UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA

PEDRO NERY LAVINAS

Escoamento ao redor de um cilindro circular: derivação da equação de Landau a partir das equações de Navier-Stokes

São Paulo

2010

#### PEDRO NERY LAVINAS

### Escoamento ao redor de um cilindro circular: derivação da equação de Landau a partir das equações de Navier-Stokes

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Eng. Mecânica de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Lavinas, Pedro Nery

Escoamento ao redor de um cilindro circular: derivação da equação de Landau a partir das equações de Navier-Stokes / P.N. Lavinas. -- São Paulo, 2010. p. 83

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Hidrodinâmica 2. Sistemas não lineares 3. Métodos assintóticos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

### RESUMO

Este trabalho aborda o escoamento incompressível ao redor de um cilindro circular. A tese que se quer defender, com base em experimentos numéricos, é: A equação de Landau pode ser obtida a partir das equações de Navier-Stokes por uma análise de estabilidade não-linear global. A teoria produz um procedimento bem-definido para determinação dos coeficientes da equação de Landau, permitindo assim a sua interpretação como um modelo simplificado (*equa-ções reduzidas de Navier-Stokes*) para a predição das forças aplicadas pelo fluido ao cilindro, que podem ser comparados com resultados experimentais. O modelo não-linear se baseia em uma teoria assintótica que, como se sabe, tem sua faixa de validade no espaço de parâmetros determinada a posteriori, por meio da própria comparação com dados de laboratório. Resultados na faixa 46 < Re < 80 são apresentados. Descobriu-se, que a faixa de aplicabilidade da teoria como aqui exposta é restrita, não excedendo em muito o valor crítico do número de Reynolds. Argumentos são expostos para justificar esta afirmação e possíveis maneiras de modificar a teoria para estender esta faixa são apresentadas.

São reportados, ainda, teoria e resultados sobre um novo tipo de condição de contorno, denominado *impedância fluida*, que permite reduzir o tamanho do domínio de cálculo necessário para simulação de escoamentos externos, comparativamente à comumente utilizada condição de "*outflow*". Neste caso, abordou-se a faixa  $20 \le Re \le 600$ .

**Palavras-chave**: Escoamento ao redor de um cilindro, Análise de estabilidade global não-linear, Equação de Landau

### ABSTRACT

This work adresses the incompressible flow around a circular cylinder. What we want to prove, based on numerical experiments, reads: The Landau equation can be derived from the Navier-Stokes equations by means of a global nonlinear stability analysis. The theory leads to a procedure for calculating numerically the coefficients of these equation, thus permitting their interpretation as a simplified model - *reduced Navier-Stokes equation* - for the prediction of the forces applied by the fluid on the cylindrical structure, which can be compared against experimental data. The nonlinear model is based on an asymptotic theory which, as is known, has its validity range in the parameter space determined *a posteriori*. The focus lies in the range  $46 \le Re \le 80$ . It was found that the theory's applicability range as presented here is restricted to a small neighborhood of  $Re_c$ . This affirmation in justified and possible means of modifying the theory in order to enlarge this range are proposed.

Theory and results concerning a new type of boundary condition called *fluid impedance* are also reported, permitting the reduction of the domain size necessary for simulating external flows, comparatively to the commonly used outflow condition. In this case, the range  $20 \leq Re \leq 600$  was considered.

**Keywords**: Flow around a circular cylinder, Global nonlinear stability analysis, Landau equation

# **SUMÁRIO**

Li	Lista de Figuras iii			
Li	sta d	e Tabelas	v	
Li	sta d	e Siglas	vi	
Li	sta d	e Símbolos	vii	
1	Intro	odução	1	
2	Con	textualização do problema	6	
	2.1	Estabilidade Hidrodinâmica	7	
	2.2	Fenomenologia do escoamento para $Re < 180$	9	
	2.3	Modelagem fenomenológica por equações de amplitude	13	
	2.4	Recapitulação	16	
3	Тео	ria e métodos	17	
	3.1	Definição do problema contínuo	17	
	3.2	Formulação do problema discreto	19	
	3.3	Condição de contorno de impedância fluida	21	
	3.4	Equação de Landau	28	
	3.5	Solução assintótica do escoamento bidimensional	30	
	3.6	Simulação Temporal do Escoamento Bi-Dimensional	38	
	3	6.6.1 Método de Marcha no Tempo	39	
	3	6.6.2 Decomposição em série de Fourier	42	

4	Res	ultado	DS	44
	4.1	Cond	ição de contorno de impedância fluida	44
	4	k.1.1	Escoamento estacionário	44
	4	1.1.2	Escoamento transitório	46
	4.2	Soluç	ao assintótica: modelo de Landau	47
	4	1.2.1	Domínio e malha computacional	47
	4	1.2.2	Campo-base	48
	4	1.2.3	Estabilidade do campo-base	50
	4	1.2.4	Modo instável e demais campos da solução assintótica	53
	4	4.2.5	Modo adjunto	56
	4	4.2.6	Coeficientes de Landau	57
	4	1.2.7	Frequência de oscilação não-linear	59
	4.3	Discu	Issão	59
5	Con	clusã	ο	66
Re	ferêr	ncias		68
Ap	pêndi	ce A ·	- Procedimento de Renormalização $\Omega^+  o \Omega$	73
	A.1	Camp	oo-base	73
	A.2	Mode	o instável	74
	A.3	Term	os em segunda e terceira ordens	75
	A.4			
		Mode	Adjunto	75
	A.5	Modo Coefi	o Adjunto	75 75
	A.5 A.6	Mode Coefi Harm	o Adjunto ciente de Landau e Amplitude iônicos da Solução Assintótica	75 75 76

Apêndice B - Estudo de convergência quanto ao refinamento de malha..... 78

# **LISTA DE FIGURAS**

Figura - 1.1	Esteira de vórtices de von Kármán na esteira de um cilindro circular. Escoa-	
	mento da esquerda para a direita, $Re = 105$ (VAN DYKE, 1982)	1
Figura - 2.1	Visualização do escoamento para $Re \ll 1$ e $Re = 26$ (Fonte: van Dyke	
	(1982)).	9
Figura - 2.2	Modos paralelo e oblíquo de emissão de vórtices. Escoamento de baixo para	
	cima, $Re = 95$	12
Figura - 3.1	Representação esquemática do domínio computacional $\Omega^+$ ; $l_i$ , $l_h$ e $l_o$ são as	
	distâncias do centro do cilindro às fronteiras a montante, acima e a jusante.	18
Figura - 3.2	Região $\Omega$ semi-circular e corte na esteira	22
Figura - 4.1	Escoamento estacionário: coeficiente de arrasto e comprimento da bolha para	
	várias dimensões de domínio.	44
Figura - 4.2	Escoamento estacionário: influência da impedância sobre o coeficiente de	
	arrasto e comprimento da bolha.	45
Figura - 4.3	Refinamento da malha nas proximidades do cilindro.	48
Figura - 4.4	Componente horizontal de velocidade $u_s(\mathbf{x})$ e linhas de corrente do escoa-	
	mento estacionário para $Re = 60$ .	49
Figura - 4.5	Linhas de corrente para os campos estacionário e médio	49
Figura - 4.6	Partes real ( $\sigma$ ) e imaginária ( $\omega$ ) associados ao modo instável E	50
Figura - 4.7	Metade superior: $U_1$ (Landau); Metade inferior $H_1$ (Navier-Stokes) - parte	
	real da velocidade horizontal	53
Figura - 4.8	Amplitudes do modo instável (Landau) e do primeiro harmônico (Navier-	
	Stokes), ambas normalizadas pela norma do campo médio $\ \mathbf{H_0}\ .$	54
Figura - 4.9	Metade superior: $U_2$ (Landau); Metade inferior $H_2$ (Navier-Stokes) - parte	
	real da velocidade vetical	54
Figura - 4.10	Amplitude do segundo harmônico no modelo de Landau e na simulação tem-	
	poral das equações de Navier-Stokes.	55

Figura - 4.11 Metade superior: $U_3$ (Landau); Metade inferior $H_3$ (Navier-Stokes) - parte	
real da velocidade horizontal	55
Figura - 4.12 Amplitude do terceiro harmônico no modelo de Landau e na simulação tem-	
poral das equações de Navier-Stokes.	56
Figura - 4.13 Modo adjunto, $Re = 50$	57
Figura - 4.14 Coeficientes $\mu$ e $c_3$	58
Figura - 4.15 $\omega + \Delta \omega$ e $\omega_{St}$ vs. $Re$	59
Figura - 4.16 Normas dos harmônicos das soluções assintótica (a) e temporal (b), normali-	
zadas por $\ \mathbf{H_0}\ $	60
Figura - 4.17 Espectro do escoamento para $Re = 46, 6$ . Triângulos: modos antissimétricos;	
Círculos: modos simétricos. Fonte: (SIPP; LEBEDEV, 2007).	62
Figura - 4.18 Vorticidade $\omega_z$ : $(-1 \le \omega_z \le 1)$ do modo com crescimento transiente ótimo	
para $\tau = 8$	63
Figura - B.1 Progressão do refinamento da malha.	82
Figura - B.2 Progressão do refinamento da malha nas vizinhanças do cilindro	82
Figura - B.3 Resultados do refinamento adaptativo de malha. $Re = 50$ .	83

# LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Erros nos cálculos de $C_d$ e $L/D$ para as três condições de contorno utilizadas	
	na fronteira a jusante.	46
Tabela 4.2	Influência da condição de contorno em $\partial \Omega_o$ . Erros entre parênteses	46
Tabela B.1	Número de nós e de g.d.l. para cada malha.	82

# LISTA DE SIGLAS

- MEF Método dos elementos finitos
- VIV Vibrações induzidas por vórtices
- ENS Equações de Navier-Stokes

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon_s$	Parâmetro de penalidade
λ	Autovalor associado ao modo instável
σ	Parte real do autovalor associado ao modo instável
ω	Parte imaginária do autovalor associado ao modo instável
$\mu$	Coeficiente de Landau
$\mu_r$	Parte real do coeficiente de Landau
$\mu_i$	Parte imaginária do coeficiente de Landau
ρ	Massa específica
$C_d$	Coeficiente de arrasto
heta	Ângulo de emissão de vórtices oblíqua
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
$U_{\infty}$	Velocidade do escoamento ao longe
D	Diâmetro do cilindro
$\mathbf{u}(\mathbf{x};t)$	Campo contínuo de velocidade
$p(\mathbf{x};t)$	Campo contínuo de pressão
$\mathbf{U}(t)$	Campo discreto de velocidade
$\mathbf{P}(t)$	Campo discreto de pressão
$U_i(t)$	Valor nodal da velocidade u no nó $i$
$V_i(t)$	Valor nodal da velocidade v no nó $i$
$\hat{\mathbf{U}}(t)$	Transformada de Fourier do campo discreto de velocidade
$\mathbf{P}(t)$	Campo discreto de pressão
$\Omega^+, \Omega$	Domínios de cálculo do escoamento
$\partial \Omega$	Fronteira do domínio = $\partial \Omega_i \cup \partial \Omega_s \cup \partial \Omega_c \cup \partial \Omega_o$

$\partial\Omega_n$	Porção da fronteira com condições naturais de contorno
$\partial \Omega_v$	Porção da fronteira com condições essenciais de contorno
n	Versor normal à fronteira $\partial \Omega$ , apontando para fora dela
$l_i, l_h, l_o$	Distâncias do centro do cilindro às fronteiras a montante, lateral e a jusante
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mathbf{N}(\mathbf{U})$	Matriz de convecção
$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U_s})$	Matriz de convecção linearizada ao redor do campo-base
D	Matriz de difusão
R	Matriz gradiente
$\mathbf{R}^{t}$	Matriz divergência
$\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$	Vetor de forças de vínculo
$\mathbf{F_n}$	Vetor de forças externas na fronteira do domínio
$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}^{wk}$	Integral da impedância linear na esteira
$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}_2^{wk}$	Integral da impedância de Bernoulli na esteira
$U_{f_n}(t)$	Coeficiente de Fourier do perfil de velocidade u na fronteira onde se aplica impe- dância
$V_{f_n}(t)$	Coeficiente de Fourier do perfil de velocidade $\mathbf{v}$ na fronteira onde se aplica impedância
$\mathbf{K}^w k$	Matriz da impedância linear
$\mathbf{M}^w k$	Matriz de massa da impedância
$\mathbf{N}^w k(\mathbf{U})$	Matriz da impedância de Bernoulli
A(t)	Amplitude do modo instável
$\phi(t)$	Fase do modo instável
$A_{LC}$	Amplitude do modo instável na saturação (ciclo-limite)
$\omega_{LC}$	Frequência de oscilação no ciclo-limite
$\Delta \omega$	<i>"shift"</i> de frequência
$\mathbf{Q_n}$	Vetor contendo $(\mathbf{U_n} \ \mathbf{P_n})^t$

$\mathbf{U_s}$	Campo-base (escoamento estacionário)
$U_n$	n-ésimo harmônico da solução assintótica
$H_n$	n-ésimo harmônico da solução temporal
L	Comprimento da bolha recirculante
$\bar{C}_d$	Coeficiente de arrasto médio
$C_{L_{max}}$	Coeficiente de sustentação máxima

### 1 INTRODUÇÃO

Muito já se pesquisou a respeito do escoamento ao redor de um cilindro circular, não só pela infinidade de aplicações de engenharia que envolvem estruturas cilíndricas sujeitas a escoamentos externos, mas também por ser esta geometria um protótipo de corpo rombudo. Apesar dos esforços, e também em decorrência deles, existe ainda uma grande quantidade de problemas em aberto - fundamentais e de ordem prática. O presente trabalho aborda uma questão que abarca ambos os aspectos: aplicabilidade de modelos fenomenológicos e suas justificativas racionais a partir de princípios fundamentais.

A característica marcante deste escoamento é a formação de uma carreira oscilante de vórtices a jusante do cilindro, denominada na literatura de *"esteira de vórtices de Von Kármán"*, como mostra a figura 1.1.



Figura 1.1: Esteira de vórtices de von Kármán na esteira de um cilindro circular. Escoamento da esquerda para a direita, Re = 105 (VAN DYKE, 1982)

É evidente o apelo estético da imagem. Indo além, ela ilustra a razão pela qual este escoamento é tão importante em engenharia: vórtices são desprendidos alternadamente, de forma que o campo de pressão seja oscilatório. Assim, o fluido força o cilindro lateralmente ora para um lado, ora para o outro, o que pode induzir uma oscilação na estrutura cilíndrica ao redor da qual o fluido escoa. A este movimento dá-se o nome de VIV - Vibração Induzida por Vórtices (em inglês: *"Vortex-Induced Vibrations"*). Caso a estrutura seja forçada em uma de suas frequências naturais, poderá entrar em ressonância, com movimento de amplitude crescente até um eventual colapso. Por esta razão, é de extrema importância que se leve em consideração a possibilidade de ocorrência de VIV no projeto de estruturas sujeitas a escoamentos externos.

Exemplos de estruturas em que ocorre VIV são inúmeros: virtualmente qualquer corpo não-afilado que se desloque a velocidades moderadas pelo ar ou pela água ficará sujeito a esta excitação vibratória. Edifícios altos oscilam de maneira perceptível sob a ação do vento. Pontes e viadutos têm seus pilares e cabos de sustentação sujeitos à vibração, também causada pelo vento. Talvez o exemplo mais dramático seja o colapso da ponte pênsil de Tacoma Narrows, nos EUA, em 1940. "*Varetas*" contendo pastilhas de urânio ficam sujeitas a VIV em virtude do escoamento de água ao seu redor em reatores nucleares. As tubulações que conduzem petróleo de reservatórios sob o leito dos oceanos até à superfície, chamados de "*risers*", bem como os cabos e linhas de ancoragem que conectam as plataformas flutuantes ao fundo do mar, por serem extremamente longas e esbeltas, são especialmente afetadas por este fenômeno, e é com esta aplicação em especial que se relaciona a pesquisa mais geral em que este trabalho está inserido.

Na última década, o Brasil atingiu a auto-suficiência em petróleo. Isso gera para o país dividendos financeiros, comerciais e geopolíticos inegáveis. Os avanços recentes foram marcantes, e a postura da Petrobras de incentivar a pesquisa em universidades nacionais certamente contribuiu para isso. Em especial, sublinha-se a capacidade nacional de exploração em águas profundas e ultraprofundas (mais de 2000m de lâmina d'água). A recente descoberta de grandes reservatórios ultraprofundos na bacia de Santos vem corroborar a importância e o retorno do investimento em pesquisa e lança novos desafios para a empresa e os centros de pesquisa que com ela colaboram. Este trabalho pretende contribuir para o enfrentamento de alguns desses desafios no futuro, fornecendo bases para o desenvolvimento de uma ferramenta de predição do comportamento dinâmico de *risers* sujeitos a VIV.

É difícil exagerar quando se pensa nas proporções econômicas e ambientais do eventual colapso de um *riser*. Apesar de as tensões causadas pelo movimento oscilatório não serem capazes de promover seu rompimento, é certo que a falha por fadiga pode vir a ocorrer no decorrer da longa vida útil para a qual estas estruturas são projetadas. Evita-se isso por meio de mecanismos supressores de vibração, sendo comum o uso de fitas metálicas denominadas *"strakes"*, dispostas de forma helicoidal ao redor do *riser*, com o objetivo de fazer com que as forças que as correntes marítimas aplicam à estrutura variem continuamente de direção ao longo de seu comprimento e o movimento oscilatório seja atenuado. Apesar de bastante eficiente, o processo de instalação é caro: os *risers* são transportados em bobinas e, por isso, a eventual solda de strakes não pode ser feita previamente em terra; ela ocorre *in loco*, imediatamente antes de seu lançamento ao mar para instalação na plataforma.

A supressão de vibração por *strakes* é uma opção conservadora, mas necessária. A questão é que a interação fluido-estrutura que ocorre neste caso ainda apresenta diversas questões em aberto, sendo por isso objeto de pesquisa em diversos laboratórios de física e engenharia mundo afora. Experimentos e suas interpretações são dificultados, entre outros, pela elevada razão de aspecto dos *risers* (razão comprimento/diâmetro bem maior que 1000) e pela impossibilidade de se reproduzir em dimensões de laboratório os perfis de correntes marítimas existentes onde eles operam. Simulações numéricas falham na predição das amplitudes de oscilação da estrutura, em larga medida porque, apesar do elevado poder computacional de que se dispõe hoje em dia, resolver adequadamente as escalas do escoamento em um domínio tão grande quanto o comprimento do *riser* ainda é infactível; além disso, não é tarefa simples acoplar os modelos de estrutura e de escoamento para este problema de interação hidroelástica.

Neste contexto, a abordagem mais bem-sucedida é a utilização de modelos simplificados que sejam capazes, com custo computacional moderado, de descrever com alguma exatidão os fenômenos que se observa. Merecem destaque os modelos que condensam toda a influência do fluido sobre a estrutura considerando-o como um oscilador acoplado a ela, forçando-a. A dinâmica da esteira próxima é descrita simplesmente como uma única "variável fluida" que modela o comportamento flutuante da esteira de von Kármán. Supõe-se, de forma heurística, que esta variável satisfaz uma equação diferencial não-linear cuja solução tem comportamento dinâmico semelhante à série de força aplicada pelo fluido sobre o cilindro observada experimentalmente. Exemplos de tais equações são a de van der Pol e a de Rayleigh. Este "oscilador fluido" é então acoplado a um oscilador estrutural de também um grau de liberdade. Tais modelos são ditos fenomenológicos porque não são derivados a partir de princípios físicos mais fundamentais (no caso, as leis da mecânica clássica); são equações diferenciais cujas soluções apresentam comportamento similiar aos fenômenos observados. Destacam-se aí os modelos de Hartlen e Currie (1970), Iwan e Blevins (1975) e Facchinetti, Langre e Biolley (2004). Uma boa compilação destes modelos, renormalizados e reescritos de forma a facilitar a comparação entre eles, foi feita na dissertação de mestrado de Cunha (2005).

Os modelos supracitados não faziam qualquer menção à estrutura mais detalhada da esteira do escoamento. Na década de 1980, ideias vindas da teoria de estabilidade hidrodinâmica proporcionaram um novo olhar sobre o velho problema: reconheceu-se, na esteira de vórtices de von Kármán para  $Re \approx Re_{cr}$  mas não apenas nesta faixa, a estrutura de uma bifurcação de Hopf supercrítica, em que um campo de escoamento estacionário perde a sua estabilidade e evolui para uma oscilação **global** da esteira, sustentada e limitada pelo próprio escoamento: um ciclo-limite, na linguagem dos sistemas dinâmicos (MATHIS; PROVANSAL; BOYER, 1984), (PROVANSAL; MATHIS; BOYER, 1987), (JACKSON, 1987). Tal abordagem difere e extrapola os modelos citados no parágrafo anterior porque não mais se almeja a mera modelagem dos efeitos dinâmicos do escoamento sobre a estrutura; agora se quer descrever a oscilação do campo de escoamento como um todo com uma amplitude descrita por uma equação diferencial simples. A equação de Landau, a ser discutida tecnicamente no cap. 3, descreve de forma genérica sistemas que apresentam este comportamento. A extensão destas ideias para sistemas distribuídos, como os *risers*, em que as ocilações no plano da seção transversal ocorrem de maneira distribuída ao longo de seu comprimento, foi primeiramente exposta por Albaréde, Provansal e Boyer (1990), que apresentaram a equação de Ginzburg-Landau como modelo fenomenológico. Esta equação, por sua vez, surgiu no estudo do fenômeno da supercondutividade (GINZBURG; LANDAU, 1950).

Apesar da simplicidade aparentemente exagerada, predições confiáveis de VIV são obtidas por modelos fenomenológicos, com coeficientes ajustados experimentalmente. Além do poder preditivo em situações práticas, a modelagem fenomenológica possui o grande mérito de fornecer um ambiente mais simples, sujeito a análises matemáticas mais diretas, para se apreciar o fenômeno real evitando a complexidade das equações governantes. De fato, as equações de Landau e Ginzburg-Landau são bem mais simples que as de Navier-Stokes. Poder estudar fenômenos regidos por estas no âmbito daquelas é, por esta razão, interessante.

Por outro lado, a formulação heurística destes modelos faz com que eles possam ser utilizados, no máximo, para interpolar valores dentro dos intervalos de parâmetros nos quais os experimentos foram realizados, mas jamais extrapolá-los. Assim sendo, tais modelos, enquanto fenomenológicos, seriam de utilidade limitada para a predição do comportamendo dos *risers* justamente nas regiões do espaço de parâmetros mais difíceis de se reproduzir em experimentos físicos ou numéricos. Somente estabelecendo a relação entre as equações governantes e os modelos fenomenológicos, bem como um procedimento de cálculo dos seus coeficientes, é que seria possível estudar quantitativamente a dinâmica complexa do escoamento no âmbito de equações diferenciais mais simples.

Neste contexto, são dois os obetivos maiores da pesquisa de que este trabalho faz parte:

- do ponto de vista acadêmico e teórico, é interessante conseguir demonstrar a relação existente entre os modelos de Landau e Ginzburg-Landau e as equações de Navier-Stokes;
- quanto às aplicações práticas, a intenção é, no longo prazo, desenvolver uma ferramenta de projeto de *risers* capaz de realizar previsões precisas do seu comportamenteo dinâmico

sob a ação de VIV, baseada em uma equação de Ginzburg-Landau estendida para conter a interação hidrolástica.

Os dois objetivos são interdependentes, uma vez que a consecução do segundo depende de que seja alcançado o primeiro, e é a intenção de se atingir o segundo que sustenta o investimento em pesquisa no primeiro.

O ponto de partida da derivação das equações de Landau e Ginzburg-Landau é a determinação do ponto de equilíbrio das equações de Navier-Stokes: um escoamento estacionário. Este campo de escoamento, doravante denominado **campo-base**, é o cerne da teoria assintótica e se mostrou muito suscetível ao tamanho do domínio computacional utilizado para calculá-lo. Tentou-se contornar este problema com um novo tipo de condição de contorno, denominado impedância fluida, com bons resultados.

Não se conhece, na literatura, trabalhos em que a equação de Ginzburg-Landau tenha sido derivada das equações de Navier-Stokes, excetuando-se, claro, o artigo de Aranha (2004), do qual algumas predições se tenta corroborar nesta tese. O ineditismo, aliado ao interesse no assunto delineado nesta introdução e aprofundado na revisão bibliográfica, justificam a realização da pesquisa.

Além dos trabalhos reportados nesse texto, outras atividades foram realizadas. Tentouse desenvolver uma impedância baseada na solução do escoamento potencial a montante e lateralmente ao cilindro. Individualmente, foram obtidos bons resultados, mas a utilização das três impedâncias (viscosa na esteira e potencial a montante e lateralmente) esbarrou em dificuldades numéricas cuja investigação desviaria o foco do objetivo principal. Além disso, esforços foram dedicados à determinação dos coeficientes de Landau e Ginzburg-Landau em uma faixa mais larga (Re < 300) com um campo-base que era o ponto de equilíbrio de uma equação de Navier-Stokes ligeiramente modificada (ARANHA et al., 2009), infelizmente com pouco sucesso. Foi então que se decidiu abordar o problema mais elementar, mas por enquanto não menos importante, de determinar os coeficientes da equação de Landau para  $Re \approx R_{cr}$ . Pela valorização de uma apresentação mais concisa, estas outras atividades não serão reportadas no texto.

O trabalho está organizado da seguinte forma: primeiramente, apresenta-se no cap. 2 uma revisão bibliográfica para contextualizar o trabalho dentro do que já foi feito sobre o assunto. No cap. 3, a formulação teórica é apresentada em conjunto com os métodos utilizados para a obtenção de predições quantitativas, apresentadas e disctuidas no cap. 4. No cap. 5, conclusões são deduzidas e traçam-se algumas direções em que pode seguir a pesquisa após a defesa da tese.

### 2 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo localiza o presente trabalho no desenvolvimento da compreensão que se tem a respeito do tema: **modelagem do escoamento ao redor de um cilindro circular por equações de amplitude**. Primeiramente faz-se um breve apanhado do desenvolvimento histórico da teoria de estabilidade hidrodinâmica, com especial atenção à aplicação de ideias advindas da teoria de sistemas dinâmicos herdadas pelo presente trabalho.

Na sequência, são discutidos artigos versando sobre a fenomenologia do escoamento bidimensional ao redor de um cilindro fixo. É apresentada a controvérsia que existiu a respeito da curva St - Re e sua relação com efeitos tridimensionais deste escoamento para Re < 180desde as primeiras medições de Roshko (1954) até a explicação fornecida por Williamson (1989), que de certa forma encerrou a questão. Este ponto é importante por dois motivos:

- para se saber contra quais resultados experimentais as predições da teoria devem ser comparadas: apenas contra aqueles em que se garantiu a bidimensionalidade do escoamento;
- a extensão da teoria aqui apresentada para considerar efeitos tridimensionais, derivando a equação de Ginzburg-Landau (ARANHA, 2004), terá suas predições futuramente comparadas com resultados experimentais de Leweke e Provansal (1994), Albaréde e Provansal (1995), Monkewitz, Williamson e Miller (1996), versando sobre a dinâmica das referidas tridimensionalidades em sua região estável do espaço e parâmetros  $c_1 c_3$  Shraiman et al. (1992).

Em seguida, são abordados trabalhos acerca da intersecção dos campos: a estabilidade do escoamento ao redor de um cilindro. Trata-se de sua modelagem fenomenológica por equações de amplitude, utilizando modelos de Landau e Ginzburg-Landau por meio de experimentos em laboratório ou de simulações numéricas. Embora alguns trabalhos já tenham desenvolvido metodologias para obter os coeficientes de Landau numericamente (DUŠEK; LE GAL; FRAUNIÉ, 1994), (SIPP; LEBEDEV, 2007), o procedimento aqui apresentado é novo e, mais importante, pode ser estendido para incluir efeitos tri-dimensionais com vistas a obter de forma racional a equação de Ginzburg-Landau (ARANHA, 2004). Este é o objetivo maior da pesquisa em que se insere a presente contribuição e que ainda não foi alcançado. Por essa razão, a revisão bibliográfica contemplará artigos que tratam do escoamento bidimensional para  $Re \leq 180$ , faixa em que o mesmo é estável a perturbações tri-dimensionais (WILLIAMSON, 1989), (BARKLEY; HENDERSON, 1996).

#### 2.1 Estabilidade Hidrodinâmica

Os problemas fundamentais em estabilidade hidrodinâmica foram reconhecidos no final de século XIX. Os primeiros estudos teóricos em dinâmica de fluidos que se pode caracterizar como de estabilidade foram realizados por Helmholtz (1868) e Kelvin (1871) abordando o surgimento de ondas na interface entre dois fluidos em escoamento paralelo, sendo o principal exemplo a ação do vento sobre lagos ou mares. Kevin determinou condições necessárias e suficientes para o surgimento de instabilidades neste escoamento. Ele se restringiu apenas à teoria invíscida, considerando apenas perturbações irrotacionais, mas mais tarde foi mostrado que perturbações rotacionais não são mais instáveis que as irrotacionais, por isso seu resultado é geral. Em (RAY-LEIGH, 1879) e (RAYLEIGH, 1880), foi aplicado o método de Kelvin para estudar a instabilidade de jatos, com o interesse de explicar fenômenos acústicos em chamas e em jatos de fumaça.

A esta época, o estudo da estabilidade de estruturas e sistemas mecânicos já estava bastante desenvolvida: a ideia consiste em linearizar as equações de movimento (de Lagrange ou Newton) e estudar a evolução no tempo de uma perturbação, determinando seus modos normais de vibração, bem como cada autovalor associado  $\lambda = \sigma + i\omega$ .  $\omega$  é a frequência de vibração da estrutura quando excitada no respectivo modo, e  $\sigma$  fornece a taxa de crescimento deste modo de vibrar:  $\sigma \leq 0$  significa que o modo de vibrar é estável: a amplitude de vibração vai a zero assintoticamente com o tempo; já  $\sigma > 0$  indica instabilidade: a amplitude de vibração daquele modo tende a aumentar. Nos trabalhos acima citados os autores aplicaram o método de modos normais à dinâmica de fluidos invíscidos, perturbando soluções de equilíbrio de escoamentos potenciais. O fato de as equações que regem tais escoamentos envolverem derivadas parciais, diferentemente das equações de movimento da dinâmica de sistemas de partículas, traz grandes dificuldades técnicas para a análise matemática de problemas em estabilidade hidrodinâmica (DRAZIN; REID, 1981).

Já na seara experimental, Reynolds (1883) detectou a transição do escoamento em um duto de um estado ordenado, laminar, para outro caótico, turbulento, ao aumentar a vazão. Mais importante, também determinou qual é o parâmetro importante, mais tarde denominado número de Reynolds, que ao ultrapassar certo valor fazia com que se observasse a ruptura do regime laminar e o início da transição para o regime turbulento. Este número, como se sabe, representa uma relação entre as ordens de grandeza de forças inerciais e viscosas. No contexto do presente trabalho, a maior importância desta contribuição de Reynolds foi a percepção de que a instabilidade deste e de outros escoamentos surge quando o efeito estabilizador da viscosidade não mais é capaz de contrabalancear o efeito desestabilizador das forças inerciais. Esta afirmação deve, porém, ser percebida de forma cuidadosa, uma vez que, por causar difusão de quantidade de movimento, a viscosidade pode também tornar instável um escoamento cuja contrapartida invíscida seja estável, em especial escoamentos cisalhantes paralelos ("*parallel shear flows*").

Pouco progresso foi feito até Orr (1907) e Sommerfeld (1908) derivarem a famosa equação que hoje carrega seus nomes. A ideia é simplificar as equações de Navier-Stokes sob as hipóteses de escoamento bidimensional quase-paralelo:

- $\mathbf{u} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k};$
- $v(x,y) \ll u(x,y);$
- $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1.$

Uma vasta gama de casos de escoamento de importância prática satisfaz, ao menos aproximadamente, as hipóteses acima, entre eles camadas-limite, jatos e camadas cisalhantes ("shear layers"). Tais hipóteses conduzem a uma linearização das equações de Navier-Stokes, que se transformam assim em um problema de valor característico em que as autofunções existem apenas se for satisfeita uma relação de dispersão a partir da qual se pode determinar a estabilidade ou não de perturbações infinitesimais com dados número de onda e frequência. Á época da derivação da equação de Orr-Sommerfeld, as teorias assintóticas não estavam suficientemente desenvolvidas para lidar com ela, por isso muito do trabalho subsequente em estabilidade hidrodinâmica consistiu em desenvolver métodos heurísticos de aproximação para soluções desta equação (HEISENBERG, 1924), (TOLLMIEN, 1929), (TOLLMIEN, 1947), (LIN, 1945), (LIN, 1955). Mais tarde, o avanço da capacidade computacional passou a permitir a solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld, o que passou a se chamar na literatura de análise de estabilidade numérica *local* e foi realizada no contexto do escoamento ao redor do cilindro por, entre outros, Yang e Zebib (1989). Hoje em dia, já há recursos computacionais para estudar a estabilidade global deste escoamento, e é nesta técnica (na verdade, uma extensão não-linear dela) que se baseia o presente trabalho. Uma breve revisão a seu respeito está apresentada na seção 2.3. Antes disso, discute-se a fenomenologia do escoamento bidimensional ao redor do cilindro.

### 2.2 Fenomenologia do escoamento para Re < 180

A esteira de vórtices de von Kármán ou instabilidade de Bénard-von Kármán herda esse nome dos cientistas pioneiros em seu estudo e análise no início do século passado (BÉNARD, 1908), (VON KÁRMÁN, 1911). A descrição aqui apresentada para o escoamento ao redor de um cilindro a baixos números de Reynolds se baseia, em larga medida, no artigo revisional de Williamson (1996) e em diversos trabahos lá referenciados.

Para Re < 5, observa-se um escoamento estacionário com linhas de corrente acompanhando a curvatura do cilindro (*"creeping flow"*), como mostra a figura 2.1a.



Figura 2.1: Visualização do escoamento para  $Re \ll 1$  e Re = 26 (Fonte: van Dyke (1982)).

A partir daí até  $Re = Re_c \approx 47$ , as linhas de corrente se separam do cilindro, formando uma bolha recirculante composta de dois vórtices estacionários, simetricamente em relação à direção do escoamento incidente (fig. 2.1b). O comprimento e a largura desta bolha aumentam com *Re*. O valor exato de *Re<sub>c</sub>* depende de fatores como nível de ruído externo e razão de aspecto do cilindro e foi motivo de muita controvérsia (MATHIS; PROVANSAL; BOYER, 1984). O valor hoje aceito é de aproximadamente 47 para cilindros de elevada razão de aspecto (MON-KEWITZ, 1996). Quando o número de Reynolds atinge o valor crítico, surge uma instabilidade que incialmente se localiza no final da bolha e que cresce temporal e espacialmente, com a esteira de von Kármán cobrindo uma extensa região a jusante (fig. 1.1). Trata-se, logo, de uma instabilidade absoluta (HUERRE; MONKEWITZ, 1990).

As primeiras medições extensivas da frequência de Strouhal neste escoamento foram feitas por Roshko (1954). Desde então, vários autores repetiram as medições, em aparatos experimentais distintos, observando descontinuidades na curva St - Re e publicando resultados que diferiam por até 20% entre si. A medição de frequências na esteira é um procedimento simples, mas que se mostrou extremamente sensível a mudanças no arranjo experimental. Estas disparidades e as razões das descontinuidades não explicadas na curva de Strouhal foram fonte de extensos debates.

Tritton (1959) observou uma descontinuidade na curva St - Re em Re = 100, por ele atribuída à transição de uma instabilidade surgida na esteira para uma outra, advinda da vizinhança imediata do cilindro, ao se aumentar o número de Re. Gaster (1969) estudou o escoamento ao redor de cones esbeltos e observou a existência de células de diferentes frequências ao longo de suas envergaduras, e com base nisso sugeriu que a descontinuidade observada por Tritton era devida a não-uniformidades no escoamento incidente. O imbróglio prosseguiu, com Tritton (1971) refazendo seus experimentos em um outro túnel de vento e observando novamente uma descontinuidade na curva, agora para Re = 110, e Gaster (1971) tentando defender sua tese com escoamentos intencionalmente não-uniformes ao redor de um cilindro, observando novamente células de diferentes frequências que se moviam ao longo da envergadura ao se aumentar o número de Reynolds, o que se notava como uma descontinuidade na relação St - Remantendo-se fixo o ponto de medição. Gaster também experimentou utilizar placas (inclinadas ou não em relação à direção do escoamento incidente) nas extremidades do cilindro (na literatura em língua inglesa: "end-plates"), distantes 70 diâmetros uma da outra, e observou que a descontinuidade desaparecia, sugerindo que tais placas limitavam o movimento das células de diferentes frequências que surgiam em decorrência da não-uniformidade do escoamento incidente. Isso reforçava sua tese de que era a não-uniformidade do escoamento incidente a razão das descontinuidades observadas na curva St - Re sem o uso das placas.

Já Berger e Wille (1972) sugeriram, seguindo Tritton, que há dois modos de emissão de vórtices, mas que a seleção de frequência tem como critério o nível de turbulência no escoamento ao longe. Sreenivasan (1985) interpretou as descontinuidades como os primeiros passos na "rota para o caos" na esteira do cilindro, que, sabia-se, se tornava turbulenta para *Re* mais elevados; medindo espectros de velocidade para diferentes números de Reynolds no regime laminar, ele observou estreitas faixas de *Re* em que um regime caótico era observado, encapsuladas em regiões maiores de regime ordenado (laminar). Esta intermitência faria parte do cenário de transição à turbulência proposto inicialmente por Ruelle e Takens (1971).

O artigo revisional de Bearman (1984) ilustra, com base em uma série de outros trabalhos experimentais, como pode ocorrer sincronização ("lock-in") da frequência de emissão de vórtices com uma ou mais frequências naturais do cilindro, podendo assim existir "saltos" no número de Strouhal quando outro modo de vibrar do cilindro passasse a ser excitado em decorrência de um aumento da velocidade do escoamento, ou seja, do número de Reynolds. Atta e Gharib (1988) mostraram que algumas destas descontinuidades podiam desaparecer quando se variava o amortecimento nos suportes do cilindro. Eles sugeriram que, caso as vibrações do cilindro pudessem ser totalmente eliminadas do aparato exprimental, então uma curva St - Retotalmente contínua apareceria. Este foi o primeiro trabalho que sugeriu a possibilidade de existência, de fato, de uma relação contínua entre a frequência de Strouhal e o número de Reynolds na faixa aqui considerada ( $Re_c < Re < 180$ ).

Simulações numéricas bidimensionais realizadas por Karniadakis e Triantafyllou (1989) resultaram em estados assintóticos (com  $t \to \infty$ ) periódicos e uma curva contínua de Strouhal na faixa Re < 250, sem evidência dos comportamentos caóticos citados por Sreenivasan. Isto sugeriu que a curva fosse contínua **desde que o escoamento fosse, de fato, bidimensional**: as descontinuidades estariam associadas à presença de tridimensionalidades, e estas seriam a verdadeira causa das discrepâncias entre resultados experimentais e da própria descontinuidade na curva St - Re. Foi isso o que percebeu Williamson (1989).

Em resumo, descontinuidades na curva St - Re existem, de fato, como consequência de não-uniformidades no escoamento incidente e também em virtude de pequenas vibrações do cilindro; entretanto, elas não desaparecem mesmo quando se garante a uniformidade do escoamento e as vibrações do cilindro são eliminadas. Existe uma causa, mais fundamental, para as referidas descontinuidades, percebida por Williamson: efeitos tridimensionais causados pela condição de contorno nas extremidades do cilindro não ficam restritos a elas e se propagam ao longo de toda a envergadura. Surgem células de diferentes frequências, mesmo que se garanta uniformidade do escoamento incidente. Gerich e Eckelmann (1982) haviam percebido que a frequência de emissão de vórtices em células próximas às extermidades dos cilindros era diferente daquela medida no centro da envergadura, onde supuseram que o escoamento não seria afetado pela condição de contorno na extremidade, o que não é verdadeiro, como atestou Williamson. Ele percebeu que existe uma relação direta entre as discrepâncias nas frequências de Strouhal em diferentes experimentos e a emissão de vórtices oblíqua, em que as linhas de vórtices fazem ângulos  $\theta$  de até 15° com o eixo do cilindro. Usando "*end-plates*" e manipulando sua inclinação com relação ao escoamento incidente, ele pôde controlar o valor de  $\theta$ , conseguindo inclusive emissão paralela ( $\theta = 0$ ). Ambos os modos de emissão de vórtices estão mostrados na fig. 2.2. Foi percebido, em um experimento em que o cilindro é rebocado ao longo de fluido quiescente, que a emissão de vórtices é inicialmente paralela (2.2a), mas que, caso a angulação dos "endplates" não fosse controlada para induzir emisão paralela, as linhas de vórtice progressivamente se inclinavam, com frentes de onda se afastando das extremidades, até que toda a envergadura estava tomada por linhas de vórtice oblíquas (fig. 2.2b). Isto o permitiu concluir, decisivamente, que a emissão oblíqua era consequência direta da condição de contorno na extremidade.



(a) Emissão paralela



Figura 2.2: Modos paralelo e oblíquo de emissão de vórtices. Escoamento de baixo para cima, Re = 95.

Até então, pouca atenção havia sido dada à questão de os vórtices serem emitidos de forma paralela ou oblíqua. Entretanto, é trivial verificar que, se vórtices são emitidos com ângulo  $\theta$  em relação ao eixo do cilindro, a frequência de Strouhal medida sob emissão oblíqua  $St_{\theta}$  será, com relação à frequência de emissão paralela St:

$$St_{\theta} = St \cdot \cos\theta \tag{2.1}$$

Williamson então comparou os dados de frequência medidos sob emissão paralela e oblíqua e observou concordância muito boa com a previsão (2.1), o que permitiu concluir que as discrepâncias encontradas pelos diversos autores não se devia a não-uniformidades no escoamento incidente nem a vibrações no cilindro, mas sim à utilização de condições de contorno não controladas nas extremidades do cilindro, sob a hipótese - equivocada, como ele mostrou - de que os efeitos de borda não se propagariam para a região central da envergadura. Eles se propagam, sim, preenchendo todo o domínio com linhas de vórtices oblíquas que, como se viu, resultam em medições de Strouhal que precisariam ser corrigidas de acordo com a eq. (2.1).

A questão das descontinuidades também foi resolvida, no contexto de emissão oblíqua: ocorre mudança de um padrão de emissão oblíqua quase-periódico com células de diferentes frequências longe das extremidades (Re < 64) para um padrão periódico com apenas uma frequência nesta região (Re > 64). Os números de Reynolds em que ocorre esta transição podem ter sido diferentes para diferentes autores, dependendo de detalhes de cada aparato experimental. Mais importante é que, **quando as condições experimentais na extremidade do cilindro são tais que a emissão é paralela, a curva** St - Re aparece perfeitamente contínua até  $Re \approx 180$ , quando então começa a ocorrer, de fato, transição para um modo tri-dimensional de emissão de vórtices, que não será abordado aqui (WILLIAMSON, 1989), (BARKLEY; HENDER- SON, 1996).

Toda essa discussão é importante pois a modelagem aqui apresentada se baseia na premissa de que o escoamento é bidimensional para  $Re \leq 180$ , e é a dinâmica deste escoamento que se tentará representar por meio de uma solução assintótica. Além disso, e ainda mais importante, é a percepção de que existem, sim, efeitos tridimensionais nesta faixa de Re, que foram modelados fenomenologicamente pela equação de Ginzburg-Landau (LEWEKE; PROVANSAL; BOYER, 1993), (LEWEKE; PROVANSAL, 1994), (ALBARÉDE; PROVANSAL, 1995), (MONKEWITZ; WILLIAMSON; MILLER, 1996). A teoria aqui apresentada tem uma extensão para a equação de Ginzburg-Landau (ARANHA, 2004), e suas predições deverão ser confrontadas, futuramente, com aquelas apresentadas nos referidos trabalhos. Já os artigos que tratam da modelagem fenomenológica dos efeitos bidimensionais serão apresentados brevemente na próxima seção.

### 2.3 Modelagem fenomenológica por equações de amplitude

Segundo Provansal, Mathis e Boyer (1987), houve em meados da década de 1980 um aumento repentino do interesse pelo problema de estabilidade hidrodinâmica representado pela esteira de vórtices atrás do cilindro, pelas seguintes razões: surgimento de capacidade computacional para simular as eqs. de Navier-Stokes em problemas geometrias não-triviais; utilização de técnicas experimentais não intrusivas como anemometria Laser-Doppler, que permitiu medições locais e instantâneas até então impossíveis não-intrusivamente; e, principalmente, o renovado interesse na teoria de sistema dinâmicos aplicados a uma série de problemas não-lineares como transições de fase e instabilidades.

Até então, boa parte destes estudos havia se concentrado em escoamentos internos, notadamente os escoamentos de Taylor-Couette e Poiseuille e a convecção de Rayleigh-Bénard (MANNEVILLE, 2004), mas ainda não em escoamentos externos. O primeiro trabalho experimental a tratar um escoamento externo a um corpo limitado como um sistemas dinâmico que rege a amplitude de um modo global foi a modelagem da esteira de von Kármán realizada por Mathis, Provansal e Boyer (1984), em que foi observado, por meio de anemometria Laser-Doppler, que a transição para a esteira oscilatória era caracterizada por uma bifurcação de Hopf. A simples ideia de uma estrutura global oscilando em fase permite que, conhecendo-se ou arbitrando-se a forma do modo, a amplitude em uma extensa região da esteira seja inferida a partir de sua medição em apenas um ponto. Associada à instabilidade do regime permanente observa-se uma quebra de simetria que seria a primeira de uma série nas conjecturas de rotas

para o caos de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1971) e Ruelle-Takens (RUELLE; TAKENS, 1971); (ECKMANN, 1981). O parâmetro de ordem em Mathis, Provansal e Boyer (1984) é a componente transversal de velocidade v, medida no ponto (5D, 0, 0) (ver definição das coordenadas na seção 3.1), que obedece à equação de Landau (com coeficientes ajustados experimentalmente) na faixa 40 < Re < 300 e é, no limite em que  $Re \rightarrow Re_c^+$ , proporcional a  $(Re - Re_c)^{1/2}$ . À época deste estudo, ainda não estava bem estabelecido o valor para o número de Reynolds crítico em que surge a instabilidade bidimensional. Os autores perceberam a influência da razão de aspecto do cilindro e deduziram que, para um cilindro infinitamente longo, o valor assintótico seria de  $Re_c = 47$ .

Os mesmos autores prosseguiram a investigação (PROVANSAL; MATHIS; BOYER, 1987), argumentando que, numa bifurcação de Hopf, o parâmetro de bifurcação é a própria taxa de crescimento  $\sigma$ , que vale zero em  $Re_c$  (por definição) e, nas suas vizinhanças, pode ser aproximada por uma função linear de Re:

$$\sigma(Re) = \sigma(Re_c) + \frac{d\sigma}{dRe}(Re - Re_c) + \mathcal{O}(Re - Re_c)^2, \qquad (2.2)$$

Experimentos em regime transiente em que a série temporal de v era medida após uma mudança brusca de Re forneceram a relação:

$$\sigma = k \cdot \frac{\nu}{d^2} (Re - Re_c), \qquad (2.3)$$

com k = 0.20 (PROVANSAL; MATHIS; BOYER, 1987) ou k = 0.20 para (??). É interessante notar que os resultados foram os mesmos aumentando-se ou diminuindo-se o número de Reynolds, o que foi interpretado como a bifurcação de Hopf sendo supercrítica: não ocorre histerese. Curiosamente, os experimentos neste trabalho não reportam uma alteração de frequência devido a interações não-lineares ( $\Delta \omega = \sigma c_3$  - ver seção 3.4), o que seria equivalente a  $c_3 = 0$ . Contudo, Dušek, Le Gal e Fraunié (1994), Monkewitz (1996), Thompson e Le Gal (2004) e Sipp e Lebedev (2007) apresentam valores não-nulos para este coeficiente, em consonância com os resultados aqui obtidos. Estes experimentos foram repetidos, com algumas variações e aprofundamentos, nos trabalhos de Sreenivasan, Strykowski e Olinger (1986), Strykowski e Sreenivasan (1990) e Schumm, Berger e Monkewitz (1994).

Monkewitz (1996) demonstrou que o modelo de Landau era bem sucedido para o caso de transientes na esteira gerados por sucção (*"base suction"*) ou injeção (*"base bleed"*) de massa por uma fenda na base do cilindro (ponto de estagnação a jusante). A sucção faz com que o escoamento estacionário se torne instável em números de Reynolds mais baixos; por outro lado, a injeção estabiliza a esteira. Além destes novos resultados, neste trabalho o autor

apresenta uma revisão concisa e didática da literatura anterior e dos conceitos básicos de estabilidade local e global, além de tratar também de aspectos tri-dimensionais e sua modelagem fenomenológica pela equação de Ginzburg-Landau.

Jackson (1987), apoiado nas ideias lançadas pelos trabalhos experimentais de Mathis, Provansal e Boyer (1984) e Provansal, Mathis e Boyer (1987) realizou o primeiro estudo numérico de estabilidade global em escoamentos externos, determinando via método de elementos finitos o escoamento estacionário e resolvendo o problema de estabilidade que forneceria o modo instável e o autovalor a ele associado para corpos de diversos formatos, entre eles um cilindro circular. O número de Reynolds crítico obtido foi  $Re_c = 45, 4$ , e a frequência de Strouhal associada St = 0, 136 ( $\omega = 0, 854$ ), em razoável concordância com os valores hoje aceitos ( $Re_c \approx 47$  e  $\omega \approx 0, 73$ ), levando-se em conta a escassa capacidade computacional à sua disposição à época.

Dušek, Le Gal e Fraunié (1994) realizaram um estudo numérico para determinar os coeficientes do modelo de Landau para o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro a Re = 48. Neste trabalho, nenhum problema de valor característico é resolvido: a taxa de crescimento do modo instável  $\sigma$  e a frequência de oscilações de amplitude infinitesimal  $\omega$  são obtidos diretamente da simulação do escoamento em regime transitório. O modelo de Landau é obtido por meio de uma separação de escalas temporais: a escala rápida do período de oscilação  $(\frac{2\pi}{\omega})$  e a lenta do aumento da amplitude  $(\frac{1}{\sigma})$ .

Na primeira década do século XXI, o aumento do poder computacional fez com que já se tornasse rotineira a solução dos problemas de valor característico de larga escala que surgem na análise de estabilidade global do escoamento ao redor de um cilindro, em que se trabalha com as equações de Navier-Stokes completas, e não mais com a de Orr-Sommerfeld. Barkley (2006) resolve-o linearizando as ENS não só ao redor do escoamento estacionário mas também ao redor do campo médio (integral do campo de velocidades em um período de oscilação da esteira, dividia por este período) obtido de uma simulação temporal em toda a faixa bidimensional  $Re_c \leq Re \leq 180$ . Ele observa que a frequência  $\omega$  associada ao modo instável do campo-base só corresponde à frequência de Strouhal muito perto do ponto de bifurcação ( $Re \approx Re_c$ ). Por outro lado, o campo médio, apesar de não ser ponto de equilíbrio das ENS, tem sua frequência fundamental muito próxima da frequência de Strouhal; além disso, o campo médio é aproximadamente marginalmente estável ( $\sigma \approx 0$ ).

Sipp e Lebedev (2007) apresentam uma técnica de múltiplas escalas com a intenção de fornecer uma prova para os resultados de Barkley (2006) nas vizinhanças do ponto de bifurcação. Uma maneira engenhosa mas algebricamente mais trabalhosa que a so presente trabalho para determinar os coeficientes de Landau é apresentada, em que se resolve apenas um problema de valor característico, para  $Re \approx Re_c$ . As partes real  $\sigma$  e imaginária  $\omega$  do autovalor associado ao modo instável para números de Reynolds maiores são determinados em primeira ordem na série assintótica, e não diretamente a partir do campo estacionário para cada número de Reynolds, como aqui. Os coeficientes de Landau também são obtidos por meio da alternativa de Fredholm para os termos de terceira ordem da série. A intenção dos autores é determinar um critério para o campo-médio ser neutramente estável e sua estabilidade recuperar a frequência de Strouhal e mostrar que este critério não é geral, por não valer em um outro caso (escoamento sobre uma cavidade aberta). Não se vislumbra qualquer intenção de generalizar o procedimento para efeitos tri-dimensionais.

#### 2.4 Recapitulação

Encerra-se este capítulo reposicionando o trabalho no contexto da modelagem do escoamento ao redor de um cilindro por equações de amplitude, após terem sido apresentadas as principais ideias e contribuições que serviram de alicerce para o que será construído aqui.

O escoamento ao redor de um cilindro oferece uma mid de fenômenos interessantes e complicados, inclusive na faixa Re < 180, que envolvem instabilidades bi e tridimensionais, modos diversos de emissão de vórtices, células de frequências diferentes e alta sensibilidade a condições de contorno. Por um lado, tal diversidade é característica e até esperada em virtude da complexidade as equações de Navier-Stokes e da dificuldade de se estabelecer corretamente condições de contorno matemáticas que correspondam a diversas montagens e aparatos experimentais. Por outro, causa um certo deslumbramento notar que boa parte, senão a totalidade destes fenômenos, pode ser descrita por um modelo consideravelmente mais simples, a equação de Ginzburg-Landau; além disso, um controle adequado das condições de contorno experimentais, ao causar a bidimensionalidade do escoamento, permite que um modelo ainda mais simples, o de Landau, seja capaz de reconstruir, com coeficientes ajustados experimentalmente, a dinâmica observada em laboratório.

Estes fatos sugerem fortemente, portanto, relações entre as equações de Navier-Stokes e os modelos de Landau e Ginzburg-Landau que trascendam a fenomenologia. Em termos bem simples, seria muita coincidência. O grupo de pesquisa do qual este autor faz parte tenta buscar estas relações, por meio de soluções assintóticas das equações de Navier-Stokes. O primeiro passo, referente à equação de Landau, é o tema desta tese, e sua formulação teórica será apresentada no próximo capítulo.

# **3 TEORIA E MÉTODOS**

Este capítulo começa por definir matematicamente o problema do escoamento ao redor de um cilindro circular (seção 3.1), seguido de sua formulação discreta (seção 3.2). Para seguir a ordem cronológica de desenvolvimento dos trabalhos, é apresentada a teoria da condição de contorno de impedância fluida na seção 3.3 e, na sequência, toda a teoria da equação de Landau: começa-se apresentando-a de forma genérica e são derivadas suas principais consequências (seção 3.4); na seção 3.5, a solução assintótica das equações de Navier-Stokes, conduzindo à equação de Landau, é construída. Então trata-se da solução temporal das equações de Navier-Stokes e de sua decomposição em harmônicos de Fourier, que irão servir de parâmetro de comparação e mensuração da eficácia da solução assintótica (seção 3.6).

### 3.1 Definição do problema contínuo

O escoamento bidimensional incompressível ao redor de um cilindro circular é regido pelas equações de Navier-Stokes, apresentadas abaixo em sua forma adimensional, juntamente com a equação da conservação da massa e as condições de contorno aplicáveis ao problema:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}$$
(3.1a)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \tag{3.1b}$$

$$\mathbf{u}(\|\mathbf{x}\| = 1/2; t) = \mathbf{0};$$
 (3.1c)

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = 1\mathbf{i}; \tag{3.1d}$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} p(\mathbf{x}; t) = 0; \tag{3.1e}$$

O eixo x está alinhado com a direção do escoamento incidente e o eixo y é perpendicular a ele. i e j são vetores normais nestas direções, respectivamente. Pontos no espaço  $(\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$  são representados em um sistema de cordenadas com origem no centro da seção transversal do cilindro.  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$  representa o campo de velocidades. Coordenadas espaciais são adimensionalizadas pelo diâmetro D do cilindro, velocidades por aquela do escoamento ao longe  $U_{\infty}$ , e a pressão por  $\rho U_{\infty}^2$ , em que  $\rho$  é a densidade do fluido, suposta constante. Resulta um único parâmetro adimensional, o número de Reynolds  $Re = \frac{U_{\infty}D}{\nu}$ , em que  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Para a solução numérica do problema, é necessário restringir o domínio a uma região finita  $\Omega$ , cuja metade superior  $\Omega^+$  é mostrada na figura 3.1:



Figura 3.1: Representação esquemática do domínio computacional  $\Omega^+$ ;  $l_i$ ,  $l_h$  e  $l_o$  são as distâncias do centro do cilindro às fronteiras a montante, acima e a jusante.

O contorno  $\partial\Omega$  é subdividido nas porções ( $\partial\Omega = \partial\Omega_i \cup \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_s \cup \partial\Omega_o$ ), tais que:

- ∂Ω<sub>i</sub> comporta as fronteiras vertical a montante (x = −l<sub>i</sub>; 0 ≤ y ≤ l<sub>h</sub>) e lateral ao cilindro (−l<sub>i</sub> ≤ x ≤ l<sub>o</sub>; y = l<sub>h</sub>), em que está aplicada a condição de contorno de "*inlet*" (3.1d);
- ∂Ω<sub>c</sub> corresponde à superfície do cilindro em si (√(x<sup>2</sup>+y<sup>2</sup>) = 1/2; y ≥ 0), com condição de não-deslizamento (3.1c);
- ∂Ω<sub>s</sub> é a linha de simetria do domínio (y = 0), cujas condições de contorno são de simetria (<sup>∂u</sup>/<sub>∂y</sub> = 0, v = 0) para alguns dos campos da solução assintótica e de anti-simetria (u = 0, <sup>∂v</sup>/<sub>∂u</sub> = 0) para outros;
- ∂Ω<sub>o</sub> é a fronteira vertical a jusante (x = l<sub>o</sub>; 0 ≤ y ≤ l<sub>h</sub>), em que estão aplicadas condições de contorno de "*outflow*" ou de *impedância fluida*, uma nova forma de condição de contorno, a ser apresentada mais à frente, juntamente com um significado mais preciso da própria condição de "*outflow*".

### 3.2 Formulação do problema discreto

É conveniente trabalhar com a formulação discreta das ENS, obtidas, por exemplo, por um método de elementos finitos. A conveniência reside em transformarem-se operadores lineares em espaços de funções em operadores lineares em espaços de n-uplas de números. Em outras palavras, migra-se do campo da análise funcional para a álgebra linear.

 $\Omega$  é a região do espaço contendo o cilindro e  $\partial\Omega$  a sua fronteira, tal que  $\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup$  $\partial\Omega_n$ , sendo  $\partial\Omega_v$  e  $\partial\Omega_n$  as regiões da fronteira onde estão aplicadas condições essenciais e naturais de contorno, respectivamente. Seja n o versor normal a  $\partial\Omega$ , apontando para fora de  $\Omega$ .

O procedimento padrão em elementos finitos é trabalhar com a forma fraca das equações, que corresponde à aplicação do princípio dos trabalhos virtuais da mecânica analítica. A única diferença está em se ter velocidades virtuais ao invés de deslocamentos virtuais, em virtude da formulação euleriana, que descreve o escoamento por meio de seus campos de velocidade e pressão. O rebaixamento do grau de continuidade exigido das funções de interpolação justifica o nome *formulação fraca*: como se verá, a segunda derivada associada ao termo viscoso é substituída, via integração por partes, por um termo em primeira derivada. Assim, as funções de interpolação não mais precisam ter segunda derivada quadrado-integrável; basta que a primeira derivada o seja. A forma fraca das eqs. de Navier-Stokes é obtida multiplicando a equação dinâmica por um campo de velocidades virtuais  $\delta u$ , a equação de continuidade por um campo de pressão virtual  $\delta p$  e integrando por partes em  $\Omega$ . Resulta:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \delta u + \nabla v \cdot \nabla \delta v) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \left( \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \right) d\Omega =$$
$$= \int_{\partial \Omega} \left[ -p \, \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \left( \left( \nabla u \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{i} + \left( \nabla v \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{j} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial \Omega$$
(3.2a)

$$\int_{\Omega} \delta p \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega = 0, \tag{3.2b}$$

em que foram utilizadas as seguintes identidades vetoriais:

$$\nabla^{2} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\delta u \nabla u + \delta v \nabla v) - (\nabla u \cdot \nabla \delta u + \nabla v \cdot \nabla \delta v);$$
$$\nabla p \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (p \delta \mathbf{u}) - p (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}),$$

e o teorema da divergência de Gauss.

O teorema de Gauss transfere para o contorno  $\partial \Omega$  termos que aparecem como a integral

de uma divergência em  $\Omega$ . A interpretação física da integral de superfície (para o problema bidimensional, trata-se de uma integral de linha) no lado direito da eq. (3.2a) é a potência virtual realizada pelas forças externas (localmente descritas pela pressão e tensões viscosas) em um deslocamento virtual da fronteira do domínio. Por esta razão, esta integral será denominada **integral da impedância**:

$$\delta \mathbf{U}^{t} \cdot \mathbf{I} = \int_{\partial \Omega} \left[ -p \,\mathbf{n} + \frac{1}{Re} \left( \left( \nabla u \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{i} + \left( \nabla v \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{j} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial \Omega. \tag{3.3}$$

Colocar condições de contorno de "*outflow*" (ou de *força zero* ou, em inglês, "*traction free*") significa que o integrando em (3.3) é identicamente nulo em  $\Omega_n$  (em  $\Omega_v$ , esta integral fornece as forças de vínculo). A rigor, esta condição só é válida bastante longe do cilindro, mas é prática comum colocá-la a jusante e, às vezes, lateralmente ao cilindro. A condição de contorno de impedância fluida, elaborada na seção 3.3, consiste em uma aproximação de primeira ordem para esta integral.

Discretizando (3.2) pelo método dos elementos finitos, definem-se as seguintes matrizes:

Matriz de massa 
$$\mathbf{M} : \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} \right) d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}};$$
 (3.4a)

Matriz de convecção 
$$\mathbf{N}(\mathbf{U}) : \int_{\Omega} \left( (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \right) d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U};$$
 (3.4b)

Matriz de difusão 
$$\mathbf{D} : \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \delta u + \nabla v \cdot \nabla \delta v) d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U};$$
 (3.4c)

Matriz gradiente 
$$\mathbf{R} : \int_{\Omega} p\left(\nabla \cdot \delta \mathbf{u}\right) d\Omega = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P};$$
 (3.4d)

Matriz divergência 
$$\mathbf{R}^{t} : \int_{\Omega} \delta p \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega = \delta \mathbf{P}^{t} \cdot \mathbf{R}^{t} \cdot \mathbf{U}.$$
 (3.4e)

Note que a matriz divergência (3.4e) é a transposta da matriz gradiente (3.4d), o que é uma consequência direta da simetria ( $\mathbf{u} \leftrightarrow \delta \mathbf{u}; p \leftrightarrow \delta p$ ) nas integrais que definem tais matrizes. A substituição das definições acima na forma fraca das ENS conduz às seguintes equações discretas de Navier-Stokes:

$$\delta \mathbf{U}^{t} \cdot \left[ \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{Re} \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \right] = \mathbf{F}_{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}}; \qquad (3.5a)$$

$$\delta \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}, \tag{3.5b}$$

sendo  $\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$  as forças de vínculo necessárias para garantir a fixação das condições essenciais de contorno em  $\partial \Omega_v$  e  $\mathbf{F}_n$  as forças externas aplicadas em  $\partial \Omega_n$ , que valem zero no caso de condição

de contorno de "*outflow*". A solução assintótica será desenvolvida levando-se em conta esta condição de contorno; isso não diminui a generalidade do procedimento pois, como se verá na próxima seção, a condição de impedância faz com que  $\mathbf{F}_n$  seja incorporada às matrizes do MEF. Para utilizar a impedância basta substituir adequadamente os operadores matriciais, conforme mostrado na próxima seção.

### 3.3 Condição de contorno de impedância fluida

A função da impedância é trazer para dentro do domínio discretizado a influência do fluido externo a ele. Neste trabalho, será apresentada apenas a formulação da impedância para o problema simétrico em relação ao eixo x. A integral da impedância em (3.3) é a expressão das potências virtuais das forças externas em função dos valores nodais de velocidade e pressão na fronteira. É importante ressaltar aqui que isso não significa a prescrição de condição de contorno para a pressão na fronteira; em escoamentos externos, só se especifica a pressão no infinito. Tais valores nodais são incógnitas do problema mas é possível, linearizando as equação de Navier-Stokes fora do domínio discretizado, obter sua solução analítica como função das velocidades nodais na fronteira. Esta linearização (equação de Oseen) consiste em considerar, no termo convectivo, apenas a parcela primária, supondo-se que a perturbação é "pequena" longe do cilindro. Conhecendo-se a solução como função das (desconhecidas) velocidades e pressões na fronteira, as forças aplicadas sobre o fluido dentro da região discretizada são calculadas, ainda como função destas velociades e pressões. Numericamente, trata-se de operadores matriciais (matrizes de impedância) que, se multiplicados pelas velocidades nodais no contorno, fornecem as forças aplicadas externamente em cada um dos nós desta fronteira. Mas todas as forças em elementos finitos são expressas assim: como operadores matriciais multiplicando velocidades nodais. Resulta da soma de todas estas matrizes um sistema algébrico cuja solução são as velocidades nodais em todos os nós da malha, inclusive os da fronteira em que está aplicada a impedância. Importante é o fato de, em primeira ordem, as forças serem funções *lineares* das velocidades nodais, pois assim se pode expressá-las por meio de operadores matriciais. Assim, a formulação da impedância consiste em construir estas matrizes e somá-las às demais matrizes para considerar, além das forças internas ao domínio, também as externas (de impedância), em primeira ordem de aproximação.

A fig. 3.2 mostra, à esquerda, uma região discretizada semi-circular, grande o suficiente para que as condições de contorno do infinito possam ser aplicadas a sua fronteira externa. À direita, tem-se a mesma região, porém cortada verticalmente a uma distância  $x_e = 100D$  a jusante do cilindro.



Figura 3.2: Região  $\Omega$  semi-circular e corte na esteira

A ideia é resolver, de forma aproximada, a equação de Oseen estacionária em uma faixa semi-infinita, de largura W, a jusante do corte. O problema fica mais simples se se trabalhar com condições de contorno nulas no infinito. Para tanto, vamos considerar uma mudança do sistema de referência de tal forma que o cilindro seja arrastado com velocidade  $-U_{\infty}$  em relação ao fluido quiescente. Sem perda de generalidade, vamos reposicionar a origem do eixo x no corte vertical. As equações de Navier-Stokes para este problema são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + U_{\infty} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}; \qquad (3.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.6b}$$

satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} \mathbf{u} = \mathbf{0}; \tag{3.6c}$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} p = 0; \tag{3.6d}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x;0;t) = 0; v(x;0;t) = 0;$$
 (3.6e)

$$\mathbf{u}(0; y; t) = \sum_{i=1}^{N_B} (U_i(t)\mathbf{i} + V_i(t)\mathbf{j}) h_i(y), \qquad (3.6f)$$

em que  $h_j(y)$  é a restrição das funções de interpolação do MEF à fronteira vertical,  $N_B$  é o número de nós na discretização desta linha e  $\{U_i(t); V_i(t)\}$  são as velocidades nodais na discretização desta fronteira. Para simplificar a discussão, pode-se supor que a excitação em
(3.6f) é harmônica no tempo, ou seja:

$$U_i(t) = \hat{U}_i e^{-i\omega t}; \tag{3.7a}$$

$$V_i(t) = \hat{V}_i e^{-i\omega t}.$$
(3.7b)

Mais à frente será mostrado que tal restrição não é necessária, podendo ser removida, mas por enquanto será mantida para simplificar o raciocínio. Sugere-se então procurar soluções de (3.6) na forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x};t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}; \tag{3.8a}$$

$$p(\mathbf{x};t) = \hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}; \qquad (3.8b)$$

Tomando-se a região  $\Omega$  grande o suficiente para que  $\|\mathbf{u}_{\partial\Omega}\|$  seja pequeno, diga-se, de ordem  $\varepsilon$ , pode-se construir uma série assintótica em potências crescentes de  $\varepsilon$  na região fora de  $\Omega$ :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{u}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}), \ \operatorname{com} \|\mathbf{u}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x};t)\| \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{r});$$
(3.9a)

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r(\mathbf{x}), \ \operatorname{com} \| p_r(\mathbf{x}) \| \sim \mathcal{O}(\varepsilon^r).$$
(3.9b)

Substituindo-se (3.9) nas ENS resulta uma sequência de problemas lineares de valor de contorno, um para cada ordem de  $\varepsilon$ :

• r = 1:

$$\frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u_1} + \nabla p_1 = \mathbf{0}, \qquad (3.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u_1} = 0;, \qquad (3.10b)$$

com as mesmas condições de contorno do problema (3.6).

•  $r \ge 2$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{r}}}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{r}}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{r}} + \nabla p_r = \mathbf{f}_{\mathbf{r}}, \qquad (3.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u_r} = 0, \tag{3.11b}$$

satisfazendo condições de contorno homogêneas, ou seja,  $\mathbf{u}(0; y; t) = \mathbf{0}$  no lugar de (3.6f), e com:

$$\mathbf{f_r} = -\sum_{j=1}^{r-1} \left( \mathbf{u_j} \cdot \nabla \right) \mathbf{u_{j-r}} \sim \mathcal{O}(\varepsilon^r),$$

O problema em primeira ordem (3.10) é homogêneo, forçado apenas pela condição de contorno (3.6f), que requer a continuidade dos campos de velocidade na fronteira. Já os problemas (3.11), para cada r, são não-homogêneos, forçados por cada  $\mathbf{f}_r$  calculado com base na solução dos problemas de ordem inferior (note que a somatória em k na definição de  $\mathbf{f}_r$  vai até r - 1).

Como será mostrado no próximo capítulo, a consideração de apenas o primeiro termo da série (impedância linear) já produz excelentes resultados para o cálculo do escoamento estaciionário. Por isso, a abordagem se restringe ao caso r = 1. O problema (3.10) é linear em uma faixa retangular, se estendendo até o infinito na direção positiva do eixo x. Sua solução geral se dá naturalmente por séries de Fourier cujos coeficientes são determinados de forma única para satisfazer as condições de contorno, em especial o perfil de velocidades expresso em (3.6f). A simetria do problema implica que u e p sejam funções pares de y e v, ímpar. Escrevendo então as séries de Fourier que devem representar a solução { $\hat{u}(x)$ ;  $\hat{p}(x)$ } na esteira, tem-se:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} U_n(x) \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right);$$
(3.12a)

$$\hat{v}(\mathbf{x}) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} V_n(x) sen\left(\frac{n\pi}{W}y\right);$$
(3.12b)

$$\hat{p}(\mathbf{x}) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} P_n(x) \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right)$$
 (3.12c)

Note que o modo zero não aparece por serem as condições de contorno homogêneas no infinito.  $N_L$  é o número máximo de modos que será computado na solução numérica. Daí não se ter utilizado a igualdade nas equações acima: ela só seria válida se fossem computados infinitos modos. Os coeficientes  $U_n$  e  $V_n$  são tais que as condições de contorno sejam satisfeitas. Expressando (3.6f) em série de Fourier, vem:

$$u(0,y) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} U_{f_n} \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right); \qquad (3.13a)$$

$$v(0,y) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} V_{f_n} sen\left(\frac{n\pi}{W}y\right), \qquad (3.13b)$$

em que  $U_{f_n}$  e  $V_{f_n}$  (o sub-índice f é mnemônico para "fronteira") são os coeficientes de Fourier

desta representação calculados, por definição, como:

$$U_{f_n} = \frac{2}{W} \int_0^W u(0, y) \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right) \, dy; \qquad (3.13c)$$

$$V_{f_n} = \frac{2}{W} \int_0^W v(0, y) sen\left(\frac{n\pi}{W}y\right) \, dy.$$
(3.13d)

Ressalte-se aqui que se exige apenas continuidade do campo de *velocidades* em (3.6f); portanto, não é necessário desenvolver o perfil de pressão no contorno em série de Fourier. Assim, u(0, y) e v(0, y) são dados por (3.6f), de forma que:

$$U_{f_n} = \sum_{i=1}^{N_B} H_{ni}^+ U_i;$$
(3.14a)

$$V_{f_n} = \sum_{i=1}^{N_B} H_{ni}^- V_i,$$
(3.14b)

em que se definiu:

$$H_{ni}^{+} = \frac{2}{W} \int_{0}^{W} h_i(y) \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right) \, dy; \qquad (3.14c)$$

$$H_{ni}^{-} = \frac{2}{W} \int_{0}^{W} h_i(y) sen\left(\frac{n\pi}{W}y\right) dy.$$
(3.14d)

As velocidades virtuais na fronteira são expandidas em série de Fourier de forma análoga:

$$\delta u(0,y) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} \delta U_{f_n} \cos\left(\frac{n\pi}{W}y\right);$$
  
$$\delta v(0,y) \simeq \sum_{n=1}^{N_L} \delta V_{f_n} \sin\left(\frac{n\pi}{W}y\right),$$

com os coeficientes  $\delta U_{f_n}$  e  $\delta V_{f_n}$  expressos em função das velocidades virtuais nodais de maneira análoga a (3.14). A substituição das expansões (3.12) nas equações dinâmicas (3.10a, 3.10b), impondo as condições de contorno (3.6c - 3.6f) conduz, para cada *n*, ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares ordinárias nas variáves  $U_n$ ,  $V_n$  e  $P_n$ :

$$-i\omega U_n + U'_n + P'_n - \frac{1}{Re} \left[ U''_n - \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \right] U_n = 0;$$
(3.16a)

$$-i\omega V_n + V'_n + \left(\frac{n\pi}{W}\right) P_n - \frac{1}{Re} \left[V''_n - \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 V_n\right] = 0; \qquad (3.16b)$$

$$V_n = \left(\frac{W}{n\pi}\right) U'_n,\tag{3.16c}$$

em que (') significa derivação em relação a x. A solução geral (homogênea + particular) deste

sistemas de equações é, para cada n:

$$U_n(x) = A_n e^{-\frac{n\pi}{W}x} + B_n e^{\lambda_n x};$$
  

$$V_n(x) = -A_n e^{-\frac{n\pi}{W}x} - \left(\frac{W}{n\pi}\right) B_n \lambda_n e^{\lambda_n x};$$
  

$$P_n(x) = -\left(\frac{W}{n\pi}i\omega + 1\right) A_n e^{-\frac{n\pi}{W}x},$$

em que  $\lambda_n$  é a raiz **negativa** (para satisfazer a condição de contorno (3.6c) de evanescência no infinito) da equação característica:

$$\lambda_n^2 - Re\lambda_n + Re\left(i\omega + \frac{1}{Re}\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2\right) = 0,$$

que surge no processo de obtenção da solução homogênea de (3.16) e  $A_n$  e  $B_n$  são constantes de integração, determinadas de modo a serem satisfeitas as condições de contorno (3.6f), ou seja: tais que  $U_n(x = 0) = U_{f_n}$  e  $V_n(x = 0) = V_{f_n}$  (ver 3.12 e 3.13). Resulta então que os coeficientes de Fourier da solução (3.12) são expressos como função dos coeficientes de Fourier do perfil de velocidades na fronteira (3.13) como:

$$U_n(x) = \left(U_{f_n} + \frac{V_{f_n} - U_{f_n}}{1 - \lambda_n \frac{W}{n\pi}}\right) e^{-\frac{n\pi}{W}x} + \left(\frac{V_{f_n} - U_{f_n}}{\lambda_n \frac{W}{n\pi} - 1}\right) e^{\lambda_n x};$$
(3.18a)

$$V_n(x) = -\left(U_{f_n} + \frac{V_{f_n} - U_{f_n}}{1 - \lambda_n \frac{W}{n\pi}}\right) e^{-\frac{n\pi}{W}x} - \frac{W}{n\pi} \left(\frac{V_{f_n} - U_{f_n}}{\lambda_n \frac{W}{n\pi} - 1}\right) e^{\lambda_n x};$$
(3.18b)

$$P_n(x) = -\left(\frac{W}{n\pi}i\omega + 1\right)V_{f_n} + \frac{1}{Re}\frac{n\pi}{W}\left(V_{f_n} - U_{f_n}\right)e^{-\frac{n\pi}{W}x}, \text{ com erro} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re}\right). \quad (3.18c)$$

Lembrando que  $U_{f_n}$  e  $V_{f_n}$  são dados por (3.14) e substituindo os coeficientes (3.18) nas séries de Fourier 3.12, está determinada a solução das ENS linearizadas fora do domínio discretizado como função linear das velocidades nodais na fronteira.

A integral da impedância na esteira é (3.3), com  $\partial \Omega$  restrita à fronteira vertical a jusante do cilindro, em que n = i:

$$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}^{wk} = \int_0^W \left[ \left( -p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u + \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \delta v \right]_{x=0} dy, \qquad (3.19)$$

que se torna, após substituição das séries de Fourier para  $u, v, p, \delta u$  e  $\delta v$ :

$$(\delta \mathbf{U})^{t} \cdot \mathbf{I}^{wk} = \sum_{n=1}^{N_{L}} \sum_{i=1}^{N_{B}} \sum_{j=1}^{N_{B}} \left[ \frac{W^{2}}{n\pi} \delta U_{i} (H_{ni}^{+}H_{nj}^{+}) \dot{U}_{j} + \frac{\pi}{2Re} \delta U_{i} (nH_{ni}^{+}H_{nj}^{+}) U_{j} - \frac{W}{2} \delta U_{i} (H_{ni}^{+}H_{nj}^{-}) V_{j} + \frac{\pi}{2Re} \delta V_{i} (nH_{ni}^{+}H_{nj}^{+}) V_{j} \right]$$
(3.20)

Definem-se as matrizes:

$$\begin{aligned} (d^{wk})_{ij} &= \frac{\pi}{2Re} \sum_{n=1}^{N_L} n H_{ni}^+ H_{nj}^+ \\ (c^{wk})_{ij} &= -\frac{W}{2} \sum_{n=1}^{N_L} (H_{ni}^+ H_{nj}^-) \end{aligned} \} \Rightarrow \mathbf{K}_f^{wk} = \begin{bmatrix} [\mathbf{d}^{wk}] & [\mathbf{c}^{wk}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{d}^{wk}] \end{bmatrix}_{2N_B \times 2N_B} \\ (m^{wk})_{ij} &= \frac{W^2}{\pi} \sum_{n=1}^{N_L} \frac{1}{n} H_{ni}^+ H_{nj}^+ \end{aligned} \} \Rightarrow \mathbf{M}_f^{wk} = \begin{bmatrix} [\mathbf{m}^{wk}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}_{2N_B \times 2N_B}. \end{aligned}$$

Assim, a impedância linear na esteira é dada, finalmente, por:

$$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}^{wk} = (\delta \mathbf{U})^t \cdot \left( \mathbf{M}^{wk} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{wk} \cdot \mathbf{U} \right).$$
(3.21)

As matrizes  $\mathbf{M}^{wk}$  e  $\mathbf{K}^{wk}$  são obtidas alocando as entradas de  $\mathbf{M}_{f}^{wk}$  e  $\mathbf{K}_{f}^{wk}$  (*f* é mnemônico para "fronteira") de acordo com a numeração global dos graus de liberdade e só tem entradas não-nulas nas linhas e colunas correspondentes aos nós do corte vertical da malha.

Foi suposto, para a determinação das matrizes de impedância, que o perfil de escoamento na fronteira entre a região discretizada e a esteira fosse harmônico no tempo, ver (3.6f). Assim sendo, como o escoamento é excitado pela condição de contorno, a solução teria que ser também harmônica. Entretanto, as matrizes  $\mathbf{M}^{wk}$  e  $\mathbf{K}^{wk}$  não dependem explicitamente da freqüência de excitação  $\omega$ . Agora, a essência das transformadas de Fourier é que qualquer função "bem-comportada" pode ser expressa como a superposição de harmônicos. Introduz-se então o par de transformadas:

$$\mathbf{U}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{U}}(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \Leftrightarrow \hat{\mathbf{U}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(t) e^{i\omega t} \, dt$$
$$\mathbf{I}^{wk}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{I}}^{wk}(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \Leftrightarrow \hat{\mathbf{I}}^{wk}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}^{wk}(t) e^{i\omega t} \, dt$$

tanto para as velocidades U(t) como para a impedância  $I^{wk}(t)$ . Utilizando-se o princípio da superposição, verifica-se que:

$$\hat{\mathbf{I}}^{wk}(\omega) e^{-i\omega t} = \left(-i\omega \mathbf{M}^{wk} + \mathbf{K}^{wk}\right) \cdot \hat{\mathbf{U}}(\omega) e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \mathbf{I}^{wk}(t) = \left(\mathbf{M}^{wk} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{wk} \cdot \mathbf{U}\right),$$

ou seja, a expressão (3.21) é geral, podendo ser estendida diretamente para um problema em regime transitório, não necessariamente harmônico no tempo. Isso, ressalta-se, apenas porque as matrizes de impedância não dependem explicitamente da freqüência  $\omega$ .

Note que, de acordo com (3.18), nesta formulação linear a pressão é função de primeira ordem da velocidade. Pode-se acrescentar uma correção quadrática à pressão pelo termo de Bernoulli:

$$p_2 = -\frac{1}{2} \left( u^2 + v^2 \right),$$

cuja potência virtual na fronteira com a esteira é dada por:

$$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}^{wk_2} = \frac{1}{2} \int_0^W \left( u^2 + v^2 \right) \delta u \, dy$$

Definindo a matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{(k)}^{wk} \end{bmatrix}_{ij} = -\frac{1}{2} \int_0^W h_i(y) h_j(y) h_k(y) \, dy \Rightarrow \mathbf{N}_f^{wk}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_B} U_k^{wk} \mathbf{N}_{(k)}^{wk} & \sum_{k=1}^{N_B} V_k^{wk} \mathbf{N}_{(k)}^{wk} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}_{2N_B \times 2N_B}$$

tem-se então que a correção de Bernoulli para a impedância na esteira é dada por:

$$(\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{I}^{wk_2} = (\delta \mathbf{U})^t \cdot \mathbf{N}^{wk}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U},$$

com a relação entre  $\mathbf{N}_{f}^{wk}(\mathbf{U})$  e  $\mathbf{N}^{wk}(\mathbf{U})$  a mesma que para  $\mathbf{K}^{wk}$ .

Utilizar as condições de contorno de impedância se faz simplesmente somando  $\mathbf{K}^{wk}$ e  $\mathbf{N}^{wk}(\mathbf{U})$  aos operadores de elementos finitos correspondentes ao interior do domínio, ver (3.4), em um caso de escoamento estacionário, e também  $\mathbf{M}^{wk}$  no caso de escoamentos em regime transitório. É importante ressaltar, ainda, que a derivação exposta acima levou em conta condições de contorno de simetria em  $\Omega_s$ . Entretanto, em regime transitório, o escoamento ao redor do cilindro não é nem simétrico nem antissimétrico. Uma formulação inteiramente análoga pode ser realizada com condições de antissimetria e ambas as parcelas somadas para tratar então o caso de um escoamento qualquer em regime transitório. Desta forma, tem-se uma maneira computacionalmente simples e rápida para trazer de forma consistente as condições de contorno do infinito para a fronteira de um domínio finito.

### 3.4 Equação de Landau

Esta seção apresenta a equação de Landau como modelo fenomenológico e duas predições importantes dela derivadas: a amplitude do ciclo-limite  $A_{LC}$  e o "*shift*" de frequência  $\Delta \omega =$   $\omega_{St} - \omega$ : diferença entre a frequência de oscilação da esteira na saturação não-linear e a frequência linear de oscilações infinitesimais. No que se segue, A(t) é uma função complexa de argumento real, preferencialmente escrita na forma polar:  $A(t) = |A(t)|e^{i\phi(t)}$ . A(t) representa a amplitude de alguma variável do escoamento. Na maioria dos trabalhos experimentais, tratase da componente transversal de velocidade v em algum ponto de medição do escoamento. No presente trabalho, é a amplitude do modo instável E, conforme exposto na próxima seção. Em primeira ordem, ter-se-á  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x},t); p(\mathbf{x},t)\} = A(t) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x},t) \cdot e^{i\omega t}$ , sendo  $\mathbf{e}(\mathbf{x},t)$  o modo instável e A(t) obedecendo à equação de Landau:

$$\frac{dA}{dt} - \sigma A + \mu |A|^2 A = 0, \qquad (3.22)$$

em que  $\mu = \mu_r + i\mu_i$  é uma constante complexa independente da posição, doravante denominada *coeficiente de Landau* e  $\sigma$  é a parte real do autovalor associado ao modo instável, que representa a taxa de crescimento linear de oscilações infinitesimais, ou seja, ainda não perturbada pela ação dos termos não-lineares. Separando as partes real e imaginária de (3.22) tem-se, respectivamente:

$$\frac{1}{|A|}\frac{d|A|}{dt} = \sigma - \mu_r |A|^2;$$
(3.23a)

$$\frac{d\phi}{dt} = -\mu_i |A|^2. \tag{3.23b}$$

Da parte real, conclui-se que a amplitude na saturação do ciclo limite  $\left(\frac{d|A|}{dt}=0\right)$  vale:

$$A_{LC} = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_r}}.$$
(3.24)

Observe que, para  $\sigma > 0$  (modo instável), a expressão acima requer  $\mu_r > 0$ .

O campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  oscilará com frequência  $\omega + \frac{d\phi}{dt}$ , com  $\frac{d\phi}{dt}$  dado por (3.23b). Na saturação, tem-se  $\omega_{LC} = \omega + \Delta \omega$ , com  $\Delta \omega$  sendo calculado a seguinte forma:

$$\Delta \omega = -\mu_i A_{LC}^2 = -\sigma \frac{\mu_i}{\mu_r}.$$
(3.25)

Note que  $\Delta \omega$  representa a variação na frequência de oscilação causada pelas não-linearidades e é, neste modelo, proporcional ao quadrado da amplitude de oscilação. Pode-se isolar  $\mu_r$  e

definir  $c_3$  de forma que se tenha:

$$c_3 = -\frac{\mu_i}{\mu_r} \tag{3.26a}$$

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A - \mu_r (1 - ic_3) |A|^2 A \tag{3.26b}$$

$$\Delta \omega = \sigma c_3. \tag{3.26c}$$

A eq. de Landau escrita desta forma é conveniente para a extensão de Ginzburg-Landau e o estudo de sua estabilidade (SHRAIMAN et al., 1992).

### 3.5 Solução assintótica do escoamento bidimensional

Nesta seção, será construída uma solução em série assintótica das equações de Navier-Stokes. Na linguagem da literatura de estabilidade hidrodinâmica, trata-se de uma análise global nãolinear. É global porque se estuda a estabilidade do escoamento em todo o domínio de cálculo, procurando-se modos globais; esta técnica se diferencia da análise local em que a estabilidade de perfis transversais de velocidade em cortes unidimensionais do domínio é estudada sob a hipótese de variação lenta na direção do escoamento (eq. de Orr-Sommerfeld). O artigo revisional de Huerre e Monkewitz (1990) explicita e diferencia bem ambos os conceitos. Trata-se de uma análise não-linear porque o desenvolvimento vai além do problema linearizado, levando em conta, nas ordens superiores, as interações não-lineares do modo instável consigo mesmo e com o campo-base. A equação de Landau é obtida como condição de existência da solução assintótica em terceira ordem. Desta condição resulta naturalmente o método de cálculo do coeficiente de Landau  $\mu$ , a ser delineado nesta seção.

O parâmetro de ordem é, como sugrido pela modelagem fenomenológica (MATHIS; PROVANSAL; BOYER, 1984), (PROVANSAL; MATHIS; BOYER, 1987), a raiz quadrada da taxa de crescimento do modo instável ( $\sigma^{1/2}$ ). Esta é uma escolha interessante, uma vez que, por definição, tem-se  $\sigma = 0$  para  $Re = Re_{cr}$  e nota-se também que  $\omega(Re_{cr}) \neq 0$ , caracterizando-se assim uma bifurcação de Hopf. Como será visto, poder-se-á reconhecer no problema de terceira ordem da série assintótica a estrutura da equação de Landau. Os termos { $u_s; p_s$ } ~ O(1) representam o escoamento em regime estacionário, ponto de equilíbrio das equações de Navier-Stokes.

Sejam as séries assintóticas a seguir, em que  $\nabla \cdot \mathbf{u_n} = 0$ , para todo  $n \ge 0$ , com

 $\{\mathbf{u_n}(\mathbf{x}); \mathbf{p_n}(\mathbf{x})\} \sim \mathcal{O}(\sigma^{n/2}):$ 

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\mathbf{1}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}_{\mathbf{2}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}_{\mathbf{3}}(\mathbf{x},t) + \mathcal{O}(\sigma^2)$$
(3.27a)

$$p(\mathbf{x},t) = p_s(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x},t) + p_2(\mathbf{x},t) + p_3(\mathbf{x},t) + \mathcal{O}(\sigma^2),$$
 (3.27b)

e a versão discretizada no espaço pelo MEF, com  $\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U_n} = \mathbf{0}$ , para todo  $n \ge 0$ :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{s}} + \mathbf{U}_{\mathbf{1}}(t) + \mathbf{U}_{\mathbf{2}}(t) + \mathbf{U}_{\mathbf{3}}(t) + \mathcal{O}(\sigma^2)$$
(3.28a)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P_s} + \mathbf{P_1}(t) + \mathbf{P_2}(t) + \mathbf{P_3}(t) + \mathcal{O}(\sigma^2), \qquad (3.28b)$$

em que  $\{\mathbf{U}_n; \mathbf{P}_n\} \sim \mathcal{O}(\sigma^{n/2})$ . O *software* FreeFEM++ (HÉCHT, 2009) será utilizado para a discretização espacial com elementos de Taylor-Hood (P2-P1): funções de forma quadráticas para a velocidade e lineares para a pressão. Pra simplificar a notação, vamos definir a variável discreta  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{U}; \mathbf{P}\}$  e os seguintes operadores lineares:

$$\mathcal{M} \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$
(3.29a)

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}_{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Re} \mathbf{D} + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}_{\mathbf{s}}) & -\mathbf{R} \\ \mathbf{R}^{t} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$
(3.29b)

$$\mathcal{N}(\mathbf{Q_n}) \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{U_n}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$
(3.29c)

em que  $\hat{N}(U_s)$  é a matriz correspondente à linearização do termo convectivo ao redor do campo-base  $U_s$ :

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}_{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{N}(\mathbf{U}_{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{s}}$$
 (3.30)

para um campo de velocidades X qualquer. A substituição das séries (3.28) nas ENS resulta, nas diversas ordens de  $\sigma$ , em:

$$\mathcal{O}(\sigma^0)$$
:  $\mathcal{L}(\mathbf{Q_s}) \cdot \mathbf{Q_s} = \mathbf{F_v}$  (3.31a)

$$\mathcal{O}(\sigma^{1/2}):$$
  $\left[\mathcal{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{\mathbf{s}})\right] \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$  (3.31b)

$$\mathcal{O}(\sigma^{1}): \qquad \left[\mathcal{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{s})\right] \cdot \mathbf{Q}_{2} = -\mathcal{N}(\mathbf{Q}_{1}) \cdot \mathbf{Q}_{1}$$
(3.31c)

$$\mathcal{O}(\sigma^{3/2}): \qquad \left[\mathcal{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{s})\right] \cdot \mathbf{Q}_{3} = -\mathcal{N}(\mathbf{Q}_{1}) \cdot \mathbf{Q}_{2} - \mathcal{N}(\mathbf{Q}_{2}) \cdot \mathbf{Q}_{1} \qquad (3.31d)$$

Tem-se, em ordem zero, um problema não-linear estacionário, resolvido pelo método de Newton-Raphson. Observa-se que o campo estacionário é simétrico (fig. 2.1b) com relação

ao eixo x. Por isso,  $\mathbf{Q}_s$  é calculado com condições de simetria em  $\partial \Omega_s$ . Em  $\partial \Omega_i$  tem-se condição essencial de contorno U = 1, V = 0 e em  $\partial \Omega_c, U = V = 0$ .

Nas ordens superiores, tem-se uma sequência de problemas lineares. O primeiro deles, por ser homogêneo, é um problema de valor característico; para sua solução, utiliza-se a biblioteca ARPACK (LEHOUCQ; SORENSEN; YANG, 1997), em que está implementado um método de Arnoldi implicitamente reiniciado (LEHOUCQ; SORENSEN, 1996), já incorporado ao pacote FreeFem++. O modo instável é anti-simétrico com relação ao eixo x; por isso, a solução de (3.31b) é procurada com condição de contorno de anti-simetria em  $\partial\Omega_s$  e condições homogêneas em  $\partial\Omega_i \cup \partial\Omega_c$ 

Os demais problemas são forçados pela combinação não-linear das soluções já obtidas em ordens inferiores. A condição de contorno não-homogênea (3.1d) é cumprida pelo campobase no problema de ordem zero e os demais problemas satisfazem condições de contorno homogêneas em  $\partial \Omega_i \cup \partial \Omega_c$ . O problema em segunda ordem (3.31c) tem forçante simétrica, uma vez que  $\mathbf{Q_1}$  é anti-simétrico, portanto  $\mathbf{Q_2}$  deve satisfazer condições de contorno de simetria em  $\partial \Omega_s$ . Já em terceira ordem (3.31d), a forçante é anti-simétrica, logo  $\mathbf{Q_3}$  também deve sê-lo.

Todos os sistemas lineares são resolvidos por um método de fatoração LU não-simétrico multi-frontal, implementado na biblioteca UMFPACK (DAVIS; DUFF, 1997), também incorporada ao pacote FreeFem++.

A equação homogênea (3.31b) rege a evolução temporal de uma perturbação infinitesimal do campo-base. Sua solução dirá se perturbações do campo-base crescerão ou decairão com o tempo e será procurada na forma  $\mathbf{Q}_{\mathbf{1}}(t) = \mathbf{E} e^{\lambda t}$ . Resulta o problema de valor característico:

$$[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{\mathbf{s}})] \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}, \tag{3.32}$$

de forma que a solução geral da equação (3.31b) é escrita como:

$$\mathbf{Q}_{1}(t) = \sum_{j} c_{j} \mathbf{E}_{j} e^{\lambda_{j} t} + (*)$$
(3.33)

em que  $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$  são os auto-valores das ENS linearizadas (3.32) e  $\mathbf{E}_j = (\mathbf{U}_j^{(e)}; \mathbf{P}_j^{(e)})$  os modos, ou auto-funções, associados a eles; assim,  $\mathbf{U}_j^{(e)}$  são modos associados ao campo de velocidades  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{P}_j^{(e)}$  são os campos de pressão que garantem que cada  $\mathbf{U}_j^{(e)}$  seja solenoidal; (\*) indica o complexo conjugado do termo à esquerda e  $\{c_j\}$  são constantes de integração determináveis a partir das condições iniciais, ou seja, da forma da perturbação infinitesimal que se impuser ao campo-base. Cada um dos modos é determinado a menos de uma normalização

arbitrária, que será escolhida como:

$$\|\mathbf{E}_{j}\| = \sqrt{\mathbf{E}_{j}^{H} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{E}_{j}} = 1, \qquad (3.34)$$

em que o sobrescrito <sup>*H*</sup>, de *hermiteano*, significa o transposto do complexo conjugado:  $\mathbf{E}_{j}^{H} = (\mathbf{E}_{j}^{*})^{t}$ .

Note que o operador  $\mathcal{M}$  é singular, pois nas ENS não aparece derivada temporal da pressão. Na verdade, a pressão nas ENS faz o papel de multiplicador de Lagrange, sendo o gradiente de pressão a força de vínculo responsável pela satisfação da restrição de conservação da massa (3.1b). Para a solução do problema de valor característico, é utilizado um método de penalidades, em que a conservação de massa é assintoticamente relaxada. Ao invés de se impor que o campo de velocidades seja estritamente solenoidal ((3.1b), ou na versão discreta a segunda linha de (3.29b)), impõe-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\varepsilon_s p, \tag{3.35}$$

ou, na versão discreta,

$$\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = -\varepsilon_s \,\mathbf{M}_{11} \cdot \,\mathbf{P},\tag{3.36}$$

em que a  $M_{11}$  é a matriz de massa no espaço das pressões:

$$\int_{\Omega} p\delta p = \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{M_{11}} \cdot \mathbf{P}$$

que, no presente trabalho, é discretizado com funções de forma lineares.  $\varepsilon_s$  é um número real, positivo e pequeno. O sub-índice *s* é mnemônico para "solenoidal". Quanto menor for o valor de  $\varepsilon_s$ , mais o escoamento se aproxima da condição de incompressibilidade. É este o caráter assintótico do método das penalidades. Caso se diminua o valor de  $\varepsilon_s$  e o campo de escoamento não mais varie, então a condição de incompressibilidade está satisfeita. No presente trabalho, utilizou-se  $\varepsilon_s = 10^{-10}$ , valor que se mostrou suficientemente pequeno. Isto posto, o problema de valor caracerístico efetivamente resolvido, é:

$$[\lambda \mathcal{M}' + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})] \cdot \mathbf{Q_1} = \mathbf{0},$$

com a matriz de massa modificada de forma a não ser mais singular:

$$\mathcal{M}' = \left[ egin{array}{cc} \mathbf{M} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & arepsilon \mathbf{M_{11}} \end{array} 
ight]$$

Neste ponto, a abordagem fenomenológica auxilia o desenvolvimento da teoria: para

 $Re < Re_c$ , o escoamento em regime estacionário é assintoticamente estável, pois pequenas perturbações decaem com o tempo. Isso significa que  $\sigma \leq 0$  para todos os modos. É conveniente numerar os auto-valores de forma decrescente quanto à parte real:  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_n \ge ...$  O surgimento da esteira oscilante com frequência bem-definida, associado fenomenologicamente a uma bifurcação de Hopf, significa que o modo instável é complexo. Logo,  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathbf{U}_s)$ reais implica  $\{\lambda_2; \mathbf{E_2}\} = \{\lambda_1^*; \mathbf{E_1}^*\}$ . Para Re ligeiramente maior que  $Re_c$ , tem-se  $0 < \sigma_1 =$  $\sigma_2 << 1$  e  $\sigma_j < 0$ , para j > 2. Além disso,  $\omega_1 = -\omega_2 \neq 0$  e, portanto, a solução (3.33) do problema linear se aproxima mais e mais do subespaço gerado pelo modo instável  $\{E_1; E_1^*\}$ , oscilando com amplitude crescente, enquanto os demais modos decaem exponencialmente com o tempo. Suas amplitudes tendem assintoticamente a zero. Diz-se que o primeiro modo domina *a dinâmica* do problema e, por isso, apenas a sua amplitude será considerada para a elaboração da solução assintótica que, repita-se, espera-se que recupere a solução periódica representada pela esteira de von Kármán. Ao final, restará apenas uma equação (de Landau) regendo esta amplitude. A solução será tanto mais válida quanto mais próximo estiver Re de  $Re_c$  ou, mais precisamente, quanto menor for o valor de  $\sigma^{1/2}$ , dado que é este o parâmetro de ordem na teoria que aqui se apresenta. Como em toda teoria assintótica, a expectativa é que se tenha uma boa aproximação da solução exata para valores não tão pequenos de  $\sigma^{1/2}$ . Quão grande pode ser este valor é uma resposta que só pode ser dada a posteriori, comparando-se a solução assintótica com observações experimentais ou, como também será o caso neste trabalho, com a própria solução (numérica) das equações de Navier-Stokes. É interessante neste ponto, para clarificar e organizar as ideias, listar as hipóteses sobre as quais o modelo aqui construído se apoia:

- 1. Existe apenas um modo instável, caracterizado pelo par autovalor/autovetor  $\{\lambda_1; \mathbf{E}\}:$  $\sigma_1 > 0$  é raiz simples do polinômio característico det  $[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})] \cdot \mathbf{Q_1} = 0;$
- 2. O modo instável é complexo, ou seja,  $\omega_1 = \omega_2 \neq 0$  (caso contrário, não se teria uma solução oscilatória);
- 3.  $0 < \sigma \ll 1$ , quão grande pode ser  $\sigma$  é determinável *a posteriori*.

Para simplificar a notação, vamos eliminar o sub-índice "j" de  $\mathbf{E}$  e tomar como solução do problema linear (3.32):

$$\mathbf{Q_1} = c \,\mathbf{E} \,e^{\lambda t} + (*),$$

uma vez que os demais modos, no problema linear, decaem com o tempo. Pode-se reescrever a

expressão acima como:

$$\mathbf{Q_1} = A(t) \mathbf{E} \, e^{i\omega t} + (*), \tag{3.37}$$

em que se definiu a amplitude complexa como  $A(t) = c e^{\sigma t}$ . Com a solução expressa desta forma, pode-se reescrever o problema em primeira ordem (3.31b) como:

$$\left[\left(\frac{dA}{dt}+i\omega A\right)\mathcal{M}+A\mathcal{L}(\mathbf{Q}_{\mathbf{s}})\right]\cdot\mathbf{E}\,e^{i\omega t}=\mathbf{0}.$$

Agora,  $\mathcal{L}(\mathbf{Q}_{s}) \cdot \mathbf{E} = -\lambda \mathcal{M} \cdot \mathbf{E} = -(\sigma + i\omega)\mathcal{M} \cdot \mathbf{E}$ . Substituindo na equação acima, vem:

$$\left(\frac{dA}{dt} - \sigma A\right) \mathcal{M} \cdot \mathbf{E} \, e^{i\omega t} = \mathbf{0}.$$
(3.38)

Enquanto a análise linear é suficiente para determinar se o campo-base é estável ou não, é evidente que ela não determina corretamente a sua dinâmica: a amplitude do modo instável não cresce indefinidamente com o tempo. À medida que cresce, os termos não-lineares passam a ser importantes e limitam seu crescimento. As equações em  $\mathcal{O}(\sigma)$  e  $\mathcal{O}(\sigma^{3/2})$  determinam esta influência. O argumento clássico de Landau é simples: um termo não-linear só poderá limitar o crescimento do modo instável se pulsar com a mesma frequência  $\omega$ . O primeiro com esta característica na expansão assintótica, como se verá, surge em terceira ordem. Assim, para a saturação tem-se  $\sigma A \sim A^3$ , que é de onde vem o ordenamento assintótico com  $A \sim \mathcal{O}(\sigma^{1/2})$ .

Substituindo a solução do problema linear (3.37) em (3.31c), tem-se:

$$\left[\mathcal{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})\right] \cdot \mathbf{Q_2} = -\mathbf{N_{20}} - \left[\mathbf{N_{22}} e^{2i\omega t} + (*)\right], \qquad (3.39)$$

em que se definiu:

- N<sub>20</sub> = [𝒩(E) ⋅ E<sup>\*</sup> + 𝒩(E<sup>\*</sup>) ⋅ E]: interação não-linear do modo instável com seu complexo conjugado, gerando um termo forçante que não oscila com o tempo.
- N<sub>22</sub> = [N(E) · E]: interação não-linear do modo instável consigo mesmo: uma forçante que oscila com frequência 2ω.

Ao se resolver uma equação diferencial assintoticamente, a solução homogênea é determinada já em primeira ordem. Nas ordens superiores, buscam-se apenas soluções particulares. A solução de (3.39) é construída, naturalmente, com termos que acompanham as forçantes:

$$\mathbf{Q_2} = |A(t)|^2 \,\mathbf{Q_{20}} + \left[A(t)^2 \mathbf{Q_{22}} \,e^{2i\omega t} + (*)\right], \tag{3.40}$$

cujos termos <sup>1</sup> são soluções de:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q_s}) \cdot \mathbf{Q_{20}} = -\mathbf{N_{20}} \tag{3.41a}$$

$$[2i\omega\mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})] \cdot \mathbf{Q_{22}} = -\mathbf{N_{22}}$$
(3.41b)

O campo  $\mathbf{Q_{20}}$  é estacionário. Assim, pode ser interpretado como uma correção do campobase  $\mathbf{Q_s}$ : a solução assintótica oscila ao redor de  $\mathbf{Q_0} = \mathbf{Q_s} + |A(t)|^2 \mathbf{Q_{20}}$ . Já  $A(t)^2 \mathbf{Q_{22}}$  deve representar o segundo harmônico de Fourier da esteira de von Karman. É importante notar que como, por hipótese,  $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$  e  $\sigma_j < 0$  para j > 2, então  $0 + 2i\omega$  e  $0 + 3i\omega$  não são autovalores de  $\mathcal{L}(\mathbf{Q_s})$  e, portanto, o operador em (3.41b) é não-singular. Logo, a solução  $\mathbf{Q_{22}}$ existe é única, assim como  $\mathbf{Q_{33}}$ , apresentada a seguir.

Determinada a solução do problema anterior, o problema de ordem  $\mathcal{O}(\sigma^{3/2})$  (3.31c) se torna:

$$[3i\omega\mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})] \cdot \mathbf{Q_3} = -\left[\mathbf{N_{31}} e^{i\omega t} + \mathbf{N_{33}} e^{3i\omega t} + (*)\right], \qquad (3.42)$$

em que:

- N<sub>31</sub> = [N(Q<sub>20</sub>) · E + N(E) · Q<sub>20</sub> + N(Q<sub>22</sub>) · E\* + N(E\*) · Q<sub>22</sub>] : interações nãolineares gerando o termo que oscila com frequência *iω* e, portanto, se soma ao modo instável na construção do primeiro harmônico;
- N<sub>33</sub> = [N(E) · Q<sub>22</sub> + N(Q<sub>22</sub>) · E]: interação não-linear do modo instável com o segundo harmônico, dando origem a uma oscilação de frequência 3ω, que deve corresponder ao terceiro harmônico da esteira.

A solução de (3.42) é escrita como:

$$\mathbf{Q_3} = |A(t)|^2 A(t) \,\mathbf{Q_{31}} \, e^{i\omega t} + A(t)^3 \,\mathbf{Q_{33}} \, e^{3i\omega t} + (*), \tag{3.43}$$

sendo  $Q_{31}$  e  $Q_{33}$  soluções de:

$$[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{s})] \cdot \mathbf{Q}_{31} = -\mathbf{N}_{31}$$
(3.44a)

$$[3i\omega\mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})] \cdot \mathbf{Q_{33}} = -\mathbf{N_{33}}, \qquad (3.44b)$$

em que o termo  $\sigma |A|^2 A \mathcal{M} \cdot \mathbf{Q_{31}} \sim \mathcal{O}(\sigma^{5/2})$ , foi adicionado a (3.44a), sem alterar o erro  $\mathcal{O}(\sigma^2)$  da série assintótica.

Note que o operador em (3.44a) é singular, pois  $\lambda$  é auto-valor de  $\mathcal{L}(\mathbf{Q}_s)$ . Apesar disso, a solução  $\mathbf{Q}_{31}$  do problema existe, desde que seja satisfeita uma condição de compatibilidade

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Note que  $\mathbf{Q_{20}}$  é real e  $\mathbf{Q_{22}}$  é complexo

que guarda estreita relação com o problema adjunto. No presente trabalho, não temos interesse em determinar todos os termos da solução assintótica; bastam aqueles necessários para a determinação do coeficiente de Landau  $\mu$ . Assim, por simplicidade de leitura, o procedimento para o cálculo de **Q**<sub>31</sub> será omitido, mas não a condição de compatibilidade (alternativa de Fredholm) que determina a equação de Landau, como elaborado mais à frente.

Finalmente, pode-se escrever a solução assintótica do problema:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q_s} + \left[ A(t) \mathbf{E} e^{i\omega t} + (*) \right] + \left[ |A(t)|^2 \mathbf{Q_{20}} + (A(t)^2 \mathbf{Q_{22}} e^{2i\omega t} + (*)) \right] + \\ + \left[ |A(t)|^2 A(t) \mathbf{Q_{31}} e^{i\omega t} + A(t)^3 \mathbf{Q_{33}} e^{3i\omega t} + (*) \right] + \mathcal{O}(\sigma^2)$$
(3.45)

Substituindo nas ENS, utilizando os problemas em ordens inferiores e desconsiderando termos de ordem  $\sigma^2$ , resulta:

$$\left[\left(\frac{dA}{dt} - \sigma A\right)\mathcal{M} \cdot \mathbf{E} + |A|^2 A\left(\left[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})\right] \cdot \mathbf{Q_{31}} + \mathbf{N_{31}}\right)\right] e^{i\omega t} = \mathbf{0},$$

pois os termos que oscilam com  $2i\omega$  e  $3i\omega$  se cancelam com as respectivas forçantes. Sendo esta equação válida para todo t, tem-se:

$$\left(\frac{dA}{dt} - \sigma A\right) \mathcal{M} \cdot \mathbf{E} + |A|^2 A\left(\left[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q_s})\right] \cdot \mathbf{Q_{31}} + \mathbf{N_{31}}\right) = \mathbf{0},$$
(3.46)

Após uma breve digessão sobre o problema adjunto, retomaremos a derivação da equação de Landau.

O modo adjunto  $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}$  associado ao modo instável  $\mathbf{E}$  desempenha um papel fundamental na teoria. Dado um operador linear cuja matriz quadrada é  $\mathcal{K}$ , a matriz  $\mathcal{K}_a$  do operador adjunto é tal que, para todos vetores  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  de mesma dimensão que  $\mathcal{K}$ , se tenha:

$$\mathbf{X}^{H} \cdot (\mathcal{K} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^{H} \cdot (\mathcal{K}_{a} \cdot \mathbf{X}), \qquad (3.47)$$

de onde se conclui que a matriz adjunta é a complexa conjugada da matriz transposta:  $\mathcal{K}_a = \mathcal{K}^{*t}$ . Lembre que  $\mathcal{M}$  é simétrica por definição e tanto  $\mathcal{M}$  quanto  $\mathcal{L}(\mathbf{U}_s)$  são reais; portanto, o modo adjunto é obtido resolvendo o problema de valor característico:

$$\left[\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}^t(\mathbf{Q_s})\right] \cdot \mathbf{E_a} = \mathbf{0},\tag{3.48}$$

É interessante normalizar  $\mathbf{E}_a$  com relação ao modo normal  $\mathbf{E}$ , de forma que  $\mathbf{E}_a^t \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{E} = 1$ . Esta normalização é possível se  $\lambda$  for uma raiz simples do polinômio característico associado ao problema de estabilidade (3.32), o que é satisfeito por hipótese. Em todo caso,  $\lambda$  ser raiz simples é confirmado pelos experimentos numéricos. Para obter a eq. de Landau, multiplica-se a eq. (3.46) pelo modo adjunto transposto, lembrando da normalização do modo adjunto e notando que o segundo termo na eq. (3.46) é o transposto de (3.48):

$$\left(\frac{dA}{dt} - \sigma A\right) \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{t} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{E}}_{=1} + |A|^{2}A \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{t} \cdot (\lambda \mathcal{M} + \mathcal{L}(\mathbf{Q}_{\mathbf{s}}))}_{=\mathbf{0}^{t}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{31}} + |A|^{2}A \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{t} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{31}} = 0.$$
(3.49)

Obtem-se assim a eq. de Landau (3.22), por clareza aqui repetida:

$$\frac{dA}{dt} - \sigma A + \mu |A|^2 A = 0,$$

com o coeficiente de Landau  $\mu$  dado por:

$$\mu = \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{t} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{31}}.\tag{3.50}$$

Assim sendo, foi estabelecido um método para o cálculo numérico do coeficiente de Landau  $\mu$ . Com o intuito de organizar a exposição e facilitar a compreensão e repetibilidade do trabalho, resume-se aqui o procedimento:

- 1. Cálculo do escoamento estacionário Q<sub>s</sub>, eq.(3.31b);
- 2. Cálculo do modo instável E, eq. (3.5);
- Cálculo dos campos Q<sub>20</sub> e Q<sub>22</sub> pela solução dos problemas lineares (3.41a) e (3.41b), respectivamente;
- 4. Determinação da forçante  $N_{31}$ , eq.(3.42);
- 5. Renormalização do modo adjunto de forma que  $\mathbf{E}_{a}^{t} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{E} = 1;$
- 6. Cálculo do coeficiente de Landau:  $\mu = \mathbf{E_a}^t \cdot \mathbf{N_{31}}$ .

Além dos passos acima enumerados, será calculado também o campo  $Q_{33}$ , eq. (3.44b), para completar a comparação dos harmônicos da solução assintótica com os harmônicos de Fourier da simulação temporal das equações de Navier-Stokes, conforme exposto na próxima seção.

# 3.6 Simulação Temporal do Escoamento Bi-Dimensional

Conforme mencionado na introdução, o grande mérito de modelos reduzidos é a capacidade de reproduzir dinâmicas complexas com equações diferenciais simples. Na presente etapa, de desenvolvimento e validação do modelo, é proveitoso comparar suas predições com a própria

solução das equações de Navier-Stokes. Neste trabalho, esta solução será obtida numericamente por um método de elementos finitos de primeira ordem tanto para a pressão quanto para a velocidade (P1-P1), com discretização de segunda ordem para o tempo. A solução temporal, após o estabelecimento do escoamento periódico, será decomposta em série de Fourier com frequência fundamental igual à de Strouhal. Isso permite a comparação dos harmônicos da solução assintótica com os harmônicos de Fourier.

#### 3.6.1 Método de Marcha no Tempo

O procedimento de marcha no tempo utilizado para a simulação das equações de Navier-Stokes se baseia no método "*stiffly stable*" proposto por Karniadakis, Israeli e Orszag (1991). Há algumas diferenças, entretanto, principalmente no que diz respeito ao termo de pressão e suas condições de contorno, um tema de certa forma controverso, como exposto no próprio artigo.

O acoplamento pressão-velocidade é resolvido, aqui, pelo método das penalidades, de uma forma ligeiramente diferente da apresentada para o problema de valor característico na seção anterior. A condição de incompressibilidade é relaxada da mesma forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\varepsilon_s p. \tag{3.51}$$

Pode-se escrever, assim, o campo de pressão como:

$$p = -\frac{1}{\varepsilon_s} \nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{3.52}$$

e, na forma fraca, tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta p \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega = -\varepsilon_s \int_{\Omega} p \, \delta p \, d\Omega, \tag{3.53}$$

que, na forma discreta, se traduz como:

$$\delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U} = -\varepsilon_s \,\mathbf{M}_{11} \cdot \mathbf{P}. \tag{3.54}$$

Para eliminar a pressão, é conveniente introduzir a matriz de massa concentrada m ("*lumped mass matrix*"). Como aqui a velocidade é discretizada com funções de forma lineares, esta matriz é obtida a partir da própria matriz de massa consistente  $M_{11}$  alocando na diagonal principal a soma dos termos da linha correspondente. Por resultar uma matriz diagonal, pode-se

escrevê-la como:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{m}^{1/2}; \tag{3.55a}$$

$$\left[\mathbf{m}^{1/2}\right]_{ij} = \sqrt{\left[\mathbf{m}\right]_{ij}}.$$
(3.55b)

Definindo agora:

$$\left[\mathbf{m}^{-1/2}\right]_{ij} = \left(\sqrt{[\mathbf{m}]_{ij}}\right)^{-1}; \qquad (3.56a)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{m}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}^{-1/2}; \tag{3.56b}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{m}} = \mathbf{m}^{1/2} \cdot \mathbf{P} \tag{3.56c}$$

e lembrando que  $m^{-1/2}$  é diagonal, portanto igual à sua transposta, temos que o termo de gradiente de pressão nas ENS fica dado por:

$$-\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{R}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{m}} = \frac{1}{\varepsilon_s} \mathbf{R}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{m}}^{t} \cdot \mathbf{U}.$$

Assim, elimina-se a pressão do problema, e as ENS discretas (3.5) tornam-se uma única equação na variável U:

$$\delta \mathbf{U}^{t} \cdot \left[ \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \left( \frac{1}{Re} \mathbf{D} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) + \frac{1}{\varepsilon_{s}} \mathbf{R}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{m}}^{t} \right) \cdot \mathbf{U} \right] = \delta \mathbf{U}^{t} \cdot \left[ \mathbf{F}_{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}} \right].$$
(3.57)

As incógnitas do problema são então  $\mathbf{U}^{n+1}$  nos nós não-vinculados e  $\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$  naqueles em que condições essenciais de contorno se aplicam: u = 1, v = 0 nos nós localizados sobre  $\partial \Omega_i$ e u = v = 0 em  $\partial \Omega_c$ . Vale lembrar que o domínio  $\Omega$  é obtido da reflexão, para a porção y < 0, da região  $\Omega^+$  na fig. 3.1, eliminando-se assim a fronteira de simetria  $\partial \Omega_s^+$ .

Como será visto no capítulo de resultados, a condição de contorno de impedância é bastante eficiente para o escoamento estacionário, mas traz benefícios marginais no caso do problema em regime transitório. Quer-se, em última análise, comparar as predições da teoria assintótica com a simulação temporal das equações de Navier-Stokes. É claro que isso deve ser feito com o mesmo conjunto de condições de contorno. Por isso, a impedância não será utilizada na solução assintótica, mas sim "*outflow*" em  $\partial \Omega_o$ , de forma que  $\mathbf{F_n} = \mathbf{0}$ .

O método proposto por Karniadakis, Israeli e Orszag (1991) é classificado como "*splitting*" implícito-explícito porque calcula o termo difusivo de forma implícita e o convectivo explicitamente. O método consiste em, dados  $u_n$  e  $u_{n-1}$ , calcular os campos intermediários  $\hat{u}$  e  $\hat{\hat{u}}$  e o campo de velocidades  $\mathbf{u}^{n+1}$  tais que:

$$\hat{\mathbf{u}} = \alpha_0 \, \mathbf{u}^{\mathbf{n}} + \alpha_1 \, \mathbf{u}^{\mathbf{n-1}} + \Delta t \left( \beta_0 (\mathbf{u}^{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\mathbf{n}} + \beta_1 (\mathbf{u}^{\mathbf{n-1}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\mathbf{n-1}} \right)$$
(3.58a)

$$\hat{\hat{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta t \left( \nabla \bar{p}^{n+1} \right)$$
(3.58b)

$$\gamma_0 \mathbf{u}^{\mathbf{n+1}} = \Delta t \left( \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{\mathbf{n+1}} \right), \tag{3.58c}$$

em que  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_1 = -1/2$ ,  $\beta_0 = 2$ ,  $\beta_1 = -1$  e  $\gamma_0 = 3/2$  para segunda ordem no tempo.  $\bar{p}_{n+1}$ é o campo escalar que garante que o campo de velocidades u<sup>n+1</sup> seja incompressível, calculado via equação de Poisson:

$$\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Em outras palavras, impôs-se que  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ , ver (3.58b). Para detalhes acerca da condição de contorno aplicada à pressão para mitigar erros de "*splitting*", ver Karniadakis, Israeli e Orszag (1991). Como aqui (apenas nos cálculos transientes, não nos de estabilidade que conduzem à solução assintótica) a pressão foi eliminada via método das penalidades e não mais é incógnita direta do problema, ver (3.57), a condição de contorno para ela deixa de ser importante.

Pode-se então somar as equações de forma a eliminar o cálculo dos campos intermediários  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\hat{\mathbf{u}}}$  e então isolar  $\mathbf{u}^{n+1}$  de forma que se tenha, após formulação fraca e discretização por elementos finitos, o seguinte procedimento de marcha no tempo:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M_{11}} + \frac{1}{\varepsilon_s} \mathbf{R_m} \cdot \mathbf{R_m}^t + \frac{1}{Re} \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U^{n+1}} = \\ = \begin{bmatrix} \beta_0 \mathbf{N}(\mathbf{U^n}) + \alpha_0 \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M_{11}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U^n} + \begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{N}(\mathbf{U^{n-1}}) + \alpha_1 \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M_{11}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Cada passo no tempo é realizado resolvendo-se o sistema acima via UMFPACK. A rigor, dois campos ( $U^0 e U^1$ ) seriam necessários para se inicializar o método, e o ideal seria que se utilizasse um método explícito de segunda ordem de passo único para construir, a partir da condição inicial  $U^0$ , a aproximação  $U^1$ . No entanto, não existe interesse em prever com extrema precisão o comportamente transiente inicial, mas sim o regime periódico após a saturação, de forma que os campo iniciais utilizados são tais que  $U^0$  vale 1 na direção x e 0 em y, e para  $U^1$  tem-se 1, 01 em x e 0, 01 em y, a menos das condições essenciais nos nós vinculados em ambos os casos. Na próxima subseção, apresenta-se a decomposição da solução periódica em séries de Fourier para comparação com a solução assintótica.

#### 3.6.2 Decomposição em série de Fourier

A decomposição da série temporal de escoamento na forma complexa da série de Fourier é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{H}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n e^{i\omega_{St}t} + (*),$$
(3.59)

em que  $\omega_{St} = 2\pi St$  é a frequência de Strouhal. O campo médio e cada um dos harmônicos são calculados como:

$$\begin{split} \mathbf{H}_{0} &= \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \mathbf{U}(t') dt', \\ \mathbf{H}_{n} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}_{n,c} - i \mathbf{H}_{n,s} \right), \text{ sendo:} \\ \mathbf{H}_{n,c} &= \frac{2}{T} \int_{t}^{t+T} \mathbf{U}(t') \cos(n \omega_{St} t') dt', \\ \mathbf{H}_{n,s} &= \frac{2}{T} \int_{t}^{t+T} \mathbf{U}(t') sen(n \omega_{St} t') dt'. \end{split}$$

As integrais acima são calculadas numericamente a partir dos campos discretos de velocidade a cada instante por meio de uma regra do trapézio. Define-se a norma do campo médio e dos harmônicos da seguinte forma:

$$\|\mathbf{H}_n\| = \sqrt{\mathbf{H}_n^H \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{H}_n}.$$
(3.60)

Note que o campo médio é real, portanto igual a seu complexo conjugado.

É nítida a semelhança entre a solução assintótica (3.45) e a série de Fourier da solução numérica (3.59). A capacidade do modelo de Landau de representar a solução temporal das equações completas de Navier-Stokes será mensurada via comparação das amplitudes e estruturas dos harmônicos de cada uma das soluções. Assim sendo, serão exploradas as seguintes comparações no capítulo de resultados:

$$\mathbf{H_0} \longleftrightarrow \mathbf{U_0} = \mathbf{U_s} + A_{LC}^2 \mathbf{U_{20}}; \tag{3.61a}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{1}} \longleftrightarrow \mathbf{U}_{\mathbf{1}} = A_{LC} \mathbf{E} + \mathcal{O}(\sigma^{3/2}); \tag{3.61b}$$

$$\mathbf{H_2} \longleftrightarrow \mathbf{U_2} = A_{LC}^2 \mathbf{U_{22}}; \tag{3.61c}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{3}} \longleftrightarrow \mathbf{U}_{\mathbf{3}} = A_{LC}^{3} \mathbf{U}_{\mathbf{33}}.$$
 (3.61d)

Serão comparadas as estruturas dos harmônicos de forma qualitativa e suas normas de maneira quantitativa. Como  $\|\mathbf{E}\| = 1$ , então a amplitude do ciclo limite do modelo de Landau

será comparada com a norma do primeiro harmônico da simulação temporal:

$$A_{LC} \longleftrightarrow \|\mathbf{H_1}\| \tag{3.62}$$

As partes real e imaginária do coeficiente de Landau serão então inferidos a partir dos resultados de simulação numérica das equações de Navier-Stokes da seguinte forma, ver (3.24) e (3.26):

$$c_3^{(\rm NS)} = \frac{\omega_{St} - \omega}{\sigma}; \tag{3.63a}$$

$$\mu_r^{(\rm NS)} = \frac{\sigma}{\|H_1\|^2}; \tag{3.63b}$$

$$\mu_i^{(\rm NS)} = -c_3^{(\rm NS)} \,\mu_r^{(\rm NS)}.\tag{3.63c}$$

No próximo capítulo, são apresentados os resultados.

### 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados separados em duas frentes: primeiramente, é demonstrada a eficiência da condição de contorno de impedância fluida. Em seguida, detalha-se a solução assintótica que culmina no modelo de Landau, medindo-se a sua eficácia mediante comparação com dados experimentais e com resultados de simulação temporal as equações de Navier-Stokes.

## 4.1 Condição de contorno de impedância fluida

#### 4.1.1 Escoamento estacionário

O cálculo do escoamento estacionário é extremamente sensível ao tamanho do domínio discretizado para a solução numérica, conforme mostra a figura abaixo (BARBEIRO, 2006):



Figura 4.1: Escoamento estacionário: coeficiente de arrasto e comprimento da bolha para várias dimensões de domínio.

Neste experimento numérico, foram utilizadas malhas semicirculares como a mostrada na fig. 3.2 com raios entre 40D e 1000D. Prescreveu-se condição de contorno de escoamento uniforme na metade esquerda da fronteira superior e "*outflow*" na porção direita. Observou-se que para Re > 300 os resultados são extremamente dependentes do tamanho do domínio, ou seja, aplicar mesmo a distâncias grandes como 200D as condições de contorno válidas no infinito causa variações consideráveis na solução. Os resultados são comparados com o trabalho de Fornberg (1985), que aparentemente também padece dos efeitos de um domínio insuficientemente grande para Re mais elevados. A largura da bolha também foi calculada, e os resultados são similares aos do comprimento.

Esta sensibilidade faz com que este problema seja ideal para o teste da condição de contorno de impedância fluida. Para tanto, faz-se um corte vertical na malha de raio 600D, a uma distância x = 100D a jusante do cilindro, como também mostrado na fig. 3.2. Três condições de contorno são utilizadas: "*outflow*", impedância linear com 50 modos de Fourier  $(N_L = 50, \text{ ver eq. } 3.21)$  e impedância com adição da parcela de Bernoulli. Resultados são apresentados na faixa de maior dependência do tamanho do domínio:  $400 \le Re \le 600$ .



Figura 4.2: Escoamento estacionário: influência da impedância sobre o coeficiente de arrasto e comprimento da bolha.

Os resultados indicam a limitação da condição de contorno de "*outflow*" quando o domínio não é suficientemente grande. A impedância linear recupera quase exatamente a solução de referência na malha de raio 600D (legenda "*Full*"). A adição da correção de Bernoulli, ainda que pequena, melhora ainda mais a precisão. A tabela 4.1 ilustra quantitativamente estes resultados para Re = 600, o caso mais crítico.

Condição de contorno	Erro $C_d$	Erro $L/D$
"Outflow"	11,4%	16,7%
Impedância Linear	0,60%	0,95%
Impedância com Bernoulli	0,18%	0,26%

Tabela 4.1: Erros nos cálculos de  $C_d$  e L/D para as três condições de contorno utilizadas na fronteira a jusante.

#### 4.1.2 Escoamento transitório

Diferentemente do escoamento estacionário, o escoamento em regime transitório não necessita de domínios muito grandes para ser calculado com precisão (ver, por exemplo, Barkley (2006)). Portanto, já se pode suspeitar que o resultado não deve ser tão fortemente influenciado pelo tamanho do domínio como o é para o escoamento estacionário. Para testar a impedância em um escoamento transitório, utilizou-se um domínio  $\Omega \operatorname{com} l_h = l_i = 10D$  e  $l_o = 6D$ , menor que os demais para colocar, de fato, a limitação na influência da esteira. Neste problema, as condições de contorno utilizadas foram  $\mathbf{u} = 1\mathbf{i}$  na porção de  $\partial\Omega_i$  a montante ("*inlet*") e "*outflow*" na porção de  $\partial\Omega_i$  lateral ao cilindro e em  $\partial\Omega_o$ . A tabela abaixo apresenta os resultados para Re = 100:

Tabela 4.2: Influência da condição de contorno em  $\partial \Omega_o$ . Erros entre parênteses.

	Referência	Impedância Linear	"Outflow"
St	0,167	0,164 (1,8%)	0,161 (3,4%)
$\bar{C}_d$	1,36	1,34 (1,5%)	1,31 (3,7%)
$C_{L_{max}}$	0,323	0,346 (6,6%)	0,349 (8,0%))

Os parâmetros de referência para o número de Strouhal e o valor médio de do coeficiente de arrasto  $\bar{C}_d$  em um ciclo são retirados do trabalho numérico de Henderson (1997) e o valor de pico do coeficiente de sustentação  $C_{L_{max}}$  vem de Norberg (2003). Nota-se uma melhora dos resultados quando a condição de contorno de impedância é utilizada, mas não tão expressiva como no caso do escoamento estacionário. Por esta razão, a impedância não foi utilizada nos cálculos da solução assintótica nem da solução temporal das equações de Navier-Stokes; a condição em  $\partial \Omega_o$  foi sempre de "*outflow*".

### 4.2 Solução assintótica: modelo de Landau

Os resultados que serão agora apresentados mostram que a solução assintótica fornece bons resultados para números de Reynolds ligeiramente acima do crítico, o que equivale a valores de  $\sigma$  bastante pequenos. É difícil, e desnecessário, estabelecer exatamente até que valor de *Re* a teoria pode ser considerada válida. Mais interessante e importante é observar de que maneira a solução assintótica diverge, com o aumento do número de Reynolds, da simulação temporal das equações de Navier-Stokes. Assim, pode-se tentar compreender as causas desta divergência e propor aperfeiçoamentos no modelo. A razão principal pela qual a solução assinótica falha a números de Reynolds mais e mais elevados parece ser: **o escoamento estacionário, que é o ponto de equilíbrio das equações de Navier-Stokes, está muito distante da solução temporal.** Desta forma, torna-se impossível uma solução assintótica baseada em apenas um grau de liberdade recuperar corrtamente, a partir deste ponto de equilíbrio, toda a complexa dinâmica não-linear que conduz ao ciclo limite representado pela esteira de von Kármán.

De qualquer forma, a corroboração da teoria nesta restrita faixa de validade é importante, por formar uma base sólida em que refinamentos e desdobramentos da teoria possam se apoiar. Tem-se aqui uma espécie de princípio de correspondência: qualquer teoria que tenha por objetivo construir uma solução assintótica para este problema deve coalescer com a solução aqui apresentada no limite  $\sigma \rightarrow 0$ . De qualquer forma, os resultados são consistentes e permitem obter conclusões importantes, apresentadas nas próximas subseções, que detalham a solução assintótica do problema.

#### 4.2.1 Domínio e malha computacional

A solução assintótica foi calculada em um domínio computacional de dimensões  $l_i = l_h = 100D$  e  $l_o = 120D$ , ver fig. 3.1, um domínio suficientemente grande para a faixa de *Re* considerada, ver fig. 4.1. Uma técnica de refinamento adaptativo foi utilizada para se obter uma sequência de malhas cada vez mais refinadas. O Apêndice B mostra a análise de convergência quanto ao refinamento da malha. Os resultados aqui apresentados foram obtidos com a malha *M24* (ver apêndice B), cuja discretização apresenta 48020 graus de liberdade (g.d.l.) para a pressão e 190627 para cada uma das velocidades u e v, totalizando assim 429274 g.d.l. (na verdade, um número ligeiramente menor, pois uma pequena parcela destes g.d.l. está vinculada por condições essenciais de contorno). Detalhes do refinamento desta malha estão apresentados na figura abaixo.



Figura 4.3: Refinamento da malha nas proximidades do cilindro.

No que segue, grandezas calculadas tanto para a solução assintótica em  $\Omega^+$  quanto para a solução temporal em  $\Omega$  serão apresentadas. Os resultados da solução assintótica foram pós-processados para adquirirem o valor que teriam caso a solução fosse calculada no domínio completo  $\Omega$ , de acordo com a regra apresentada no apêndice A, para permitir a comparação com a simulação temporal.

### 4.2.2 Campo-base

A figura 4.4 mostra o campo de escoamento estacionário para Re = 60. O código de cores corresponde à componente horizontal do vetor velocidade em cada ponto,  $u_s(\mathbf{x})$ . Cabe lembrar que apenas a metade superior do domínio foi utilizada nos cálculos; por isso, o escoamento continua existindo mesmo para  $Re > Re_c$ . A metade inferior corresponde à simples reflexão da imagem em torno do eixo de simetria.



Figura 4.4: Componente horizontal de velocidade  $u_s(\mathbf{x})$  e linhas de corrente do escoamento estacionário para Re = 60.

As linhas de corrente mostram que o escoamento se descola da superfície do cilindro; elas se juntam mais à frente, em um ponto de estagnação na linha de simetria, formando assim uma bolha recirculante, como na fig. 2.1b, evidenciada pelas velocidades horizontais negativas na região entre o cilindro e este ponto. O tamanho da bolha cresce com *Re*, como ilustrado na fig. 4.1.

A figura a seguir mostra as linhas de corrente que delimitam a bolha recirculante para, na metade superior, o escoamento estacionário  $U_s$  (bolha maior) e o campo médio da solução assintótica  $U_0 = U_s + A_{LC}^2 U_{20}$  (bolha menor); já na metade inferior, é retratado o campo médio da simulação temporal  $H_0$ . Os números de Reynolds são 48 e 80.



(a) Re = 48

(b) Re = 80

Figura 4.5: Linhas de corrente para os campos estacionário e médio

Para Re = 48, a diferença entre as bolhas de  $U_s$  e  $U_0$  é quase imperceptível; só se nota que ambas são ligeiramente maiores que a bolha de  $H_0$ . De qualquer forma, para este número de Reynolds, as três apresentam quase o mesmo tamanho. Isso era de se esperar, pois ainda se está, no espaço de parâmetros, próximo a  $Re_{cr} \approx 46, 8$ . A fig. 4.5b mostra as mesmas bolhas para Re = 80. Na metade superior, a maior das bolhas é a do escoamento estacionário U<sub>s</sub>, que aumentou bastante com relação a Re = 48, enquanto a do campo médio  $H_0$ , na metade inferior, diminuiu. O campo médio da solução assintótica  $U_0$  apresenta uma bolha menor que a de  $U_s$ , contudo ainda sensivelmente maior que a de H<sub>0</sub>. Ou seja, a correção  $A_{LC}^2 U_{20}$  é insuficiente para recuperar a resposta da solução temporal. Este fato adquire ainda mais importância ao se considerar, como será apresentado mais à frente, que a amplitude do ciclo-limite  $A_{LC}$  da solução assintótica é bastante maior do que se esperava que fosse, principalmente no limite superior da faixa de Re considerada (ver fig. 4.8). Ainda assim, a diminuição causada pelo termo  $A_{LC}^2 \mathbf{U_{20}}$  não é grande o suficiente para recuperar o tamanho da bolha do campo médio. À medida que se aumenta o número de Reynolds, a diferença entre os tamanhos das bolhas se torna cada vez maior: o escoamento estacionário se torna cada vez mais distante do campo médio de escoamento, que é, como explicitado pela série de Fourier, o campo ao redor do qual a solução oscila com a frequência de Strouhal. Esta é a razão fundamental pela qual a solução assintótica não funciona bem para números de Reynolds mais elevados, e este ponto será mais elaborado no decorrer da análise dos termos em ordens superiores da solução assintótica.

#### 4.2.3 Estabilidade do campo-base

As partes real  $\sigma$  e imaginária  $\omega$  do autovalor  $\lambda$  associado ao modo instável E estão apresentadas na figura 4.6.



Figura 4.6: Partes real ( $\sigma$ ) e imaginária ( $\omega$ ) associados ao modo instável E

O valor aqui obtido para  $Re_c$  foi de 46, 8, em boa concordância com os 46, 6 Sipp e Lebedev (2007) e 46, 7 de Monkewitz (1996).

As legendas *SL07* e *M96a* referem-se aos trabalhos Sipp e Lebedev (2007) e Monkewitz (1996), respectivamente. O primeiro resolve apenas um problema de estabilidade, para  $Re = Re_c$ , e obtém o campo estacionário para números de Reynolds mais elevados em primeira ordem no parâmetro  $\varepsilon = Re_c^{-1} - Re^{-1}$  em sua análise de múltiplas escalas. Em outras palavras, o presente trabalho calcula o escoamento estacionário para cada Re de forma exata (ainda que numericamente), enquanto Sipp & Lebedev calculam uma aproximação para este campo a cada Re como uma correção de primeira ordem do escoamento estacionário calculado para  $Re = Re_c$ . O segundo é um trabalho experimental, em que  $\sigma$  e  $\omega$  são medidos a partir de extrapolações a amplitude zero de transientes obtidos operando-se sucção e injeção de massa na base do cilindro.

A figura 4.6a mostra que a taxa de crescimento do modo instável  $\sigma$  é muito bem predita pela análise de estabilidade linear, concordando dentro do limite da resolução gráfica da figura até  $Re \approx 65$ . Nota-se, ainda, que os resultados obtidos para  $\sigma$  no presente trabalho apresentam uma aderência melhor aos resultados experimentais de Monkewitz (1996) que os obtidos por Sipp e Lebedev (2007). Isso se deve, possivelmente, à maneira aproximada com que o campobase é calculado no referido trabalho.

A figura 4.6b ilustra como a frequência linear  $\omega$  varia com Re. A curva " $\omega_{St} - W98$ " refere-se à expressão para o número de Strouhal, multiplicada por  $2\pi$ , do seguinte ajuste experimental (WILLIAMSON; BROWN, 1998):

$$St = 0,2665 - \frac{1,0175}{Re},\tag{4.1}$$

Para  $Re = Re_c$ , a frequência de Strouhal segundo Williamson e Brown (1998) é muito próxima da frequência linear obtida por Monkewitz (1996), e também daquela calculada nas análises de estabilidade do presente trabalho e de Sipp e Lebedev (2007). A análise de estabilidade do campo-base estacionário é capaz de prever corretamente a frequência de oscilação para  $Re = Re_c$ ; para Re maiores,  $\omega$  não acompanha o crescimento da frequência  $\omega_{St}$  de oscilação na saturação. Este fato havia sido observado por Barkley (2006) (ver sua fig. (2a)). No presente trabalho,  $\omega$  cresce ligeiramente até  $Re \approx 67$ , quando então começa a cair, também lentamente. Este comportamento não é observado na análise apresentada por Sipp e Lebedev (2007), justamente em virtude de os problemas de estabilidades para  $Re > Re_c$  serem simplesmente correções lineares do problema para  $Re = Re_c$ ; por isso, é claro que as respostas de seu modelo terão comportamento monotônico com Re.

Os resultados experimentais de Monkewitz (1996) mostram uma frequência linear decaindo lenta e monotonicamente com *Re*. Deve-se discutir este fato sob dois prismas:

- no que diz respeito à validade dos resultados numéricos da análise de estabilidade linear, há que se dizer que a frequência linear medida por Monkewitz (1996) não tem exatamente o mesmo significado que o ω calculado no presente trabalho. A rigor, ω significa a frequência com a qual o sistema oscilaria instantes após ser levemente perturbado de seu estado estacionário. Já Monkewitz, além das dificuldades experimentais inerentes à medição de grandezas pequenas próximo a Re<sub>c</sub>, mantem o sistema "artificialmente estabilizado" para Re > Re<sub>c</sub> por meio de injeção de massa na base do cilindro. Ela é subitamente desligada, desestabilizando o sistema, e então se mede a frequência de pequenas oscilações a partir deste estado que, diga-se, não é o ponto de equilíbrio das equações de Navier-Stokes. Trata-se, em verdade, de um problema diferente, com condições iniciais diferentes. Logo, não se pode dizer que os resultados da análise de estabilidade linear não recuperam a frequência linear experimental. Verdadeiramente, não se sabe experimentalmente quanto ela vale para Re > Re<sub>c</sub>.
- já no que tange à capacidade de uma análise de estabilidade não-linear recuperar a frequência de Strouhal, espera-se, em qualquer teoria assintótica, que a aproximação de primeira ordem (linear) já esteja relativamente próxima à solução exata, e que os termos de ordens superiores (não-lineares) forneçam correções pequenas. No presente problema, como se observa tanto numérica quanto experimentalmente, a frequência linear ω não segue nem qualitativamente a não-linear ω<sub>St</sub> para Re > 60. Assim sendo, é de fato muito improvável que a teoria assintótica aqui proposta forneça bons resultados para Re > 60.

Por outro lado, Barkley (2006) mostra que uma análise de estabilidade em que se utiliza como campo-base o campo médio da simulação temporal ( $\mathbf{H}_0$ ) fornece uma frequência linear exatamente igual à de Strouhal ( $\omega = \omega_{St}$ ) e  $\sigma \approx 0$  em toda a faixa  $Re_c < Re < 180$ . Isto significa que o campo médio está, de certa forma, "impregnado" com a informação de que o sistema oscila ao redor dele com a frequência de Strouhal. Conforme visto na seção anterior, o campo médio se afasta cada vez mais do campo estacionário à medida que se aumenta o número de Reynolds (lembre que ambos são idênticos para  $Re < Re_c$ ). Ou seja, a solução real do problema fica cada vez mais longe do campo estacionário à medida que se avança em Re, razão pela qual vai se tornando cada vez mais difícil uma teoria assintótica recuperar toda a dinâmica não-linear que leva a solução do campo estacionário para a correta oscilação saturada. De qualquer forma, é interessante observar de que forma as soluções assintótica e completa se diferenciam, e isto será abordado na próxima seção.

#### 4.2.4 Modo instável e demais campos da solução assintótica

A figura a seguir mostra contornos da parte real da velocidade horizontal associada ao primeiro harmônico de ambas as soluções: Landau (metade superior das figuras) e Navier-Stokes (metade inferior). Os valores numéricos das velocidades foram omitidos porque a intenção desta figura é explorar as estruturas dos harmônicos, e não suas amplitudes. Estas serão discutidas na sequência. Para representar tais estruturas, escolheu-se os valores Re = 48, próximo a  $Re_c$ , e Re = 80, onde a solução assintótica já diverge consideravelmente da solução completa de Navier-Stokes. As fases são arbitrárias.



(a) Re = 48



(b) Re = 80

Figura 4.7: Metade superior:  $U_1$  (Landau); Metade inferior  $H_1$  (Navier-Stokes) - parte real da velocidade horizontal

Para ambos os números de Reynolds, observa-se que o modo instável, de fato, "mimetiza" a esteira de vórtices de von Kármán, e tem uma estrutura bastante parecida com a do primeiro harmônico de Fourier. O decaimento na direção do escoamento e a difusão lateralmente a ela são mais intensos para o harmônico que para o modo: o primeiro harmônico da solução assintótica (metade superior das figuras) persiste por uma distância maior a jusante. Note também que o ponto de máxima amplitude ocorre mais a montante para o harmônico que para o modo, e este efeito é tão mais pronunciado quanto maior é o número de Reynolds. Acredita-se que isso se deva ao efeito de termos não-lineares pulsando com frequência  $\omega_{St}$ , que influenciam o harmônico mas não o modo, pois não foi calculado o campo  $A_{LC}^3 U_{31}$ , que se somaria a  $A_{LC}\mathbf{E}$  para formar o primeiro harmônico da solução assintótica. O papel do termo não-linear é a redistribuição da energia do campo-base para o modo instável, e daí para as ordens superiores. Surgem escalas cada vez menores e que pulsam com maior frequência, sendo por essa razão mais rapidamente difundidas e dissipadas. Para Re mais elevados, tem-se maiores amplitudes e, por isso, deixar de considerar tais interações não-lineares aqui permite que o modo instável se "espraie" muito mais a jusante na solução assintótica que na solução completa de Navier-Stokes.

A figura 4.8 compara a amplitude do ciclo-limite prevista pelo modelo de Landau com a norma do primeiro harmônico da simulação temporal das equações de Navier-Stokes. Apesar de já se estar trabalhando com grandezas adimensionais, é interessante renormalizar as



amplitudes dos harmônicos pela norma do campo médio, que é de ordem 1.

Figura 4.8: Amplitudes do modo instável (Landau) e do primeiro harmônico (Navier-Stokes), ambas normalizadas pela norma do campo médio  $\|\mathbf{H}_0\|$ .

Observa-se excelente concordância entre a previsão do modelo assintótico e o primeiro harmônico para Re = 47. À medida que se aumenta o número de Reynolds, a amplitude da solução assintótica cresce mais que a do harmônico. Conforme mencionado acima, ao primeiro harmônico da solução assintótica A(t) E somar-se-ia o termo  $|A(t)|^2 A(t) \mathbf{Q_{31}}$ , de ordem  $\sigma^{3/2}$ , que não foi explicitamente calculado neste trabalho. Esperaria-se que este termo, resultante da interação não-linear entre o primeiro e o segundo harmônico, exercesse o papel de causar alguma dissipação no modo instável e limitar seu crescimento, ainda que moderadamente, por um fator  $\sim \mathcal{O}(\sigma^{3/2})$ . Assim, a amplitude do primeiro harmônico da solução assintótica seria ligeiramente menor do que é. Ainda assim, ressalta-se que a amplitude de equilíbrio da equação de Landau  $A_{LC}$  não seria alterada pelo cálculo de  $\mathbf{Q_{31}}$ .

O campo  $U_{22}$  também é semelhante ao segundo harmônico de Fourier, conforme ilustrado pela figura abaixo:



Figura 4.9: Metade superior:  $U_2$  (Landau); Metade inferior  $H_2$  (Navier-Stokes) - parte real da velocidade vetical

Em ambos os campos, observam-se estruturas com metade do comprimento de onda

daquele do modo instável. Isso é consequência direta de sua frequência de oscilação ser  $2\omega_{St}$ . Assim como no caso do primeiro harmônico, a difusão e a dissipação do harmônico de Fourier  $H_2$  são mais pronunciadas e o ponto de máxima amplitude ocorre mais a montante que em  $U_2$ . Além disso, o aumento do número de Reynolds faz com que a diferença entre ambos se torne ainda maior.

As amplitudes do segundo harmônico estão mostrados na figura abaixo, novamente normalizadas pela norma do campo médio.



Figura 4.10: Amplitude do segundo harmônico no modelo de Landau e na simulação temporal das equações de Navier-Stokes.

A concordância entre os resultados é boa apenas para  $Re \approx Re_c$ . Rapidamente, a amplitude do segundo harmônico de Landau se torna sensivelmente maior que o de Fourier, que, assim como o primeiro harmônico, parece tender a uma saturação, fato que não ocorre com o de Landau.

Comportamento semelhante aos dois primeiros tem também o terceiro harmônico:



Figura 4.11: Metade superior:  $U_3$  (Landau); Metade inferior  $H_3$  (Navier-Stokes) - parte real da velocidade horizontal

As duas principais características observadas no primeiro e segundo harmônicos também são vistas no terceiro: difusão e dissipação mais rápida em Navier-Stokes que em Landau e ponto de máximo da estrutura mais a montante para o harmônico de Fourier que para o de Landau. Também neste caso nota-se a amplificação de ambos os efeitos com o aumento do número de Reynolds.



Figura 4.12: Amplitude do terceiro harmônico no modelo de Landau e na simulação temporal das equações de Navier-Stokes.

Mais uma vez, a solução assintótica representa bem o terceiro harmônico apenas para  $Re \approx Re_c$ . Aumentando ligeiramente o número de Reynolds, a amplitude deste harmônico na solução assintótica já se torna enormemente elevada. Como visto na fig. 4.8, para Re > 50 a amplitude  $A_{LC}$  já é excessivamente grande. Conclui-se que este comportamento, assim como para o segundo harmônico, se deve aos fatores  $A_{LC}^3$  (repectivamente,  $A_{LC}^2$ ) presentes nestes termos.

#### 4.2.5 Modo adjunto

A figura 4.13 mostra contornos de velocidade u e v da parte imaginária do modo adjunto  $E_a$ :





(b)  $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}$  - Parte imaginária - velocidade v

Figura 4.13: Modo adjunto, Re = 50

O modo adjunto está concentrado na região a montante do cilindro. A razão para isso é que a matriz  $\mathcal{L}(\mathbf{U}_0)$  não é simétrica, em virtude de sua porção convectiva  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}_0)$ , ver eq. (3.30). Uma matriz qualquer A pode ser escrita como a soma de suas parcelas simétrica  $A_+$  e antissimétrica  $A_{-}$ , com:

$$\mathbf{A}_{+} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{t}); \mathbf{A}_{-} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{t}).$$

Agora,  $(\mathbf{A}_{+})^{t} = \mathbf{A} e (\mathbf{A}_{-})^{t} = -\mathbf{A}_{-}$ . Portanto, no problema adjunto, a parcela anti-simétrica de  $\hat{N}(U_0)$  aparece com sinal negativo, e isso é percebido como uma espécie de "convecção" no sentido oposto ao do escoamento. Daí decorre a estrutura de "vórtices" a montante do cilindro observada na figura.

#### Coeficientes de Landau 4.2.6

A figura abaixo mostra as partes real e imaginária dos coeficiente de Landau e  $c_3$  obtidas pelo modelo de Landau. A comparação com a simulação completa das equações de Navier-Stokes é feita de acordo com as equações 3.63.



Figura 4.14: Coeficientes  $\mu e c_3$ 

A parte real do coeficiente de Landau previsto pela teoria assintótica concorda bem com a simulação do escoamento apenas nas vizinhanças de  $Re_c$ . É claro (ver eq. 3.63) que este resultado é equivalente à concordância da amplitude exibida na fig. 4.8. Já a parte imaginária apresenta boa concordância até  $Re \approx 65$ , apesar de as curvaturas de  $\mu_i e \mu_i^{(NS)}$  serem diferentes. Assim, o coeficiente  $c_3$  é bem predito, comparando-se com a solução temporal, apenas para  $Re \approx Re_c$ . No presente trabalho, foi obtido  $c_3 = 3,74$  para Re = 47, semelhante ao valor 3,41 obtido por Sipp e Lebedev (2007) para Re = 46, 6. Já Dušek, Le Gal e Fraunié (1994) reportam o valor 2,7 para Re = 48 e Monkewitz (1996) encontrou experimentalmente o valor 2,90  $\pm$  0,45 na faixa 47  $\leq Re \leq 60$ , o que indica uma razoável imprecisão em suas medidas, como mostra sua sua fig. 4c, reproduzida em 4.14d, onde se notam imprecisões muito grandes para  $Re \approx Re_c$ , com predominância de valores elevados de  $c_3$  (entre 4 e 5), com os quais os valores aqui fornecidos pela teoria assintótica estão mais de acordo.
#### 4.2.7 Frequência de oscilação não-linear

Este resultado é consequência direta do cálculo do coeficiente de Landau exposto na seção anterior. Mesmo assim, merece uma seção à parte por ser o resultado mais esperado e importante do trabalho, porque é a predição da frequência na qual o fluido forçará a estrutura. A frequência de saturação da solução assintótica ( $\omega + \Delta \omega$ ) está apresentada na fig. 4.15, comparada com os resultados numéricos de Sipp e Lebedev (2007) e com a expressão proposta em Williamson e Brown (1998). A frequência linear  $\omega$  também é apresentada.



Figura 4.15:  $\omega + \Delta \omega e \omega_{St}$  vs. Re

Até Re ligeiramente acima de 50,  $\omega + \Delta \omega$  aproxima bem a frequência de Strouhal, tanto para o presente trabalho quanto, para o modelo de Sipp & Lebedev. Para Re mais elevados, entretanto, a correção de frequência  $\Delta \omega$  aqui proposta se torna excessivamente grande, fazendo com que  $\omega + \Delta \omega$  ultrapasse em muito a frequência de Strouhal para Re > 60. Este é o caso também, mas em bem menor medida, para a frequência de saturação proposta por Sipp & Lebedev.

#### 4.3 Discussão

Vamos agora resumir os resultados obtidos pelo modelo de Landau derivado neste trabalho: no limite  $\sigma \to 0$  ( $Re \to Re_c$ ), tem-se  $\sigma$  e  $\omega$  em boa concordância com experimentos; a correção da frequência é tal que as curvas de  $\omega + \Delta \omega$  como função de Re são praticamente tangentes; Já para Re ligeiramente mais elevados, a solução assintótica rapidamente se afasta da solução real, com amplitudes maiores que as observadas na simulação temporal, efeito este que se torna mais e mais intenso com o aumento de Re. A figura recapitula, para organizar as ideias, as amplitudes dos harmônicos para ambas as soluções, normalizadas pela norma do campo médio.



Figura 4.16: Normas dos harmônicos das soluções assintótica (a) e temporal (b), normalizadas por  $\|\mathbf{H_0}\|$ 

São dois os pontos principais a justificar a dificuldade da solução assintótica em recuperar amplitudes e frequências de saturação para  $Re > Re_c$ :

- o escoamento estacionário está muito distante da solução temporal do problema, o que faz com que seja impossível que a teoria assintótica seja capaz de recuperar toda a dinâmica não-linear que conduz à saturação. Esta distância fica evidente ao se perceber a diferença entre os campos estacionário U<sub>s</sub> e médio H<sub>0</sub>, bem como o comportamento da frequência linear com *Re*, que não segue nem qualitativamente a frequência de Strouhal: a primeira permanece aproximadamente constante até *Re* ≈ 70, quando começa a diminuir, enquanto a segunda aumenta monotonicamente. Além disso, a taxa de crescimento σ do campo-base cresce rapidamente com *Re*, enquanto que, para o campo-médio H<sub>0</sub>, em torno do qual a solução realmente oscila, σ ≈ 0 (BARKLEY, 2006).
- o coeficiente de Landau μ é tal que sua parte real é uma medida da taxa de amortecimento não-linear que limita a amplitude do modo instável; a parte imaginária guarda relação com Δω. Sua contrapartida nas equações de Navier-Stokes é a redistribuição de energia para as ordens superiores via termo não-linear, acelerando a dissipação viscosa. Para *Re* não muito maiores que *Re<sub>c</sub>*, observou-se que o valor obtido para μ é pequeno demais, ou seja: o amortecimento calculado por este modelo não é grande o suficiente para limitar o crescimento do modo instável. Em outras palavras, a projeção de N<sub>31</sub> na direção do modo adjunto E<sub>a</sub> é menor do que se esperava que fosse (ver 3.50).

Ambas as causas expostas acima estão relacionadas. Por um lado, como o campo-base e a solução temporal estão distantes, o caminho de um a outro é um percurso longo, e a tarefa

da solução assintótica é tentar construí-lo em um espaço bastante restrito: no caso, a variedade gerada pelo campo-base e o modo instável e "alargada" pelas interações não-lineares entre eles. Ou seja, a derivação da solução assintótica desconsiderou de antemão os demais modos (j > 2) da solução (3.33), sob o argumento de que a eles estão associados  $\sigma_j$  negativos. Desta maneira, só se considera a transferência de energia entre o campo-base e o modo instável, gerando os termos nas ordens superiores.

O fato de a amplitude crescer demais com *Re* significa que ocorre um desequilíbrio entre a injeção de energia do campo-base para o modo instável e a dissipação de energia pela viscosidade, após redistribuição não-linear para as ordens superiores. A consideração de apenas um modo na solução assintótica faz com que se dissipe muito pouca energia e o modo instável cresça desmesuradamente. Além dos gráficos das amplitudes, isto é também ilustrado pelas comparações entre as estruturas dos harmônicos das soluções assintóticas e os de Fourier (figs. 4.7, 4.9, 4.11): nota-se claramente uma dissipação de energia, a medida que se olha mais e mais a jusante do cilindro, mais intensa nos harmônicos de Fourier que nos de Landau, e este efeito aumenta consideravelmente com *Re*. Ou seja: tanto a amplitude dos harmônicos quanto sua estrutura espacial deixam claro que a dissipação de energia via interações não-lineares é muito menor para a solução assintótica do que se esperava que fosse. Desta forma, o modelo apresentado aqui não é capaz de reconstruir o longo caminho que conduz do campo-base à correta solução temporal: falta dissipação de energia para modelar corretamente o processo de saturação do crescimento do modo instável.

Agora, quais seriam as causas de a projeção da dinâmica do sistema neste espaço reduzido não fornecer bons resultados para  $Re > Re_c$ ? Apresentam-se aqui três argumentos plausíveis:

1. a existência de vários modos, por assim dizer, pouco estáveis ( $\sigma_j < 0$  mas não  $\ll 0$ ), como ilustra o espectro do escoamento para Re = 46, 6, extraído de Sipp e Lebedev (2007):



Figura 4.17: Espectro do escoamento para Re = 46, 6. Triângulos: modos antissimétricos; Círculos: modos simétricos. Fonte: (SIPP; LEBEDEV, 2007).

- 2.  $\mathcal{L}(\mathbf{U}_0)$  ser um operador não-normal. A não-normalidade faz com que os modos  $\mathbf{E}_j$  não sejam ortogonais entre si. Assim sendo, é possível que alguns destes modos subsistam, mesmo se  $\sigma_j < 0$ , desde que "alimentados" pelo modo instável via termo convectivo não-linear (CHOMAZ, 2005);
- 3. a existência de mecanismos não-modais de crescimento de instabilidades (ABDESSEMED et al., 2009), conforme explicado mais abaixo.

O *intervalo espectral* (MANNEVILLE, 2004) entre o modo instável e o menos estável dos demais não é grande. A cada ponto mostrado no gráfico da fig. 4.17 corresponde um autovetor  $\mathbf{E}_{\mathbf{j}}$ , j > 2 (ao complexo conjugado, corresponde  $\mathbf{E}_{\mathbf{j}}^*$ ). Como se vê, existe uma grande quantidade de modos na faixa estreita de  $-0,08 < \sigma < -0,05$  que podem - por hipótese ser tais que  $\mathcal{N}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{j}}$  não seja desprezível. Existindo pelo menos um modo estável com essa propriedade, talvez a sua dinâmica não deva ser desconsiderada, e levá-la em conta pode fazer com que se aumente a quantidade de energia retirada do modo instável, reduzindo o ímpeto de seu crescimento. No âmbito do modelo de Landau, isto deve se refletir em um aumento do coeficiente  $\mu$ . Como consequências, esperam-se menores  $\Delta \omega \in A_{LC}$ , fazendo com que o modelo forneça previsões melhores em uma faixa mais larga de Re.

Reforça este ponto o recente trabalho de Abdessemed et al. (2009), em que o crescimento transiente ("*transient growth*") da energia do escoamento ao redor de um cilindro foi considerado para alguns números de Reynolds. A ideia consiste, em linhas gerais, em determinar, para cada instante final fixo  $\tau$ , a forma de perturbação que apresenta o máximo crescimento transiente de sua energia. Foram identificadas estruturas diferentes do modo instável e que apresentam um elevado crescimento da energia quando se considera pequenos intervalos de tempo  $\tau$ . Mais do que isso, estas estruturas têm sua energia aumentada de forma muito mais significativa que o modo instável nos primeiros instantes logo após a deflagração da instabilidade. Note-se, aqui, que a técnica do crescimento transiente da energia é baseada na versão linearizada das equações de Navier-Stokes; por isso, este resultado deve ser interpretado como uma verificação de que existem instabilidades que inicialmente crescem mais rápido do que o modo instável, mas que - ainda de acordo com a análise linear - mais tarde acabam decaindo com o tempo, uma vez que não pertencem à variedade instável.

Na solução assintótica aqui apresentada, a ideia é que o modo instável cresce exponencialmente até ser grande o suficiente para os termos não-lineares passarem a ser importantes, e aí supõe-se que a interação não-linear do modo instável consigo mesmo e com o campo-base é que fornece o amortecimento que conduz à saturação. Contudo, observou-se que este modelo simplificado não fornece a quantidade, por assim dizer, adequada de amortecimento. É razoável concluir, então, que a estrutura que mais rapidamente cresce e assim "deflagra" as interações não-lineares, responsáveis pelo amortecimento do crescimento do modo instável, não é o próprio modo, ou seja: é alguma estrutura, modal ou não, que na solução assintótica está sendo desconsiderada "*a priori*". Isto pode, assim, ser responsável pelo déficit de amortecimento nãolinear observado pelo modelo de Landau aqui derivado. A figura abaixo mostra o modo de crescimento transiente ótimo para  $\tau = 8$ :



Figura 4.18: Vorticidade  $\omega_z$ :  $(-1 \le \omega_z \le 1)$  do modo com crescimento transiente ótimo para  $\tau = 8$ .

Note que esta estrutura está localizada na esteira próxima e pode guardar relação com a deformação do campo-base que o conduz à média no tempo. Dada a não-ortogonalidade dos modos, é possível que o modo instável, ao crescer, alimente esta ou alguma outra estrutura que seja responsável pela deformação do campo-base, cedendo energia a ela. Como se desconsiderou a chance de existir qualquer uma destas estruturas, então é claro que o campo-médio da assintótica ( $\mathbf{Us} + A_{LC}^2 \mathbf{U_{20}}$ ) não será capaz de recuperar a média no tempo, como observado no presente trabalho.

O que se conclui desta digressão é que pode haver estruturas, modais ligeiramente estáveis ou não-modais, com as quais o espaço onde a solução assintótica será procurada necessita ser expandido para além de simplesmente o modo instável. Entretanto, considerar mais modos significa elevar o número de graus de liberdade do modelo, aumentando a sua complexidade e dificultando sua análise e compreensão mais diretas, o que certamente não é desejável, por serem exatamente estes os méritos de modelos simplificados. Certamente não se deseja obter um conjunto de equações ainda mais complicadas que as próprias de Navier-Stokes. Além disso, as escolhas de quais dos modos menos estáveis ou de quais os valores de  $\tau$  cujas perturbações ótimas de crescimento transiente seriam incorporadas na base seriam totalmente arbitrárias.

Agora, se por um lado esta argumentação justificou os motivos pelos quais se acredita que a solução assintótica não funcione para  $Re \gg Re_c$ , por outro ela não forneceu ainda uma saída factível. Mas note que o modelo apresentado neste trabalho procurou o campo-base em um espaço de dimensão elevada: o número de graus de liberdade da discretização espacial. O escoamento estacionário que surgiu desta escolha está, como visto, longe da dinâmica real do sistema para  $Re > Re_c$ . Existe, portanto, a necessidade de se encontrar um campo-base que esteja próximo da solução temporal do problema, de forma que uma solução assintótica seja capaz de fornecer as correções não-lineares ao problema linear que conduzam corretamente a dinâmica do sistema da instabilidade linear à saturação não-linear.

Uma possível nova abordagem emerge da própria série de Fourier do escoamento tranistório, eq. (3.59), em que a solução temporal é escrita, com a precisão que se queira (controlando-se o número de harmônicos computados), como uma combinação linear de vetores de uma base - a base dos harmônicos de Fourier. A fig. 4.16b mostra que a maior parte da energia do escoamento oscilatório está concentrada no primeiro harmônico, sendo o segundo e o terceiro bem menores. Isso sugere que a projeção das equações de Navier-Stokes em um pequeno número de harmônicos de Fourier - talvez 3, ou poucos mais - restringe o sistema a um subespaço de dimensão muito menor e que é capaz - por construção - de representar a solução temporal. É plausível que as equações de Navier-Stokes aí projetadas tenham pelo menos um ponto de equilíbrio. Restringindo-se a busca pela solução a este subespaço menor, e que contém a solução, acredita-se ser mais provável que este ponto de equilíbrio, ou estado estacionário, esteja próximo da solução temporal, permitindo então a abordagem do problema com uma técnica assintótica semelhante à apresentada no presente trabalho. Como os harmônicos de Fourier geram a solução temporal com a precisão que se queira, parece bastante razoável que neste espaço seja possível construir o tal "caminho não-linear" que de fato conduza o escoamento estacionário à solução temporal.

O cálculo dos harmônicos de Fourier que formariam esta base requer, obviamente, a solução temporal completa do escoamento bidimensional, determinação da frequência de Strouhal e posterior decomposição desta solução em série de Fourier. Pode, então, parecer um contrassenso realizar simulações temporais para construir uma solução assintótica que recupere nada mais que a própria solução temporal. Entretanto, vale lembrar que o **objetivo final da pesquisa é construir uma solução assintótica, baseada em cálculos de escoamentos bidimensionais, capaz de recuperar a solução tridimensional por meio de um modelo de Ginzburg-Landau e forma semelhante à apresentada em Aranha (2004). Por isso, a simulação temporal do escoamento temporal vale a pena, uma vez que se economizará custosas simulações tridimensionais. Além disso há também, evidentemente, o interesse teórico e científico em demonstrar uma ligação fundamental entre as equações de Navier-Stokes e Ginzburg-Landau. Em resumo, a projeção das equações de Navier-Stokes no subespaço solenoidal de alguns harmônicos de Fourier parece ser capaz de fazer com que a teoria assintótica seja não só válida em uma faixa mais larga de** *Re***, mas também que o modelo de Ginzburg-Landau a ela associado permita predições corretas dos efeitos tridimensionais.** 

#### 5 CONCLUSÃO

Este texto apresentou alguns resultados de pesquisa obtidos durante o programa de doutoramento. Duas linhas foram seguidas: o desenvolvimento de uma nova formulação para a condição de contorno na esteira de um corpo rombudo e a derivação da equação de Landau como solução assintótica das equações de Navier-Stokes.

A condição de contorno de impedância fluida se mostrou muito eficiente para a solução de um problema estacionário extremamente sensível a pequenas variações nas condições de contorno, traduzíveis no tamanho do domínio necessário para que condições de contorno de *"outflow"* sejam aplicadas com precisão. A utilização da impedância permitiu calcular o escoamento com um domínio consideravelmente menor, economizando recursos computacionais. Além disso, o próprio desenvolvimento teórico tem a sua importância, uma vez que a formulação pode ser facilmente estendida para problemas mais gerais, sem condições de simetria e em regime transitório. Contudo, neste caso, sua utilização trouxe benefícios apenas marginais para a solução do problema.

Já a derivação da equação de Landau a partir de Navier-Stokes mostrou-se válida para  $Re \approx Re_c$ , tendo sua precisão deteriorada rapidamente à medida que se aumenta o número de Reynolds.

Para que o objetivo final de construir uma ferramenta capaz de predizer VIV em *risers* em situações de interesse prático ( $Re \approx 10^5$ ), é necessário:

- Comprovar que se pode derivar as equações de Landau e Ginzburg-Landau a partir das equações de Navier-Stokes, definindo um procedimento de cálculo para os seus coeficientes válido para, pelo menos, Re ≤ 1000;
- Resolver numericamente a equação de Ginzburg-Landau além desta faixa, com os coeficientes calculados conforme o método acima, e checar a validade do modelo contra resultados da literatura para um cilindro fixo;
- acrescentar ao modelo de Ginzburg-Landau termos responsáveis pelo acoplamento fluido-

estrutura e pela variação dos coeficientes com a direção e intensidade da corrente, definindo assim uma equação de Ginzburg-Landau estendida;

• simular o modelo estendido em casos com geometrias e correntes de situações práticas e comparar os resultados com os observados *in loco* nos risers.

Foi dado um passo importante na consecução do primeiro dos objetivos, no que tange à equação de Landau. Este trabalho verificou a validade da derivação da equação de Landau como solução assintótica das equações de Navier-Stokes no limite  $Re \approx Re_c$ , que equivale a  $\sigma \approx 0$ . Para  $\sigma$  finito, observou-se que as predições do "*shift*" de frequência não-linear são muito elevadas, o que - conjectura-se - estar relacionado a uma impossibilidade do escoamento estacionário de servir de base para a teoria assintótica, uma vez que se encontra cada vez mais distante, à medida que se aumenta o número de Reynolds, do campo médio, que é em torno do qual a solução verdadeiramente oscila.

Acredita-se ser possível contornar esta dificuldade projetando-se as equações de Navier-Stokes no espaço gerado por um pequeno número de harmônicos de Fourier de uma solução temporal, que contêm o campo médio (é o harmônico de ordem zero) e os primeiros harmônicos oscilantes, que contemplam praticamente toda a energia do escoamento. Neste espaço, seria calculado o campo-base como ponto de equilíbrio do sistema projetado e os demais termos da solução assintótica, da mesma forma que a teoria exposta aqui, conduzindo aos coeficientes de Landau, conforme digressão apresentada no capítulo anterior. Apesar de ser necessário realizar simulações transientes nesta segunda abordagem, existe a vantagem de os problema de valor característico, computacionalmente custosos, serem realizado em um espaço reduzido, com matrizes de dimensão da ordem de 10. Isto posto, conclui-se o trabalho atestando que foi demonstrada a viabilidade de se deduzir a equação de Landau a partir das equações de Navier-Stokes (em que pese a estreita faixa de números de Reynolds em que os resultados são satisfatórios) e reafirmando a existência de possibilidades concretas para estender mais esta faixa.

O autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio dado a este trabalho na forma de bolsa de doutorado direto e à PETROBRAS pelo apoio a seu grupo de pesquisa.

#### REFERÊNCIAS

ABDESSEMED, N. et al. Transient growth analysis of the flow past a circular cylinder. *Physics of Fluids*, v. 4, n. 21, 2009.

ALBARÉDE, P.; PROVANSAL, M. Quasi-periodic cylinder wakes and the Ginzburg-Landau model. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 291, p. 191–222, 1995.

ALBARÉDE, P.; PROVANSAL, P.; BOYER, L. Modélisation par l'équation de ginzburglandau du sillage tridimensionell d'un obstacle allongé. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 310 - Série II, p. 459–464, 1990.

ARANHA, J. A. P. Weak three-dimensionality of the flow around a slender cylinder: The ginzburg-landau equation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXVI, p. 355–367, 2004.

ARANHA, J. A. P. et al. Flow around a slender circular cylinder: a case study on distributed Hopf bifurcation. *Journal of Mathematical Problems in Engineering*, XXVI, p. 16 pages, 2009.

ATTA, C. van; GHARIB, M. Ordered and chaotic vortex streets begind circular cylinders at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 174, p. 113, 1988.

BARBEIRO, I. Comunicação particular. 2006.

BARKLEY, D. Linear analysis of the cylinder wake mean flow. *Europhysics Letters*, v. 75, n. 5, p. 750–756, 2006.

BARKLEY, D.; HENDERSON, R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 322, p. 215–241, 1996.

BEARMAN, P. W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 16, p. 195, 1984.

BÉNARD, H. Formation des centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement. C. R. Acad. Sci. Paris, n. 177, p. 839, 1908.

BERGER, E.; WILLE, R. Periodic flow phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 4, p. 313, 1972.

CHOMAZ, J.-M. Global instabilities in spatially developing flows: non-normality and nonlinearity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 357–392, 2005.

CUNHA, L. D. *Vibração induzida por vórtices: análise crítica de modelos fenomenológicos.* Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005.

DAVIS, T. A.; DUFF, I. F. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, v. 18, n. 1, p. 140–158, 1997.

DRAZIN, P. G.; REID, W. H. *Hydrodynamic Stability*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1981.

DUŠEK, J.; LE GAL, P.; FRAUNIÉ, P. A numerical and theoretical study of the first Hopf bifurcation in a cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 264, p. 59–80, 1994.

ECKMANN, J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, v. 53, p. 643–656, 1981.

FACCHINETTI, M. L.; LANGRE, E. de; BIOLLEY, F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, 2004.

FORNBERG, B. Steady incompressible flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600. *Journal of Computational Physics*, v. 61, p. 297–320, 1985.

GASTER, M. Vortex shedding from slender cones at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 38, p. 565, 1969.

GASTER, M. Vortex shedding from circular cylinders at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 46, p. 749, 1971.

GERICH, D.; ECKELMANN, H. Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 122, p. 109, 1982.

GINZBURG, V. L.; LANDAU, L. D. On the theory of superconductivity. *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.*, v. 20, p. 1964–1082, 1950.

HARTLEN, R. T.; CURRIE, I. G. Lift oscillator model of vortex-induced vibrations. In: *Proceedings of the ASCE*. [S.l.: s.n.], 1970.

HÉCHT. *FreeFEM++ : third edition, version 3.5.* [S.1.]: Disponível em www.freefem.org, 2009.

HÉCHT, F. BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator. version 1.00. [S.l.], December 2006.

HEISENBERG, W. Über stabilität and turbulenz von strömungen. *Annal. Physik Leipzig* (4), v. 74, p. 577–627, 1924.

HELMHOLTZ, H. von. Über diskontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, v. 23, p. 215–228, 1868.

HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Dynamics*, v. 352, p. 65–112, 1997.

HUANG, W. Metric tensors for anisotropic mesh generation. *Journal of Computational Physics*, v. 204, p. 633–665, 2005.

HUEBNER, K. et al. The finite element method for engineers. [S.l.]: Wiley Interscience, 2001.

HUERRE, P.; MONKEWITZ, P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 22, p. 473–537, 1990.

IWAN, W. D.; BLEVINS, R. D. A model for vortex-induced oscillation of structures. *J. Appl. Mech.*, n. 41, p. 581–586, 1975.

JACKSON, C. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 182, p. 23–45, 1987.

KARNIADAKIS, G. E.; ISRAELI, M.; ORSZAG, S. High order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 97, p. 414–443, 1991.

KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. S. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. *Journal of Fluid Mechancis*, v. 199, p. 441, 1989.

KELVIN, L. Hydrokinetic solutions and observations. Phil. Mag., v. 42, p. 362-377, 1871.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. Fluid mechanics. [S.l.]: Mir, 1971.

LEHOUCQ, L.; SORENSEN, D.; YANG, C. ARPACK users guide: solution of large-scale eigenvalue problemas with implicitly restarted Arnoldi methods. [S.l.]: Disponível em www.caam.rice.edu/software/ARPACK, 1997.

LEHOUCQ, R.; SORENSEN, D. Deflation techniques for an implicitly restarted arnoldi ethod. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, v. 17, n. 4, p. 789–821, 1996.

LEWEKE, T.; PROVANSAL, M. Model for the transition in bluff body wakes. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 72, n. 20, p. 3174–3177, May 1994.

LEWEKE, T.; PROVANSAL, M.; BOYER, L. Stability of vortex shedding modes in the wake of a ring at low Reynolds numbers. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 71, n. 21, p. 3469–3472, November 1993.

LIN, C. C. On the stability of parallel flows. *Quart. Appl. Math.*, v. 3, p. 117–42, 218–34, 277–301, 1945.

LIN, C. C. The theory of hydrodynamic stability. [S.l.]: Cambridge University Press, 1955.

MANNEVILLE, P. Instabilities, chaos and turbulence. [S.l.]: Imperial College Press, 2004.

MATHIS, C.; PROVANSAL, M.; BOYER, L. The Bénard-von kármán instability: an experimental study near the threshold. *J. Phys. Lett. (Paris)*, n. 45, p. L483–L491, 1984.

MONKEWITZ, P. A. Modeling of self-excited wake oscillations by amplitude equations. *Experimental Thermal and Fluid Science*, n. 12, p. 175–183, 1996.

MONKEWITZ, P. A.; WILLIAMSON, C. H. K.; MILLER, G. D. Phase dynamics of Kármán vortices in cylinder wakes. *Physics of Fluids*, v. 1, n. 8, p. 91–96, 1996.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 57–96, 2003.

ORR, W. M. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. In: *Proc. Roy. Irish Acad. A.* [S.l.: s.n.], 1907. v. 27, p. 9–68 e 69–138.

PROVANSAL, M.; MATHIS, C.; BOYER, L. Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 182, n. 182, p. 1–22, 1987.

RAYLEIGH, L. On the instability of jets. Proc. London. Math. Soc., v. 10, p. 4–13, 1879.

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certaind fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, v. 11, p. 57–70, 1880.

REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether their motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lonon*, v. 174, p. 935–82, 1883.

ROSHKO, A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. *NACA Report*, n. 1191, 1954.

RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, v. 20, p. 167–192, 1971.

SCHUMM, M.; BERGER, E.; MONKEWITZ, P. A. Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies and their control. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 271, p. 17–53, 1994.

SHRAIMAN, B. I. et al. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D*, n. 57, p. 241–248, 1992.

SIPP, D.; LEBEDEV, A. Global stability analysis of mean flows: a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 593, p. 333–358, 2007.

SOMMERFELD, A. Ein beitrag zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flüssigkeitsbewegungen. In: *Proceedings 4th Internation Congress of Mathematicians*. [S.l.: s.n.], 1908. III, p. 116–24.

SREENIVASAN, K. R. Transition and turbulence in fluid flows and low-dimensional chaos. In: DAVIS, S. H.; LUMLEY, J. L. (Ed.). [S.l.]: Springer-Verlag, 1985. p. 41–66.

SREENIVASAN, K. R.; STRYKOWSKI, P. J.; OLINGER, D. J. Hopf bifurcation, Landau equation and vortex shedding behind circular cylinders. In: GHIA, K. N. (Ed.). *Proc. Forum on Unsteady Flow Separation*. [S.I.]: ASME Philadelphia, 1986. p. 1–13.

STRYKOWSKI, P. J.; SREENIVASAN, K. R. On the formation and suppression of vortex shedding at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 218, p. 71–107, 1990.

THOMPSON, M. C. T.; LE GAL, P. The Stuart-Landau model applied to wake transition revisited. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, v. 23, p. 219–228, 2004.

TOLLMIEN, W. über die entstehung von turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., p. 21–24, 1929.

TOLLMIEN, W. Asymptotische integration der störungsdifferentialgleichungen ebener laminarer strömungen bei hohen reynoldschen zahlen. Z. Angew. Math. Mech., v. 25/27, p. 33–50/70–83, 1947.

TRITTON, D. J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 6, p. 547, 1959.

TRITTON, D. J. A note on vortex streets behind circular cylinders at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 45, p. 203, 1971.

VAN DYKE, M. An album of fluid motion. [S.l.]: Parabolic Press, 1982.

VON KÁRMÁN, T. Über den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. *Göttinger Nachrichten*, n. 509, p. 509–517, 1911.

WILLIAMSON, C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechancis*, v. 206, p. 579–627, 1989.

WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 28, p. 477–539, 1996.

WILLIAMSON, C. H. K.; BROWN, G. L. A series in 1/sqrtRe to represent the strouhalreynolds number relationship of the cylinder wake. *Journal of Fluids and Structures*, v. 12, p. 1073–1085, 1998.

YANG, X.; ZEBIB, Z. Absolute and convective instability of a cylinder wake. *Physics of Fluids A*, v. 1, p. 689–96, 1989.

# APÊNDICE A - PROCEDIMENTO DE RENORMALIZAÇÃO $\Omega^+ \rightarrow \Omega$

Lembrando que  $\Omega$  é o domínio inteiro ( $_h \leq y \leq l_h$ )  $\Omega^+$  apenas a metade superior ( $0 \leq y \leq l_h$ )), então:

$$\int_{\Omega} dS = 2 \int_{\Omega^+} dS \tag{A.1}$$

A solução assintótica é calculada na região  $\Omega^+$  para se tomar proveito das simetrias do problema, o que acelera bastante a convergência no problema de valor característico em casos em que cálculos em  $\Omega$  (ou seja, sem utilizar simetrias) não convergem ou convergem muito lentamente.

Sendo  $(\cdot)$  uma grandeza qualquer, cujo valor se quer conhecer para  $\Omega$ , então a mesma grandeza calculada em  $\Omega^+$  será denotada  $(\cdot)^+$ . Na sequência, são mostrados os procedimentos de cálculo para, partindo das grandezas calculadas no FreeFem em  $\Omega^+$ , obter as grandezas correspondentes em  $\Omega$ , para comparação com os harmônicos de Fourier, também calculados em  $\Omega$ .

#### A.1 Campo-base

O campo-base é simétrico com relação ao eixo x e seu cálculo não depende do modo instável nem de sua normalização. Então, em cada ponto com y > 0,  $\mathbf{u}_{s}^{+} = \mathbf{u}_{s}$ . Para y < 0, vale a simetria ou antissimetria deste e dos demais campos abordados neste apêndice. Para o campo estacionário, tem-se:

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{s}}\| = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{2} dS\right)^{1/2}$$
$$= \left(2 \int_{\Omega^{+}} \mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{+2} dS\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{2} \|\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{+}\|.$$

### A.2 Modo instável

O modo  $\mathbf{e}^+$  calculado no FreeFem é tal que:

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{e}^{+*} \cdot \mathbf{e}^+ \, dS = 1. \tag{A.2}$$

Quero o modo e tal que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \, dS = 1. \tag{A.3}$$

O modo e é anti-simétrico com relação ao eixo x. Logo, o produto  $e^* \cdot e$  é simétrico, ou seja:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \, dS = 2 \int_{\Omega^+} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \, dS, \tag{A.4}$$

de onde se conclui que, para cada ponto x, tem-se:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}^+,\tag{A.5}$$

pois, desta forma, garante-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \, dS = 2 \int_{\Omega^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}^{+*} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}^+ \, dS = \int_{\Omega^+} \mathbf{e}^{+*} \cdot \mathbf{e}^+ \, dS = 1 \tag{A.6}$$

#### A.3 Termos em segunda e terceira ordens

O campo  $q_{20}$  é solução de um problema linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cdot \mathbf{u_{20}} &= -\mathbf{n_{20}} = (\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}^* + (\mathbf{e}^* \cdot \nabla)\mathbf{e} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^+ \cdot \nabla)\mathbf{e}^{+*} + \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{+*} \cdot \nabla)\mathbf{e}^+ = \frac{1}{2}(-\mathbf{n_{20}}^+) \end{aligned}$$

Portanto, para cada x:

$$\mathbf{u_{20}} = \frac{1}{2} \, \mathbf{u_{20}}^+. \tag{A.7}$$

De forma inteiramente análoga:

$$\mathbf{u_{22}} = \frac{1}{2} \mathbf{u_{22}}^+ \tag{A.8}$$

$$\mathbf{n_{31}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{n_{31}}^+ \tag{A.9}$$

$$\mathbf{u_{33}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \, \mathbf{u_{33}}^+. \tag{A.10}$$

#### A.4 Modo Adjunto

O modo adjunto  $\mathbf{e}^+_{\mathbf{a}}$  calculado no FreeFem++ é renormalizado de forma que:

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{e}_{\mathbf{a}}^{+*} \cdot \mathbf{e}^+ \, dS = 1. \tag{A.11}$$

Para que se tenha

deve-se fazer então:

$$\int_{\Omega} \mathbf{e_a}^* \cdot \mathbf{e} \, dS = 1,$$
$$\mathbf{e_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e_a^+},$$

#### A.5 Coeficiente de Landau e Amplitude

O coeficiente de Landau  $\mu^+$  é calculado em  $\Omega^+$  como:

$$\mu^{+} = \int_{\Omega^{+}} \mathbf{e_{a}}^{+} \cdot \mathbf{n_{31}}^{+} \, dS, \qquad (A.13)$$

(A.12)

de forma que  $\mu$  em  $\Omega$  vale:

$$\mu = \int_{\Omega} \mathbf{e_a} \cdot \mathbf{n_{31}} \, dS$$
$$= 2 \int_{\Omega^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e_a^+} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{n_{31}^+} \, dS$$
$$= \frac{1}{2} \mu^+.$$

Desta forma, a amplitude do ciclo-limite em  $\Omega$  se relaciona com aquela calculada em  $\Omega^+$  da seguinte forma:

$$A = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\frac{1}{2}\mu^{+}}} = \sqrt{2}A^{+}.$$
 (A.14)

#### A.6 Harmônicos da Solução Assintótica

Casa um dos harmônicos da solução assintótica do escoamento é (lembrando que o termo  $u_{31}$  não é calculado):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u_0}\| &= \|\mathbf{u_s} + A^2 \mathbf{u_{20}}\| \\ &= \left( \int_{\Omega} \left( \mathbf{u_s} + A^2 \mathbf{u_{20}} \right)^2 dS \right)^{1/2} \\ &= \left( 2 \int_{\Omega^+} \left( \mathbf{u_s^+} + 2(A^+)^2 \frac{1}{2} \mathbf{u_{20}^+} \right)^2 dS \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left( \int_{\Omega^+} \left( \mathbf{u_s^+} + (A^+)^2 \mathbf{u_{20}^+} \right)^2 dS \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \|\mathbf{u_0^+}\|; \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}_1\| = \left(\int_{\Omega} A\mathbf{e}^* \cdot A\mathbf{e} \, dS\right)^{1/2} = A = \sqrt{2}A^+;$$

$$\|\mathbf{u_2}\| = \left(\int_{\Omega} A^2 \mathbf{u_{22}}^* \cdot A^2 \mathbf{u_{22}} \, dS\right)^{1/2}$$
  
=  $A^2 \left(2 \int_{\Omega^+} \frac{1}{2} \mathbf{u_{22}^+}^* \cdot \frac{1}{2} \mathbf{u_{22}^+} \, dS\right)^{1/2}$   
=  $2(A^+)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{\Omega^+} \mathbf{u_{22}^+}^* \cdot \mathbf{u_{22}^+} \, dS\right)^{1/2}$   
=  $\sqrt{2} (A^+)^2 \|\mathbf{u_{22}^+}\|;$ 

$$\|\mathbf{u_3}\| = \left(\int_{\Omega} A^3 \mathbf{u_{33}}^* \cdot A^3 \mathbf{u_{33}} \, dS\right)^{1/2}$$
  
=  $A^3 \left(2 \int_{\Omega^+} \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{u_{33}^+}^* \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{u_{33}^+} \, dS\right)^{1/2}$   
=  $2\sqrt{2}(A^+)^3 \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega^+} \mathbf{u_{33}^+}^* \cdot \mathbf{u_{33}^+} \, dS\right)^{1/2}$   
=  $\sqrt{2} (A^+)^3 \|\mathbf{u_{33}^+}\|.$ 

Assim, sendo, foi demonstrado que basta multiplicar cada um dos resultados obtidos em  $\Omega^+$  por  $\sqrt{2}$  para que se obtenha o valor para comparar com os harmônicos de Fourier. Este resultado, agora, pode parecer trivial, mas era necessário demonstrá-lo.

## APÊNDICE B - ESTUDO DE CONVERGÊNCIA QUANTO AO REFINAMENTO DE MALHA

A determinação de uma solução numérica requer a construção de uma malha computacional. Para que se obtenha uma solução de boa qualidade, é necessário que a malha seja adequadamente refinada em locais onde o escoamento apresenta gradientes intensos (por exemplo, camadas-limite e regiões de separação e recirculação do escoamento). O refinamento excessivo em locais onde ele não é necessário causa o dispêndio exagerado de tempo e recursos computacionais que poderiam ser utilizados de forma mais produtiva.

Não é tarefa fácil construir uma malha que seja adequadamente refinada nos locais onde o refinamento é necessário, e grosseira onde ele não o é. O trabalho se torna ainda mais difícil e moroso quando se quer calcular diferentes campos, com topologias diversas (ou seja, com gradientes mais intensos em regiões distintas do domínio), como é o caso da solução assintótica da equação de Navier-Stokes apresentada neste trabalho. Como visto no capítulo de resultados, o campo-base possui na região anterior do cilindro uma camada-limite que se descola, formando uma bolha recirculante atrás dele. Já o modo instável é composto de estruturas vorticais que se espraiam por uma boa distância a jusante. O segundo e o terceiro harmônico apresentam estruturas com, respectivamente, metade e um terço do comprimento de onda daquelas do modo instável. Além disso, o modo adjunto tem gradientes intensos na região a montante do cilindro, uma porção do domínio onde o escoamento-base é próximo de potencial e, por isso, em simulações rotineiras de escoamentos não é necessário refinar a malha, o que não é o caso aqui, uma vez que o valor do coeficiente de Landau calculado depende do modo adjunto, ver (3.50).

Os cálculos da solução assintótica envolvem produtos de termos calculados em diferentes estágios. Por exemplo, o cálculo da forçante  $N_{31}$  envolve tanto o modo instável quanto o segundo harmônico, ver (3.42). Por esta razão, é interessante que todos os campos sejam calculados em uma mesma malha. Isso não é, a rigor, necessário, visto que é possível construir uma ferramenta que faça a interpolação de campos calculados em uma malha para outra. Contudo, tal tarefa seria dispendiosa e causaria um certo desvio de foco nas atividades de pesquisa. Por isso, optou-se por calcular todos os campos em uma mesma malha, refinada de uma forma a satisfazer simultaneamente e de forma ponderada as necessidades de refinamento dos campos mais importantes da solução assintótica.

Em abordagens numéricas, soluções exatas não estão, em geral, disponíveis, de forma que é impossível calcular rigorosamente o erro de interpolação. Adotam-se então *indicadores de erro* que são medidas *locais* da necessidade de maior ou menor refinamento em cada região do domínio. Existem algumas estratégias padrão de refinamento de malha (HUEBNER et al., 2001). As abordagens mais comuns são chamadas na literatura de método h, método p, método r e método h/p. Em todas elas, parte-se de uma solução calculada em uma malha relativamente grosseira com funções de interpolação de baixa ordem. Indicadores de erro são calculados em todo o domínio e então adota-se uma ou outra técnica de refinamento onde os erros forem maiores e de de-refinamento onde eles forem menores, com o objetivo final de se obter um campo de indicadores de erros relativamente uniforme. De forma resumida:

- •No método *h*, diminui-se a dimensão característica  $\Delta l$  dos elementos nas regiões onde se encontram maiores erros de interpolação e aumenta-se  $\Delta l$  onde esses erros são pequenos;
- •No método *p*, aumenta-se a ordem *p* do polinômio de interpolação do MEF nas regiões onde há maior erro;
- •No método *r*, mantém-se o número de elementos e suas conectividades, mas os nós são movidos, de forma a se distorcer o elemento de maneira conveniente;
- O método h/p combina os métodos h e p, alterando tanto as dimensões dos elementos quanto o grau de interpolação das funções de forma.

Para este trabalho, optou-se por uma variação do método h que a literatura chama de "*adaptive remeshing*" em lugar do mais comum "*adaptive refinement*". Aqui, não se refina ou engrossa a malha mantendo-se nós originais onde estão. Nas regiões onde a malha é alterada, ela é criada novamente, mudando-se o valor-base de  $\Delta l$ , que é diminuído onde os *indicadores de erro* forem maiores, e aumentado onde forem menores.

Para o refinamento da malha, é necessária uma medida *local* do erro de interpolação. Caso a solução analítica u fosse conhecida, calcular-se-ia o erro em um ponto x, para a componente de velocidade u, como  $E_u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u_{EF}(\mathbf{x})$ , sendo  $u_{EF}(\mathbf{x})$ , naturalmente, a solução numérica pelo MEF. Quando não se conhece a solução exata, busca-se um *indicador* de erro. A ideia se baseia no argumento delineado a seguir. Para a componente v, o procedimento é inteiramente análogo. O argumento aqui exposto, por simplicidade, leva em conta que as funções de forma são lineares.

Seja um ponto  $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$  dentro de um elemento triangular *e* que contém os nós 1, 2 e 3, de coordenadas  $\mathbf{x_1}$ ,  $\mathbf{x_2} \in \mathbf{x_3}$ . Expandindo em série de Taylor em torno de  $\mathbf{x_0}$  a expressão para o erro  $E_u^e$  em um ponto  $\mathbf{x} \in e$ , tem-se:

$$E_u^e(\mathbf{x}) = E_u({}^e\mathbf{x_0}) + \left[\nabla E_u^e(\mathbf{x_0})\right]^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^t \cdot \left[H\left(E_u^e(\mathbf{x_0})\right)\right] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathcal{O}\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|^3,$$

em que  $H(E_u^e)$  é a matriz *Hesseana* das segundas derivadas de  $E_u^e$ :

$$H\left(E_{u}^{e}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{2}E_{u}^{e}}{\partial^{2}x} & \frac{\partial^{2}E_{u}^{e}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^{2}E_{u}^{e}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^{2}E_{u}^{e}}{\partial^{2}y} \end{bmatrix}$$

Agora, assume-se que a solução de elementos finitos seja *exata* nos nós. Isso só é verdade, rigorosamente, para problemas regidos por E.D.P. elípticas (HUEBNER et al., 2001). Por esta razão é que a grandeza que se está buscando não é uma *medida* de erro mas apenas um *indicador*. Assim sendo, para i = 1, 2, 3, impõe-se  $E_u(\mathbf{x_i}) = E_v(\mathbf{x_i}) = 0$ 

Tome-se agora  $\mathbf{x_0} = \mathbf{x_m}$ , o ponto dentro do elemento *e* em que o erro é máximo. Neste ponto,  $\nabla E_u^e(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$ . Desprezando termos de ordem  $\geq 3$  tem-se, em cada um dos nós i = 1, 2, 3:

$$E_u^e(\mathbf{x_m}) \simeq -\frac{1}{2} (\mathbf{x_i} - \mathbf{x_m})^t \left[ H\left( E_u^e(\mathbf{x_m}) \right) \right] (\mathbf{x_i} - \mathbf{x_m})$$

Sendo  $\Delta l$  uma dimensão característica do elemento triangular, por exemplo, o comprimento da maior aresta. Certamente vale, para pelo menos um dos nós, que:

$$\|\mathbf{x_i} - \mathbf{x_m}\| < \frac{\Delta l}{2}.$$

Então, módulo do indicador do erro de interpolação para a componente u é limitado por:

$$E_u^e \le \frac{(\Delta l)^2}{8} \|H\left(E_u^e(\mathbf{x_m})\right)\|$$

Como já foi dito, a solução exata não é conhecida. Entretanto, Huebner et al. (2001) afirma que se pode aproximar a Hesseana do erro como:

$$H\left(E_u^e(\mathbf{x_m})\right) \simeq H\left(u_{FE}^e\right).$$

Procedimentos de refinamento de malha consistem basicamente em calcular, em cada

ponto, o *tensor métrico* M, definido a partir de uma norma de matriz Hesseana (HUANG, 2005). Uma delas é a que se baseia em sua decomposição na base de autovetores:

$$M = \|H\left(u_{FE}^{e}\right)\| = Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{1} & 0\\ 0 & \lambda_{2} \end{bmatrix} \cdot Q^{T},$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores e Q é a matriz-coluna de autovetores de  $H(u_{FE}^e)$ .

O software FreeFem++ dispõe de uma funcionalidade de construção e refinamento de malhas denominada BAMG (do inglês "*Bidimensional Anistropic Mesh Generator*" - Gerador de malhas anisotrópicas bidimensionais) (HÉCHT, 2006), que utiliza, para o caso padrão de equipartição do erro relativo, o tensor métrico:

$$M = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot Coef^2} \cdot \frac{\|H\left(u_{FE}^e\right)\|}{max\{CutOff, \|u_{FE}^e\|\}},$$

em que  $\epsilon_0$  é um parâmetro especificado pelo usuário para limitar o erro de interpolação linear que se quer obter, com valor padrão de  $10^{-2}$ ; *Coef* é um coeficiente multiplicativo do tamanho de malha (padrão: 1); *CutOff* é o limite inferior do cálculo de erro relativo, cujo padrão vale  $10^{-6}$ .

No FreeFem++ é possível, com apenas um comando, refinar uma malha levando em conta até quatro campos escalares reais. Como um número de campos maior que este foi calculado, foi necessário definir uma forma de refinar a malha que levasse em conta os campos mais importantes. Para isso, definiu-se:

$$U_r = U_s + A_{LC} \cdot Real(\mathbf{E}_x) + A_{LC}^2 \cdot U_{20} + A_{LC}^2 \cdot Imag(U_{22});$$
(B.1)

$$V_r = V_s + A_{LC} \cdot Imag(\mathbf{E}_y) + A_{LC}^2 \cdot V_{20} + A_{LC}^2 \cdot Real(V_{22}).$$
(B.2)

Foram definidos então como critérios para o refinamento da malha os campos  $U_r$ ,  $V_r$ ,  $Real(\mathbf{E}_{\mathbf{a}x}) \in Imag(\mathbf{E}_{\mathbf{a}})_y$ ). Desta forma, tentou-se levar em conta as variações tanto das partes reais como das imaginárias dos campos em questão, bem como das componentes  $u \in v$ . Partindo-se de uma malha M1 bastante grosseira, foram realizados 23 passos de refinamento até a malha M24. O parâmetro  $\epsilon_0$  valia inicialmente 0.01, e era dividido por 1.15 a cada passo. O refinamento foi realizado para Re = 50. A tabela abaixo mostra o número de nós  $N_v$  (vértices dos elementos triangulares) para algumas das malhas.

Malha	1	2	3	5	10	15	18	21	24
$N_v$	3975	3073	3272	3753	8127	15016	21336	37719	48020

Tabela B.1: Número de nós e de g.d.l. para cada malha.

Note que a malha M2 tem menos vértices que a malha M1, mas apresenta (conforme determinado *a priori* diminuindo o valor de  $\epsilon_0$ ) indicador de erro global 15% menor. Isso se deve, claro, a mudanças na topologia da malha que favorecem a diminuição do erro após o primeiro passo de refinamento. Como será mostrado logo abaixo, a malha M1, inicial, é bastante grosseira e seu refinamento não está de acordo com a topologia do escoamento. Por isso, o primeiro passo de refinamento diminui o erro sem aumentar o número de vértices. Umas vez melhorada a topologia, os próximos passos de refinamento alteram-na relativamente pouco, e a diminuição do erro se dá pelo refinamento propriamente dito - diminuição do tamanho dos elementos. As figuras B.1 e B.2 apresentam os graus de refinamento da malha em uma região próxima do cilindro e detalhes de sua vizinhança imediata para as malhas M1, M5, M15 e M24.



(a) *M*1

Figura B.1: Progressão do refinamento da malha.

(c) M15

(d) M24

(b) *M*5



Figura B.2: Progressão do refinamento da malha nas vizinhanças do cilindro.

As figuras abaixo ilustram como variam importantes grandezas da solução assintótica com o aumento do número de nós a partir da malha M2.



Figura B.3: Resultados do refinamento adaptativo de malha. Re = 50.

As demais grandezas importantes, como  $\Delta \omega$ ,  $c_3$  e  $A_{LC}$  são diretamente calculáveis a partir as grandezas apresentaas. Nota-se que as escalas dos gráficos apresentam variações totais das referidas grandezas menores que 2%, e as variações diminuem consistentemente com  $N_v$ , ocorrendo concordância de até o terceiro algarismo significativo para  $N_v > 20000$ . Por isso, pode-se dizer com segurança que os resultados apresentados na tese, calculados com a malha M24, estão convergidos quanto ao refinamento de malha.