

Olivia Terence Saa

# Soluções analíticas para a transferência de calor em filmes líquidos: Aplicação a escoamentos sobre aerofólios

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção de Título de Mestre em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Energia e Fluidos

Orientador:

Prof. Livre Docente Otávio de Mattos Silves

# Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Lista de Símbolos

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Metaestabilidade . . . . .	2
1.2	Tipos de gelo . . . . .	5
1.3	Mecanismos de Proteção . . . . .	5
1.4	Objetivo do trabalho . . . . .	6
1.5	Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>9</b>
2.1	Bibliografia Básica . . . . .	9
2.2	Programas de Simulação . . . . .	11
2.3	Soluções analíticas para o problema de transferência de calor em filmes . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modelo Físico</b>	<b>15</b>
3.1	Região 1: Aerofólio . . . . .	15
3.2	Região 2: Filme d'Água . . . . .	15
3.3	Região 3: Escoamento Gasoso . . . . .	17
3.3.1	Resolução do problema da camada limite . . . . .	18

3.4	Avaliação da velocidade de filme $U$ . . . . .	21
3.5	Problema matemático . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Método da separação de variáveis</b>	<b>25</b>
4.1	Solução por separação de variáveis . . . . .	25
4.1.1	Análise das condições de contorno . . . . .	26
4.1.2	Solução com gradiente de pressão nulo . . . . .	28
4.1.2.1	Região termicamente protegida . . . . .	30
4.1.2.2	Região desprotegida . . . . .	33
4.1.3	Solução para gradiente de pressão constante . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Método espectral de Galerkin</b>	<b>36</b>
5.1	Aplicação do Método de Galerkin ao problema térmico do escoamento sobre um aerofólio . . . . .	37
5.1.1	Solução para região termicamente protegida . . . . .	38
5.1.2	Solução para região desprotegida . . . . .	41
5.2	Resolução do sistema de equações obtido . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
6.1	Solução do escoamento do filme . . . . .	45
6.1.1	Gradiente de pressão nulo . . . . .	45
6.1.2	Gradiente de pressão não nulo . . . . .	46
6.2	Solução do problema térmico com gradiente de pressão nulo por separação de variáveis . . . . .	48
6.2.1	Região termicamente protegida . . . . .	49
6.2.2	Região desprotegida . . . . .	50
6.3	Resultados analíticos . . . . .	52
6.4	Solução semi-analítica - Método de Galerkin . . . . .	57
	Comentários sobre o erro relativo . . . . .	58

<b>7</b>	<b>Conclusões e recomendações para trabalhos futuros</b>	<b>60</b>
7.1	Conclusões . . . . .	60
7.2	Recomendações para trabalhos futuros . . . . .	61
<b>Apêndice A – Código em Fortran para avaliação da velocidade de filme <math>U</math></b>		<b>62</b>
A.1	Gradiente de pressão nulo . . . . .	62
A.2	Gradiente de pressão não nulo e constante . . . . .	64
<b>Apêndice B – Código em Fortran para avaliação da distribuição de temperaturas e resultados adicionais-Gradiente de pressão nulo</b>		<b>67</b>
B.1	Código Fonte . . . . .	67
B.2	Autovalores do problema termicamente protegido . . . . .	90
B.3	Coefficientes $A_n$ do problema termicamente protegido . . . . .	91
B.4	Coefficientes $A_n$ do problema desprotegido - Caso com $\dot{q}$ negativo . . . . .	92
B.5	Coefficientes $A_n$ do problema desprotegido - Caso com $\dot{q}$ nulo . . . . .	93
<b>Apêndice C – Conceitos matemáticos adicionais</b>		<b>94</b>
C.1	Produto interno . . . . .	94
C.2	Funções ortogonais e ortonormais . . . . .	95
C.3	Base completa . . . . .	95
<b>Apêndice D – Funções de Airy</b>		<b>96</b>
D.1	Séries ascendentes . . . . .	97
D.2	Expansões assintóticas . . . . .	98
<b>Apêndice E – Obtenção da velocidade <math>U_{inv}(x)</math></b>		<b>100</b>
<b>Apêndice F – Funções Cilíndricas Parabólicas</b>		<b>104</b>
<b>Apêndice G – Comentários sobre a dissipação viscosa <math>\Phi</math></b>		<b>106</b>
G.1	Condições de contorno para o caso dissipativo . . . . .	107

<b>Apêndice H – Exemplo de expansão de <math>F(\bar{y})</math> em séries de funções ortogonais</b>	<b>111</b>
--	------------

<b>Apêndice I – Equações diferenciais Ordinárias e o problema de Sturm-Liouville</b>	<b>114</b>
--	------------

I.1	Equações Diferenciais Ordinárias Auto-adjuntas . . . . .	114
I.2	Equações diferenciais ordinárias e condições de contorno . . . . .	116
I.3	O Problema de Sturm-Liouville . . . . .	117
I.3.1	Propriedade 1 do PSLR . . . . .	118
I.3.2	Propriedade 2 do PSLR . . . . .	120
I.3.3	Propriedade 3 do PSLR . . . . .	120
I.3.4	Propriedade 4 do PSLR . . . . .	122
I.3.5	Propriedade 5 do PSLR . . . . .	123

<b>Apêndice J – Resolução do problema tridimensional</b>	<b>124</b>
--	------------

<b>Referências</b>	<b>128</b>
--------------------	------------

# Lista de Figuras

1.1	Formação de gelo em árvore . . . . .	1
1.2	Coefficiente de sustentação $C_L$ em função do ângulo de ataque $\alpha$ em um perfil NACA 63A415 . . . . .	2
1.3	Gelo acumulado na asa de uma aeronave no solo . . . . .	3
1.4	Equilíbrio de um corpo sobre superfície sólida . . . . .	3
1.5	Regiões de uma aeronave sujeitas a formação de gelo . . . . .	4
1.6	Tipos de gelo . . . . .	5
1.7	Aerofólio com um sistema anti-gelo de ar quente . . . . .	6
1.8	Funcionamento de um sistema de degelo pneumático . . . . .	7
3.1	Modelo físico do problema . . . . .	16
3.2	Problemas equivalentes ao do aquecedor seguido de região desprotegida . . . . .	24
5.1	Representação de $y = \alpha$ e $y = \frac{hh_{CONV}}{k} \cotg(\alpha_n)$ , para valores selecionados de $\frac{hh_{CONV}}{k}$ . . . . .	39
5.2	Representação de $y = \alpha$ e $y = -\frac{hh_{CONV}}{k} \text{tg}(\alpha_n)$ , para valores selecionados de $\frac{hh_{CONV}}{k}$ . . . . .	41
6.1	Distribuição de temperaturas em filme escoando sobre aquecedor de 40kW . . . . .	51
6.2	Temperatura do filme após 10cm de aquecimento . . . . .	51
6.3	Temperatura do filme sobre aquecedor e trecho adiabático . . . . .	52
6.4	Temperatura do filme sobre aquecedor e trecho com fluxo de calor de -100kW . . . . .	53
6.5	Temperatura do filme para $\bar{y} = 0$ , $\bar{y} = 0.5$ e $\bar{y} = 1$ . . . . .	55
6.6	Temperatura adimensional do filme para $\bar{y} = 0$ , $\bar{y} = 0.5$ e $\bar{y} = 1$ em função da posição . . . . .	56
6.7	Temperaturas adimensionais em $\bar{y} = 0$ para valores de $\frac{hh_{CONV}}{k}$ selecionados . . . . .	58
6.8	Diferença de temperatura entre solução analítica e via Galerkin - 6 autovalores . . . . .	59

6.9	Diferença de temperatura entre solução analítica e via Galerkin - erro relativo	59
D.1	Representação das funções $Ai(x)$ e $Bi(x)$	96
D.2	Representação das funções $Ai'(x)$ e $Bi'(x)$	97
E.1	Escoamento potencial em torno de um cilindro. Retirado de Kliewer (Disponível em <a href="http://www.profezequias.net/airfoil_david_kliewer.pdf">http://www.profezequias.net/airfoil_david_kliewer.pdf</a> )	101
E.2	Definição dos eixos $r$ e $\theta$ usados no modelo	101
F.1	Representação das funções $D_{-4}(x)$ , $D_{-5}(x)$ , $D_{-6}(x)$ e $D_{-7}(x)$	105
F.2	Representação das funções $D_5(x)$ , $D_6(x)$ , $D_7(x)$ e $D_8(x)$	105
H.1	Projeção de $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$ com 20 autovalores	112
H.2	Projeção de $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$ com 10 autovalores	112
H.3	Projeção de $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$ com 5 autovalores	113
J.1	Modelo físico do problema tridimensional	124

# Lista de Tabelas

2.1	Modelos matemáticos utilizados nos programas utilizados . . . . .	14
G.1	Condições de contorno a serem satisfeitas para o caso dissipativo - Gradiente de pressão constante . . . . .	109
G.2	Condições de contorno a serem satisfeitas para o caso dissipativo - Gradiente de pressão nulo . . . . .	110
H.1	20 primeiros autovalores e coeficientes $A_n$ . . . . .	112



# Lista de Abreviaturas e Siglas

**AVT** Applied Vehicle Technology

**DERA** Defense Evaluation and Research Agency

**EDO** Equação Diferencial Ordinária

**IRT** Icing Research Tunnel

**NACA** National Advisory Committee for Aeronautics

**NASA** National Aeronautics and Space Administration

**NATO** North Atlantic Treaty Organization

**ONERA** Office National D'études et de Recherches Aérospatiales

**PSLR** Problema de Sturm-Liouville Regular

**RTO** Research and Technology Organization

**SLD** Supercooled Large Droplets

# Lista de Símbolos

$Ai$	função de Airy do 1º tipo
$Bi$	função de Airy do 2º tipo
$c_p$	calor específico a pressão constante [ $J/(kg \cdot K)$ ]
$D_\gamma$	função cilíndrica parabólica de ordem $\gamma$
$h$	espessura do filme d'água [ $m$ ]
$h_{CONV}$	coeficiente de transferência de calor [ $W/(m^2 \cdot K)$ ]
$k$	condutibilidade térmica, [ $W/(m \cdot K)$ ]
$L$	comprimento do aquecedor [ $m$ ]
$p$	pressão estática [ $Pa$ ]
$Pe$	número adimensional de Peclet ( $Pe = \rho c_p LV/k$ )
$\dot{q}$	potência por unidade de área do aquecedor [ $W/m^2$ ]
$t$	tempo [ $s$ ]
$T$	temperatura estática [ $K$ ]
$\bar{T}$	temperatura relativa ao infinito ( $\bar{T} = T - T_\infty$ ) [ $K$ ]
$T^*$	temperatura auxiliar para o caso dissipativo (equação G.6) [ $K$ ]
$T_{ent}$	temperatura na posição $\bar{x} = 0$ [ $K$ ]
$T_{SOLID}$	temperatura de fusão da água [ $K$ ]
$U$	velocidade na interface água-ar [ $m/s$ ]
$u$	velocidade na direção $x$ [ $m/s$ ]
$\bar{u}$	velocidade na direção $x$ usando variáveis adimensionais
$v$	velocidade na direção $y$ [ $m/s$ ]
$\bar{x}$	coordenada adimensional ( $\bar{x} = kx/(\rho c_p h^2 U)$ )
$\bar{y}$	coordenada adimensional ( $\bar{y} = y/h$ )

## ***Símbolos Gregos***

$\delta$	espessura da camada de gelo [ $m$ ]
$\eta$	variável adimensional
$\mu$	viscosidade dinâmica [ $N \cdot s/m^2$ ]

$\nu$	viscosidade cinemática [ $m^2/s$ ]
$\rho$	massa específica [ $kg/m^3$ ]
$\tau$	tensão de cisalhamento [ $Pa$ ]
$\Phi$	dissipação viscosa [ $W/m^3$ ]
$\psi$	função de corrente [ $m^2/s$ ]

### ***Subscritos***

<i>agua</i>	propriedades relativas à água
<i>ar</i>	propriedades relativas ao ar
<i>gelo</i>	propriedades relativas ao gelo
<i>metal</i>	propriedades relativas ao material do aerofólio
$\infty$	condições do escoamento ao longe
<i>inv</i>	relativo ao escoamento invíscido

# 1 Introdução

A formação de gelo em uma superfície sólida desprotegida pode ocorrer por meio de diversos mecanismos. Pedras de gelo podem precipitar-se, como no caso do granizo; o vapor de água presente no ar pode formar cristais de gelo diretamente na superfície, como nas geadas; alternativamente, pode ocorrer a formação de escarcha e sincelo pela precipitação de gotas sub-resfriadas (*Freezing Rain*). A Figura 1.1 mostra o caso da formação de escarcha em galhos de árvores, na altura do solo.



Figura 1.1: Formação de gelo em árvore<sup>1</sup>

A acreção de gelo torna-se especialmente perigosa quando ocorre em aeronaves durante o seu voo. Por modificar o formato das asas e dos estabilizadores, o mecanismo de sustentação

---

<sup>1</sup>Disponível em <http://dinghyunmoored.blogspot.com/>. Acessado em julho de 2011

pode ser comprometido (vide Figura 1.2), além de haver um aumento considerável de peso e arrasto. A estabilidade da aeronave também pode ser prejudicada com o fenômeno; a velocidade mínima de *stall*, por exemplo, pode diminuir. Além destes problemas, podem existir erros de medição devido à formação de gelo em sondas e outros instrumentos. Estas consequências indesejáveis da formação de gelo são consideradas pelas autoridades reguladoras nacionais e internacionais como uma condição de risco para a aeronave. Portanto, para evitá-las, empregam-se sistemas de degelo e anti-gelo, que serão explicados mais adiante. A Figura 1.3 mostra uma aeronave, ainda no solo, com gelo em sua asa. Neste caso, ela deverá ser limpa antes da decolagem para não fique sujeita aos efeitos da formação de gelo já citados.

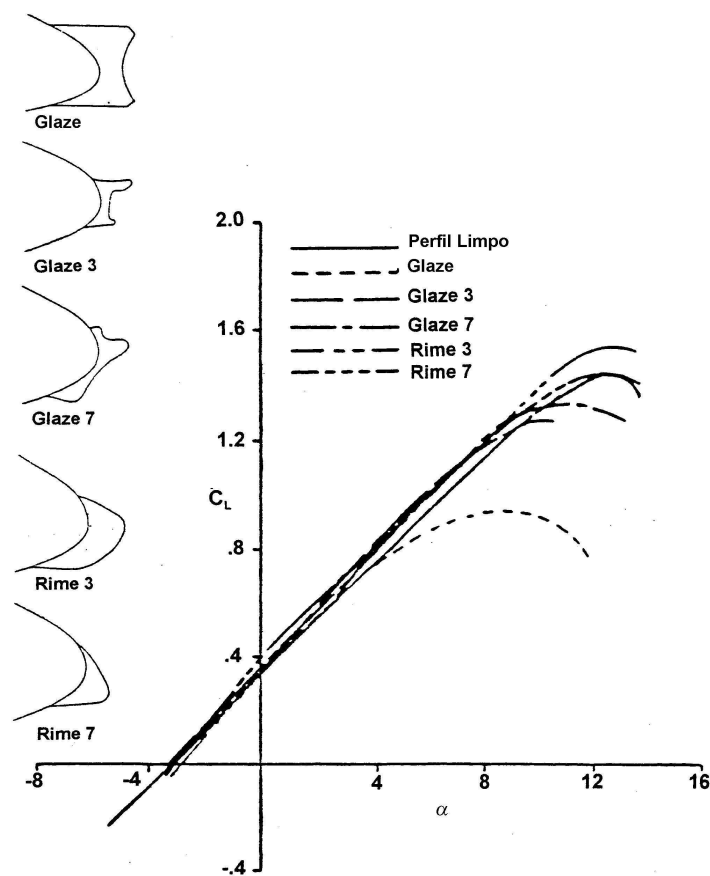


Figura 1.2: Coeficiente de sustentação  $C_L$  em função do ângulo de ataque  $\alpha$  em um perfil NACA 63A415 e do tipo de gelo formado (SILVA, 2002)

## 1.1 Metaestabilidade

O fenômeno responsável pelo congelamento das gotículas sub-resfriadas em contato com a superfície da aeronave é chamado de metaestabilidade. No estado metaestável, o sistema pode, mediante uma interação muito moderada de energia, evoluir para um estado estável de menor energia. A Figura 1.4 representa o fenômeno da metaestabilidade aplicado ao equilíbrio



Figura 1.3: Gelo acumulado na asa de uma aeronave no solo (LANDSBERG, 2008)

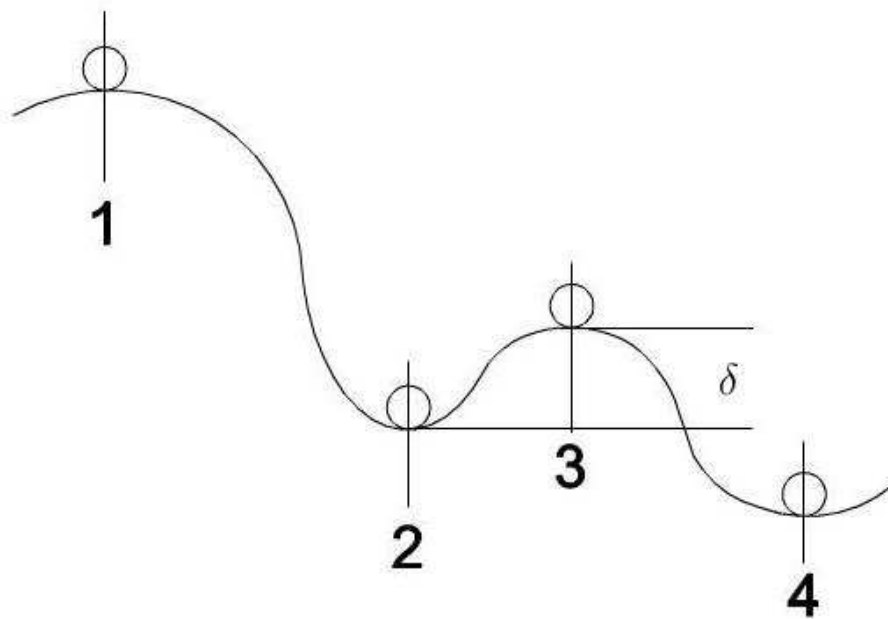


Figura 1.4: Equilíbrio de um corpo sobre superfície sólida

físico de uma esfera sobre uma superfície sob a ação de um campo gravitacional. Na figura, tem-se 4 pontos de possível equilíbrio estático, caracterizados pela derivada nula da energia potencial gravitacional associada à esfera em relação à sua trajetória.

Porém, tais pontos não têm todos as mesmas características e devem ser diferenciados de acordo com o tipo de equilíbrio apresentado. Partindo de cada um dos pontos de equilíbrio, pode-se perturbar o sistema em uma direção estipulada (no caso, na horizontal do plano da figura), resultando nos seguintes comportamentos:

- Equilíbrio instável (pontos 1 e 3): Qualquer perturbação infinitesimal, em qualquer direção, resultará num afastamento ainda maior da posição inicial de equilíbrio;
- Equilíbrio estável (ponto 4): Partindo deste ponto, para qualquer perturbação infinitesimal, o corpo tenderá a retornar à sua posição inicial;

- Equilíbrio metaestável (ponto 2): A partir deste ponto (aparentemente de equilíbrio estável) o sistema pode ser deslocado para o ponto 4 (equilíbrio estável) se a perturbação for suficiente para deslocar o corpo superando a altura  $\delta$  do obstáculo. É esta possibilidade do sistema se mover para outro ponto de equilíbrio estável com menor energia associada que caracteriza o equilíbrio metaestável.

Toma-se como exemplo, agora, a existência de água líquida em um estado sub-resfriado. Dada uma pressão, se for evitada a nucleação, é possível resfriar a água até temperaturas abaixo de sua temperatura de solidificação. Ela poderá ser resfriada até um limite no qual a nucleação ocorrerá espontaneamente, chamado limite de instabilidade. Nas condições de vôo usualmente encontradas, este limite é próximo de  $-40^{\circ}\text{C}$  (MASON, 1971).

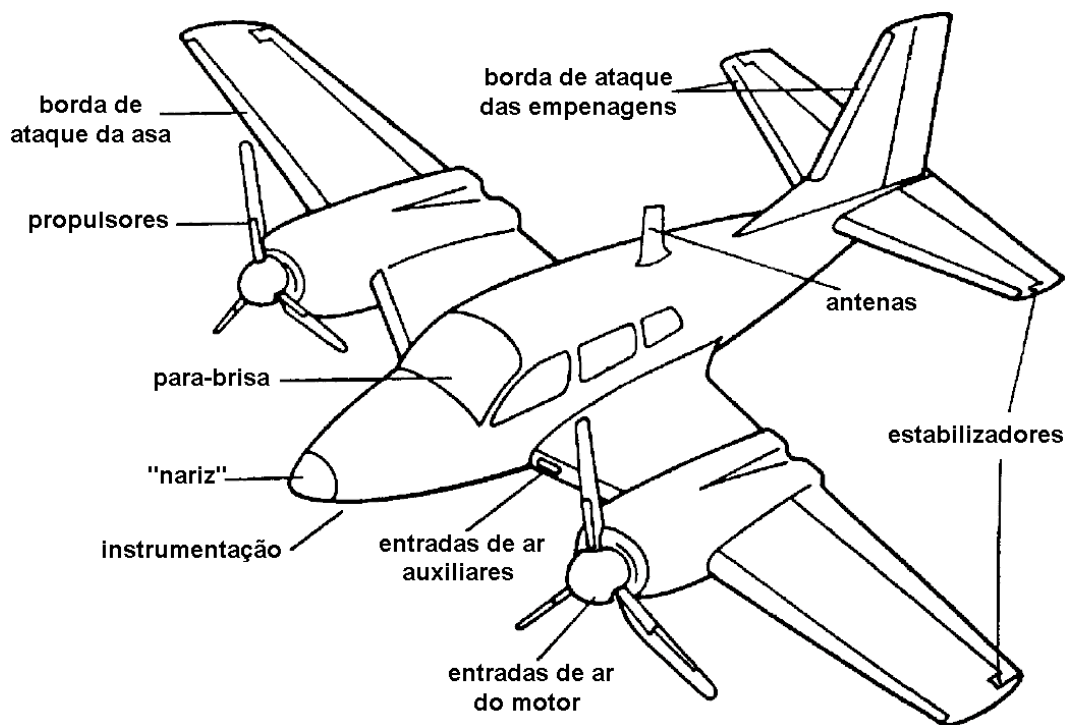


Figura 1.5: Regiões de uma aeronave sujeitos a formação de gelo (HEINRICH et al., 1991)

Logo, as gotículas de água que formam as nuvens poderão se tornar sub-resfriadas se elas ascenderem lentamente pela ação da convecção existente na atmosfera. As gotas de água a temperaturas menores que a de solidificação podem congelar com uma perturbação mínima, como, por exemplo, a de um impacto com uma aeronave. Neste caso, uma superfície de gelo crescerá sobre as partes da aeronave suscetíveis à incidência de gotículas, indicadas na Figura 1.5.

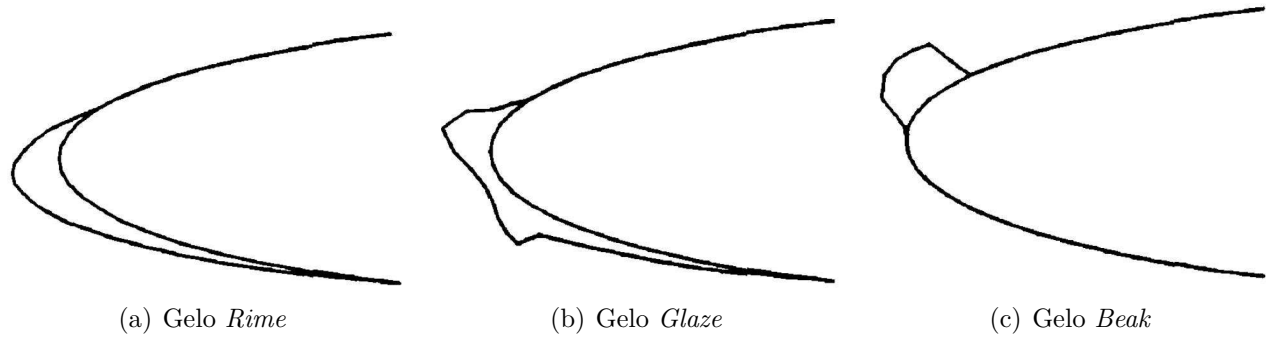


Figura 1.6: Tipos de gelo (GENT; DART; CANSDALE, 2000)

## 1.2 Tipos de gelo

O gelo presente em um aerofólio terá características que dependerão de seu processo de formação. Quando as condições ambientes são de baixa temperatura e baixa umidade e a velocidade do escoamento também é baixa, as gotas sub-resfriadas podem congelar completamente com o impacto. Este processo é responsável pela formação de um gelo opaco e rugoso, que acompanha a superfície do aerofólio, chamado de gelo *Rime* (GENT; DART; CANSDALE, 2000). Este tipo de gelo está representado na Figura 1.6(a).

Se a concentração de água, temperatura ambiente ou velocidade não forem suficientemente baixas, as gotas não congelarão totalmente com o impacto e um filme de água será formado. O congelamento deste filme será responsável pela formação de um gelo transparente chamado gelo *Glaze* (GENT; DART; CANSDALE, 2000), cujo formato característico em forma de chifres está representado na Figura 1.6(b).

Finalmente, quando a temperatura ambiente é próxima à temperatura de fusão da água ou quando a velocidade da aeronave é muito alta, pode ser formado o chamado gelo *Beak* (GENT; DART; CANSDALE, 2000), no qual o filme de água formado é resfriado devido à aceleração e expansão do ar adjacente. Este último tipo de gelo está representado na Figura 1.6(c).

## 1.3 Mecanismos de Proteção

Para evitar condições de risco para a aeronave, são utilizados alguns mecanismos de proteção contra o gelo. Estes podem ser de caráter preventivo, como no caso dos sistemas anti-gelo, ou de caráter corretivo, como é o caso dos sistemas de degelo. Os primeiros previnem a formação de gelo continuamente, por meio do aquecimento da superfície do aerofólio. Em aeronaves de médio a grande porte são utilizados sistemas de ar quente (ver Figura 1.7), que consistem no uso do ar dos compressores dos motores para o aquecimento da superfície. Já em aeronaves de pequeno a médio porte, são utilizados os chamados sistemas eletrotérmicos, que consistem



no uso de resistências elétricas para o aquecimento da área protegida.

Os sistemas anti-gelo podem ser dimensionados de modo a evaporar toda a água em contato com o aerofólio (sistemas totalmente evaporativos) ou podem deixar uma certa vazão de água líquida escoando na superfície. Se o sistema tiver água líquida somente dentro da região protegida é chamado de sistema evaporativo. Se a água chegar na região não protegida (presença de água residual), o sistema é chamado molhado (ou *running wet*).

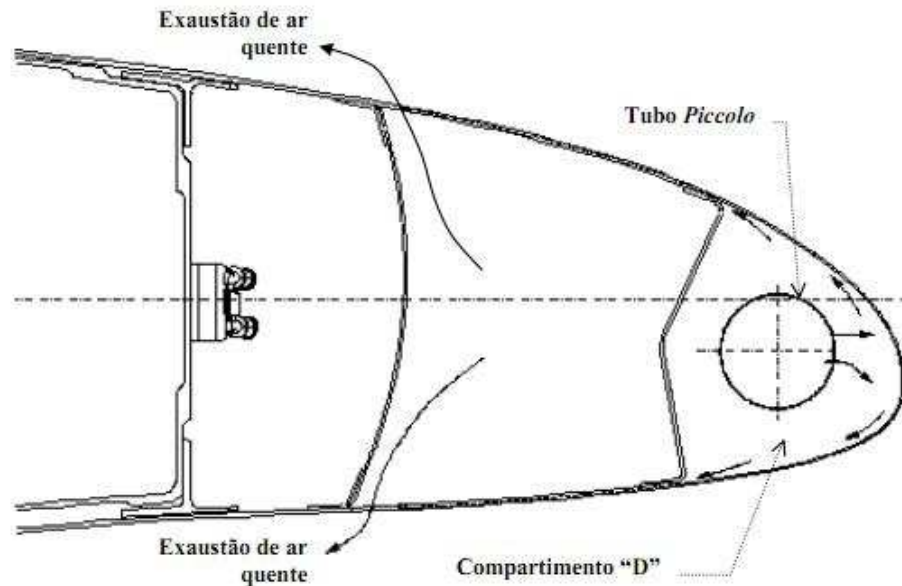
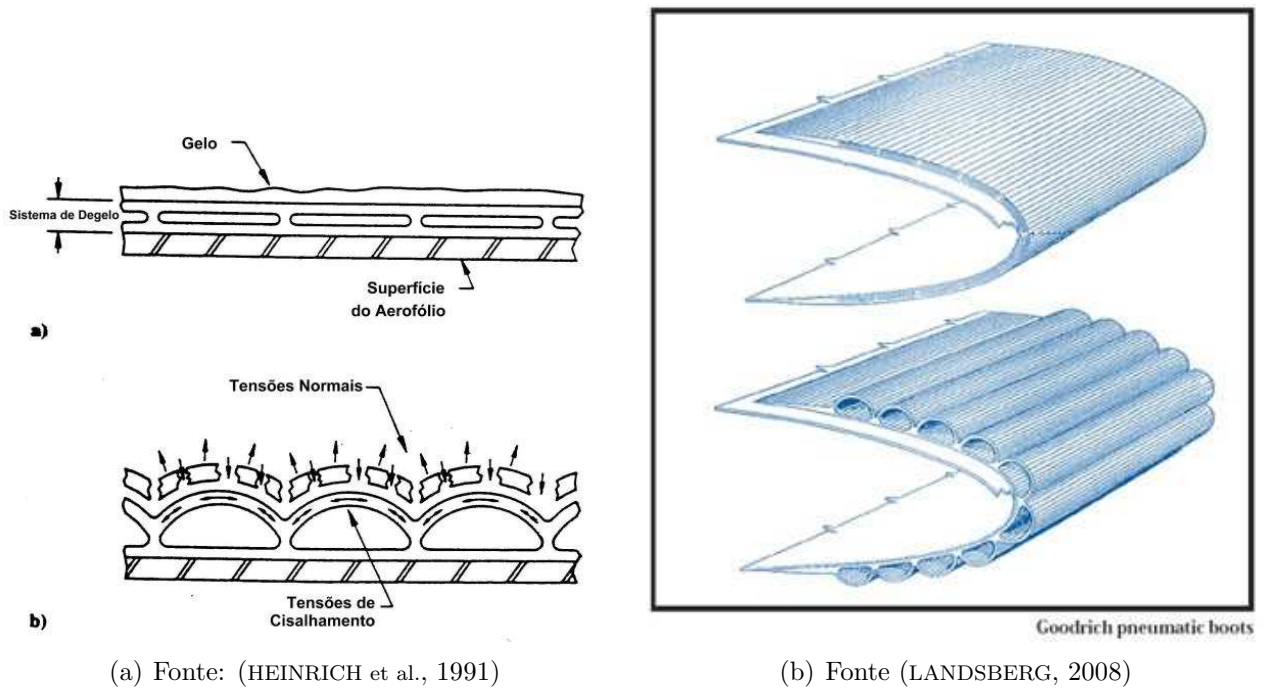


Figura 1.7: Aerofólio com um sistema anti-gelo de ar quente (SILVA, 2002)

Os sistemas de degelo visam a remoção de gelo do aerofólio. São sistemas acionados ciclicamente, após a formação de uma camada de gelo maior que uma espessura crítica. Os sistemas de degelo pneumáticos consistem em uma superfície elástica sobre o aerofólio, que é inflada, expandindo e quebrando o gelo por deformação (vide Figuras 1.8(a) e 1.8(b)). Tais sistemas são utilizados em aviões do tipo turbo-hélice. Já os sistemas de degelo térmicos consistem em aquecedores dispostos na área protegida, que transferem calor ao gelo, derretendo-o ou soltando-o da superfície. Este tipo de sistema é utilizado em aeronaves de pequeno porte e em algumas sondas.

## 1.4 Objetivo do trabalho

Em sistemas que não sejam totalmente evaporativos, existirá água líquida na superfície do aerofólio. Devido às forças de cisalhamento exercidas pelo escoamento de ar na proximidade do filme d'água, ela terá uma velocidade relativa à superfície. Para tensões suficientemente grandes, o filme quebrará, formando filetes (ou *rivulets*) que continuarão escoando até sua



(a) Fonte: (HEINRICH et al., 1991)

(b) Fonte (LANDSBERG, 2008)

Figura 1.8: Funcionamento de um sistema de degelo pneumático

total evaporação ou congelamento.

Assim, nos sistemas do tipo molhado (ou *running wet*), haverá o escoamento de água residual na região não protegida. Essa água será rapidamente resfriada, podendo congelar novamente. Ao gelo formado pela água residual dá-se o nome de gelo residual (*runback ice*) e o estudo do comportamento do líquido residual e sua prevenção é a motivação deste trabalho.

Estudos sobre o assunto têm sido feitos há anos por diversos pesquisadores. No entanto, dificilmente são encontrados trabalhos analíticos a respeito, que revelam aspectos importantes da solução sem a necessidade da realização de uma série de cálculos numéricos. Assim, o objetivo do presente trabalho é o estudo de formas de obtenção de soluções analíticas para o problema térmico do escoamento de um filme sobre um aerofólio, termicamente protegido por meio de aquecedores ou não. Especificamente, será analisada a distribuição de temperaturas de um filme d'água que escoar sobre um aerofólio com um aquecedor de tamanho finito e que, após a passagem por este sistema de aquecimento, continua escoando sobre uma superfície desprotegida.

## 1.5 Organização do trabalho

No Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica, que permite ao leitor situar-se em relação ao avanço atual dos trabalhos sobre o assunto abordado. O Capítulo 3 apresenta o modelo físico e matemático utilizado no presente trabalho. Neste capítulo encontram-se todas as hipóteses

físicas adotadas e comentários necessários para o entendimento do modelo matemático. Nos Capítulos 4 e 5 encontram-se soluções para o problema proposto. As soluções apresentadas foram obtidas a partir da transformação de equações diferenciais parciais em conjuntos de equações diferenciais ordinárias. No Capítulo 4, as equações diferenciais ordinárias resultantes têm solução conhecida e exata (do ponto de vista matemático-analítico), logo, pode-se encontrar uma expressão explícita para a distribuição de temperaturas no filme. Já no Capítulo 5, o sistema de equações diferenciais ordinárias encontrado não pode ser resolvido de maneira a resultar em uma expressão explícita da temperatura, porém o sistema pode ser resolvido numericamente.

## 2 Revisão Bibliográfica

Desde o começo da aviação houve preocupação com condições meteorológicas que pudessem afetar o desempenho de voo. Charles Augustus Lindbergh, conhecido por ter feito o primeiro voo solitário transatlântico sem escalas, relatou, em seu famoso voo de 1927, diversas dificuldades relacionadas à meteorologia, como neblina, ventos fortes e formação de gelo nas asas. No entanto, o estudo desse tipo de formação de gelo somente teve seu início incentivado durante a Segunda Guerra Mundial. Os primeiros trabalhos foram publicados pela extinta agência estadunidense *National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)*. Neste período foram iniciados estudos experimentais e alguns trabalhos teóricos, mas foi na década de 70 que a área começou a ter grandes avanços, devido ao uso dos computadores. Somente nessa época foi possível a simulação da formação em gelo em perfis de aerofólios. Até então, os estudos eram limitados a trabalhos analíticos com superfícies simplificadas - tais como cilindros, placas planas e esferas - ou a trabalhos com uso de informações experimentais, que requeriam um volume muito grande de dados.

### 2.1 Bibliografia Básica

Os primeiros trabalhos relacionados à formação de gelo em aerofólios foram apresentados na década de 20. Nesta época, estudou-se as condições meteorológicas que possibilitavam a formação de gelo por meio de ensaios em vôo e os efeitos da formação de gelo no desempenho aerodinâmico, como mudanças nos coeficientes de sustentação e de arraste.

Anos mais tarde, entre 1942 e 1944, foi construído o túnel de vento *Icing Research Tunnel (IRT)* da *NACA* (LEARY, 2002). Seus primeiros ensaios tiveram como objetivo a avaliação de formas de gelo e possíveis sistemas de proteção. Nesta época, foram feitos trabalhos importantes relatando efeitos da formação de gelo em aerofólios, como os trabalhos de Gray e Glahn (1958) e Gray (1958). Nestes trabalhos, foram obtidos dados de sustentação, de arraste e de momento para o aerofólio 65A004, variando-se as condições de formação de gelo como tamanho e temperatura das gotículas, período de exposição e ângulo de ataque do aerofólio. Posteriormente, Gray (1964) expandiu o trabalho com mais dados e generalizou as correlações

inicialmente obtidas para o aerofólio 65A004 para o caso de um aerofólio genérico.

Muitos dos primeiros trabalhos não experimentais relacionados ao fenômeno de formação de gelo eram realizados considerando geometrias mais simples que a de um aerofólio. Ludlam (1951) descreveu um método para calcular a temperatura da superfície de um cilindro rotativo em uma nuvem de gotículas sub resfriadas. Messinger (1953) descreveu um método para calcular a temperatura de um cilindro rotativo adiabático em equilíbrio com o ar. O método descrito por este autor é utilizado até hoje em programas de simulação de formação de gelo.

Os procedimentos de cálculo da trajetória das gotículas presentes na nuvem tardaram um pouco mais a serem estabelecidos. Langmuir e Blodgett (1961) foi o primeiro trabalho deste tipo, que considerou apenas a força de arrasto, desprezando, assim, os efeitos gravitacionais. O modelo criado por estes autores ainda é utilizado em diversos programas de simulação.

Na década de 70 houve um aumento significativo no número de trabalhos experimentais e computacionais sobre formação de gelo. O estudo de Ingelman, Trunov e Ivaniko (1977) relatou efeitos aerodinâmicos da formação de gelo com base em experimentos em túnel de vento. Bragg (1981) forneceu dados experimentais sobre o arrasto aerodinâmico em aerofólios NACA0012 na presença de gelo *Rime* e *Glaze*. Korkan, Jr. e Cornell (1985) concluíram que a presença de gelo causa um aumento no arrasto de até 200%, resultado que foi corroborado pelo trabalho de Addy (2000), Addy et al. (2003), que estudou efeitos da formação de gelo em aeronaves comerciais. Outro trabalho experimental sobre o desempenho aerodinâmico foi o de Flemming e Lednicer (1985), porém neste trabalho foram usados dados de aerofólios de helicópteros.

Mais tarde, Kim e Bragg (1999) estudaram a relação entre a posição e altura de uma camada de gelo do tipo *Glaze* com o desempenho aerodinâmico de um aerofólio NFL-0414. Concluiu-se que a altura da camada de gelo só tem um efeito significativo na sustentação da aeronave quando este se localiza a jusante do bordo de ataque. Um resultado similar foi produzido por Papadakis, Alansatan e Seltmann (1999) e Papadakis, Alansatan e Wong (2000), que simularam a formação de gelo com *spoilers*. Os maiores efeitos nos coeficientes aerodinâmicos foram registrados quando o *spoiler* se encontrava perpendicularmente à corda do aerofólio. Similarmente, Wright e Chung (2000) chegaram a correlações entre a geometria de 20 formas de gelo e seu desempenho aerodinâmico correspondente.

Em 1994, a queda de uma aeronave ATR-72 em Indiana, nos Estados Unidos, em condições atmosféricas com *Supercooled Large Droplets (SLD)*, incentivou o início de uma série de estudos sobre temas que até então não haviam sido abordados. As *SLD* são gotas subresfriadas de diâmetro maior que as normalmente encontradas e que, portanto, têm uma aerodinâmica e conseqüente formação de gelo diferentes das até então estudadas. Bragg, Broeren e Blumenthal

(2005) fizeram uma extensa revisão bibliográfica sobre o assunto.

Na presença das *SLD*, pode ocorrer a formação de um tipo de gelo de formato semi-esférico em uma região localizada a jusante da área protegida do aerofólio, causando uma grande degradação aerodinâmica. Nos últimos anos, grande parte dos trabalhos sobre formação de gelo concentrou-se em estudos computacionais sobre o efeito do gelo na aerodinâmica dos aerofólios, em muitos casos, na presença de *SLD*.

A maioria dos trabalhos publicados trata-se da formação de gelo durante o voo e seus efeitos aerodinâmicos. No entanto, existem trabalhos que abordam efeitos de outras situações de formação de gelo. Zierten e Khodadoust (1987) e Hengst e Boer (1991) estudaram a formação de gelo em jatos comerciais no solo e seus efeitos aerodinâmicos durante a decolagem. Já Bragg, Heinrich e Valarezo (1994) concluíram que o efeito da presença de gelo na parte inferior do aerofólio não afeta consideravelmente a aerodinâmica da decolagem do avião. Também foi estudada a degradação aerodinâmica nos ciclos de degelo, como nos trabalhos de Gile-Lafin e Papadakis (2001), Jackson e Bragg (1999) e Broeren, Addy e Bragg (2002), nos quais foi encontrada uma redução no coeficiente de sustentação entre 30 e 60%

## 2.2 Programas de Simulação

Nesta seção serão apresentados alguns dos códigos mais utilizados no meio aeronáutico. O trabalho de Wright, Gent e Guffond (1997) compara resultados obtidos pelos códigos LEWICE, ONERA2D e TRAJICE2 com resultados experimentais, concluindo que estes códigos, apesar de exigirem estudos mais profundos sobre transferência de calor, rugosidade e efeitos aerodinâmicos da acreção de gelo, prevêm as formas de gelo de maneira satisfatória.

O programa LEWICE foi desenvolvido por Macarthur, Keller e Luers (1982), Ruff e Berkowitz (1990), Wright (1995, 1999) para a agência *National Aeronautics and Space Administration (NASA)* e consiste em quatro módulos principais. O primeiro módulo (Módulo I) resolve o escoamento potencial bidimensional ao redor do aerofólio usando o método dos painéis (HESS; SMITH, 1967). O Módulo II calcula a trajetória das gotículas de água, considerando efeitos gravitacionais e de arrasto. Após estes cálculos, tem-se um módulo termodinâmico (Módulo III), que aplica as equações de conservação de massa e energia ao longo do aerofólio, baseando-se no procedimento de Messinger (1953). Este módulo calcula o coeficiente de transferência de calor por convecção pelo procedimento proposto por Makkonnen (1985). O Módulo IV consiste na simulação da formação de gelo, que é feita em pequenos intervalos de tempo, e, após ser encontrado um novo formato da superfície, os módulos I, II e III são resolvidos novamente, até o tempo desejado de exposição ser atingido.

O programa LEWICE foi modificado para a aplicação em outros problemas que não a formação de gelo em um aerofólio desprotegido. O LEWICE/THERMAL é uma modificação do LEWICE para aplicações em sistemas de degelo; o LEWICE/NS prevê a degradação aerodinâmica do gelo; finalmente, o LEWICE/ANTICE simula a formação de gelo em aerofólios com sistemas de proteção antigelo. Todos estes códigos modificados utilizam os módulos I e II do LEWICE e adaptam o módulo III para o problema aplicado.

O código ONERA2D foi desenvolvido para a *Office National d'Études et de Recherches Aéropatiales (ONERA)* e também se constitui de quatro módulos. Em sua primeira versão, o primeiro módulo resolvia o escoamento compressível ao redor do aerofólio usando o método dos painéis (SILVA, 2002). Após o trabalho de Guffond e Brunet (1988), o programa foi modificado e passou a utilizar um método de elementos finitos de Bredif (1983, 1985) para resolver o escoamento. O segundo módulo calcula a trajetória das gotículas usando o método proposto por Langmuir e Blodgett (1961) e, o terceiro, calcula o coeficiente de transferência de calor por convecção baseando-se no procedimento descrito por Makkonnen (1985). Como no código LEWICE, o terceiro módulo resolve o problema termodinâmico, aplicando as equações de conservação de massa e energia ao longo do aerofólio, baseando-se no procedimento de Messinger (1953). Finalmente, o quarto módulo simula a formação de gelo, utilizando um método similar ao preditor-corretor.

O programa TRAJICE2 foi implementado por Gent (1990), na *Defense Evaluation and Research Agency (DERA)*. Seu primeiro módulo calcula o escoamento ao redor do aerofólio segundo o método proposto por Collyer e Lock (1979), porém o programa tem como alternativa a resolução do escoamento pelo método dos painéis (KENNEDY; MARSDEN, 1976). O módulo de trajetória das gotículas, assim como no código ONERA2D, usa o procedimento de Langmuir e Blodgett (1961). O terceiro módulo, que resolve o problema termodinâmico, utiliza o procedimento de Messinger (1953) modificado para considerar a compressibilidade do escoamento.

Uma breve comparação entre os três códigos distintos está apresentada na tabela 2.1. Um abrangente trabalho de validação dos códigos de gelo é o de Kind (2001), realizada no *Applied Vehicle Technology Panel, na Research and Technology Organization da North Atlantic Treaty Organization - AVT-NATO-RTO*. Neste trabalho foram apresentados dados experimentais de diversos túneis e simulações feitas com a maior parte dos programas utilizados no meio aeronáutico.

Mais recentemente, Silva (2002) implementou o modelo matemático de um sistema antigelo de um aerofólio, incluindo efeitos da variação de temperatura na superfície no aquecedor, evaporação da água residual e transição entre escoamento laminar e turbulento. No trabalho

de Stefanini (2009), foi implementado um código para o cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção em aerofólios com formação de gelo. Finalmente, em Silva (2009), foram implementados novos modelos para a molhabilidade do aerofólio e para o comportamento das camadas limite laminar e turbulenta, considerando efeitos de gradientes de pressão, transição laminar-turbulenta, transpiração e temperatura da superfície do aerofólio não uniforme.

## 2.3 Soluções analíticas para o problema de transferência de calor em filmes

Alguns autores nas décadas de 60 e 70 se dedicaram a encontrar soluções analíticas para a transferência de calor em filmes, como Hudson e Bankoff (1964), Hudson e Bankoff (1965), Bruin (1972) e Sestak e Rieger (1969). No entanto, nenhum dos trabalhos encontrados na literatura usou condições de contorno da mesma natureza que as condições a serem utilizadas na presente dissertação.

Hudson e Bankoff (1964) admitiu um perfil de velocidades linear para o filme. Seu trabalho encontrou uma solução para o problema em regime transiente no qual uma parte do contorno é sujeita a uma brusca mudança de temperatura. Somente foram consideradas condições de contorno de Dirichlet, ou seja, envolvendo o valor da temperatura no contorno. Hudson e Bankoff (1965) admitiu um perfil de velocidades parabólico para o filme, considerou o regime permanente e, assim como no trabalho citado anteriormente, somente foram consideradas condições de contorno de envolvendo valores de temperatura. Bruin (1972) encontrou soluções para perfis de velocidades lineares e parabólicos em regime permanente. As condições de contorno utilizadas são de temperaturas no contorno. Finalmente, Sestak e Rieger (1969) admitiu um perfil de velocidades linear para encontrar soluções em regime permanente, utilizando condições de contorno envolvendo temperaturas e fluxos de calor no contorno.



Tabela 2.1: Modelos matemáticos utilizados nos programas utilizados. Adaptado de Stefanini (2009)

	Modelos Matemáticos			
Programa	Escoamento ao Longe	Trajectoria de Gotículas de Água	Equilíbrio Termodinâmico	Crescimento do Gelo
LEWICE	Escoamento Potencial, método dos painéis (HESS; SMITH, 1967)	Efeito das Forças de Arrasto e gravitacionais	Cálculo da Temperatura da superfície adiabática do aerofólio (MESSINGER, 1953)	Cálculo da forma de gelo em múltiplos intervalos de tempo
ONERA	Escoamento Potencial Completo, elementos finitos (BREDIF, 1983)	Efeito das Forças de Arraste (LANGMUIR; BLODGETT, 1961)	Cálculo da Temperatura da superfície adiabática do aerofólio (MESSINGER, 1953)	Cálculo da Forma de Gelo por um método similar ao predição-correção
TRAJICE	Escoamento Potencial Completo (COLLYER; LOCK, 1979) ou método dos painéis (KENNEDY; MARSDEN, 1976)	Efeito das Forças de Arraste (LANGMUIR; BLODGETT, 1961)	Cálculo da Temperatura da superfície adiabática do aerofólio (MESSINGER, 1953)	Cálculo da forma de gelo em um único ou múltiplos intervalos de tempo

## 3 Modelo Físico

O problema a ser resolvido consiste na transferência de calor em um filme d'água contínuo que escoou sobre um aerofólio, devido às forças cisalhantes provocadas por um escoamento de ar adjacente. O aerofólio é modelado como uma placa plana. Admite-se que o escoamento de ar ao longe é paralelo às superfícies do aerofólio e do filme. Não será considerada neste modelo a transferência de massa entre o filme e o ar, assim como a variação de quantidade de movimento devido à incidência de gotículas no filme.

A Figura 3.1 representa o modelo físico do problema bidimensional. A geometria do modelo é plana, hipótese que, devido à pequena espessura do filme d'água em relação ao raio de curvatura do aerofólio, é bastante próxima da realidade. As três fases presentes foram separadas por regiões detalhadas a seguir.

### 3.1 Região 1: Aerofólio

O aerofólio é aproximado por uma placa metálica plana de condutividade térmica  $k_{metal}$  constante e isotrópica. Admite-se também que  $k_{metal} \gg k_{agua}$ . Em um primeiro trecho de comprimento  $L$  existe um aquecedor modelado como uma fonte de calor superficial com potência por unidade de área  $\dot{q}(x)$ . Após a distância  $L$  não existe proteção anti-gelo e o fluxo de calor na superfície não é tão facilmente especificado e deverá ser estimado. As duas opções plausíveis no presente problema são as de: a) uma temperatura fixada na parede e b) um fluxo de calor especificado na parede. Ao estimar esses valores, deve-se considerar a alta condutividade térmica no aerofólio, que, como consequência, acarretará um fluxo de calor bastante elevado no sentido do filme para o aerofólio ou uma temperatura na parede próxima à temperatura ao longe. A opção por uma condição de contorno ou outra será feita e analisada no Capítulo 6.

### 3.2 Região 2: Filme d'Água

A viscosidade  $\mu_{agua}$ , o calor específico  $c_{p_{agua}}$  e o gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  são constantes. O gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  pode ser tanto nulo quanto diferente de zero. A condutividade térmica

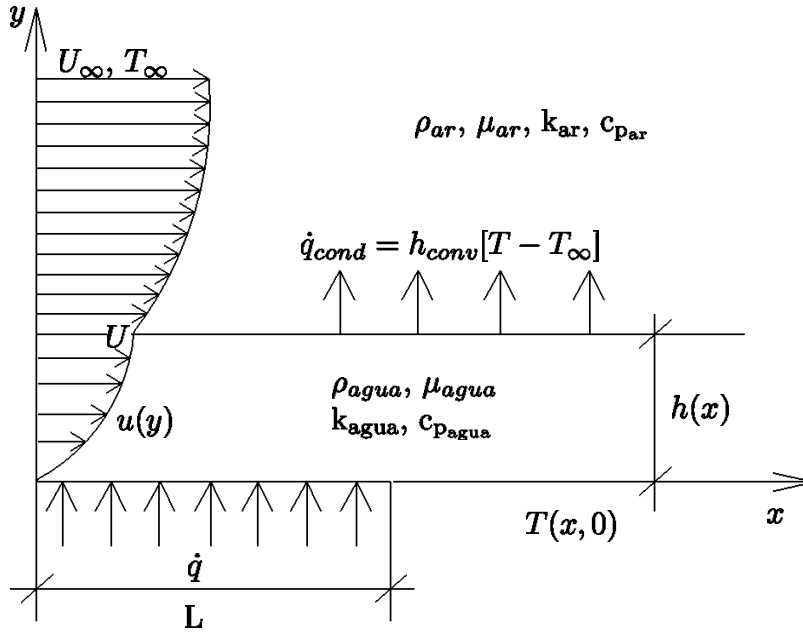


Figura 3.1: Modelo físico do problema

$k_{agua}$  é constante e isotrópica. Utiliza-se a hipótese de incompressibilidade (massa específica  $\rho_{agua}$  constante) e admite-se que o gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  seja suficientemente pequeno para que se possa considerar a espessura  $h(x)$  e a velocidade na superfície  $U(x)$  constantes. Tem-se, então, as seguintes equações de conservação:

a) conservação de massa (já simplificada para fluido incompressível e geometria bidimensional) (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 1960):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Admite-se que a variação da velocidade  $v$  na direção  $y$  seja de ordem muito menor que  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Logo,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  e, portanto, a velocidade na direção  $x$  será somente função de  $y$ , ou seja,  $u = u(y)$ .

b) conservação de quantidade de movimento (já simplificada para o caso de um fluido incompressível) (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 1960):

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V \quad (3.2)$$

Substituindo na expressão acima a forma de velocidade encontrada no ítem (a) e admitindo regime estacionário, obtém-se a seguinte equação, referente à direção  $x$ :

$$\rho \left[ u(y) \frac{\partial u(y)}{\partial x} + v \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} \right] \quad (3.3)$$

Efetuada as derivações e utilizando a hipótese de escoamento paralelo ao aerofólio ( $v = 0$ ), resulta:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4)$$

expressão que, integrada, corresponde a um perfil de velocidades parabólico:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (3.5)$$

Substituindo as condições de contorno de não escorregamento, dadas por:

$$u(0) = 0 \quad (3.6a)$$

$$u(h) = U \quad (3.6b)$$

no perfil parabólico encontrado (equação 3.5) chega-se à seguinte expressão final para o perfil de velocidades:

$$u = \frac{Uy}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{2\mu} (h - y) \quad (3.7a)$$

$$v = 0 \quad (3.7b)$$

Note que, para o caso de gradiente de pressão nulo, basta substituir  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  na equação 3.7a, resultando, então, em um perfil linear dado por:

$$u = \frac{Uy}{h} \quad (3.8a)$$

$$v = 0 \quad (3.8b)$$

### 3.3 Região 3: Escoamento Gasoso

Para o escoamento gasoso, admitem-se constantes a viscosidade  $\mu_{ar}$ , massa específica  $\rho_{ar}$ , calor específico  $c_{p_{ar}}$ , condutividade térmica  $k_{ar}$  e gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . Da mesma maneira que no escoamento de água, o gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  pode ser tanto nulo quanto diferente de zero.

Considera-se que a velocidade e temperatura ao longe  $U_\infty$  e  $T_\infty$  não são afetados pela presença do aerofólio. Admite-se a existência de dois tipos de escoamento em torno do aerofólio, um primeiro no qual a pressão é constante e um segundo no qual o corpo, no caso, o aerofólio inserido no escoamento uniforme, provoca uma mudança na distribuição de pressão do fluido. Neste caso, define-se uma pressão  $p_{inv}(x, y)$  e uma velocidade  $U_{inv}(x, y)$  que considere este efeito, mas que não inclua nenhum efeito da viscosidade do fluido. Esta velocidade  $U_{inv}$  será a velocidade "ao longe" para efeitos de camada limite, apesar de ser uma velocidade diferente de  $U_\infty$  do escoamento original (sem a presença do corpo).

Admite-se que a camada limite não altera o escoamento externo a ela. Adicionalmente, admite-se que sua espessura será suficientemente pequena para que se verifique que as velocidades no escoamento invíscido relativas às posições de  $y$  máximo e mínimo da camada limite sejam próximas, ou seja,  $U_{inv}(x, 0) \sim U_{inv}(x, \delta)$ , onde  $\delta$  é a espessura da camada limite. Assim, usando essa hipótese, admite-se que a velocidade máxima da camada limite será  $U_{inv}(x, 0)$ , que será chamada a partir de agora apenas de  $U_{inv}(x)$ . Esta velocidade pode ser um dado de entrada, coletado experimentalmente. No entanto, no Apêndice E, encontra-se uma sugestão de resolução do escoamento, para casos nos quais estes dados de velocidade sejam inexistentes.

### 3.3.1 Resolução do problema da camada limite

Assim, tem-se as seguintes equações de conservação para a camada limite laminar (WHITE, 2000):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.9a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{inv}(x) \frac{dU_{inv}(x)}{dx} + \nu_{ar} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.9b)$$

Aqui são usados os mesmos eixos  $x$  e  $y$  do filme d'água, com a exceção que a origem do eixo  $y$  se dá na interface água-ar. Assim o sistema de coordenadas utilizado para o ar é o sistema usado para a água deslocado de  $h$  em  $y$ , onde  $h$  é a espessura do filme d'água.

Apesar do gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  não aparecer nas equações acima, ele não foi desprezado. Sabe-se que em um escoamento invíscido e incompressível, para uma mesma linha de corrente, vale a expressão E.8. No caso, como o escoamento se dá na direção  $x$ , tem-se que  $u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  para qualquer linha de corrente do escoamento potencial. Logo, esta expressão valerá para a primeira linha de corrente externa à camada limite, ou seja:

$$U_{inv}(x) \frac{\partial U_{inv}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.10)$$

Assim, o gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  não foi desprezado na obtenção da equação 3.9b. Na interface ar-água ( $y = 0$ ) as velocidades da água e do ar deverão ser iguais (hipótese de não-eskorregamento). Já com o crescimento de  $y$ , a velocidade deverá tender à velocidade ao longe  $U_{inv}(x)$ . Logo, as condições de contorno do problema serão:

$$v(x, 0) = 0 \quad (3.11a)$$

$$u(x, 0) = U \quad (3.11b)$$

$$u(x, \infty) = U_{inv}(x) \quad (3.11c)$$

Para resolver este problema, define-se a variável  $\eta = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{C_1}{\nu_{ar}} (1+m) y x^{\frac{m-1}{2}}}$  e a função de corrente dada por  $\psi = \frac{U_{inv}(x) f(\eta)}{\sqrt{\frac{3}{4} \frac{C_1}{\nu_{ar}} (1+m) x^{\frac{m-1}{2}}}}$  (SCHLICHTING; GERSTEN, 2000). Da definição de função de corrente, as velocidades  $u$  e  $v$  podem ser escritas como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{U_{inv}(x)}{\sqrt{\frac{3}{4} \frac{C_1}{\nu_{ar}} (1+m) x^{\frac{m-1}{2}}}} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{inv}(x) f'(\eta) \quad (3.12)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{f(\eta) [U_{inv}(x) \frac{m-1}{2x} - U'_{inv}(x)]}{\sqrt{\frac{3}{4} \frac{C_1}{\nu_{ar}} (1+m) x^{\frac{m-1}{2}}}} + \frac{1-m}{2} \frac{f'(\eta) U_{inv}(x) y}{x} \quad (3.13)$$

Substituindo estas relações em 3.9b, chega-se a:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_{inv} \frac{dU_{inv}}{dx} + \nu_{ar} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3.14)$$

A variável  $\eta$  e a função de corrente  $\psi$ , da maneira que foram definidas, são compatíveis com uma velocidade  $U_{inv}(x) = \frac{3}{2} C_1 x^m$  (WHITE, 2000) (Note que, até então, não foi usada nenhuma hipótese física que defina a velocidade do escoamento potencial como uma potência de  $x$ ; esta potência é somente matematicamente coerente com as outras variáveis definidas). Usando esta expressão e fazendo as manipulações algébricas necessárias, pode-se chegar à equação:

$$f''' + f f'' + \frac{2m}{1+m} (1 - f'^2) = 0 \quad (3.15)$$

onde  $'$  denota a derivada em relação a  $\eta$ . Substituindo a expressão para  $U_{inv}(x)$  em 3.10,

conclui-se que:

$$m \left( \frac{3}{2} \right)^2 C_1^2 x^{2m-1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.16)$$

Assim, para um gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  constante, exige-se que  $2m-1 = 0$ , ou seja,  $m = \frac{1}{2}$ . Adicionalmente, a expressão acima também implica em uma definição para a constante  $C_1$ , dada por:

$$C_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{-2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (3.17)$$

Logo, a constante  $C_1$  só está definida para gradientes de pressão negativos (favoráveis).

Substituindo as expressões 3.12 e 3.13 nas condições de contorno 3.11, conclui-se que:

$$f(0) = 0 \quad (3.18a)$$

$$f'(0) = \frac{U}{U_{inv}} \quad (3.18b)$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (3.18c)$$

Note que estas equações correspondem ao problema de Falkner-Skan para camada limite em torno de uma cunha, com exceção da condição de contorno de velocidade  $u$  na parede ( $f'(0) = \frac{U}{U_{inv}}$ ), que, na solução original corresponde a  $f'(0) = 0$ . Este problema resume-se a encontrar uma condição inicial  $f''(0)$ , que, em conjunto com as condições para  $f(0)$  e  $f'(0)$  dadas, resulta na condição  $f'(\infty) = 1$ . Assim, para uma dada velocidade da superfície do filme  $U$ , pode-se encontrar as velocidades  $u$  e  $v$  do escoamento gasoso. No entanto, não se conhece a velocidade  $U$ , de maneira que se deve acoplar os problemas do escoamento gasoso com o do escoamento de filme e, assim, encontrar a velocidade  $U$ .

Para o caso de um gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  nulo, o problema pode ser resolvido analogamente, com o uso de uma variável  $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu_{ar}x}}$  e uma função de corrente  $\psi = f(\eta) \sqrt{2\nu_{ar}U_\infty x}$ . Pode-se chegar, então, à seguinte equação:

$$f''' + f f'' = 0 \quad (3.19)$$

A equação acima deverá ser resolvida com as seguintes condições de contorno, determinadas analogamente à obtenção para o caso de um gradiente de pressão não nulo:

$$f(0) = 0 \quad (3.20a)$$

$$f'(0) = \frac{U}{U_\infty} \quad (3.20b)$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (3.20c)$$

O problema para gradiente de pressão nulo também será, então, uma forma adaptada de um problema clássico. Neste caso, o problema corresponde ao problema da camada limite sobre placa plana resolvido por Blasius, com a condição de contorno para  $f'(0)$  modificada de  $f'(0) = 0$  para  $f'(0) = \frac{U}{U_\infty}$ . Este problema pode ser resolvido da mesma maneira que o referente a um gradiente de pressão diferente de zero.

### 3.4 Avaliação da velocidade de filme $U$

Comparando os resultados obtidos para os campos de velocidades no filme e na camada limite, pode-se encontrar uma estimativa para a velocidade de filme  $U$ . As expressões para a camada limite variam com a distância  $x$  do início da placa, enquanto, para o filme, foi admitido que a velocidade do escoamento não varia com a abcissa. Assim, a velocidade de filme  $U$  será aproximada para um dado  $x_{med}$ . Igualando as tensões de cisalhamento na interface água-ar, obtém-se:

$$\tau|_{int} = \mu_{ar} \left. \frac{\partial u_{ar}}{\partial y} \right|_{int} = \mu_{agua} \left. \frac{\partial u_{agua}}{\partial y} \right|_{int} \quad (3.21)$$

Substituindo a expressão 3.12 no segundo termo de 3.21, obtém-se:

$$\mu_{ar} \left. \frac{\partial u_{ar}}{\partial y} \right|_{int} = \mu_{ar} \frac{\partial}{\partial y} [U_{inv}(x) f'(\eta)]|_{int} = \mu_{ar} U_{inv}(x_{med}) \sqrt{\frac{3 C_1}{4 \nu_{ar}}} (1 + m) x_{med}^{\frac{m-1}{2}} f''(0) \quad (3.22)$$

Analogamente, substituindo 3.7a no último termo de 3.21, resulta:

$$\mu_{agua} \left. \frac{\partial u_{agua}}{\partial y} \right|_{int} = \mu_{agua} \left[ \frac{U}{h} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2\mu_{agua}} \right] \quad (3.23)$$

Finalmente, igualando as tensões:

$$\mu_{ar} U_{inv}(x_{med}) \sqrt{\frac{3 C_1}{4 \nu_{ar}}} (1 + m) x_{med}^{\frac{m-1}{2}} f''(0) = \mu_{agua} \left[ \frac{U}{h} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2\mu_{agua}} \right] \quad (3.24)$$



Resolvendo analogamente para o caso de gradiente de pressão nulo, a expressão que relaciona os escoamentos líquido e gasoso será:

$$\mu_{ar} U_{\infty} f''(0) \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2\nu_{ar} x_{med}}} = \mu_{agua} \frac{U}{h} \quad (3.25)$$

Vale ressaltar que as equações 3.24 e 3.25 não são expressões exatas. Estas equações são expressões aproximadas para um dado  $x_{medio}$ . Assim, pode-se encontrar iterativamente uma estimativa da velocidade de filme  $U$  por meio das equações 3.24 e 3.25. Esta velocidade de filme será um parâmetro fundamental para a resolução do problema térmico do escoamento e, conseqüentemente, para o modelo de transferência de calor no filme líquido escoando sobre um aerofólio.

### 3.5 Problema matemático

O escoamento deste problema já foi definido nas seções anteriores, no entanto, ainda falta a definição do problema térmico a ser resolvido. Neste trabalho, deseja-se encontrar uma distribuição de temperaturas para o filme de água. Para tanto, deve-se aplicar a equação de conservação de energia para o filme e resolver a equação diferencial resultante. Parte-se da equação de conservação de energia em um meio contínuo, já simplificada para o caso de um escoamento incompressível bidimensional com massa específica  $\rho$ , calor específico  $c_p$  e condutibilidade térmica  $k$  constantes (WHITE, 2000):

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (3.26)$$

na qual a dissipação viscosa  $\Phi$  é dada pela expressão:

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.27)$$

Adotando o perfil de velocidade admitido na seção 3.2 para o filme d'água (escoamento paralelo ao eixo  $x$ ), obtém-se:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} \right] = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.28)$$

Independentemente do valor de  $u(y)$ , esta equação é elíptica em  $x - y$ , logo, para resolvê-la, deverão ser especificadas condições de contorno em toda a fronteira do domínio. Assim, ao dividir o domínio em mais de uma região, deve-se resolver todas as regiões simultanea-

mente. Isto implica em uma resolução demasiadamente trabalhosa, pois nenhum domínio será independente dos demais.

Ao admitir um número de Peclet ( $Pe = \frac{LV}{\alpha} = \frac{\rho c_p LV}{k}$ ) muito alto - o que se verifica neste problema -, pode-se concluir que o termo convectivo é de ordem maior que o termo condutivo na mesma direção. Assim, pode-se desprezar o termo  $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  (condutivo) frente a  $\rho c_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x}$  (convectivo), chegando-se a:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.29)$$

Independentemente de  $u(y)$ , esta equação é parabólica em  $x - y$ , portanto poderão ser especificadas condições de contorno em somente parte da fronteira. Adicionalmente, ao dividir o domínio em várias regiões, estas poderão ser resolvidas uma por vez, já que a informação terá um sentido de propagação. Sendo assim, o trabalho consistirá na resolução da equação 3.29 para o filme d'água com as condições de contorno adequadas. Admite-se:

- Condição de contorno para  $x = 0$ : Em  $x = 0$  admite-se uma temperatura inicial  $T_{ent}(y)$ , como, por exemplo,  $T_{ent}(y) = T_\infty$
- Condição de contorno para  $y = 0$ : Em  $y = 0$  utilizam-se condições de contorno de acordo com a natureza da superfície em contato:

*Região termicamente protegida:* Admite-se um fluxo de calor por área  $\dot{q}(x)$  constante.

*Região desprotegida:* Admite-se uma temperatura constante e igual a  $T_\infty$  com base na alta condutividade térmica do aerofólio ou um fluxo de calor relativamente alto resfriando o filme.

- Condição de contorno para  $y = h$ : Em  $y = h$  admite-se que a troca de calor por condução no filme será igual à troca de calor por convecção com o ar. O coeficiente de transferência de calor por convecção  $h_{CONV}$ , por hipótese, será constante.

Para exemplificar, toma-se o problema do escoamento estacionário de um filme sobre um aquecedor de comprimento  $L$ , seguido por uma região desprotegida. Ao adotar como condição de contorno uma temperatura fixa, este problema possui uma condição de contorno que, além de ser descontínua, não tem sequer a mesma natureza na totalidade da fronteira: em uma parte é uma condição para a temperatura (condição de contorno de Dirichlet) e em outra é para sua derivada (condição de contorno de Neumann). No entanto, pela natureza parabólica da equação 3.29, este problema poderá ser resolvido como a justaposição de dois outros muito mais simples (Figura 3.2):

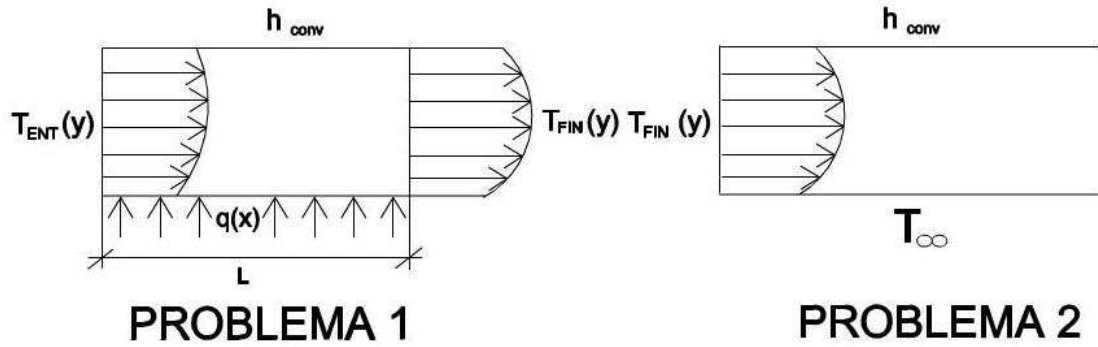


Figura 3.2: Problemas equivalentes ao do aquecedor seguido de região desprotegida

- Problema 1: Filme com temperatura inicial  $T_{ent}(y)$ , fluxo de calor  $\dot{q}(x)$  em  $y = 0$  e fluxo de calor por convecção em  $y = h$ .
- Problema 2: Filme com temperatura inicial  $T_{FIN}(y)$ , onde  $T_{FIN}(y)$  é a distribuição de temperatura final do problema 1, temperatura  $T_{\infty}$  em  $y = 0$  e fluxo de calor por convecção em  $y = h$ .

O presente trabalho será baseado nesta justaposição, devido ao fato de que a equação diferencial a ser resolvida é parabólica. No entanto, ainda não foram definidas as ferramentas adequadas para resolver estas equações a derivadas parciais. Dois dos métodos usualmente utilizados para a resolução de este tipo de equação serão apresentados nos próximos capítulos: a solução com o uso do método de Galerkin e a solução por separação de variáveis.

## 4 Método da separação de variáveis

Neste capítulo será resolvido o problema definido no Capítulo 3 pelo método da separação de variáveis. Todos os conceitos envolvidos neste capítulo podem ser encontrados em referências básicas de matemática, como Arfken e Weber (2005), Butkov (1968) e Barata (2011). Adicionalmente, no Apêndice I, encontra-se uma revisão sobre Equações Diferenciais Ordinárias e o Problema de Sturm-Liouville, conceitos fundamentais para o entendimento da resolução do problema.

### 4.1 Solução por separação de variáveis

Considera-se o problema detalhado no Capítulo 3, que consiste na transferência de calor e distribuição de temperaturas em um filme d'água contínuo que escoa sobre um aerofólio. Inicialmente, serão resolvidos os problemas nos quais o fluxo de calor na parte inicial do aerofólio  $\dot{q}(x)$ , a temperatura na parte final  $T_0(x)$  e o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h_{CONV}(x)$  são constantes.

Partindo da equação de conservação de energia já simplificada (3.29) e assumindo regime estacionário, chega-se à expressão:

$$\rho c_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \Phi(y) \quad (4.1)$$

Deseja-se simplificar ao máximo a equação, agrupando as constantes e propriedades no fluido e preservando apenas variáveis. Define-se, então, a seguinte transformação:

$$\bar{T} = T - T_\infty \quad (4.2a)$$

$$\bar{y} = \frac{y}{h} \quad (4.2b)$$

$$\bar{x} = \frac{kx}{\rho c_p h^2 U} \quad (4.2c)$$

Inicialmente, desprezando a dissipação viscosa  $\Phi$  e aplicando a transformação de variáveis 4.2 à expressão 4.1, obtém-se:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.3)$$

na qual  $\bar{u}(\bar{y})$  é a velocidade  $u(y)$  após a transformação 4.2b. A solução por separação de variáveis consiste na verificação da hipótese de que a função procurada  $f(x, y, \dots)$  (com  $n$  variáveis dependentes) pode ser representada como o produto de  $n$  funções de uma só variável, ou seja,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n g(x_i)$ . Admite-se, então, que  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$  possa ser representada como o produto de uma função de  $\bar{x}$  por uma função de  $\bar{y}$ , da forma:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = Y(\bar{y})X(\bar{x}) \quad (4.4)$$

Substituindo 4.4 em 4.3 e dividindo a expressão resultante por  $Y(\bar{y})X(\bar{x})$ , chega-se à igualdade:

$$\frac{X'(\bar{x})}{X(\bar{x})} = \frac{Y''(\bar{y})}{Y(\bar{y})} \frac{U}{\bar{u}(\bar{y})} \quad (4.5)$$

Note que o lado esquerdo da equação depende somente de  $\bar{x}$ , enquanto o lado direito somente depende de  $\bar{y}$ . Logo, para a expressão ser verdadeira para qualquer par  $(\bar{x}, \bar{y})$  ela deve ser igual a uma constante. Isto significa que as variáveis da equação são *separáveis*. Igualando a equação anterior a uma constante arbitrária  $\alpha$ , chega-se às seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$X'(\bar{x}) = \alpha X(\bar{x}) \quad (4.6a)$$

$$Y''(\bar{y}) = \alpha Y(\bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} \quad (4.6b)$$

Desta maneira, transformou-se um problema envolvendo derivadas parciais (equação 4.1), em um sistema de equações diferenciais ordinárias, cujas soluções são conhecidas e notavelmente mais simples.

### 4.1.1 Análise das condições de contorno

Nota-se que a equação diferencial ordinária para  $Y(\bar{y})$  (4.6b) é do tipo de Sturm-Liouville, logo, se o problema for definido corretamente, ele terá infinitos autovalores  $\alpha_n$ , correspondentes a

infinitas autofunções  $y_n$  ortogonais, que formam uma base completa (vide Arfken e Weber (2005), Barata (2011) e o Apêndice I deste trabalho). Assim, uma solução particular da equação 4.3, com as condições de contorno homogêneas correspondentes será:

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\bar{x})Y_n(\bar{y}) \quad (4.7)$$

onde  $X_n(\bar{x})$  e  $Y_n(\bar{y})$  são as soluções das equações 4.6a e 4.6b, respectivamente, para  $\alpha$  correspondente ao autovalor  $n$  do problema de Sturm-Liouville relacionado à equação 4.6b.

As condições de contorno para o caso de uma região termicamente desprotegida ainda não foram totalmente definidas, no entanto, por enquanto se adotará uma condição de contorno envolvendo uma temperatura fixa na parede. Isso se deve ao fato de que, no caso da utilização de uma condição de contorno envolvendo fluxos de calor, a solução será similar à da região termicamente protegida. Assim, admitindo uma temperatura fixa na região desprotegida cobrem-se todos os casos possíveis de condições de contorno para o problema da transferência de calor em um filme. No problema proposto neste trabalho, as condições de contorno não são homogêneas, enquanto as do problema de Sturm-Liouville o são. Assim, deve-se encontrar e somar à solução  $\bar{T}_1$  uma outra solução particular  $\bar{T}_2$  que satisfaça as condições de contorno propostas.

Logo, as condições de contorno relacionadas à solução  $\bar{T}_1$  serão homogêneas, enquanto as relacionadas à solução  $\bar{T}_2$  não o serão. Para que a solução geral  $\bar{T}$  satisfaça as condições de contorno do problema proposto (não homogêneas), as condições de contorno relacionadas a  $\bar{T}_1$  e  $\bar{T}_2$  deverão ser da mesma natureza (condições de Dirichlet, Neumann, etc). Logo, as condições de contorno relacionadas à solução  $\bar{T}_1$  serão:

	Região Termicamente Protegida	Região Desprotegida
$\bar{y} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} - h_{CONV} \bar{T} = 0$
$\bar{y} = 1$	$\bar{T} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} - h_{CONV} \bar{T} = 0$

A solução particular  $\bar{T}_2$  pode ser facilmente encontrada para o caso de um coeficiente de transferência de calor por convecção  $h_{CONV}$  constante. Para o caso de um fluxo de calor  $\dot{q}(x)$  ou temperatura na parede do aerofólio constante, tem-se que nenhuma condição de contorno depende da variável  $\bar{x}$ . Portanto, admite-se inicialmente uma solução particular  $\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})$  da forma polinomial:

$$\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_0^{\infty} c_n \bar{y}^n \quad (4.8)$$

que, substituída na equação 4.3 resulta em:

$$0 = U \sum_0^{\infty} c_n \bar{y}^{n-2} n(n-1) = C_2 + 6C_3 \bar{y} + 12C_4 \bar{y}^2 + \dots \quad (4.9)$$

Para esta expressão ser válida para qualquer  $\bar{y}$ , ela deve ser identicamente nula. Portanto, todos os coeficientes  $C_n$  presentes na expressão (correspondentes a  $n \geq 2$ ) deverão ser iguais a zero, podendo-se, assim, concluir que a solução  $T_2(\bar{x}, \bar{y})$  é da forma linear:

$$\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = C_0 + C_1 \bar{y} \quad (4.10)$$

(Note que esta expressão é correspondente à solução do sistema 4.6 para  $\alpha = 0$ ). As condições de contorno em  $\bar{y}$  para a região termicamente protegida serão:

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \Big|_{\bar{y}=0} = -\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \dot{q} \quad (4.11a)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = -\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = h_{CONV} \bar{T} \Big|_{\bar{y}=1} \quad (4.11b)$$

que, combinadas à equação 4.10, resultam na solução particular:

$$\bar{T}_2(x, y) = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \quad (4.12)$$

Analogamente, para a região desprotegida, as condições de contorno serão:

$$\bar{T} \Big|_{\bar{y}=0} = \bar{T}_0 \quad (4.13a)$$

$$-\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = h_{CONV} \bar{T} \Big|_{\bar{y}=1} \quad (4.13b)$$

que, combinadas à equação 4.10, resultam em:

$$\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}_0 - \frac{h_{CONV} \bar{T}_0 \bar{y}}{\frac{k}{h} + h_{CONV}} \quad (4.14)$$

### 4.1.2 Solução com gradiente de pressão nulo

No caso do perfil de velocidades  $u(y)$  linear, correspondente a um gradiente de pressão nulo, tem-se que  $u(y) = \frac{Uy}{h}$ . Fazendo uso da transformação de variáveis 4.2b, esta igualdade resulta em um perfil de velocidades  $\bar{u}(\bar{y}) = U\bar{y}$ . Substituindo esta expressão nas equações 4.6a e 4.6b,

obtem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$X'(\bar{x}) = \alpha_n^3 X(\bar{x}) \quad (4.15a)$$

$$Y''(\bar{y}) = \alpha_n^3 Y(\bar{y})\bar{y} \quad (4.15b)$$

O coeficiente  $\alpha_n$  das equações 4.6a e 4.6b foi substituído por  $\alpha_n^3$  para simplificar as expressões para  $Y(\bar{y})$ <sup>1</sup>. Estas equações têm soluções conhecidas, que podem ser encontradas em diversos manuais de funções matemáticas, como, por exemplo Abramowitz e Stegun (1964):

$$X_n(\bar{x}) = C_1 e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \quad (4.16a)$$

$$Y_n(\bar{y}) = C_2 \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + C_3 \text{Bi}(\alpha_n \bar{y}) \quad (4.16b)$$

nas quais, Ai é a função de Airy, e Bi, a função de Airy do segundo tipo. Estas funções estão melhor representadas no Apêndice C. Finalmente, substituindo 4.16a e 4.16b em 4.7, obtém-se:

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{\alpha_n^3 \bar{x}} [C_{2n} \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + C_{3n} \text{Bi}(\alpha_n \bar{y})] \quad (4.17)$$

Reorganizando os coeficientes, resulta:

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} [\text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + B_n \text{Bi}(\alpha_n \bar{y})] \quad (4.18)$$

Assim, encontrou-se uma expressão geral para a solução  $\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})$ . No entanto, os valores de  $\alpha_n$ ,  $A_n$  e  $B_n$  ainda são desconhecidos, e só serão encontrados ao serem aplicadas as condições de contorno adequadas ao problema. Os valores de  $\alpha_n$  e  $B_n$  poderão ser encontrados ao aplicar duas condições de contorno envolvendo a variável  $\bar{y}$ , enquanto os valores de  $A_n$  serão encontrados ao aplicar uma condição de contorno envolvendo a variável  $\bar{x}$ .

---

<sup>1</sup>A solução da equação diferencial  $Y''(\bar{y}) = \alpha Y(\bar{y})\bar{y}$  é

$$Y(\bar{y}) = C_2 \text{Ai}(\alpha^{1/3} \bar{y}) + C_3 \text{Bi}(\alpha^{1/3} \bar{y})$$

Para não usar uma solução com um expoente 1/3, foi usada a equação diferencial equivalente  $Y''(\bar{y}) = \alpha^3 Y(\bar{y})\bar{y}$ , cuja solução é

$$Y(\bar{y}) = C_2 \text{Ai}(\alpha \bar{y}) + C_3 \text{Bi}(\alpha \bar{y})$$



### 4.1.2.1 Região termicamente protegida

Substituindo a equação 4.18 na condição de contorno homogênea correspondente à interface líquido-sólido ( $-\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0$ ), obtém-se:

$$-\frac{k}{h} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} [\text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + B_n \text{Bi}(\alpha_n \bar{y})] \right] \Big|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (4.19)$$

Como a variável da derivação ( $\bar{y}$ ) é independente da variável da somatória ( $n$ ), as funções a serem derivadas são contínuas - assim como suas derivadas - e sabemos que a série infinita converge (vide Apêndice I), pode-se escrever:

$$-\frac{k}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} [\text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + B_n \text{Bi}(\alpha_n \bar{y})] \right] \Big|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (4.20)$$

Efetuada a derivação, resulta:

$$-\frac{k}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \alpha_n [\text{Ai}'(0) + B_n \text{Bi}'(0)] = 0 \quad (4.21)$$

Para a expressão ser válida para qualquer  $\bar{x}$ , deve-se ter  $\text{Ai}'(0) + B_n \text{Bi}'(0) = 0$ . Logo, encontra-se o coeficiente  $B_n$  (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$$B_n = -\frac{\text{Ai}'(0)}{\text{Bi}'(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.22)$$

Analogamente, substituindo a equação 4.18 na condição de contorno homogênea correspondente à interface líquido-gás ( $-\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = h_{CONV} \bar{T} \Big|_{\bar{y}=1}$ ), obtem-se:

$$-\frac{k}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] = h_{CONV} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.23)$$

Rearranjando os termos da equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \frac{k}{h} \alpha_n \left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] + h_{CONV} \left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] \right] = 0 \quad (4.24)$$

Analogamente à primeira condição de contorno, para a expressão acima ser válida para qualquer valor de  $\bar{x}$ , tem-se que:

$$\frac{k}{h}\alpha_n \left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] + h_{CONV} \left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right] = 0 \quad (4.25)$$

Ou, equivalentemente:

$$\alpha_n = -\frac{hh_{CONV}}{k} \frac{\left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]}{\left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]} \quad (4.26)$$

Tais  $\alpha_n$ 's serão os autovalores do presente problema. Tem-se, então, a expressão para a solução geral  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.27)$$

na qual os autovalores  $\alpha_n$ 's são dados pela expressão 4.26. Falta, ainda, aplicar a condição de contorno para  $\bar{x} = 0$ , que, no caso, será:

$$\bar{T}(0, \bar{y}) = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) \quad (4.28)$$

Substituindo esta condição em 4.27, obtém-se:

$$\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Bi}(\alpha_n \bar{y}) \right] = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) \quad (4.29)$$

Pela teoria de Sturm-Liouville, sabe-se que o espaço formado pelas autofunções do problema proposto é completo e, portanto, pode-se projetar qualquer função  $F(\bar{y})$  nesse espaço. Assim, admitindo a distribuição de temperaturas na entrada  $\bar{T}_{ent}(\bar{y})$  constante e definindo a função  $F(\bar{y})$  a ser projetada como:

$$F(\bar{y}) = \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \quad (4.30)$$

Pode-se projetar  $F(\bar{y})$  no espaço gerado por  $\left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]$ , na forma:

$$F(\bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.31)$$

O problema tem como domínio o intervalo  $\bar{y} = [0, 1]$ . A função peso  $r(\bar{y})$  do problema será, por comparação das equações I.24 e 4.6b,  $r(\bar{y}) = \bar{y}$ . Substituindo na equação I.48, chega-se à

seguinte expressão para os coeficientes  $A_n$ :

$$A_n = \frac{\int_0^1 F(\bar{y}) \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y}}{\int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right)^2 \bar{y} d\bar{y}} = \frac{F}{G} \quad (4.32)$$

No caso de uma temperatura  $T_{ent}(\bar{y})$  constante, a integral do numerador pode ser escrita como:

$$F = \left( \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right) \int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y} + \frac{h\dot{q}}{k} \int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y}^2 d\bar{y}$$

ou, equivalentemente, pela definição de Ai e Bi (equação 4.15b):

$$F = \left( \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right) \int_0^1 \frac{1}{\alpha_n} \left( \text{Ai}''(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}''(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) d\bar{y} + \frac{h\dot{q}}{k} \int_0^1 \frac{1}{\alpha_n} \left( \text{Ai}''(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}''(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y}$$

Integrando o primeiro termo diretamente e o segundo por partes, obtém-se:

$$F = \left( \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right) \frac{3\text{Ai}'(\alpha_n) + \sqrt{3}\text{Bi}'(\alpha_n)}{3\alpha_n^2} + \frac{h\dot{q}}{k} \frac{1}{\alpha_n^3} \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) + \frac{h\dot{q}}{k\alpha_n^3} \left[ \alpha_n \left( \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

Da definição dos autovalores  $\alpha_n$ , dada pela equação 4.26, tem-se que a integral avaliada equivale a:

$$F = \frac{hh_{CONV}}{k} \left( -\bar{T}_{ent} + \frac{\dot{q}}{h} + \frac{h\dot{q}}{k} \right) \frac{\text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}}}{\alpha_n^3} + \frac{h\dot{q}}{k\alpha_n^3} \left[ \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{hh_{CONV}}{k} + 1 \right) \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (4.33)$$

Note que esta integral terá que ser reavaliada se a temperatura na posição  $\bar{x} = 0$  não for constante em  $\bar{y}$ . Analogamente, avalia-se a integral do denominador:

$$G = \int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Bi}(\alpha_n \bar{y}) \right)^2 \bar{y} d\bar{y}$$

que tem como resultado:

$$G = \frac{1}{9\alpha_n^2} [3\alpha_n^2 \text{Ai}(\alpha_n)^2 - 3\alpha_n \text{Ai}'(\alpha_n)^2 + 3\text{Ai}(\alpha_n) \text{Ai}'(\alpha_n)] + \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{9\alpha_n^2} [\alpha_n^2 \text{Bi}(\alpha_n)^2 - \alpha_n \text{Bi}'(\alpha_n)^2 + \text{Bi}(\alpha_n) \text{Bi}'(\alpha_n)] +$$

$$\frac{0.19245}{\alpha_n^2} [\text{Ai}(\alpha_n) [2\alpha_n^2 \text{Bi}(\alpha_n) + \text{Bi}'(\alpha_n)] + \text{Ai}'(\alpha_n) [\text{Bi}(\alpha_n) - 2\alpha_n \text{Bi}'(\alpha_n)]]$$

Como esta integral não depende da distribuição de temperaturas em  $\bar{x} = 0$ , ela valerá sempre. Finalmente, combinando as expressões das integrais do numerador e denominador, chega-se a uma equação para os coeficientes  $A_n$ .

#### 4.1.2.2 Região desprotegida

Analogamente, para a região desprotegida, substituindo 4.18 nas condições de contorno homogêneas correspondentes ( $\bar{T}(0) = 0$  e  $-\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = h_{CONV} \bar{T}|_{\bar{y}=1}$ ) e utilizando a solução particular 4.14 pode-se chegar a:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}_0 - \frac{h_{CONV} \bar{T}_0}{\frac{k}{h} + h_{CONV}} \bar{y} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) - \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.35)$$

na qual os autovalores  $\alpha_n$ 's, os coeficientes  $A_n$  e a função  $F(\bar{y})$  são dados por:

$$\alpha_n = -\frac{hh_{CONV}}{k} \frac{\left[ \text{Ai}(\alpha_n) - \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]}{\left[ \text{Ai}'(\alpha_n) - \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]} \quad (4.36a)$$

$$A_n = \frac{\int_0^1 F(\bar{y}) \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) - \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \bar{y} d\bar{y}}{\int_0^1 \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) - \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]^2 \bar{y} d\bar{y}} \quad (4.36b)$$

$$F(\bar{y}) = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) - \bar{T}_0 + \frac{h_{CONV} \bar{T}_0}{\frac{k}{h} + h_{CONV}} \bar{y} \quad (4.36c)$$

#### 4.1.3 Solução para gradiente de pressão constante

Usando a mesma metodologia da seção anterior, para o caso da presença de um gradiente de pressão constante, ou seja, um perfil de velocidades  $u(y)$  parabólico, pode-se encontrar a seguinte equação diferencial parcial correspondente ao problema térmico no escoamento sobre

o aerofólio:

$$\bar{y} [1 - E + E\bar{y}] \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.37)$$

Na qual  $E = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2\mu U}$ . Ao admitir uma distribuição de temperaturas da forma  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = X(\bar{x})Y(\bar{y})$ , pode-se separar as variáveis da equação 4.37. Assim, esta equação pode ser representada como o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$X'(\bar{x}) = \alpha^4 X(\bar{x}) \quad (4.38a)$$

$$Y''(\bar{y}) = \alpha^4 \bar{y} [1 - E + E\bar{y}] Y(\bar{y}) \quad (4.38b)$$

Estas equações terão como solução (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$$X(\bar{x}) = A_n e^{\alpha_n^4 \bar{x}} \quad (4.39)$$

$$Y(\bar{y}) = B_n D_\gamma \left[ \frac{(E(2\bar{y} - 1) + 1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right] + C_n D_\rho \left[ \frac{i(E(2\bar{y} - 1) + 1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right] \quad (4.40)$$

com

$$\gamma = \frac{\alpha^2 E^2 - 4E^{3/2} - 2\alpha^2 E + \alpha^2}{8E^{3/2}} \quad (4.41a)$$

$$\rho = \frac{-\alpha^2 E^2 - 4E^{3/2} + 2\alpha^2 E - \alpha^2}{8E^{3/2}} \quad (4.41b)$$

$$\alpha_n = -\frac{h}{\sqrt{2}E^{1/4}k} \frac{[D_\gamma(\frac{(E+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}}) + B_n D_\rho(\frac{(E+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}})]}{[D'_\gamma(\frac{(E+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}}) + B_n D'_\rho(\frac{(E+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}})]} \quad (4.41c)$$

e, nas quais,  $D_\gamma$  e  $D_\rho$  representam a função cilíndrica parabólica de ordem  $\gamma$  e  $\rho$ , respectivamente. Estas funções são melhores representadas no Apêndice C. Finalmente, de maneira análoga à seção anterior, chega-se a uma distribuição de temperaturas para o caso de gradiente de pressão constante da forma:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = D + C\bar{y} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^4 \bar{x}} \left[ D_\gamma \left( \frac{(E(2\bar{y} - 1) + 1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) + B_n D_\rho \left( \frac{i(E(2\bar{y} - 1) + 1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) \right] \quad (4.42)$$

na qual, os coeficientes  $A_n$  serão dados por:

$$A_n = \frac{\int_0^1 F(\bar{y}) \left[ D_\gamma \left( \frac{(E(2\bar{y}-1)+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) + B_n D_\rho \left( \frac{i(E(2\bar{y}-1)+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) \right] (1-E+E\bar{y})\bar{y}d\bar{y}}{\int_0^1 \left[ D_\gamma \left( \frac{(E(2\bar{y}-1)+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) + B_n D_\rho \left( \frac{i(E(2\bar{y}-1)+1)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right) \right]^2 (1-E+E\bar{y})\bar{y}d\bar{y}} \quad (4.43)$$

com

$$F(\bar{y}) = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) - D - C\bar{y} \quad (4.44)$$

Os coeficientes  $C$ ,  $D$  e  $B_n$  dependerão das condições de contorno, que, se aplicadas da mesma maneira que na seção anterior, resulta em:

	Região termicamente protegida	Região desprotegida
$B_n$	$-\frac{D'_\gamma \left( \frac{(1-E)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right)}{D'_\rho \left( \frac{(1-E)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right)}$	$-\frac{D_\gamma \left( \frac{(1-E)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right)}{D_\rho \left( \frac{(1-E)\alpha_n}{\sqrt{2}E^{3/4}} \right)}$
$D$	$\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}$	$T_0$
$C$	$-\frac{h\dot{q}}{k}$	$-\frac{h_{CONV}T_0}{\frac{k}{h} + h_{CONV}}$

Resumindo, encontraram-se soluções analíticas para o problema da distribuição de temperaturas em um filme d'água contínuo que escoar sobre um aerofólio termicamente protegido ou não, para os casos de gradientes de pressão  $\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$  nulos ou constantes.

## 5 Método espectral de Galerkin

Nesta seção será dada uma breve introdução ao método de Galerkin. Mais explicações sobre este método podem ser encontradas em referências como Holmes, Lumley e Berkooz (1996).

A expansão em séries de uma função  $u(x)$  de uma só variável consiste na representação de  $u(x)$  como uma combinação linear de funções linearmente independentes  $\phi_n(x)$ , que formem uma base completa. Ao expressar a função como a combinação de infinitas funções, obtém-se uma relação exata, ou seja

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \quad (5.1)$$

Na prática, a função  $u(x)$  pode ser aproximada por uma combinação linear de  $N$  funções  $\phi_n(x)$ , com  $N$  podendo ser tomado tão grande quanto for necessário. Assim, tem-se que:

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (5.2)$$

Para exemplificar, toma-se a função definida como:

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Esta função pode ser representada como a série de Fourier  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(nx)$  (BUTKOV, 1968). Na prática, esta função  $u(x)$  será aproximada pela somatória  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^N \frac{1}{n} \text{sen}(nx)$ . Analogamente, pode-se aproximar uma função de mais de uma variável por uma expressão da forma:

$$u(x, y) \approx u_N(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n(y) \phi_n(x) \quad (5.4)$$

na qual  $a_n(y)$  será uma função de  $y$  a ser determinada, ao invés de um coeficiente, como

na equação 5.2. A convergência desta série foi provada por Galerkin e é a chave para a possibilidade de resolução de equações diferenciais parciais com o uso de séries de funções linearmente independentes. Aqui, assume-se que as funções  $\phi_n(x)$  são ortogonais com peso  $w(x)$ . Para resolver uma equação diferencial do tipo:

$$Lu = f \quad (5.5)$$

na qual  $L$  é um operador diferencial, pode-se definir a função residual  $R$ :

$$R = Lu_N - f \quad (5.6)$$

no qual  $u_N$  é dado pela equação 5.4. A função residual  $R$  pode ser representada como uma combinação de quaisquer funções que formem uma base completa. Um caso particular dessa representação é o chamado Método de Galerkin, que consiste na expansão de  $R$  na base formada pelas mesmas funções  $\phi_n(x)$  utilizadas para representar a função  $u(x, y)$ :

$$R = Lu_N - f = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(y)\phi_n(x) \quad (5.7)$$

Como  $\phi_n(x)$  são funções ortogonais, para a função  $R$  ser nula, os coeficientes  $r_n(y)$  deverão ser iguais a zero. Assim:

$$r_n(y) = \langle R(x, y), \phi_n(x) \rangle = \langle Lu_N - f, \phi_n(x) \rangle = 0 \quad (5.8)$$

na qual  $\langle, \rangle$  representa um produto interno no intervalo desejado (mais informações sobre produtos internos estão disponíveis no Apêndice A).

## 5.1 Aplicação do Método de Galerkin ao problema térmico do escoamento sobre um aerofólio

Deseja-se resolver com o Método de Galerkin o mesmo problema resolvido no capítulo anterior. Usando a mesma notação de variáveis que nos capítulos precedentes, inicialmente será resolvido o problema térmico em regime estacionário sem efeitos da dissipação viscosa, dado pela equação 4.3:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$



Pode-se admitir

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{x}) \phi_n(\bar{y}) \quad (5.9)$$

com  $\phi_n(\bar{y})$  funções ortogonais. É desejável que as funções  $\phi_n(\bar{y})$  satisfaçam uma das condições de contorno individualmente. Assim, toma-se como exemplo as funções  $\cos(\alpha_n \bar{y})$  e  $\sin(\alpha_n \bar{y})$ . Para o caso de região termicamente protegida, a condição de contorno exige  $\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0$ . Neste caso, então, usa-se  $\phi(\bar{y}) = \cos(\alpha_n \bar{y})$ . Analogamente, para o caso de região desprotegida, usa-se  $\phi(\bar{y}) = \sin(\alpha_n \bar{y})$ , pois a condição de contorno  $\bar{T}_1 \Big|_{\bar{y}=0} = 0$  já será automaticamente satisfeita. Como no capítulo anterior, serão resolvidas as soluções com condições de contorno homogêneas e depois serão somadas as soluções particulares que satisfazem as condições de contorno do problema não homogêneo 4.11a, 4.11b, 4.13a e 4.13b.

### 5.1.1 Solução para região termicamente protegida

Admite-se que a função  $\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})$  possa ser representada da forma:

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{x}) \cos(\alpha_n \bar{y}) \quad (5.10)$$

Aqui, as variáveis  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as mesmas definidas nos capítulos anteriores. Substituindo na condição de contorno para  $\bar{y} = 1$ , resulta na expressão para os autovalores  $\alpha_n$ :

$$\alpha_n = \frac{h h_{CONV}}{k} \cotg(\alpha_n) \quad (5.11)$$

A Figura 5.1 mostra os autovalores  $\alpha$  para alguns valores de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ . Estes autovalores são definidos pela intersecção das curvas  $y = \alpha$  e  $y = \frac{h h_{CONV}}{k} \cotg(\alpha_n)$ , representadas na Figura 5.1. Como as duas funções são ímpares, tem-se que, para cada autovalor  $\alpha_n$ , existirá um outro autovalor de valor  $-\alpha_n$ . No entanto, como a solução do problema está dada em função de  $\cos(\alpha_n)$ , a autofunção correspondente a  $\alpha_n$  será idêntica à correspondente a  $-\alpha_n$ . Assim, pode-se eliminar todos autovalores de um determinado sinal.

Comparando as equações 4.3 e 5.5, observa-se que  $u = \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $L = \left[ \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - U \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right]$  e  $f = 0$ , que, substituídos na equação 5.8, resulta:

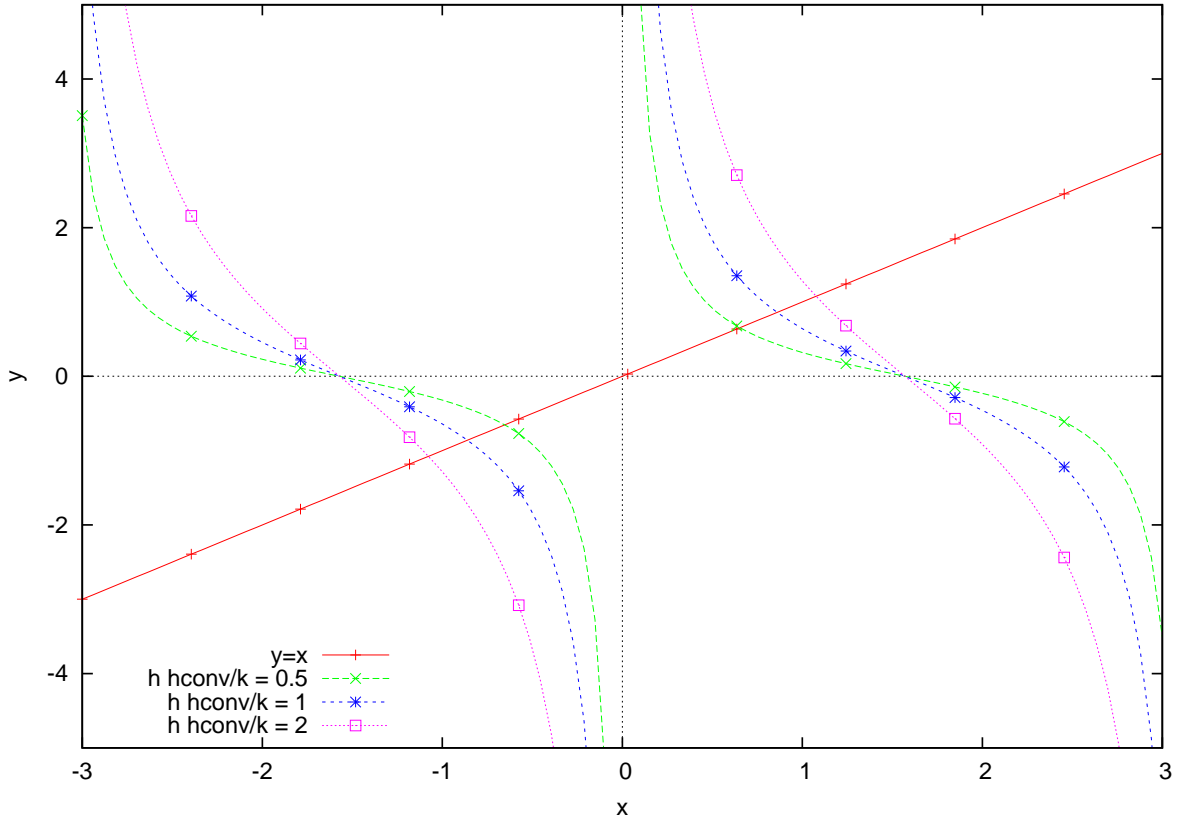


Figura 5.1: Representação de  $y = \alpha$  e  $y = \frac{hh_{CONV}}{k} \cotg(\alpha_n)$ , para valores selecionados de  $\frac{hh_{CONV}}{k}$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[ \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{x}} - U \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \bar{y}^2} \right] \cos(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} = \\
 & = \int_0^1 \left[ \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{x}) \cos(\alpha_n \bar{y}) \right) - U \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{x}) \cos(\alpha_n \bar{y}) \right) \right] \cos(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} \\
 & = \int_0^1 \left[ \bar{u}(\bar{y}) \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(\bar{x}) \cos(\alpha_n \bar{y}) + U \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 A_n(\bar{x}) \cos(\alpha_n \bar{y}) \right] \cos(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} = 0 \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A'_n(\bar{x}) \int_0^1 \bar{u}(\bar{y}) \cos(\alpha_n \bar{y}) \cos(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} -U \alpha_n^2 A_n(\bar{x}) \int_0^1 \cos(\alpha_n \bar{y}) \cos(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} \quad (5.13)$$

Como as funções  $\cos(\alpha_m \bar{y})$  e  $\cos(\alpha_n \bar{y})$  são ortogonais com peso  $w = 1$ , sabe-se que<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \text{para } n \neq m & \int_0^1 \cos(\alpha_m \bar{y}) \cos(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y} = 0 \\ \text{para } n = m & \int_0^1 \cos(\alpha_m \bar{y}) \cos(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y} = \int_0^1 \cos^2(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(\alpha_m) \cos(\alpha_m)}{2\alpha_m} \end{cases}$$

Portanto, o problema se reduz à solução da equação:

$$MA' = DA \quad (5.14)$$

com

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_1 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_1 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \\ \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_2 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_2 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \\ \dots & & \dots \\ \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_N \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_N \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1(\bar{x}) \\ A'_2(\bar{x}) \\ \dots \\ A'_N(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_1 \bar{y}) d\bar{y} & \dots & -\alpha_N^2 \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_1 \bar{y}) d\bar{y} \\ -\alpha_1^2 \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_2 \bar{y}) d\bar{y} & \dots & -\alpha_N^2 \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_2 \bar{y}) d\bar{y} \\ \dots & & \dots \\ -\alpha_1^2 \int_0^1 \cos(\alpha_1 \bar{y}) \cos(\alpha_N \bar{y}) d\bar{y} & \dots & -\alpha_N^2 \int_0^1 \cos(\alpha_N \bar{y}) \cos(\alpha_N \bar{y}) d\bar{y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} [\text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_1) + \alpha_1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{2} [\text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_2) + \alpha_2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_N}{2} [\text{sen}(\alpha_N) \cos(\alpha_N) + \alpha_N] \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>No espaço aqui considerado, o produto interno entre as funções  $\cos(\alpha_m \bar{y})$  e  $\cos(\alpha_n \bar{y})$ , para  $\alpha_m \neq \alpha_n$  dados pela equação 5.11 será:

$$\langle \cos(\alpha_m \bar{y}), \cos(\alpha_n \bar{y}) \rangle = \int_0^1 \cos(\alpha_m \bar{y}) \cos(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y} = \frac{\alpha_m \text{sen}(\alpha_m) \cos(\alpha_n) - \alpha_n \text{sen}(\alpha_n) \cos(\alpha_m)}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2}$$

Substituindo na expressão acima a equação 5.11, resulta:

$$\langle \cos(\alpha_m \bar{y}), \cos(\alpha_n \bar{y}) \rangle = \frac{\alpha_m \text{sen}(\alpha_m) \frac{k}{h h_{CONV}} \alpha_n \text{sen}(\alpha_n) - \alpha_n \text{sen}(\alpha_n) \frac{k}{h h_{CONV}} \alpha_m \text{sen}(\alpha_m)}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} \equiv 0$$

Assim, estas funções são ortogonais com peso  $w(\bar{y}) = 1$ .

$$A = \begin{pmatrix} A_1(\bar{x}) \\ A_2(\bar{x}) \\ \dots \\ A_N(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

### 5.1.2 Solução para região desprotegida

Assume-se

$$\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\bar{x}) \text{sen}(\alpha_n \bar{y}) \quad (5.15)$$

Analogamente ao caso da região termicamente protegida, substituindo em 5.8 e utilizando a condição de contorno para  $\bar{y} = 1$ , chega-se a:

$$\alpha_n = -\frac{h h_{CONV}}{k} \text{tg}(\alpha_n) \quad (5.16)$$

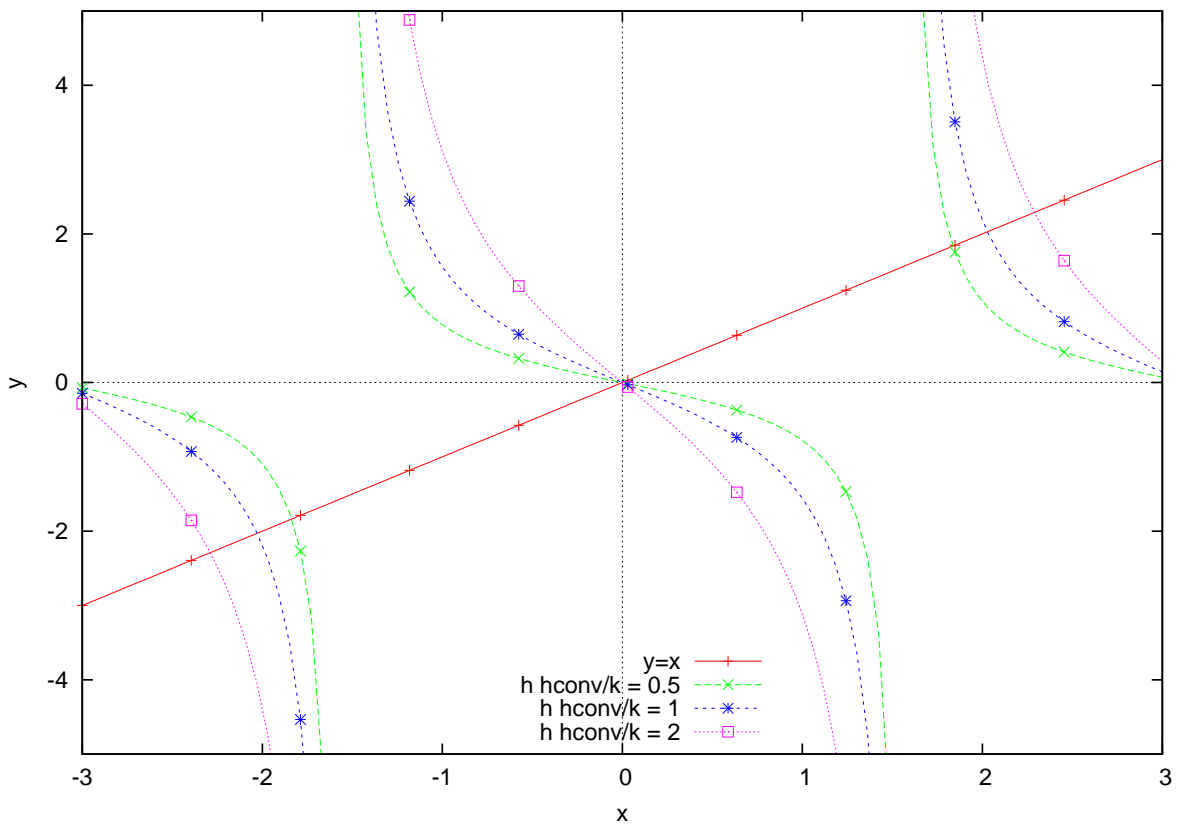


Figura 5.2: Representação de  $y = \alpha$  e  $y = -\frac{h h_{CONV}}{k} \text{tg}(\alpha_n)$ , para valores selecionados de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$

A Figura 5.2 mostra os autovalores  $\alpha$  para alguns valores de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ . Estes autovalores são definidos pela intersecção das curvas  $y = \alpha$  e  $y = -\frac{h h_{CONV}}{k} \text{tg}(\alpha_n)$ , representadas na Figura

5.2. Como no caso da região termicamente protegida, para cada autovalor  $\alpha_n$ , existirá um autovalor de valor  $-\alpha_n$ . No entanto, como a solução do problema está dada em função de  $\text{sen}(\alpha_n)$ , o autovetor correspondente a  $\alpha_n$  será o vetor oposto do correspondente a  $-\alpha_n$ , ou seja, os autovetores correspondentes a  $\alpha_n$  e  $-\alpha_n$  serão linearmente dependentes. Assim, como no caso anterior, pode-se eliminar todos autovalores de um determinado sinal. Procedendo analogamente ao caso de uma região termicamente protegida, obtém-se a seguinte equação para cada  $m$  no intervalo  $[0, N]$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(\bar{x}) \int_0^1 \bar{u}(\bar{y}) \text{sen}(\alpha_n \bar{y}) \text{sen}(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} -U \alpha_n^2 B_n(\bar{x}) \int_0^1 \text{sen}(\alpha_n \bar{y}) \text{sen}(\alpha_m \bar{y}) d\bar{y} \quad (5.17)$$

Logo, deve-se resolver a seguinte equação:

$$MB' = DB \quad (5.18)$$

com

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^1 \text{sen}(\alpha_1 \bar{y}) \text{sen}(\alpha_1 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \text{sen}(\alpha_N \bar{y}) \text{sen}(\alpha_1 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \\ \int_0^1 \text{sen}(\alpha_1 \bar{y}) \text{sen}(\alpha_2 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \text{sen}(\alpha_N \bar{y}) \text{sen}(\alpha_2 \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \\ \dots & & \dots \\ \int_0^1 \text{sen}(\alpha_1 \bar{y}) \text{sen}(\alpha_N \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} & \dots & \int_0^1 \text{sen}(\alpha_N \bar{y}) \text{sen}(\alpha_N \bar{y}) \frac{\bar{u}(\bar{y})}{U} d\bar{y} \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} B'_1(\bar{x}) \\ B'_2(\bar{x}) \\ \dots \\ B'_N(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 \int_0^1 \text{sen}^2(\alpha_1 \bar{y}) d\bar{y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2^2 \int_0^1 \text{sen}^2(\alpha_2 \bar{y}) d\bar{y} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_N^2 \int_0^1 \text{sen}^2(\alpha_N \bar{y}) d\bar{y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} [\text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_1) - \alpha_1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{2} [\text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_2) - \alpha_2] & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha_N}{2} [\text{sen}(\alpha_N) \cos(\alpha_N) - \alpha_N] \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1(\bar{x}) \\ B_2(\bar{x}) \\ \dots \\ B_N(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

## 5.2 Resolução do sistema de equações obtido

O Método de Galerkin resulta em um sistema de equações diferenciais. Para resolvê-lo, será necessário explicitar os valores de  $A'_n(\bar{x})$  e  $B'_n(\bar{x})$ , para que assim seja possível a resolução do problema pelo método de Runge-Kutta ou outro similar. Para isso, pode-se utilizar um método de diagonalização de matrizes no sistema para que, após o problema encontrar-se na forma desejada, possa-se usar um método numérico de resolução de EDOs. Neste trabalho, utilizou-se o método de tridiagonalização de Householder seguido do algoritmo de Thomas, ambos expostos em Press et al. (2007).

Tendo encontrado a matriz inversa  $M^{-1}$  de  $M$  pode-se prosseguir com a resolução do sistema de equações. Multiplicando  $M^{-1}$  pela esquerda nos dois lados do sistema dado por 5.14, obtém-se:

$$M^{-1}MA' = A' = M^{-1}DA \quad (5.19)$$

Como os valores das derivadas  $A'_n(\bar{x})$ , dados pelo vetor  $A'$  são conhecidos, este sistema pode agora ser resolvido diretamente usando um método de resolução de equações diferenciais ordinárias, como o método de Runge Kutta ou o método de Euler. Independente do método de resolução escolhido, deverá ser estipulada uma condição de contorno em um valor arbitrário de  $\bar{x}$ , aqui tomado como zero. Admitindo conhecida a distribuição de temperatura  $\bar{T}_{ent}(\bar{y})$  em  $\bar{x} = 0$  e substituindo essa condição de contorno na distribuição 5.9, obtém-se:

$$\bar{T}(0, \bar{y}) = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) = \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0)\phi_n(\bar{y}) = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0)\phi_n(\bar{y}) \quad (5.20)$$

Como, por definição, as funções  $\phi_n(\bar{y})$  formam uma base completa, a expansão de  $\bar{T}_{ent}(\bar{y}) - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$  em uma série de  $\phi_n(\bar{y})$  será possível. Assim, tem-se como condição de contorno que, para qualquer  $n$ ,  $A_n(0)$  será o coeficiente da expansão de  $F(\bar{y}) = \bar{T}_{ent}(\bar{y}) - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$  em séries de  $\phi_n(\bar{y})$ , ou seja:

$$A_n(0) = \frac{\int_0^1 F(\bar{y})\phi_n(\bar{y})w(\bar{y})d\bar{y}}{\int_0^1 \phi_n^2(\bar{y})w(\bar{y})d\bar{y}} \quad (5.21)$$

Para uma distribuição  $\bar{T}_{ent}(\bar{y})$  constante, tem-se, então, para o caso de uma região termicamente protegida, a seguinte condição de contorno:

$$A_n(0) = \frac{\int_0^1 \left[ \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \right] \cos(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}}{\int_0^1 \cos^2(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}} \quad (5.22)$$

Resolvendo as integrais, obtém-se a seguinte expressão final para os coeficientes  $A_n$ :

$$\begin{aligned} A_n(0) &= \frac{\int_0^1 \left[ \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right] \cos(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}}{\int_0^1 \cos^2(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}} + \frac{\int_0^1 \frac{h\dot{q}}{k} \cos(\alpha_n \bar{y}) y d\bar{y}}{\int_0^1 \cos^2(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}} \\ &= \frac{\left[ \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right] \text{sen}(\alpha_n)}{\frac{\alpha_n}{2} + \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{4}} + \frac{\frac{h\dot{q}}{k} \left[ \text{sen}(\alpha_n) + \frac{\cos(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n} \right]}{\frac{\alpha_n}{2} + \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{4}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analogamente, para um problema sem proteção térmica, pode-se obter a seguinte expressão para os coeficientes  $A_n$ :

$$\begin{aligned} A_n(0) &= \frac{\int_0^1 \left[ \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right] \text{sen}(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}}{\int_0^1 \text{sen}^2(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}} + \frac{\int_0^1 \frac{h\dot{q}}{k} \text{sen}(\alpha_n \bar{y}) y d\bar{y}}{\int_0^1 \text{sen}^2(\alpha_n \bar{y}) d\bar{y}} \\ &= \frac{\left[ \bar{T}_{ent} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k} \right] [1 - \cos(\alpha_n)]}{\frac{\alpha_n}{2} - \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{4}} + \frac{\frac{h\dot{q}}{k} \left[ \frac{\text{sen}(\alpha_n)}{\alpha_n} - \cos(\alpha_n) \right]}{\frac{\alpha_n}{2} - \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{4}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

## 6 Resultados

### 6.1 Solução do escoamento do filme

Para resolver o problema do escoamento de um filme sobre um aerofólio, tanto no caso de gradiente de pressão nulo quanto no de gradiente de pressão constante e não nulo, foram utilizadas os seguintes valores para os parâmetros que descrevem o problema físico:

- Corda do aerofólio ( $c$ ) = 1.0 m
- Dimensão na direção da envergadura da asa ( $t$ ) = 1.0 m
- Circulação ( $\gamma$ ) = 0.0  $m^2/s$
- Viscosidade dinâmica do ar ( $\mu_{ar}$ ) =  $1.6167 \cdot 10^{-5}$  N.s/m<sup>2</sup>
- Massa específica do ar ( $\rho_{ar}$ ) = 1.2933 kg/m<sup>3</sup>
- Massa específica da água ( $\rho_{agua}$ ) = 1000.0 kg/m<sup>3</sup>
- Viscosidade dinâmica da água ( $\mu_{agua}$ ) =  $1.519 \cdot 10^{-4}$  N.s/m<sup>2</sup>
- Vazão de água ( $\dot{m}$ ) = 1.0 kg/s
- Velocidade ao longe ( $U_\infty$ ) = 100.0  $m/s$
- Posição média ( $x_{med}$ ) = 0.45 m

Com esses dados, pode-se calcular numericamente o perfil de velocidades do escoamento, chegando a uma velocidade de filme  $U$  e uma espessura de filme  $h$ . No Apêndice A, encontra-se o código em Fortran utilizado para resolver as equações do escoamento.

#### 6.1.1 Gradiente de pressão nulo

Para escoamentos com gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  nulos, deve-se resolver a equação 3.25, representada a seguir:



$$\mu_{ar} U_{\infty} f''(0) \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2\nu_{ar} x_{med}}} = \mu_{agua} \frac{U}{h}$$

Neste caso,  $f''(0)$  é dado pela equação 3.19, em conjunto com suas condições de contorno 3.20, representadas abaixo. As variáveis  $U$  e  $h$  são relacionados por 6.1, também representada a seguir:

$$f''' + f f'' = 0 \quad (3.19)$$

$$f(0) = 0 \quad (3.20a)$$

$$f'(0) = \frac{U}{U_{\infty}} \quad (3.20b)$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (3.20c)$$

$$\dot{m} = \int \rho u(y) dA = t \int_0^h \rho u(y) dy = \frac{t \rho U h}{2} \quad (6.1)$$

A equação 6.1 nada mais é que a definição de vazão mássica média. Resolvendo estas equações com os parâmetros já explicitados no início da seção e o código em Fortran do Apêndice A, pode-se chegar aos seguintes valores:

- $f''(0) = 0.463000$
- $U = 1.714148 \text{ m/s}$
- $h = 1.166760 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

O valor de  $f''(0)$  encontrado está dentro do esperado, já que, para o problema clássico de Blasius, esse valor é de 0.469600 (WHITE, 2000). Como a espessura do filme d'água deve ser pequena para o valor dado de  $\dot{m}$ , a velocidade de filme  $U$  deve ser de uma ordem de grandeza inferior a  $U_{\infty}$ , ou seja  $\frac{U}{U_{\infty}} \ll 1$ . Assim, a condição de contorno para  $f'(0)$  não deverá ser muito diferente da mesma condição para o problema de Blasius, que tem como condição de contorno  $U = 0$ , resultando em um valor de  $f''(0)$  semelhante ao da solução de Blasius.

### 6.1.2 Gradiente de pressão não nulo

Como já descrito no capítulo 3, para a resolução do escoamento do problema com gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x}$  não nulo, deve-se resolver a seguinte equação, decorrente das equações 3.17, 3.24 e

da condição  $m = \frac{1}{2}$ , já adotada no Capítulo 3:

$$\mu_{ar} U_{inv}(x_{med}) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\nu_{ar}}} \left( \frac{-2}{\rho_{ar} x_{med}} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/4} f''(0) = \mu_{agua} \left[ \frac{U}{h} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2\mu_{agua}} \right] \quad (6.2)$$

Nesta equação,  $U_{inv}$  e  $\frac{\partial p}{\partial x}$  podem ser encontrados utilizando-se as equações E.6 e E.9, representadas a seguir:

$$U_{inv}(x) = 2U_{\infty} \sqrt{1 - \frac{(\frac{4x}{c} - 2)^2}{4}} - \frac{\Gamma}{2\pi} \quad E.6$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4\rho U_{\infty}^2}{c} \left( \frac{4x}{c} - 2 \right) - \frac{\rho U_{\infty} \Gamma}{c\pi} \left( \frac{4x}{c} - 2 \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad E.9$$

Finalmente, as variáveis  $U$  e  $h$  e a constante  $f''(0)$  deverão ser encontradas resolvendo-se o sistema de equações formado pelas equações 6.2, 6.3 e 6.4, que nada mais é que a equação 3.15 para  $m = \frac{1}{2}$ :

$$\dot{m} = \int \rho_{agua} u(y) dA = t \int_0^h \rho_{agua} u(y) dy = t \rho_{agua} \left( \frac{Uh}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu_{agua}} \right) \quad (6.3)$$

$$f''' + \frac{2}{3}(1 - f'^2) + f f'' = 0 \quad (6.4)$$

Aqui,  $\dot{m}$  representa a vazão mássica do escoamento de água,  $t$  é uma dimensão na direção da envergadura do aerofólio e a equação 6.4 tem como condições de contorno:

$$f(0) = 0 \quad (6.5a)$$

$$f'(0) = \frac{U}{U_{inv}} \quad (6.5b)$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (6.5c)$$

Analogamente ao caso de gradiente de pressão nulo, resolvendo estas equações com as constantes já dadas no início da seção e o código em Fortran do Apêndice A, chega-se aos seguintes valores:

- $f''(0) = 0.885000$
- $U = 3.866298 \text{ m/s}$

- $h = 4.840000 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Da mesma maneira que no caso de gradiente de pressão nulo, o valor de  $f''(0)$  encontrado está dentro do esperado, já que esta próximo ao do problema clássico de Falkner-Skan (WHITE, 2000). Pelos mesmos argumentos já explicados no caso do problema de Blasius, a condição de contorno para  $f'(0)$  não deverá ser muito diferente da mesma condição para o problema de Falkner-Skan, resultando em um  $f''(0)$  semelhante ao desta solução.

## 6.2 Solução do problema térmico com gradiente de pressão nulo por separação de variáveis

Para a resolução do problema térmico, foi adotado como caso padrão o escoamento sobre uma região termicamente protegida, seguido por uma região desprotegida. O escoamento sobre uma região termicamente protegida já foi totalmente definido. Adotou-se os seguintes valores para o presente problema:

- Condutividade térmica da água ( $k_{agua}$ ) =  $0,571 \text{ W/mK}$
- Calor específico da água ( $cp_{agua}$ ) =  $4226 \text{ J/kgK}$
- Coeficiente de transferência de calor por convecção ( $h_{conv}$ ) =  $100 \text{ W/m}^2\text{K}$
- Temperatura de entrada da água ( $T_{ent}$ ) =  $-10 \text{ C}$
- Comprimento de aquecedor ( $x_{aq}$ ) =  $0,1 \text{ m}$
- Potência do aquecedor ( $P$ ) =  $40000 \text{ W/m}^2$
- Temperatura do ar ao longe ( $T_{\infty}$ ) =  $-10 \text{ C}$

Vale lembrar que as temperaturas utilizadas para a solução analítica são temperaturas relativas a  $T_{\infty}$ , logo, tem-se:

- Temperatura relativa de entrada da água ( $\bar{T}_{ent}$ ) =  $T_{ent} - T_{\infty} = 0 \text{ C}$

Tendo definido estes parâmetros, pode-se, com as expressões obtidas no capítulo 4, encontrar a distribuição de temperaturas no filme, tanto para o caso de gradiente de pressão nulo quanto constante. Para o caso de gradiente de pressão nulo, foram encontrados na seção anterior os seguintes valores para velocidade do filme  $U$  e espessura do filme  $h$ :

- Velocidade de Filme ( $U$ ) = 1.714 m/s
- Espessura do filme ( $h$ ) =  $1.166 \cdot 10^{-3}$  m

Inicialmente, se resolverá o problema térmico do escoamento sobre a região termicamente protegida e, a seguir, se resolverá o problema térmico do escoamento sobre a região desprotegida. A segunda parte dependerá da primeira, já que sua condição de contorno para a temperatura de entrada dependerá da temperatura de saída da primeira região, ou seja,  $\bar{T}^{prot}(\bar{y})|_{\bar{x}=\bar{x}_{aq}} = \bar{T}^{desp}(\bar{y})|_{\bar{x}=\bar{x}_{aq}}$

### 6.2.1 Região termicamente protegida

Inicialmente, deve-se calcular os autovalores  $\alpha_n$  do problema, dados pela expressão 4.26, representada abaixo. Estes valores também serão utilizados na resolução do problema térmico da região desprotegida.

$$\alpha_n = -\frac{h h_{CONV}}{k} \frac{\left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]}{\left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right]} \quad (4.26)$$

Após encontrar os autovalores do problema, calculam-se os coeficientes  $A_n$  dados pela equação 4.32, ou seja:

$$A_n = \frac{\int_0^1 F(\bar{y}) \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y}}{\int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right)^2 \bar{y} d\bar{y}} = \frac{F}{G} \quad (4.32)$$

na qual, para o caso de uma temperatura na posição  $\bar{x} = 0$  constante, corresponde a:

$$F = \frac{h h_{CONV}}{k} \left( -\bar{T}_{ent} + \frac{\dot{q}}{h} + \frac{h\dot{q}}{k} \right) \frac{\text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}}}{\alpha_n^3} + \frac{h\dot{q}}{k\alpha_n^3} \left[ \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{h h_{CONV}}{k} + 1 \right) \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (4.33)$$

$$G = \frac{1}{9\alpha_n^2} [3\alpha_n^2 \text{Ai}(\alpha_n)^2 - 3\alpha_n \text{Ai}'(\alpha_n)^2 + 3\text{Ai}(\alpha_n) \text{Ai}'(\alpha_n)] + \frac{1}{9\alpha_n^2} [\alpha_n^2 \text{Bi}(\alpha_n)^2 - \alpha_n \text{Bi}'(\alpha_n)^2 + \text{Bi}(\alpha_n) \text{Bi}'(\alpha_n)] + \frac{0.19245}{\alpha_n^2} [\text{Ai}(\alpha_n) [2\alpha_n^2 \text{Bi}(\alpha_n) + \text{Bi}'(\alpha_n)] + \text{Ai}'(\alpha_n) [\text{Bi}(\alpha_n) - 2\alpha_n \text{Bi}'(\alpha_n)]] \quad (4.34)$$

Finalmente, a distribuição de temperaturas  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$  poderá ser obtida a partir da expressão 4.27, dada por:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (4.27)$$

No Apêndice B encontra-se o código em Fortran utilizado para a obtenção dos resultados desta seção, além de alguns resultados adicionais, como autovalores e coeficientes. A Figura 6.1 mostra a distribuição de temperaturas para os parâmetros explicitados no início da seção. Nota-se em esta figura um aquecimento rápido da camada inferior do filme d'água, tendo aumentado sua temperatura, em essa região, em mais de 20° C após um trecho aquecido de apenas 10cm. A Figura 6.2 representa de modo mais claro esta temperatura após o aquecedor. Note que a maior mudança se dá na proximidade da parede ( $\bar{y} = 0$ ). Por esse motivo, deve-se tomar alguns cuidados na obtenção da distribuição de temperaturas na região desprotegida. Ao especificar uma condição de contorno em  $\bar{y} = 0$  envolvendo uma temperatura, se esse valor for diferente da temperatura na parede no final do aquecedor, haverá uma descontinuidade na distribuição. Esta descontinuidade não seria tão crítica se não fosse pelos valores envolvidos e o formato da distribuição após o aquecedor (Figura 6.2). Se a função dada por  $T_{ENT} - \frac{q}{h} - \frac{h_{CONV}q}{k}(1 - \bar{y})$  for representada como uma série de funções cujo valor em  $\bar{y} = 0$  é nulo (consequência da condição de contorno envolvendo uma temperatura) o resultado não terá nenhum significado físico, pois, desta maneira, se está praticamente desprezando os cálculos feitos anteriormente para a região protegida. Adicionalmente, esta condição de contorno envolvendo temperaturas pode ser substituída por outra que não traz este efeito colateral sem maiores complicações. Por este motivo, optou-se por utilizar uma condição de contorno envolvendo um fluxo de calor especificado na parede metálica. Desta maneira, a continuidade na distribuição de temperaturas estará garantida. Este fluxo de calor utilizado deve ser relativamente alto, devido à alta condutividade térmica do material do aerofólio. Assim, dois casos distintos foram analisados, um com valor negativo de fluxo de calor e outro com um fluxo de calor nulo, correspondente ao fluxo mínimo (parede adiabática) que pode ocorrer em uma situação de resfriamento.

### 6.2.2 Região desprotegida

Para o cálculo da distribuição de temperaturas na região desprotegida, foram utilizados os seguintes parâmetros:

- Comprimento da região desprotegida ( $x_{desp}$ ) = 0,1 m

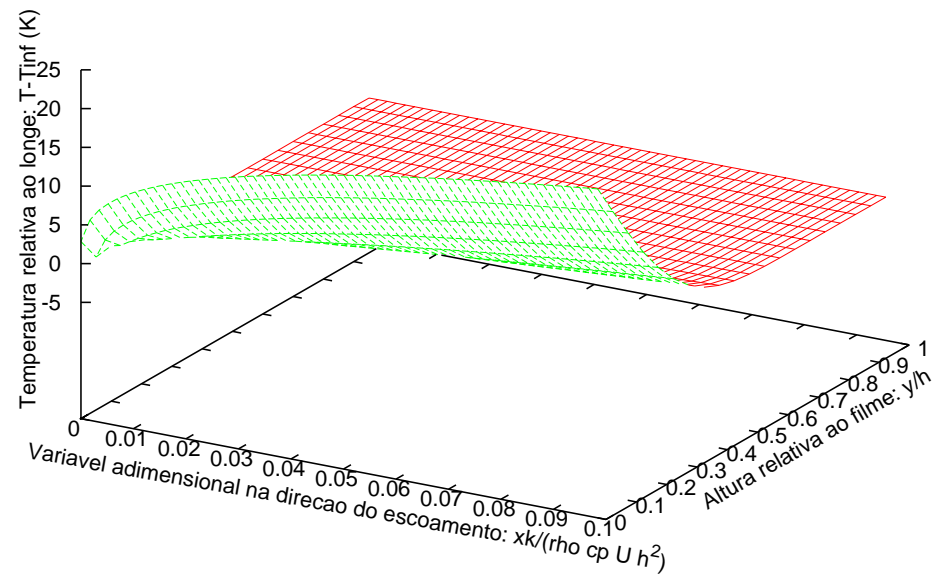


Figura 6.1: Distribuição de temperaturas em filme escoando sobre aquecedor de 40kW

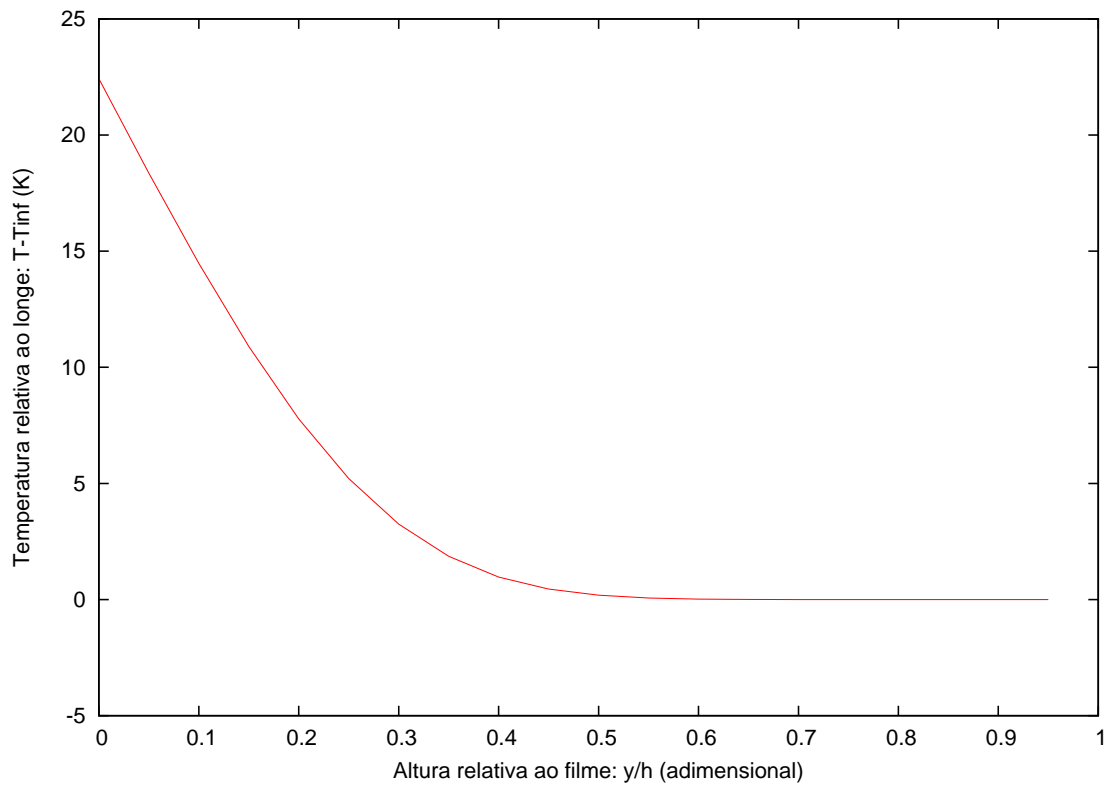


Figura 6.2: Temperatura do filme após 10cm de aquecimento

- Fluxo de calor na região desprotegida ( $\dot{q}$ ) = -100000 W

Utilizando as mesmas fórmulas utilizadas na seção referente ao escoamento sobre o aquecedor, pode-se chegar aos resultados representados nas figuras 6.3 e 6.4. Observa-se que, mesmo no caso adiabático (Fig 6.3), o filme é resfriado muito rapidamente, retornando a uma temperatura próxima à temperatura anterior ao aquecimento em poucos centímetros. Pode-se concluir, então, que não é desejável um fluxo de água residual posterior à região termicamente protegida, pois esta água congelaria logo ao sair dessa região. No caso de fluxo de calor não nulo (Fig 6.4), este resfriamento se dá de forma ainda mais rápida, chegando à temperatura anterior ao aquecimento em pouco mais de 1cm.

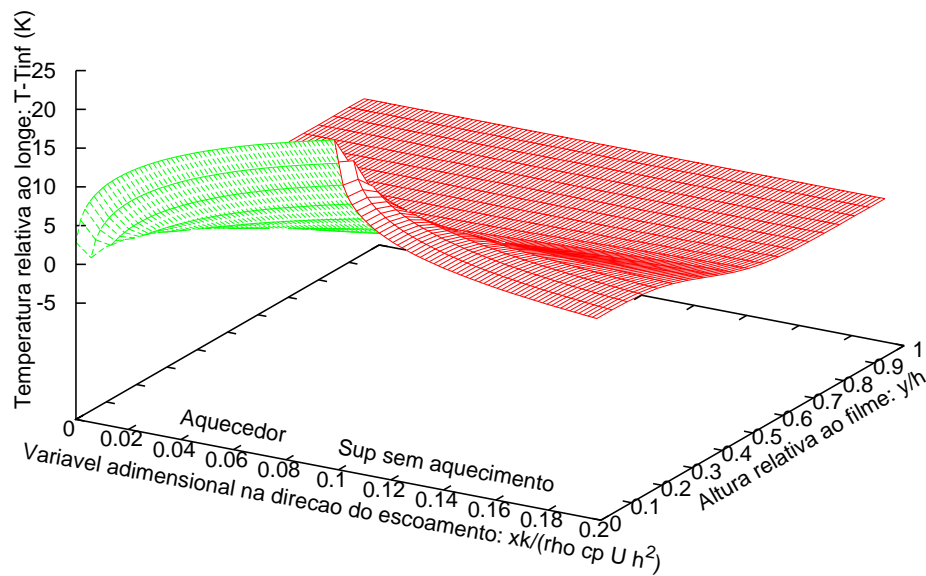


Figura 6.3: Temperatura do filme sobre aquecedor e trecho adiabático

### 6.3 Resultados analíticos

Usando a distribuição de temperaturas representada pela equação 4.27, pode-se tentar chegar em simplificações para esta expressão. Sabe-se que os valores de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $h_{CONV}$ ,  $h$  e  $k$  serão sempre positivos. O valor de  $\dot{q}$  será positivo para uma situação de aquecimento e negativo para resfriamento do filme. A função  $Ai(\alpha_n \bar{y}) + \frac{Bi(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}}$  deve ser limitada para ser possível a expansão em séries feita neste trabalho. Assim,  $\alpha_n$  admitirá somente valores negativos, pois  $\bar{y}$  é sempre positivo (Ver Apêndice B).

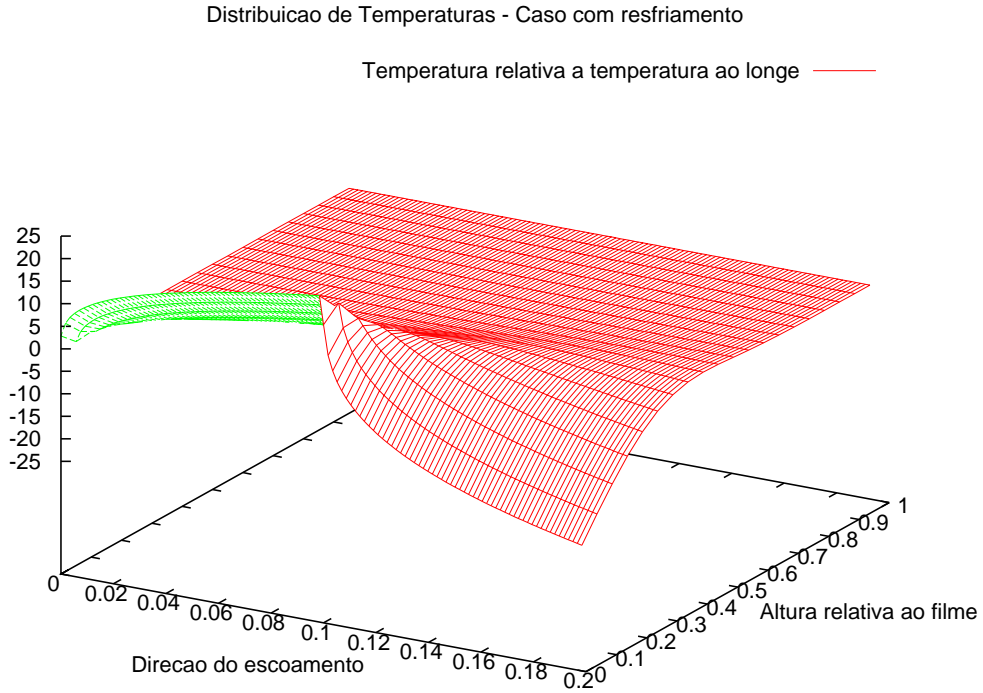


Figura 6.4: Temperatura do filme sobre aquecedor e trecho com fluxo de calor de  $-100\text{kW}$

Como a expressão  $A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]$  é limitada, pode-se fazer a expressão  $A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]$  arbitrariamente pequena, utilizando um  $e^{\alpha_n^3 \bar{x}}$  adequado. Como o módulo de  $A_n$  diminui com o aumento de  $n$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \left| A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \right| &\leq \left| A_1 e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \max \left( \text{Ai}(\alpha_1 \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_1 \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \right| = \\ &= \left| A_1 e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) \right| \leq \left| A_1 e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) \right| \end{aligned} \quad (6.6)$$

Logo, pode-se concluir que, para  $\bar{x}$  suficientemente grande,  $\bar{T}(\bar{y}) \approx \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$ . Adicionalmente, para o caso de aquecimento do filme, espera-se que a temperatura do filme aumente com o aumento de  $\bar{x}$ , de maneira que o valor de  $\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$  corresponde à distribuição temperatura máxima possível no filme. Desta constatação, conclui-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \leq 0$ . Conclui-se também, por inspeção, que  $A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \leq 0$  para o caso de um aquecimento. Como o valor de  $e^{\alpha_n^3 \bar{x}}$  é sempre positivo, tem-se, então, que:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] =$$



$$= \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (6.7)$$

No entanto, por definição,  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] = T_{ENT} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$ . Logo:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) &\geq \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) + e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \left[ T_{ENT} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \right] = \\ &= \left[ \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \right] \left[ 1 - e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \right] + e^{\alpha_1^3 \bar{x}} T_{ENT} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Desta maneira, chega-se a uma expressão limitante para  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$\left[ \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \right] \left[ 1 - e^{\alpha_1^3 \bar{x}} \right] + e^{\alpha_1^3 \bar{x}} T_{ENT} \leq \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y}) \quad (6.9)$$

Para os parâmetros utilizados neste trabalho, a desigualdade acima não é de grande utilidade. A Figura 6.5 mostra as curvas de temperatura para  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{y} = 0.5$  e  $\bar{y} = 1$  até sua estabilização no valor de  $\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$ . Note que, no caso abordado no presente problema, o tamanho do aquecedor corresponde a um valor de temperaturas intermediário, distante de ambos os limites dados por 6.9. No entanto, esta desigualdade pode ser bastante útil nos casos mais extremos. Por exemplo, no caso de uma velocidade de filme menor ou aquecedor maior, o limite superior dado pela equação 6.9 pode ser usado para cálculos estimados. O mesmo acontece com o limite inferior em escoamentos ainda mais rápidos com aquecedores ainda menores.

Utilizando a segunda desigualdade de 6.9, conclui-se que:

$$\dot{q} \geq \frac{\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})}{\frac{1}{h_{CONV}} + \frac{h}{k}(1 - \bar{y})} \geq \frac{\bar{T}(\bar{y})}{\frac{1}{h_{CONV}} + \frac{h}{k}} \quad (6.10)$$

Desta maneira, se se deseja alcançar uma temperatura fixa no filme, por exemplo  $T_{EVAP}$ , tem-se que a potência necessária mínima será de:

$$\dot{q}_{MIN} = \frac{\bar{T}_{EVAP}}{\frac{1}{h_{CONV}} + \frac{h}{k}} \quad (6.11)$$

Note que este resultado não depende do tamanho do aquecedor, pois a temperatura em questão se trata da máxima temperatura possível no problema. Também vale ressaltar que uma potência no aquecedor maior que  $\dot{q}_{MIN}$  não garantirá  $\bar{T}_{EVAP}$ , pois a temperatura dependerá

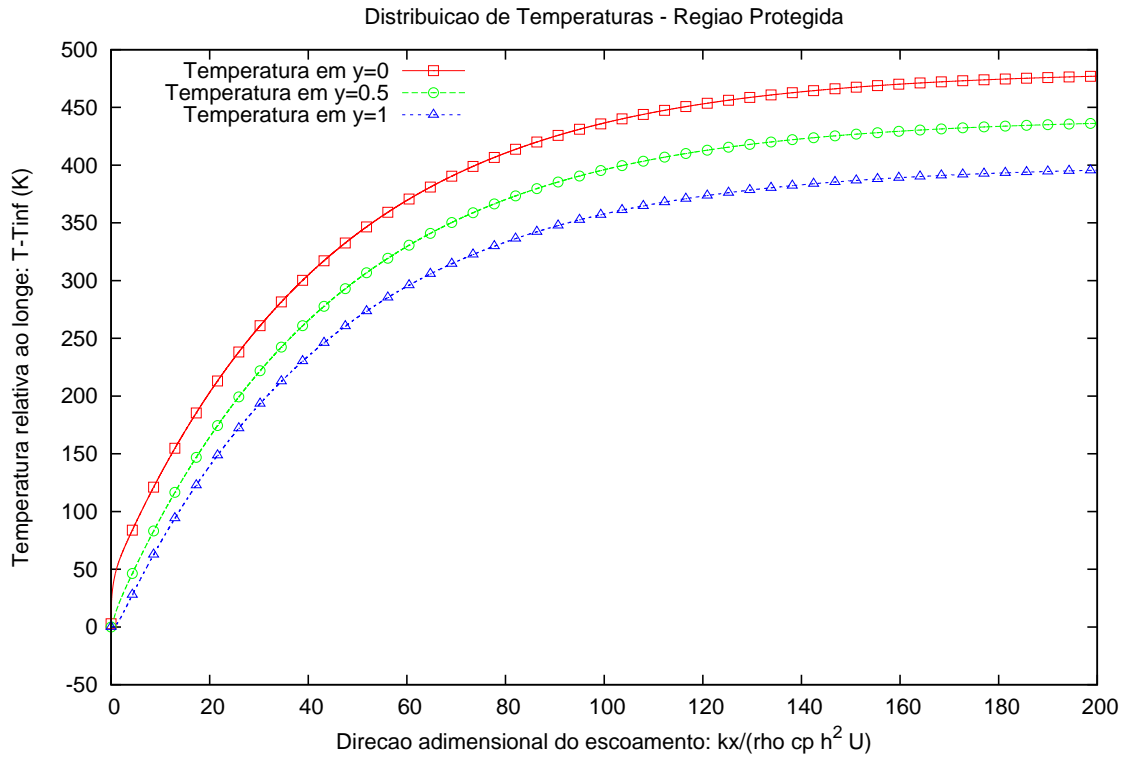


Figura 6.5: Temperatura do filme para  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{y} = 0.5$  e  $\bar{y} = 1$

dos outros parâmetros do problema. No entanto, uma potência por unidade de área menor que  $\dot{q}_{MIN}$  garantirá que  $\bar{T}_{EVAP}$  não será alcançada, independentemente de outras variáveis importantes do problema, como o comprimento do aquecedor. Para o problema aqui estudado, tem-se que, para uma temperatura  $\bar{T}_{EVAP} = 110^\circ C$  (note que aqui também se usa uma temperatura relativa ao escoamento ao longe):

$$\dot{q} \geq 9133.6618 W/m^2 \quad (6.12)$$

Isto significa que, com um aquecedor com potência menor que  $9133.6618 W/m^2$ , independentemente de seu tamanho, a temperatura de  $110^\circ C$  não será atingida de maneira alguma.

A Figura 6.5 pode ser generalizada usando as variáveis adimensionais  $\bar{x}$  e  $T^*$ , dada por:

$$T^* = \frac{\bar{T}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})} \quad (6.13)$$

Desta maneira obtém-se 3 curvas de temperaturas referentes a posições diferentes no filme ( $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{y} = 0.5$ , e  $\bar{y} = 1$ ), representadas na Figura 6.6. Soluções generalizadas desta maneira valerão para quaisquer valores de  $\dot{q}$  e  $U$ . Para variações de  $h$  e outros parâmetros do problema, haverá outras curvas similares a estas representando as novas distribuições de temperatura.

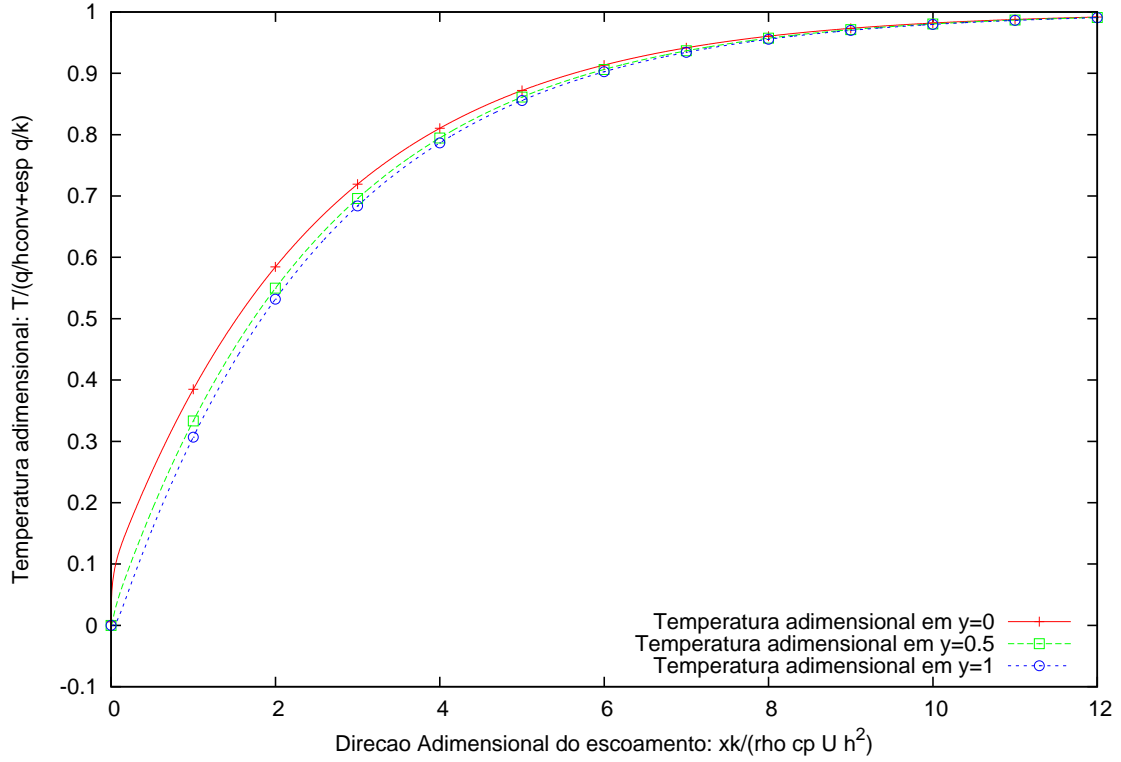


Figura 6.6: Temperatura adimensional do filme para  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{y} = 0.5$  e  $\bar{y} = 1$  em função da posição

A Figura 6.6 pode ser ainda mais generalizada ao se escolher adequadamente as variáveis utilizadas. Utilizando a variável adimensional  $\bar{x}$  e uma nova variável dada por  $\frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}}$ , pode-se traçar curvas gerais para o problema em  $\bar{y} = 0$  com algumas restrições para  $\bar{T}_{ENT}$ . Usando a distribuição de temperaturas encontrada (Eq 4.27), tem-se que, para  $\bar{y} = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} &= \frac{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right]}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} = \\ &= 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right]}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Usando a definição de  $A_n$ , dada pela equação 4.32, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 F(\bar{y}) \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y}}{\int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right)^2 \bar{y} d\bar{y}} e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right]}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} \quad (6.15)$$

Para valores constantes de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ , tem-se que  $\beta_n = \frac{e^{\alpha_n^3 \bar{x}} \left[ \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right]}{\int_0^1 \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right)^2 \bar{y} d\bar{y}}$  será constante.

Logo:

$$\frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_0^1 F(\bar{y}) \left( \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right) \bar{y} d\bar{y}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} \quad (6.16)$$

Como já calculado no cap 4, tem-se que a integral presente no numerador corresponde a:

$$\begin{aligned} & \frac{h h_{CONV}}{k} \left( -\bar{T}_{ent} + \frac{\dot{q}}{h} + \frac{h\dot{q}}{k} \right) \frac{\text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}}}{\alpha_n^3} + \\ & \frac{h\dot{q}}{k\alpha_n^3} \left[ \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{h h_{CONV}}{k} + 1 \right) \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

que, substituída em 6.16, resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} &= 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{h h_{CONV}}{k} \left( -\bar{T}_{ent} + \frac{\dot{q}}{h} + \frac{h\dot{q}}{k} \right) \frac{\text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}}}{\alpha_n^3}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} + \\ &+ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h\dot{q}}{k\alpha_n^3} \left[ \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{h h_{CONV}}{k} + 1 \right) \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right]}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{h h_{CONV}}{k} \frac{\text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}}}{\alpha_n^3} + \\ &+ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \left[ \left( \text{Ai}(0) + \frac{\text{Bi}(0)}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{h h_{CONV}}{k} + 1 \right) \left( \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n)}{\sqrt{3}} \right) \right]}{\frac{k}{h h_{CONV}} + 1 - \frac{k\bar{T}_{ENT}}{h\dot{q}}} \end{aligned}$$

Como  $\alpha_n$  é função somente de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ , tem se que, para  $\bar{T}_{ENT} = 0$ ,  $\frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}}$  será também função somente de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ . Desta maneira, pode-se adimensionalizar as temperaturas para valores fixos de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$ . Na figura 6.7 estão representadas as curvas de temperatura adimensional para  $T_{ENT} = 0$  calculadas para valores de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$  iguais a 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1, 10 e 100. Para valores de  $\bar{T}_{ENT} \neq 0$ , está aproximação valerá desde que  $\frac{k}{h h_{CONV}} + 1 - \frac{k\bar{T}_{ENT}}{h\dot{q}} \simeq \frac{k}{h h_{CONV}} + 1$ , ou seja, para  $\bar{T}_{ENT} \ll \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}$ .

## 6.4 Solução semi-analítica - Método de Galerkin

Utilizando os mesmos parâmetros da seção anterior e as equações definidas no Cap 5, pode-se encontrar a distribuição de temperaturas representada na Fig 6.8. Nesta figura está representada a diferença entre a temperatura obtida pelo método de Galerkin e a pela solução

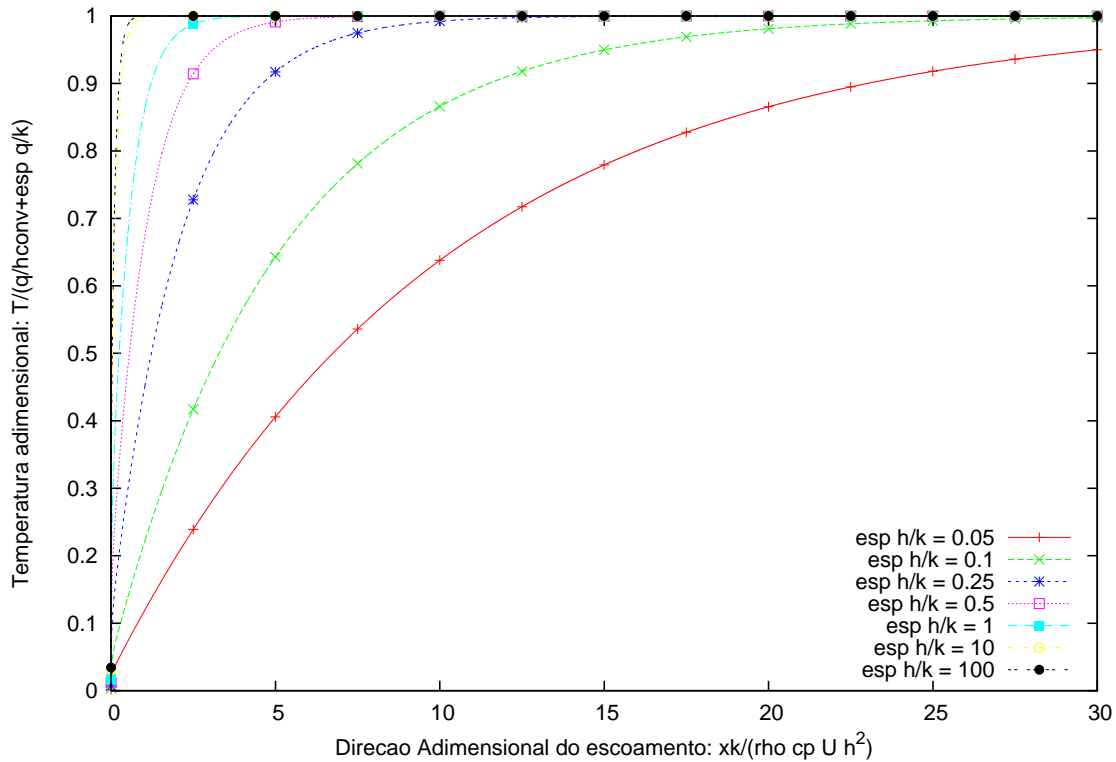


Figura 6.7: Temperaturas adimensionais em  $\bar{y} = 0$  para valores de  $\frac{h h_{CONV}}{k}$  selecionados

analítica do problema. Nota-se na figura em questão que as soluções trazem resultados muito semelhantes. No caso do método de Galerkin, foram computados somente 6 autovalores, o que indica que este método tem uma rápida convergência. Logo, apesar do método de Galerkin exigir a resolução de um sistema linear com  $n$  equações, - onde  $n$  é o número de autovalores calculados - , este método se mostrou bastante eficiente. O sistema linear pôde ser rapidamente resolvido devido à simetria das matrizes envolvidas. No caso, foi utilizado o método de transformações de Householder (PRESS et al., 2007), que tridiagonaliza uma matriz simétrica em um número reduzido de operações e, a seguir, foi utilizado um método de resolução de sistemas tridiagonais.

**Comentários sobre o erro relativo** : Na Figura 6.8 não foi representado o erro relativo entre as duas temperaturas. O motivo desta omissão foi a falta de relação entre este desvio e a qualidade da expansão em séries utilizada. Note que a expansão em séries, tanto no caso da separação de variáveis quanto no caso do método de Galerkin, foi feita em relação à função  $F(\bar{y}) = T_{ENT} - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$ . Portanto, o cálculo do desvio deve ser feito com relação à função  $\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} - \frac{h\dot{q}}{k}(1 - \bar{y})$ . Este desvio está representado na Figura 6.9, propositalmente separada dos demais gráficos desta seção, por não possuir um significado físico tão grande quanto as demais figuras aqui expostas.

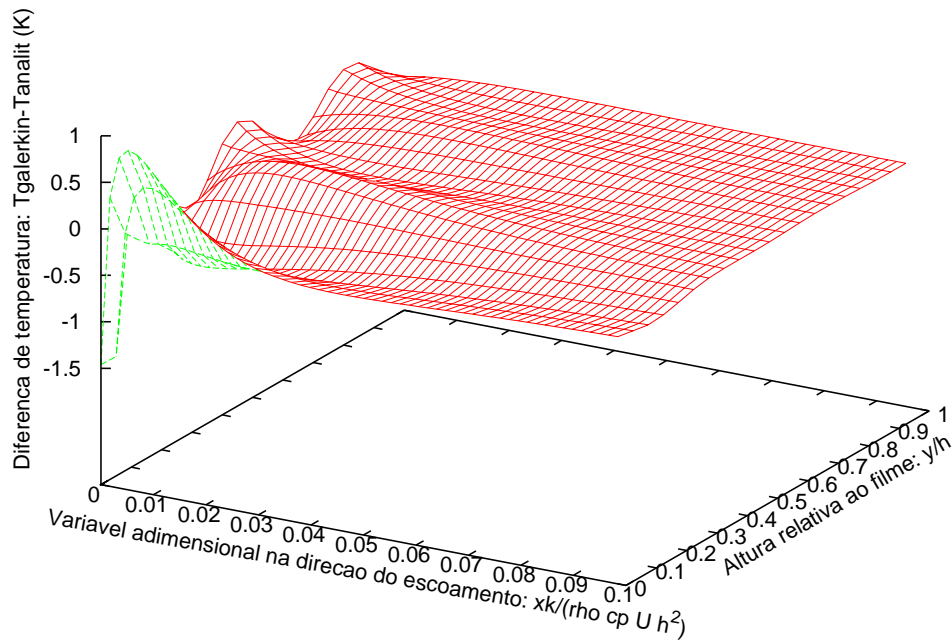


Figura 6.8: Diferença de temperatura entre solução analítica e via Galerkin - 6 autovalores

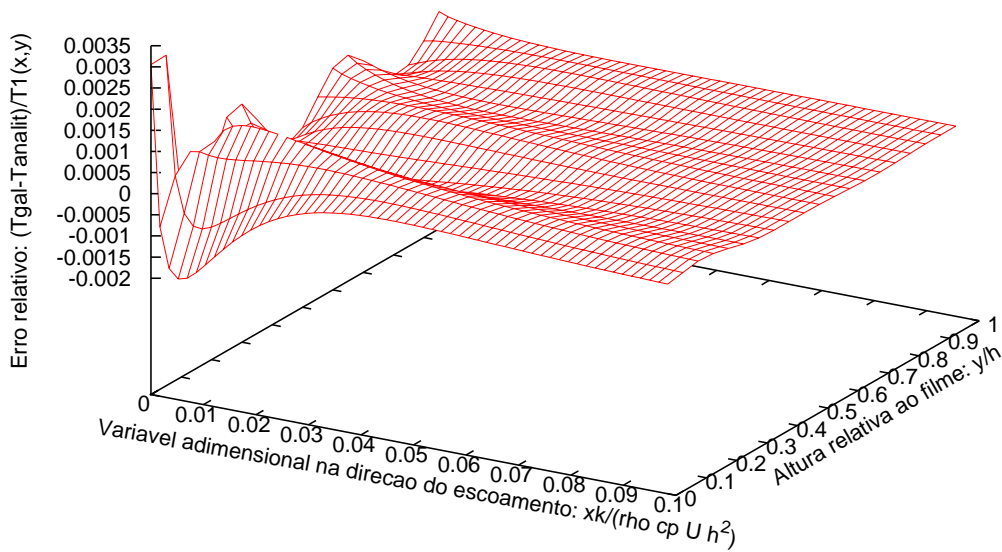


Figura 6.9: Diferença de temperatura entre solução analítica e via Galerkin - erro relativo

## 7 Conclusões e recomendações para trabalhos futuros

### 7.1 Conclusões

Inicialmente, foi resolvido numericamente o problema do escoamento isotérmico de um filme sobre um aerofólio usando soluções semelhantes às de Blasius e Falkner-Skan para camada limite. Desta maneira, foram obtidos perfis de velocidades para filmes com e sem variação de pressão na direção do escoamento. Usando a velocidade máxima do filme  $U$  e a espessura do filme  $h$  obtida com esta solução, pôde-se prosseguir com a resolução do problema térmico: a obtenção da distribuição de temperaturas em um filme d'água escoando sobre uma superfície termicamente protegida, seguida por uma superfície desprotegida. O termo de transferência de calor por condução na direção do escoamento foi desprezado; desta maneira, a equação resultante pôde ser resolvida por separação de variáveis. Usando este método, foi possível obter uma solução analítica para o problema proposto.

A existência de uma expressão explícita para a distribuição de temperaturas se mostrou muito útil, pois, devido à simplicidade da solução, o tempo e esforço computacional utilizado para obtenção dos resultados é bastante baixo. Adicionalmente, foi possível a obtenção de uma família de curvas invariantes em parâmetros específicos. Para determinadas temperaturas de entrada  $\bar{T}_{ENT}$ , a temperatura adimensional  $\frac{\bar{T} - \bar{T}_{ENT}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k} - \bar{T}_{ENT}}$  pode ser aproximada pela variável dada por  $\frac{\bar{T}}{\frac{\dot{q}}{h_{CONV}} + \frac{h\dot{q}}{k}}$ , que é função somente da coordenada adimensional  $\frac{xk}{\rho c_p U h^2}$  e de  $\frac{hh_{CONV}}{k}$ . Desta maneira, foi possível a obtenção de curvas de temperatura adimensional para valores de  $\frac{hh_{CONV}}{k}$  fixos.

O problema também foi resolvido usando o método de Galerkin. Este método não foi tão profundamente discutido no presente trabalho quanto o método da separação de variáveis, no entanto, este método acabou também trazendo resultados precisos com bastante simplicidade na sua resolução. Apesar da solução pelo método de Galerkin não gerar resultados explícitos, como no método da separação de variáveis, os resultados semi-analíticos gerados por ele são bastante precisos. Adicionalmente, a obtenção de resultados é consideravelmente mais rápida

que em métodos puramente numéricos. Assim, este método, apesar de pouco utilizado na engenharia, se mostrou uma ótima alternativa às soluções numéricas e analíticas de equações diferenciais.

Vale ressaltar que nem todas as equações podem ser resolvidas pelo método da separação de variáveis. Já pelo método de Galerkin, não existem tantas restrições quanto a isso. Logo, este não deve ser excluído como candidato a método de resolução, pois ele também explicita informações relevantes do problema, além de resultar em soluções bastante simples. Note que os parâmetros de adimensionalização utilizados para a obtenção da Figura 6.7 também aparecem na solução obtida do método de Galerkin; desta maneira, a adimensionalização também teria sido possível mesmo que as variáveis do problema não fossem separáveis.

Neste trabalho não foram apresentadas comparações dos resultados gerados com outros presentes na literatura. Isto se deve à falta de resultados experimentais e numéricos que levem em consideração os mesmos efeitos que o presente trabalho. Por exemplo, a incidência de gotículas no filme foi desprezada, implicando em diferenças substanciais entre os resultados aqui obtido e resultados de outros trabalhos sobre o mesmo tema. Logo, estas comparações não seriam totalmente adequadas.

## 7.2 **Recomendações para trabalhos futuros**

Recomenda-se que, em novos trabalhos sobre transferência de calor em filmes, sejam considerados os seguintes tópicos:

- Inclusão de novos efeitos físicos, tais quais como incidência de gotículas d'água e transferência de calor devido à evaporação da água;
- Resolução do problema tridimensional, já equacionado no Apêndice J;
- Obtenção de resultados e estudo de possíveis adimensionalizações do problema com gradiente de pressão não nulo, cuja solução já foi encontrada no capítulo 4;
- Discussão do problema dissipativo, cuja solução também já foi obtida e encontra-se no Apêndice G.



# Apêndice A – Código em Fortran para avaliação da velocidade de filme $U$

## A.1 Gradiente de pressão nulo

```

program BlasiusVF
implicit none

real*8 U, corda, t, pi, gamma, muar, rhoar, nuar
real*8 muagua, vazao, Uinf, xmed, Uinv, gradp, a, b
real*8 c, aux1, aux2, aux3, h, f3, f2, f1, f, f1velho
real*8 passo, x, f20, rhoagua, p, q, r, funcao, passoh
integer n, m

open(1,file='BlasiusVF.dat',status='unknown')

pi = 3.14159265

!PROPRIEDADES A 5C(AGUA) E -10(AR), ESCOAMENTO E GEOMETRIA!

corda = 1.0
t = 1.0
gamma = 0.0
muar = 1.6167/100000.0
rhoar = 28.97/22.4
rhoagua = 1000.0
nuar = muar/rhoar
muagua = 1.519/1000.0
vazao = 1.0
Uinf = 100.0

!ESCOLHER XMED DIFERENTE DE corda/2!

xmed = 0.45

```

```
h = 0.001167
```

```
passoh = -0.00000001
```

```
LOOP3 : DO
```

```
h = h + passoh
```

```
!CALCULA U USANDO CONSERVACAO DE MASSA (DADO UM h)!
```

```
U = 2*vazao/(t*rhoagua*h)
```

```
write(0,*) U, h
```

```
f20 = 0.0
```

```
passo = 0.001
```

```
n = 0
```

```
LOOP2 : DO
```

```
x = 0.0
```

```
f = 0.0
```

```
f1 = U/Uinf
```

```
f2 = f20 + n*passo
```

```
f3 = -f*f2
```

```
f1velho = 1.0
```

```
LOOP1 : DO
```

```
f3 = -f*f2
```

```
f2 = f2 + f3*passo
```

```
f1 = f1 + f2*passo
```

```
f = f + f1*passo
```

```
x = x + passo
```

```
IF (abs(x-10) .le. 0.00001) EXIT LOOP1 f1velho = f1
```

```
END DO LOOP1
```

```
IF (abs(f1-1.0) .le. 0.01) EXIT LOOP2
```

```
n = n + 1
```

```
END DO LOOP2
```

```
funcao = muar*Uinf*(f20+n*passo)*(Uinf/(2.0*nuar*xmed))**0.5-muagua*U/h
```

```
write(0,*) f, f1, f2, f3,n, f20+n*passo, funcao
```

```
! IF (abs(funcao) .le. 0.0001) EXIT LOOP3
```

```
END DO LOOP3
```

end

## A.2 Gradiente de pressão não nulo e constante

```

program FalknerSkanVf
implicit none

real*8 U, corda, t, pi, gamma, muar, rhoar, nuar
real*8 muagua, vazao, Uinf, xmed, Uinv, gradp, a, b
real*8 c, aux1, aux2, aux3, h, f3, f2, f1, f, f1velho
real*8 passo, x, f20, rhoagua, p, q, r, funcao, passoh
integer n, m

open(1,file='FalknerSkanVF.dat',status='unknown')

pi = 3.14159265

!PROPRIEDADES A 5C(AGUA) E -10(AR), ESCOAMENTO E GEOMETRIA!

corda = 1.0
t = 1.0
gamma = 0.0
muar = 1.6167/100000.0
rhoar = 28.97/22.4
rhoagua = 1000.0
nuar = muar/rhoar
muagua = 1.519/1000.0
vazao = 1.0
Uinf = 100.0

!ESCOLHER XMED DIFERENTE DE corda/2!

xmed = 0.45

!CALCULA Uinv E gradp USANDO ESCOAMENTO POTENCIAL!
! Uinv = 2.0*Uinf*(1.0-(2.0*xmed/corda-1.0)**2)**0.5-gamma/(2.0*pi)
! gradp = 4.0*rhoar*Uinf**2/corda*(4.0*xmed/corda-2.0)-rhoar*Uinf*
  gamma/(corda*pi)*(4.0*xmed/corda-2.0)*(1.0-xmed**2/4.0)**(-0.5)

Uinv = 2.0*Uinf*(1.0-(2.0*xmed/corda-1.0)**2)**0.5
gradp = 4.0*rhoar*Uinf**2/corda*(4.0*xmed/corda-2.0)

```

```

!CHUTE INICIAL!

! U = 0.2

! !CALCULA h USANDO CONSERVACAO DE MASSA (DADO UM U)!

!

! a = vazao

! b = t*rhoagua*U/2.0

! c = t*rhoagua*gradp/(12.0*muagua)

! aux1 = (2.0/3.0)**(1.0/3.0)*b

! aux2 = ((3.0)**0.5*(27*a**2*c**4-4*b**3*c**3)**0.5-9*a*c**2)**(1.0/3.0)

! aux3 = 2**(1.0/3.0)*3**(2.0/3.0)*c

! h = aux1/aux2 + aux2/aux3

    h = 0.0003
    passoh = -0.000001

    LOOP3 : DO
        h = h + passoh

!CALCULA U USANDO CONSERVACAO DE MASSA (DADO UM h)!

    U = 2*vazao/(t*rhoagua*h)+gradp*h**3/(6.0*muagua*h)

    write(0,*) U, h

    f20 = 0.0
    passo = 0.001
    n = 0

    LOOP2 : DO
        x = 0.0
        f = 0.0

        f1 = U/Uinv
        f2 = f20 + n*passo
        f3 = -f*f2 - (2.0/3.0)*(1.0-f1**2)
        f1velho = 1.0

    LOOP1 : DO
        f3 = -f*f2 - (2.0/3.0)*(1.0-f1**2)

```

```
f2 = f2 + f3*passo
f1 = f1 + f2*passo
f = f + f1*passo
x = x + passo
IF (abs(x-10) .le. 0.00001) EXIT LOOP1
f1velho = f1

END DO LOOP1

IF (abs(f1-1.0) .le. 0.01) EXIT LOOP2
n = n + 1

END DO LOOP2

funcao = muar*Uinv*0.5*(3.0/nuar)**0.5*(-2.0*gradp/(rhoar*xmed))**0.25
*(f20+n*passo)-muagua*(U/h+gradp*h/(2.0*muagua))
write(0,*) f, f1, f2, f3,n, f20+n*passo, funcao, m

! IF (abs(funcao) .le. 0.0001) EXIT LOOP3

END DO LOOP3

end
```

# Apêndice B – Código em Fortran para avaliação da distribuição de temperaturas e resultados adicionais-Gradiente de pressão nulo

## B.1 Código Fonte

```

program Tinicial
implicit none

      real*8 x, h, k, y, F, T0, q, Tent, T, T1, T2
integer nautovalores, cont, tipo, n
real*8 alfa(1000), a(1000), passoy,Teste
real*8 passox, rho, cp, U, esp, Tinf
real*8 Airy, Bairy, xaux, alfavelho(1000)
real*8 avelho(1000), xvelho, xmax1, xmax2
real*8 xmax3, xmax4, bla, Airy1, Bairy1
real*8 qantes, soma, Tentbarra, aux

      open(1,file='Separacaoairysoprot.dat',status='unknown')
open(2,file='Separacaoairysoprotauto.dat',status='unknown')
open(3,file='Separacaoairysoprot2.dat',status='unknown')
open(4,file='Separacaoairysoprot3.dat',status='unknown')

      call propriedades(k,rho,cp,U,esp,Tinf,navtovalores,passoy,passox,Tent)
alfa = 0
alfavelho = 0
xmax1 = 0.1

```

```

xmax2 = 0.1
xmax1 = xmax1*k/(rho*cp*esp**2*U)
xmax2 = xmax2*k/(rho*cp*esp**2*U)
Tentbarra = Tent - Tinf
T0 = 10.0

    x = 0.0
xaux = x
q = 40000.0
h = 100.0
call autovalores(h,k,alfa,nautovalores,esp,tipo)

    call calculaan(h,q,k,Tentbarra,alfa,nautovalores,a,
.T0,esp,tipo)

    x = 0.0
xvelho = 0.0
y = 0.0
loop1: do
if (x .gt. xmax1) then
go to 100
end if
T = T1(x,y,nautovalores,passox,a,alfa) +
.T2(y,k,h,q,T0,passox,esp)
write(1,*) x*rho*cp*esp**2*U/k,y,T
x = x + passox
end do loop1
100 continue

    x = 0.0
xvelho = 0.0
loop11: do
if (x .gt. xmax1) then
go to 1001
end if

```







```

subroutine propiedades(k,rho,cp,U,esp,Tinf,
.nautovalores,passoy,passox,Tent)
implicit none
real*8 k, rho, cp, U, esp, Tinf,passoy,passox,Tent
integer nautovalores

```

```

k = 0.571
rho = 1000.0
cp = 4226.0
U = 1.714148
esp = 0.00116676
Tinf = -10.0
nautovalores = 40
passoy = 0.25
passox = 0.0005
Tent = -10.0
return
end

```

```

!_____
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Calcula an C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

subroutine calculaan(h,q,k,Tentbarra,alfa,nautovalores,
.a,T0,esp,tipo)
implicit none

```

```

integer n, nautovalores, tipo
real*8 x, h, k, q, Tentbarra, alfa(1000), a(1000), beta
real*8 a1(1000), norma(1000), Bairy, Airy, Bairy1, Airy1
real*8 T0, numero, esp, gama

```



```

subroutine recalculaan(x,avelho,alfa,
.nautovalores,a,xvelho,qantes,h,k,q,esp)
implicit none

integer n, nautovalores, tipo, m, n2
real*8 x, Tent, alfa(1000), a(1000), qantes
real*8 a1(1000), norma(1000), Bairy, Airy, Bairy1, Airy1
real*8 avelho(1000), int1, int2, esp, zero
real*8 int3, int4, xvelho, b, d, xaux,bla,numero,q
real*8 h, k, int5, int6, beta, gama, int7

beta = (qantes-q)/h+esp*(qantes-q)/k
gama = esp*(q-qantes)/k

! write(*,*) 'beta', beta
! write(*,*) 'gama', gama

zero = 0.0
a1 = 0.0
a = 0.0

do n=1,nautovalores
b = alfa(n)
norma(n) = (1.0/(9.0*b**2))*(3*b**2*Airy(b)**2-3*b*Airy1(b)
.**2+3*Airy(b)*Airy1(b))+(1.0/(9.0*b**2))*(b**2*Bairy(b)
.**2-b*Bairy1(b)**2+Bairy(b)*Bairy1(b))+(0.19245/(b**2))*
.(Airy(b)*(2*b**2*Bairy(b)+Bairy1(b))+Airy1(b)*(Bairy(b)-
.2*b*Bairy1(b)))

! do m=1,nautovalores
! d = alfa(m)
! if ((n-m) .ne. 0) then
! int1 = (b*Airy(d)*Airy1(b)-d*Airy1(d)*Airy(b))
! int2 = (b*Bairy(d)*Bairy1(b)-d*Bairy1(d)*Bairy(b))

```

```

! int3 = (b*Airy(d)*Bairy1(b)-d*Airy1(d)*Bairy(b)-2*(b+d)*
! .0.15915494309)/sqrt(3.0)
! int4 = (b*Airy1(b)*Bairy(d)-d*Airy(b)*Bairy1(d))/sqrt(3.0)
! a1(n) = a1(n)+avelho(m)*exp(d**3*xvelho)*(int1+int2+int3+
! .int4)/(b**3-d**3)
! end if
! write(*,*) n,m,int1,int2,int3,int4,(int1+int2+int3+int4
! .),a1(n)
! end do
! a1(n) = a1(n) + (gama/b**3)*(0.71005610777-(h/k+1)*(Airy(b)+
! .Bairy(b)/sqrt(3.0)))+(h/(k*b**3))*(-beta)*(Airy(b)+Bairy(b)/
! .sqrt(3.0))

      a1(n) = (beta/(b**2))*(Airy1(b)-Airy1(zero)+Bairy1(b)/sqrt(3.0
.)-Bairy1(zero)/sqrt(3.0))+(gama/(b**3))*(Airy(zero)+Airy1(b)*b-
.Airy(b)+Bairy(zero)/sqrt(3.0)+Bairy1(b)*b/sqrt(3.0)-Bairy(b)/
.sqrt(3.0))

      a(n) = a1(n)/norma(n)+avelho(n)*exp(b**3*xvelho)

! write(*,*) n,a1(n),a(n),norma(n)
end do

      return
end

!_____
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Calcula novos autovalores C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

      subroutine autovalores(h,k,alfa,nautovalores,esp,tipo)

```

```
implicit none
```

```
integer raiz, nautovalores, tipo, cont, i  
real*8 alpha, y, passo, yvelho, funcao, alphaini(1000)  
real*8 alphanr, alfa(1000), x, h, k, derivada, esp
```

```
tipo = 1
```

```
!C PRIMERO CHUTE DAS RAIZES C
```

```
alpha = -0.1
```

```
y = 0.0
```

```
passo = -0.0001
```

```
raiz = 0
```

```
loop1: do
```

```
    yvelho = y
```

```
    y = funcao(alpha,h,k,tipo,esp)
```

```
    if ((yvelho*y .le. 0) .AND. (sqrt(y*y) .le. 10)) then
```

```
        raiz = raiz + 1
```

```
        alphaini(raiz) = -y*passo/(y-yvelho)+alpha
```

```
        if (raiz .eq. nautovalores+2) then
```

```
            go to 100
```

```
        end if
```

```
    end if
```

```
    alpha = alpha + passo
```

```
end do loop1
```

```
!C NEWTON-RAPHSON C
```

```

    100 do cont=1,nautovalores+2
alphanr=alphaini(cont)
do i = 1,30
alphanr = alphanr -funcao(alphanr,h,k,tipo,esp)/
.derivada(alphanr,h,k,tipo,esp)
end do
alfa(cont) = alphanr
end do

    if (alfa(1)**2 .le. 0.001) then
do cont=1,nautovalores+2
alfa(cont) = alfa(cont+1)
end do
end if

    ! write(*,*) alfa

    return
end
!-----
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Equacao caracteristica dos C!
!C autovalores do problema C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

    function funcao(x,h,k,tipo,esp)
implicit none

    real*8 x, funcao, Airy, Airy1, Bairy
real*8 Bairy1, h, k, esp
integer tipo

```





```

!C Airy(x) C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

      function Airy(x)
implicit none

      real*8 x, C1, C2, k13(1000), k12(1000)
real*8 eta, somaAi, C0, C(1000), f, g, Ai
real*8 pi, Airy, gama, menosx, somaAi2
integer k, n, cont, k2

      pi = 3.14159265
n = 40

      if (sqrt(x*x) .le. 5.0) then

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASCENDING SERIES C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

      C1 = 0.355028053887817
C2 = 0.258819403792807

      k13(1) = 1.0/(3.0*2.0)
k12(1) = 2.0/(4.0*3.0*2.0)
f = 1.0 + k13(1)*x**3
g = x + k12(1)*x**4

      do k=2,n
k13(k) = k13(k-1)*(3*k-2)/((3*k)*(3*k-1)*(3*k-2))
k12(k) = k12(k-1)*(3*k-1)/((3*k+1)*(3*k)*(3*k-1))

```

```
f = f + k13(k)*x**(3*k)
g = g + k12(k)*x**(3*k+1)
end do
```

```
Airy = C1*f-C2*g
else if (x .gt. 0) then
```

```
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASYMPTOTIC EXPANSION 1 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
```

```
eta = 2.0*(x**1.5)/3.0
C0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
somaAi = C0 - C(1)*eta**(-1)
```

```
do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
somaAi = somaAi + (-1)**k*C(k)*eta**(-k)
end do
```

```
Airy = 0.5*pi**(-0.5)*x**(-0.25)*exp(-eta)*somaAi
else
```

```
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASYMPTOTIC EXPANSION 2 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
```

```
menosx = -x
eta = 2.0*(menosx**1.5)/3.0
```

```

C0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
end do

somaAi = C0
somaAi2 = C(1)*eta**(-1)

do k2=1,n
somaAi = somaAi + (-1)**k*C(2*k)*eta**(-2*k)
somaAi2 = somaAi2 + (-1)**k*C(2*k+1)*eta**(-2*k-1)
end do
gama = eta+pi/4.0
Airy = pi**(-0.5)*menosx**(-0.25)*(sin(gama)*somaAi-
.cos(gama)*somaAi2)
end if
end

!-----
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Bairy(x) C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

function Bairy(x)
implicit none

real*8 x, C1, C2, k13(1000), k12(1000), somaBi, C0
real*8 C(1000)
real*8 f, g, gama, menosx, somaBi2, pi, Bairy, eta
integer k, n, cont, k2

```

```

    pi = 3.14159265
n = 40

    if (sqrt(x*x) .le. 5.0) then

        !CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASCENDING SERIES C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

        C1 = 0.355028053887817
        C2 = 0.258819403792807

        k13(1) = 1.0/(3.0*2.0)
        k12(1) = 2.0/(4.0*3.0*2.0)
        f = 1.0 + k13(1)*x**3
        g = x + k12(1)*x**4

        do k=2,n
k13(k) = k13(k-1)*(3**k-2)/((3**k)*(3**k-1)*(3**k-2))
k12(k) = k12(k-1)*(3**k-1)/((3**k+1)*(3**k)*(3**k-1))
f = f + k13(k)*x**(3**k)
g = g + k12(k)*x**(3**k+1)
        end do

        Bairy = sqrt(3.0)*(C1*f+C2*g)
    else if (x .gt. 0) then

        !CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASSYMPTOTIC EXPANSION 1 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

    eta = 2.0*(x**1.5)/3.0
C0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
somaBi = C0 + C(1)*eta**(-1)

    do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
somaBi = somaBi + (-1)**k*C(k)*eta**(-k)
end do

    Bairy = pi**(-0.5)*x**(-0.25)*exp(eta)*somaBi
else

    !CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASYMPTOTIC EXPANSION 2 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

    menosx = -x
eta = 2.0*(menosx**1.5)/3.0
C0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
end do

    somaBi = C0
somaBi2 = C(1)*eta**(-1)

    do k2=1,n
somaBi = somaBi + (-1)**k*C(2*k)*eta**(-2*k)
somaBi2 = somaBi2 + (-1)**k*C(2*k+1)*eta**(-2*k-1)

```

```

end do
gama = eta+pi/4.0

      Bairy = pi**(-0.5)*menosx**(-0.25)*(cos(gama)*somaBi+
.sin(gama)*somaBi2)
end if

      end

      !-----
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Airy'(x) C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

      function Airy1(x)
implicit none

      real*8 x, C1, C2, k13(1000), k12(1000), k131(1000)
real*8 fl, g1, eta, somaAi1, C0, D0, C(1000), D(1000)
real*8 gama, menosx, somaAi12, k121(1000), pi, Airy1
integer k, n, cont, k2

      pi = 3.14159265
n = 40

      if (sqrt(x*x) .le. 5.0) then

      !CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASCENDING SERIES C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

C1 = 0.355028053887817
C2 = 0.258819403792807

```

```

k13(1) = 1.0/(3.0*2.0)
k12(1) = 2.0/(4.0*3.0*2.0)
k131(1) = k13(1)*3.0
k121(1) = 4.0*k12(1)
f1 = 0.0 + k131(1)*x**2
g1 = 1.0 + k121(1)*x**3

```

```

do k=2,n
k13(k) = k13(k-1)*(3**k-2)/((3**k)*(3**k-1)*(3**k-2))
k12(k) = k12(k-1)*(3**k-1)/((3**k+1)*(3**k)*(3**k-1))
k131(k) = k13(k)*(3**k)
k121(k) = k12(k)*(3**k+1)
f1 = f1 + k131(k)*x**(3**k-1)
g1 = g1 + k121(k)*x**(3**k)
end do

```

```

Airy1 = C1*f1-C2*g1
else if (x .gt. 0) then

```

```

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASSYMPTOTIC EXPANSION 1 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

eta = 2.0*(x**1.5)/3.0
C0 = 1.0
D0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
D(1) = -C(1)*7.0/5.0

```

```
somaAi1 = D0 - D(1)*eta**(-1)
```

```
do k=2,n
```

```
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
```

```
D(k) = -C(k)*(6*k+1)/(6*k-1)
```

```
somaAi1 = somaAi1 + (-1)**k*D(k)*eta**(-k)
```

```
end do
```

```
Airy1 = -0.5*pi**(-0.5)*x**(0.25)*exp(-eta)*somaAi1
```

```
else
```

```
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
```

```
!C C!
```

```
!C ASSYMPTOTIC EXPANSION 2 C!
```

```
!C C!
```

```
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
```

```
menosx = -x
```

```
eta = 2.0*(menosx**1.5)/3.0
```

```
C0 = 1.0
```

```
D0 = 1.0
```

```
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
```

```
D(1) = -C(1)*7.0/5.0
```

```
do k=2,n
```

```
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
```

```
D(k) = -C(k)*(6*k+1)/(6*k-1)
```

```
end do
```

```
somaAi1 = D0
```

```
somaAi12 = D(1)*eta**(-1.0)
```

```
do k2=1,n
```

```
somaAi1 = somaAi1 + (-1)**k*D(2*k)*eta**(-2*k)
```

```
somaAi12 = somaAi12 + (-1)**k*D(2*k+1)*eta**(-2*k-1)
```



```

end do
gama = eta+pi/4.0
Airy1 = -pi**(-0.5)*menosx**(0.25)*(cos(gama)*somaAi1+
.sin(gama)*somaAi12)
end if
end

```

```

!-----
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C Bairy'(x) C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

function Bairy1(x)
implicit none

real*8 x, C1, C2, k13(1000), k12(1000), k131(1000)
real*8 k121(1000)
real*8 f1, g1, Bi1, eta, somaBi1, C0, D0, C(1000)
real*8 D(1000), pi, Bairy1, gama, menosx, somaBi12
integer k, n, cont, k2

```

```

pi = 3.14159265
n = 40

```

```

if (sqrt(x*x) .le. 5.0) then

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASCENDING SERIES C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

C1 = 0.355028053887817
C2 = 0.258819403792807

```

```

k13(1) = 1.0/(3.0*2.0)
k12(1) = 2.0/(4.0*3.0*2.0)
k131(1) = k13(1)*3.0
k121(1) = 4.0*k12(1)
f1 = 0.0 + k131(1)*x**2
g1 = 1.0 + k121(1)*x**3

```

```

do k=2,n
k13(k) = k13(k-1)*(3**k-2)/((3**k)*(3**k-1)*(3**k-2))
k12(k) = k12(k-1)*(3**k-1)/((3**k+1)*(3**k)*(3**k-1))
k131(k) = k13(k)*(3**k)
k121(k) = k12(k)*(3**k+1)
f1 = f1 + k131(k)*x**(3**k-1)
g1 = g1 + k121(k)*x**(3**k)
end do

```

```

Bairy1 = sqrt(3.0)*(C1*f1+C2*g1)
else if (x .gt. 0) then

```

```

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASYMPTOTIC EXPANSION 1 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

```

```

eta = 2.0*(x**1.5)/3.0
C0 = 1.0
D0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
D(1) = -C(1)*7.0/5.0
somaBi1 = D0 + D(1)*eta**(-1)

```

```

do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
D(k) = -C(k)*(6*k+1)/(6*k-1)
somaBi1 = somaBi1 + (-1)**k*D(k)*eta**(-k)
end do

Bairy1 = pi**(-0.5)*x**(0.25)*exp(eta)*somaBi1
else

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!
!C C!
!C ASYMPTOTIC EXPANSION 2 C!
!C C!
!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC!

menosx = -x
eta = 2.0*(menosx**1.5)/3.0
C0 = 1.0
D0 = 1.0
C(1) = C0*5.0*3.0/216.0
D(1) = -C(1)*7.0/5.0
do k=2,n
C(k) = C(k-1)*(6*k-1)*(6*k-3)/(216.0*k*(2*k-1))
D(k) = -C(k)*(6*k+1)/(6*k-1)
end do

somaBi1 = D0
somaBi12 = D(1)*eta**(-1)

do k2=1,n
somaBi1 = somaBi1 + (-1)**k*D(2*k)*eta**(-2*k)
somaBi12 = somaBi12 + (-1)**k*D(2*k+1)*eta**(-2*k-1)
end do
gama = eta+pi/4.0
Bairy1 = pi**(-0.5)*menosx**(0.25)*(sin(gama)*somaBi1-
```

```
.cos(gama)*somaBi12)  
end if
```

```
end
```

## B.2 Autovalores do problema termicamente protegido

$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$
1	-0.73215571741348651	21	-20.767654752585308
2	-2.9719034262978909	22	-21.451426535589391
3	-4.5877718285408351	23	-22.124468807523879
4	-5.9560914421502025	24	-22.787424895706110
5	-7.1818981580589059	25	-23.440873515741593
6	-8.3106963646412044	26	-24.085337660982130
7	-9.3674074186870548	27	-24.721291964784712
8	-10.367530983246454	28	-25.349168846227212
9	-11.321533487178497	29	-25.969363677641848
10	-12.236901244468555	30	-26.582239158825320
11	-13.119222255429161	31	-27.188129042713527
12	-13.972807133755916	32	-27.787341326963677
13	-14.801069378466707	33	-28.380161002670281
14	-15.606770441822048	34	-28.966852433510116
15	-16.392184306930240	35	-29.547661424638409
16	-17.159211836660745	36	-30.122817029680174
17	-17.909462528425703	37	-30.692533135468185
18	-18.644314408408221	38	-31.257009857246672
19	-19.364958843973476	39	-31.816434771492897
20	-20.072434693200147	40	-32.370984009010485

### B.3 Coeficientes $A_n$ do problema termicamente protegido

$n$	$A_n$	$n$	$A_n$
1	-618.01565920121766	21	-0.20871300622229455
2	-26.837521715227538	22	-0.19247700410125951
3	-9.0909358193103014	23	-0.17817146774440309
4	-4.7326412069666013	24	-0.16549429577372096
5	-2.9657443761961391	25	-0.15420108759165591
6	-2.0594164919795457	26	-0.14409228849399591
7	-1.5270292364000726	27	-0.13500357630781404
8	-1.1850668303015186	28	-0.12679858388859760
9	-0.95102318784493678	29	-0.11936332777500611
10	-0.78305356666560477	30	-0.11260189866487171
11	-0.65797784466388687	31	-0.10643309588256483
12	-0.56205753940175407	32	-0.10078777562120234
13	-0.48670257032911773	33	-9.56067442502000903E-002
14	-0.42630339132712203	34	-9.08390717058756431E-002
15	-0.37706247176001184	35	-8.64407314365382567E-002
16	-0.33632973332085514	36	-8.23734962476301430E-002
17	-0.30220723685178691	37	-7.86040361983680880E-002
18	-0.27330487984323498	38	-7.51031771678199872E-002
19	-0.24858437192392385	39	-7.18452880395962501E-002
20	-0.22725669636229123	40	-6.88077714982975042E-002

## B.4 Coeficientes $A_n$ do problema desprotegido - Caso com $\dot{q}$ negativo

$n$	$A_n$	$n$	$A_n$
1	773.92242550209039	21	0.46960426400029420
2	37.330949910397493	22	0.43307325922747342
3	15.257179691350881	23	0.40088580242366995
4	9.2560091682310350	24	0.37236216549065987
5	6.3257063720320685	25	0.34695244708074208
6	4.5595001932600416	26	0.32420764911172717
7	3.4227281741927391	27	0.30375804669310774
8	2.6645318327094509	28	0.28529681374874399
9	2.1395888627653687	29	0.26856748749151710
10	1.7618512058250722	30	0.25335427199654925
11	1.4804487697882625	31	0.23947446573521555
12	1.2646293860867464	32	0.22677249514790443
13	1.0950807798233766	33	0.21511517456215498
14	0.95918263036850404	34	0.20438791133760473
15	0.84839056145629366	35	0.19449164573264538
16	0.75674189997227215	36	0.18534036655663438
17	0.67996628291581851	37	0.17685908144478604
18	0.61493597964698388	38	0.16898214862812441
19	0.55931483682945971	39	0.16165189808835340
20	0.51132756681583380	40	0.15481748587310534

## B.5 Coeficientes $A_n$ do problema desprotegido - Caso com $\dot{q}$ nulo

$n$	$A_n$	$n$	$A_n$
1	1.4028515005683175	21	0.20871300622235298
2	3.7840477663632441	22	0.19247700410109936
3	3.8935099172231329	23	0.17817146774385337
4	3.3402076595229753	24	0.16549429577362659
5	2.6185259017863105	25	0.15420108759144091
6	1.9852295782851543	26	0.14409228849410102
7	1.5139416286929557	27	0.13500357630804788
8	1.1831982948329158	28	0.12679858388833071
9	0.95080987795918037	29	0.11936332777400761
10	0.78303424749336403	30	0.11260189866513298
11	0.65797646395804343	31	0.10643309588231804
12	0.56205746183441752	32	0.10078777562129090
13	0.48670256691274733	33	9.56067442498466508E-002
14	0.42630339120953115	34	9.08390717056021119E-002
15	0.37706247175659502	35	8.64407314367312829E-002
16	0.33632973332097305	36	8.23734962473930826E-002
17	0.30220723685147433	37	7.86040361976826918E-002
18	0.27330487984310403	38	7.51031771680552990E-002
19	0.24858437192420432	39	7.18452880392681792E-002
20	0.22725669636259288	40	6.88077714991579548E-002



# Apêndice C – Conceitos matemáticos adicionais

## C.1 Produto interno

Um produto interno é uma função qualquer com duas entradas, representado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , que satisfaça os seguintes axiomas (PULINO, 2012):

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\text{C.1})$$

$$\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle \quad (\text{C.2})$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad (\text{C.3})$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

A partir destas propriedades, definem-se os produtos internos usuais para cada espaço vetorial. O produto interno usual para o espaço das funções reais é definido como:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(y)g(y)w(y)dy \quad (\text{C.5})$$

No qual  $f$  e  $g$  são duas funções quaisquer,  $a$  e  $b$  são os limites do intervalo no qual o espaço está definido e  $w$  é uma função peso.

Alguns espaços de funções estão ligados a certos pesos  $w$ . Por exemplo, o produto interno no espaço gerado pelas funções  $\text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}}$  no intervalo  $[0, 1]$ , mencionado no Capítulo 4, é usualmente definido com o peso  $w(\bar{y}) = \bar{y}$ . Da mesma maneira, o produto interno no espaço gerado pelas funções  $\cos(\alpha_n \bar{y})$ , mencionado no Capítulo 5, é usualmente definido para  $w(\bar{y}) = 1$ , .

## C.2 Funções ortogonais e ortonormais

Definido o produto interno, duas funções serão ortogonais com peso  $w$  se o produto interno entre elas for nulo. Por exemplo, sabe-se que duas funções  $\cos(m\bar{y})$  com diferentes  $m$  inteiros serão sempre ortogonais com peso  $w(\bar{y}) = 1$  em qualquer intervalo de comprimento  $2\pi$ . Da mesma maneira, do Capítulo 4, duas funções  $\text{Ai}(\alpha_n\bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n\bar{y})}{\sqrt{3}}$  com diferentes  $\alpha_n$  serão sempre ortogonais com peso  $w(\bar{y}) = \bar{y}$ . Se, adicionalmente, a norma destas funções for unitário, elas são chamadas ortonormais. A norma de uma função  $f$  é definida por:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle_w = \int_a^b f^2(y)w(y)dy \quad (\text{C.6})$$

Onde  $w(y)$  é a função peso relacionada com o espaço utilizado.

## C.3 Base completa

Define-se base completa como aquela em que a representação de uma função qualquer no espaço formado por ela convirja para a função representada. De outra maneira, as funções  $\phi_n(x)$  formam uma base completa se, para uma outra função qualquer  $f(x)$  vale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \right] = 0 \quad (\text{C.7})$$

## Apêndice D – Funções de Airy

As funções de Airy do 1º e 2º tipo ( $Ai(x)$  e  $Bi(x)$ ) são duas soluções linearmente independentes da seguinte Equação Diferencial Ordinária (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$$F''(x) - xF(x) = 0 \quad (D.1)$$

Esta equação é normalmente encontrada em problemas de ótica, mecânica quântica e eletromagnetismo. As funções de Airy foram introduzidas pelo astrônomo George Biddell Airy em um estudo sobre a intensidade da luz na proximidade de um arco-íris (AIRY, 1838). Estas funções também podem ser escritas como funções de Bessel de ordem  $1/3$ .

As Figuras D.1 e D.2 representam os gráficos de  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$  e das derivadas  $Ai'(x)$  e  $Bi'(x)$ , respectivamente. Note que, para valores de  $x$  menores que zero, as funções representadas possuem uma natureza oscilatória, enquanto, para valores de  $x$  maiores que zero, as funções possuem uma natureza exponencial.

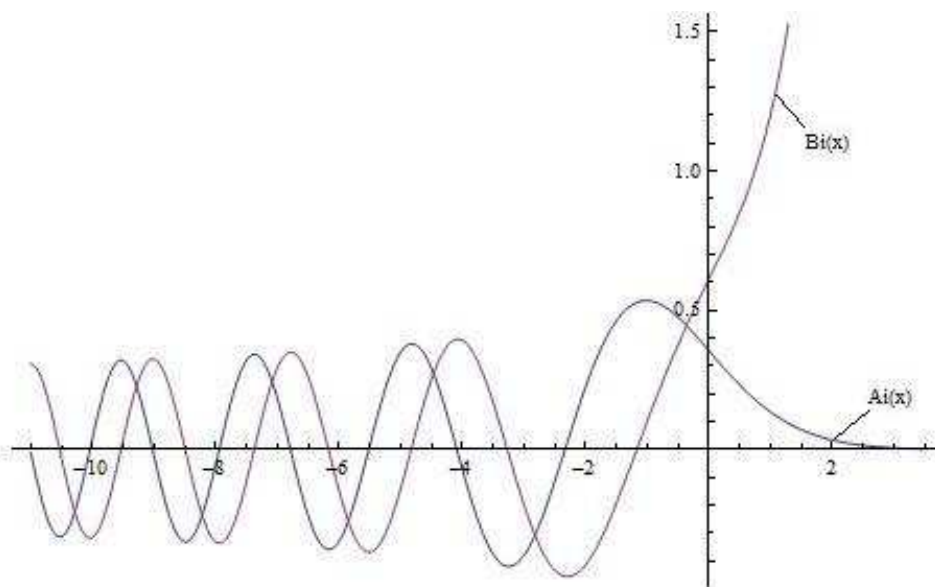


Figura D.1: Representação das funções  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$

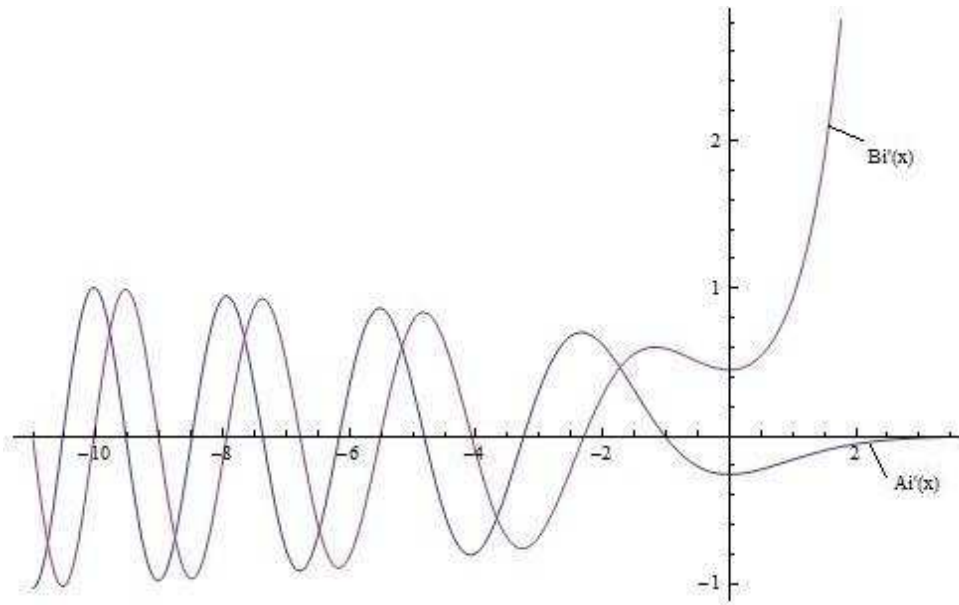


Figura D.2: Representação das funções  $Ai'(x)$  e  $Bi'(x)$

As funções  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$  têm como valores notáveis:

$$Ai(0) = \frac{Bi(0)}{\sqrt{3}} = 0.355 \quad (D.2)$$

$$-Ai'(0) = \frac{Bi'(0)}{\sqrt{3}} = 0.259 \quad (D.3)$$

Existem diversas representações integrais e em séries para as funções de Airy, no entanto, as mais utilizadas são as séries ascendentes, válidas para  $|x| < 5$ , e as expansões assintóticas, válidas para  $|x| \geq 5$ , que serão apresentadas a seguir.

## D.1 Séries ascendentes

As séries ascendentes são dadas pelas expressões:

$$Ai(x) = C_1 f(x) - C_2 g(x) \quad (D.4a)$$

$$Ai'(x) = C_1 f'(x) - C_2 g'(x) \quad (D.4b)$$

$$Bi(x) = \sqrt{3}[C_1 f(x) - C_2 g(x)] \quad (D.4c)$$

$$Bi'(x) = \sqrt{3}[C_1 f'(x) - C_2 g'(x)] \quad (D.4d)$$

Onde:

$$C_1 = \text{Ai}(0) \quad (\text{D.5a})$$

$$C_2 = -\text{Ai}'(0) \quad (\text{D.5b})$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{x^{3k}}{(3k)!} \prod_{n=1}^k (3n-2) \right] \quad (\text{D.5c})$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{x^{3k-1}}{(3k-1)!} \prod_{n=1}^k (3n-2) \right] \quad (\text{D.5d})$$

$$g(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!} \prod_{n=1}^k (3n-1) \right] \quad (\text{D.5e})$$

$$g'(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{x^{3k}}{(3k)!} \prod_{n=1}^k (3n-1) \right] \quad (\text{D.5f})$$

## D.2 Expansões assintóticas

As expansões assintóticas têm expressões diferentes para  $x > 0$  e  $x < 0$ . Em ambos os casos, define-se a variável  $\xi = \frac{2}{3}x^{2/3}$  e os coeficientes representados pelas relações:

$$c_0 = 1 \quad (\text{D.6a})$$

$$c_k = \frac{\Gamma(3k + \frac{1}{2})}{54^k k! \Gamma(k + \frac{1}{2})} = \frac{(2k+1)(2k+3)\dots(6k-1)}{216^k k!} \quad (\text{D.6b})$$

$$d_0 = 1 \quad (\text{D.6c})$$

$$d_k = -\frac{6k+1}{6k-1} c_k \quad (\text{D.6d})$$

No caso de um valor de  $x$  positivo, valem as expressões:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{-1/4}e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \xi^{-k} \quad (\text{D.7a})$$

$$\text{Ai}'(x) = -\frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{1/4}e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k \xi^{-k} \quad (\text{D.7b})$$

$$\text{Bi}(x) = \pi^{-1/2}x^{-1/4}e^{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-k} \quad (\text{D.7c})$$

$$\text{Bi}'(x) = \pi^{-1/2}x^{1/4}e^{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^{-k} \quad (\text{D.7d})$$

enquanto, para valores de  $x$  negativos, valem as relações:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-x) &= \pi^{-1/2}x^{-1/4} \left[ \text{sen} \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \xi^{-2k} \right. \\ &\quad \left. - \cos \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right] \\ \text{Ai}'(-x) &= -\pi^{-1/2}x^{1/4} \left[ \cos \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k} \xi^{-2k} \right. \\ &\quad \left. + \text{sen} \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right] \\ \text{Bi}(-x) &= \pi^{-1/2}x^{-1/4} \left[ \cos \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \xi^{-2k} \right. \\ &\quad \left. + \text{sen} \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right] \\ \text{Bi}'(-x) &= \pi^{-1/2}x^{1/4} \left[ \text{sen} \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k} \xi^{-2k} \right. \\ &\quad \left. - \cos \left( \xi + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k+1} \xi^{-2k-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Desta maneira, pode-se encontrar valores aproximados das funções  $\text{Ai}(x)$ ,  $\text{Bi}(x)$ ,  $\text{Ai}'(x)$  e  $\text{Bi}'(x)$  em forma de séries.

## Apêndice E – Obtenção da velocidade $U_{inv}(x)$

No caso de gradiente de pressão constante, a presença do corpo não modifica a distribuição de pressões e velocidades em torno do aerofólio. Assim, tem-se que  $U_{inv}(x) = U_\infty$ .

No caso em que o corpo modifica a distribuição de pressão e velocidades, deve-se resolver o escoamento invíscido em torno do aerofólio. Sabe-se que, para um cilindro de raio unitário inserido em um escoamento (Fig E.1), com velocidade ao longe  $U_\infty$  e circulação  $\Gamma$ , a distribuição de velocidades em coordenadas cilíndricas será (KRAUSE, 2005):

$$u_r(r, \theta) = -U_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \quad (\text{E.1a})$$

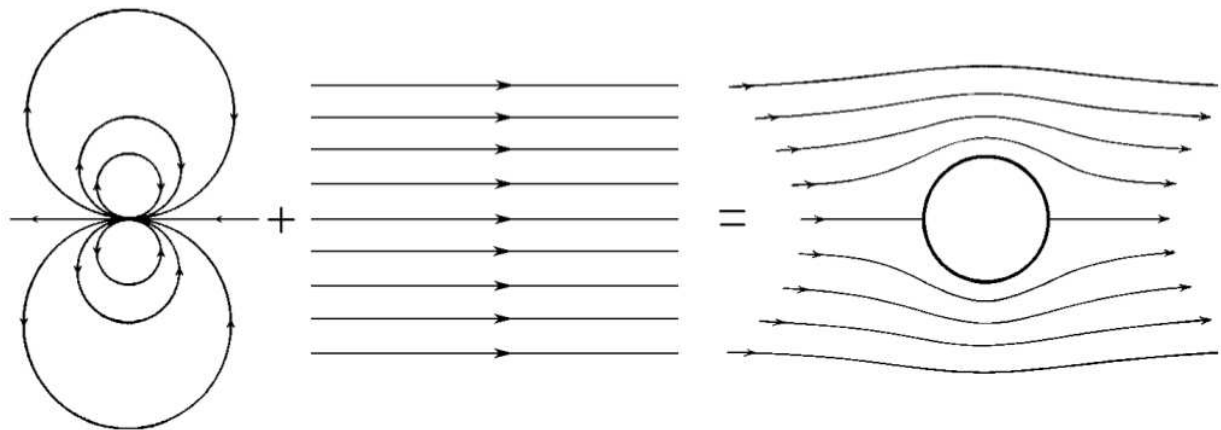
$$u_\theta(r, \theta) = U_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{E.1b})$$

nas quais os eixos  $r$  e  $\theta$  estão definidos na Figura E.2. Logo, na parede do cilindro, as velocidades serão:

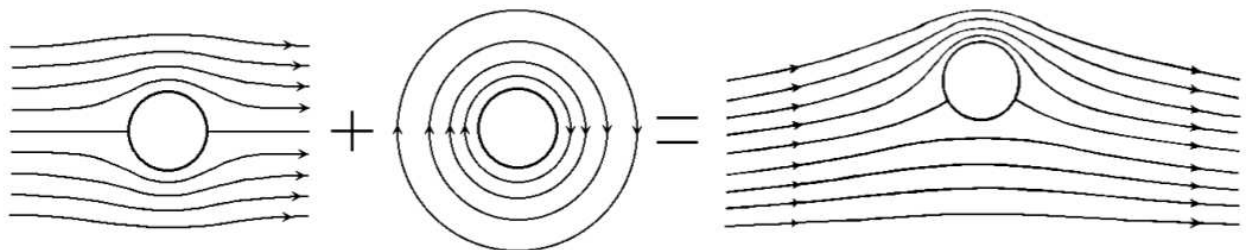
$$u_r(1, \theta) = 0 \quad (\text{E.2a})$$

$$u_\theta(1, \theta) = 2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{E.2b})$$

Esta velocidade  $u_\theta(a, \theta)$ , com as mudanças de variáveis adequadas, equivale à velocidade  $U_{inv}(x)$  procurada. Outro dado importante para a resolução do problema é a variação da velocidade invíscida (escoamento ideal), ou seja  $\frac{\partial U_{inv}(x)}{\partial x}$ , na qual  $x$  é a coordenada paralela à parede. Para encontrar estes dados, define-se uma transformação conforme  $\zeta = z + \frac{1}{z}$ , na qual  $z$  é o plano complexo  $z = x + iy$  e  $\zeta$  é o plano  $\zeta = \epsilon + i\eta$ , chegando-se à seguinte relação entre as variáveis no plano  $\zeta$  e as variáveis em coordenadas polares no plano  $z$ :



(a) Escoamento em torno de um cilindro como sobreposição de um escoamento uniforme e um dipolo



(b) Escoamento em torno de um cilindro com circulação como sobreposição de um escoamento sobre um cilindro e um vórtice

Figura E.1: Escoamento potencial em torno de um cilindro. Retirado de Kliewer (Disponível em [http://www.profezequias.net/airfoil\\_david\\_kliewer.pdf](http://www.profezequias.net/airfoil_david_kliewer.pdf))

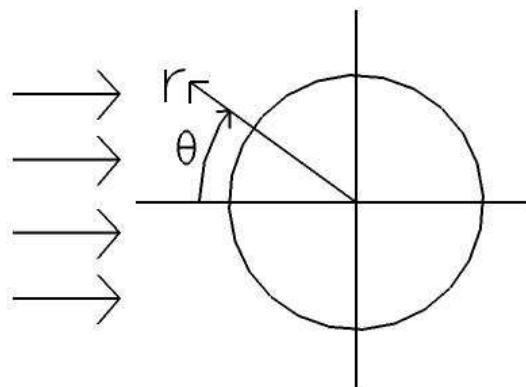


Figura E.2: Definição dos eixos  $r$  e  $\theta$  usados no modelo



$$\epsilon = x + \frac{x}{x^2 + y^2} = - \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad (\text{E.3a})$$

$$\eta = y + \frac{y}{x^2 + y^2} = \left( r - \frac{1}{r} \right) \text{sen} \theta \quad (\text{E.3b})$$

Assim, uma circunferência de raio unitário no plano  $z$  terá como coordenadas no plano  $\eta$ :

$$\epsilon = -2 \cos \theta \quad (\text{E.4a})$$

$$\eta = 0 \quad (\text{E.4b})$$

Analisando as equações acima, conclui-se que a transformação  $\zeta$  leva uma circunferência de raio unitário no plano  $z$  ao segmento de reta entre os pontos  $\epsilon = -2$  e  $\epsilon = 2$ , pontos referentes ao bordo de entrada e bordo de fuga do aerofólio, respectivamente. Substituindo a expressão para a variável  $\epsilon$  E.4 na expressão E.2, obtém-se:

$$u_\theta = 2U_\infty \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} - \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{E.5})$$

Esta velocidade  $u_\theta$  corresponde à velocidade  $U_{inv}(x)$  procurada. A transformação  $\eta$  leva uma circunferência a um segmento de reta no intervalo  $[-2, 2]$ . Como o aerofólio está definido no intervalo  $[0, c]$ , onde  $c$  é a corda do aerofólio, tem-se que as variáveis  $x$  e  $\epsilon$  têm uma relação dada por  $\epsilon = \frac{4}{c}x - 2$ . Logo, pode-se concluir que:

$$U_{inv}(x) = 2U_\infty \sqrt{1 - \frac{(\frac{4x}{c} - 2)^2}{4}} - \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial U_{inv}(x)}{\partial x} = -\frac{2U_\infty(\frac{4x}{c} - 2)}{c} \left[ 1 - \frac{(\frac{4x}{c} - 2)^2}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.7})$$

Em um escoamento incompressível e invíscido, a seguinte expressão vale para uma mesma linha de corrente (WHITE, 2000):

$$V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (\text{E.8})$$

Aplicando a equação acima ao presente problema, conclui-se que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4\rho U_\infty^2}{c} \left( \frac{4x}{c} - 2 \right) - \frac{\rho U_\infty \Gamma}{c\pi} \left( \frac{4x}{c} - 2 \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.9})$$

Ou seja, o gradiente de pressão não será constante. No entanto, pode-se trabalhar com um valor médio da coordenada  $x$ , de forma a obter um gradiente de pressão e uma velocidade  $U_{inv}(x)$  constantes.

## Apêndice F – Funções Cilíndricas Parabólicas

Whittaker e Watson (1990) definem a função cilíndrica parabólica de ordem  $\nu$  ( $D_\nu(z)$ ) como a solução da equação:

$$F''(z) + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 \right) F(z) = 0 \quad (\text{F.1})$$

Na qual  $z$  é um número complexo. Uma solução linearmente independente de  $D_\nu(z)$  normalmente utilizada é  $D_{-\nu-1}(iz)$ . Dependendo do valor de  $\nu$ , a função cilíndrica parabólica pode ter comportamentos completamente diferentes. Para valores reais de  $z$ ,  $\nu < 0$  (representado na Figura F.1) implica em soluções que divergem perto de  $z = -3$  e decaem exponencialmente, de modo a chegar muito próximo de zero nas proximidades da origem. Para  $\nu \geq 0$  as funções  $D_\nu(z)$  se comportam de maneira oscilatória, como representado na Figura F.2. As funções cilíndricas parabólicas também podem ser representadas como funções de Bessel de ordem  $1/4$

No entanto, apesar da definição desta função ser dada pela equação F.1, as funções cilíndricas parabólicas podem ser generalizadas como uma família de funções que são solução da equação diferencial ordinária (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$$F''(z) + (az^2 + bz + c) F(z) = 0 \quad (\text{F.2})$$

Usando os mesmos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação F.2, tem-se que duas soluções linearmente independentes desta mesma equação serão as funções:

$$F(z) = D_{\frac{b^2 - 4^{3/2} - 4ac}{8a^{3/2}}} \left( \frac{b + 2az}{\sqrt{2}a^{3/4}} \right) \quad (\text{F.3a})$$

$$F(z) = D_{\frac{-b^2 - 4^{3/2} + 4ac}{8a^{3/2}}} \left( \frac{i(b + 2az)}{\sqrt{2}a^{3/4}} \right) \quad (\text{F.3b})$$

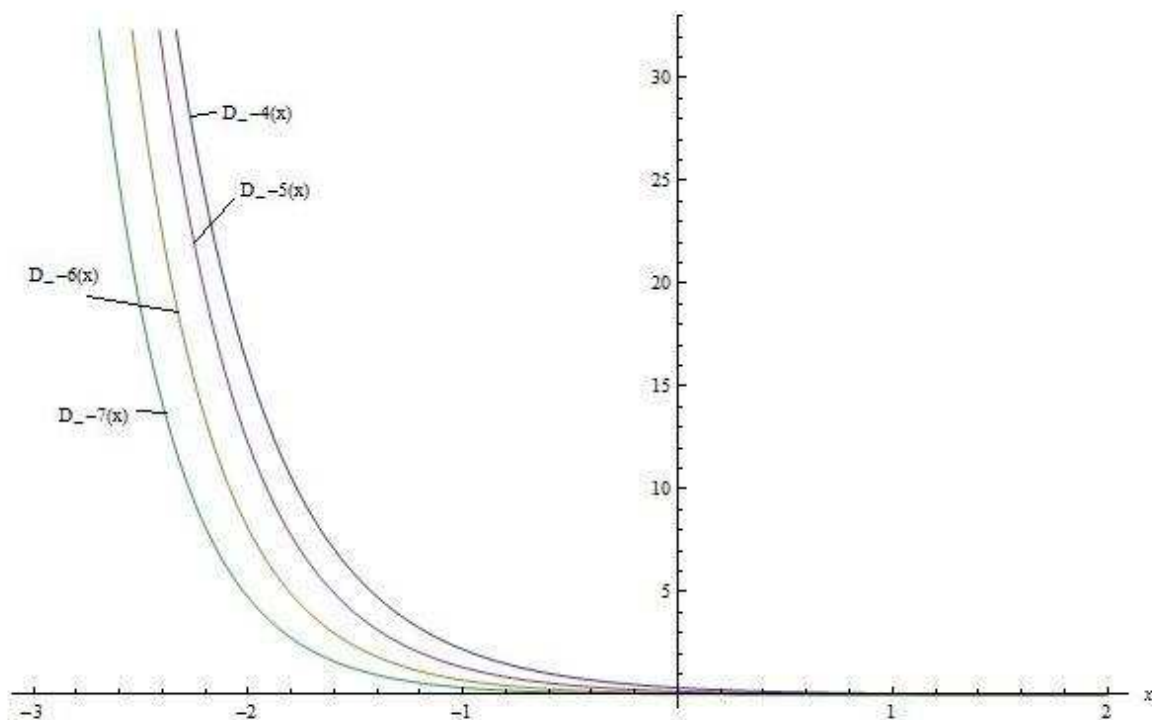


Figura F.1: Representação das funções  $D_{-4}(x)$ ,  $D_{-5}(x)$ ,  $D_{-6}(x)$  e  $D_{-7}(x)$

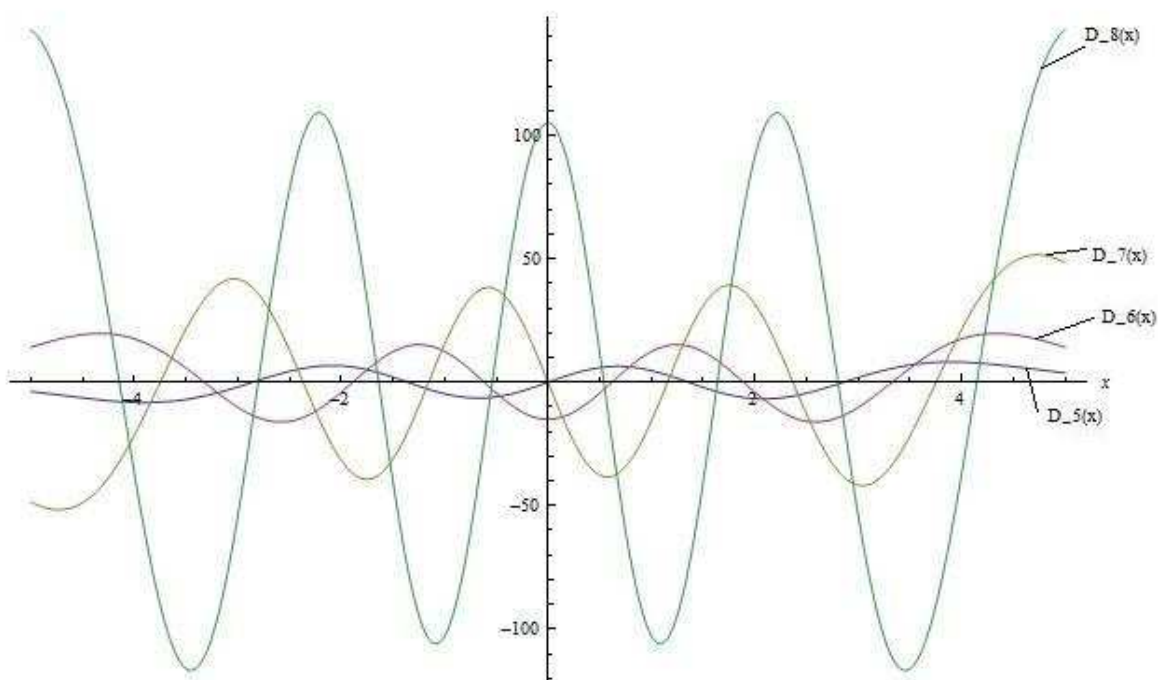


Figura F.2: Representação das funções  $D_5(x)$ ,  $D_6(x)$ ,  $D_7(x)$  e  $D_8(x)$

## Apêndice G – Comentários sobre a dissipação viscosa $\Phi$

No Capítulo 4, foi desprezada a dissipação  $\Phi$  em todas as soluções encontradas. No entanto, a dissipação pode ser facilmente inserida em uma mudança de variáveis. Substituindo as transformações de variáveis 4.2a, 4.2b e 4.2c na equação 4.1, chega-se a:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Uh^2}{k} \Phi \quad (\text{G.1})$$

onde a dissipação viscosa  $\Phi$  é dada pela expressão  $\Phi = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ . Substituindo o perfil de velocidades encontrado no Capítulo 3 (equação 3.7a) na expressão para a dissipação, resulta:

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Uy}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{2\mu} (h-y) \right) \right]^2 = \mu \left[ \frac{U}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{(h-2y)}{2\mu} \right]^2 \\ &= \mu \frac{U^2}{h^2} - \frac{U}{h} \frac{\partial p}{\partial x} (h-2y) + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{(h-2y)^2}{4\mu} \\ &= a + by + cy^2 \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

com

$$a = \mu \frac{U^2}{h^2} - U \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^2}{4\mu} \quad (\text{G.3a})$$

$$b = \frac{2U}{h} \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h}{\mu} \quad (\text{G.3b})$$

$$c = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{G.3c})$$

Substituindo na expressão G.1, resulta:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Uh^2}{k} (a + by + cy^2) \quad (\text{G.4})$$

Ou, fazendo uso da transformação 4.2b:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Uh^2}{k} (a + bh\bar{y} + ch^2\bar{y}^2) \quad (\text{G.5})$$

Para a resolução desta equação, define-se uma nova variável  $T^*$ , na forma:

$$T^* = \bar{T} + \frac{h^2}{k} \left[ \frac{a\bar{y}^2}{2} + \frac{bh\bar{y}^3}{6} + \frac{ch^2\bar{y}^4}{12} \right] \quad (\text{G.6})$$

Aplicando esta transformação à equação G.1, chega-se à expressão:

$$\bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial T^*}{\partial \bar{x}} = U \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{G.7})$$

Note que esta expressão é idêntica à expressão para o caso não dissipativo (equação 4.3) para a nova variável  $T^*$ . Assim, basta resolver a equação analogamente aos casos não dissipativos com as condições de contorno adequadas.

## G.1 Condições de contorno para o caso dissipativo

As condições de contorno utilizadas para o caso não dissipativo são:

Interface filme-superfície sólida ( $\bar{y} = 0$ ):

Região Termicamente Protegida

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \Big|_{\bar{y}=0} = -\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \dot{q} \quad (\text{G.8})$$

Região Desprotegida

$$\bar{T} \Big|_{\bar{y}=0} = \bar{T}_0 \quad (\text{G.9})$$

Interface filme-escoamento gasoso ( $\bar{y} = 1$ ):

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = -\frac{k}{h} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = h_{CONV} \bar{T} \Big|_{\bar{y}=1} \quad (\text{G.10})$$

Entrada de líquido ( $\bar{x} = 0$ ):

$$\bar{T} \Big|_{\bar{x}=0} = \bar{T}_{ent}(y) \quad (\text{G.11})$$

Usando a variável adicional  $T^*$ , dada pela equação G.6, chega-se às seguintes condições de contorno para o caso dissipativo:

Interface filme-superfície sólida ( $\bar{y} = 0$ ):

Região Termicamente Protegida

$$-\frac{k}{h} \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} - \frac{h^2}{k} \left( a\bar{y} + \frac{bh\bar{y}^2}{2} + \frac{ch^2\bar{y}^3}{3} \right) \right] \Big|_{\bar{y}=0} = -\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \dot{q} \quad (\text{G.12})$$

Região Desprotegida

$$\left[ T^* - \frac{h^2}{k} \left( \frac{a\bar{y}^2}{2} + \frac{bh\bar{y}^3}{6} + \frac{ch^2\bar{y}^4}{12} \right) \right] \Big|_{\bar{y}=0} = T^*|_{\bar{y}=0} = \bar{T}_0 \quad (\text{G.13})$$

Interface filme-escoamento gasoso ( $\bar{y} = 1$ ):

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{h} \left[ \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} - \frac{h^2}{k} \left( a\bar{y} + \frac{bh\bar{y}^2}{2} + \frac{ch^2\bar{y}^3}{3} \right) \right] \Big|_{\bar{y}=1} \\ & - h_{CONV} \left[ T^* - \frac{h^2}{k} \left( \frac{a\bar{y}^2}{2} + \frac{bh\bar{y}^3}{6} + \frac{ch^2\bar{y}^4}{12} \right) \right] \Big|_{\bar{y}=1} = \\ & = -\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} - h_{CONV} T^*|_{\bar{y}=1} \\ & + h^2 \left[ a \left( 1 + \frac{hh_{CONV}}{k} \right) + \frac{bh}{2} \left( 1 + \frac{hh_{CONV}}{3k} \right) + \frac{ch^2}{3} \left( 1 + \frac{hh_{CONV}}{4k} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Entrada de líquido ( $\bar{x} = 0$ ):

$$\begin{aligned} & \left[ T^* - \frac{h^2}{k} \left[ \frac{a\bar{y}^2}{2} + \frac{bh\bar{y}^3}{6} + \frac{ch^2\bar{y}^4}{12} \right] \right] \Big|_{\bar{x}=0} = \\ & = T^*|_{\bar{x}=0} - \frac{h^2}{k} \left[ \frac{a\bar{y}^2}{2} + \frac{bh\bar{y}^3}{6} + \frac{ch^2\bar{y}^4}{12} \right] = \bar{T}_{ent}(y) \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Como já demonstrado no Capítulo 4, para o problema resolvido neste trabalho, deverão ser consideradas condições de contorno homogêneas e as condições não homogêneas deverão ser satisfeitas pela solução particular  $T_2^*$ . Finalmente, na Tabela G.1 estão representadas as condições de contorno a serem satisfeitas.

Tabela G.1: Condições de contorno a serem satisfeitas para o caso dissipativo - Gradiente de pressão constante

Condição de contorno		Solução particular $T_1^*$	Solução particular $T_2^*$
$\bar{y} = 0$	Região termicamente protegida	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=0} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=0} = \dot{q}$
	Região desprotegida	$T^* \Big _{\bar{y}=0} = 0$	$T^* \Big _{\bar{y}=0} = T_0$
$\bar{y} = 1$		$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=1} - h_{CONV} T^* \Big _{\bar{y}=1} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=1} - h_{CONV} T^* \Big _{\bar{y}=1} =$ $\left( -\mu U^2 + U h^2 \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^4}{4\mu} \right) \left( 1 + \frac{h h_{CONV}}{k} \right)$ $\left( -U h^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^4}{2\mu} \right) \left( 1 + \frac{h h_{CONV}}{3k} \right) + \frac{h^4}{3\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \left( 1 + \frac{h h_{CONV}}{4k} \right)$
$\bar{x} = 0$		$T^* \Big _{\bar{x}=0} = \bar{T}_{ent}(y) + \left( \frac{\mu U^2}{2k} - \frac{U h^2}{2k} \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^2}{8k\mu} \right) \bar{y}^2 + \left( \frac{U h^2}{3k} \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^4}{6k\mu} \right) \bar{y}^3 + \frac{h^4}{12k\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \bar{y}^4$	



Para o caso de gradiente de pressão nulo, utiliza-se as mesmas condições de contorno do caso de gradiente de pressão constante com o valor de  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ . Estas condições estão representadas na tabela abaixo:

Tabela G.2: Condições de contorno a serem satisfeitas para o caso dissipativo - Gradiente de pressão nulo

Condição de contorno		Solução particular $T_1^*$	Solução particular $T_2^*$
$\bar{y} = 0$	Região termicamente protegida	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=0} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=0} = \dot{q}$
	Região desprotegida	$T^* \Big _{\bar{y}=0} = 0$	$T^* \Big _{\bar{y}=0} = T_0$
$\bar{y} = 1$		$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=1} - h_{CONV} T^* \Big _{\bar{y}=1} = 0$	$-\frac{k}{h} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}} \Big _{\bar{y}=1} - h_{CONV} T^* \Big _{\bar{y}=1} = -\mu U^2 \left(1 + \frac{hh_{CONV}}{k}\right)$
$\bar{x} = 0$		$T^* \Big _{\bar{x}=0} = \bar{T}_{ent}(y) + \frac{\mu U^2}{2k} \bar{y}^2$	

## Apêndice H – Exemplo de expansão de $F(\bar{y})$ em séries de funções ortogonais

Da teoria de Sturm-Liouville, conclui-se que é possível projetar uma função arbitrária  $F(\bar{y})$  em um espaço formado pelas auto-funções do problema de Sturm-Liouville. Tomando como exemplo o caso de gradiente de pressão nulo em uma região termicamente protegida, encontram-se os autovalores dados pela equação 4.26. Neste caso, para quaisquer  $\dot{q}$ ,  $k$ ,  $h$  e  $h_{CONV}$ , os autovalores  $\alpha_n$  serão negativos. Para os valores  $k = hh_{CONV}$ , tem-se:

$$\alpha_n = -\frac{\left[ \text{Ai}(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]}{\left[ \text{Ai}'(\alpha_n) + \frac{\text{Bi}'(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]} \quad (\text{H.1})$$

Assim, para  $\bar{T}_{ent} = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} = 1$ , tem-se, da equação 4.30:

$$F(\bar{y}) = \bar{y} - 1 \quad (\text{H.2})$$

A função  $F(\bar{y})$  será identicamente igual à somatória infinita:

$$F(\bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right]$$

Porém, pode-se aproximar a função pela somatória de 1 a  $N$ :

$$F(\bar{y}) = \sum_{n=1}^N A_n \left[ \text{Ai}(\alpha_n \bar{y}) + \frac{\text{Bi}(\alpha_n \bar{y})}{\sqrt{3}} \right] \quad (\text{H.3})$$

A Tabela H.1 mostra os 20 primeiros autovalores e coeficientes  $A_n$  para  $k = hh_{CONV}$  e  $\bar{T}_{ent} = \frac{\dot{q}}{h_{CONV}} = 1$ . Ajustando  $N$ , pode-se modificar a precisão do problema. Isto está representado nas Figuras H.1, H.2 e H.3, que mostram o gráfico de  $F(\bar{y})$  para 20, 10 e 5 autovalores, respectivamente.

Tabela H.1: 20 primeiros autovalores e coeficientes  $A_n$

$n$	$\alpha_n$	$A_n$	$n$	$\alpha_n$	$A_n$
1	-1.182746	-0.552130	11	-13.123842	-0.004165
2	-3.056401	-0.496133	12	-13.976880	-0.010128
3	-4.624887	-0.040570	13	-14.804700	-0.003167
4	-5.978346	-0.090536	14	-15.610036	-0.007617
5	-7.197255	-0.015851	15	-16.395144	-0.002508
6	-8.322183	-0.038596	16	-17.161913	-0.005966
7	-9.376457	-0.008859	17	-17.911943	-0.002047
8	-10.374923	-0.021850	18	-18.646603	-0.004818
9	-11.327734	-0.005806	19	-19.367080	-0.001711
10	-12.242210	-0.014255	20	-20.074409	-0.003984

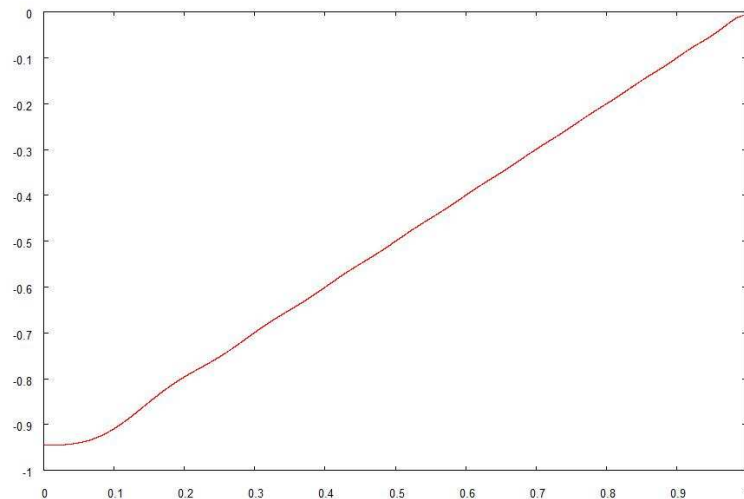


Figura H.1: Projeção de  $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$  com 20 autovalores

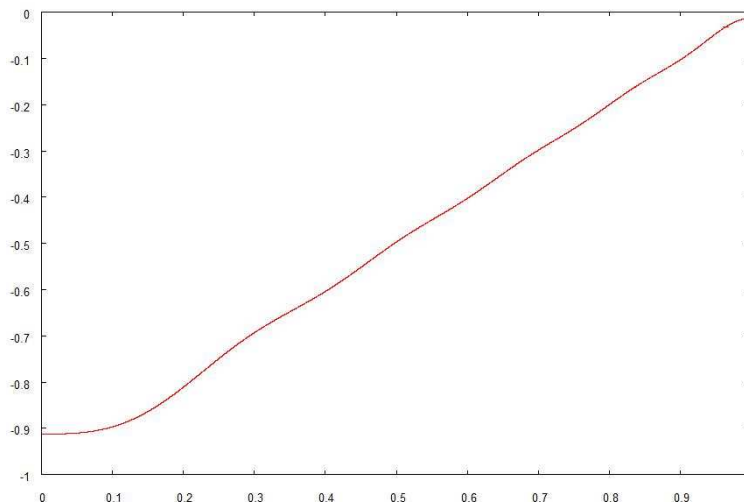


Figura H.2: Projeção de  $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$  com 10 autovalores

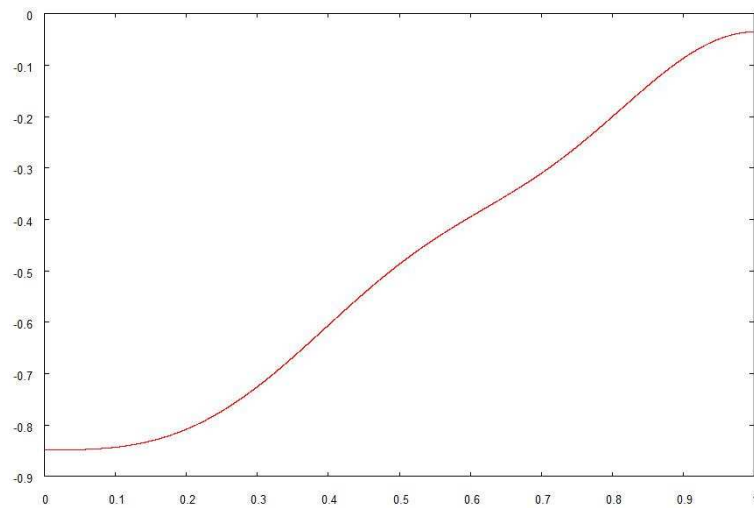


Figura H.3: Projeção de  $F(\bar{y}) = \bar{y} - 1$  com 5 autovalores

# Apêndice I – Equações diferenciais Ordinárias e o problema de Sturm-Liouville

## I.1 Equações Diferenciais Ordinárias Auto-adjuntas

Seja uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear e homogênea do tipo:

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x) y = 0 \quad (\text{I.1})$$

na qual  $P$  e  $y$  são funções arbitrárias de  $x$ . Pode-se definir o operador linear  $L$ , tal que:

$$L \equiv \left[ P_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{d}{dx} + P_0(x) \right] \quad (\text{I.2})$$

Aplicando este operador a  $y$ , pode-se escrever:

$$L[y] = \sum_{k=0}^n P_k(x) y^{(k)}(x) = 0 \quad (\text{I.3})$$

no qual  $y^{(k)}$  representa a derivada de ordem  $k$  de  $y$  em relação a  $x$ . Define-se também um operador linear adicional  $L^*[y]$ :

$$L^*[y] \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k [P_k(x) y(x)]^{(k)} \quad (\text{I.4})$$

Aplicando  $L[y]$  e  $L^*[y]$  a funções arbitrárias  $u(x)$  e  $v(x)$ , obtém-se:

$$v(x)L[u(x)] - u(x)L^*[v(x)] = \frac{d}{dx} Q[u, v](x) \quad (\text{I.5})$$

na qual  $Q[u, v]$  é o operador dado por:

$$Q[u, v](x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [v(x)P_k(x)]^{(j)} u^{(k-1-j)}(x) \quad (\text{I.6})$$

Por definição, se o operador  $L$  for igual ao operador  $L^*$ , diz-se que a EDO  $L[y] = 0$  é *auto-adjunta*. Neste caso, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dx}Q[u, v](x) = v(x)L[u(x)] - u(x)L[v(x)] \quad (\text{I.7})$$

No caso de  $L[y] = 0$  ser uma EDO homogênea de segunda ordem:

$$L[y] = P_2(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_0(x)y(x) = 0 \quad (\text{I.8})$$

Manipulando a definição I.4 e substituindo a expressão I.8, obtém-se a relação:

$$\begin{aligned} L^*[y] &= [P_2(x)y(x)]'' - [P_1(x)y(x)]' + P_0(x)y(x) \\ &= P_2(x)y''(x) + [2P_2'(x) - P_1(x)]y'(x) + [P_2''(x) - P_1'(x) + P_0(x)]y(x) \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Sabe-se que equação  $L[y] = 0$  será auto-adjunta se  $L[y] = L^*[y]$ . Comparando as equações I.8 e I.9, conclui-se que a equação I.8 será auto-adjunta se  $P_2'(x) \equiv P_1(x)$ . Neste caso, a EDO poderá ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} L[y] &= P_2(x)y''(x) + P_2'(x)y'(x) + P_0(x)y(x) \\ &= [P_2(x)y'(x)]' + P_0(x)y(x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Assim, obtém-se da expressão I.7:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}Q[u, v](x) &= v(x)[(P_2(x)u'(x))' + P_0(x)u(x)] - u(x)[(P_2(x)v'(x))' + P_0(x)v(x)] \\ &= v(x)[P_2(x)u'(x)]' - u(x)[P_2(x)v'(x)]' \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Integrando a expressão acima por partes, chega-se a uma expressão para o operador  $Q[u, v](x)$ :

$$\begin{aligned}
Q[u, v](x) &= v(x)P_2(x)u'(x) - \int u'(x)P_2(x)v'(x)dx \\
&\quad - u(x)P_2(x)v'(x) + \int u'(x)P_2(x)v'(x)dx \\
&= P_2(x)[v(x)u'(x) - u(x)v'(x)]
\end{aligned} \tag{I.12}$$

## I.2 Equações diferenciais ordinárias e condições de contorno

Assume-se uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem do tipo:

$$f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0 \tag{I.13}$$

Uma equação deste tipo pode ter infinitas possíveis soluções. Para ilustrar este fato, toma-se  $a(x) = 0$  e  $b(x) = 1$ . Neste caso, a equação resultante será:

$$f''(x) + f(x) = 0 \tag{I.14}$$

cuja solução geral é

$$f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x) \tag{I.15}$$

Como existem infinitas combinações entre  $C_1$  e  $C_2$ , existirão infinitas soluções correspondentes. Ao impor uma condição de contorno, encontra-se uma das constantes ( $C_1$  ou  $C_2$ ) ou uma equação que as relacione. Por exemplo, impondo a condição de contorno  $f(0) = 0$ , chega-se a

$$C_1 \cos(0) + C_2 \text{sen}(0) = C_1 = 0 \tag{I.16}$$

resultando na solução:

$$f(x) = C_2 \text{sen}(x) \tag{I.17}$$

No entanto, o conjunto da equação I.14 e a condição de contorno imposta ainda tem infinitas soluções, correspondentes a infinitos valores de  $C_2$ . Assim, torna-se necessária a imposição de uma segunda condição de contorno para o problema ter uma solução única. Por

exemplo, usando a condição de contorno  $f\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 1$ , tem-se:

$$C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 1 \quad (\text{I.18})$$

resultando na solução:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad (\text{I.19})$$

Generalizando, uma equação de  $2^a$  ordem sempre necessitará duas condições de contorno para ter solução única. No entanto, em alguns casos, uma equação de  $2^a$  ordem com duas condições de contorno pode não ter soluções possíveis ou ter infinitas soluções. Por exemplo, impondo as condições de contorno  $f(0) = f\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 0$  à equação I.14, resulta:

$$C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$C_1 \cos\left(\frac{\Pi}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Pi}{2}\right) = C_2 = 0 \quad (\text{I.21})$$

Ou seja, resulta na solução trivial  $f(x) = 0$ .

Analogamente, impondo as condições de contorno  $f(0) = f(\Pi) = 0$  à equação I.14, resulta:

$$C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$C_1 \cos(\Pi) + C_2 \operatorname{sen}(\Pi) = -C_1 = 0 \quad (\text{I.23})$$

Ou seja, resulta em infinitas soluções do tipo  $f = C_2 \operatorname{sen}(x)$ . Assim, a imposição de duas condições de contorno é condição necessária para uma equação de  $2^a$  ordem ter solução única porém não é condição suficiente.

### I.3 O Problema de Sturm-Liouville

Chama-se de equação de Sturm-Liouville a equação diferencial ordinária:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - s(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (\text{I.24})$$



Para resolvê-la de forma a encontrar uma solução única, será necessário que a equação satisfaça condições de contorno adequadas, logo, se trata de um problema de contorno. O problema de Sturm-Liouville resume-se a encontrar os valores de  $\lambda$  para os quais existe uma solução não trivial da equação de Sturm-Liouville que satisfaça duas condições de contorno homogêneas do tipo:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (\text{I.25a})$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (\text{I.25b})$$

Tais valores de  $\lambda$  são chamados *autovalores* da equação e suas soluções correspondentes  $y$  são denominadas *autofunções* do problema. Da mesma maneira que se dá o nome de *espectro* de uma matriz  $M$  ao conjunto de seus autovalores, o *espectro* do problema de Sturm-Liouville será o conjunto dos *autovalores*  $\lambda$ .

O operador linear de Sturm-Liouville é definido como:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] - s(x) \quad (\text{I.26})$$

De modo que a equação de Sturm-Liouville pode ser escrita da forma:

$$\mathcal{L}[y] = -\lambda r(x)y \quad (\text{I.27})$$

Se o problema de Sturm-Liouville satisfizer as condições adicionais:

- $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $s(x)$  e  $r(x)$  contínuas em  $[a, b]$ ,
- $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0 \forall x \in [a, b]$

é chamado de Problema de Sturm-Liouville Regular (PSLR). Neste caso, observam-se propriedades especiais, que serão listadas e demonstradas a seguir.

### I.3.1 Propriedade 1 do PSLR

Comparando as expressões I.10 e I.26, conclui-se que o operador  $\mathcal{L}[y]$  de Sturm-Liouville está na forma auto-adjunta, e, portanto, valem as relações I.7 e I.11. Combinando estas duas relações, pode-se chegar ao resultado:

$$v(x)\mathcal{L}[u(x)] - u(x)\mathcal{L}[v(x)] = v(x)[p(x)u'(x)]' - u(x)[p(x)v'(x)]' \quad (\text{I.28})$$

Integrando o termo à direita da igualdade por partes, chega-se à expressão acima integrada no intervalo  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x)\mathcal{L}[u(x)]dx - \int_a^b u(x)\mathcal{L}[v(x)]dx &= p(x)[v(x)u'(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v'(x)p(x)u'(x)dx \\ &\quad - p(x)[v'(x)u(x)]\Big|_a^b + \int_a^b u'(x)p(x)v'(x)dx \\ &= p(x)[v(x)u'(x) - v'(x)u(x)]\Big|_a^b \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Se  $u(x)$  e  $v(x)$  forem soluções da equação I.24 com as condições de contorno adequadas, dadas pelas equações I.25a e I.25b, tem-se:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad (\text{I.30a})$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (\text{I.30b})$$

$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 \quad (\text{I.30c})$$

$$\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \quad (\text{I.30d})$$

Substituindo estas condições de contorno no termo à direita da igualdade na equação I.29, chega-se a:

$$\begin{aligned} &p(b)v(b)u'(b) - p(b)u(b)v'(b) - p(a)v(a)u'(a) + p(a)u(a)v'(a) = \\ &p(b) \left[ \frac{\beta_2}{\beta_1} v'(b)u'(b) - \frac{\beta_2}{\beta_1} u'(b)v'(b) \right] + p(a) \left[ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v'(a)u'(a) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u'(a)v'(a) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

Logo, substituindo a expressão acima em I.29, conclui-se que, para qualquer Problema de Sturm-Liouville Regular:

$$\int_a^b [v(x)\mathcal{L}[u(x)] - u(x)\mathcal{L}[v(x)]]dx = 0 \quad (\text{I.32})$$

### I.3.2 Propriedade 2 do PSLR

Sejam os autovalores conjugados  $\lambda$  e  $\lambda^*$ , correspondentes às soluções conjugadas  $y$  e  $y^*$  do Problema de Sturm-Liouville. Da equação I.27:

$$\mathcal{L}[y] = -\lambda r(x)y \quad (\text{I.33a})$$

$$\mathcal{L}[y^*] = -\lambda^* r(x)y^* \quad (\text{I.33b})$$

Logo, usando a propriedade 1 do PSLR:

$$\int_a^b [y^* \mathcal{L}[y] - y \mathcal{L}[y^*]] dx = 0 \quad (\text{I.34})$$

Substituindo I.33a e I.33b na expressão acima:

$$\begin{aligned} \int_a^b [-y^* \lambda r(x)y + y \lambda^* r(x)y^*] dx &= (\lambda^* - \lambda) \int_a^b r(x)yy^* dx \\ &= (\lambda^* - \lambda) \int_a^b r(x)|y(x)|^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Como  $r(x)$  foi definido como estritamente positivo e não se deseja uma solução trivial  $y(x) = 0$ , deve-se ter o termo externo à integral nulo, ou seja,  $\lambda^* = \lambda$ . A única forma de termos autovalores  $\lambda = a + bi$  iguais a seus respectivos autovalores conjugados  $\lambda^* = a - bi$  é tendo a parte imaginária destes autovalores nula, ou seja, tendo  $\lambda$  e  $\lambda^*$  reais. Logo, todos os autovalores de um PSLR são reais.

### I.3.3 Propriedade 3 do PSLR

Sejam dois autovalores diferentes  $\lambda_m$  e  $\lambda_n$  do problema de Sturm-Liouville, com autofunções correspondentes  $y_m(x)$  e  $y_n(x)$ , respectivamente. Tem-se que, de I.24:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - s(x)y_m + \lambda_m r(x)y_m = 0 \quad (\text{I.36a})$$

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] - s(x)y_n + \lambda_n r(x)y_n = 0 \quad (\text{I.36b})$$

Multiplicando a primeira equação por  $y_n$ , a segunda por  $y_m$  e subtraindo a segunda da

primeira:

$$y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + (\lambda_m - \lambda_n) r(x) y_m y_n = 0 \quad (\text{I.37})$$

Integrando do intervalo de  $a$  a  $b$ :

$$\int_a^b y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] dx - \int_a^b y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] dx + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m y_n dx = 0 \quad (\text{I.38})$$

Avaliando o primeiro termo da expressão acima utilizando integração por partes, tem-se que:

$$\int_a^b y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] dx = y_n p(x) \frac{dy_m}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b p(x) \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} dx \quad (\text{I.39})$$

Analogamente, integrando o segundo termo e substituindo em I.38:

$$\begin{aligned} & y_n p(x) \frac{dy_m}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b p(x) \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} dx - y_m p(x) \frac{dy_n}{dx} \Big|_a^b \\ & + \int_a^b p(x) \frac{dy_n}{dx} \frac{dy_m}{dx} dx + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m y_n dx = \\ & = p(x) \left[ y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx} \right] \Big|_a^b + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m y_n dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Como já foi demonstrado pela expressão I.31, o primeiro termo da equação acima sempre será nulo para Problemas de Sturm-Liouville Regulares. Logo, chega-se a:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m y_n dx = 0 \quad (\text{I.41})$$

Como admitiu-se que  $\lambda_m$  e  $\lambda_n$  são dois autovalores distintos do problema,  $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$  e:

$$\int_a^b r(x) y_m y_n dx = 0 \quad (\text{I.42})$$

Desta expressão pode-se concluir que todas as autofunções  $y_m$  e  $y_n$  correspondentes a autovalores  $\lambda_m$  e  $\lambda_n$  distintos de um PSLR são ortogonais com peso  $r(x)$  (dado pela equação I.24) no intervalo  $[a, b]$ . A equação I.42 representa o produto interno definido para o espaço formado pelas autofunções  $y_n$ . Uma explicação mais detalhada sobre produtos internos está disponível no Apêndice A.

### I.3.4 Propriedade 4 do PSLR

Sejam  $y_n$  e  $y_m$  duas soluções da equação de Sturm-Liouville, correspondentes a um único autovalor  $\alpha$ . Elas satisfazem as condições de contorno no extremo  $b$ :

$$\beta_1 y_n(b) + \beta_2 y_n'(b) = 0$$

$$\beta_1 y_m(b) + \beta_2 y_m'(b) = 0$$

Matricialmente, pode-se representar estas condições como:

$$\begin{pmatrix} y_n(b) & y_n'(b) \\ y_m(b) & y_m'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.43})$$

Por ser homogêneo, este sistema linear sempre admite a existência de uma solução trivial  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . Como estes valores de  $\beta$  não são os desejados neste caso, o sistema deverá admitir outras soluções, ou seja, o sistema deve ser indeterminado. Assim, as linhas que compõem a matriz dos coeficientes  $A(b) = \begin{pmatrix} y_n(b) & y_n'(b) \\ y_m(b) & y_m'(b) \end{pmatrix}$  devem ser linearmente dependentes e o determinante de  $A(b)$  deverá ser nulo. Logo, tem-se que  $\det A(b) = 0$ .

Para demonstrar a presente propriedade, deseja-se provar que o determinante da matriz  $A(x) = \begin{pmatrix} y_n(x) & y_n'(x) \\ y_m(x) & y_m'(x) \end{pmatrix}$  é nulo em todo o intervalo  $[a, b]$ . Para isso, lembrando-se do fato já demonstrado de que  $\det A(b) = 0$ , avalia-se a função  $\frac{d}{dx} [p(x) \det A(x)]$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [p(x) \det A(x)] &= p'(x) \det A(x) + p(x) [\det A(x)]' \\ &= p'(x) [y_n(x) y_m'(x) - y_n'(x) y_m(x)] + p(x) [y_n(x) y_m''(x) - y_n''(x) y_m(x)] \\ &= y_n(x) [p(x) y_m'(x)]' - y_m(x) [p(x) y_n'(x)]' \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

Substituindo I.24 na expressão acima, tem-se:

$$\frac{d}{dx} [p(x) \det A(x)] = y_n(x) [s(x) y_m - \lambda r(x) y_m] - y_m(x) [s(x) y_n - \lambda r(x) y_n] = 0$$

Como a derivada da função  $p(x) \det A(x)$  é nula no intervalo  $[a, b]$ , conclui-se que a função  $p(x) \det A(x)$  é constante no mesmo intervalo. Como foi provado anteriormente que  $\det A(b) = 0$ , conclui-se então que a função  $p(x) \det A(x)$  será nula em todo o intervalo  $[a, b]$ . Porém, já que  $p(x)$  foi definida como estritamente positiva, obtém-se que  $\det A(x) = 0$ . Isto significa que

as linhas  $(y_n(x), y'_n(x))$  e  $(y_m(x), y'_m(x))$  são proporcionais uma à outra, ou seja, as soluções  $y_n(x)$  e  $y_m(x)$  são linearmente dependentes. Desta propriedade conclui-se que, em um PSLR, para um mesmo autovalor  $\lambda_n$  há somente uma autofunção  $y_n$  relacionada.

### I.3.5 Propriedade 5 do PSLR

A propriedade 5 do PSLR diz que um problema de Sturm-Liouville regular tem infinitos autovalores  $\alpha_n$ . Adicionalmente, as autofunções  $y_n$  formam uma base completa. A demonstração desta propriedade é bastante extensa e não será reproduzida neste trabalho, porém ela pode ser encontrada em Morse e Feshbach (1953).

Resumindo, conclui-se que o problema de Sturm-Liouville tem infinitos autovalores  $\alpha$ , correspondentes a infinitas autofunções ortogonais, ou seja, as autofunções do problema formam uma base completa e ortogonal. Assim, pode-se representar qualquer função  $f(x)$  como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x) \quad (\text{I.45})$$

onde  $y_n(x)$  é a autofunção  $n$  do problema, correspondente ao autovalor  $\alpha_n$ . O coeficiente  $a_n$ , corresponde à projeção de  $f(x)$  na base do problema pode ser calculado usando a expressão:

$$a_n = \frac{\langle f(x), y_n(x) \rangle_r}{\langle y_n(x), y_n(x) \rangle_r} \quad (\text{I.46})$$

Onde  $\langle f(x), g(x) \rangle_r$  representa o produto interno de  $f(x)$  e  $g(x)$ , definido como:

$$\langle f(x), g(x) \rangle_r = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx \quad (\text{I.47})$$

Onde a função peso  $r(x)$  é dada pela equação I.24. Portanto, obtém-se:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx}{\int_a^b y_n^2(x)r(x)dx} \quad (\text{I.48})$$

## Apêndice J – Resolução do problema tridimensional

O problema tridimensional consiste em encontrar a distribuição de temperaturas em um filete escoando em torno de um aerofólio. O modelo, representado na figura J.1, admite que o filete tem uma geometria parabólica, ou seja, a seção perpendicular ao escoamento tem a forma de uma parábola. Com o uso de coordenadas cilíndricas parabólicas, dadas por:

$$z = \sigma\tau \quad (\text{J.1a})$$

$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \quad (\text{J.1b})$$

$$x = x \quad (\text{J.1c})$$

tem-se um sistema de coordenadas tal que a interface no filete com o ar se dá em um valor de  $\tau$  constante.

Da mesma maneira que no capítulo 4, o problema da transferência de calor em um filete escoando sobre um aerofólio será resolvido utilizando-se o método da separação de variáveis. Neste caso, deverá ser resolvida a equação da conservação da energia em três dimensões, dada por (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 1960):

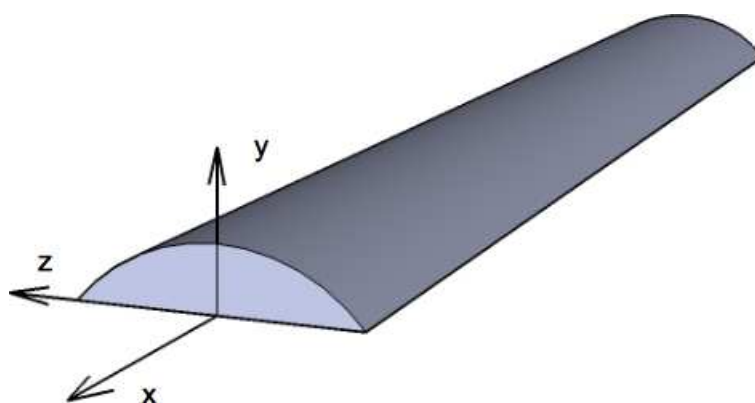


Figura J.1: Modelo físico do problema tridimensional

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T \right) = k \nabla^2 T \quad (\text{J.2})$$

Da mesma maneira que anteriormente, considera-se regime permanente e velocidades de escoamento somente na direção  $x$ , de modo que, valerá a expressão:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k \nabla^2 T \quad (\text{J.3})$$

O laplaciano em coordenadas cilíndricas parabólicas é dado por:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{J.4})$$

Admitindo que a transferência de calor por condução na direção do escoamento é de ordem menor que a transferência de calor por convecção na mesma direção, tem-se que a equação J.3, poderá ser escrita como:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right) \quad (\text{J.5})$$

Por conveniência, definem-se, então as variáveis adicionais dadas por:

$$\bar{T} = T - T_\infty \quad (\text{J.6a})$$

$$\bar{x} = \frac{kx}{4\rho c_p h^2 U} \quad (\text{J.6b})$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2h}} \quad (\text{J.6c})$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{2h}} \quad (\text{J.6d})$$

nas quais  $h$  é a altura máxima do filete e,  $U$ , a velocidade máxima do escoamento. Com estas variáveis, a equação J.5 resulta na seguinte expressão:

$$\frac{u}{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{\sigma}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{\tau}^2} \right) \quad (\text{J.7})$$

Admitindo que a função  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})$  possa ser expressa como:

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\bar{x}) Y_n(\bar{\sigma}) Z_n(\bar{\tau}) \quad (\text{J.8})$$



e substituindo-a em J.7, resulta na seguinte equação:

$$\frac{u}{U} X'_n(\bar{x}) Y_n(\bar{\sigma}) Z_n(\bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2} [X_n(\bar{x}) Y''_n(\bar{\sigma}) Z_n(\bar{\tau}) + X_n(\bar{x}) Y_n(\bar{\sigma}) Z''_n(\bar{\tau})] \quad (\text{J.9})$$

Admitindo que a distribuição de velocidades seja dada por  $u(\bar{y}) = U\bar{y} = \frac{U}{2}(\bar{\tau}^2 - \bar{\sigma}^2)$  e dividindo-a por  $\bar{T}$ , a equação acima resulta em :

$$\frac{\bar{\tau}^2 - \bar{\sigma}^2}{2} \frac{X'_n(\bar{x})}{X_n(\bar{x})} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2} \left[ \frac{Y''_n(\bar{\sigma})}{Y_n(\bar{\sigma})} + \frac{Z''_n(\bar{\tau})}{Z_n(\bar{\tau})} \right] \quad (\text{J.10})$$

ou, rearranjando os termos:

$$\frac{X'_n(\bar{x})}{X_n(\bar{x})} = \frac{2}{(\bar{\tau}^4 - \bar{\sigma}^4)} \left[ \frac{Y''_n(\bar{\sigma})}{Y_n(\bar{\sigma})} + \frac{Z''_n(\bar{\tau})}{Z_n(\bar{\tau})} \right] \quad (\text{J.11})$$

Desta maneira, podem-se separar as variáveis do problema no seguinte sistema de equações:

$$\frac{X'_n(\bar{x})}{X_n(\bar{x})} = \alpha_n \quad (\text{J.12a})$$

$$\frac{\alpha_n \bar{\tau}^4}{2} - \frac{Z''_n(\bar{\tau})}{Z_n(\bar{\tau})} = \beta_n \quad (\text{J.12b})$$

$$\frac{Y''_n(\bar{\sigma})}{Y_n(\bar{\sigma})} + \frac{\alpha_n \bar{\sigma}^4}{2} = \gamma_n \quad (\text{J.12c})$$

A equação J.12a tem como solução a função  $e^{\alpha_n \bar{x}}$ . Já as equações J.12b e J.12c terão soluções semelhantes. Escolhendo corretamente os coeficientes  $a$  e  $b$ , pode-se reescrever estas equações como equações do tipo:

$$f''(x) = (ax^4 + b) f(x) \quad (\text{J.13})$$

Admitindo que esta função  $f(x)$  possa ser escrita na forma de séries, tem-se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (\text{J.14a})$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (\text{J.14b})$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad (\text{J.14c})$$

Substituindo J.14 em J.13, tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = (ax^4 + b) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (\text{J.15})$$

Rearranjando os termos, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^5 n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^3 bc_n x^n + \sum_{n=6}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} ac_n x^{n+4} - \sum_{n=4}^{\infty} bc_n x^n = \\ = & \sum_{n=2}^5 n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^3 bc_n x^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+6)(n+5)c_{n+6} x^{n+4} - \sum_{n=0}^{\infty} ac_n x^{n+4} - \sum_{n=0}^{\infty} bc_{n+4} x^{n+4} = \\ = & \sum_{n=0}^3 x^n [(n+2)(n+1)c_{n+2} - bc_n] + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+4} [(n+6)(n+5)c_{n+6} - ac_n - bc_{n+4}] = \\ = & 0 \end{aligned} \quad (\text{J.16})$$

Para esta equação ser verdadeira para qualquer valor de  $x$ , tem-se que:

$$2c_2 - bc_0 = 0 \quad (\text{J.17})$$

$$3 * 2c_3 - bc_1 = 0 \quad (\text{J.18})$$

$$4 * 3c_4 - bc_2 = 0 \quad (\text{J.19})$$

$$5 * 4c_5 - bc_3 = 0 \quad (\text{J.20})$$

$$n(n-1)c_n - ac_{n-6} - bc_{n-2} = 0 \quad n \geq 6 \quad (\text{J.21})$$

Para não obter uma solução trivial  $0 = 0$ , escolho  $c_0 \neq 0$  e  $c_1 \neq 0$ . Assim, tem-se:

$$c_2 = \frac{b}{2}c_0 = \frac{b}{2!}c_0 \quad (\text{J.22})$$

$$c_3 = \frac{b}{3*2}c_1 = \frac{b}{3!}c_1 \quad (\text{J.23})$$

$$c_4 = \frac{b}{4*3}c_2 = \frac{b^2}{4!}c_0 \quad (\text{J.24})$$

$$c_5 = \frac{b}{5*4}c_3 = \frac{b^2}{5!}c_1 \quad (\text{J.25})$$

$$c_n = \frac{a}{n(n-1)}c_{n-6} + \frac{b}{n(n-1)}c_{n-2} \quad n \geq 6 \quad (\text{J.26})$$

## Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1964.
- ADDY, H. *Ice Accretions and Icing Effects for Modern Airfoils*. NASA TP-2000-210031, April 2000.
- ADDY, H. et al. *A Wind Tunnel Study of Icing Effects on a Business Jet Airfoil*. NASA TM-2003-212124, 2003.
- AIRY, G. B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 3, n. 6, p. 397–403, 1838.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6a. ed. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005.
- BARATA, J. C. A. *Curso de Física Matemática*. agosto 2011. Notas de aula.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- BRAGG, M.; HEINRICH, D.; VALAREZO, W. Effect of underwing frost on a transport aircraft airfoil at flight reynolds number. *Journal of Aircraft*, n. 31 (6), p. 1372–1379, 1994.
- BRAGG, M. B. *Rime Ice Accretion and Its Effect on Airfoil Performance*. Tese (Doutorado) — The Ohio State University, 1981.
- BRAGG, M. B.; BROEREN, A. P.; BLUMENTHAL, L. A. Iced-airfoil aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 41, p. 323–362, jul 2005.
- BREDIF, M. A fast finite element method for transonic potential flow calculations. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, 21., 1983, Reno. *AIAA Paper 83-16755*. Reston: America Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983.
- BREDIF, M. Finite element calculation of potential flow around wings. *Lecture Notes on Physics*, v. 218, 1985.
- BROEREN, A.; ADDY, H.; BRAGG, M. Effect of intercycle ice accretions on airfoil performance. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 2002-0240*. Reno, Nevada, EUA, 2002.
- BRUIN, S. Temperature distribution in couette flow with and without additional pressure. *International Journal of heat and mass transfer*, v. 15, p. 341–349, 1972.
- BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

- COLLYER, M.; LOCK, R. Prediction of viscous effects in steady transonic flow past an airfoil. *Aeronautical Quarterly*, v. 30, p. 485–505, 1979.
- FLEMMING, R.; LEDNICER, D. *High Speed Ice Accretion on Rotorcraft Airfoils*. CR 3910, 1985.
- GENT, R. *TRAJICE2 - A Combined Water Droplet Trajectory and Ice Accretion Prediction Program For Aerofoils*. Farnborough: Royal Aerospace Establishment, 1990. (Technical Report, 90054).
- GENT, R. W.; DART, N. P.; CANSDALE, J. Aircraft icing. *Phil. Trans. Royal Society London A*, n. 358, p. 2873–2911, 2000.
- GILE-LAFLIN, B.; PAPADAKIS, M. Experimental investigation of simulated ice accretions on a natural laminar flow airfoil. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 2001-0088*. Reno, Nevada, EUA, 2001.
- GRAY, V. H. *Correlations Among Ice Measurements, Impingement Rates, Icing Conditions, and Drag Coefficients for Unswept NACA 65A004 Airfoil*. , February 1958.
- GRAY, V. H. *Prediction of aerodynamic penalties caused by ice formations on various airfoils*. NASA-TN-D-2166, February 1964.
- GRAY, V. H.; GLAHN, U. H. von. *Aerodynamics effects caused by icing of an unswept NACA 65A004 airfoil*. Cleveland, Ohio, 1958.
- GUFFOND, D.; BRUNET, L. *Validation du programme bidimensionnel de capitation*. Châtillon Cedex, France: Office National D'Études et de Recherches Aérospatiales, 1988. (Rapport Technique , RP 20/5146 SY).
- HEINRICH, A. et al. Aircraft icing handbook. In: . Atlantic City, NJ: Federal Aviation Administration, U.S. Department of Transportation, 1991. v. 2. (FAA Technical Center Report, DOT/FAA/CT-88/8-2).
- HENGST, J. V.; BOER, J. *The Effect of Hoar-Frosted Wings on the Fokker 50m Take-Off Characteristics*. CP 496, 1991.
- HESS, J.; SMITH, A. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Progress in Aeronautical Sciences*, v. 8, p. 1–138, 1967.
- HOLMES, P.; LUMLEY, J. L.; BERKOOZ, G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- HUDSON, J. L.; BANKOFF, S. G. An exact solution of unsteady heat transfer to a shear flow. *Chemical Engineering Science*, v. 19, p. 591–598, 1964.
- HUDSON, J. L.; BANKOFF, S. G. Heat transfer to a steady couette flow with pressure gradient. *Chemical Engineering Science*, v. 20, p. 415–423, 1965.
- INGELMAN, S. M.; TRUNOV, O.; IVANIKO, A. *Methods for Prediction of the Influence of Ice on Aircraft Flying Characteristics*. Sweden, 1977.
- JACKSON, D.; BRAGG, M. Aerodynamic performance of an nlf airfoil with simulated ice. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 99-0373*. Reno, Nevada, EUA, 1999.

- KENNEDY, J.; MARSDEN, D. Potencial flow velocity distributions on multi-component airfoils sections. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, v. 22, n. 5, p. 243–56, 1976.
- KIM, H.; BRAGG, M. Effects of leading-edge ice accretion geometry on airfoil aerodynamics. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 99-3150*. Reno, Nevada, EUA, 1999.
- KIND, R. (Ed.). *Ice Accretion Simulation Evaluation Test*. Neuilly-Sur-Seine Cedex: North Atlantic Treaty Organization - Research and Technology Organisation - NATO-RTO, 2001. 32 p. (Technical Report, 038).
- KLIEWER, D. *Análise de perfis aerodinâmicos Joukowski*. Disponível em [http : //www.profezequias.net/air foil\\_david\\_kliwer.pdf](http://www.profezequias.net/airfoil_david_kliwer.pdf).
- KORKAN, K.; JR., E. C.; CORNELL, C. Experimental aerodynamic characteristics of an naca 0012 airfoil with simulated ice. *Journal of Aircraft*, v. 2, n. 22, p. 130–134, February 1985.
- KRAUSE, E. *Fluid Mechanics: With problems and solutions and an aerodynamic laboratory*. Germany: Springer-Verlag, 2005.
- LANDSBERG, B. *Aircraft icing*. [S.l.], Março 2008.
- LANGMUIR, I.; BLODGETT, K. B. A mathematical investigation of water droplets trajectories. In: SUITS, C. G.; WAY, H. E. (Ed.). *The Collected Works Of Irving Langmuir. The Atmospheric Phenomena*. New York: Pregamon Press Reprints, 1961, (10). p. 349–93. (Report n. RL-224, December 1944 - July 1945).
- LEARY, W. M. "We Freeze to Please" *A History of NASA's Icing Research Tunnel and the Quest for Flight Safety*. : National Aeronautics and Space Administration, 2002. (The NASA History Series, NASA SP-2002-4226).
- LUDLAM, F. H. The heat economy of a rimed cylinder. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 77, n. 334, p. 663–666, 1951.
- MACARTHUR, C.; KELLER, J.; LUERS, J. Mathematical modeling of airfoil ice accretion on airfoils. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, 20., 1987, Reno. *AIAA Paper 82-36042*. Reston: America Institute of Aeronautics and Astronautics, 1982.
- MAKKONNEN, L. Heat transfer and icing of a rough cylinder. *Cold Regions and Technology*, v. 10, p. 105–116, 1985.
- MASON, B. *The Physics of the Clouds*. 2a. ed. London: Oxford University Press, 1971.
- MESSINGER, B. L. Equilibrium temperature of an unheated icing surface as a function of air speed. *Journal of Aeronautical Sciences*, v. 20, n. 1, 1953.
- MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
- PAPADAKIS, M.; ALANSATAN, S.; SELTMANN, M. Experimental study of simulated ice shapes on a naca 0011. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 99-0096*. Reno, Nevada, EUA, 1999.

- PAPADAKIS, M.; ALANSATAN, S.; WONG, S. Aerodynamic characteristics of a symmetric naca section with simulated ice shapes. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA Paper 2000-0098*. Reno, Nevada, EUA, 2000.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes: The art of scientific computing*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2007.
- PULINO, P. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. janeiro 2012. Notas de aula.
- RUFF, G. A.; BERKOWITZ, B. M. *Users Manual for the NASA Lewis Ice Accretion Prediction Code (LEWICE)*. Cleveland: National Aeronautics and Space Administration, 1990. 240 p. (Contractor Report, 185129).
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. *Boundary-Layer Theory*. 8. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- SESTAK, J.; RIEGER, F. Laminar heat transfer to a steady couette flow between parallel plates. *International Journal of heat and mass transfer*, v. 12, p. 71–80, 1969.
- SILVA, G. A. L. *Modelagem e simulação da operação de sistema antigelo eletrotérmico de um aerofólio*. São Paulo, SP, Brazil: Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.
- SILVA, G. A. L. *Transferência de Calor e Massa no escoamento Bifásico em Torno de Aerofólios Equipados com Sistemas de Antigelo Aeronáuticos*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil, 2009.
- STEFANINI, L. M. *Efeitos da Camada Limite Térmica na Formação de Gelo em Aerofólios de Uso Aeronáutico*. São Paulo, SP, Brazil: Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.
- WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 2a. ed. New York: McGraw-Hill, 2000.
- WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. *The Parabolic Cylinder Function*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
- WRIGHT, W.; GENT, R.; GUFFOND, D. *DRA/NASA/ONERA Collaboration on Icing Research Part II - Prediction of Airfoil Ice Accretion*. Cleveland: National Aeronautics and Space Administration, 1997. 50 p. (Contractor Report, 202349).
- WRIGHT, W. B. NASA CR. *User Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6*. Cleveland: National Aeronautics and Space Administration, 1995. 95 p. (Contractor Report, 198355).
- WRIGHT, W. B. *User Manual for the NASA Glenn Ice Accretion Code LEWICE Version 2.0*. Cleveland: National Aeronautics and Space Administration, 1999. 181 p. (Contractor Report, 209409).
- WRIGHT, W. B.; CHUNG, J. Correlation between geometric similarity of ice shapes and the resulting aerodynamic performance degradation - a preliminary investigation using wind. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *AIAA 2000 0097*. Reno, Nevada, EUA, 2000.
- ZIERTEN, T.; KHODADOUST, A. Effects of wing simulated ground frost on aircraft performance. In: . (Ed.). *VKI Lecture Series*. .: [s.n.], 1987. cap. .