices. Já em 1912, von Kármán representou pela primeira vez em seu trabalho uma esteira formada por duas fileiras de vórtices pontuais, demonstrando que tal configuração somente seria estável se a relação 2.3 fosse satisfeita.

$$\frac{h_w}{a_w} = 0,281 \quad (2.3)$$

Figura 2.1: Esteira idealizada por von Kármán, formada por duas fileiras de vórtices pontuais

O parâmetro governante do escoamento incompressível ao redor de um corpo cilíndrico é o número de Reynolds, Re , definido pela razão:

$$Re = \frac{\rho \cdot U_{\infty} \cdot D}{\mu} \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade do fluido, U_{∞} é a velocidade do escoamento incidente ao longe, D é o diâmetro do cilindro e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Com o aumento de Re , o escoamento passa por sucessivas transições em diferentes regiões do escoamento perturbado. A figura 2.2, extraída de Blevins (1990), fornece as principais características desses regimes.

Figura 2.2: Relação entre o número de Reynolds e a formação da esteira de vórtices. Extraída de Blevins (1990).

Gerrard (1966) propôs um modelo para explicar o mecanismo de emissão de vórtices. Segundo ele, a interação mútua entre as camadas cisalhantes é fundamental no processo de formação dos vórtices. Um vórtice cresce devido à circulação fornecida pela camada cisalhante à qual ele está conectado. Em certo instante, o vórtice que está crescendo torna-se suficientemente intenso para atrair a camada cisalhante oposta. Três são os caminhos possíveis para essa camada: juntar-se ao vórtice em crescimento (a), dirigir-se à camada cisalhante (b) ou retornar à região de formação (c). A figura 2.3 ilustra esse processo.

Figura 2.3: Modelo do mecanismo de formação da esteira de vórtices proposto por Gerrard (1966). Extraído de Meneghini (2002).

A quantidade de fluido que segue cada um desses caminhos determina a frequência de geração e desprendimento de vórtices, intensidade dos mesmos e pressão na região anterior do cilindro. A parcela do escoamento que segue pelo caminho (a), mistura-se com o fluido que está formando um vórtice na região superior da esteira. Por possuir vorticidade de sinal contrário ao do vórtice em formação, ela acaba por gerar uma diminuição da circulação total do mesmo. A parcela do escoamento que segue pelo caminho (b) tende a se chocar com a camada cisalhante que alimenta o vórtice em formação, causando uma diminuição da intensidade do mesmo ou, em última instância, a interrupção da alimentação de circulação para este vórtice, fazendo-o desprender-se da camada cisalhante que o gerara. A parcela de fluido que segue o caminho (c) age no sentido da formação de um novo vórtice, com vorticidade contrária àquele em formação, completando um ciclo.

2.1 Tridimensionalidades do fenômeno

Até $Re \approx 49$, observa-se que o escoamento ao redor do cilindro é estacionário e simétrico, com a formação de “bolhas” de recirculação na região anterior do mesmo. À medida que Re cresce, vórtices gerados nas camadas cisalhantes

superior e inferior do cilindro são emitidos alternadamente, atingindo uma configuração similar a esteira de von Kármán.

Figura 2.4: Bolha formada na região anterior do cilindro, escoamento com $Re=26$. Extraída de van Dyke (1982).

Figura 2.5: Esteira de von Kármán formada à jusante do cilindro para $Re=140$. Extraída de van Dyke (1982).

Estruturas tridimensionais começam a aparecer quando se atinge um patamar em que $Re \approx 180$. Neste momento, há uma alteração na configuração da esteira, na qual os tubos de vórtices se deformam até formarem laços, gerando pares de vórtices no plano x-y. Esta transição está associada com a primeira descontinuidade na curva $St \times Re$, reproduzida na figura 2.6, e as estruturas formadas caracterizam o que é conhecido como modo A.

Figura 2.6: Representação dos modos tridimensionais, A e B, na curva $S_t \times Re$ para regime laminar. Extraída de Williamson (1996a).

O modo A se origina de uma instabilidade nos núcleos dos vórtices primários da esteira próxima. O crescimento não-linear subsequente de um laço de vórtice acontece por ação do laço anterior, envolvendo, portanto uma deformação periódica na direção do eixo do tubo de vorticidade principal. Na figura 2.7, pode-se observar os pares de vórtices característicos do modo A, os quais têm comprimento de periodicidade na direção do eixo entre 3 e 4 diâmetros.

A segunda descontinuidade na curva $St \times Re$ corresponde à transição para o chamado modo B. O modo B consiste em pares de vórtices de menor escala alinhados com a corrente, com comprimento periódico na direção do eixo igual a aproximadamente 1 diâmetro, mais uniformes ao longo do eixo do que as estruturas do modo A, como pode ser visto na figura 2.7. Tem origem nas camadas cisalhantes livres e é uma manifestação de instabilidade em uma região de escoamento hiperbólico.

Figura 2.7: Visualizações dos modos A ($Re=200$) e B ($Re=270$). Extraída de Williamson (1996a).

Ao contrário da primeira, a segunda descontinuidade não apresenta histerese. Ela ocorre com valores de Re entre 230 e 250 e é marcada pela transferência gradual de energia do modo A para o B, como demonstrado na figura 2.8, em que aparecem espectros com dois picos. O pico de frequência menor corresponde ao modo A e gradualmente diminui de intensidade, dando lugar a um pico de frequência mais alta, correspondente ao modo B, à medida que Re aumenta. Segundo Williamson (1996c), a existência desses dois picos deve-se a um revezamento intermitente entre os dois modos e não à existência simultânea deles.

Figura 2.8: Espectros de velocidade na faixa de transição entre os modos A e B. Reproduzida de Williamson (1996a).

A figura 2.9 demonstra a existência de outros modos, estes instáveis ou transientes, representados pelas linhas tracejadas. Esses modos tendem a evoluir com o tempo para os modos mais estáveis, representados pelas linhas cheias. Quando o número de Reynolds ultrapassa o primeiro ponto crítico para tridimensionalidades, o escoamento pode seguir uma transição suave, que corresponde ao aparecimento do modo A somente. Após algum tempo, o escoamento reverte para o modo chamado de A^* , caracterizado por uma combinação de estruturas do modo A e deslocamentos de vórtices. Próximo à faixa de Re entre 230 e 250, há períodos intermitentes onde estruturas características do modo B predominam ao longo do eixo, fazendo com que a curva de St se desloque para um patamar mais alto (B), e períodos onde predominam estruturas do modo A com deslocamentos, levando o St a valores mais baixos (A^*). Acima de $Re=250$, o escoamento permanece no modo B, sem deslocamentos, a não ser que estes sejam artificialmente introduzidos, caso este em que a curva encontrada para St é aquela chamada B^* , que nada mais é do que uma extensão contínua da curva A^* .

Figura 2.9: Estados instáveis e estáveis na transição da esteira no escoamento ao redor de um cilindro. Reproduzida de Williamson (1999c).

Há, portanto, duas curvas distintas de $St \times Re$: o tramo superior corresponde à presença de instabilidades de pequena escala exclusivamente enquanto o tramo inferior corresponde à combinação dessas instabilidades de pequena escala com deslocamentos de vórtices. O caminho natural para a transição na esteira de um cilindro infinito passa de um estado para outro, na sequência $2D \rightarrow A \rightarrow A^* \rightarrow B$.

2.2 O Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) foi o primeiro método numérico que permitiu a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Introduzido no final da década de 50 na indústria aeronáutica, este método se transformou numa das mais poderosas ferramentas nos dias atuais, sendo utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais.

Uma das grandes vantagens do método consiste na fácil modelagem de geometrias complexas, o tratamento consistente das condições de contorno naturais e a possibilidade de ser programado de forma geral e flexível.

As aproximações básicas por elementos finitos se dão através da formulação de Galerkin e seu método dos resíduos ponderados. Esta formulação tem se provado bastante eficaz em mecânica estrutural e até mesmo em outras situações, como por exemplo, na condução de calor, governada por equações do tipo difusivo. A razão para tal é que, quando aplicada a fenômenos governados por equações diferenciais parciais do tipo elípticas ou parabólicas auto-adjuntas, o método de Galerkin leva a matrizes de rigidez simétricas. Na prática, a formulação de Galerkin é ótima em problemas governados por equações auto-adjuntas. Nestes casos, existe um funcional quadrático cujo mínimo satisfaz a equação diferencial parcial que governa o problema. Em elasticidade linear, por exemplo, a posição de equilíbrio corresponde ao mínimo do funcional quadrático que expressa a energia potencial total do sistema. Similarmente, em problemas de condução de calor em regime permanente, o equilíbrio térmico resulta de se satisfazer a equação de Laplace ou Poisson, ou seja, de determinar-se um mínimo do funcional quadrático expresso em termos de fluxo térmico, que fisicamente representa a energia térmica total do sistema.

O sucesso do método de Galerkin em mecânica estrutural, condução de calor e outros problemas de ordem potencial, levou a um ímpeto para sua utilização em dinâmica dos fluidos no início dos anos 70. No entanto, nesses problemas surge uma dificuldade adicional, causada pela presença de operadores convectivos, os quais são não-simétricos.

2.3 O Método das Penalidades: um breve histórico

O primeiro registro da utilização do Método das Penalidades em problemas de dinâmica dos fluidos foi feito por Zienkiewicz (1974). Mas foi Temam (1979) quem provou a convergência do método, através da solução do problema de Stokes. O escoamento de Stokes proporciona um sistema linear de equações diferenciais, adequado para a análise dos erros envolvidos. Poucos trabalhos se dedicam a Navier-Stokes devido a seu caráter não-linear.

Hughes et al. (1979) empregou o método das penalidades em escoamentos onde os efeitos da aceleração são importantes. Nesse trabalho, é proposta ainda

uma equação para estimativa do fator de penalidade de modo a garantir a restrição imposta pela equação da continuidade sem, no entanto, induzir um excessivo mal-condicionamento numérico no sistema. Bercovier e Engelman (1979) analisaram a convergência e estabilidade do método na solução das equações de Navier-Stokes utilizando elementos quadriláteros. Eles também sugeriram uma forma para estimar o fator de penalidade. Oden e Jacqoutte (1982) e Oden (1982) discutem a acurácia e estabilidade de uma grande gama de elementos quadriláteros para escoamentos Stokesianos.

Marshall et al. (1978) aplicou o método das penalidades na formulação de problemas de convecção natural utilizando as variáveis primitivas, pressão e velocidade. Heinrich e Marshall (1981) utilizaram elementos biquadráticos em uma malha relativamente grosseira e obtiveram bom resultados para escoamentos em cavidades até números de Reynolds iguais a 400. Baker e Orzechowski (1982) desenvolveram um método adequado a problemas de camada limite, em que um esquema de marcha no espaço deve ser empregado. Reddy (1982) demonstra a aplicação do método no escoamento tridimensional em cavidade. Já Dhaubhadel et. al. (1987) o utiliza para investigar o escoamento ao redor de agrupamento de cilindros alinhados.

A formalização matemática do método não é escopo deste trabalho mas pode ser encontrada em Temam (1979) e Girault e Raviart (1986), os quais discutem integralmente esses aspectos. Maiores detalhes relativos à implementação do método podem ser encontrados em Hughes et al. (1979) e Cuvelier et al.(1986).

3 AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES DISCRETAS E A SOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS PENALIDADES

Um número de importantes fenômenos em mecânica dos fluidos é descrito pelas equações de Navier-Stokes. Elas são um demonstrativo de um efeito dinâmico das forças externas aplicadas e das forças internas de um fluido que assumimos ser Newtoniano. Estas forças internas se devem à pressão e à viscosidade do fluido.

O objeto de estudo deste trabalho é o estudo de um escoamento laminar de um fluido newtoniano bidimensional. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível, sem forças de corpo e com propriedades constantes são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{u} = (u, v)$ é o vetor velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ρ é a densidade e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Estas equações podem ser adimensionalizadas utilizando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{D} & \bar{y} &= \frac{y}{D} & \bar{z} &= \frac{z}{D} \\ \bar{u} &= \frac{u}{U_\infty} & \bar{v} &= \frac{v}{U_\infty} & \bar{w} &= \frac{w}{U_\infty} \\ \bar{t} &= \frac{t \cdot U_\infty}{D} & \bar{p} &= \frac{p}{\rho \cdot U_\infty^2} & Re &= \frac{U_\infty \cdot D}{\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde U_∞ é a velocidade do campo não perturbado, D é a dimensão característica do corpo que, neste trabalho, representa o diâmetro do cilindro, e Re é o número de Reynolds. Todas as variáveis utilizadas daqui em diante serão adimensionais, salvo indicação contrária, e por isso não se usará mais a barra sobre as grandezas a fim

de simplificar a notação. As equações de Navier-Stokes podem então ser escritas na sua forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

A solução numérica das equações de Navier-Stokes através do MEF apresenta diversas dificuldades. Talvez as mais evidentes sejam a existência de um termo não linear e a condição de incompressibilidade do fluido.

A primeira dificuldade se deve à presença do termo convectivo, o qual é não-linear e não-simétrico. Essa dificuldade aumenta com o número de Reynolds do escoamento, pois esse termo torna-se mais importante.

Outra fonte de dificuldade é a condição de incompressibilidade. A equação da continuidade para um fluido incompressível toma a forma peculiar indicada por 3.5. Ela consiste de uma restrição no campo de velocidade, que deve possuir divergência nula. Logo, a pressão passa a ser uma variável não relacionada a qualquer equação constitutiva. Sua presença na equação de momento tem o propósito de introduzir um grau de liberdade adicional necessário para satisfazer a condição de incompressibilidade. O papel da pressão é então se auto-ajustar instantaneamente, de modo a satisfazer a condição de divergência nula da velocidade. Como consequência, há um acoplamento desconhecido entre pressão e velocidade que impede que as duas variáveis possam ser aproximadas independentemente. Se uma combinação imprópria das funções de interpolação do elemento para velocidade e pressão é empregada, podem surgir instabilidades no campo de pressão, independentemente do número de Reynolds, ou seja, haverá instabilidades mesmo em escoamentos de baixíssimos Reynolds.

Outro ponto que merece especial atenção são as simulações de escoamentos com situações de transiente. Deve-se garantir um correto acoplamento entre as aproximações espaciais e temporais. Uma representação espacial estável e precisa será rapidamente destruída se o algoritmo utilizado para transporte da solução no tempo não possuir precisão compatível. Este acoplamento tempo-espaco é particularmente crucial quando a convecção domina o processo de transporte devido ao caráter direcional da propagação de informação em problemas hiperbólicos.

Se aplicarmos a equação de momento a um elemento finito com função de forma linear, como o utilizado neste trabalho, nos defrontaríamos com o aparente desaparecimento do termo viscoso $\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$. Com uma velocidade $u(x)$ linear e contínua na interface de 2 elementos, S_a e S_b , como ilustrado na figura 3.1, ter-se-ia uma primeira derivada $\partial u / \partial x$ constante no interior de cada elemento e descontínuas na interface. Já a segunda derivada seria nula em cada elemento e infinita na interface, demonstrando que a parcela viscosa não pode ser desprezada. Embora este fato possa causar um sentimento de que não é possível a utilização de aproximações lineares na solução do problema, aumentando o grau de complexidade do mesmo, a formulação através do Princípio dos Trabalhos Virtuais possibilita contorná-lo fazendo com que campos de velocidade lineares em cada elemento e contínuos na interface já sejam capazes de representar a física envolvida. Maiores detalhes podem ser obtidos no Apêndice desse trabalho.

Figura 3.1: Funções de forma lineares. (a) Velocidade $u(x)$ normal ao lado comum dos elementos contíguos, com uma função de forma linear. (b) descontinuidade da derivada $\partial u / \partial x$.

Utilizando o conceito dos trabalhos virtuais ou, neste caso, das potências virtuais já que aqui a variável básica não consiste num deslocamento (descrição Lagrangeana), mas sim numa velocidade, multiplica-se escalarmente a equação de momento por uma velocidade virtual $\delta \mathbf{u}$, uma função arbitrária que representa uma possível velocidade do sistema fluido, e a equação de conservação de massa por

uma campo virtual de pressão δp . Teremos, no formato integral, as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} -\nabla p \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

Essas equações podem agora ser integradas por partes e discretizadas a partir da aplicação do método dos elementos finitos, como pode ser visto no apêndice deste trabalho. Têm-se, como resultado, as equações discretas de Navier-Stokes, as quais assumem o seguinte formato:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{M}$ representa a matriz de inércia, $\mathbf{N}$ o termo convectivo, Re o número de Reynolds, $\mathbf{D}$ a matriz de dissipação, $\mathbf{U}$ a velocidade, $\dot{\mathbf{U}}$ a aceleração local, $\mathbf{P}$ a pressão, $\mathbf{R}$ o operador gradiente e $\mathbf{R}^t$ o operador divergente.

Existem diversos métodos que se propõem a resolver numericamente as equações de Navier-Stokes. Nas seções que se seguem, será discutido um dos mais populares, o chamado Método de Resolução por Partes, e sua comparação com o método utilizado nesse trabalho, o Método das Penalidades.

3.1 O Método de Resolução por Partes

Entre os métodos numéricos propostos para integração no tempo de problemas de escoamento transitório, têm grande popularidade e eficiência os chamados Métodos de Resolução por Partes ou *Fractional Step Methods* (FSM). Existe uma grande variedade destes dependendo da forma como um problema complexo é dividido: em outros dois ou mais. Além disso, existem diversas formas

de discretização tanto para o tempo quanto para o espaço. Entretanto, todos se baseiam no mesmo princípio: decompor um problema inicialmente complexo em diversos passos relativamente mais simples.

Em uma das versões do Método de Resolução por Partes, calcula-se um campo de velocidades intermediário através da resolução das equações de momento, desprezando-se a pressão.

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \int_t^{t+\Delta t} \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \right) \cdot dt \quad (3.10)$$

Não foram colocados índices para $\mathbf{u}$ nos termos convectivo e dissipativo pois diversas formas de discretização podem ser aplicadas para estes, sendo que as mais utilizadas são um método explícito para o primeiro e um implícito para o segundo. Esse campo intermediário, em geral, não satisfaz a equação da continuidade. Para corrigi-lo utiliza-se o campo de pressões como mostrado na equação 3.11.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \int_t^{t+\Delta t} \nabla p \cdot dt \quad (3.11)$$

Como o campo $\mathbf{u}^{n+1}$ deve satisfazer a continuidade, aplicando-se a divergência na equação 3.11, resulta uma equação de Poisson para a pressão.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (3.12)$$

Com a pressão calculada, parte-se para o próximo passo de tempo. Uma forma alternativa do método seria incluir o valor conhecido da pressão durante o cálculo do campo intermediário, fazendo com que na etapa seguinte fosse calculada a correção da mesma. Esse método pode, entretanto, levar ao aparecimento de modos espúrios de pressão.

Nota-se que, ao contrário de outros métodos, no FSM a correção da pressão é feita uma única vez a cada passo de tempo. Conseqüentemente, o FSM mostra-se extremamente vantajoso em simulações de problemas transientes frente aos outros

métodos, que necessitam de várias iterações por passo de tempo para efetuar tal correção. O preço a ser pago, segundo Armfield e Street (2004), é um erro de maior magnitude devido a esse caráter não-iterativo.

Entre as desvantagens do método comparativamente ao Método das Penalidades podem ser citadas a necessidade de se resolver uma equação de Poisson para a pressão a cada passo de tempo, aumentando consideravelmente a carga computacional, bem como a de imposição de uma condição de contorno para a pressão no cilindro, a qual não é inerente ao problema.

3.2 O Método das Penalidades

Há pelo menos três razões para o ganho de popularidade do método das penalidades na atualidade. Primeiramente, o desacoplamento da pressão e velocidade leva à redução do número de graus de liberdade que devem ser resolvidos; a condição de incompressibilidade pode ser removida do processo de solução; por fim, apresenta grande praticidade e produz bons resultados.

Esse método proporciona um meio de desacoplamento para a determinação da velocidade e da pressão. O mecanismo que permite esse desacoplamento é a relaxação da condição de incompressibilidade no sentido que o problema incompressível é aproximado por meio de uma formulação levemente compressível. Com isso, permite-se a eliminação da pressão na equação de momento e, conseqüentemente, reduz-se o tamanho da matriz do problema. Assim, ela envolverá apenas velocidades, tornando o método extremamente atrativo.

Como demonstrado nas seções anteriores, a equação de Navier-Stokes e a equação da continuidade, após a discretização, assumem os formatos de 3.8 e 3.9. Aplicando o fator de penalidade ε na equação 3.9, teremos:

$$\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = -\varepsilon \cdot \mathbf{P} \quad (3.13)$$

onde ε é um parâmetro de valor extremamente pequeno.

Pode-se, então, isolar a pressão nessa equação e substituí-la na equação 3.8. Passa-se a ter que resolver apenas as equações de momento, cujas incógnitas serão apenas o campo de velocidades e sua derivada.

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.14)$$

Para garantir a incompressibilidade, ε deve ser bem pequeno. Porém, quando ε assume valores demasiadamente pequenos, o termo devido à penalidade assume um papel dominante no sistema. Nesse fato reside a principal desvantagem do método: a presença do fator de penalidade ε pode tornar o sistema mal condicionado caso seja escolhido pequeno demais, pois surgirão instabilidades numéricas. Por outro lado, caso o mesmo não seja suficientemente pequeno, a convergência da solução poderá ser prejudicada pois a solução se afastará da condição de incompressibilidade. Segundo Brezzi (1991), o método das penalidades causa um impacto negativo no condicionamento da matriz, tornando praticamente inviável o emprego de um método iterativo para a solução do sistema linear resultante, pois estes últimos são muito sensíveis a tal condicionamento.

Uma consideração importante deve ser feita no que tange ao cálculo da pressão. Supondo um campo de pressão unitário em todo o domínio fluido, a norma euclidiana desse campo, se utilizada a formulação acima, seria tanto maior quanto maior o número de elementos no domínio, ou seja, ao se utilizar uma maior discretização ter-se-ia um efeito imediato (e indesejado) na norma do vetor de pressões. Faz-se necessário, portanto, ponderar os resultados pela contribuição de cada elemento da malha. Define-se o campo de pressões normalizado $\mathbf{P}_m$ por:

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{P} \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{m}$ representa a matriz de inércia local, detalhada na seção B.1 do apêndice.

A norma desse campo é uma aproximação da integral do quadrado da pressão ou

$$\mathbf{P}_m^t \cdot \mathbf{P}_m \equiv \int_{\Omega} p^2(\vec{x}) \cdot d\Omega \quad (3.16)$$

Define-se, então, R_m de modo a recuperar o termo referente ao gradiente de pressão nas equações de Navier-Stokes, ou seja:

$$\mathbf{R}_m \cdot \mathbf{P}_m = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \quad (3.17)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}^{-1/2} \\ \mathbf{R}_m^t &= \mathbf{m}^{-1/2} \cdot \mathbf{R}^t \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde R_m e R_m^t correspondem aos operadores gradiente e divergente, ponderados pela inércia dos elementos.

Assim, as séries temporais de Cd e Cl neste trabalho são calculadas a partir de P_m , tornando-as independentes do tamanho dos elementos da malha. Maiores detalhes sobre o cálculo da pressão podem ser encontrados na seção B.7 do apêndice.

3.3 Matriz consistente x Matriz concentrada

Quando se discretiza as equações de Navier-Stokes, o vetor das acelerações locais aparecerá multiplicado por uma matriz de inércia, em seu formato consistente, que apresenta alto grau de esparsidade. Tal formato assegura que no processo de discretização por elementos finitos, tanto o campo de velocidades quanto os momentos sejam preservados da melhor maneira possível. Se o campo de velocidades é discretizado utilizando funções de forma de ordem x^n , a representação de deslocamentos e velocidades calculados terão precisão da ordem de $O(h^{n+1})$, onde h é o comprimento característico do elemento da malha. Como as funções de forma utilizadas nesse trabalho são lineares tanto para a pressão quanto para a velocidade, o erro cometido é da ordem de $O(h^2)$.

A matriz consistente pode ser substituída por uma forma simplificada, conhecida como matriz concentrada. Tal simplificação consiste em somar as

contribuições de cada elemento e inseri-las no elemento da diagonal principal, conforme apresentado na seção B.1 do Apêndice. A grande vantagem aqui se dá quando da necessidade de inversão da matriz de inércia que, no formato diagonal, ocorre de forma trivial enquanto a inversa da matriz consistente é densa. Assim, o uso de matrizes de inércia no formato concentrado conduz a um alívio considerável do esforço numérico acarretando, porém, um erro da ordem de $O(h)$. O uso da matriz concentrada mostra-se interessante quando as funções de forma utilizadas são também lineares, possuindo um erro de ordem $O(h)$, o qual é compatível com tal aproximação. Se fossem utilizadas funções de maior ordem, o erro cometido pela utilização deste formato torna-se dominante.

3.4 A aceleração local

Com a finalidade de se ter um sistema em função apenas da velocidade, faz-se necessário aproximar a aceleração local por uma expansão das velocidades envolvidas. Neste trabalho, utilizou-se uma aproximação de 2ª ordem, de modo a compatibilizar a ordem do erro envolvido com o erro da discretização espacial. Assim, empregou-se o esquema Euler implícito de segunda ordem para trás (*Implicit Second Backward Euler Scheme*), definido por:

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (3 \cdot \mathbf{U}^{n+1} - 4 \cdot \mathbf{U}^n + 1 \cdot \mathbf{U}^{n-1}) \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{U}^n$ representa o campo de velocidades no instante atual, $\mathbf{U}^{n+1}$ o campo de velocidades a ser determinado, ou seja, em $t + \Delta t$, e $\mathbf{U}^{n-1}$ o campo de velocidades previamente calculado ou no instante $t - \Delta t$.

Este esquema é implícito, bastante robusto, conservativo no tempo, e não cria uma limitação do passo de tempo. O erro aqui cometido é da ordem de $O(\Delta t^2)$.

3.5 A linearização do termo convectivo

Como já discutido anteriormente, o termo convectivo representa uma das grandes dificuldades quando da resolução da equação de Navier-Stokes, devido à sua não-linearidade. Para contornar esse problema, pode-se reescrever a velocidade no instante $t+\Delta t$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^n \quad (3.20)$$

Assim, o termo convectivo nesse instante poderá ser calculado através de

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{N}(\mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^n) \quad (3.21)$$

que, após expandido e aplicada a equação 3.20, resultará:

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \left\{ \mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^n + \mathbf{N}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^{n+1} \right\} - \mathbf{N}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^n + O(\Delta t^2) \quad (3.22)$$

O termo entre chaves é aproximado então por um operador $\hat{\mathbf{N}}$, detalhado no apêndice desse trabalho. Uma relação resultante de tal aproximação é a dada pela equação 3.23, que será aplicada para o cálculo do segundo termo do lado direito na equação 3.22.

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^n) = \frac{1}{2} \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) \quad (3.23)$$

Isso permite reescrever a equação 3.22 em função apenas de $\hat{\mathbf{N}}$, e aplicado somente a $\mathbf{U}^n$, ou seja, num instante de tempo conhecido.

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^{n+1} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^n + O(\Delta t^2) \quad (3.24)$$

A partir dessas definições e aproximações, chega-se ao sistema linear abaixo, cuja solução é parte integrante desse trabalho. Nele, dado um valor de ε , o problema se reduz à determinação do campo de velocidades U .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{M} + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{R}_m^t \right) \cdot \mathbf{U}^{n+1} \\ & = \left(\frac{1}{2} \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) + \frac{2}{\Delta t} \cdot \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{U}^n - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.6 Estimativa de ε

Como já mencionado anteriormente, a determinação do parâmetro ε corresponde à principal dificuldade do Método das Penalidades já que um valor muito alto leva à perda de convergência enquanto um valor muito baixo torna o sistema mal condicionado. A determinação do raio de convergência de ε não é uma tarefa simples e pode demandar muito trabalho numérico.

Uma estratégia que pode ser adotada para contornar esse problema é a expansão das variáveis dependentes de ε em uma Série de Taylor. Embora simples, tal procedimento possibilita trabalhar com valores de ε maiores, evitando o mal condicionamento, ao mesmo tempo em que permite alcançar erros de menor ordem do que os inicialmente previstos para tal fator de penalidade. Tal procedimento é ilustrado abaixo.

Deseja-se determinar um parâmetro φ do escoamento como, por exemplo, o Coeficiente de Arrasto ou o Número de Strouhal, fortemente influenciados pelo valor de ε escolhido. Fazendo uma expansão de φ em torno de ε , teríamos:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \varphi_2 \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.26)$$

Se essa expansão é repetida para valores de ε nas proximidades deste primeiro, como por exemplo $2 \cdot \varepsilon$ e $\varepsilon/2$, teremos um sistema linear em que $\varphi(\varepsilon)$ é conhecido, pois provém das simulações (o mesmo se aplica a $\varphi(2 \cdot \varepsilon)$ e $\varphi(\varepsilon/2)$), bem

como o valor de ε , previamente escolhido. Pode-se, dessa maneira, determinar um φ_0 com erro de ordem $O(\varepsilon^3)$. No próximo capítulo são avaliados os resultados obtidos através deste método.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo é feita a descrição das simulações computacionais realizadas e análise dos resultados obtidos. Foram realizadas simulações bidimensionais para números de Reynolds variando entre 100 e 600, utilizando valores unitários tanto para o diâmetro do cilindro quanto para a velocidade ao longe. Simulações para diversos passos de tempo foram realizadas, mas optou-se por um maior conservadorismo em relação a este já que diversas análises serão feitas a partir da variação de outros parâmetros. O valor adotado neste trabalho foi Δt igual a $(0,02.(U/D))$.

Os resultados obtidos das simulações são: vetor velocidade e pressão estática nos nós do domínio, séries temporais do coeficiente de arrasto e do coeficiente de sustentação, extraídas a partir da integração instantânea das forças nas direção x e y atuantes no cilindro, respectivamente. Como o interesse desse trabalho se concentra na fase em que a esteira já se encontra completamente desenvolvida, foram utilizadas 120 unidades de tempo adimensional como tempo total de simulação, garantindo uma massa de dados suficiente para análises posteriores, realizadas nas seções seguintes através de processamentos gráficos e numéricos. Entretanto, para valores de Re inferiores a 200, verificou-se que a quantidade de períodos de oscilação de CI após o desenvolvimento completo da esteira era muito pequena, podendo acarretar grandes erros nos parâmetros calculados, especialmente no número de Strouhal. Para essas simulações o tempo total foi aumentado para 180 unidades de tempo adimensionais.

O sistema linear 3.25, resultante da aplicação do MEF ao problema, é não-simétrico e possui grande esparsidade. De modo a armazenar apenas os valores não nulos, aumentando a eficiência em termos de memória alocada, utilizou-se o formato CRS (*Compressed Row Storage*). Tal sistema foi resolvido através de um conjunto de rotinas denominado UMFPACK, que utiliza uma decomposição LU para tanto. O método direto aplicado neste trabalho mostrou-se mais eficiente que os métodos iterativos, como por exemplo, o gradiente-conjugado e o gradiente bi-conjugado, que demandavam muito tempo para realizar uma simples iteração. Esse comportamento pode ser explicado pelo mal

condicionamento da matriz de coeficientes oriundo da aplicação do método das penalidades.

4.1 Malhas geradas

As malhas utilizadas são malhas não-estruturadas de elementos triangulares. O ponto de coordenadas nulas corresponde ao centro do cilindro, com o domínio se estendendo de dez diâmetros à montante a quarenta diâmetros à jusante, além de dez diâmetros na direção transversal, tanto acima quanto abaixo do cilindro.

Na entrada do fluido e nas regiões inferior e superior foram impostas condições de contorno essenciais, com velocidade na direção x unitária e velocidade na direção y nula. Na superfície do cilindro foi especificada uma condição de parede, ou seja, ambas as componentes da velocidade são nulas. Já na região de saída do fluido (extremidade direita), foi imposta uma condição de contorno natural em que as derivadas da velocidade normal ao contorno são nulas. Essas regiões são demonstradas na figura 4.1.

Figura 4.1: Condições de contorno impostas ao problema: condição de parede no cilindro (em verde), velocidade u unitária e v nula na entrada do fluxo (em vermelho) e derivadas da velocidade nulas na região de saída do fluxo (em azul).

Foram geradas quatro malhas a fim de se realizar um teste de convergência. As malhas geradas podem ser vistas na figura 4.2, e suas características são apresentadas na tabela 4.1.

Figura 4.2: Malhas geradas para as simulações numéricas. A partir da esquerda, aumento gradativo do numero de nós, no sentido horário.

Tabela 4.1: Principais parâmetros das malhas utilizadas.

	Nº de nós	Nº de nós no cilindro	Nº de elementos
Malha 1	7284	38	14403
Malha 2	19719	80	39187
Malha 3	25761	160	51244
Malha 4	38683	180	77083

A partir dessas malhas, foram realizadas simulações para um número de Reynolds igual a 600, pois é o que demanda maior refinamento dentre os utilizados neste trabalho. Utilizou-se um fator de penalidade ε de 10^{-10} e os resultados são apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Avaliação da qualidade das malhas geradas. Foram utilizados Re igual a 600 e ε igual a 10^{-10} .

	Nº de Strouhal	Cd médio	Cl médio
Malha 1	0,2470	1,0349	0,1210
Malha 2	0,2362	1,4092	-0,0134
Malha 3	0,2337	1,4717	-0,0012
Malha 4	0,2336	1,4744	-0,0008

O número de Strouhal, que corresponde à frequência dominante na emissão de vórtices na sua forma adimensional, é dado, em termos práticos, pela frequência de pico do espectro da série temporal de Cl no cilindro, após estabilização da

amplitude da mesma. Os espectros para simulações de Re iguais a 100 e 600 são ilustrados nas figuras 4.3 e 4.4 respectivamente.

Figura 4.3: Espectro da série temporal de CI para $Re=100$ e $\varepsilon=10^{-10}$.

Figura 4.4: Espectro da série temporal de CI para $Re=600$ e $\varepsilon=10^{-10}$.

Das simulações realizadas pode-se verificar que o coeficiente de sustentação médio obtido para as duas primeiras malhas apresentou valor não nulo, ao contrário do esperado. Isso se deve ao fato de que as malhas não são simétricas e, caso não haja uma quantidade suficiente de pontos no cilindro, aparecerão distorções no resultado como o ocorrido. Já as malhas 3 e 4 apresentaram melhores resultados e, como estes convergiram, foi selecionada a menor malha para o restante das simulações pois a mesma tem cerca de 33% nós a menos que a malha 4, gerando um ganho computacional. Um detalhe dos elementos próximos ao cilindro nesta malha pode ser visto na figura 4.5. A altura da primeira camada de elementos corresponde a $0,017.D$.

Figura 4.5: Detalhe da malha na região próxima ao cilindro.

4.2 Influência do fator de penalidade

Além do teste de convergência das malhas, foi realizada uma análise de sensibilidade do método em relação à variação de ε . Foram feitas diversas simulações variando-se ε de 10^{-2} a 10^{-12} buscando determinar o raio de convergência desse parâmetro. O valor de 10^{-12} causou uma instabilidade numérica,

acarretando o término precoce da simulação. Para os demais, são apresentados valores do Número de Strouhal, Coeficiente de Arrasto médio e flutuação do Coeficiente de Sustentação nas tabelas a seguir.

Tabela 4.3: Efeito da variação de ε no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds $Re=100$.

ε	St	Cd médio	Cl rms
10^{-4}	0,16949	1,3926	0,2412
10^{-6}	0,16997	1,3926	0,2416
10^{-8}	0,16997	1,3929	0,2418
10^{-10}	0,16892	1,3929	0,2411

Tabela 4.4: Efeito da variação de ε no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds $Re=600$.

ε	St	Cd médio	Cl rms
10^{-2}	0,23061	1,4352	0,8563
10^{-4}	0,23324	1,4705	0,8974
10^{-6}	0,23207	1,4701	0,8958
10^{-8}	0,23365	1,4740	0,9005
10^{-10}	0,23324	1,4708	0,8976

Os resultados demonstraram que quanto maior o número de Reynolds, maior a sensibilidade à variação de ε . Como o comportamento em relação a variação de ε não permite uma clara conclusão sobre qual o seu valor ideal, foi empregada a análise proposta na seção 3.6. Para isso, foram repetidas as simulações para Re 600, porém utilizando fatores de penalidade iguais a 10^{-2} , 2×10^{-2} e $0,5 \times 10^{-2}$, o que implica num erro da ordem de 10^{-6} nos parâmetros calculados. Os resultados da aplicação dessa metodologia são apresentados na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Valores de Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms calculados através de expansão em Série de Taylor para simulação com número de Reynolds $Re=600$.

ε	St	Cd médio	Cl rms
$0,5 \times 10^{-2}$	0,23158	1,4520	0,8764
10^{-2}	0,23061	1,4352	0,8563
2×10^{-2}	0,22727	1,3981	0,8137
Expansão	0,23209	1,4677	0,8957

Os valores encontrados pela expansão são coerentes com os obtidos nas simulações, sugerindo que o valor de 2×10^{-2} já se encontra dentro do raio de convergência. Além disso, como o erro dessa expansão é da ordem de $O(10^{-6})$ e os resultados são muito próximos aos obtidos com $\varepsilon=10^{-6}$, adotou-se este último como o fator de penalidade para as demais simulações desse trabalho.

4.3 Influência do formato da Matriz de Inércia

Um outro ponto avaliado nesse trabalho foi a sensibilidade do resultado ao formato da Matriz de Inércia utilizado: consistente ou concentrado. Embora ocorram diferenças durante o transiente, após a estabilização da esteira as frequências de oscilação e os coeficientes adimensionais de interesse são muito próximos, como comprovam os resultados apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.7.

As diferenças na fase transitória de Cd e Cl para valores de Reynolds de 100 e 600 são ilustradas nas figuras 4.6, 4.7, 4.9 e 4.10. Nota-se o crescimento mais acelerado das amplitudes de Cl durante o período transiente ao utilizar-se a matriz de massa no formato concentrado. As amplitudes finais, porém, são iguais para ambos os formatos. O principal impacto observado na utilização de um ou outro formato consiste numa diferença de fase no movimento oscilatório após a esteira atingir seu completo desenvolvimento, resultante dos diferentes transientes. As figuras 4.8 e 4.11 ilustram o desenvolvimento da esteira para Reynolds 100 e 600, respectivamente.

Tabela 4.6: Influência do formato da Matriz de Inércia no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds $Re=100$.

Matriz de inércia	St	Cd médio	Cl rms
Consistente	0,16997	1,3926	0,2416
Concentrada	0,16997	1,3940	0,2436

Tabela 4.7: Influência do formato da Matriz de Inércia no Número de Strouhal, Cd médio e Cl rms para simulação com número de Reynolds $Re=600$.

Matriz de inércia	St	Cd médio	Cl rms
Consistente	0,23207	1,4701	0,8958
Concentrada	0,23207	1,4703	0,8967

Figura 4.6: Comparação de coeficientes de arrasto entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=100$ e $\epsilon=10^{-6}$.

Figura 4.7: Comparação de coeficientes de sustentação entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=100$ e $\epsilon=10^{-6}$.

Figura 4.8: Desenvolvimento da esteira: contornos de vorticidade para $Re=100$, nos instantes $t=3, 5, 10, 15, 25, 40, 45, 50, 55, 65$. Simulações com Matriz de Inércia consistente.

Figura 4.9: Comparação de coeficientes de arrasto entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=600$ e $\epsilon=10^{-6}$.

Figura 4.10: Comparação de coeficientes de sustentação entre simulações com Matriz Consistente e Matriz Concentrada para $Re=600$ e $\epsilon=10^{-6}$.

Figura 4.11: Desenvolvimento da esteira: contornos de vorticidade para $Re=600$, nos instantes $t=3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$. Simulações com Matriz de Inércia consistente.

4.4 Comparação com resultados de outras publicações

Nesta seção é feita uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com os de outras publicações. De forma a obter uma massa de dados suficiente para cobrir a faixa delimitada pelos números de Reynolds de 100 e 600, foram realizadas diversas simulações para valores de Reynolds intermediários. A figura 4.12 ilustra os valores de Strouhal resultantes de tais simulações com aqueles obtidos por Henderson (1997).

Figura 4.12: Número de Strouhal em função do número de Reynolds. $\circ$, Williamson (1989); $\bullet$, Hammache e Gharib (1991); $+$, simulações numéricas 3-D Henderson (1997); linha sólida, curva aproximada das simulações numéricas 2-D Henderson (1997); $\blacktriangle$, presente trabalho. Extraída de Henderson (1997).

Os resultados se mostram levemente superiores o que poderia ser explicado por um possível efeito de bloqueio. Embora aparentemente pequeno, esse efeito

poderia ser contornado com a extensão da malha no sentido transversal. A figura 4.13 apresenta as configurações da esteira para diversos valores de Reynolds, num dado instante. A figura 4.14 apresenta as linhas de corrente para Reynolds igual a 100, no mesmo instante.

Figura 4.13: Contornos de vorticidade no instante $t=95$ para números de Reynolds iguais a 100, 200, 300, 400, 500 e 600.

Figura 4.14: Linhas de Corrente para $Re = 100$ no instante $t=95$.

A seguir é apresentado o comportamento do coeficiente de arrasto médio. Seus valores são novamente comparados com as simulações de Henderson (1997), apresentando boa aderência. A figura 4.15 corrobora com essa afirmação. Já a figura 4.16 apresenta os contornos de pressão para diversos valores de Reynolds, num dado instante.

Figura 4.15: Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds. ($\circ, \bullet$), Wieselsberger (1921); +, simulações numéricas 3-D Henderson (1997); linha sólida, curva aproximada das simulações numéricas 2-D Henderson (1997); $\blacktriangle$, presente trabalho. Extraída de Henderson (1997).

Figura 4.16: Contornos de pressão no instante 95 para números de Reynolds iguais a 100, 200, 300, 400, 500 e 600.

Um último parâmetro a ser comparado é a flutuação do coeficiente de sustentação, proveniente da flutuação de pressão atuante na superfície do cilindro. A figura 4.17 ilustra os valores dessa flutuação obtidos nesse trabalho enquanto na figura 4.18 eles são comparados com os resultados obtidos por outros autores.

Figura 4.17: Curva de $C_l \text{ rms}$ x Re dos valores obtidos neste trabalho.

Figura 4.18: Curva flutuação de C_l x Re . $\square$, Keefe (1962); $+$, Leehey e Hanson (1971); $\blacktriangle$, Sonnevile (1973); $\triangle$, Mohr (1981); ∇ , Moeller e Leehey (1984); $\blacksquare$, Gartshore (1984); $\diamond$, Szepessy e Bearman (1992); $\circ$, West e Apelt (1993); $\blacklozenge$, Sakamoto e Haniu (1994); $\times$, 2-D; $\bullet$ (metade preenchida), 3-D; $\bullet$, Norberg (2002); $\blacktriangle$, presente trabalho. Extraída de Norberg (2002).

Os valores possuem boa aderência à curva até $Re=200$. As grandes diferenças apresentadas para valores superiores se deve aos efeitos causados pela presença das tridimensionalidades no escoamento, não capturados pelas simulações bidimensionais.

Por fim, as tabelas 4.8 e 4.9 comparam valores de números de Strouhal e coeficientes de arrasto médio obtidos neste trabalho e por outros autores para números de Reynolds iguais a 100 e 200, respectivamente. Entre parênteses, apresenta-se o erro percentual tomando como base os resultados de Henderson (1997). Mais uma vez, comprova-se a eficiência do método aqui utilizado no que tange à sua simplicidade e à qualidade dos seus resultados.

Tabela 4.8: Comparação de resultados de St e Cd médio para $Re = 100$.

	St	%	Cd médio	%
Resultados Obtidos neste trabalho	0,170	(2,41)	1,39	(2,96)
Resultados de Henderson (1997)	0,166		1,35	
Resultados de outras Simulações				
Borthwick (1986)	0,188	(13,23)	1,21	(10,37)
Braza et al.(1986)	0,160	(3,61)	1,37	(1,48)
Sa e Chang (1991)	0,155	(6,63)	1,23	(8,89)
Meneghini (1993)	0,162	(2,41)	1,52	(12,59)
Saltara FSM (1999)	0,160	(3,61)	1,33	(1,48)
Siqueira FSM (1999)	0,165	(0,60)	1,37	(1,48)
Experimentos				
Roshko (1954)	0,16-0,17			
Triton (1959)			1,25	
Nishioka e Sato (1978)	0,151			
Williamson (1991)	0,164			

Tabela 4.9: Comparação de resultados de St e Cd médio para Re = 200.

	St	%	Cd médio	%
Resultados Obtidos neste trabalho	0,201	(1,78)	1,38	(2,94)
Resultados de Henderson (1997)	0,197		1,34	
Resultados de outras Simulações				
Há Minh et al. (1980)	0,190	(3,55)	1,30	(2,99)
Borthwick (1986)	0,188	(4,57)	1,02	(23,88)
Braza et al.(1986)	0,200	(1,52)	1,35	(0,75)
Sa e Chang (1991)	0,186	(5,58)	1,13	(15,67)
Meneghini (1993)	0,196	(0,51)	1,25	(6,72)
Arkell (1995)	0,196	(0,51)	1,30	(2,99)
Giannakidis (1997)	0,190	(3,55)	1,25	(6,72)
Saltara FSM (1999)	0,190	(3,55)	1,25	(6,72)
Siqueira FSM (1999)	0,196	(0,51)	1,30	(2,99)
Experimentos				
Roshko (1954)	0,17-0,19			
Williamson (1991)	0,196			
Norberg (1993)			1,30	

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi estudada a eficiência do Método das Penalidades no tratamento do acoplamento pressão-velocidade, que representa uma das grandes dificuldades na solução das equações de Navier-Stokes, para o escoamento ao redor de um cilindro fixo, com números de Reynolds variando entre 100 e 600. Além disso, avaliou-se a influência da modelagem do termo inercial na solução, verificando a sensibilidade da resposta quando utilizada uma matriz de massa no formato consistente ou concentrado.

De um modo geral, o método mostrou-se bastante promissor no que se refere à resolução de escoamentos bidimensionais. Os números de Strouhal calculados, bem como os valores de coeficientes de arrasto encontrados, corroboram com esse fato. Além disso, embora tenham sido utilizadas funções de interpolação lineares tanto para a pressão quanto para a velocidade, os erros percentuais obtidos em comparação a métodos de ordem superior são pequenos na faixa de Reynolds simulada. Vale ressaltar a simplicidade envolvida e o ganho computacional decorrente de se resolver as equações de momento em termos apenas do campo de velocidades, sem equações adicionais. Embora não seja necessária para a resolução do problema, o campo de pressão pode ser calculado a qualquer instante bastando-se para isso substituir o campo de velocidades desse instante na equação da continuidade modificada.

O valor de 10^{-6} atribuído ao fator de penalidade ε mostrou-se adequado proporcionando alcançar resultados muito próximos aos obtidos por outros autores. A metodologia empregada em sua estimativa provou, também, ser de grande eficiência, oferecendo uma boa alternativa para a determinação de um valor adequado.

Com relação aos resultados numéricos obtidos, os valores de Strouhal são, todos, levemente superiores aos esperados. Esse erro sistemático pode ser oriundo de um comprimento transversal da malha insuficiente, fazendo com que o contorno tenha seu efeito propagado até as proximidades do cilindro, gerando blocagem.

Quanto à influência do formato da matriz de inércia, verificou-se que não há grande impacto na utilização da matriz no formato simplificado, ou concentrado,

quando utilizadas funções de forma lineares. Isso porque os erros envolvidos são compatíveis, não afetando a qualidade do resultado final. As diferenças encontradas se concentram na fase de transiente, gerando uma diferença de fase entre os resultados de ambos os formatos após o completo desenvolvimento da esteira. No entanto, as frequências e coeficientes adimensionais envolvidos sofrem pequena variação. Essa forma simplificada se mostra tão mais atraente quanto maior o número de graus de liberdade envolvidos na discretização do domínio.

Como tema de futuras pesquisas, esse trabalho sugere a utilização do Método das Penalidades no estudo do escoamento ao redor de um cilindro oscilando.

Uma segunda sugestão consiste em estudar o escoamento sobre pares de cilindros, em configuração *tandem* e lado a lado. Além disso, seria interessante investigar o comportamento do método em agrupamentos de maior número.

Por fim, seria importante avaliar a eficiência do método em escoamentos tridimensionais, avaliando a ordem dos erros envolvidos com o aumento da complexidade do problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARMFIELD, S.; STREET R. Modified fractional step-methods for the Navier-Stokes equations. **Australian & New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal**, v.45, p. C364-C377, 2004.

BAKER, A. J.; ORZECOWSKI, J. A. A penalty finite element algorithm for parabolic flow problems. **Penalty-Finite Element Methods in Mechanics**, ASME, p. 137-142, 1981.

BERCOVIER, M.; ENGELMAN, M. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows. **Journal of Computational Physics**, v.30, p. 181-201, 1979.

BLEVINS, R. D. **Flow-induced vibration**. 2.ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

BREZZI, F.; FORTIN, M. **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**. Berlin: Springer Verlag, 1991.

CARMO, B. S. **Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados**. 2005. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

CUVELIER, C. et al. **Finite element methods and Navier-Stokes equations**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1986.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for Flow Problems**. Chichester: Wiley, 2003.

DHAUBHADEL, M.N. et. al. Finite Element Analysis of Fluid Flow and Heat Transfer for Staggered Bundles of Cylinders in Cross Flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.7, p. 1325-1342, 1987.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Berlin: Springer, 1996.

GALLAGHER, R. H. et al. **Finite Elementin in fluids**. Chichester: Wiley, 1985. v.6.

GERRARD, J. H. The mechanics of the formation region of vórtices behind bluff-bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v.25, n.2, p.401-413,1966.

GIRAULT, V.; RAVIART, P. A. **Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms**. Berlin: Springer Verlag, 1986.

GUNZBURGER, M. D. **Finite Element Methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice and algorithms**. Boston: Academic Press, 1989.

HEINRICH J. C.; MARSHALL R. S. Penalty function solution of steady-state Navier-Stokes equations. **AIAA Journal**, v.17, n.7, p.789-790 1979.

HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, v.352, p.65-112, 1997.

HUGHES, T. R. J. et al.; Review of finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. **Journal of Computacional Physics**, v.30, n.1, p.1-60, 1979.

KARNIADAKIS, G. E.; SHERWIN, S. J. **Spectral/hp element methods for CFD**. New York: Oxford University Press, 1999.

MARSHALL, R.S. Natural convection in a square enclosure by a finite element penalty function method using primitive fluid variables. **Numerical Heat Transfer**, v.1, p. 315-330, 1978.

MENEZHINI, J. R. **Numerical simulation of bluff body flow control using a discrete vortex method**. 1993. PhD. Thesis - Imperial College, Department of Aeronautics, University of London, UK, 1993.

MENEZHINI, J. R. **Projetos de pesquisa no t3pico de gera33o e desprendimento de v3rtices no escoamento ao redor de cilindros**. 2002. Tese (Livre Doc3ncia) - Escola Polit3cnica, Departamento de Engenharia Mec4nica, Universidade de S3o Paulo, S3o Paulo, 2002.

NORBERG, C. Fluctuating Lift on a circular cylinder: review and new measurements. **Journal of Fluids and Structures**, v.17, p.57-96, 2003.

ODEN, J.T.; JACQOUTTE, O. A stable second-order accurate, finite element scheme for the analysis of two-dimensional incompressible viscous flows. In: **Fourth International Symposium on Finite Elements in Flow Problems**, Tokyo, 1982.

ODEN, J.T. Penalty method and reduced integration for the analysis of fluids. **Penalty-Finite Element Methods in Mechanics**, ASME, p. 21-32, 1982.

REDDY, J. N. The penalty function method in mechanics: A review of recent advances. **Penalty-Finite Element Methods in Mechanics**, ASME, 1982.

REDDY, J. N. Penalty-finite-element analysis of 3-D Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.35, p. 87-106, 1982.

SALTARA, F. **Simula33o num3rica do escoamento ao redor de cilindros**.1999. Tese (Doutorado) - Escola Polit3cnica, Departamento de Engenharia Mec4nica, Universidade de S3o Paulo, S3o Paulo, 1999.

SIQUEIRA, C. R. **Simula33o num3rica do escoamento ao redor de cilindros: Aplica33o a problemas bi e tridimensionais**. Tese (Doutorado) - Escola Polit3cnica, Departamento de Engenharia Naval e Oce4nica, Universidade de S3o Paulo, S3o Paulo, 1999.

TEMAM, R.; **Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis**. Amsterdam: North-Holland Press, 1979.

TRUJILLO, J.; KARNIADAKIS G. E. A penalty method for the vorticity-velocity formulation. **Journal of Computational Physics**, v.149, p.32-58, 1999.

VAN DYKE, M. **An album of fluid motion**. Standford: Parabolic press, 1982.

WILLIAMSON, C. H. K.; ROSHKO, A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. **Journal of Fluid and Structures**, v.2, p.393-441, 1988.

WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v.28, p.477-539, 1996a.

WILLIAMSON, C. H. K. Mode A secondary instability in wake transition. **Physics of Fluids**, v.8, n.6, p.1680-1682, 1996b.

WILLIAMSON, C. H. K. Three-dimensional wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, v.328, p.345-407, 1996c.

WILLIAMSON, C. H. K.; GOVARDHAN, R. Vortex-induced vibrations. **Journal of Fluid Mechanics**, v.36, p.413-455, 2004.

ZDRAVKOVICH, M. M. **Flow around circular cylinders**. New York: Oxford University Press, 1997. v.1

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite elements and approximation**. New York: Wiley, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. C. Constrained variational principles and penalty function methods in finite element analysis. **Lecture Notes in Mathematics: Conference on the Numerical Solution of Differential Equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

APÊNDICE A - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O procedimento de discretização espacial por elementos finitos reside numa representação discreta de uma forma integral fraca das equações diferenciais parciais a serem resolvidas. Os métodos de elementos finitos (MEF) foram os primeiros métodos numéricos que permitiram a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Depois de anos de evolução e estudo, este método hoje é utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação diferencial parcial e sistemas de equações diferenciais parciais. Através dos elementos finitos divide-se o domínio em elementos, que permite refinamento local e flexibilidade geométrica. O particionamento do domínio deve ser feito de modo que todo o domínio seja coberto pelo novo conjunto de subdomínios e que estes subdomínios não se sobreponham. Em linguagem matemática, podemos dizer que, considerado um domínio Ω , pode-se dividi-lo em N_{el} elementos, denotados por Ω^e , tais que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e = \emptyset \quad (\text{A.1})$$

Na formulação do tipo Galerkin, condições de contorno do tipo Dirichlet têm que ser especificadas explicitamente enquanto condições de contorno do tipo Neumann são tratadas implicitamente, como parte da formulação, através do uso de integração por partes e de uma função teste que se anule nas partes da fronteira onde condições de contorno do tipo Dirichlet são especificadas (Karniadakis e Sherwin). Por isso, as condições de contorno do tipo Neumann são também chamadas de naturais enquanto as do tipo Dirichlet são também chamadas de essenciais.

Pode-se escrever uma variável, como por exemplo a velocidade u , em sua forma discreta como se segue:

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_{gl}} h_i(x) \cdot U_i(t), \quad (\text{A.2})$$

onde $h_i(x)$ são as chamadas funções de forma, $U_i(t)$ são os N_{gl} coeficientes desconhecidos, correspondentes à velocidade em cada nó. As funções de forma são definidas localmente e têm valor não nulo dentro de um único elemento e nulo em todos os outros. A ilustração das funções de forma para um caso unidimensional pode ser verificada na figura (A.1).

Figura A.1: Funções de forma lineares para um caso unidimensional.

A.1 OS ELEMENTOS TRIANGULARES E SUAS FUNÇÕES DE FORMA

Os elementos triangulares, como os utilizados nesse trabalho, demonstram ser uma forma adequada para qualquer análise bidimensional, pois uma malha gerada a partir de triângulos pode facilmente representar de maneira precisa regiões delimitadas por fronteiras que possuem formas bastante complexas. Seja um elemento qualquer e , triangular com nós i , j e k numerados localmente no sentido anti-horário e situados nos vértices do mesmo e sejam $h_i^e(x,y)$ funções lineares as quais têm valor unitário no nó i e zero nos outros nós. Tais funções devem ser contínuas ao longo dos elementos da fronteira e diferente de zero apenas nos elementos associados ao nó i , o que pode ser garantido assumindo uma forma linear para h_i^e do seguinte modo no elemento e :

$$h_i^e = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e \quad (\text{A.3})$$

As constantes a , b e c acima são determinadas seguindo a definição que diz $h_i^e(x_i, y_i) = 1$ e $h_i^e(x_j, y_j) = h_i^e(x_k, y_k) = 0$, onde as coordenadas x e y são especificadas através do posicionamento dos nós no processo de subdivisão do domínio (geração da malha). Satisfazendo essas condições, obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i^e \\ b_i^e \\ c_i^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} a_i^e &= \frac{y_j - y_k}{2 \cdot Se} \\ b_i^e &= \frac{x_k - x_j}{2 \cdot Se} \\ c_i^e &= \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2 \cdot Se} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$2 \cdot Se = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{pmatrix} = 2 \times \text{área do elemento } e \quad (\text{A.6})$$

As funções de forma, neste caso, são as próprias coordenadas triangulares do elemento. Propriedades importantes conseqüentes de sua utilização e que serão utilizadas nas próximas seções são dadas pelas expressões abaixo.

$$\int_{\Omega_e} h_i(\vec{x}) \cdot d\Omega_e = \frac{S_e}{3} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{\Omega_e} h_i(\vec{x}) \cdot h_j(\vec{x}) \cdot d\Omega_e = (1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \quad (\text{A.8})$$

APÊNDICE B - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Nessa seção será apresentado todo o processo de discretização das equações de Navier-Stokes. Antes, porém, são necessárias algumas considerações. Para um domínio Ω , teremos após a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, ou seja, multiplicando por $\delta \mathbf{u}$ e δp :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} -\nabla p \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega = 0 \quad (\text{B.2})$$

Pode-se escrever as velocidades e pressões através das funções de forma h , resultando em:

$$\begin{aligned} u(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^3 U_{e,j} \cdot h_j(\vec{\mathbf{x}}) & \delta u(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^3 \delta U_{e,i} \cdot h_i(\vec{\mathbf{x}}) \\ v(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^3 V_{e,j} \cdot h_j(\vec{\mathbf{x}}) & \delta v(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^3 \delta V_{e,i} \cdot h_i(\vec{\mathbf{x}}) \\ p(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^3 P_{e,j} \cdot h_j(\vec{\mathbf{x}}) & \delta p(\vec{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot h_i(\vec{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

O próximo passo consiste em substituir essas expressões em B.1 e B.2. As seções que se seguem se dedicam a explicar, passo a passo, como são obtidas as equações de Navier-Stokes em sua forma discreta.

B.1 O TERMO TEMPORAL

A partir das substituições mencionadas anteriormente, o termo temporal será dado pela seguinte integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta U_{e,i}^t \cdot \dot{U}_{e,j} \int_{\Omega_e} h_i(\vec{x}) \cdot h_j(\vec{x}) \cdot d\Omega_e + \\
& + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta V_{e,i}^t \cdot \dot{V}_{e,j} \int_{\Omega_e} h_i(\vec{x}) \cdot h_j(\vec{x}) \cdot d\Omega_e
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Chamando de $\mathbf{m}_e$ a matriz de inércia local para um dado elemento e , podemos expressá-la por:

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} h_i(\vec{x}) \cdot h_j(\vec{x}) \cdot d\Omega_e = (1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \tag{B.5}$$

onde δ_{ij} representa o delta de Kronecker e assume valores unitários para $i=j$ e valores nulos quando tais índices são diferentes.

$$\mathbf{m}_e = \frac{S_e}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz de inércia local em seu formato concentrado seria dada por:

$$\mathbf{m}_{e,lumped} = \frac{S_e}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O termo temporal local será dado, portanto, pelo seguinte produto:

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{U}_e^t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_e \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{U}}_e \tag{B.6}$$

Em termos globais, a expressão é idêntica, considerando, porém, a matriz de inércia global e os vetores de velocidade de todo o domínio.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}} \quad (\text{B.7})$$

onde $\mathbf{M}$ é dada por $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{(n \times n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{(n \times n)} \end{pmatrix}_{(2n \times 2n)}$ e o procedimento de montagem da matriz global pode ser sumarizado por:

$$\mathbf{m} = \sum_{e=1}^{N_{elem}} (\mathbf{m} + \mathbf{m}_e) \quad (\text{B.8})$$

B.2 O TERMO CONVECTIVO

Como visto na seção 3, o termo convectivo pode ser escrito como se segue:

$$\mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \left\{ \mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^n + \mathbf{N}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^{n+1} \right\} - \mathbf{N}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^n + O(\Delta t)^2$$

Nesta seção, trataremos a velocidade no instante t por $\mathbf{u}_0$ e a velocidade no instante $t+\Delta t$, ou seja, $\mathbf{u}^{n+1}$, simplesmente por $\mathbf{u}$ de forma a facilitar a notação. Escrevendo o termo entre chaves da equação anterior na sua forma integral, tem-se:

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{U}^n + \mathbf{N}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^{n+1} = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \cdot d\Omega \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo $\mathbf{u}_0$ em termos de suas componentes, na forma discreta, tem-se:

$$u(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^3 U_{e,k} \cdot h_k(\vec{\mathbf{x}}) \quad v_0(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^3 V_{e,k} \cdot h_k(\vec{\mathbf{x}}) \quad (\text{B.10})$$

Expandindo o termo da direita da equação B.9, aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e separando em suas duas componentes, chega-se a

$$\int_{\Omega_e} \left[\left(u_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(u \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \cdot \delta u \cdot d\Omega_e \quad (\text{B.11})$$

para a componente x e

$$\int_{\Omega_e} \left[\left(u_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(u \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right] \cdot \delta v \cdot d\Omega_e \quad (\text{B.12})$$

para a componente y.

Pode-se separar, então, tais componentes em termos da dependência de u e de v, resultando em quatro termos, definidos abaixo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left(u_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot u \right) \cdot \delta u \cdot d\Omega_e \\ & \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot v \right) \cdot \delta u \cdot d\Omega_e \\ & \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot u \right) \cdot \delta v \cdot d\Omega_e \\ & \int_{\Omega_e} \left(u_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot v \right) \cdot \delta v \cdot d\Omega_e \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Aplicando as formas discretas das velocidades dadas pelas equações B.3 e B.10 a B.13, resulta:

$$\begin{aligned}
& \delta U^t \cdot \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\sum_{k=1}^3 U_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_k \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x} \cdot d\Omega \right) + \left(\sum_{k=1}^3 V_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_k \cdot \frac{\partial h_j}{\partial y} \cdot d\Omega \right) + \left(\sum_{k=1}^3 U_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x} \cdot d\Omega \right) \right] \right\} \cdot U \\
& \delta U^t \cdot \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\sum_{k=1}^3 U_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \cdot \frac{\partial h_k}{\partial y} \cdot d\Omega \right) \right] \right\} \cdot V \\
& \delta V^t \cdot \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\sum_{k=1}^3 V_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x} \cdot d\Omega \right) \right] \right\} \cdot U \\
& \delta V^t \cdot \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\sum_{k=1}^3 U_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_k \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x} \cdot d\Omega \right) + \left(\sum_{k=1}^3 V_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_k \cdot \frac{\partial h_j}{\partial y} \cdot d\Omega \right) + \left(\sum_{k=1}^3 V_0 \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \cdot \frac{\partial h_k}{\partial y} \cdot d\Omega \right) \right] \right\} \cdot V
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Chamando os termos entre chaves em cada uma das expressões acima de N^{xx} , N^{xy} , N^{yx} e N^{yy} respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
N_e^{xx} &= \left(\frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 U_{0,k} \cdot (1 + \delta_{ik}) \cdot a_j \right) + \left(\frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 V_{0,k} \cdot (1 + \delta_{ik}) \cdot b_j \right) + \left((1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 U_{0,k} \cdot a_k^e \right) \\
N_e^{xy} &= \left((1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 U_{0,k} \cdot b_k^e \right) \\
N_e^{yx} &= \left((1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 V_{0,k} \cdot a_k^e \right) \\
N_e^{yy} &= \left(\frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 U_{0,k} \cdot (1 + \delta_{ik}) \cdot a_j \right) + \left(\frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 V_{0,k} \cdot (1 + \delta_{ik}) \cdot b_j \right) + \left((1 + \delta_{ij}) \cdot \frac{S_e}{12} \cdot \sum_{k=1}^3 V_{0,k} \cdot b_k^e \right)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Assim, o operador $\hat{N}$ dado pela equação B.9 será dado, para um determinado elemento, pela seguinte matriz.

$$\hat{N}_e(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \left(N_{e,ij}^{xx} \right)_{(3 \times 3)} & \left(N_{e,ij}^{xy} \right)_{(3 \times 3)} \\ \left(N_{e,ij}^{yx} \right)_{(3 \times 3)} & \left(N_{e,ij}^{yy} \right)_{(3 \times 3)} \end{pmatrix}$$

A matriz convectiva global é montada de forma similar à descrita para a matriz de inércia, descrita pela equação B.16.

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}) = \sum_{e=1}^{N_{elem}} (\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}) + \hat{\mathbf{N}}_e(\mathbf{U})) \quad (\text{B.16})$$

B.3 O TERMO DISSIPATIVO

Para o termo dissipativo, primeiramente fazemos uso da formulação fraca de modo a reduzirmos a necessidade de continuidade das derivadas da função. A integração por partes desse termo será dada, pois, por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u \cdot \delta u + \nabla v \cdot \delta v) \cdot d\Omega - \\ &\quad \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \delta u + \nabla v \cdot \nabla \delta v) \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Aplicando o Teorema da Divergência ao primeiro termo do lado direito:

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u \cdot \delta u + \nabla v \cdot \delta v) \cdot d\Omega = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \delta u + \nabla v \cdot \delta v) \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma \quad (\text{B.18})$$

onde o contorno $\partial\Omega=\Gamma$. Esse termo corresponde às restrições no contorno, que serão detalhadas numa seção posterior.

Ao outro termo, aplica-se a aproximação de u e δu , já demonstradas acima. Considerando somente a integral e separando nas componentes de x e y , teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \delta u) \cdot d\Omega &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta U_{e,i}^t \cdot U_{e,j} \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_j(\vec{x})}{\partial x} \cdot d\Omega + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta U_{e,i}^t \cdot U_{e,j} \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial y} \cdot \frac{\partial h_j(\vec{x})}{\partial y} \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \delta v) \cdot d\Omega &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta V_{e,i}^t \cdot V_{e,j} \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_j(\vec{x})}{\partial x} \cdot d\Omega + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta V_{e,i}^t \cdot V_{e,j} \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial y} \cdot \frac{\partial h_j(\vec{x})}{\partial y} \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (B.20)$$

Portanto:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (\delta u) \cdot d\Omega = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta U_{e,i}^t \cdot U_{e,j} \cdot (a_i \cdot a_j + b_i \cdot b_j) \cdot \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (B.21)$$

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla (\delta v) \cdot d\Omega = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta V_{e,i}^t \cdot V_{e,j} \cdot (a_i \cdot a_j + b_i \cdot b_j) \cdot \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (B.22)$$

Denominando $\mathbf{d}_e$ a matriz dissipativa local calculada por:

$$\mathbf{d}_{e,ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [(a_i \cdot a_j + b_i \cdot b_j) \cdot S_e] \quad (B.23)$$

chegamos à expressão discreta do termo dissipativo, ou seja:

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \delta u + \nabla v \cdot \nabla \delta v) \cdot d\Omega = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \quad (B.24)$$

onde, como no caso da matriz de inércia, a matriz de dissipação global é dada

por $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{(n \times n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{(n \times n)} \end{pmatrix}_{(2n \times 2n)}$ e seu procedimento de montagem é sumarizado por:

$$\mathbf{d} = \sum_{e=1}^{Nelem} (\mathbf{d} + \mathbf{d}_e) \quad (B.25)$$

B.4 O TERMO DE PRESSÃO

O tratamento dado ao termo de pressão é similar ao do termo dissipativo, que consiste em integrar o mesmo por partes.

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \delta \mathbf{u} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (p \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot d\Omega - \int_{\Omega} p \cdot (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot d\Omega \quad (\text{B.26})$$

Aplicando o Teorema da Divergência ao primeiro termo do lado direito:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (p \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot d\Omega = \int_{\partial\Omega} p \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma \quad (\text{B.27})$$

Esse termo também corresponde a uma restrição do contorno e será discutido numa seção posterior.

Quanto ao outro termo, podemos escrevê-lo em termos de suas componentes, o que nos dará:

$$\int_{\Omega_e} p \cdot (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot d\Omega_e = \int_{\Omega_e} p \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} \cdot d\Omega_e + \int_{\Omega_e} p \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial y} \cdot d\Omega_e \quad (\text{B.28})$$

Trataremos separadamente cada componente e, assim, aplicando a aproximação da pressão e da velocidade chegaremos a:

$$\int_{\Omega_e} p \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta U_{e,i}^t \cdot P_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i}{\partial x} \cdot h_j \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{U}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,x} \cdot \mathbf{P}_e \quad (\text{B.29})$$

$$\text{onde } \mathbf{R}_{e,x} = \frac{S_e}{3} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}.$$

De forma similar

$$\int_{\Omega_e} p \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial y} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta V_{e,i}^t \cdot P_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} \frac{\partial h_i}{\partial y} \cdot h_j \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{V}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,y} \cdot \mathbf{P}_e \quad (\text{B.30})$$

$$\text{com } \mathbf{R}_{e,y} = \frac{S_e}{3} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, o termo global assumirá a seguinte forma:

$$\int p \cdot (\nabla \delta u) \cdot d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{B.31})$$

$$\text{com } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x \\ \mathbf{R}_y \end{bmatrix}_{(2n \times n)}.$$

A matriz $\mathbf{R}$ representa o operador gradiente. Sua construção pode ser sumarizada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(i, j) &= \sum_{e=1}^{Nelem} (\mathbf{R}(i, j) + \mathbf{R}_{e,x}(i, j)) \\ \mathbf{R}(i + n, j) &= \sum_{e=1}^{Nelem} (\mathbf{R}(i + n, j) + \mathbf{R}_{e,y}(i, j)) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

B.5 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Separando a equação da continuidade em suas componentes, teremos:

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \delta p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \delta p \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot d\Omega = 0 \quad (\text{B.33})$$

Aplicando-se à equação da continuidade as aproximações de u e δp , teremos:

$$\int_{\Omega_e} \delta p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot U_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} h_i \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x} \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,x}^t \cdot \mathbf{U}_e \quad (\text{B.34})$$

onde $\mathbf{R}_{e,x}^t$ corresponde à matriz transposta a matriz $\mathbf{R}_{e,x}$ apresentada na seção anterior.

De forma similar

$$\int_{\Omega_e} \delta p \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot V_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} h_i \cdot \frac{\partial h_j}{\partial y} \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,y}^t \cdot \mathbf{V}_e \quad (\text{B.35})$$

onde $\mathbf{R}_{e,y}^t$ corresponde à matriz transposta a matriz $\mathbf{R}_{e,y}$ apresentada na seção anterior.

Desta maneira, o termo global assumirá a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot d\Omega = \delta \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} \quad (\text{B.36})$$

A matriz $\mathbf{R}^t$ representa o operador divergente. Sua construção pode ser obtida pela simples transposição do operador gradiente.

B.6 O CONTORNO

Agrupando os termos de contorno da pressão e do termo dissipativo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \delta u + \nabla v \cdot \delta v) \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma - \int_{\partial\Omega} (p \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\left(-p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \delta u + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta v \right) \cdot n_x \cdot d\Gamma + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(\left(-p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \delta v + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \delta u \right) \cdot n_y \cdot d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

No limite direito da malha n_y é nula restando, portanto, apenas o primeiro termo do lado direito da equação. Como a condição de contorno imposta foi de *outflow*, prevê-se que tal fronteira está suficientemente afastada do cilindro a ponto de não mais sofrer qualquer influência da perturbação por ele causada. Logo, as derivadas em x serão nulas e, como a pressão ao longe também o é, o termo de contorno é nulo nessa fronteira.

Na parede do cilindro e nas fronteiras onde foi imposta condição de contorno essencial, o termo do lado direito representa as forças de vínculo presentes nas mesmas. Organizando melhor os termos da equação B.37, pode-se decompor os termos de modo que estes representem as forças nas direções x e y , dadas pelas equações B.38 e B.39:

$$F_x = \int_{\partial\Omega} \left(\left(-p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot n_x + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y \right) \cdot \delta u \cdot d\Gamma \quad (\text{B.38})$$

$$F_y = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_x + \left(-p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot n_y \right) \cdot \delta v \cdot d\Gamma \quad (\text{B.39})$$

B.7 O CÁLCULO DA PRESSÃO

Aplicando o Método das Penalidades (e o Princípio dos Trabalhos Virtuais), a equação da continuidade no formato integral pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega = -\varepsilon \cdot \int_{\Omega} \delta p \cdot p \cdot d\Omega \quad (\text{B.40})$$

Separando o termo da esquerda em suas componentes, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \delta p \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot d\Omega = -\varepsilon \cdot \int_{\Omega} \delta p \cdot p \cdot d\Omega \quad (\text{B.41})$$

Aplicando-se à equação da continuidade as aproximações de u , p e δp , de maneira análoga à realizada na seção B.5, teremos na direção x :

$$\int_{\Omega_e} \delta p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot U_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} h_i \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x} \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,x}^t \cdot \mathbf{U}_e \quad (\text{B.42})$$

E, de forma similar, o termo na direção y será dado por:

$$\int_{\Omega_e} \delta p \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot V_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} h_i \cdot \frac{\partial h_j}{\partial y} \cdot d\Omega_e = \delta \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{R}_{e,y}^t \cdot \mathbf{V}_e \quad (\text{B.43})$$

Já o termo da direita será dado por :

$$\varepsilon \cdot \int_{\Omega_e} \delta p \cdot p \cdot d\Omega_e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta P_{e,i} \cdot P_{e,j} \cdot \int_{\Omega_e} h_i \cdot h_j \cdot d\Omega_e = \varepsilon \cdot \delta \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{P}_e \quad (\text{B.44})$$

onde $\mathbf{m}_e$ é a matriz de massa local para um dado elemento, definida na seção B.1.

Desta maneira, a equação B.40 assumirá a seguinte forma discreta, em termos globais:

$$\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = -\varepsilon \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{B.45})$$

onde $\mathbf{m}$ representa a matriz de massa global, montada a partir da equação B.8.

Rearranjando os termos, obtêm-se:

$$\mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{P} = -\frac{\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U}}{\varepsilon} \quad (\text{B.46})$$

Neste ponto, fazemos as seguintes definições:

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{B.47})$$

$$\mathbf{R}_m^t = \mathbf{m}^{-1/2} \cdot \mathbf{R}^t \quad (\text{B.48})$$

Conseqüentemente, o operador gradiente pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}^{-1/2} \quad (\text{B.49})$$

Assim, a pressão, já ponderada pela área dos elementos, será calculada por:

$$\mathbf{P}_m = -\frac{\mathbf{R}_m^t \cdot \mathbf{U}}{\varepsilon} \quad (\text{B.50})$$

APÊNDICE C - RESULTADOS TABELADOS

Tabela C.1: Principais resultados obtidos nas simulações.

Re	St	Cd médio	Cl rms	Forma da Matriz de Inércia
100	0,1700	1,3940	0,2436	concentrada
100	0,1700	1,3926	0,2416	consistente
140	0,1860	1,3715	0,3524	consistente
180	0,1953	1,3740	0,4508	consistente
200	0,2005	1,3794	0,4966	consistente
250	0,2088	1,3958	0,5929	consistente
300	0,2146	1,4121	0,6688	consistente
350	0,2196	1,4266	0,7296	consistente
400	0,2233	1,4403	0,7787	consistente
450	0,2262	1,4484	0,8156	consistente
500	0,2291	1,4569	0,8476	consistente
550	0,2314	1,4643	0,8742	consistente
600	0,2321	1,4701	0,8958	consistente
600	0,2321	1,4703	0,8967	concentrada