UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

ALESSANDRO ALBERTO DE LIMA

Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros flexíveis

São Paulo

2011

ALESSANDRO ALBERTO DE LIMA

Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros flexíveis

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências, ênfase em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Eng. Mecânica
de Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Julio Romano
Meneghini

São Paulo

2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de setembro de 2011.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Lima, Alessandro Alberto de Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros flexí-veis / A.A. de Lima. -- ed.rev. -- São Paulo, 2011. 79 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica. 1. Mecânica dos fluídos 2. Vibrações 3. Vórtices dos fluídos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

RESUMO

Este trabalho aborda o escoamento ao redor de cilindros flexíveis com grande razão de aspecto, representando os *riser* utilizados na indústria petrolífera. O escoamento foi dividido em seções bidimensionais ao longo do comprimento do *riser*. O método dos vórtices discretos foi utilizado para estimativa dos coeficientes hidrodinâmicos nas seções correspondentes e o acoplamento se dá através da dinâmica estrutural. Esta dinâmica é resolvida pelo método dos elementos finitos implementado no código *Anflex* (Mourelle et al. (2001)). Processamento paralelo é utilizado para acelerar o desempenho do método numérico. Um esquema *master-slave* ("mestre-escravo") utilizando MPI (*Message Passing Interface*¹) é utilizado para que seja explorado o paralelismo da modelagem. As seções hidrodinâmicas são igualmente divididas ao longo dos nós de um *cluster* de computadores utilizado nos cálculos. Cada nó do *cluster* (núcleo de processamento) resolve o escoamento nas seções hidrodinâmicas necessárias. As forças hidrodinâmicas atuando nas seções correspondentes são enviadas ao processo mestre que também é responsável pela resolução da dinâmica estrutural. Uma das contribuições do presente trabalho é a possibilidade de análise de *risers* em regime pós-crítico, através da imposição do ponto de separação da camada-limite baseado em resultados experimentais, e da modelagem de casos com *risers* em *tandem*.

O Método dos Vórtices Discretos (MVD) está detalhado de forma a facilitar a implementação computacional, levando em consideração a possibilidade de estudo de interferência entre esteiras de múltiplos corpos.

Como primeira aproximação, foram simulados, casos de cilindros rígidos fixos e em base elástica para os quais foram examinadas as amplitudes máximas de oscilação e os coeficientes de arrasto e sustentação. Posteriormente, o MVD foi integrado ao *Anflex* dando origem ao *AnflexCFD*, com capacidade de processamento paralelo da parte correspondente ao CFD. Os resultados obtidos numericamente foram comparados a resultados experimentais realizados em laboratório.

A metodologia de utilização do MVD para cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos é baseada na comparação com resultados experimentais obtidos em laboratório para cilindros rígidos fixos e em base elástica para os quais se observa uma aderência satisfatória com relação

¹ biblioteca computacional utilizada em programas paralelizados.

aos resultados obtidos numericamente.

O resultado do presente trabalho foi a criação de uma ferramenta alternativa no projeto de *risers* de grande razão de aspecto, como uma forma de avaliação do comportamento dinâmico da estrutura submetida a diferentes perfis de corrente e, conseqüentemente, a estimativa do tempo de sua vida útil. A característica puramente Lagrangiana do MVD possibilita a simulação de centenas de ciclos de oscilação da estrutura sendo que para os métodos Eulerianos tradicionais de CFD, como o método dos volumes finitos e o método dos elementos finitos, a simulação necessita de um tempo computacional inviável para projeto.

A aderência do modelo adotado em relação aos resultados experimentais, aliada a eficiência do MVD, é um indicativo da vantagem da utilização de métodos Lagrangianos na modelagem do escoamento ao redor de cilindros flexíveis com grande razão de aspecto, em relação aos métodos Eulerianos tradicionais.

A metodologia apresentada neste trabalho pode ser aplicada utilizando outros métodos de CFD, lembrando que isto pode implicar num aumento significativo do tempo computacional necessário para uma análise.

Palavras-chave: *Mecânica dos fluidos computacional; Vibrações; Vórtices dos fluidos;*

ABSTRACT

In this work the dynamic response of a high aspect ratio flexible cylinder due to vortex shedding is numerically investigated. The model is divided in two-dimensional sections along the riser length. The discrete vortex method (DVM) is employed for the assessment of the hydrodynamic forces acting on these two-dimensional sections. The hydrodynamic sections are solved independently, and the coupling among the sections is taken into account by the solution of the structure in the time domain by the finite element method implemented in Anflex code (Mourelle et al. (2001)). Parallel processing is employed to improve the performance of the method. A master-slave approach via MPI (Message Passing Interface) is used to exploit the parallelism of the present code. The riser sections are equally divided among the nodes of the cluster. Each node solves the hydrodynamic sections assigned to it. The forces acting on the sections are then passed to the master processor, which is responsible for the calculation of the displacement of the whole structure. One of the main contributions of the present work is the possibility of simulating the flow around flexible cylinders in the pos-critical regime and around bundle of risers.

Keywords: *Computational fluid dynamic; Vibrations; Vortex Methods*

SUMÁRIO

Lista de Figuras	iii
Lista de símbolos	vi
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução Geral	1
1.1 Revisão Bibliográfica	3
2 Método dos vórtices discretos - bidimensional	7
2.1 Desenvolvimento	8
2.2 Viscous Splitting das equações de Navier-Stokes	9
2.2.1 Modelo de convecção-difusão linear	10
2.3 A decomposição de Helmholtz	11
2.4 A implementação do MVD	12
2.5 Tratamento do termo viscoso	20
2.6 Determinação da Posição Inicial dos Vórtices	22
2.7 Determinação das Forças	23
2.8 Múltiplas fronteiras	25
3 Escoamento ao redor de cilindros rígidos utilizando o MVD	28
3.1 Cilindro fixo isolado	29
3.2 Cilindros rígidos	31
3.2.1 Modelagem de escoamentos ao redor de cilindros em regime pós-crítico ..	31

3.3	Cilindro isolado em base elástica - 1 grau de liberdade	40
3.4	Cilindro isolado em base elástica - 2 graus de liberdade	44
3.5	Cilindros fixos em <i>tandem</i>	46
4	A integração <i>Anflex</i>-MVD	48
5	Cilindros flexíveis	52
5.1	<i>Risers</i> em <i>tandem</i>	57
6	Conclusões	63
	Apêndice A - Adaptações no Código <i>Anflex</i>	66
	Apêndice B - Vórtice 2D	70
	Apêndice C - Cálculo das forças hidrodinâmicas	74
	Referências	78

LISTA DE FIGURAS

Figura - 2.1	Representação dos vetores normal e tangente referente aos painéis.	15
Figura - 2.2	Discretização da fronteira de um círculo e as coordenadas dos painéis e dos vórtices.	15
Figura - 2.3	Esquema de caracterização do tamanho inicial do núcleo do vórtice.	22
Figura - 2.4	Posição inicial do vórtice em relação ao painel de origem.	23
Figura - 2.5	Múltiplas fronteiras para modelagem de interferência.	25
Figura - 3.1	Variação de St em função de Re	30
Figura - 3.2	Cilindro fixo isolado - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5000$, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Fluido hipotético em que o valor da viscosidade (ν) varia com o valor de Re	32
Figura - 3.3	Cilindro fixo isolado - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 1.0 \times 10^4$, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Fluido hipotético em que o valor da viscosidade (ν) varia com o valor de Re	33
Figura - 3.4	Ilustração da esteira formada para $Re = 1.0 \times 10^4$	34
Figura - 3.5	Influência dos valores de ν , de acordo com o número de <i>Reynolds</i> , mantendo-se iguais os demais parâmetros constantes: $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Os parâmetros de método dos vórtices foram mantidos em $nw = 128$, $D_0 = 0.05$ e $V_0 = 5.0 \times 10^{-8}$	35
Figura - 3.6	Separação da camada limite e camada cisalhante próxima à superfície, regime subcrítico ($350 < Re < 2.0 \sim 5.0 \times 10^5$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).	36
Figura - 3.7	Separação da camada limite e camadas cisalhantes próxima à superfície, regime crítico ($2.0 \sim 5.0 \times 10^5 < Re < 7.0 \times 10^5$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).	36
Figura - 3.8	Separação da camada limite e camadas cisalhantes próxima à superfície, regime pós-crítico ($7.0 \times 10^5 < Re$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).	37

Figura - 3.9 Cilindro fixo isolado em regime pós-crítico sem imposição do ponto de separação - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5.0 \times 10^5$ em água, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.5m$	38
Figura - 3.10 Ilustração da localização do ponto de separação no MVD.	38
Figura - 3.11 Cilindro fixo isolado em regime pós-crítico - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5.0 \times 10^5$ em água, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.5m$	39
Figura - 3.12 Ilustração da esteira formada para $Re = 5.0 \times 10^5$ com ângulo de separação $\theta_s = 120^\circ$	40
Figura - 3.13 Cilindro em base elástica. $Re = 5.0 \times 10^5$, $U = 1.0m/s$, $D = 0.5m$, $m^* = 4.3$, $\zeta = 0.2\%$ e $V_r = 7.5$	42
Figura - 3.14 Ilustração do modelo de cilindro em base elástica com 2 graus de liberdade.	43
Figura - 3.15 Resposta da amplitude em Y - caso com 1 grau de liberdade.	43
Figura - 3.16 Comparações dos resultados de amplitude de oscilação nas direções X e Y . Resultados numéricos (MVD do presente trabalho) e resultados experimentais obtidos por Freire (2010).	45
Figura - 3.17 Esteiras obtidas para os casos de interferência com cilindros fixos e $Re = 5 \times 10^3$, $U = 0.25m/s$ com $D_1 = D_2 = 0.02m$, variando a distância relativa g entre os cilindros.	47
Figura - 5.1 Esquema dos experimentos utilizados por J. R. Chaplin.	53
Figura - 5.2 Ilustração do modelo de <i>riser</i> submetido ao perfil de corrente em degrau.	54
Figura - 5.3 Envoltórias para o caso 1.	55
Figura - 5.4 Envoltórias para o caso 3.	55
Figura - 5.5 Envoltórias para o caso 6.	56
Figura - 5.6 Envoltórias para o caso 9.	56
Figura - 5.7 Envoltórias para o modelo de <i>riser</i> real.	58
Figura - 5.8 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U04 com $g = 4.0D$	59
Figura - 5.9 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U04 com $g = 5.0D$	60
Figura - 5.10 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U04 com $g = 6.0D$	61
Figura - 5.11 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U04 com $g = 8.0D$	61
Figura - 5.12 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U12 com $g = 6.0D$	62

Figura - 5.13 <i>Risers</i> em <i>tandem</i> - Perfil U12 com $g = 8.0D$	62
Figura - A.1 Fluxograma, código paralelo/CFD.	68
Figura - A.2 Divisão das seções entre os processos.	69
Figura - B.1 Sistema de coordenadas cilíndricas.	70
Figura - B.2 Escoamento induzido por um vórtice 2D.	73
Figura - C.1 Corpo acelerado.	74

LISTA DE SÍMBOLOS

L	Comprimento do modelo.
D	Diâmetro do cilindro / <i>riser</i> .
$\vec{u}$	Velocidade.
p	Pressão.
ρ	Massa específica.
ν	Viscosidade cinemática.
$\vec{\omega}$	Vorticidade.
$\vec{x}_v$	Posição do elemento de vórtice.
$\vec{\omega}_v$	Vorticidade do elemento de vórtice.
$\vec{u}_\omega$	Componente rotacional da velocidade.
$\vec{u}_\phi$	Componente solenoidal da velocidade.
Γ	Circulação.
Φ	Função velocidade potencial.
$\vec{U}_S$	Velocidade na parede do corpo.
$\vec{U}_c$	Velocidade do centro de massa do corpo.
$\vec{\Omega}_c$	Velocidade angular do corpo.
$\vec{x}_c$	Posição do centro de massa do corpo.
$\hat{n}$	Versor normal.
$\hat{s}$	Versor tangencial.
$\vec{x}_S$	Posição sobre a superfície do corpo.

$\vec{\psi}$	Função linha de corrente.
u_θ	Componente angular da velocidade em coordenadas cilíndricas.
r	Componente radial do vetor posição em coordenadas cilíndricas.
σ	Raio do elemento de vórtice.
n_w	Número de painéis utilizado na discretização do corpo.
δ_0	Distância inicial entre o centro do vórtice e o painel de origem.
V_0	Parâmetro velocidade de amalgamação.
D_0	Parâmetro distância de amalgamação.
C_D	Coefficiente de arrasto.
C_L	Coefficiente de sustentação.
$\vec{F}$	Vetor força.
$\vec{a}$	Vetor aceleração.
Re	Número de Reynolds.
U	Módulo da velocidade da corrente.
St	Número de Strouhal.
f	Frequência de desprendimento de vórtices.
Δt	Intervalo de tempo.
Δt^*	Intervalo de tempo adimensional.
θ_s	Ângulo do ponto de separação.
$\hat{e}_y$	Versor na direção y .
$\vec{\tau}$	Tensor das tensões.
m	Massa do cilindro.
c	Amortecimento da base elástica.
k	Rigidez da base elástica.

f_y	Força na direção y .
F_y	Força hidrodinâmica na direção y .
m_d	Massa de fluido deslocada pelo cilindro.
m^*	Massa reduzida.
ζ	Coefficiente de amortecimento do sistema cilindro / base elástica.
ω_n	Frequência natural do sistema cilindro / base elástica.
T_n	Período natural do sistema cilindro / base elástica.
V_r	Velocidade reduzida.
$\overline{C_D}$	Valor médio do coeficiente de arrasto.
g	Espaçamento entre os cilindros em <i>tandem</i> .
EI	Rigidez flexional do modelo de cilindro flexível.
EA	Rigidez axial do modelo de cilindro flexível.
T	Tração no topo do modelo de cilindro flexível.

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Propriedades mecânicas do <i>riser</i> modelado numericamente.	53
Tabela 5.2	Condições de teste para os casos com o modelo sujeito a corrente em degrau.	54
Tabela 5.3	Propriedades mecânicas do modelo <i>riser</i> real.	58
Tabela 5.4	Perfis de velocidade utilizados na modelagem de <i>risers</i> reais.	59

1 INTRODUÇÃO GERAL

O estudo do fenômeno de vibração induzida por vórtices (VIV) continua sendo um grande desafio para a indústria petrolífera. Os *risers*, dutos rígidos ou flexíveis, são fortemente afetados pela VIV. O entendimento e, conseqüentemente, a modelagem deste fenômeno é de grande importância para o desenvolvimento tecnológico e econômico para países exploradores de petróleo. As correntes marítimas presentes nas grandes profundidades nas quais os *risers* têm sido instalados ultimamente (da ordem de 2000 m) podem submetê-los a condições ambientais adversas, caracterizadas por correntes de direções e intensidades variáveis.

Corpos rombudos imersos em escoamentos de fluidos causam, na grande maioria dos casos de aplicação em engenharia, a geração e o desprendimento alternado de vórtices, fenômeno conhecido na literatura como *vortex shedding* ("desprendimento de vórtices"). Devido à dinâmica estabelecida por este desprendimento, o campo de pressão ao qual o *riser* está submetido pode ocasionar oscilações cíclicas da estrutura que, dependendo da frequência, podem sintonizar simultaneamente diferentes modos de vibração implicando, em casos extremos, na fadiga e no colapso da mesma.

É interessante que características críticas do fenômeno sejam conhecidas na fase de projeto. Para se obter tais características, o desenvolvimento de um modelo envolvendo uma integração entre as forças hidrodinâmicas e a resposta da estrutura é necessário. Os métodos experimentais ou até mesmo numéricos, utilizados atualmente, são financeira e computacionalmente caros, devido a necessidade de um tempo computacional relativamente elevado para uma análise de VIV detalhada que utiliza *clusters* de computadores, causando um aumento significativo do consumo de energia elétrica durante a simulação que pode levar dias para se concluir. A simulação completa do escoamento envolvendo *risers* com grande razão de aspecto (comprimento (L) / diâmetro (D)) é, ainda, computacionalmente inviável se utilizarmos as técnicas convencionais de CFD que utilizam malhas computacionais para discretização do volume de controle no qual o escoamento se desenvolve.

A modelagem do fenômeno, caracterizado pela VIV, utilizando técnicas de dinâmica

dos fluidos computacional (CFD - do inglês: *Computational Fluid Dynamics*) integradas ao método dos elementos finitos, para cálculo da dinâmica estrutural, viabilizou a construção de uma ferramenta computacional capaz de avaliar as forças hidrodinâmicas impostas à estrutura e modelar seu comportamento dinâmico em relação à VIV. Tal ferramenta, permite ao usuário identificar, ainda em fase de projeto, condições ambientais que possam comprometer o comportamento dinâmico estabelecido pelos modelos de *risers* implicando no colapso da estrutura.

Dentre os modelos utilizados em CFD, podemos destacar o Método de Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Métodos dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Vórtices Discretos (MVD), sendo que os três primeiros necessitam de malhas cartesianas para representar o volume de controle em estudo e todos eles modelam de forma satisfatória a equação de Navier-Stokes. Uma vantagem do MVD, na sua formulação inteiramente Lagrangiana, é a ausência do uso de uma malha computacional que é o principal razão da escolha do MVD.

O objetivo do presente trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de modelar a interação fluido-estrutura para cilindros flexíveis com grande razão de aspecto, ou seja, valores elevados para a razão L/D , representando os *risers* utilizados na perfuração e extração de petróleo, em escoamentos caracterizados por números de *Reynolds* em faixas de operação reais. O código computacional desenvolvido teve como base o código *Anflex*¹ para solução da dinâmica estrutural. Em sua versão original, o *Anflex* calcula as forças hidrodinâmicas através da equação de Morrison que fornece uma aproximação para o coeficiente de arrasto apenas, o que impossibilita a modelagem de VIV.

O *Anflex* é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) e foi desenvolvido pelo Centro de Pesquisas da Petrobras (CENPES) sendo que, no presente trabalho, passou a ser integrado ao MVD, o qual calculara as forças hidrodinâmicas atuantes na estrutura devido à presença das correntes marítimas de intensidades e direções variáveis ao longo da profundidade.

Como resultado da integração, foi gerada a versão *AnflexCFD* (*Anflex* + CFD (MVD)) com capacidade de processamento paralelo da parcela responsável pelo cálculo das forças hidrodinâmicas. A metodologia de paralelização e o detalhamento do CFD utilizando o MVD são apresentados ao longo do texto. A escolha do MVD é justificada pela ausência de uma malha para discretização do domínio fluido. Este método é aplicado em faixas bidimensionais independentes, chamadas de seções hidrodinâmicas, facilitando a utilização do processamento paralelo como proposto por Flatschart (2007).

¹Petrobras - código computacional que utiliza o método dos elementos finitos para análises de sistemas *offshore* baseado na tese de doutorado de Mourelle (1993)

Metodologias foram desenvolvidas com o intuito de estudarmos o comportamento dinâmico de *risers* em águas profundas sujeitos a correntes variáveis ao longo da profundidade, assunto de grande importância econômica e tecnológica, principalmente, para países que possuem grandes reservas de petróleo em águas profundas.

O modelo numérico é validado com resultados obtidos em laboratório através de experimentos em escala reduzida para casos envolvendo a modelagem de cilindros rígidos fixos, livres para oscilar e, posteriormente, integrado ao modelo estrutural utilizando o *Anflex* para análise de cilindros flexíveis.

O *AnflexCFD* inclui uma versão capaz de modelar a interferência entre *risers* alinhados em relação à direção de incidência da corrente (*risers* em *tandem*) e, também, com a implementação de um modelo semi-empírico capaz de modelar escoamentos ao redor de *risers* em regime pós-crítico no qual o ponto de separação da camada-limite ao redor do cilindro é fornecido com base em valores experimentais de acordo com a faixa de *Reynolds* de operação.

1.1 Revisão Bibliográfica

A literatura que serve de base para este trabalho trata das vibrações induzidas pelo escoamento e do fenômeno de emissão de vórtices investigados de forma teórica, experimental ou computacional.

Pode-se dizer, sem dúvidas, que uma das referências mais completas sobre o assunto é o livro de Blevins (1990) no qual são abordados aspectos de importância prática para a engenharia, onde são encontradas ferramentas analíticas para o estudo de vibração de estruturas expostas ao escoamento de um fluido. São relatados ainda diversos mecanismos de vibração induzida por escoamentos subsônicos, em especial no caso de corpos rombudos, nos quais o escoamento separa-se de uma larga seção da superfície da estrutura.

Khalak e Williamson (1996) realizaram experimentos com cilindros rígidos em água. Observou-se que, nos resultados onde os cilindros possuíam baixas razões de massa (massa do cilindro sobre massa de fluido deslocada) e amortecimento (amortecimento por amortecimento crítico), havia dois regimes de ressonância, ou seja, existiam dois níveis distintos de limite de amplitude na ressonância e não um como era assumido anteriormente.

Segundo Zdravkovich (1977), é uma prática comum supor que dois cilindros, em um mesmo escoamento, comportam-se como cilindros isolados. Porém, essa suposição só é justificada quando os dois cilindros estão suficientemente distantes e não perfeitamente alinhados. A

proximidade entre os dois cilindros afeta dramaticamente o escoamento entre eles, produzindo forças e campos de pressão inesperados. Em seu trabalho de 1987, o estudo é feito para pares de cilindros em arranjo oblíquo e em agrupamentos com mais de dois cilindros.

Helmholtz (1858), apud Sarpkaya (1989), foi o primeiro a mostrar o que hoje é considerado uma das mais importantes contribuições para a mecânica dos fluidos: linhas de vórtices em fluido invíscido são compostas dos mesmos elementos fluidos continuamente, ou seja, as linhas vorticais são linhas materiais. Assim, escoamentos com vorticidade podem ser modelados com vórtices com circulações apropriadas e seção transversal infinitesimal, isto é, linhas de vórtices. Essa descrição Lagrangiana ou Lagrangiana-Euleriana da evolução do campo de vorticidade discretizado constitui a essência dos métodos computacionais atuais que envolvem elementos de vórtices.

Chorin (1973) apresentou um método numérico para a resolução das equações de Navier-Stokes escritas no plano, que se baseou no MVD. Nesse esquema, foi usada uma técnica denominada “random walk”, que levou em conta o processo de geração de vorticidade e efeitos difusivos.

O trabalho de Spalart e Leonard (1981) descreve um modelo de método dos vórtices discretos para simular escoamentos incompressíveis bidimensionais que se separam da superfície do corpo. Essa referência apresenta uma rigorosa base analítica para representar as equações de Navier-Stokes em termos da vorticidade. Nesse método de vórtices a equação de transporte de vorticidade é resolvida numericamente por meio de vórtices elementares em um sistema de referência Lagrangiano. O resultado é um método livre de malhas computacionais, capaz de tratar corpos de formatos arbitrários que são discretizados em diversos painéis, e vórtices são criados a uma certa distância de sua superfície. A distribuição de vórtices em torno do corpo modela a camada limite e impõe a condição de que a superfície do cilindro é uma linha de corrente, isto é, com velocidade normal igual a zero. Esses vórtices recém-criados são convec-tados, por meio da lei de Biot-Savart, formando a esteira de Von Kármán. Nesse método, muitos aspectos complexos de escoamentos ao redor de cilindros circulares são reproduzidos corretamente. Comparações com resultados experimentais mostraram boa precisão e quase nenhuma dependência de parâmetros empíricos.

Nagano et al. (1982), apud Park e Higuchi (1989), estenderam o modelo proposto por Spalart e Leonard (1981) para modelar a difusão viscosa. O método utilizado consistiu em fazer o vórtice pontual possuir um raio que aumentava com o tempo, simulando os efeitos de difusão viscosa da vorticidade.

Park e Higuchi (1989) utilizaram o mesmo algoritmo desenvolvido por Spalart e Leo-

nard, para estudar os escoamentos sobre corpos rombudos de diferentes formatos. No modelo apresentado, foram considerados os efeitos da difusão viscosa por meio do método proposto por Nagano et. al. e foram feitas, ainda, modificações na maneira com a qual os vórtices são convectados. O modelo foi aplicado na avaliação das forças atuantes em corpos de diferentes tipos de geometria e no estudo comparativo do fenômeno de interferência que ocorre quando existem corpos múltiplos. Resumidamente, os resultados mostraram que, quando o corpo tem uma altura (dimensão na direção perpendicular ao plano da corrente livre) pequena, comparada ao comprimento (dimensão na direção paralela à direção da corrente livre), o coeficiente de arrasto estava de acordo com os valores obtidos experimentalmente. Para corpos com altura grande e comprimento pequeno, os coeficientes de arrasto obtidos superestimavam os resultados experimentais.

Sarpkaya (1989) publicou uma extensa revisão sobre os diferentes Métodos dos Vórtices Discretos, fazendo comparações entre estes e sua aplicação prática dentro da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

Meneghini (1993) utilizou o MVD bidimensional com difusão viscosa em malhas polares para estudar a emissão de vórtices em cilindros forçados a oscilar para $Re = 200$. Determinou numericamente a faixa de frequência de oscilação e de amplitude em que ocorre a sincronização (“lock in”), onde a frequência de emissão de vórtices é capturada pela frequência da estrutura. Investigou também as prováveis causas desse fenômeno. Aspectos como os diferentes modos de emissão de vórtices para grandes amplitudes de oscilação do cilindro e a dinâmica associada também foram estudados.

Saltara (1999) utilizou o Método dos Vórtices Discretos na formulação híbrida Euleriana - Lagrangiana e o Método de Resolução por partes das Equações de Navier-Stokes (“*Fractional Step Method*”) para estudar a vibração induzida pelo escoamento em cilindros livres para oscilar no regime de altos números de Reynolds. As características do escoamento ao redor de pares de cilindros fixos em “tandem” e lado a lado em baixo Reynolds também foram analisadas. Ambos os métodos foram implementados por meio de um esquema de volumes finitos para malhas cartesianas bidimensionais. Para o problema da vibração induzida, foram obtidas amplitudes de vibração abaixo dos valores observados experimentalmente. Saltara justificou tal resultado pelo fato de as simulações serem bidimensionais e os efeitos tridimensionais não estarem sendo levados em conta. No caso dos arranjos com pares de cilindros, foram apresentados contornos de vorticidade que permitiram a visualização das interações dos vórtices desprendidos.

A tese de Barba (2004) reúne técnicas de avaliação dos efeitos viscosos em métodos

de vórtices, propondo o aumento da precisão na simulação de escoamentos envolvendo altos números de *Reynolds* em uma formulação completamente livre de malhas computacionais. Encontramos neste trabalho um detalhamento das técnicas de avaliação da equação de transporte da vorticidade considerando um sistema de referência Lagrangiano no estudo da mecânica dos fluidos.

Chaplin et al. (2005) realizou experimentos envolvendo um modelo de cilindro flexível submetido a perfis de corrente em formato de degrau paras quais 45% do comprimento do modelo se encontrava sujeito a uma corrente uniforme, de intensidades variando entre 0.1 e $1.0m/s$, e o restante em água com velocidade nula. O modelo foi construído com 32 acelerômetros, distribuídos ao longo do comprimento do cilindro, para que a dinâmica da montagem pudesse ser analisada. Os resultados obtidos são usados como base nas validações dos casos correspondentes a simulações do escoamento ao redor de cilindros flexíveis que serão apresentados neste trabalho.

2 MÉTODO DOS VÓRTICES DISCRETOS - BIDIMENSIONAL

Os métodos computacionais envolvendo elementos portadores de vorticidade tiveram sua origem com os trabalhos de Prager (1928) e Rosenhead (1931) que, inicialmente, modelavam escoamentos potenciais.

Métodos de elementos de vórtices, originalmente, foram desenvolvidos como ferramenta de modelagem de escoamentos transientes e incompressíveis envolvendo altos números de *Reynolds* para os quais a solução para o escoamento invíscido é uma aproximação coerente. O MVD simula escoamentos ao redor de corpos rombudos modelando as camadas cisalhantes, regiões do escoamento portadoras de elevado gradiente vorticidade. Para o nosso caso, utilizamos um sistema Lagrangiano de referência.

A aproximação de escoamento invíscido nos casos envolvendo altos números de *Reynolds* tem suas limitações. Em escoamentos ao redor de corpos rombudos, a geração de vorticidade nas paredes do corpo é um efeito viscoso. A modelagem dos efeitos viscosos, incluindo a difusão, é necessária, pelo menos, na região da camada-limite ao redor dos corpos.

Nesta seção, apresentaremos a formulação do MVD utilizado na modelagem do fluido utilizando as seções bidimensionais de CFD. Esse foi o método escolhido para cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos na análise de VIV em cilindros flexíveis. O motivo desta escolha reside no fato do MVD não necessitar de uma malha computacional para discretização do domínio como é necessário nos métodos Eulerianos conhecidos (MVF ou MEF, por exemplo). O fato do MVD não necessitar de uma malha computacional o torna particularmente eficiente. A utilização do MVD facilita a paralelização e a concepção das seções de CFD utilizadas na modelagem do fluido. A descrição do método é baseada em Spalart (1983).

2.1 Desenvolvimento

O MVD foi adotado no presente trabalho por não necessitar de uma malha computacional na região onde o escoamento se desenvolve. A discretização é apenas necessária na fronteira do corpo. Além do fato de propiciar facilidade de implementação para escoamentos ao redor de corpos com geometrias arbitrárias, o método é facilmente implementável em casos envolvendo múltiplos corpos.

O método utilizado neste trabalho foi inicialmente proposto por Spalart (1983). A fronteira do corpo, considerada uma linha de corrente, é discretizada em vários segmentos ou painéis. Vórtices discretos são criados ao redor da fronteira que define o corpo e convectados sem a imposição da condição de Kutta para o caso dos cilindros.

A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível e Newtoniano é dada por:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u}. \quad (2.1)$$

em que $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ é a derivada material da quantidade sendo transportada, no caso a quantidade de movimento por unidade de massa, $\vec{u}$ representa o campo de velocidades do escoamento, ρ é a massa específica do fluido, p é pressão e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática.

A equação da continuidade, de acordo com a descrição Lagrangiana do movimento das partículas fluidas, é dada por:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \vec{u}. \quad (2.2)$$

Como estamos trabalhando com a modelagem de um fluido incompressível, $D\rho/Dt = 0$, portando:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Tomando-se o rotacional da equação 2.1, dado que $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$, tem-se:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu\nabla^2\vec{\omega}. \quad (2.3)$$

na qual $\vec{\omega}$ é a vorticidade.

A equação 2.3 é denominada equação de transporte de vorticidade e representa como a vorticidade é convectada pelo campo de velocidade e difundida pela viscosidade. Um detalhe importante em trabalhar com a equação 2.3 é a ausência do termo correspondente ao gradiente de pressão. O primeiro termo do lado direito da equação 2.3 é a taxa de deformação das linhas vorticais ("*vortex stretching*"), o qual, para o caso bidimensional, é nulo.

2.2 Viscous Splitting das equações de Navier-Stokes

Utilizando nossa formulação velocidade-vorticidade $(\vec{u}, \vec{\omega})$ com a definição de D/Dt aplicada à equação 2.3, podemos representar a evolução do campo de vorticidade bidimensional como segue:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (2.4)$$

O campo de velocidades é obtido pela solução da equação de Poisson ($\nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega}$) com o auxílio da equação da continuidade ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$).

A evolução do campo de vorticidade é tratada em passos fracionados por duas etapas. Em cada uma das etapas, a vorticidade é convectada (de acordo com $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}$) e difundida (de acordo com $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$). Este algoritmo, conhecido na literatura como *viscous splitting* ("difusão separada"), avalia convecção e difusão sucessivamente.

Utilizamos um algoritmo de duas etapas que podem ser representadas como:

- convecção:

$$\left. \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right|_{conv} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega};$$

- difusão:

$$\left. \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right|_{dif} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}.$$

Para nosso esquema Lagrangiano, o algoritmo é dado por:

- convecção:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_v}{dt} &= \vec{u}(\vec{x}_v), \\ \frac{d\vec{\omega}_v}{dt} &= 0; \end{aligned}$$

- difusão:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_v}{dt} &= 0, \\ \frac{d\vec{\omega}_v}{dt} &= \nu \Delta \vec{\omega}(\vec{x}_v). \end{aligned}$$

onde $\vec{x}_v$ e $\vec{\omega}_v$ representam, respectivamente, a posição e a vorticidade do elemento de vórtice v . Os elementos de vórtices, no caso os vórtices discretos, são deslocados através das velocidades induzidas locais (avaliadas pela lei de Biot-Savart) considerando a influência de todos os vórtices existentes no escoamento mais a velocidade da corrente. A difusão modifica o campo de

vorticidade nesta nova configuração estabelecida pelos vórtices após a convecção. O tratamento da etapa de avaliação da difusão será visto adiante.

2.2.1 Modelo de convecção-difusão linear

Como análise do algoritmo *viscous splitting* para as equações de Navier-Stokes apresentado na seção anterior, vamos considerar um caso simples de equação de convecção-difusão linear.

A evolução de um campo escalar $W(\vec{x}, t)$ qualquer convectado por um campo de velocidades conhecido $\vec{c}(\vec{x}, t)$ é dada pela equação

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla W = \nu \nabla^2 W,$$

com condições iniciais $W(\vec{x}_0)$. Utilizando a seguinte notação para os termos convectivo e difusivo, respectivamente,

$$\vec{c} \cdot \nabla \rightarrow A, \quad \nu \nabla^2 \rightarrow B,$$

podemos escrever a equação acima como

$$\frac{dW}{dt} = AW + BW. \quad (2.5)$$

Integrando a equação acima utilizando os operadores, podemos escrever a solução como

$$W(t) = W_0 e^{(A+B)t}.$$

Podemos escrever a solução da equação 2.5 em termos de passos discretos (δt) para cada intervalo $[n\delta t, (n+1)\delta t]$ com $W(n\delta t) = W^n$ como condição inicial. A solução pode ser escrita como

$$W^{n+1} = e^{(A+B)\delta t} W^n.$$

Para o caso de nosso algoritmo com passos fracionados em duas etapas teremos:

- etapa 1 - convecção:

$$\frac{dW}{dt} = AW.$$

Na forma discreta,

$$W^{n+\frac{1}{2}} = e^{A\delta t} W^n.$$

Com $W^{n+\frac{1}{2}}$ utilizado como condição inicial, a difusão é avaliada no próximo sub-passo.

- etapa 2 - difusão:

$$\frac{dW}{dt} = BW.$$

Teremos como resultado,

$$W^{n+1} = e^{B\delta t} W^{n+\frac{1}{2}} = e^{B\delta t} e^{A\delta t} W^n.$$

Uma análise rigorosa da estimativa dos erros introduzidos na modelagem devido ao *viscous splitting* das equações de Navier-Stokes pode ser encontrado em Cottet e Koumoutsakos (2000).

2.3 A decomposição de Helmholtz

O campo de velocidades utilizado na solução do escoamento através do MVD é decomposto em uma componente rotacional e uma solenoidal como segue:

$$\vec{u} = \vec{u}_\omega + \vec{u}_\phi.$$

em que $\vec{u}_\omega$ considera a parcela da velocidade induzida pela distribuição de vórtices no escoamento de forma que

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \vec{u}_\omega$$

e, para qual, também devemos considerar a condição de incompressibilidade ($\nabla \cdot \vec{u}_\omega = 0$).

O campo de velocidade $\vec{u}_\omega$ é relacionado ao campo de vorticidade através da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \vec{u}_\omega = -\nabla \times \vec{\omega}.$$

cuja solução pode ser dada, por exemplo, pela lei de Biot-Savart como é utilizada neste trabalho. A parcela $\vec{u}_\omega$ pode ser representada como

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}) = \int_S \Gamma(\vec{x}_i) \varsigma_{\sigma_i}(\vec{x} - \vec{x}_i) d\vec{x}_i.$$

em que $\Gamma(\vec{x}_i)$ representa a distribuição de circulação no plano 2D (plano S) e $\varsigma_{\sigma_i}(\vec{x} - \vec{x}_i)$ avalia sua contribuição no cálculo da velocidade $\vec{u}_\omega$ resultante, como proposto por Park e Higuchi (1989). Mais detalhes sobre o cálculo das velocidades induzidas pela distribuição de vórtices na modelagem do escoamento será visto adiante.

A segunda componente do campo de velocidade será escrita em termos de um potencial como segue:

$$\nabla \times \vec{u}_\phi = 0 \quad \text{e} \quad \vec{u}_\phi = \nabla \Phi.$$

em que a condição de incompressibilidade ($\nabla \cdot \vec{u}_\phi = 0$) implica em $\nabla^2 \Phi = 0$.

Sendo assim, o campo de velocidade pode ser representado da seguinte forma:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \int_S \Gamma(\vec{x}_i) \zeta_{\sigma_i} (\vec{x} - \vec{x}_i) d\vec{x}_i.$$

2.4 A implementação do MVD

O primeiro uso, bem sucedido, de métodos Lagrangianos envolvendo elementos de vórtices com efeitos viscosos está registrado em Chorin (1973). Utilizaremos um procedimento semelhante em que uma distribuição de vórtices as redor da seção transversal bidimensional do cilindro impõe a condição de não-eskorregamento na parede. Uma desvantagem da metodologia adotada é a introdução de um gradiente de vorticidade artificial nas proximidades do corpo o que causa um aumento da dissipação numérica do método.

O escoamento será modelado dada a sobreposição dos efeitos da velocidade da corrente e das velocidades induzidas pela distribuição de vórtices no escoamento como discutido na seção 2.3. Os eleitos difusivos serão considerados da forma como representada na seção 2.2.

A condição de não-eskorregamento será dada para um modelo de corpo sólido bidimensional sujeito a velocidade de rotação e translação como na equação 2.6.

$$\vec{U}_S(\vec{x}_S) = \vec{U}_c + \vec{\Omega}_c \times (\vec{x}_S - \vec{x}_c) \quad (2.6)$$

em que $\vec{U}_S(\vec{x}_S)$ representa a velocidade na posição $\vec{x}_S$, na superfície do corpo. $\vec{U}_c$ e $\vec{\Omega}_c$ representam, respectivamente, as velocidades de translação e rotação em relação ao centro de massa do corpo localizado em $\vec{x}_c$.

Condição de impermeabilidade do escoamento em relação à parede do corpo sólido é dada por:

$$\vec{u}(\vec{x}_S) \cdot \hat{n} = \vec{U}_S(\vec{x}_S) \cdot \hat{n},$$

e a condição de não-eskorregamento representada por:

$$\vec{u}(\vec{x}_S) \cdot \hat{s} = \vec{U}_S(\vec{x}_S) \cdot \hat{s},$$

caracteriza o fato de que elementos fluidos em contato com a superfície do corpo possuem a velocidade do respectivo ponto da superfície. Matematicamente, a condição de não-eskorregamento é dada por:

$$\vec{u}(\vec{x}_S) = \vec{U}_S(\vec{x}_S).$$

Os elementos de vórtice que caracterizam a condição de não-eskorregamento estão sujeitos a um "torque" que implica na rotação dos mesmos. A dinâmica estabelecida simula a geração de vorticidade na parede, característica de escoamentos incompressíveis viscosos para os quais as paredes dos corpos rombudos são modelados como fontes de vorticidade. A interpretação física do fenômeno de geração de vorticidade e a aplicação da condição de não-eskorregamento são de importância fundamental no desenvolvimento do escoamento.

Para um escoamento incompressível, podemos definir a função linha de corrente de forma que

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi}.$$

Como, na modelagem adotada no presente trabalho, o escoamento bidimensional se desenvolve sempre no plano xy , teremos apenas a componente perpendicular ao plano para a função linha de corrente ($\vec{\psi} = \psi \hat{k}$). Sendo assim, podemos representar

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Dado o rotacional de $\vec{u}$, podemos obter a equação 2.7, a qual é denominada equação função de corrente-vorticidade. As incógnitas da equação são: a função corrente e a vorticidade sendo o campo de velocidade por ser obtido pela função corrente. O sistema de equações formado pelas equações 2.3 e 2.7 pode ser utilizado em esquemas Eulerianos.

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla \times \vec{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\psi}) - \nabla^2 \vec{\psi},$$

dada a característica solenoidal do vetor função de corrente-vorticidade ($\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$) teremos

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega}. \quad (2.7)$$

Cinematicamente, os vórtices são tratados como partículas que são convectadas pelo escoamento de forma ativa, sendo esta uma descrição de esquema Lagrangiano. Por este fato, o MVD tem uma difusão numérica menor quando comparado a métodos puramente Eulerianos, onde as propriedades do escoamento são transferidas de um ponto fixo da malha para os seus vizinhos, gerando assim, uma maior difusão numérica.

A relação entre circulação e velocidade é dada por:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.8)$$

Ou seja, a velocidade induzida por um vórtice pontual, com circulação Γ , é dada pela

equação 2.9, representada em coordenadas polares por conveniência, como exposto no apêndice B.

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (2.9)$$

onde r é a distância entre o vórtice e o ponto no qual se deseja calcular a velocidade induzida. Porém, a velocidade induzida no centro do vórtice é infinita, ou seja, há uma descontinuidade na equação acima para $r = 0$. Para se evitar esta descontinuidade, Spalart e Leonard introduziram um núcleo σ de raio constante no tempo, fazendo com que a velocidade induzida pelo vórtice fosse proporcional a este novo núcleo.

Park e Higuchi (1989) implementaram um novo núcleo σ , cujo raio cresce a cada intervalo de tempo. Desta forma a velocidade induzida por um vórtice passou a ser calculada como:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + \sigma^2}. \quad (2.10)$$

Para simular a dissipação viscosa o tamanho do núcleo cresce a cada passo no tempo, na etapa difusiva do *viscous splitting* como será apresentado adiante.

A fronteira do corpo é discretizada em n_w painéis e para cada painel um novo vórtice é criado a cada passo no tempo. Os novos vórtices são posicionados a uma certa distância δ_0 do centro de cada painel, dada a sua normal ($\hat{n}$) como representado na figura 2.1, satisfazendo a condição de não escorregamento na superfície do corpo como mostraremos na seção 2.6.

O MVD, dado sua formulação puramente Lagrangiana, é auto-adaptativo com relação às regiões com gradiente elevado de vorticidade. Característica observável nos resultados obtidos com relação aos escoamentos ao redor de cilindros que serão apresentados no capítulo de resultados.

A figura 2.2 representa a fronteira de um círculo discretizado em painéis com as coordenadas dos pontos que o caracterizam e também dos vórtices criados ao redor do mesmo. As variáveis z_* são números complexos utilizados na modelagem de forma que $z_* = x_* + iy_*$ sendo $i^2 = -1$. Na Figura 2.2, z_w representa a posição do centro do painel, z_c a posição do vórtice criado e z_k a posição dos vórtices já existentes na esteira, enquanto Γ_i é a circulação do vórtice i sendo que u e v representam a intensidade da corrente incidente, nas direções X e Y , respectivamente.

Pelo princípio da superposição, a função corrente ψ_i em um dado ponto " i " da parede é a soma das contribuições da função corrente $\psi_{c.l}$ da corrente livre, da função corrente $\psi_{v.c}$ dos vórtices criados ao redor do(s) corpo(s) e da função corrente $\psi_{v.e}$ dos vórtices já existentes no

Figura 2.1: Representação dos vetores normal e tangente referente aos painéis.

Figura 2.2: Discretização da fronteira de um círculo e as coordenadas dos painéis e dos vórtices.

escoamento, como proposto na seção 2.3, ou seja:

$$\psi_i = \psi_{c.l} + \psi_{v.c} + \psi_{v.e}. \quad (2.11)$$

Na equação 2.11, a parcela referente à função de corrente $\psi_{c.l}$ originará a parte solenoidal do campo de velocidade e a parcela $\psi_{v.c} + \psi_{v.e}$ a parte rotacional:

$$\psi_{c.l} = \text{Im} [z_{w_i} (u - iv)], \quad (2.12)$$

$$\psi_{v.c} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_w} \Gamma_j \ln \left(|z_{w_i} - z_{c_j}|^2 + \sigma_0^2 \right), \quad (2.13)$$

$$\psi_{v.e} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \ln \left(|z_{w_i} - z_{k_j}|^2 + \sigma_j^2 \right). \quad (2.14)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_i = & \text{Im} [z_{w_i} (u - iv)] - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_w} \Gamma_j \ln \left(|z_{w_i} - z_{c_j}|^2 + \sigma_0^2 \right) \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \ln \left(|z_{w_i} - z_{k_j}|^2 + \sigma_j^2 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

De forma similar podemos obter a função corrente ψ_{i+1} para o ponto " $i + 1$ " da parede do corpo.

Como condição de contorno, consideramos o corpo uma linha de corrente e, sendo assim, podemos escrever:

$$\psi_{i+1} - \psi_i = 0. \quad (2.16)$$

A equação acima é válida somente para o corpo em repouso. No caso do corpo em movimento, o fluxo devido à translação pura da parede deve ser considerado resultando em:

$$\psi_{i+1} - \psi_i = -\vec{v}_{corpo} \cdot \hat{n} \cdot \Delta s, \quad (2.17)$$

onde $\vec{v}_{corpo}$ é a velocidade de translação do corpo que, na equação 2.6 está representada pela parcela $\vec{U}_c$, $\hat{n}$ é o vetor normal ao painel e Δs é o comprimento do painel.

Substituindo a equação 2.15 na equação 2.17 obtém-se um sistema linear, como segue:

$$[A] \{\Gamma\} = \{B\}, \quad (2.18)$$

onde,

$$a_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{|z_{wi+1} - z_{cj}|^2 + \sigma_0^2}{|z_{wi} - z_{cj}|^2 + \sigma_0^2} \right) \quad (2.19)$$

e,

$$b_i = \text{Im} \left[(z_{wi+1} - z_{wi}) ((u - u_{corpo}) - i(v - v_{corpo})) \right] - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \ln \left(\frac{|z_{wi+1} - z_{kj}|^2 + \sigma_j^2}{|z_{wi} - z_{kj}|^2 + \sigma_j^2} \right). \quad (2.20)$$

As incógnitas são as circulações Γ_i dos vórtices criados ao redor do corpo que satisfazem a condição de não-escorregamento. A matriz $[A]$ é dada em função da geometria do corpo, enquanto o vetor $\{B\}$ leva em consideração a influência da velocidade da corrente livre e das velocidades induzidas pelos vórtices já existentes no escoamento.

O teorema de Kelvin também deve ser satisfeito pelo sistema de equações acima. Uma forma simplificada de expressarmos o teorema de Kelvin (detalhado em Cottet e Koumoutsakos (2000)), lembrando que da condição de contorno de não-escorregamento na parede $\partial \vec{\omega} / \partial n = 0$, é dada como:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \int_{parede} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial n}(s) \Big|_{parede} ds = 0. \quad (2.21)$$

Sendo assim, a circulação total no escoamento deve ser mantida constante ao longo do tempo, ou seja, as circulações resultantes da resolução do sistema representado pela equação 2.18 deve incluir a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n_w} \Gamma_i = - \sum_{k=1}^{n_v} \Gamma_k, \quad (2.22)$$

em que $\sum_{i=1}^{n_w} \Gamma_i$ representa a circulação dos novos vórtices criados ao redor do corpo e $\sum_{k=1}^{n_v} \Gamma_k$, a circulação dos vórtices já existente no escoamento.

Duas alternativas podem ser adotadas para que seja imposta esta condição: pode-se substituir uma linha do sistema linear original pela equação acima, resultando em um sistema linear de ordem $[n_w \times n_w]$, ou introduzir a condição de Kelvin sem a retirada de nenhuma equação do sistema original, resultando em um sistema de ordem $[(n_w + 1) \times n_w]$. Esta última forma pode ser resolvida por um método numérico apropriado, como o método dos mínimos quadrados.

Após o cálculo das circulações dos vórtices criados ao redor do corpo, todos os vórtices existentes no escoamento são deslocados, usando um esquema explícito de primeira ordem (esquema de Euler), a velocidade induzida para cada vórtice a cada passo no tempo pode ser calculada de acordo com as equações 2.23, sendo $\vec{X}_i^n = (x_i, y_i) = (Re(z_{v_i}), Im(z_{v_i}))$ e $\vec{Q}_i = (u_i, v_i)$.

$$\begin{aligned} u_i &= u - \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{2\pi ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \sigma_j^2)} \\ v_i &= v + \sum_{j=1}^{n_v} \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{2\pi ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \sigma_j^2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

O uso da lei de Biot-Savart, porém, requer que cada vórtice interaja com todos os outros vórtices existentes no escoamento a cada intervalo de tempo, o que é muito custoso do ponto de vista computacional. Esta é a principal desvantagem do MVD considerando o cálculo das velocidades induzidas por soma direta para as quais podemos observar a influência de todos os vórtices existentes na esteira durante a análise.

$$\vec{X}_i^{n+1} = \vec{X}_i^n + \vec{Q}_i^n \Delta t \quad (2.24)$$

Como n_w vórtices são criados a cada intervalo de tempo, o número total de vórtices n_v cresce rapidamente. Visando à diminuição do número total de vórtices na simulação, Spalart e Leonard propuseram um esquema de amalgamação em que ocorre a substituição de dois vórtices por um novo. Tal esquema está detalhado nos trabalhos de Yamamoto (2002) e Fregonesi (2002).

Considerando-se dois vórtices de circulações Γ_1 e Γ_2 e suas posições z_1 e z_2 respectivamente, o campo de velocidades, no plano complexo, antes da amalgamação é dado por:

$$U(z) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{|z - z_1|} + \frac{\Gamma_2}{|z - z_2|} \right),$$

e, depois da amalgamação, é dado por:

$$U'(z) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{|z - Z|} \right).$$

Os primeiros termos da expansão em série de Taylor da diferença $U(z) - U'(z)$ é dada

por:

$$\frac{i}{2\pi} \left(\frac{\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2}{z} + \frac{\Gamma_1 z_1 - \Gamma_2 z_2 - \Gamma Z}{z^2} + \frac{\Gamma Z^2 - \Gamma_1 z_1^2 - \Gamma_2 z_2^2}{z^3} \right) + O(|z|^{-4}).$$

Os dois primeiros termos da expressão anterior podem ser eliminados se as equações 2.25 forem satisfeitas, caracterizando o vórtice resultante da amalgamação.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ Z &= \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Estas equações garantem a conservação da circulação ao longo do tempo de análise.

O terceiro termo da expansão não pode ser eliminado neste contexto e será utilizado como estimativa de erro no processo de amalgamação.

A cada intervalo de tempo os vórtices são examinados par a par, de forma direta, e a amalgamação é feita somente, se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{|\Gamma_i \Gamma_j|}{|\Gamma_i + \Gamma_j|} \frac{|Z_i - Z_j|^2}{|D_0 + d_i|^{1.5} |D_0 + d_j|^{1.5}} < V_0, \quad (2.26)$$

onde d_i e d_j são as menores distâncias entres os vórtices localizados nos pontos Z_i e Z_j e a fronteira do corpo mais próximo, e V_0 e D_0 são os parâmetros de amalgamação dos vórtices. Desta forma, o número de vórtices no escoamento pode ser controlado, havendo uma diminuição no custo computacional em termos de memória e de tempo de simulação. Porém, com a introdução desta amalgamação, cria-se outra fonte de difusão numérica.

O valor de V_0 pode ser alterado durante a simulação, fazendo com que o número de vórtices cresça rapidamente nos instantes iniciais (valores pequenos de V_0) e depois se mantenha constante após um certo número de intervalos de tempo (valores elevados de V_0).

Altos valores de D_0 geram grande influência de amalgamento perto da parede do corpo e, conseqüentemente, a esteira longe do corpo tem uma menor densidade de vórtices. Para pequenos valores de D_0 o amalgamento será realizado longe da parede, havendo uma concentração maior de vórtices perto da mesma.

2.5 Tratamento do termo viscoso

Como enunciado na seção 2.2, o *viscous splitting* considera convecção e difusão em passos fracionados. A técnica de crescimento do tamanho do núcleo do vórtice ("*growing core size*") visa a modelagem da difusão de vorticidade como consequência da viscosidade do fluido como proposta por Nagano, Naito e Tanaka (1982).

A técnica proposta por Nagano foi utilizada por Park e Higuchi (1989). Os valores obtidos em termos de coeficiente de arrasto estavam próximos aos obtidos por Bearman e D.M.Trueeman (1972), o que sugere a consistência desta técnica.

Na etapa difusiva do *viscous splitting*, estamos interessados na resolução da equação abaixo:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (2.27)$$

Adotando a condição inicial, dado o modelo do núcleo crescente, como sendo:

$$\omega(r, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } r > 0 \\ \Gamma & \text{para } r = 0 \end{cases}. \quad (2.28)$$

e a solução da equação do tipo:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} g(\eta), \quad (2.29)$$

onde η é definido como:

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}. \quad (2.30)$$

Quando substitui-se $\omega(r, t)$ (eq. 2.29) na equação 2.27, origina-se uma equação diferencial do tipo:

$$g'' + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right) g' + g = 0, \quad (2.31)$$

cuja solução tem a seguinte forma, em coordenadas polares por conveniência:

$$\omega(r, t) = K \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}. \quad (2.32)$$

Para se determinar a constante K , considera-se a equação 2.8 em que concluímos que

$K = 1/2$, e a equação 2.29 torna-se:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}. \quad (2.33)$$

Para se determinar a velocidade induzida, parte-se da definição de vorticidade:

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta). \quad (2.34)$$

Portanto, a velocidade induzida é dada como:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{\frac{-r^2}{4\nu t}} \right). \quad (2.35)$$

Este é o campo velocidade induzido por um vórtice pontual de circulação Γ em um fluido viscoso; nota-se que o segundo termo da equação acima é função do tempo e da viscosidade do fluido. Utilizamos um modelo para a velocidade induzida por um vórtice com a inclusão de um modelo de difusão de vorticidade como proposto por Park e Higuchi (1989).

A taxa na qual o núcleo cresce a cada intervalo de tempo é determinada a seguir. O máximo valor da velocidade induzida dada pela equação 2.35 ocorre quando $r = \sigma$ ou seja:

$$\sigma = 2.224\sqrt{\nu t}. \quad (2.36)$$

A equação 2.36 mostra que o núcleo do vórtice cresce com a sua "idade" em função da viscosidade cinemática do fluido ν . Podemos reescrever a equação 2.36 de uma forma mais conveniente, se avaliarmos $\sigma_n = 2.224\sqrt{\nu t_n}$ e $\sigma_{n+1} = 2.224\sqrt{\nu t_{n+1}}$, a qual pode ser escrita como a equação 2.37, se considerarmos $\Delta t = t_{n+1} - t_n$;

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 + 4.946\nu\Delta t. \quad (2.37)$$

A equação anterior mostra que o tamanho do núcleo do vórtice não é mais calculado em função da sua "idade" t e sim, em função do intervalo de tempo Δt . Esta equação é mais eficiente do ponto de vista computacional do que se calcular o crescimento do núcleo do vórtice através da idade. Quando dois vórtices são amalgamados, o novo núcleo do vórtice criado é calculado pela conservação do momento angular:

$$\sigma = \frac{\sigma_i \Gamma_i + \sigma_j \Gamma_j}{\Gamma_i + \Gamma_j}. \quad (2.38)$$

Figura 2.3: Esquema de caracterização do tamanho inicial do núcleo do vórtice.

A adoção do modelo de difusão de vorticidade não altera a condição de contorno no corpo, mas o crescimento do núcleo do vórtice simula o efeito da viscosidade do fluido.

2.6 Determinação da Posição Inicial dos Vórtices

Por conveniência, adota-se o mesmo valor para a distância δ_0 e para o raio σ_0 dos vórtices criados ao redor do corpo. O valor de σ_0 é determinado pela condição de não-escorregamento na parede do corpo. A figura 2.3 mostra o esquema utilizado para a determinação de σ_0 em que $\vec{u}_I$ e $\vec{u}$ são, respectivamente, a velocidade induzida pelo vórtice sobre o painel AD de comprimento Δs , e a velocidade do escoamento, tangente à parede do corpo se a condição de não-escorregamento não fosse satisfeita. Portanto, a circulação Γ no circuito fechado ABCD é dada por:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = u \Delta s, \quad (2.39)$$

pois na parede, é considerada a condição de aderência:

$$\vec{u}_I - \vec{u} = \vec{0}. \quad (2.40)$$

Em nossa modelagem, não estamos considerando corpos com velocidade de rotação. Se fosse considerado, devemos utilizar a velocidade $\vec{U}_S(\vec{x}_S)$ apresentada na equação 2.6, ou seja, $\vec{u}_I - \vec{U}_S = \vec{0}$.

Figura 2.4: Posição inicial do vórtice em relação ao painel de origem.

O módulo da velocidade $\vec{u}_I$ induzida na parede do corpo pelo vórtice é dada como:

$$u_I = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma_0}. \quad (2.41)$$

Substituindo a equação 2.39 em 2.41, obtém-se:

$$u_I = \frac{u\Delta s}{2\pi\sigma_0}, \quad (2.42)$$

e, finalmente, substituindo a equação 2.42 em 2.40, tem-se:

$$\sigma_0 = \frac{\Delta s}{2\pi} = \delta_0. \quad (2.43)$$

A figura 2.4 mostra a posição inicial do vórtice sobre o painel do corpo.

2.7 Determinação das Forças

A emissão de vórtices, dinâmica estabelecida como solução através do MVD, ao redor do corpo faz com que ocorra o surgimento de uma esteira de vórtices que são desprendidos de forma alternada, tanto na parte superior como na inferior do cilindro, ocasionando um gradiente de pressão oscilatório na parede do mesmo. A distribuição de pressões ao longo da parede do corpo faz surgir uma força resultante, que pode ser decomposta na direção paralela e transversal ao escoamento incidente. Estas forças são respectivamente denominadas de força de arrasto e de sustentação, e são determinadas a partir da equação de Navier-Stokes desenvolvida sobre a parede do corpo, isto é:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}, \quad (2.44)$$

onde v_s e v_n são as velocidades tangencial e normal a parede e $\vec{s}$ e $\vec{n}$ são os versores nestas direções (figura 2.1).

Pelo princípio da aderência completa na parede e pela condição de que cada painel é considerado uma linha de corrente ou seja, não há fluxo na parede, a equação 2.44 pode ser reescrita na forma:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \right), \quad (2.45)$$

onde a_s é a aceleração da partícula fluida.

Aplicando a equação da continuidade, tem-se:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial v_n}{\partial n} \right) + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \right), \quad (2.46)$$

ou ainda:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right). \quad (2.47)$$

Em termos da vorticidade, a equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$a_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}. \quad (2.48)$$

De acordo com Cottet e Koumoutsakos (2000), a equação de transporte de vorticidade pode ser integrada sobre a parede do corpo e aplicando-se o teorema de Stokes, origina-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \int \frac{\partial \omega}{\partial n} \partial s. \quad (2.49)$$

Admitindo-se que $\partial \omega / \partial n$ seja constante sobre o painel e reescrevendo a equação anterior em uma forma discreta, tem-se:

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} = \nu \frac{\partial \omega}{\partial n} \Delta s, \quad (2.50)$$

substituindo a equação em 2.48, tem-se a distribuição da pressão ao longo da parede do corpo em função da variação da circulação e da aceleração, ou seja:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\underbrace{\rho \frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} \frac{1}{\Delta s}}_A - \underbrace{\rho \vec{a}_{corpo} \cdot \vec{e}_s}_B, \quad (2.51)$$

onde $\Delta \Gamma$ é a diferença entre a circulação do vórtice criado sobre o painel e a soma das circulações dos vórtices que foram absorvidos pelo mesmo painel, $\vec{e}_s$ é versor tangencial ao painel e:

$$a_s = \vec{a}_{corpo} \cdot \vec{e}_s.$$

A equação 2.51 mostra que a variação da pressão ao longo da parede do corpo é função

Figura 2.5: Múltiplas fronteiras para modelagem de interferência.

do fluxo de circulações nos painéis (termo A) e da aceleração do corpo projetada na direção tangencial de cada painel (termo B). O cálculo das forças hidrodinâmicas está detalhado no apêndice C.

Adimensionalizando a força total agindo sobre o cilindro em termos da densidade do fluido ρ , da velocidade ao longe do fluido U , do comprimento L e do diâmetro do cilindro D , pode-se determinar os coeficientes de arrasto e de sustentação, que são definidos como:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{\vec{F}_{total} \cdot \vec{e}_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D L}; \\ C_L &= \frac{\vec{F}_{total} \cdot \vec{e}_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D L}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.8 Múltiplas fronteiras

A utilização de uma implementação capaz de resolver mais de um corpo sólido no escoamento é interessante para estudarmos efeitos de interferência. Queremos representar numericamente o fenômeno ilustrado na figura 2.5. Baseamos nosso desenvolvimento na física descrita pelas equações de 2.1 a 2.17.

A equação 2.18 representa o sistema linear que considera apenas uma fronteira. Para nossa nova configuração representaremos o sistema linear com o subscrito M referindo-se ao sistema modificado para múltiplos corpos:

$$[A_M] \{\Gamma_M\} = \{B_M\}. \quad (2.53)$$

Representaremos por $n_q \geq 1$ o número de fronteiras sólidas que serão incluídas na modelagem. Sendo assim, dado que as fronteiras não são, necessariamente, representadas pelo mesmo número de painéis teremos o vetor $\{n_w\} = \{n_{w_1}, n_{w_2}, \dots, n_{w_{n_q}}\}$ que contém as n_q variáveis que correspondem ao número de painéis com que cada fronteira será representada. As matrizes $[A_{mn}]$ de dimensão $[n_{wm} \times n_{wn}]$, com $m, n = 1, 2, \dots, n_q$, representam a influência, dada a condição de contorno de a fronteira dos corpos serem linhas de corrente, dos vórtices criados ao redor da fronteira do corpo n no corpo m .

$$[A_M] = \begin{bmatrix} [A_{1,1}] & [A_{1,2}] & \cdots & [A_{1,n_q}] \\ [A_{2,1}] & [A_{2,2}] & \cdots & [A_{2,n_q}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{n_q,1}] & [A_{n_q,2}] & \cdots & [A_{n_q,n_q}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\{\Gamma_M\} = \begin{Bmatrix} \{\Gamma_1\} \\ \{\Gamma_2\} \\ \vdots \\ \{\Gamma_{n_q}\} \end{Bmatrix}$$

$$\{B_M\} = \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \\ \vdots \\ \{B_{n_q}\} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Os vetores $\{\Gamma_i\} = \{\Gamma_{i1} \ \Gamma_{i2} \ \cdots \ \Gamma_{in_{w_i}}\}^T$, em que $i = 1, 2, \dots, n_q$, são as circulações dos vórtices criados ao redor da fronteira i .

Temos ainda, a necessidade de considerar o teorema de Kelvin com relação à circulação total do escoamento ser mantida constante ao longo do tempo (eq. 2.22). O fato de considerarmos a soma total das circulações dos vórtices criados ao redor de todos os corpos ser nula não nos garante que, individualmente, a soma das circulações dos vórtices criados ao redor de cada corpo seja nula. Por isso, a condição de Kelvin deve ser avaliada para cada corpo separadamente.

Podemos tratar esta condição da seguinte maneira: além da linha que incluímos no sistema de equações 2.18 que, para nosso caso, será resolvido pelo método dos mínimos quadrados, incluiremos $n_q - 1$ linhas para contabilizarmos a circulação dos vórtices que atravessaram

as fronteiras dos respectivos perímetros, escolhidos livremente, e imporemos que a circulação total dos vórtices criados a cada passo no tempo para cada uma das fronteiras escolhidas seja correspondentes à circulação que atravessou a fronteira no passo anterior. Se assim considerarmos, nossas $n_q - 1$ condições a serem satisfeitas serão:

$$\sum_{j=1}^{n_{w_i}} \Gamma_{ij} = - \sum_{k=1}^{n_{a_i}} \Gamma_{a_{ik}}.$$

Para qual n_{a_i} é o número de vórtices que atravessaram a fronteira $i = 1, 2, \dots, n_q$ após a convecção e $\Gamma_{a_{ik}}$ é a circulação do k ésimo vórtice que atravessou a i ésima fronteira. Lembrando que n_{a_i} e $\Gamma_{a_{ik}}$ são contabilizados sempre no passo de tempo anterior.

A matriz $[A_M]$ do sistema linear representado em 2.53 terá dimensão $[(n_{wT} + n_q) \times n_{wT}]$, em que $n_{wT} = \sum_{i=1}^{n_q} n_{wi}$ é o número total de painéis, e o sistema também deverá ser resolvido por algum método apropriado. Para o nosso caso, adotamos o método dos mínimos quadrados, para o qual a solução do sistema $[A_M]^T [A_M] \{\Gamma_M\} = [A_M]^T \{B_M\}$ deve ser calculada.

Uma vez tratadas as condições de contorno acima descritas e construído o sistema linear, a convecção dos vórtices e o tratamento dos termos viscosos são efetuadas como no caso de um corpo isolado.

3 ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS RÍGIDOS UTILIZANDO O MVD

Nesta seção apresentaremos um conjunto de resultados obtidos utilizando o MVD para modelagem do escoamento ao redor de cilindros isolados e em *tandem*, de forma gradativa, até que as análises dos casos de interação fluido-estrutura para *risers* flexíveis propriamente ditos, sejam apresentados, o que será feito, especificamente, no capítulo 5. Queremos verificar a sensibilidade do método com relação a mudanças na configuração da modelagem em questão e comparar os resultados com trabalhos já publicados na área de estudos. Os resultados apresentados nesta seção são referentes a cilindros rígidos fixos e/ou montados em bases elásticas com até 2 graus de liberdade.

Nos problemas a serem enfrentados pela indústria petrolífera, as condições às quais os *risers* são submetidos caracterizarão escoamentos com números de *Reynolds* relativamente altos. Nossas análises de condições de operação focam escoamentos com números de *Reynolds* compreendidos na faixa de operação dos *risers* o que significa que teremos, principalmente, $10^3 \leq Re \leq 10^5$, o que também foi analisado por Saltara (2008), utilizando o MVD para representar o escoamento ao redor de um cilindro fixo montado em base elástica com 1 grau de liberdade.

O escoamento é modelado em faixas bidimensionais posicionadas ao longo do comprimento do cilindro. Para cada faixa utilizamos o MVD para calcular as forças hidrodinâmicas, na direção do escoamento e perpendicular a ele, atuantes na faixa bidimensional correspondente. Este procedimento foi adotado devido ao fato da utilização de métodos eulerianos utilizando malhas, como o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos, exigirem um número muito grande de elementos dada a grande razão de aspecto (podem, facilmente, ser da ordem de $L/D = 10^4$) dos *risers* reais.

Os estudos realizados por Cesar Monzú Freire (FREIRE, 2010) são referentes a um cilindro rígido montado em base elástica com 2 graus de liberdade cujos resultados serão utilizados para comparação com o modelo utilizando o MVD. As comparações foram feitas verificando as amplitudes máximas de vibração da montagem em base elástica. Para o caso numérico, a

equação que descreve a dinâmica da base elástica foi integrada numericamente no tempo.

3.1 Cilindro fixo isolado

Um dos parâmetros utilizados para caracterização dos diferentes casos de análise é o número de *Reynolds* (Re) que é definido como

$$Re = \frac{UD}{\nu},$$

para o qual U é o módulo da velocidade da corrente, D é o diâmetro externo do cilindro e ν , a viscosidade cinemática do fluido. Esse adimensional nos dá a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas e será o nosso principal parâmetro na definição dos casos de estudo.

Instabilidades no escoamento ao redor de cilindros causam desprendimento alternado de vórtices caracterizando assim um escoamento que apresenta características periódicas que podem ser representadas através do número de *Strouhal* que é a frequência de desprendimento de vórtices adimensionalizada e é obtido através da expressão

$$St = \frac{fD}{U},$$

para o qual f é a frequência de desprendimento de vórtices, normalmente dada em Hz.

O caráter oscilatório do escoamento implica num campo de pressão oscilatório que, por sua vez, resulta em forças também oscilatórias na superfície do cilindro. Forças hidrodinâmicas, como são chamadas, resultam da flutuação do campo de pressões ao redor do cilindro devido ao desprendimento alternado de vórtices. Essas forças são, normalmente, decompostas em uma parcela alinhada e outra perpendicular ao escoamento, respectivamente chamadas de forças de arrasto e sustentação. Essas forças são adimensionalizadas através das equações

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 DL}, \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 DL},$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto e C_L o coeficiente de sustentação.

A figura 3.1a, adaptada de Norberg (2003), mostra a variação do número de *Strouhal* em função do número de *Reynolds*. Baseado no comportamento representado pelo gráfico podemos ter ideia se nosso modelo utilizando o MVD apresenta o comportamento descrito. Os pontos do gráfico da figura 3.1b foram obtidos através da análise do espectro de frequências dos sinais do C_L para os valores de Re correspondentes. Podemos observar na figura 3.1 que para o intervalo correspondente a $10^3 \leq Re \leq 10^5$, o MVD modela satisfatoriamente o fenômeno de

(a) Adaptação de Norberg (2003).

(b) Resultados do MVD.

Figura 3.1: Variação de St em função de Re .

VIV com base nas frequências de St obtidas.

Nas simulações com cilindros fixos utilizamos um passo no tempo adimensional $\Delta t^* = \Delta t U / D = 0.05$ em que U representa a velocidade da corrente e D o diâmetro do cilindro. Os parâmetros referentes ao MVD utilizados nessas simulações foram $n_w = 256$, $D_0 = 0.05m$ e $V_0 = 1 \times 10^{-7} m/s$. Iteramos o método por cerca de 500 passos no tempo adimensionais para concluirmos as simulações e aproximadamente 12000 vórtices foram utilizados para representar os escoamentos. O tempo computacional, para avaliação dos casos, foi de, em média, duas horas para cada caso.

Na figura 3.2 apresentamos os resultados obtidos com relação ao escoamento ao redor de um cilindro fixo para $Re = 5000$. A figura 3.2a contém as séries temporais dos coeficientes de arrasto e sustentação e a figura 3.2b representa um gráfico com o espectro do sinal do C_L obtido através de uma FFT. A abscissa representa a frequência adimensionalizada (fU/D) com pico no valor de aproximadamente 0.2 como esperado pelo gráfico adaptado de Norberg (figura 3.1).

Na figura 3.3 os resultados referentes ao escoamento ao redor de um cilindro fixo e $Re = 1.0 \times 10^4$ são apresentados. A figura 3.3a contém as séries temporais dos coeficientes de arrasto e sustentação e a figura 3.3b representa o espectro do sinal do C_L obtido pela FFT com um pico, desta vez, em um valor de frequência adimensionalizada de aproximadamente 0.20, valor que mais uma vez concorda com a descrição de Norberg.

Uma ilustração da esteira de vórtices para o escoamento ao redor de um cilindro fixo, com $Re = 1.0 \times 10^4$, é apresentada na figura 3.4. Podemos comprovar a maior concentração de vórtices próximo da fronteira do cilindro enquanto que a esteira ao longe do cilindro apresenta

uma densidade praticamente uniforme de vórtices. Essa mudança de densidade de vórtices é causada pela amalgamação dos vórtices da esteira, como consequência dos parâmetros V_0 e D_0 utilizados.

Observando as figuras 3.3b e 3.2b concluímos que a frequência de oscilação das forças hidrodinâmicas segue o comportamento descrito no gráfico apresentado na figura 3.1a.

3.2 Cilindros rígidos

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos utilizando o MVD para casos de escoamento ao redor de cilindros rígidos. São casos hipotéticos, com baixos números de *Reynolds*, para avaliar a consistência do método. Queremos mostrar a forma com a qual os parâmetros de configuração dos casos influenciam na resposta obtida.

São dados de entrada do MVD utilizado neste trabalho: a velocidade da corrente incidente (U), o diâmetro do cilindro (D), o passo no tempo (Δt) e o número de *Reynolds* (Re), através do qual variamos a viscosidade ($\nu = UD/Re$).

Os diferentes padrões de escoamento, obtidos nas figuras 3.5a a 3.5f, foram resultado de mudanças na viscosidade. Esta variação influencia diretamente na taxa de crescimento do núcleo dos vórtices, dada pela equação 2.37, durante a simulação.

Utilizando as respostas com relação à frequência de *Strouhal* do sinal do C_L obtidos como resposta do MVD para $10^2 \leq Re \leq 5.0 \times 10^5$ construímos o gráfico da figura 3.1b. Para a faixa de operação dos *risers* o MVD representa de forma satisfatória as frequências de oscilação envolvidas no fenômeno de VIV.

3.2.1 Modelagem de escoamentos ao redor de cilindros em regime pós-crítico

No chamado regime subcrítico de geração de vórtices ($350 < Re < 2.0 \sim 5.0 \times 10^5$), ondas de instabilidade começam a aparecer nas camadas cisalhantes formadas a partir dos pontos de separação. Estes pontos oscilam em torno do ponto localizado a aproximadamente 80° do ponto de estagnação frontal do escoamento incidente como ilustrado na figura 3.6. A principal característica do escoamento neste regime é o deslocamento para montante do ponto de transição para turbulência na camada cisalhante à medida que o número de Reynolds é aumentado. Como pode ser visto na figura 3.6, reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002), nesta faixa de Reynolds a camada limite é laminar quando ocorre a separação. O ponto de transição

(a) Coeficientes hidrodinâmicos para $300 \leq t^* \leq 500$.

(b) Espectro do sinal do C_L obtido através de uma FFT para o qual o pico de amplitude ocorre na frequência adimensional de $St = fD/U \approx 0.2$ como previsto pela curva adaptada da figura 3.1a.

Figura 3.2: Cilindro fixo isolado - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5000$, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Fluido hipotético em que o valor da viscosidade (ν) varia com o valor de Re .

(a) Coeficientes hidrodinâmicos para $300 \leq t^* \leq 500$.

(b) Espectro do sinal do C_L obtido através de uma FFT para o qual o pico de amplitude ocorre na frequência adimensional de $St = fD/U \approx 0.2$ como previsto pela curva adaptada da figura 3.1a.

Figura 3.3: Cilindro fixo isolado - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 1.0 \times 10^4$, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Fluido hipotético em que o valor da viscosidade (ν) varia com o valor de Re .

Figura 3.4: Ilustração da esteira formada para $Re = 1.0 \times 10^4$.

para turbulência ocorre apenas na camada cisalhante na região de formação dos vórtices. Esta transição, por ocorrer próxima ao corpo, faz com que a maior parte da camada cisalhante seja turbulenta.

À medida que o número de Reynolds é elevado, passamos para o regime crítico ($2.0 \times 10^5 < Re < 7.0 \times 10^5$) e o escoamento sofre uma alteração dramática em suas características. O ponto de separação está muito próximo do ponto de transição, mas ainda o precede. Existe uma tendência da camada cisalhante colar novamente na superfície do corpo, conforme pode ser visto na figura 3.7. Neste pequeno intervalo de Re o escoamento é muito sensível a perturbações externas como, por exemplo, rugosidade da parede, nível de turbulência do escoamento ao longe ou movimento do próprio cilindro. Neste regime crítico a estabilidade da bolha de separação é muito baixa e bolhas podem aparecer simultaneamente em ambos os lados do cilindro ou em apenas um dos seus lados.

Elevando ainda mais o número de Reynolds, o ponto de transição move-se para montante até que ele alcança o ponto de separação, fazendo com que a bolha desapareça. A transição para turbulência, na camada limite, ocorre imediatamente antes da separação. Devido ao fato de uma camada limite turbulenta resistir mais a um gradiente adverso de pressão, a separação passa a ocorrer para um ângulo de aproximadamente 120° . À medida que o número de Reynolds é aumentado, entramos no regime pós-crítico. As camadas cisalhantes voltam a fazer com que haja geração de vórtices de maneira regular e a separação ocorre aproximadamente a $100^\circ \sim 110^\circ$, conforme mostrado na figura 3.8.

Figura 3.5: Influência dos valores de ν , de acordo com o número de *Reynolds*, mantendo-se iguais os demais parâmetros constantes: $U = 1.0m/s$ e $D = 0.1m$. Os parâmetros de método dos vórtices foram mantidos em $nw = 128$, $D_0 = 0.05$ e $V_0 = 5.0 \times 10^{-8}$.

Figura 3.6: Separação da camada limite e camada cisalhante próxima à superfície, regime sub-crítico ($350 < Re < 2.0 \sim 5.0 \times 10^5$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).

Figura 3.7: Separação da camada limite e camadas cisalhantes próxima à superfície, regime crítico ($2.0 \sim 5.0 \times 10^5 < Re < 7.0 \times 10^5$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).

Figura 3.8: Separação da camada limite e camadas cisalhantes próxima à superfície, regime pós-crítico ($7.0 \times 10^5 < Re$), reproduzida de Basu (1985) apud Meneghini (2002).

Conforme descrito anteriormente, o modelo aqui proposto para simulação no regime pós-crítico, fixa o ponto de separação em função do número de *Reynolds*, isto no regime pós-crítico, através do uso de uma informação experimental tal como aquela descrita por Basu (1985) apud Meneghini (2002).

Com o intuito de verificar o efeito da imposição do ângulo de separação na dinâmica do escoamento para um valor do número de Reynolds acima do regime sub-crítico, foi considerado $\theta_s = 120^\circ$, valor do ângulo da separação para o caso de $Re = 5.0 \times 10^5$ (vide Basu (1985) apud Meneghini (2002)) em que θ_s é medido conforme ilustrado na figura 3.10. Fixado este ponto de separação, a metodologia adotada consistiu em manter fixos os vórtices discretos gerados nos painéis com $\theta < \theta_s$, i.e. eles não são convectados. No entanto, as velocidades induzidas por eles são consideradas no cálculo da convecção de todos os outros vórtices e na avaliação da circulação local do painel.

Os resultados apresentados com relação à modelagem do escoamento ao redor de um cilindro fixo, em água, em regime pós-crítico foram obtidos com base nos parâmetros $D = 0.5 \text{ m}$, $U = 1.0 \text{ m/s}$, $n_w = 512$, $D_0 = 0.05 \text{ m}$ e $V_0 = 1.0 \times 10^{-8} \text{ m/s}$. A figura 3.11 apresenta os resultados com relação à nossa modelagem do escoamento ao redor de um cilindro fixo em regime pós-crítico. A figura 3.11a contém as séries temporais dos coeficientes de arrasto e sustentação. A figura 3.11b representa o espectro de frequências do sinal do C_L calculado por FFT que apresentou um pico no valor de frequência adimensionalizada (St) de aproximadamente 0.32.

Se a modelagem do escoamento não levasse em consideração os efeitos da mudança

Figura 3.9: Cilindro fixo isolado em regime pós-crítico sem imposição do ponto de separação - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5.0 \times 10^5$ em água, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.5m$.

do ponto de separação, teríamos como resultado o quadro representado na figura 3.9. Para esta situação teríamos $St = fD/U \approx 0.17$, valor fora dos limites para o qual o MVD avalia corretamente as frequências de VIV.

Uma representação da esteira do cilindro em regime pós-crítico é dada na figura 3.12 na qual o estreitamento da esteira reflete no aumento da frequência de desprendimento de vórtices na parede do cilindro.

Comparando as respostas obtidas com relação aos valores médios do C_D representados nas figuras 3.9 e 3.11, sem imposição de θ_s e para $\theta_s = 120^\circ$, respectivamente, uma redução

Figura 3.10: Ilustração da localização do ponto de separação no MVD.

(a) Coeficientes hidrodinâmicos para $300 \leq t^* \leq 500$.

(b) Espectro do sinal do C_L obtido através de uma FFT para o qual o pico de amplitude ocorre na frequência adimensional de $St = fD/U \approx 0.32$.

Figura 3.11: Cilindro fixo isolado em regime pós-crítico - coeficientes hidrodinâmicos para $Re = 5.0 \times 10^5$ em água, $U = 1.0m/s$ e $D = 0.5m$.

Figura 3.12: Ilustração da esteira formada para $Re = 5.0 \times 10^5$ com ângulo de separação $\theta_s = 120^\circ$.

significativa de magnitude foi verificada. Também foi observada uma diminuição na amplitude de oscilação do C_L .

3.3 Cilindro isolado em base elástica - 1 grau de liberdade

Esta seção é dedicada à verificação do método com relação às condições de contorno com cilindro oscilando (eq. 2.17, que leva em conta a velocidade das fronteiras do corpo). O modelo foi elaborado com o movimento na direção x restrito e, numericamente, a base com um grau de liberdade foi implementada como deduzido em Saltara, Meneghini e Fregonesi (2003). Os valores com relação ao C_L obtido através do MVD é utilizado para cálculo do deslocamento do cilindro que por sua vez é introduzido no MVD para movimentação das fronteiras do cilindro. Essa metodologia é basicamente a mesma utilizada nas análises com cilindro flexíveis que veremos no capítulo 5.

A força por unidade de comprimento, na direção y , devido ao escoamento pode ser representada por:

$$F_y = \left[\int_S (\vec{\tau} - p\hat{n}) dS \right] \cdot \hat{e}_y = C_L \rho \frac{U^2}{2} D,$$

na qual $\hat{e}_y$ é o versor na direção y , $\hat{n}$ é o versor normal à parede do cilindro e S é a linha que representa a parede do cilindro.

A equação que define a dinâmica da base elástica, fora da água, é dada por:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f_y,$$

em que f_y é uma força qualquer na direção de oscilação da base elástica e m é a massa do cilindro.

A dinâmica da base elástica com o cilindro imerso em água pode ser representada por:

$$m\ddot{y} + (m + m_d)\omega_n\zeta\dot{y} + (m + m_d)\omega_n^2y = F_y,$$

onde m_d é a massa de fluido deslocada pela presença do cilindro. Podemos reescrever a equação acima como:

$$m^*\ddot{y} + (m^* + 1)\omega_n\zeta\dot{y} + (m^* + 1)\omega_n^2y = C_L \frac{2U^2}{\pi D}, \quad (3.1)$$

em que m^* representa a massa reduzida ($m^* = m/m_d$, massa do cilindro / massa de fluido deslocado), ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema e ω_n é a frequência natural do sistema em ar.

Dadas as considerações com relação à modelagem do escoamento como faixas bidimensionais e a dinâmica da base elástica integrada utilizando-se o método de Adams-Bashforth, temos resultados que não diferem daqueles obtidos por Saltara, Meneghini e Fregonesi (2003) para os quais as amplitudes máximas de oscilação do cilindro não passam de $1.0D$.

As condições para as análises foram $m^* = 4.3$, $\zeta = 0.2\%$ e $Re = 5 \times 10^3$ e com passos no tempo equivalentes a $\Delta t^* = U\Delta t/D = 0.1$, em comparação com os dados experimentais de Freire (2010). Com relação aos parâmetros do MDV e de amalgamação, utilizamos $n_w = 256$, $V_0 = 10^{-7}m/s$ e $D_0 = 0.05m$. Os parâmetros característicos da base elástica foram tais que $2.0 \leq V_r \leq 16.0$ para $V_r = UT_n/D$. O tempo computacional, na análise de cada caso, foi de duas horas, em média para os parâmetros do MVD apresentados anteriormente.

Também utilizamos o modelo de base elástica, descrito acima, para os casos de $Re = 5.0 \times 10^5$ sem imposição do ponto de separação e com $\theta_s = 120^\circ$. Os resultados, relacionados a coeficientes hidrodinâmicos e amplitude de oscilação adimensionalizada, estão apresentados na figura 3.13. Comparando os dois resultados, podemos verificar que no caso representado na figura 3.13a a amplitude de oscilação do C_D , assim como seu valor médio, e da base elástica (y/D) são maiores que no caso representado na figura 3.13b, na qual a amplitude de oscilação do C_L é mais elevada. Se for desconsiderada a posição correta do ponto de separação os resultados obtidos seriam completamente diferentes.

(a) Sem a imposição do ponto de separação.

(b) Impondo $\theta_s = 120^\circ$.

Figura 3.13: Cilindro em base elástica. $Re = 5.0 \times 10^5$, $U = 1.0m/s$, $D = 0.5m$, $m^* = 4.3$, $\zeta = 0.2\%$ e $V_r = 7.5$.

Figura 3.14: Ilustração do modelo de cilindro em base elástica com 2 graus de liberdade.

Figura 3.15: Resposta da amplitude em Y - caso com 1 grau de liberdade.

3.4 Cilindro isolado em base elástica - 2 graus de liberdade

Para os casos de oscilação envolvendo cilindros rígidos em base elástica com dois graus de liberdade utilizamos o mesmo modelo utilizado por Freire (2010) em que a montagem caracterizou sistemas mola-amortecedor idênticos nas duas direções. Realizamos simulações que corresponderam a $2.0 \leq V_r \leq 18.0$ para as quais os parâmetros de configuração foram os seguintes: $D = 32mm$, $\zeta = 0.2\%$ e $Re = 5 \times 10^3$ para valores de m^* correspondentes a 4.3 e 5.3.

Além da equação 3.1, que já foi considerada nos casos com um grau de liberdade, agora teremos que incluir a dinâmica com relação ao segundo grau de liberdade. A base elástica numérica segue a configuração ilustrada na figura 3.14. Mais uma vez valores de C_D e C_L , obtidos como resposta do MVD, são utilizados como entrada da equação que descreve o comportamento dinâmico da base elástica. As posições (nos eixos x e y), obtidas como resposta da integração da equação da base elástica, são usadas como entrada no MVD para o movimento do cilindro:

$$m^* \ddot{x} + (m^* + 1)\omega_n \zeta \dot{x} + (m^* + 1)\omega_n^2 x = C_D \frac{2U^2}{\pi D}. \quad (3.2)$$

De acordo com a modelagem apresentada, as amplitudes de vibração nas direções x e y referentes aos casos para dois graus de liberdade são apresentadas no gráfico da figura 3.16 na qual é feita uma comparação com resultados experimentais. O fato de modelar nosso cilindro como uma seção bidimensional no qual a força hidrodinâmica obtida como resposta é considerada uniforme ao longo do comprimento no modelo numérico, desconsiderando as tridimensionalidades presentes no escoamento para os casos reais, além da modelagem da camada-limite com perfil uniforme de velocidades como representado na figura 2.4, provavelmente são fontes de erros na modelagem com relação às amplitudes máximas obtidas. No entanto, em nosso caso, uma boa avaliação dos coeficientes hidrodinâmicos é suficiente. O tratamento do fluido como seções bidimensionais é uma forma de estimativa das forças hidrodinâmicas ao longo do cilindro. É claro que se o interesse do estudo fosse o processo de formação de vórtices e as estruturas presentes no escoamento durante a simulação deveríamos usar métodos de CFD mais precisos que o MVD.

Figura 3.16: Comparações dos resultados de amplitude de oscilação nas direções X e Y . Resultados numéricos (MVD do presente trabalho) e resultados experimentais obtidos por Freire (2010).

3.5 Cilindros fixos em *tandem*

Nesta seção apresentaremos os resultados com relação à interferência entre dois cilindros rígidos fixos em *tandem*. Na grande maioria dos casos reais, agrupamentos de *risers* são instalados nos sistemas oceânicos de extração e exploração de petróleo, sendo assim, o estudo de interferência entre as esteiras de dois cilindros é necessário. Queremos analisar situações em que cilindros suficientemente próximos têm sua dinâmica modificada dada a proximidade em relação ao segundo cilindro. Avaliaremos também, situações em que pares de *risers* verticais em *tandem* podem sofrer este tipo de interferência. Para isso, antes de prosseguir com a integração do MVD com o MEF, precisamos verificar se a modelagem do escoamento através do MVD é capaz de simular a interferência entre as esteiras de dois cilindros.

Utilizamos o código baseado no MVD descrito na seção de múltiplas fronteiras do capítulo 2.

Queremos avaliar os efeitos de interferência analisando, principalmente, o coeficiente de arrasto dos dois cilindros e a distância relativa entre eles. Sabemos que quanto mais próximos os cilindros forem posicionados pode ocorrer um inversão na direção do arrasto. Esta situação pode ocasionar o choque das duas estruturas no caso de *risers* flexíveis o que pode causar o colapso da estrutura.

Os resultados apresentados a seguir, consideram o escoamento em água ao redor de dois cilindros em *tandem* para $Re = 5000$, para cilindros com diâmetro de $0.02m$ e a velocidade da corrente equivalente a $0.25m/s$. Foram analisados 500 passos de tempo adimensionais para cada caso apresentado ($\Delta t^* = U\Delta t/D$), variando a distância relativa entre os cilindros no intervalo $1.5D \leq g \leq 4.0D$. As visualizações são exibidas na figura 3.17 juntamente com a média do coeficiente de arrasto para os cilindros à montante e à jusante. O modelo envolvendo iteração fluido-estrutural, utilizando o *Anflex* e para casos com *risers* em *tandem*, será apresentado no capítulo 5.

(a) $g = 1.5D : \overline{C_{D1}} = 1.15; \overline{C_{D2}} = -0.02$

(b) $g = 2.0D : \overline{C_{D1}} = 1.10; \overline{C_{D2}} = 0.20$

(c) $g = 2.5D : \overline{C_{D1}} = 1.16; \overline{C_{D2}} = 0.54$

(d) $g = 3.0D : \overline{C_{D1}} = 1.25; \overline{C_{D2}} = 0.72$

(e) $g = 3.5D : \overline{C_{D1}} = 1.24; \overline{C_{D2}} = 0.72$

(f) $g = 4.0D : \overline{C_{D1}} = 1.37; \overline{C_{D2}} = 0.59$

Figura 3.17: Esteiras obtidas para os casos de interferência com cilindros fixos e $Re = 5 \times 10^3$, $U = 0.25m/s$ com $D_1 = D_2 = 0.02m$, variando a distância relativa g entre os cilindros.

4 A INTEGRAÇÃO ANFLEX-MVD

A modelagem de sistemas de engenharia requer uma representação simplificada da realidade para se definir um modelo. Podemos determinar a resposta de um sistema através das equações diferenciais correspondentes e de condições de contorno pertinentes.

Como já mencionado ao longo do texto, nossos modelos de *risers*, aqui representados pelos cilindros flexíveis de grande razão de aspecto, foram modelados utilizando o método dos elementos finitos (MEF) implementado no código *Anflex* criado pela Petrobras, baseado no trabalho de Mourelle (1993). O contínuo, no nosso caso o *riser*, é subdividido em segmentos menores (elementos) e, para cada um deles, equações de equilíbrio devem ser satisfeitas. A montagem envolvendo todos os elementos juntamente com a solução do sistema de equações de equilíbrio nos fornece como resposta o comportamento da estrutura.

Um dos objetivos do trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta de análise utilizando o *Anflex* e o MVD que seja capaz de analisar a dinâmica de *risers* flexíveis sujeitos ao VIV, fenômeno que, na versão original do código, não era modelado devido ao fato das forças serem estimadas pela equação de Morrison.

O *Anflex* considera não-linearidade geométrica devido basicamente a grandes deslocamentos e interação axial-transversal que são comuns em sistemas estruturais como os *risers*. Em estruturas com comportamento linear, os deslocamentos são infinitesimais, fazendo com que a configuração deformada se confunda com a original. No caso de estruturas flexíveis, os deslocamentos podem ter a mesma ordem de grandeza das dimensões da estrutura, fazendo com que seja necessário tratar as equações de equilíbrio na configuração deformada. O procedimento adotado pelo *Anflex* na resolução do problema dinâmico-estrutural consiste em realizar uma série de análises lineares, sempre em busca de melhores aproximações a cada novo ciclo, nas quais o carregamento aplicado é a diferença entre a carga aplicada e as forças resistentes causadas pela deformação da estrutura (vetor de desequilíbrio ou resíduo).

A matriz de rigidez é recalculada no início de cada nova iteração até que o vetor de desequilíbrio atinja a tolerância pré estabelecida.

O interesse do presente trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta de análise de interação fluido-estrutural, dado que esse tipo de análise no *Anflex* originalmente utilizava a equação de Morrison, através da qual os efeitos de VIV não são considerados.

Após a discretização do contínuo, para nosso caso o *riser*, em elementos finitos, a equação de equilíbrio pode ser representada de acordo com os vetores que compõem o equilíbrio dinâmico de um elemento para um instante de tempo t qualquer:

$$\vec{F}_{int}^{(t)} + \vec{F}_I^{(t)} + \vec{F}_D^{(t)} = \vec{F}_{ext}^{(t)}, \quad (4.1)$$

sendo os vetores de força: $\vec{F}_{int}$ é o vetor de forças internas, $\vec{F}_I$ é o vetor de forças de inércia, $\vec{F}_D$ é o vetor de forças de amortecimento e $\vec{F}_{ext}$ é o vetor de forças externas no qual o MVD terá influência direta. Os *risers* analisados numericamente neste trabalho, foram modelados através do *Anflex* utilizando elementos de viga com 12 graus de liberdade (3 forças e 3 momentos para cada nó) que correspondem às forças internas do elemento.

A representação da formulação utilizando elementos finitos na discretização espacial da expressão 4.1 é fornecida pela expressão

$$[M]\{\ddot{u}\}^{(t)} + [C]\{\dot{u}\}^{(t)} + [K]\{u\}^{(t)} = \{F\}^{(t)}, \quad (4.2)$$

em que (t) representa o instante de tempo correspondente, e:

- $[M]$ é a matriz de massa.
- $[C]$ é a matriz de amortecimento.
- $[K]$ é a matriz de rigidez.
- $\{F\}$ é o vetor de forças externas (influência direta do MVD no *AnflexCFD*).
- $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ e $\{u\}$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamentos nodais respectivamente.

O sistema de equações diferenciais 4.2 representa a dinâmica do cilindro flexível. O vetor correspondente a $\vec{F}_{ext}^{(t)}$ leva em consideração as forças calculadas nas seções hidrodinâmicas através do MVD com as condições de contorno dadas por $\{u\}^{(0)} = \{u_0\}$ e $\{\dot{u}\}^{(0)} = \{\dot{u}_0\}$ com $\{\dot{u}_0\}$ e $\{u_0\}$ conhecidos.

A cada passo no tempo, a configuração da estrutura impõe a configuração das seções de CFD que são responsáveis pelo cálculo das forças naquele plano retornando os valores para a

parte responsável pelo cálculo da dinâmica estrutural como foi utilizado em Lima et al. (2007). Um detalhamento das alterações realizadas no código *Anflex* é apresentado no apêndice A.

A solução do problema não-linear no *Anflex* passa por uma abordagem incremental, ficando a equação 4.2 escrita em função dos incrementos de deslocamentos, velocidades e acelerações, entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$ como representado na equação:

$$[M]\{\Delta\ddot{u}\}^{(t+\Delta t)} + [C]\{\Delta\dot{u}\}^{(t+\Delta t)} + [K]\{\Delta u\}^{(t+\Delta t)} = \{R\}^{(t+\Delta t)} - \{F\}^{(t)}. \quad (4.3)$$

A integração no tempo é feita através do método HHT (Hilber, Hughes e Taylor; método α) em que o vetor $\{R\}^{(t+\Delta t)}$ passa a representar as forças hidrodinâmicas calculadas através do MVD (detalhes no apêndice C) e o vetor $\{F\}^{(t)}$ as forças no instante (t) . Os operadores de integração são dados de acordo com as equações:

$$\{u\}^{(t+\Delta t)} = \{u\}^{(t)} + \{\dot{u}\}^{(t)}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}^{(t)} + \beta\{\ddot{u}\}^{(t+\Delta t)} \right] \Delta t^2, \quad (4.4)$$

$$\{\dot{u}\}^{(t+\Delta t)} = \{\dot{u}\}^{(t)} + [(1 - \gamma)\{\ddot{u}\}^{(t)} + \gamma\{\ddot{u}\}^{(t+\Delta t)}] \Delta t. \quad (4.5)$$

A forma discretizada incremental final é dada pela equação:

$$[\hat{K}]\{\Delta u\} = \{\hat{R}\}^{t+\Delta t} \quad (4.6)$$

em que $[\hat{K}]$ é a matriz de rigidez efetiva e $\{\hat{R}\}$ é o vetor de carregamento efetivo, sendo que:

$$[\hat{K}] = a_0\{M\} + a_1\{C\} + (1 + \alpha)\{K\}$$

e

$$\begin{aligned} \{\hat{R}\}^{(t+\Delta t)} = & (\{R\}^{(t+\Delta t)} - \{F\}^{(t+\Delta t)}) (1 + \alpha) \\ & + \{M\} [-a_0\{\Delta u\}^{(t+\Delta t)} + a_2\{\dot{u}\}^{(t)} + a_3\{\ddot{u}\}^{(t)}] \\ & + \{C\} [-a_1\{\Delta u\}^{(t+\Delta t)} + a_4\{\dot{u}\}^{(t)} + a_5\{\ddot{u}\}^{(t)}] \\ & - (\{R\}^{(t)} - \{F\}^{(t)}) \alpha. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear 4.6 podemos calcular $\{u\}^{(t+\Delta t)}$ a partir de $\{\Delta u\}^{(t+\Delta t)} =$

$\{u\}^{(t+\Delta t)} - \{u\}^{(t)}$. Os vetores de velocidade e aceleração são calculados respectivamente como:

$$\{\ddot{u}\}^{(t+\Delta t)} = a_0\{\Delta u\} - a_2\{\dot{u}\}^{(t)} - a_3\{\ddot{u}\}^{(t)}$$

e

$$\{\dot{u}\}^{(t+\Delta t)} = \{\dot{u}\}^{(t)} + a_6\{\ddot{u}\}^{(t)} + a_7\{\ddot{u}\}^{(t+\Delta t)}$$

em que $\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2$, $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$, $a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}$, $a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}$, $a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$, $a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$, $a_5 = \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t$, $a_6 = (1 - \gamma)\Delta t$ e $a_7 = \gamma\Delta t$. α é tipicamente igual a -0.1 .

Em posse da integração *Anflex* / MVD, podemos prosseguir com as análises envolvendo interação fluido estrutural para cilindros flexíveis. Para acelerarmos as análises, utilizamos técnicas de processamento paralelo como descrito no apêndice A.

5 CILINDROS FLEXÍVEIS

Na modelagem apresentada no capítulo 3, o cilindro foi considerado rígido, em base fixa ou linear-elástica, como descrito anteriormente. Nesta seção utilizaremos a integração realizada entre o código de elementos finitos *Anflex* da Petrobras (Mourelle et al. (2001)) com o modelo de CFD caracterizado pelo MVD (capítulo 2). As alterações feitas no código original do *Anflex* estão descritas no apêndice A.

Uma breve apresentação das propriedades físicas do modelo numérico são apresentadas na tabela 5.1, a qual descreve um *riser* submetido a uma corrente com perfil de velocidades em degrau como ilustrado na figura 5.2. O modelo numérico apresentado é baseado nos experimentos realizados por J. R. Chaplin detalhados em Chaplin et al. (2005) no qual, um cilindro flexível de $13,12m$ de comprimento e $28mm$ de diâmetro hidrodinâmico foi montado em uma base móvel que foi arrastada ao longo de um canal de forma que a parte inferior do modelo, 45% de seu comprimento total, fosse submetida a velocidades de até $1m/s$ permanecendo o restante, ainda submerso, em água parada como ilustrado na figura 5.1.

O modelo numérico é composto por 64 elementos de viga de doze graus de liberdade, os mesmos citados no capítulo anterior, e para cada nó do elemento está associada uma seção hidrodinâmica. 45 % do comprimento do modelo é submetido a um perfil uniforme de corrente, com valores entre 0.0 e $1.0 m/s$, e o restante encontra-se em água parada como ilustrado na figura 5.2. Queremos comprovar a capacidade da modelagem em captar os efeitos de excitação multi-modal apresentados nos resultados experimentais e dessa forma desenvolver uma ferramenta capaz de modelar o fenômeno em escalas reais, visando, especificamente a modelagem de *risers* instalados em águas profundas e sujeitos a perfis de corrente variáveis ao longo da profundidade. Os casos experimentais selecionados para comparação direta com o modelo experimental utilizando o *AnflexCFD* são representados na tabela 5.2, na qual as tensões no topo foram medidas durante o experimento, que utilizava uma mola de fixação no topo para evitar que o modelo se rompesse, e utilizadas como condição de contorno no modelo numérico.

Os parâmetros com relação ao MVD utilizado nas simulações foram $n_w = 256$,

Figura 5.1: Esquema dos experimentos utilizados por J. R. Chaplin.

Tabela 5.1: Propriedades mecânicas do *riser* modelado numericamente.

Diâmetro externo (D_e)	28 mm
Comprimento (L)	13.12 m
Massa específica (seco)	1.47 kg/m
Massa específica (molhado)	1.85 kg/m
EI	29.9 Nm ²
amortecimento estrutural	0.33 %
EA	5.88 MN

$D_0 = 0.05m$ e $V_0 = 5.0 \times 10^{-7}m/s$. Para o modelo numérico de *riser* a tração no topo (T) e a velocidade da corrente em degrau (U) definem cada caso de análise. As simulações se estenderam por 5×10^3 passos no tempo adimensionais ($\Delta t^* = \Delta t U/D$) e as envoltórias foram calculadas levando em consideração as máximas amplitudes de vibração ao longo das análises. O tempo computacional para os casos de cilindros flexíveis, para *risers* com uma média de 100 elementos, foi de seis horas, considerando-se os parâmetros do MVD dados anteriormente.

A montagem experimental utilizava uma mola no topo do *riser* para evitar a quebra do mesmo durante as simulações.

Os gráficos apresentados nas figuras de 5.3 a 5.6 representam as comparações entre as envoltórias obtidas como resposta da modelagem utilizando o AnflexCFD e os resultados experimentais. Podemos observar as diferentes configurações relacionadas à envoltória nas direções alinhada com a corrente (representado nos gráficos por X/D) e transversal à corrente

Figura 5.2: Ilustração do modelo de *riser* submetido ao perfil de corrente em degrau.

Tabela 5.2: Condições de teste para os casos com o modelo sujeito a corrente em degrau.

Caso	velocidade (m/s)	tensão no topo (N)
1	0.16	405
3	0.31	457
6	0.60	670
9	0.95	1002

(a) Experimental.

(b) numérico - MVD.

Figura 5.3: Envoltórias para o caso 1.

(a) Experimental.

(b) numérico - MVD.

Figura 5.4: Envoltórias para o caso 3.

Figura 5.5: Envoltórias para o caso 6.

Figura 5.6: Envoltórias para o caso 9.

(representado no gráfico por Y/D).

Na figura 5.3b, apresentamos as envoltórias obtidas, utilizando o *AnflexCFD*, para as condições referentes ao caso 1. A figura 5.3b apresenta as envoltórias obtidas experimentalmente para o caso 1 que caracteriza, predominantemente, o segundo modo de vibração da estrutura. A simulação representou muito bem a resposta experimental na previsão da forma da envoltória com amplitudes de oscilação levemente abaixo do esperado para as direções alinhada e perpendicular a direção da corrente incidente.

Podemos observar, na figura 5.4b, que, mais uma vez, o modelo numérico avaliou de maneira correta a forma da envoltória obtida dadas as condições de simulação que, desta vez, correspondem ao caso 3. As amplitudes de oscilação também apresentam-se um pouco abaixo daquelas obtidas experimentalmente em ambas as direções.

As figuras 5.5b e 5.6b, respectivamente, apresentam as envoltórias obtidas numericamente para os casos 6 e 9. Observando os resultados experimentais, apresentados nas figuras 5.5a e 5.6a, podemos afirmar que o modo excitado, predominantemente, nestas condições, foi o sétimo modo. As simulações não apresentaram formas que caracterizam o sétimo modo como predominante mas apresentaram respostas semelhantes a forma esperada. As amplitudes de oscilação, mais uma vez, estão um pouco abaixo do valores experimentais. Este fato pode ser justificado pela modelagem adotada para a qual as faixas bidimensionais de CFD não simulam os efeitos tridimensionais que, certamente, estão presentes no escoamento.

Um ponto importante da modelagem é a capacidade de avaliar como os diferentes tipos de perfis de corrente incidentes no modelo de *riser* interferem na dinâmica da estrutura.

5.1 *Risers em tandem*

Nesta seção, utilizamos o mesmo modelo de *riser* real descrito por Fregonesi (2002) cujas propriedades mecânicas estão apresentadas na tabela 5.3. Utilizamos modelos idênticos, para o estudo de interferência, colocados no arranjo em *tandem*, para distâncias representadas por g no intervalo de $4.0D \leq g \leq 8.0D$. Os perfis de corrente utilizados nas simulações estão descritos na tabela 5.4. Neste modelo, a profundidade de $0.0m$, representa a superfície, e a profundidade de $100.0m$, representa o fundo. Analisaremos um *riser* de $120m$ de comprimento em que $20m$ de encontram fora da lâmina d'água.

O caso U12 está caracterizado por um perfil de velocidades para o qual a velocidade varia, linearmente, de $1.2m/s$ a $15.0m$ de profundidade até $0.2m/s$ a $100.0m$ de profundidade.

Tabela 5.3: Propriedades mecânicas do modelo *riser* real.

Diâmetro externo (D_e)	0.25 m
Diâmetro interno (D_i)	0.21 m
Comprimento (L)	120.00 m
Peso específico (seco)	75.54 kN/m ³
E	2.1×10^8 kN/m ²

(a) Caso U04 - riser isolado.

(b) Caso U12 - riser isolado.

Figura 5.7: Envolvórias para o modelo de *riser* real.

Para o caso do modelo de *risers* isolado, as respostas com relação as envoltórias apresentadas, são, praticamente, as mesmas encontradas por Fregonesi (2002) e estão representadas na figura 5.7. Utilizamos este resultado como exemplo para validação do modelo utilizado neste trabalho para solução de um *riser* real.

Os casos de interferência, utilizando *risers* em tandem, foram modelados com o MVD descrito na seção 2.8. As figuras de 5.8 a 5.13 representam as envoltórias obtidas nas quais *riser* 1 representa o modelo a montante e *riser* 2, o modelo a jusante. Os casos para os quais não foi possível obter a envoltória foi devido ao choque dos modelos de *risers* durante a análise numérica. Esse tipo de condição, o modelo não é capaz de avaliar.

Analisando a figura 5.8, podemos observar que a forma das envoltórias obtidas, para o modelo de *risers* em *tandem* espaçados por uma distância de $4.0D$, não caracterizam a predominância do segundo modo, tanto para o *riser* 1 quanto para o *riser* 2. A proximidade entre

Tabela 5.4: Perfis de velocidade utilizados na modelagem de *risers* reais.

Profundidade (m)	U04 (m/s)	U12 (m/s)
0.0	0.40	1.20
15.0	0.40	1.20
100.0	0.40	0.20

(a) *riser 1*. (b) *riser 2*.Figura 5.8: *Risers* em *tandem* - Perfil U04 com $g = 4.0D$.

os modelos modificou completamente a resposta dinâmica em comparação ao modelo isolado, representado na figura 5.7. O *riser 2* apresenta amplitudes de oscilação menores, em relação ao *riser 1*, nas duas direções.

Para o modelo de espaçamento $5.0D$ entre os *risers*, o *riser 1* apresenta amplitudes de oscilação, na direção y , maiores quando comparadas ao modelo isolado. Com relação a forma da envoltória, verificamos a predominância do terceiro modo. O *riser 2* apresenta amplitudes de oscilação, na direção y , menores, em relação ao *riser 1*, com predominância do segundo modo. Na direção x , o *riser 1* apresentou uma envoltória que nos indica um aumento na amplitude de oscilação enquanto que, na direção x , para o *riser 2*, praticamente, não observamos nenhuma alteração.

As figuras 5.10 e 5.11 apresentam as envoltórias obtidas para o modelo de *risers* em *tandem* para os espaçamentos de $6.0D$ e $8.0D$, respectivamente. Na figura 5.10a, referente

Figura 5.9: *Risers em tandem* - Perfil U04 com $g = 5.0D$.

ao *riser 1* para o caso com $g = 6.0D$, observamos um modo predominante diferente daquele apresentado na figura 5.10b que apresenta predominância do segundo modo. Para o caso com $g = 8.0D$, tanto o *riser 1* quanto o 2 apresentaram envoltórias, na direção y com predominância do segundo modo. Na direção x , os padrões se mantiveram os mesmos com o *riser 2*, sempre, oscilando em uma amplitude menor que o *riser 1*.

O perfil U12 com espaçamento $g = 6.0D$ apresenta envoltórias, na direção y , com limites de magnitude superiores a $1.0D$ tanto para o *riser 1* quanto para o *riser 2* com uma forma de envoltória diferente daquela apresentada pelo modelo isolado. Já com o espaçamento $g = 8.0D$, figura 5.11, as formas das envoltórias são as mesmas apresentadas pelo modelo isolado mantendo, inclusive, a predominância do quarto modo.

De uma forma geral, o *riser 2* apresenta envoltórias, em ambas as direções, com limites de magnitude inferiores as apresentadas pelo *riser 1* para ambos os perfis de corrente.

Podemos observar que as respostas, para alguns casos, são, completamente, diferentes das envoltórias obtidas para o *riser* isolado tanto na direção da corrente quanto perpendicular a ela para ambos os perfis de corrente analisados.

(a) riser 1.

(b) riser 2.

Figura 5.10: *Risers em tandem* - Perfil U04 com $g = 6.0D$.

(a) riser 1.

(b) riser 2.

Figura 5.11: *Risers em tandem* - Perfil U04 com $g = 8.0D$.

(a) riser 1.

(b) riser 2.

Figura 5.12: *Risers em tandem* - Perfil U12 com $g = 6.0D$.

(a) riser 1.

(b) riser 2.

Figura 5.13: *Risers em tandem* - Perfil U12 com $g = 8.0D$.

6 CONCLUSÕES

O uso de ferramentas de CFD na engenharia de projeto de sistemas oceânicos ainda se encontra em fase de desenvolvimento. Ainda estamos longe de encarar um problema real, com toda sua complexidade, de forma completa, com todas as variáveis e peculiaridades envolvidas no fenômeno. No caso do projeto de *risers* de grande razão de aspecto, a utilização de métodos Eulerianos, dependentes de malhas computacionais, é inviável mesmo com a capacidade de processamento conhecida pelo Homem atualmente. Este fato é justificado pela grande diferença entre as escalas de tempo e dimensões dos fenômenos envolvidos. Para um *riser* com razão de aspecto da ordem de 10^3 , por exemplo, é comum que a razão entre a menor escala de tempo, relacionada ao movimento da estrutura, e a escala de tempo dos fenômenos de VIV seja de 10^2 . As malhas computacionais utilizadas para resolver a dinâmica estrutural de forma precisa são, em muitos casos, milhares de vezes menores que as malhas utilizadas para a resolução do fluido com relação ao número de graus de liberdade considerados em sua formulação.

O uso de métodos Lagrangianos se torna atraente quando desenvolvido independente da necessidade do uso de malhas computacionais. Particularmente, o MVD utilizado neste trabalho, além de sua simplicidade do ponto de vista computacional, mostrou-se eficiente na avaliação dos coeficientes hidrodinâmicos utilizados no cálculo da dinâmica estrutural. A metodologia de análise desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada para outros métodos de CFD.

Observando os resultados apresentados temos uma visão de como perfis de corrente, de diferentes formas e magnitudes, podem influenciar no comportamento dinâmico dos *risers*. Este comportamento dinâmico, uma vez modelado de forma correta, pode, por exemplo, nos dar uma estimativa de vida útil da estrutura em relação ao VIV e fazer com que os recursos naturais e humanos necessários para o desenvolvimento tecnológico da indústria petrolífera seja direcionado precisamente.

Em relação ao método dos vórtices, mesmo com um modelo de camada-limite simplificado, como desenvolvido neste trabalho utilizando a decomposição de Helmholtz, as forças realizadas pelo fluido nos modelos de *risers* utilizados nos levaram a resultados próximos

dos obtidos nos casos experimentais citados. As diferenças apresentadas, principalmente, com relação às amplitudes de oscilação dos cilindros rígidos montados em bases linear-elásticas podem ser justificadas pela modelagem do fluido como faixas bidimensionais, simplificação que desconsidera completamente os efeitos tridimensionais encontrados na fluido-dinâmica do escoamento ao redor de cilindros.

O uso das bibliotecas de processamento paralelo viabilizaram o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos através do MVD utilizando o esquema *master-slave* para a integração *Anflex*/CFD dado que o acoplamento entre as seções de CFD se dá mediante a dinâmica da estrutura.

O desenvolvimento de modelos tridimensionais de CFD envolvendo métodos Lagrangianos independentes de malhas computacionais utilizando modelos de camada-limite precisos podem vir a melhorar, em muitos aspectos, a metodologia desenvolvida e os resultados obtidos neste trabalho.

A avaliação da dinâmica de *risers* necessita de modelos de camada-limite que levem em consideração as mudanças no padrão de VIV em relação ao escoamento ao redor de cilindros e as condições para números de *Reynolds* que caracterizam os regimes crítico e pós-crítico do escoamento. *Risers* com diâmetro hidrodinâmico equivalente a $0.25m$ são comumente utilizados na indústria petrolífera. Quando submetidos a escoamentos com velocidades na faixa de $0.5m/s$, magnitude de velocidade comum nos sistemas oceânicos nos quais os *risers* são instalados, o escoamento já apresenta alterações com relação a localização do ponto de separação da camada-limite, fenômeno que altera completamente a dinâmica de cilindros livres para oscilar, e não deve ser desconsiderado.

Como próximo passo no desenvolvimento de métodos de vórtices, podemos melhorar o modelo de camada-limite para que os resultados sejam coerentes, também, para baixos números de Reynolds ($Re < 1000$). Podemos adicionar ao método algoritmos mais eficientes de cálculo das velocidades induzidas proporcionando a possibilidade de análise de um número, consideravelmente, maior de elementos de vórtices e, em função deste fato, a elaboração de um método tridimensional torna-se viável.

Em relação as melhorias feitas no *Anflex* (Petrobras), propostas neste trabalho, integraram ferramentas de estudo do VIV capazes de modelar efeitos desconsiderados pelo uso da equação de Morrison. O VIV tem papel significativo no tempo de vida útil dos *risers*. São vibrações de amplitudes baixas em relação ao seu comprimento mas, mesmo assim, têm uma participação significativa na fadiga do material empregado em sua construção. Somente o MVD, como modelo de CFD para o fenômeno de VIV, permite calcular centenas de ciclos de

VIV, necessários para uma boa análise estatística da fadiga da estrutura, num intervalo de tempo aceitável para um projeto de engenharia.

APÊNDICE A – ADAPTAÇÕES NO CÓDIGO ANFLEX

A primeira etapa do trabalho foi compatibilizar o código computacional Anflex para a plataforma Linux. Esta tarefa foi necessária devido a incompatibilidades entre o código original, desenvolvido em plataforma Windows e os compiladores *gfortran* e *intel-ifort* utilizados, realizado por Flatschart (2007). Na primeira abordagem do problema, a parcela de CFD não considerava efeitos de interferência entre dois cilindros flexíveis.

A descrição a seguir considera que o leitor tenha conhecimento básico do código *Anflex/Petrobras*.

A chamada da sub-rotina de CFD foi inserida no programa principal (*bgerdn.f*). O gerenciamento dos processos é feito pelo processo mestre que também fica encarregado de executar a parcela estrutural do código de simulação. A cada passo, seja no tempo ou simplesmente uma nova sub-iteração para obtenção da convergência, os processos escravos recebem informações necessárias para a utilização do MVD nas seções a eles designadas, como posição do *riser*, diâmetro hidrodinâmico, etc, e calculam os coeficientes C_D e C_L destas seções. Os coeficientes são a seguir enviados para o processo mestre, que retoma o processamento. Novos deslocamentos são calculados, e o ciclo se repete até o término da simulação. A comunicação entre os processos é feita utilizando MPI. O código gerado foi chamado de *AnflexCFD*.

Como a maior parte do custo computacional é a solução das seções hidrodinâmicas pelo MVD, o processo mestre fica um período de tempo ocioso, aguardando o envio de dados dos processos escravos. Para evitar uma subutilização de recursos computacionais, algumas seções hidrodinâmicas são também designadas ao processo mestre. A adoção deste procedimento tem um impacto positivo significativo na performance do método, pois além de aumentar a taxa de utilização dos processos, também diminui o volume de informações trocadas entre os mesmos.

Um fluxograma simplificado desta versão é mostrado na Figura A.1. Nesta figura, P0 refere-se ao processo mestre, e P1 ao processo escravo. A título de simplificação, as seções do

riser são divididas somente entre dois processos, como mostra a Figura A.2. O sinal *flagcfd* é um sinal de parada da simulação para os processos escravos. Este sinal é necessário, pois os processos escravos são passivos ao longo da simulação, ou seja, somente respondem a um sinal do processo mestre para receber novos dados, e a seguir calcular as seções hidrodinâmicas. Esta versão é capaz de distribuir os dados das seções para os processos escravos, realizar o cálculo das seções hidrodinâmicas utilizando o MVD, e retornar os coeficientes C_D e C_L para o processo mestre. Para tanto, foram feitas alterações nas sub-rotinas BGERDN, BADINA, BPELEM, BPPNL e DWAVE, além da inclusão das sub-rotinas de CFD.

Figura A.1: Fluxograma, código paralelo/CFD.

Figura A.2: Divisão das seções entre os processos.

APÊNDICE B – VÓRTICE 2D

Para ilustrarmos o modelo de vórtice 2D, idealizaremos um cilindro infinito em relação ao eixo x do sistema de coordenadas B.1 girando com velocidade ω_x em um fluido viscoso. As linhas de corrente formadas por esta configuração está representada em B.2. Se adotarmos um sistema de coordenadas cilíndricas teremos a seguinte modificação nos operadores:

Figura B.1: Sistema de coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + q_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

Escrevendo as equações da continuidade (2.2) e de Navier-Stokes (eq. 2.1, como proposto em (KATZ; PLOTKIN, 1991)) teremos:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{B.3})$$

para a equação da continuidade e para as equações de transporte da quantidade de movimento teremos no plano $r - \theta$, dado que $u_x = u_r = 0$:

direção r :

$$\rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.4})$$

direção θ :

$$\rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

Da equação da continuidade B.3, no plano $r - \theta$ concluímos que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.6})$$

sendo assim, u_θ é função apenas de r ,

$$u_\theta = u_\theta(r) \quad (\text{B.7})$$

Da equação B.4 concluímos que

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{B.8})$$

e sendo u_θ função de r e dada a simetria radial da suposição, p também será função exclusiva de r . O que nos conduz a reduzir a equação B.5 a

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \quad (\text{B.9})$$

e consequentemente a

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Integrando a equação B.10 em relação à r teremos

$$\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} = C_1 \quad (\text{B.11})$$

sendo C_1 uma constante de integração. Rearranjando teremos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_\theta) = C_1 \quad (\text{B.12})$$

que se integrada novamente com relação à r resulta em

$$u_\theta = \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r} \quad (\text{B.13})$$

Dadas as condições de contorno

$$\begin{aligned} u_\theta &= R\omega_x, & r &= R \\ u_\theta &= 0, & r &= \infty \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

A segunda condição de contorno só é satisfeita se $C_1 = 0$ o que nos leva a

$$u_\theta = \frac{R^2\omega_x}{r} \quad (\text{B.15})$$

Da equação 2.8 podemos extrair que

$$\Gamma = \int_{2\pi}^0 u_\theta r d\theta = 2\omega_x \pi R^2 \quad (\text{B.16})$$

O que nos permite escrever a equação 2.9. Se integrarmos a velocidade na região delimitada pelas linhas pontilhadas da figura B.2, no sentido anti-horário, dado que $u_r = u_x = 0$ teremos

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0 \cdot \Delta r + \frac{\Gamma}{2\pi(r + \Delta r)} \Delta\theta - 0 \cdot \Delta r - \frac{\Gamma}{2\pi r} r \Delta\theta = 0 \quad (\text{B.17})$$

que nos leva a concluir que desconsiderando as singularidades (vórtices como partículas) em um escoamento modelado por uma distribuição de vórtices 2D como representado acima, a sobreposição das linhas de corrente formada por esta distribuição continua sendo a representação de um escoamento irrotacional.

Figura B.2: Escoamento induzido por um vórtice 2D.

APÊNDICE C – CÁLCULO DAS FORÇAS HIDRODINÂMICAS

A força total que o fluido exerce sobre o corpo pode ser obtida de duas maneiras: 1) integrar os dois termos do lado direito da equação 2.51 sobre a parede do corpo obtendo, desta maneira, a força total do fluido sobre o corpo, ou 2) integrar somente a parcela correspondente ao fluxo de vorticidade (termo A) e desconsiderar a parcela da aceleração (termo B) obtendo, deste modo, apenas uma parcela da força total do fluido que age no corpo, sendo a outra parcela obtida separadamente como será explicado a seguir.

Considerando um corpo de raio r e que tenha uma aceleração dada por: $\vec{a}_{corpo} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ conforme indicado na figura C.1 onde $\vec{e}_s$ e $\vec{e}_n$ são, respectivamente, o versor tangencial e normal à parede do corpo e são definidos por:

Figura C.1: Corpo acelerado.

$$\begin{aligned}\vec{e}_s &= \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_n &= -\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y\end{aligned}\tag{C.1}$$

A pressão no ponto B localizado na parede do corpo, devida somente à parcela da aceleração, é dada por:

$$p_B = p_A - \rho \int_A^B \vec{a}_{corpo} \cdot \vec{e}_s dS. \quad (C.2)$$

Adotando p_A igual a zero, admitindo que queremos avaliar a pressão relativa e não absoluta, e substituindo $dS = R d\theta$, em que R é o raio do cilindro, $\vec{a}_{corpo}$ e $\vec{e}_s$ na equação anterior, tem-se:

$$p_B = -\rho \int_0^\theta (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) \cdot (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) R d\theta, \quad (C.3)$$

e, trabalhando com os termos da equação, fazendo $p_B = p_\theta$ obtém-se:

$$p_\theta = -\rho \int_0^\theta (a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) R d\theta. \quad (C.4)$$

Resolvendo a integral anterior, determina-se a pressão em um ponto qualquer localizado na superfície do corpo:

$$p_\theta = -\rho R [a_x (1 - \cos \theta) + a_y \sin \theta]. \quad (C.5)$$

A força devida a esta parcela da pressão é calculada pela integral da pressão sobre a superfície do corpo:

$$\vec{F} = - \oint_{S_{corpo}} p_\theta \cdot \vec{e}_n dS = - \oint_{S_{corpo}} p_\theta \cdot \vec{e}_n R d\theta. \quad (C.6)$$

Substituindo p_θ e $\vec{e}_n$ na equação anterior, tem-se:

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} -\rho R [a_x (1 - \cos \theta) + a_y \sin \theta] (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) R d\theta. \quad (C.7)$$

Separando a força na direção x e y , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \rho R^2 \int_0^{2\pi} [a_x (1 - \cos \theta) + a_y \sin \theta] (-\cos \theta \vec{e}_x) d\theta, \\ \vec{F}_y &= \rho R^2 \int_0^{2\pi} [a_x (1 - \cos \theta) + a_y \sin \theta] (\sin \theta \vec{e}_y) d\theta. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Distribuindo os termos das duas equações, tem-se:

$$\vec{F}_x = \rho R^2 \left(-a_x \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + a_x \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - a_y \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \cdot \vec{e}_x. \quad (C.9)$$

Determina-se a parcela da força do fluido no corpo, na direção x, devido à aceleração do corpo:

$$\vec{F}_x = \rho a_x \pi R^2 \cdot \vec{e}_x. \quad (C.10)$$

Tratando a força na direção y de forma análoga, tem-se:

$$\vec{F}_y = \rho R^2 \left(a_x \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta - a_x \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + a_y \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \cdot \vec{e}_y. \quad (C.11)$$

Determina-se a parcela da força do fluido no corpo, na direção y, devido a aceleração do corpo:

$$\vec{F}_y = \rho a_y \pi R^2 \cdot \vec{e}_y. \quad (C.12)$$

Portanto, a força $\vec{F}_{aceleração}$ que corresponde a força do fluido sobre o corpo devido a aceleração é dada por:

$$\vec{F}_{aceleração} = \rho a_x \pi R^2 \cdot \vec{e}_x + \rho a_y \pi R^2 \cdot \vec{e}_y = \rho \pi R^2 \vec{a}_{corpo}. \quad (C.13)$$

Retornando à equação 2.51, a pressão local em um determinado painel i devido a variação da circulação $\Delta \Gamma_i$ no mesmo é determinada pelo termo A da equação 2.51, ou seja:

$$p_i = p_{i-1} - \rho \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta t}, \quad (C.14)$$

e a força correspondente $\vec{F}_{circulação}$ é obtida pela integração das pressões determinadas em cada painel, ou seja:

$$\vec{F}_{circulação} = - \oint_{Scorpo} p_i \cdot \vec{e}_n dS. \quad (C.15)$$

Em termos das pressões locais:

$$\vec{F}_{circulação} = - \sum_{i=1}^{n_w} p_i \Delta s_i \cdot \vec{e}_n \quad (\text{C.16})$$

A outra parcela da força resultante é oriunda dos efeitos viscosos do fluido, ou seja, devido às tensões de cisalhamento. Sendo o fluido considerado Newtoniano, a tensão de cisalhamento é proporcional ao gradiente de velocidades na parede do corpo:

$$\vec{\tau} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n} \cdot \vec{e}_s, \quad (\text{C.17})$$

portanto, a força viscosa é determinada da seguinte forma:

$$\vec{F}_{cisalhamento} = \oint_{S_{corpo}} \vec{\tau} dS. \quad (\text{C.18})$$

REFERÊNCIAS

- BARBA, L. A. *Vortex Method for computing high-Reynolds number flows: Increased accuracy with a fully mesh-less formulation*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2004.
- BEARMAN, P.; D.M.TRUEMAN. An investigation of the flow around rectangular cylinders. *Aeronaut. Q.*, v. 23, p. 229–237, 1972.
- BLEVINS, R. D. *Flow Induced Vibration*. 2. ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- CHAPLIN, J.; BEARMAN, P.; CHENG, Y.; FONTAINE, E.; GRAHAM, J.; HERFJORD, K.; HUARTE, F. H.; ISHERWOOD, M.; LAMBRAKOS, K.; LARSEN, C.; MENEGHINI, J.; MOE, G.; PATTENDENA, R.; TRIANTAFYLLOU, M.; WILLDEN, R. Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *Journal of Fluids and Structures*, v. 21, p. 25–40, 2005.
- CHORIN, A. J. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 57, p. 785–769, 1973.
- COTTET, G.; KOUMOUTSAKOS, P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- FLATSCHART, R. B. *Simulação numérica paralela do escoamento ao redor de risers*. Tese (Tese de Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.
- FREGONESI, R. A. *Simulação numérica do escoamento tridimensional ao redor de cilindros em configuração alinhada*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, 2002.
- FREIRE, C. M. Comunicação particular. 2010.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. *Low-Speed Aerodynamics From Wing Theory to Panel Methods*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1991.
- KHALAK, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very slow mass and damping. *Journal*, 1996.
- LIMA, A. A. de; MENEGHINI, J. R.; MOURELLE, M. M.; GONZALEZ, E. C.; FLATSCHART, R. B. Numerical investigation of vortex-induced vibration of a marine scr. *Proceedings of OMAE 2007*, june 2007.
- MENEGHINI, J. R. *Numerical Simulations of Bluff Body Flow Control Using a Discrete Vortex Method*. Tese (Doutorado) — Imperial College of Science, 1993.
- MENEGHINI, J. R. *Projetos de pesquisa no tópico de geração e desprendimento de vórtices ao redor de cilindros*. [S.l.], 2002.

MOURELLE, M. M. *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Constituídos por Linhas Marítimas*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.

MOURELLE, M. M.; GONZALEZ, E. C.; SIQUEIRA, M. Q. de; SAGRILO, L. V. S.; DANTAS, C. M. S. *Manual Teórico do Programa Anflex - Versão 5.7*. 600101 – manual teórico do programa anflex. ed. [S.l.], dezembro 2001. Relatório Parcial do Projeto 600101 - RT-MC 64/2001.

NAGANO, S.; NAITO, M.; TANAKA, H. A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex method. *Computers and Fluids*, v. 10, p. 243–259, 1982.

PARK, W.; HIGUCHI, H. *Computation of Flow past Single and Multiple Bluff Bodies by a Vortex Tracing Method*. Mineapolis USA, 1989.

SALTARA, F. *Simulação Numérica do Escoamento ao Redor de Cilindros*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.

SALTARA, F. *Simulação numérica de escoamentos externos incompressíveis*. Tese (Livre Docência) — Universidade de São Paulo, 2008.

SALTARA, F.; MENECHINI, J. R.; FREGONESI, R. A. Numerical simulations of flow around elastically mounted cylinder. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, v. 13, n. 2, June 2003.

SARPKAYA, T. Computational methods with vortices - the 1988 freeman scholar lecture. *J. Fluids Engineering*, v. 111, p. 5–52, 1989.

SPALART, P. R. *Numerical simulation of separated Flows*. Tese (PhD thesis) — Stanford University, California, NASA, 1983.

SPALART, P. R.; LEONARD, A. Computation of separated flow by a vortex algorithm. *AIAA*, 1981.

YAMAMOTO, C. T. *Simulação numérica do escoamento tridimensional ao redor de cilindros em configuração lado-a-lado*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, 2002.

ZDRAVKOVICH, M. M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements. *ASME Journal of Fluid Engineering*, v. 99, p. 618–633, 1977.