FRANCIS VALTER PÊPE FRANÇA

TRANSITÓRIO HIDRÁULICO COM TENSÃO DE CISALHAMENTO NA
PAREDE DO CONDUTO FORÇADO MODELADA POR GRADIENTE
HARMÔNICO DE PRESSÃO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

SÃO PAULO
2012

FRANCIS VALTER PÊPE FRANÇA

TRANSITÓRIO HIDRÁULICO COM TENSÃO DE CISALHAMENTO NA
PAREDE DO CONDUTO FORÇADO MODELADA POR GRADIENTE
HARMÔNICO DE PRESSÃO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração: Engenharia
Hidráulica

Orientador: Prof. Dr. Podalyro Amaral de
Souza

SÃO PAULO
2012

DEDICATÓRIA

A Deus, a minha família, a minhas irmãs e tio, aos amigos e principalmente aos meus pais, Jandira e Walter (in memoriam), a minha tia, Valdelice e a minha esposa, Luciane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço verdadeiramente a todos os amigos que ajudaram de diversas formas na continuação dessa verdadeira jornada em busca da obtenção de um pouco mais de conhecimento na área de Engenharia Hidráulica. Jornada esta, que teve início com o mestrado em 2003 e a defesa da Dissertação em 2006 e finaliza mais uma etapa com esta Tese.

No essencial apoio ao desenvolvimento desta pesquisa sobre Transitórios Hidráulicos deixo um agradecimento especial:

Para o Prof. Dr. Podalyro Amaral de Souza, por sua sabedoria, coerência, compreensão e orientação decisiva em cada etapa desta pesquisa;

Para o Prof. Dr. Hans George Arens, pela colaboração na feitura do trabalho;

Para o Eng. Civil MSc Pedro Alves Silva, pela colaboração e apoio;

Para o Prof. Dr. Luis Fernando Maia Lima, pela colaboração e apoio;

Prof. Dr. Celso de Oliveira Borges, pela compreensão, apoio, confiança e incentivo na etapa decisiva desta pesquisa;

Aos colegas da UFRB – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, pela paciência, apoio, compreensão e confiança;

Aos colegas do IFSP – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, pela receptividade e apoio no desenvolvimento desta pesquisa; e

Aos amigos da secretaria do PHD – Departamento de Engenharia Hidráulica e Sanitária da USP, pelo profissionalismo e ajuda além das suas atribuições.

“Generosidade mental – Ensine o que sabe;
Honestidade moral – Pratique o que ensina; e
Humildade inteligente – Pergunte o que ignora.”
(Beda, monge beneditino).

RESUMO

FRANÇA, F. V. P. **Transitório Hidráulico com tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado modelada por gradiente harmônico de pressão.** 2012. 116 f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Neste trabalho é apresentada a análise do transitório hidráulico com a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, tendo sido modelada por gradiente harmônico de pressão.

É apresentada, também, a comparação dos resultados obtidos com a aplicação do método numérico de MacCormack com a utilização de fator de atrito em relação aos obtidos através da utilização de MacCormack com a introdução da tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão, na análise de transitórios hidráulicos em condutos forçados.

Palavras-chave: Transientes hidráulicos, Cisalhamento, Métodos numéricos.

ABSTRACT

FRANÇA, F. V. P. **Hydraulic Transient with wall shear stress on the pressurized flow modeled by harmonic Pressure Gradient.** 2012. 116 f. Thesis (Doctoral) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

This work presents the analysis of the Hydraulic Transient with wall shear stress on the pressurized flow modeled by harmonic Pressure Gradient.

Appears also to compare results obtained with the application of the MacCormack numerical method with the use of friction factor with respect to those obtained through use of MacCormack with the introduction of wall shear stress on the pressurized flow modeled by harmonic Pressure Gradient in the analysis of hydraulic transients.

Keywords: Hydraulic transients, Wall shear, Numerical methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de perfil de velocidades em condições transitórias.....	18
Figura 2 – Medição experimental de perfis de velocidades durante o transiente hidráulico.....	27
Figura 3 – Diagrama do sistema para a dedução da equação do movimento.....	30
Figura 4 – Volume de controle para a dedução da equação da conservação da massa.....	32
Figura 5 – Esquema de perfil de velocidades.....	45
Figura 6 – Subdivisão do tubo em trechos para a facilitação da aplicação do modelo de MacCormack.....	65
Figura 7 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.....	80
Figura 8 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	88
Figura 9 – Gráfico da superposição dos resultados obtidos através de simulações com o Método das Características e Esquema de MacCormack, antes e depois do refinamento da malha $x-t$	89

Figura 10 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.....	97
Figura 11 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	105
Figura 12 – Gráfico da superposição dos resultados obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.....	106
Figura 13 – Gráfico da superposição dos resultados obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	106
Figura 14 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.....	107
Figura 15 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	108

Figura 16 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções para os dados do pesquisador Pezinga.....109

Figura 17 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....109

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados experimentais obtidos pelo pesquisador Pezinga.....	69
Tabela 2 – Dados experimentais obtidos pelos pesquisadores Bergant e Simpson.....	71
Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.....	73
Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	81
Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com a tensão de atrito modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.....	89
Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com a tensão de atrito modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.....	97

LISTA DE SÍMBOLOS

V_0	Velocidade inicial	(m/s)
D	Diâmetro da tubulação	(m)
a	Celeridade	(m/s)
L	Comprimento da tubulação	(m)
f	Fator de atrito	(-)
H_v	Carga na válvula	(m)
θ	Tempo de fechamento da válvula	(s)
m	Expoente da taxa de fechamento da válvula	(-)
N	Número de trechos	(-)
C_n	Número de Courant	(-)
Δx	Tamanho dos trechos	(m)
t	Tempo	(s)
A	Área da tubulação	(m ²)
Q	Vazão	(m ³ /s)
Q_0	Vazão inicial	(m ³ /s)
R	Raio do tubo	(m)
H_R	Carga no reservatório	(m)
τ	Lei de fechamento da válvula	(-)
g	Aceleração da gravidade	(m/s ²)
ρ	Massa específica	(kg/m ³)
k	Coeficiente de dissipação	(-)
k	Argumento da função de Bessel	(-)
k_0	Contador de Moivre	(-)
K	Módulo de elasticidade volumétrica	(Pa)
V_0	Velocidade média	(m/s)
p	Pressão	(Pa)
L_1	Equação do Movimento	(-)
L_2	Equação da Continuidade	(-)
p	Pressão	(Pa)
λ_1	Multiplicador de Lagrange	(-)

λ_2	Multiplicador de Lagrange	(-)
e	Base neperiana	(-)
M	Parâmetro de entropia	(-)
$u_{\text{máx}}$	Velocidade máxima	(m/s)
$\bar{u}$	Velocidade média	(m/s)
μ	Viscosidade Dinâmica	(kg/m.s)
ν	Viscosidade Cinemática	(kg/m ³)
τ_0	Tensão de cisalhamento	(Pa)
ω	Velocidade angular	(rad/s)

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO.....	16
2 – OBJETIVOS.....	21
3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
4 – EQUAÇÕES QUE REGEM O ESCOAMENTO TRANSITÓRIO EM CONDUTOS FORÇADOS.....	29
4.1 – EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.....	29
4.2 – EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA.....	32
5 – MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO TRANSITÓRIO EM CONDUTOS SOB PRESSÃO.....	35
5.1 – MÉTODO DE MACCORMACK.....	38
5.1.1 – Condição de Contorno.....	42
5.1.2 – Critério de Estabilidade.....	43
6 – TENSÃO DE CISALHAMENTO NA PAREDE DA TUBULAÇÃO.....	45
6.1 – MODELO TENTATIVA.....	45
7 – DESENVOLVIMENTO DO MODELO.....	48
7.1 – FÓRMULA DE MOIVRE.....	48

7.2 – ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PLANAS.....	50
7.3 – FUNÇÃO DE BESSEL.....	54
7.3.1 – Função de Bessel para o argumento de ordem de grandeza elevada....	55
8 – APLICAÇÃO DOS MODELOS.....	62
9 – ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	73
10 – CONCLUSÕES.....	111
11 – REFERÊNCIAS.....	113

1. INTRODUÇÃO

A análise de escoamento transitório em conduto cilíndrico circular faz-se, em hidráulica, sobre um sistema de duas equações diferenciais parciais. Uma garantindo o princípio da conservação de massa de um sistema, geralmente expressa na forma:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

E outra seguindo o princípio da quantidade de movimento, apresentada normalmente como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2)$$

Por se tratarem de duas das equações fundamentais na análise de escoamento transitório em conduto cilíndrico, a equação da conservação de massa e a da quantidade de movimento terão o seu desenvolvimento descrito no capítulo 4 deste trabalho, intitulado: Equações que regem o escoamento transitório em condutos forçados.

Nesta equação (2) o último termo do primeiro membro modela, indiretamente, a transformação de energia em calor. Este fenômeno é conhecido por perda de carga (energia dissipada por unidade de peso).

Esta última parcela do primeiro membro da equação (2), $\frac{f}{2DA} Q|Q|$ apresenta-se desta forma por ter sido modelada com auxílio da fórmula universal de perda de carga distribuída:

$$\Delta H = \frac{8fLQ|Q|}{\pi D^5 g} \quad (3)$$

Que é válida para escoamento permanente em conduto cilíndrico circular.

Entre as premissas para o estabelecimento da equação (3) está a de que a tensão de cisalhamento (τ_0) que a parede do tubo aplica sobre o escoamento é proporcional ao quadrado da velocidade média ($\bar{u}$), isto é,

$$\tau_0 \sim \bar{u}^2 \quad (4)$$

Esta mesma premissa pode ser encontrada em outros fenômenos onde se faz presente a tensão de cisalhamento (τ_0) sobre uma superfície, como na queda de um pára-quedista, no arraste sobre a fuselagem de um automóvel ou de um avião e sobre o casco de um barco.

Em todos estes casos a premissa de que ($\tau_0 \sim \bar{u}^2$) é de boa qualidade, principalmente pelo fato de que o perfil de velocidades que se estabelece a partir da superfície sólida é uma função apenas crescente.

A definição do fator de atrito (f), presente na fórmula universal de perda de carga distribuída, surgiu para se transformar a proporcionalidade indicada na equação (4) em uma igualdade, ou seja

$$\tau_0 = \left(\frac{f}{8} \rho \right) \bar{u}^2 \quad (5)$$

Os cálculos de condições transitórias em hidráulica realizados, ou com a adoção de um fator de atrito (f) constante ou com um fator de atrito (f) dependente da vazão (Q), tem atendido, satisfatoriamente, as necessidades de dimensionamento das tubulações na engenharia hidráulica. Mesmo assim, resta uma falha conceitual que precisa ser superada para uma modelação mais realística do escoamento transitório.

Em escoamento transitório com reversão do gradiente longitudinal de pressão ocorre associadamente a reversão do sentido do perfil de velocidades de modo evolutivo, passando por um perfil como o esquematizado na figura (1):

Figura 1 – Esquema de perfil de velocidades em condição transitória.

Pelo perfil esquematizado na figura (1) é possível ter-se a velocidade média nula ($\bar{u} = 0$) com tensão na parede diferente de zero ($\tau_0 \neq 0$). Nesta condição, e que certamente ocorre na reversão do perfil, não vale a premissa ($\tau_0 \sim \bar{u}^2$).

Por esta razão, qualquer que seja a melhoria na modelação do fator de atrito (f), sempre haverá falha pelo fato da perda de carga depender de $fQ|Q|$, pois quando $\bar{u} = 0$, tem-se $Q = 0$, para qualquer que seja a melhoria no modelo do fator de atrito, com implicação de perda igual a zero, o que não é verdade quando ($\tau_0 \neq 0$).

O caminho para superar esta falha conceitual consiste em se obter um modelo realístico de perfil de velocidade $u(r, \omega, t)$ que permita a determinação do gradiente do perfil de velocidades junto à parede:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega, t) \right|_{r=R} \quad (6)$$

Com isto pode-se obter a tensão na parede:

$$\tau_0 = -\mu \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega, t) \Big|_{r=R} \quad (7)$$

E a correspondente a perda de carga associada à frequência $\omega = \frac{a}{4L}$ e ao instante (t).

Tal perfil de velocidades ainda precisa ser obtido para escoamento turbulento. Para escoamento laminar em conduto cilíndrico circular com gradiente de pressão variando de modo harmônico, este perfil de velocidade pode ser encontrado em BIRD (1960) e em WOMERSEY (1955):

$$u(r, \omega, t) = Real \left\{ \frac{A}{i\rho\omega} \left[1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right] e^{i\omega t} \right\} \quad (8)$$

O perfil de velocidades dado pela equação (8) foi obtido a partir da equação de Navier-Stokes, impondo-se:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -A Real(e^{i\omega t}) \quad (10)$$

Na equação (8) tem-se também:

$$i = \sqrt{-1} \quad (11)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} i^{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

$J_0(z)$ é a função de Bessel de ordem zero para uma variável complexa $(z)=Kr$, definida por:

$$J_0(z) = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \quad (13)$$

Portanto, neste trabalho, não será estudada uma melhoria para modelação do fator de atrito (f), uma vez que sempre haverá falha nesta tentativa, pelo fato da perda de carga depender de $fQ|Q|$, pois quando $\bar{u} = 0$, tem-se $Q=0$, para qualquer que seja a melhoria no modelo do fator de atrito, com implicação de perda igual a zero, o que não é verdade quando $\tau_0 \neq 0$.

Este trabalho trata da obtenção de um equacionamento matemático que permita a introdução da tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, sendo ela, modelada por um gradiente harmônico de pressão.

2. OBJETIVOS

Desenvolver um equacionamento matemático que permita a introdução da tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, modelada por um gradiente harmônico de pressão.

Analisar o transitório hidráulico através do esquema numérico de MacCormack com a introdução da expressão matemática da tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, modelada por um gradiente harmônico de pressão.

Comparar os resultados obtidos com a aplicação do método numérico de MacCormack com a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, modelada por um gradiente harmônico de pressão, com os obtidos pela aplicação de MacCormack com fator de atrito constante, além da comparação com resultados experimentais obtidos por diferentes pesquisadores.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Transitório Hidráulico é o conjunto das mudanças que ocorrem nas grandezas hidráulicas que caracterizam um escoamento ao longo do tempo. Estas grandezas são: pressão (p) e velocidade média (V) ou, de forma alternativa, carga (H) e vazão (Q).

Assim, um escoamento transitório, pode ser entendido como um escoamento que depende do tempo e que ocorre entre dois escoamentos permanentes.

Golpe de Aríete é o termo técnico que se usa para designar o fenômeno da variação da pressão que se verifica num conduto forçado quando a velocidade do escoamento é modificada pela ação de algum elemento do sistema.

O golpe de aríete pode ocorrer num conduto forçado quando há um retardamento ou uma aceleração do escoamento, tal como acontece quando uma válvula na linha tem sua abertura alterada. Se a alteração for gradual, os cálculos podem ser feitos pelo método de oscilação de massa, admitidos o líquido incompressível e o conduto rígido.

Quando uma válvula é rapidamente fechada num conduto durante o escoamento, a vazão através da válvula é reduzida. Com isso a carga no lado de montante da válvula aumenta e provoca uma flutuação de alta pressão que se propaga para montante com a velocidade de propagação de uma onda sonora (a). Essa flutuação de pressão atua de modo a reduzir a velocidade do escoamento.

A jusante da válvula, a pressão reduz-se e uma onda de pressão reduzida propaga-se para jusante com celeridade (a), o que também diminui a velocidade. Se o fechamento é suficientemente rápido e a pressão do regime permanente é suficientemente baixa, uma bolsa de vapor pode formar-se a jusante da válvula. Quando isso acontece, a bolsa eventualmente entra em colapso, provocando uma onda de alta pressão rumo à jusante.

A análise do escoamento transitório consiste na determinação da pressão $p(x,t)$ e da velocidade $V(x,t)$ numa posição (x) qualquer da tubulação para um instante (t) dado. Na Engenharia Hidráulica é mais comum o uso da carga $H(x,t)$ e da vazão $Q(x,t)$ em lugar de $p(x,t)$ e $V(x,t)$ respectivamente.

Os escoamentos transitórios constituem um tema de grande interesse na Engenharia Hidráulica, devido principalmente às cargas de pressões que ocorrem durante o transitório e que podem ultrapassar as pressões de projeto, pondo assim em risco a estabilidade da instalação hidráulica.

Um dos primeiros a se ocupar do problema foi provavelmente MICHAUD (1878) *apud* LAZO (1991) que fez pesquisas do fenômeno em tubulações e publicou os seus resultados em 1878.

Posteriormente JOUKOWSKY (1898) *apud* ALLIEVI (1904) demonstrou que a velocidade de propagação de uma variação de pressão, provocada por manobra de uma válvula, é função da elasticidade das paredes da tubulação. Conclusão similar à que tinha chegado HELMHOLTZ (1890) *apud* LAZO (1991) para as ondas sonoras em um meio líquido. JUOKOWSKY (1898) *apud* ALLIEVI (1904) ainda pesquisou e formulou uma teoria matemática para tubulações e equipamentos tais como: válvulas, chaminés de equilíbrio e válvulas de alívio, funcionando em diversas condições. Publicou seus trabalhos em 1898, e que são considerados como a primeira sistematização teórica do fenômeno do escoamento transitório.

ALLIEVI (1904) continuou e aprofundou as pesquisas de JOUKOWSKY (1898) *apud* ALLIEVI (1904), publicando em 1904 o trabalho "Theorie general Du mouvement varie de l'eau dans tuyaux de conduit", considerado a base dos desenvolvimentos posteriores sobre a matéria.

Devido à complexidade das equações que regem o fenômeno, foram desenvolvidos métodos gráficos para sua resolução, principalmente nos trabalhos de BERGERON (1935 e 1936).

Diversos pesquisadores se ocuparam do estudo dos escoamentos transitórios, entre 1950 e 1970, melhorando os métodos gráficos e analíticos de solução das equações, entre os quais cabe destacar PARMAKIAN (1950 e 1963) e RLECH (1965) *apud* LAZO (1991).

A partir de 1970, a introdução dos computadores permitiu utilizar métodos numéricos na solução das equações, tais como o método das características e o método das diferenças finitas. Os trabalhos de TULLIS (1976), WYLIE e STREETER (1978), MARTIN (1982), são destaques desta época.

O equacionamento do fenômeno para abordagem por métodos numéricos, exige que se divida as tubulações em trechos e se considerem as conexões de tubos e equipamentos ligados ao sistema como condições de contorno na solução das equações diferenciais.

Na pesquisa bibliográfica realizada foi possível constatar a existência de alguns trabalhos que mostram a utilização do esquema de MacCormack na solução numérica de transientes em canais, como FENNEMA e CHAUDHRY (1986), BHALLAMUDI e CHAUDHRY (1991), GARCIA-NAVARRO e SAVIRÓN, (1992) e GARCIA-NAVARRO *et al.* (1992).

Em MACCORMACK (1971) e GARCIA-NAVARRO *et al.* (1992) o esquema é apresentado em dois passos, preditor e corretor, tendo o procedimento de inclusão da viscosidade artificial, no caso de simulação de transientes onde ocorrem oscilações numéricas geradas pelo esquema, desenvolvido por JAMESON *et al.* (1981) e apresentada por GHARANGIK e CHAUDHRY (1991).

Em HUSSAINI e CHAUDHRY (1985), três novos esquemas explícitos de diferenças finitas, com precisão de segunda ordem, são introduzidos na análise do golpe de aríete.

São apresentados os esquemas de Gabutti, o Lambda e o de MacCormack, que podem ser usados para avançar a solução numérica de um passo de tempo em relação ao tempo anterior, em todos os pontos da malha, exceto o primeiro e o último.

Se uma das variáveis do escoamento é prescrita na primeira ou na última seção, a solução para a outra variável dependente ainda é necessária, entretanto, a acurácia global do esquema de MacCormack não é prejudicada se a ordem de acurácia das condições de contorno é uma a menos que a dos nós interiores.

Em ZHAO e GUIDAOUI (2004), são comentados os resultados obtidos com a introdução de esquemas explícitos de diferenças finitas na análise do golpe de aríete e apresentado o esquema tipo Godunov para a solução de golpe de aríete com a utilização de esquema explícito de volumes finitos e precisão de primeira e segunda ordens, de forma semelhante ao esquema de MacCormack.

Recentemente, em FRANÇA (2007), há apresentado o Esquema Numérico de MacCormack para a análise de transientes hidráulicos em condutos forçados e os resultados obtidos pelo pesquisador são comparados com o Método das Características e com resultados experimentais obtidos por outros pesquisadores.

Com relação à introdução do fator de atrito não permanente em modelos numéricos, para solução de transientes hidráulicos, a pesquisa bibliográfica mostra que a experiência de ZIELKE (1968) foi a pioneira ao utilizar o atrito não permanente, entretanto trazia uma enorme dificuldade de operação, devido a grande quantidade de coeficientes desconhecidos e diversos pontos de cálculo. O sucesso do Método de Zielke foi a dedução de valores universais para vários coeficientes, eliminando o empirismo da metodologia no caso do estudo do escoamento laminar.

ZIELKE (1968) conseguiu uma modelação considerando diversos fatores que dependiam da frequência, ainda no caso do escoamento laminar, mas apesar desta limitação, teve em seu trabalho daquela época, a inspiração para diversas outras pesquisas até a década de 90.

Antes de BRUNONE (1991), somente TRIKHA (1975), apresentou uma evolução do Método de Zielke, onde o tempo de cálculo foi drasticamente reduzido, entretanto só era válido para pequenos intervalos de tempo.

No trabalho de BRUNONE (1991) aparecem formulações, realmente, inovadoras e medições do perfil de velocidade durante a ocorrência do transitório hidráulico.

Depois do êxito do modelo de ZIELKE (1968), somente a formulação de BRUNONE (1991) alcançou unanimidade entre os pesquisadores.

No trabalho de PEZINGA (2001) a formulação de BRUNONE (1991) é ligeiramente alterada com a inclusão de uma função sinal para o termo de aceleração.

O trabalho de GHIDAOUI e KOLYSHKIN (2001) faz alusão ao comportamento do perfil de velocidade na ocorrência do transitório hidráulico e referencia a entropia máxima, mas, certamente, de toda a pesquisa bibliográfica realizada, o trabalho de LIMA (2006) é aquele que melhor relaciona a tensão de cisalhamento, o princípio da entropia máxima e a análise do transitório hidráulico.

LIMA (2006) utiliza a série de Bessel para modelar a tensão de cisalhamento usando o parâmetro de entropia, mas conclui que a tensão de cisalhamento entrópica de regime oscilatório no transitório tem resultados que não refletem bem os dados experimentais.

LIMA (2006) utiliza o Método das Características com a introdução de uma tensão de cisalhamento entrópica e conclui, também, que não foi possível ter uma boa modelação das ondas de sub-pressão e que o amortecimento das cargas transitórias não foi bem refletido. Mas a tensão de cisalhamento entrópica de regime permanente aplicada ao transitório apresentou melhores resultados do que o uso da tensão de cisalhamento de regime permanente usando o fator de atrito (f).

O trabalho de LIMA (2006), mostra um claro avanço em relação a pesquisa de GHIDAOUI e KOLYSHKIN (2001) no desenvolvimento de uma modelação matemática que relaciona a tensão de cisalhamento e o parâmetro de entropia máxima, entretanto, ainda utiliza o fator de atrito (f), mesmo sendo ele variável ou de diferentes ordens.

ZIDOUH (2009), faz uma análise da evolução da pesquisa sobre o fator de atrito contida nos trabalhos de ZIELKE (1968), TRIKHA (1975), BRUNONE (1991) e PEZINGA (2001) e revela ilustrações de medições experimentais de perfis de velocidade, durante a ocorrência de transitório hidráulico, feitas através de técnica eletroquímica e pulso ultrasônico.

A figura (2) serviu de modelo para a elaboração do desenho esquemático da reversão do perfil de velocidade durante o transitório hidráulico.

Figura 2 – Medição experimental de perfis de velocidades durante o transitório hidráulico.

Fonte: ZIDOUH (2009).

Recentemente em MORAES (2010), a entropia máxima é utilizada para modelar o fator de atrito (f) de escoamento em conduto forçado. O trabalho mostra uma proposta de método de cálculo conceitual, com o objetivo de desenvolver um modelo a partir dos princípios da física com a adoção de hipóteses simplificadoras.

4. – EQUAÇÕES QUE REGEM O ESCOAMENTO TRANSITÓRIO EM CONDUTOS SOB PRESSÃO

Dois equacionamentos básicos da mecânica são aplicadas a um curto trecho de fluido num conduto para a obtenção das equações diferenciais do movimento transitório: a segunda lei do movimento de Newton e a equação da conservação da massa.

As variáveis dependentes são a pressão (p) e a velocidade média (V) numa seção transversal.

As variáveis independentes são a distância (x) medida ao longo do conduto desde a extremidade de montante e o tempo (t); portanto, $p = p(x, t)$, $V = V(x, t)$.

O efeito do módulo de Poisson não será considerado nesta dedução. Para condutos com juntas de expansão, ele não entra na dedução.

O atrito é considerado como proporcional ao quadrado da velocidade.

4.1 – EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Para a aplicação da segunda lei do movimento de Newton, adota-se como sistema isolado o elemento fluido situado entre dois planos paralelos afastados entre si de (δx) e normais ao eixo do conduto, conforme é mostrado na Figura (3), na próxima página.

Figura 3 – Diagrama do sistema para a dedução da equação do movimento.

Fonte: Wylie e Streeter (1978).

Equacionando,

$$pA - \left[pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\delta x \right] + p \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \gamma A \delta x \sin \theta - \tau_0 \pi D \delta x = \rho A \delta x \frac{dV}{dT} \quad (14)$$

Dividindo-se ambos os membros pela massa do elemento $\rho A \delta x$, obtém-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \theta - \frac{4\tau_0}{\rho D} = \frac{dV}{dt} \quad (15)$$

Nos escoamentos turbulentos em regime permanente, $\tau_0 = \rho f V^2 / 8$. Faz-se a hipótese de que o atrito, no escoamento em regime variável, seja idêntico ao do escoamento em regime permanente. Daí, a equação do movimento transforma-se em:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (16)$$

Como o atrito se opõe ao movimento, (V^2) é expresso por $V|V|$ para introduzir o sinal adequado.

Com a expansão do termo de aceleração,

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (17)$$

Nas aplicações do golpe de aríete, o termo $V \frac{\partial V}{\partial x}$ geralmente é muito menor do que $\frac{\partial V}{\partial t}$; por isso ele será omitido, ficando:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (18)$$

A equação (18), variação algébrica da equação (2) é a Equação da Quantidade de Movimento.

4.2 – EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação da conservação da massa para regime variável é aplicada ao volume de controle da figura (4), abaixo:

Figura 4 – Volume de controle para a dedução da equação da conservação da massa.

Fonte: Wylie e Streeter (1978).

Produzindo,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho AV)\delta x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \delta x) \quad (19)$$

Onde δx não é função de (t).

Após o desenvolvimento da equação e a divisão de todos os termos pela massa $\rho A \delta x$, chega-se a:

$$\frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Separando as derivadas totais, tem-se:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

O primeiro termo refere-se à elasticidade da parede do tubo e à sua taxa de deformação com a pressão.

O segundo termo leva em conta a compressibilidade do líquido.

Sabendo-se que a velocidade de alteração da força de tração por unidade de comprimento é $(D/2)dp/dt$, que a velocidade de alteração da tensão é $(D/2t')dp/dt$ e que a velocidade de aumento da elongação é $(D/2t'E)dp/dt$, então tem-se a velocidade de aumento da área:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{D}{2t'E} \frac{dp}{dt} \frac{D}{2} \pi D \quad (22)$$

Usando-se a definição do módulo de elasticidade volumétrica do fluido e o produto da divisão da velocidade de alteração da massa específica, pela massa específica, obtemos:

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \left(1 + \frac{K}{E} \frac{D}{t'} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

Desenvolvendo dp/dt e considerando o termo $V \frac{\partial p}{\partial x}$ normalmente muito menor do que $\frac{\partial t}{\partial t}$; por isso ele é desprezado, gerando:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

A equação (24), variação algébrica da equação (1) é a da Conservação da Massa para um líquido compressível no interior de um conduto elástico e ela quanto a equação do movimento apresentadas são equações diferenciais de derivadas parciais, não lineares em (V) e (p), funções das variáveis independentes (x) e (t).

5. – MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DO ESCOAMENTO TRANSITÓRIO EM CONDUTOS SOB PRESSÃO

Segundo FRANÇA (2006), os sistemas hidráulicos, compostos por dutos com água pressurizada podem sofrer alterações nas condições de escoamento caracterizadas pela mudança de pressão e de velocidade de escoamento do fluido em função do tempo, provocando regimes variados.

Denomina-se transiente ou transitório hidráulico, o regime variado que ocorre durante a passagem de um regime permanente para outro regime permanente. Deste modo, qualquer modificação no movimento ou paralisação de um elemento do sistema provoca os chamados fenômenos transitórios. Após a ocorrência da perturbação, como o fechamento de uma válvula, o regime permanente presente antes da perturbação é alterado, dando origem a um regime não permanente que posteriormente passará a um novo estado de permanência.

Durante o transitório hidráulico, as oscilações de pressão ao longo da canalização ocorrem de maneira brusca, provocando ruídos que se assemelham a pancadas. Por isso, o transitório hidráulico também é comumente denominado de Golpe de Aríete.

As sobrepressões e subpressões que ocorrem durante o transitório hidráulico podem causar sérios problemas à tubulação e seus equipamentos, se estes não forem dimensionados para suportar tais sobrecargas, comprometendo a segurança e o funcionamento do sistema. Desse modo, a quantificação das pressões máximas e mínimas é de fundamental interesse para o projetista, a fim de que este possa dimensionar a tubulação e introduzir equipamentos protetores, cuja finalidade é amortecer as variações de carga, prejudiciais à vida útil da instalação.

A análise dos transitórios nos sistemas hidráulicos é baseada na equação da conservação da massa e na equação da quantidade de movimento. Essas duas equações formam um sistema de equações diferenciais cuja solução exata não está disponível, sendo necessária a utilização de técnicas específicas para se determinar uma solução aproximada do problema. Desse modo, foram criados diferentes métodos, gráficos e analíticos, baseados em diferentes suposições restritivas.

Apesar dos fenômenos transitórios serem conhecidos desde o início do século, foi somente nas últimas décadas, com o surgimento e avanços dos computadores, que estes fenômenos puderam ser estudados mais profundamente, sem a necessidade de simplificações grosseiras. Constituindo-se, hoje em dia, ferramenta indispensável no dimensionamento de sistemas hidráulicos.

O estudo dos transitórios hidráulicos requer o conhecimento das condições iniciais do regime e das condições de contorno, que são os pontos onde ocorrem descontinuidades das grandezas físicas do escoamento.

O método das características é a técnica mais difundida e empregada para a solução das equações que governam o escoamento unidimensional não permanente em dutos sob pressão. Estas equações formam um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas quasi-lineares.

Algumas razões da popularidade do Método das Características são, segundo ALMEIDA e KOELLE (1992):

- a sua conceituação e fundamentação exprimem bem a natureza física real do escoamento transiente sob pressão;
- facilidade de escrever e implementar um programa de computador por meio do uso de um esquema explícito; e
- historicamente é a técnica mais utilizada pelos usuários.

Por outro lado, as equações que governam o escoamento unidimensional não permanente em condutos livres possuem a mesma natureza matemática das referentes aos condutos pressurizados.

Na última década, alguns pesquisadores FENNEMA e CHAUDHRY (1986), BHALLAMUDI e CHAUDHRY (1991), GARCIA-NAVARRO e SAVIRÓN (1992) e GARCIA-NAVARRO *et al.* (1992) utilizaram o esquema explícito de MacCormack para a solução numérica de transientes em canais.

As principais características do esquema são:

- acuracidade (espaço e tempo) de 2ª ordem;
- habilidade de manipular simultaneamente cálculos de escoamentos gradualmente variados bem como os rapidamente variados, contendo choques ou descontinuidades;
- esquema do tipo preditor-corretor, de fácil utilização;
- esquema consistente e estável se a condição de Courant-Friendrich-Lewy (CFL) for satisfeita; e
- produz oscilações numéricas próximas às frentes de onda mais íngremes, como é comum aos esquemas de ordem elevada, podendo ser atenuadas pela introdução de viscosidade artificial ou refinamento da malha x-t (espaço tempo).

Neste trabalho será aplicado o esquema de MacCormack na solução numérica das equações que regem o escoamento não permanente em condutos forçados, uma vez que o referido esquema foi analisado em FRANÇA (2006) e apresentou bons resultados quando comparado ao consolidado Método das Características e frente aos dados experimentais utilizados na citada referência.

Em FRANÇA (2006) o pesquisador observou ainda que os gráficos produzidos com a utilização dos dois métodos mostrou a proximidade de resultados e a utilização da mesma plataforma para a entrada dos dois algoritmos revelou a facilidade da implementação do Método de MacCormack para a solução de escoamentos em condutos forçados, a exemplo do que já ocorre há várias décadas com a sua utilização em escoamentos livres.

Por fim, em FRANÇA (2006), o pesquisador concluiu que apesar da conceituação e fundamentação do Método das Características exprimir bem a natureza física real do escoamento transiente sob pressão, além de ser o método mais utilizado pelos usuários, o Esquema de MacCormack apresenta-se como uma alternativa viável para este tipo de cálculo.

5.1 – MÉTODO DE MACCORMACK

As equações simplificadas, os termos que incluem um subscrito (x) ou (t) significam derivada parcial da variável (H) ou (V) em relação à (x) ou (t), da conservação de massa e quantidade de movimento, equações (1) e (2), respectivamente, aplicáveis a escoamentos não permanentes, segundo WYLIE e STREETER (1978), são:

$$H_t + \left(\frac{a^2}{g}\right) V_x = 0 \quad (25)$$

$$V_t + gH_x + \left(\frac{f}{2D}\right) V|V| = 0 \quad (26)$$

Onde $H(x,t)$ é a carga piezométrica, $V(x,t)$ é a velocidade média, (g) é a aceleração da gravidade, (a) é a celeridade, (D) é o diâmetro da tubulação, e (f) é o coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach.

É assumido que o termo de atrito pode ser aproximado pela fórmula de Darcy-Weisbach para regime permanente.

No desenvolvimento do Esquema de MacCormack será utilizada uma expressão compacta do sistema formado pelas equações (25) e (26), da forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = G \quad (27)$$

Onde:

$$U = \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{g} V \\ gH \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{fV|V|}{2D} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Discretiza-se o domínio de integração, utilizando-se:

$$x_j = j\Delta x \quad (31)$$

e

$$t^n = n\Delta t \quad (32)$$

O esquema é baseado no seguinte procedimento de dois passos MACCORMACK (1971) e GARCÍA-NAVARRO *et al.* (1992):

$$U_j^p = U_j^n - \lambda(F_{j+1}^n - F_j^n) + \Delta t G_j^n \quad (33)$$

Para a equação (33), $1 \leq j \leq NS - 1$

$$U_j^c = U_j^n - \lambda(F_j^p - F_{j-1}^p) + \Delta t G_j^p \quad (34)$$

Para a equação (34), $2 \leq j \leq NS - 1$

Onde (p) e (c) indicam, respectivamente, os passos preditor e corretor, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $F_j = F(U_j)$ e (NS) é a seção situada na extremidade de jusante da tubulação.

A solução no próximo nível de tempo será:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^p + U_j^c) \quad (35)$$

De forma explícita, teremos:

$$H_j^p = H_j^n - \lambda \frac{a^2}{g} (V_{j+1}^n - V_j^n) \quad (36)$$

$$V_j^p = V_j^n - \lambda g (H_{j+1}^n - H_j^n) - \left(\frac{\Delta t}{2D}\right) f_j^n V_j^n |V_j^n| \quad (37)$$

$$H_j^c = H_j^n - \lambda \frac{a^2}{g} (V_j^p - V_{j-1}^p) \quad (38)$$

$$V_j^c = V_j^n - \lambda g (H_j^p - H_{j-1}^p) - \left(\frac{\Delta t}{2D}\right) f_j^p V_j^p |V_j^p| \quad (39)$$

$$H_j^{n+1} = 0,5(H_j^p + H_j^c) \quad (40)$$

$$V_j^{n+1} = 0,5(V_j^p + V_j^c) \quad (41)$$

Nos casos de simulação de transientes onde ocorreram oscilações numéricas produzidas pelo esquema, será introduzida uma viscosidade artificial. Para este propósito será adotado o procedimento desenvolvido por JAMESON *et al.* (1981), e apresentado por GHARANGIK e CHAUDHRY (1991).

Os valores das variáveis no final do passo de tempo calculados pelo esquema de MacCormack serão modificados de acordo com o seguinte algoritmo:

$$v_j = \frac{|H_{j+1} - 2H_j + H_{j-1}|}{|H_{j+1}| + |2H_j| + |H_{j-1}|} \quad (42)$$

$$\varepsilon_{j-\frac{1}{2}} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(v_{j-1}, v_j) \quad (43)$$

$$\varepsilon_{j+\frac{1}{2}} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(v_{j+1}, v_j) \quad (44)$$

Onde (k) é o coeficiente de dissipação.

O coeficiente de dissipação (k) é usado para regular a quantidade de dissipação, e deve ser escolhido o menor valor possível, mas que aplaine as oscilações de alta frequência.

Desta forma, as variáveis calculadas são então modificadas segundo:

$$\alpha_j = \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}(U_{j+1} - U_j) - \varepsilon_{j-\frac{1}{2}}(U_j - U_{j-1}) \quad (45)$$

$$U_j = (U_j - \alpha_j) \quad (46)$$

Desde que os termos de viscosidade artificial são mais elevados que 2ª ordem, a sua adição não reduz a ordem de acuracidade do esquema numérico.

O esquema de MacCormack poderá ser usado para avançar a solução numérica de um passo de tempo em relação ao tempo anterior para todos os pontos computacionais da malha, exceto para o primeiro e o último.

Se uma das variáveis do escoamento é prescrita em uma dessas seções (contornos), a solução para a outra variável dependente é ainda necessária. Uma técnica disponível para a solução desse problema é o uso do método das características, para esses dois pontos extremos.

5.1.1 – Condição de Contorno

O termo condição de contorno refere-se à condição na extremidade de cada tubulação. Pode ser um extremo de um sistema num reservatório, válvula etc. ou a conexão de uma tubulação à outra ou a um elemento de tipo diferente, por exemplo, uma bomba ou reservatório de acumulação.

No trabalho realizado a condição de contorno adotada é que na extremidade de montante da tubulação existe um reservatório de carga constante, dando valor constante a uma das variáveis e na extremidade de jusante existe uma válvula, cujo escoamento é dado por:

$$Q_P = C_d A_v \sqrt{2gH_P} \quad (47)$$

Portanto, a condição de contorno na válvula, adotada para este trabalho é:

$$Q_P = -gB(C_d A_v)^2 + \sqrt{[gB(C_d A_v)^2]^2 + (C_d A_v)^2 2gC_P} \quad (48)$$

$$H_P = C_P - BQ_P \quad (49)$$

Sendo, o equacionamento de C_P , utilizado no método das características, WYLIE e STREETER (1978), dado por:

$$C_P = H_{i+1} + Q_{I-1}(B - R|Q_{i-1}|) \quad (49A)$$

Na válvula, a vazão é obtida através da equação de orifício. Será definida uma abertura adimensional da válvula como a razão entre a abertura em qualquer tempo e a abertura inicial (regime permanente). A lei de fechamento da válvula é dada por WYLIE e STREETER (1978):

$$\tau = \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) E_m \quad (50)$$

Onde (t_c) é o tempo de fechamento e (E_m) é o expoente que traduz a taxa de fechamento da válvula em relação ao tempo. Para ($E_m = 1$), tem-se uma lei de manobra linear.

A acurácia global do esquema de MacCormack não é prejudicada se a ordem de acurácia das condições de contorno é uma a menos que a dos nós interiores CHAUDHRY e HUSSAINI (1987) e GHARANGIK e CHAUDHRY (1991).

5.1.2 – Critério de Estabilidade

A condição imposta para estabilidade numérica será:

$$\Delta t = C_n \frac{\Delta x}{a} \quad (51)$$

Onde C_n é o número de Courant e varia entre zero e um;

Para ($C_n = 1$), não há interpolação espacial nas equações características, e, para ($C_n < 1$), torna-se necessária a interpolação.

Numa rede de tubulações é necessário que o incremento de tempo seja igual para todos os tubos. Há três maneiras de satisfazer esta condição: forçar um pequeno ajuste nas celeridades calculadas, alterar os comprimentos dos tubos ou utilizar o esquema com interpolações.

De acordo com ALMEIDA e KOELLE (1992), o amortecimento numérico é uma função de $\frac{\Delta x}{L}$ e (C_n) e cada onda de pressão tenderá a viajar mais rápido com uma celeridade numérica.

$$a^* = a / C_n \quad (52)$$

Segundo WYLIE e STREETER (1978) é aconselhável evitar interpolações sempre que possível. Se for indispensável, deverá ser usado um número elevado de trechos, de forma que o efeito das interpolações seja mínimo (C_n menor, mas próximo à unidade).

O esquema de MacCormack utiliza a interpolação linear apenas nas equações características aplicadas aos contornos. Isto possibilita um amortecimento numérico da onda de pressão inferior àquele verificado no método das características.

6 – TENSÃO DE CISALHAMENTO NA PAREDE DA TUBULAÇÃO

Visando corrigir a falha conceitual contida na adoção do fator de atrito (f) constante ou variável dependente da vazão (Q), será desenvolvida uma formulação matemática para a tensão de cisalhamento, uma vez que o fator (f) presente na fórmula universal de perda de carga distribuída, surgiu para transformar a proporcionalidade indicada na equação (4) na igualdade mostrada na equação (5).

6.1 – MODELO TENTATIVA

Através da utilização de analogias baseadas nas formulações já comprovadas foi possível elaborar um equacionamento denominado de modelo tentativa, onde a figura (5) mostra, através de um desenho esquemático, alguns dos elementos que aparecerão nas equações a seguir.

Figura 5 – Esquema de perfil de velocidades.

No regime laminar (escoamento permanente) o perfil de velocidades tem a seguinte formulação:

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (53)$$

$$u = u_{m\acute{a}x} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (54)$$

$$u_{m\acute{a}x} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (55)$$

Segundo WOMERSEY (1955), o perfil de velocidades, para o regime laminar, com um transitório que o autor descreve como harmônico, tem a seguinte formulação:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = b_0 \text{Real}(e^{i\omega t}) \quad (56)$$

$$u = \text{Real} \left\{ \frac{b_0 e^{i\omega t}}{i\omega \rho} \left[1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right] \right\} \quad (57)$$

Considerando a equação (12):

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} i^{\frac{3}{2}}$$

Segundo LIMA (2006) a distribuição de velocidade na teoria da entropia máxima (regime turbulento) é igual a:

$$u = \frac{u_{m\acute{a}x}}{M} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \quad (58)$$

M é um parâmetro de entropia adimensional advindo dos multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , usados na maximização condicionada da entropia:

$$M = \lambda_2 u_{m\acute{a}x} \quad (59)$$

Se o regime for turbulento, então ($M > 0$), e se for laminar, então ($M = 0$), deixando, portanto, a equação (58) na forma exata da equação (54):

$$u = u_{m\acute{a}x} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Então, com base na formulação para o perfil de velocidades em regime laminar com transitório harmônico, equação (57) e na distribuição de velocidades na teoria da entropia máxima, equação (58), o modelo tentativa proposto será:

$$u = Real \left\{ \frac{R^2 b_0 e^{i\omega t}}{i\omega \rho M 4\mu} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (60)$$

Sendo possível obter a formulação da tensão de cisalhamento no regime permanente, a partir da equação (58), da seguinte forma:

$$\tau_0 = \mu \frac{U_{m\acute{a}x}}{M} \left\{ \frac{-(e^M - 1) \frac{2r}{R^2}}{\left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]} \right\}_{r=R} \quad (60A)$$

$$\tau_0 = -2\mu \frac{U_{m\acute{a}x}}{MR} (e^M - 1) \quad (60B)$$

7. – DESENVOLVIMENTO DO MODELO

O desenvolvimento do modelo tentativa teve início com o estudo da formulação para a tensão de cisalhamento com o escoamento de um fluido em regime laminar entre duas placas planas proposta por LANDAU e LIFSHITZ (1989).

Onde a profundidade de penetração (δ) é dada por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (61)$$

Então o coeficiente (k) da equação (12) também pode ser expresso como:

$$k = \frac{1+i}{\delta} \quad (62)$$

7.1. – FÓRMULA DE MOIVRE

A introdução da fórmula de Moivre, equação (63), nesta etapa do desenvolvimento do modelo serve para fazer a ligação entre os números complexos e a trigonometria, objetivando a simplificação dos cálculos.

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\left(\cos \frac{\varphi + 2k_0\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi + 2k_0\pi}{n} \right) \right] \quad (63)$$

Sendo,

$$Z = a + bi \quad (64)$$

e

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho \quad (65)$$

Sendo (k_0) um contador usado por Moivre, então para $(k_0 = 1)$:

$$\sqrt{i} = \sqrt{1} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2} \right) \right] \quad (66)$$

$$\sqrt{i} = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] \quad (67)$$

$$\sqrt{i} = 1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (68)$$

Então:

$$\sqrt{i} = \pm \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \quad (69)$$

Dessa forma,

$$k^2 = \frac{i\omega\rho}{\mu} \quad (70)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{v}} \sqrt{i} \quad (71)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{v}} \left[\pm \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (72)$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2v}} (1 + i) \quad (73)$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}} (1 + i) \quad (74)$$

Logo,

$$k = \frac{1+i}{\delta}$$

Portanto esta é a comprovação matemática, através da fórmula de Moivre que a equação (12) também pode ser expressa na forma da equação (62).

7.2. – ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PLANAS

LANDAU e LIFSHITZ (1989) consideraram (a_0) o valor máximo para o gradiente de velocidade do escoamento entre as duas placas planas, portanto:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = a_0 e^{-i\omega t} \quad (75)$$

$$v = \frac{ia_0}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - \frac{\cos(kr)}{\cos(kR)} \right] \quad (76)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{ia_0}{\omega} e^{-i\omega t} \left[k \frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} \right] \quad (77)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{ia_0 k}{\omega} e^{-i\omega t} \left[\frac{\text{sen}(kR)}{\cos(kR)} \right] \quad (78)$$

$\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)}$ resulta em uma função do tipo $(a + bi)$, então:

$$\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} = \tan(kR) \quad (79)$$

$$\tan(kR) = (kR) + \frac{1}{3}(kR)^3 + \frac{2}{15}(kR)^5 + \dots \quad (80)$$

$$\tan(kR) = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)R + \frac{1}{3}\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^3 R^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^5 R^5 + \dots \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \tan(kR) = & \frac{R}{\delta}\left(\frac{R}{\delta}\right)i + \frac{R^3}{3\delta^3} + \left(\frac{R^3}{\delta^3}\right)i + \left(\frac{R^3}{\delta^3}\right)i^2 + \left(\frac{R^3}{3\delta^3}\right)i^3 + \frac{2R^5}{15\delta^5} + \\ & \left(\frac{2R^5}{3\delta^5}\right)i + \left(\frac{4R^5}{3\delta^5}\right)i^2 + \left(\frac{4R^5}{3\delta^5}\right)i^3 + \left(\frac{2R^5}{3\delta^5}\right)i^4 + \left(\frac{2R^5}{15\delta^5}\right)i^5 + \dots \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} = & \left(\frac{R}{\delta} + \frac{R^3}{3\delta^3} - \frac{R^3}{\delta^3} + \frac{2R^5}{15\delta^5} - \frac{4R^5}{3\delta^5} + \frac{2R^5}{3\delta^5}\right) + \\ & i\left(\frac{R}{\delta} + \frac{R^3}{\delta^3} - \frac{R^3}{3\delta^3} + \frac{2R^5}{3\delta^5} - \frac{4R^5}{3\delta^5} + \frac{2R^5}{15\delta^5}\right) \end{aligned} \quad (83)$$

O resultado da equação (83) é uma função do tipo $(a + bi)$. Então, realizando a substituição na eq.(78), temos:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{ia_0 k}{\omega} e^{-i\omega t} (a + bi) \quad (84)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega} i \left(\frac{1+i}{\delta}\right) (\cos \omega t - i \text{sen } \omega t) (a + bi) \quad (85)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega \delta} [(i - 1)(\cos \omega t - i \text{sen } \omega t)(a + bi)] \quad (86)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega \delta} [(\text{sen } \omega t - \cos \omega t) + i(\cos \omega t + \text{sen } \omega t)(a + bi)] \quad (87)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega \delta} [a(\sin \omega t - \cos \omega t) - b(\cos \omega t + \sin \omega t)] + i[b(\sin \omega t - \cos \omega t) + a(\cos \omega t + \sin \omega t)] \quad (88)$$

A parte real da equação (88) é:

$$Real \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega \delta} [a(\sin \omega t - \cos \omega t) - b(\cos \omega t + \sin \omega t)] \quad (89)$$

Estando a velocidade angular (ω) relacionada com a frequência (f) e o período (T), além da celeridade do fluido (a) e o comprimento da tubulação (L), conforme as relações abaixo:

$$\omega = 2\pi f \quad (90)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (91)$$

$$T = \frac{a}{4L} \quad (92)$$

$$\omega = \frac{8\pi L}{a} \quad (93)$$

Este desenvolvimento baseado na formulação de LANDAU e LIFSHITZ (1989) para um escoamento entre placas planas, quando relacionado a equação (7) define que:

$$\tau_0 = \mu Real \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (94)$$

Retomando a eq.(60) do modelo proposto nesta pesquisa e realizando as primeiras simplificações para facilitar as operações matemáticas, tem-se:

$$u = Real \left\{ -C i e^{i\omega t} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (95)$$

Onde a constante (C) é expressa por:

$$C = \left(\frac{R^2 b_0}{\omega \rho M_4 \mu} \right) \quad (96)$$

Sendo (b_0) o gradiente de pressão expresso como a perda de carga inicial por unidade de comprimento:

$$b_0 = \frac{-\rho g \Delta H}{L} \quad (97)$$

Desenvolvendo a equação (95), tem-se:

$$u = -C \cdot Real \left\{ i e^{i\omega t} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (98)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = -C \cdot Real \left\{ -i e^{i\omega t} \frac{(e^M - 1) \left(\frac{dJ_0(kr)}{dr} \right)}{\left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right]} \right\} \quad (99)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C \cdot Real \left[i e^{i\omega t} (e^M - 1) \frac{\left(\frac{dJ_0(kr)}{dr} \right)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (100)$$

A partir da equação (100) e realizando simplificações para facilitar as operações matemáticas, tem-se:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot Real \left[i e^{i\omega t} \frac{\left(\frac{dJ_0(kr)}{dr} \right)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (101)$$

Onde a constante (C_0) é expressa por:

$$C_0 = C(e^M - 1) \quad (102)$$

$$e^{i\omega t} = [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (103)$$

7.3 – FUNÇÃO DE BESSEL

Desenvolvendo a série de Bessel de ordem zero ($\alpha=0$) e considerando ($Kr = Z$), tem-se:

$$\frac{d}{dZ} [J_\alpha(Z)] = J_{\alpha-1}(Z) - \frac{\alpha}{Z} J_\alpha(Z) \quad (104)$$

$$J_{-n}(Z) = (-1)^n J_n(Z) \quad (105)$$

$$\frac{d}{dZ} [J_0(Z)] = J_{-1}(Z) \quad (106)$$

$$\frac{d}{dZ} [J_0(Z)] = -J_1(Z) \quad (107)$$

Retornando com o valor de ($Kr = Z$) na equação (107), obtém-se:

$$\frac{d}{d(kr)} J_0(kr) = -J_1(kr) \quad (108)$$

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dr} [J_0(kr)] = -J_1(kr) \quad (109)$$

$$\frac{d}{dr} [J_0(kr)] = -kJ_1(kr) \quad (110)$$

Inserindo o resultado da eq.(110) na eq.(101), tem-se:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot \text{Real} \left[ie^{i\omega t} \frac{-kJ_1(kr)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (111)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot \text{Real} \left[-ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} \right] \quad (112)$$

7.3.1 – Função de Bessel para o argumento de ordem de grandeza elevada

Para um argumento (k) de ordem de grandeza elevada, vale a expressão de Bessel:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (113)$$

É possível comprovar que o argumento (k) da série de Bessel terá uma ordem de grandeza elevada, já que os cálculos iniciais feitos a partir dos dados genéricos para um sistema semelhante ao que será usado como fonte de dados para a comparação dos resultados finais desta pesquisa.

Os dados do sistema são:

Diâmetro da tubulação (D) = 0,0600m

Celeridade (a) = 400,00m/s

Comprimento da Tubulação (L) = 70,00m

Com a substituição dos dados na equação (93), temos:

$$\omega = \frac{2\pi x 400}{4x70} \quad (114)$$

$$\omega = 8,98 \text{ rad/s} \quad (115)$$

Substituindo o valor encontrado eq.(115), na eq.(61) e considerando a viscosidade cinemática ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), tem-se:

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-6}}{8,98}} \quad (116)$$

$$\delta = 4,72 \times 10^{-4} \quad (117)$$

$$\frac{R}{\delta} = \frac{0,30}{4,72 \times 10^{-4}} \quad (118)$$

$$\frac{R}{\delta} = 635,59 \quad (119)$$

Sendo assim, o resultado previsto para a equação (83), no formato (a+bi), terá uma ordem de grandeza de 10^{13} . Portanto, vale a formulação de Bessel para o argumento (k) de ordem de grandeza elevada, apresentado na equação (113). Desenvolvendo a série, tem-se:

Calculando o termo $\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)}$, da equação (112), temos:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{\cos\left(kR - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots\right)}{\cos\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (120)$$

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{\cos\left(kR - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (121)$$

Uma vez que, matematicamente:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \quad (122)$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad (123)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (124)$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \quad (125)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (126)$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \quad (127)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \text{sen}(x) \quad (128)$$

Baseado nessa relações matemáticas e prosseguindo no desenvolvimento da equação (121), tem-se:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{1 - \frac{\left(kR - \frac{3\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(kR - \frac{3\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(kR - \frac{3\pi}{4}\right)^6}{6!} + \dots}{1 - \frac{\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + \dots} \quad (129)$$

Substituindo a expressão contida na equação (62) para o argumento (k), no termo $kR - \frac{3\pi}{4}$ da equação (129), tem-se:

$$kR - \frac{3\pi}{4} = \frac{(1+i)R}{\delta} - \frac{3\pi}{4} \quad (130)$$

$$kR - \frac{3\pi}{4} = \frac{4R+4Ri-3\delta\pi}{4\delta} \quad (131)$$

$$kR - \frac{3\pi}{4} = \frac{(4R-3\delta\pi)+i4R}{4\delta} \quad (132)$$

A eq.(132) quando colocada na forma (m+in) apresenta mais duas constantes (m) e (n) que trarão uma simplificação matemática à pesquisa.

$$m = \frac{4R-3\delta\pi}{4\delta} \quad (133)$$

$$n = \frac{R}{\delta} \quad (134)$$

Substituindo a expressão contida na equação (62) para o argumento (k), no termo $kR - \frac{\pi}{4}$ da eq.(129), tem-se:

$$kR - \frac{\pi}{4} = \frac{(1+i)R}{\delta} - \frac{\pi}{4} \quad (135)$$

$$kR - \frac{\pi}{4} = \frac{4R+4Ri-\delta\pi}{4\delta} \quad (136)$$

$$kR - \frac{\pi}{4} = \frac{(4R-\delta\pi)+i4R}{4\delta} \quad (137)$$

A equação (137) quando colocada na forma (p+iq) apresenta mais duas constantes (p) e (q) que trarão mais uma simplificação matemática à pesquisa.

$$p = \frac{4R-\delta\pi}{4\delta} \quad (138)$$

$$q = \frac{R}{\delta} \quad (139)$$

Utilizando as constantes (m), (n), (p) e (q) na equação (129) tem-se:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{1 - \frac{(m+in)^2}{2!} + \frac{(m+in)^4}{4!} - \frac{(m+in)^6}{6!} + \dots}{1 - \frac{(p+iq)^2}{2!} + \frac{(p+iq)^4}{4!} - \frac{(p+iq)^6}{6!} + \dots} \quad (140)$$

Operando apenas no numerador da equação (140), temos a expressão:

$$1 - \frac{m^2 + 2mni - n^2}{2} + \frac{m^4 + 4m^3ni - 6m^2n^2 - 4mn^3i + n^4}{24} + \frac{m^6 + 6m^5ni - 15m^4n^2 - 20m^3n^3i + 15m^2n^4 + 6mn^5i - n^6}{720} \quad (141)$$

A eq.(141) pode ser escrita na forma (a+bi), onde:

$$a = 1 - \frac{m^2n}{2} + \frac{m^4 + 6m^2n^2 + n^4}{24} + \frac{m^6 - 15m^4n^2 + 15m^2n^4 - n^6}{720} \quad (142)$$

$$b = i \left(mn + \frac{m^3n - mn^3}{6} + \frac{6m^5n - 20m^3n^3 + 6mn^5}{720} \right) \quad (143)$$

Operando apenas no denominador da equação (140), temos a expressão:

$$1 - \frac{p^2 + 2pqi - q^2}{2} + \frac{p^4 + 4p^3qi - 6p^2q^2 - 4pq^3i + q^4}{24} + \frac{p^6 + 6p^5qi - 15p^4q^2 - 20p^3q^3i + 15p^2q^4 + 6pq^5i - q^6}{720} \quad (144)$$

A equação (144) pode ser escrita na forma ($\alpha + \beta i$), onde:

$$\alpha = 1 - \frac{p^2q}{2} + \frac{p^4 + 6p^2q^2 + q^4}{24} + \frac{p^6 - 15p^4q^2 + 15p^2q^4 - q^6}{720} \quad (145)$$

$$\beta = i \left(pq + \frac{p^3q - pq^3}{6} + \frac{6p^5q - 20p^3q^3 + 6pq^5}{720} \right) \quad (146)$$

O resultado da equação (140) com a utilização de todas as letras que auxiliam no cálculo é:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{a+bi}{\alpha+\beta i} x \frac{\alpha-\beta i}{\alpha-\beta i} \quad (147)$$

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{(a\alpha+b\beta)+i(\alpha b-a\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (148)$$

A equação (148) pode ser escrita na forma $(\theta+\varphi i)$, onde:

$$\theta = \frac{(a\alpha+b\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (149)$$

$$\varphi = \frac{i(\alpha b-a\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (150)$$

Desenvolvendo a expressão entre colchetes da equação (112)

$$-ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} = -i(\cos \omega t + i \sen \omega t) \left(\frac{1+i}{\delta} \right) (\theta + \varphi i) \quad (151)$$

$$-ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} = (-i \cos \omega t + i \sen \omega t) \frac{[(\theta-\varphi)+i(\theta+\varphi)]}{\delta} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} -ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} &= \frac{[(\theta-\varphi) \sen \omega t + (\theta+\varphi) \cos \omega t]}{\delta} + \\ &\frac{i[(\theta+\varphi) \sen \omega t - (\theta-\varphi) \cos \omega t]}{\delta} \end{aligned} \quad (153)$$

De acordo com a equação (112), a parte real da equação (153) deverá ser utilizada. Então a equação (112) se tornará:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \frac{[(\theta-\varphi) \sen \omega t + (\theta+\varphi) \cos \omega t]}{\delta} \quad (154)$$

Desenvolvendo a expressão da tensão de cisalhamento (τ_0) mostrada na equação (7), com a substituição da expressão encontrada na equação (154), tem-se:

$$\tau_0 = \mu C_0 \frac{[(\theta - \varphi) \sin \omega t + (\theta + \varphi) \cos \omega t]}{\delta} \quad (155)$$

A equação (155) é a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, modelada pelo gradiente harmônico de pressão. A sua inclusão no esquema numérico de MacCormack, método que será usado para analisar o transitório hidráulico e comparar resultados, se dará pela substituição do último termo da equação da quantidade de movimento, equação (2), pela tensão de cisalhamento, conforme descrição contida no capítulo (8) deste trabalho.

8. – APLICAÇÃO DO MODELO

Com a utilização de dados experimentais colhidos em publicações científicas e softwares para a resolução dos cálculos e geração dos resultados através de gráficos foi possível aplicar o Esquema numérico de MacCormack, tanto com o fator de atrito (f) constante, quanto com a tensão de atrito modelada por gradiente harmônico de pressão, com base nas condições descritas a seguir.

Para a aplicação do Método de MacCormack no sistema Reservatório-Tubo-Válvula adotado, foram utilizados dez trechos da tubulação de igual comprimento, de modo que $\Delta x = L/10$ e $\Delta t = \Delta x/a$. Sendo (*) a representação para valores obtidos no passo preditor ou inicial e (^k), àqueles obtidos no passo corretor ou posterior.

As equações do preditor são:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f_i^* - f_i^k)}{\Delta t} \quad (156)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_i^k - f_{i-1}^k)}{\Delta x} \quad (157)$$

E as do corretor são:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f_i - f_i^*)}{\Delta t} \quad (158)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_{i+1}^* - f_i^*)}{\Delta x} \quad (159)$$

Aplicadas ao sistema

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (160)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (161)$$

Obtém-se, respectivamente:

$$H_i^* = H_i^k - \frac{a^2}{gA} (Q_i^k - Q_{i-1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x}; e \quad (162)$$

$$Q_i^* = Q_i^k - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_i^k - H_{i-1}^k) - \frac{f}{2DA} \Delta t Q_i^k |Q_i^k|; \quad (163)$$

$$H_i = H_i^* - \frac{a^2}{gA} (Q_{i+1}^* - Q_i^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}; e \quad (164)$$

$$Q_i = Q_i^* - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i+1}^* - H_i^k) - \frac{f}{2DA} \Delta t Q_i^* |Q_i^*| \quad (165)$$

Finalmente,

$$H_i^{k+1} = 0,5(H_i^k + H_i); e \quad (166)$$

$$Q_i^{k+1} = 0,5(Q_i^k + Q_i) \quad (167)$$

Sendo satisfeita a condição:

$$C_n = \frac{a \Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (168)$$

As condições de contorno do Método das Características foram aplicadas no Método de MacCormack.

$$Q_{Pi} = \frac{H_{Reserv} - C_M}{B} \quad (169)$$

Sendo,

$$H_{Reserv} = Cte \quad (170)$$

Na condição de contorno na seção junto à válvula foram adotados os equacionamentos abaixo:

$$Q_{Valv} = -gB(C_d A_v)^2 + \sqrt{\left[gB(C_d A_v)^2\right]^2 + (C_d A_v)^2 2gC_P} \quad (171)$$

$$H_{Valv} = C_P - BQ_{Valv} \quad (172)$$

A canalização foi dividida em dez trechos iguais (Δx), porém o primeiro e o último trecho foram subdivididos em dois trechos menores, cada qual com a extensão $\frac{\Delta x}{2}$, usando-se dois pontos auxiliares (A) e (B).

O incremento de tempo (Δt) foi então escolhido para possibilitar a aplicação do Método das Características aos quatro trechos menores, formados pelos pontos (1, A) e (A, 2) a montante e (n, B) e (B, n+1) a jusante, portanto:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2a} \quad (173)$$

Define-se $\Delta x_{\text{MOC}} = \frac{\Delta x}{2}$ (o trecho inicial e final da tubulação onde será aplicado o Método das Características) como mostra a figura abaixo, o que acarreta $C_n=0,5$ o que satisfaz a condição de Courant-Friedrich-Lewy.

Δx_{MOC} é o trecho da tubulação onde será aplicado o Método das Características.

Figura 6 – Subdivisão do tubo em trechos para a facilitação da aplicação do modelo de MacCormack.

Os valores iniciais de $Q1(i)$ e $H1(i)$ ($i=1, 2, \dots, n, n+1$) e de QA , HA , QB , HB no instante (t) são conhecidos.

A partir dos pontos (1, A) calcula-se os novos valores $Q(1)$ e $H(1)$ no instante $(t+\Delta t)$ através do Método das Características.

Em seguida, a partir dos pontos (1, 2) o mesmo procedimento foi adotado para encontrar os novos valores de QA e HA.

O mesmo processo foi repetido a jusante da canalização, determinando-se $Q(n+1)$, $H(n+1)$ e QB, HB.

Os valores $Q(i)$ e $H(i)$ ($i, 2, 3, \dots, n-1, n$) dos pontos interiores foram então calculados com o algoritmo de MacCormack. Inicialmente usou-se o “preditor” na forma:

De $i=2$ para $n+1$

$$H(i)_{\text{preditor}} = H1(i) - \frac{a^2}{gA} (Q1(i) - Q1(i-1)) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (174)$$

$$Q(i)_{\text{preditor}} = Q1(i) - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} (H1(i) - H1(i-1)) - \frac{f}{2DA} \Delta t Q1(i) |Q1(i)| \quad (175)$$

E em seguida o “corretor”

De $i=1$ para n

$$H(i) = H(i)_{\text{preditor}} - \frac{a^2}{gA} (Q(i+1)_{\text{preditor}} - Q(i)_{\text{preditor}}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (176)$$

$$Q(i) = Q(i)_{\text{preditor}} - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} (H(i+1)_{\text{preditor}} - H(i)_{\text{preditor}}) - \frac{f}{2DA} \Delta t Q(i)_{\text{preditor}} |Q(i)_{\text{preditor}}| \quad (177)$$

Os valores finais no instante $t+\Delta t$ são calculados por:

De $i=1$ para $n+1$

$$H(i) = 0,5(H1(i) + H(i)); \quad (178)$$

$$Q(i) = 0,5(Q1(i) + Q(i)) \quad (179)$$

Após a substituição dos valores iniciais $Q1(i)$ e $H1(i)$ pelos novos valores $Q(i)$ e $H(i)$ o processo foi realimentado.

No caso da simulação para o esquema de MacCormack com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão, as equações (175) e (177) têm o seu último termo modificado pela inserção da expressão contida na equação (155), passando a ser expresso, o passo “preditor”, na forma:

De $i=2$ para $n+1$

$$H(i)_{preditor} = H1(i) - \frac{a^2}{gA} [Q1(i) - Q1(i-1)] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (180)$$

$$Q(i)_{preditor} = Q1(i) - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} [H1(i) - H1(i-1)] - \frac{\tau_0(t)\pi D \Delta t}{\rho} \quad (181)$$

E em seguida o “corretor”

De $i=1$ para n

$$H(i) = H(i)_{preditor} - \frac{a^2}{gA} [Q1(i+1)_{preditor} - Q(i)] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (182)$$

$$Q(i) = Q(i)_{preditor} - gA \frac{\Delta t}{\Delta x} [H(i+1)_{preditor} - H(i)_{preditor}] - \frac{\tau_0(t)\pi D \Delta t}{\rho} \quad (183)$$

Sendo a tensão de cisalhamento dada pela equação (155):

$$\tau_0 = \mu C_0 \frac{[(\theta - \varphi) \sin \omega t + (\theta + \varphi) \cos \omega t]}{\delta}$$

Os algoritmos desenvolvidos para a feitura das simulações foram inseridos no programa True Basic Silver Edition e os resultados fornecidos por esta plataforma foram transportados para o aplicativo Microsoft Excel para a geração dos diversos gráficos comparativos.

Para a realização das simulações com o Esquema numérico de MacCormack com o fator de atrito (f) e com a tensão de cisalhamento modelado por gradiente harmônico de pressão e posterior comparação dos resultados foram selecionados dois sistemas Reservatório–Tubo–Válvula, previamente ensaiados, onde o transitório foi provocado pelo fechamento da válvula.

O programa foi alimentado com dois grupos de dados, cujos resultados experimentais eram conhecidos.

O primeiro sistema foi ensaiado pelo pesquisador Pezinga e os resultados foram publicados em GUIDOUIO e MANSOUR (2002) e era composto por um reservatório a montante, uma tubulação e uma válvula a jusante.

Os dados do sistema são:

Vazão $Q = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}$

Diâmetro da tubulação $D = 0,0532 \text{ m}$

Celeridade $a = 1360,00 \text{ m/s}$

Comprimento da Tubulação $L = 77,80 \text{ m}$

Coeficiente de atrito $f = 0,0330$

Carga na válvula $H = 52,61 \text{ m}$

Tempo de fechamento da válvula $\theta = 0,04 \text{ s}$

Na Tabela (1) abaixo, podem ser observados os valores experimentais colhidos pelo pesquisador após a realização do ensaio em um sistema com as características descritas acima.

Tabela 1 – Dados experimentais obtidos pelo pesquisador Pezinga

Tempo (s)	Carga na Válvula
0	52,97
0,029	87,3
0,057	88,2
0,086	88,4
0,114	87,5
0,143	22,5
0,172	19
0,2	18
0,229	25,3
0,257	84,5
0,286	85,5
0,315	86
0,343	77,4
0,372	27,5
0,4	21,4
0,429	20,9
0,458	24,2
0,486	71,8
0,515	84,5
0,543	85,1
0,572	84
0,601	31,2
0,629	22,5
0,658	21,4
0,686	28,8
0,715	73,3
0,744	82,5
0,772	83,8
0,801	78
0,829	29,3
0,858	24,5
0,887	22,7
0,915	28,2
0,944	65,4
0,972	79,2
1,001	81,2
1,03	76,1
1,058	31,7
1,087	25,3
1,116	23,6
1,144	32,1
1,173	72,8
1,201	79,4

Continua.

Tabela 1 – Dados experimentais obtidos pelo pesquisador Pezinga

Tempo (s)	Carga na Válvula
1,23	80,3
1,259	76,1
1,287	32,6
1,316	27,3
1,344	24,2
1,373	35
1,402	68,2
1,43	77,7
1,459	79
1,487	65,6
1,516	32
1,545	29,3
1,573	26
1,602	30,6
1,63	73,3
1,659	76,4
1,688	77,7
1,716	72,8
1,745	37,2
1,773	29,1
1,802	27,5
1,831	33,4
1,859	65,4
1,888	76,1
1,916	77,4
1,945	62,6
1,974	52,97

Fonte: Guidouio e Mansour (2002).

O segundo sistema foi ensaiado pelos pesquisadores Bergant e Simpson e os resultados foram publicados em GUIDOUIO e MANSOUR (2002) e era composto por um reservatório à montante, uma tubulação e uma válvula à jusante.

Os dados do sistema são:

Vazão $Q = 0,000114 \text{ m}^3/\text{s}$

Diâmetro da tubulação $D = 0,0220 \text{ m}$

Celeridade $a = 1319,00 \text{ m/s}$

Comprimento da Tubulação $L = 37,20 \text{ m}$

Coeficiente de atrito $f = 0,0360$

Carga na válvula $H = 29,72 \text{ m}$

Tempo de fechamento da válvula $\theta = 0,009 \text{ s}$

Na Tabela (2) abaixo, podem ser observados os valores experimentais colhidos pelos pesquisadores após a realização do ensaio em um sistema com as características descritas acima.

Tabela 2 – Dados experimentais obtidos pelos pesquisadores Bergant e Simpson

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0	29,71
0,014	71,7
0,028	71,3
0,042	72
0,056	36
0,071	-3,7
0,085	-5,3
0,099	-6,4
0,113	-6
0,127	65,5
0,141	69,1
0,155	68,8
0,169	68
0,183	-0,2
0,197	-3,1
0,212	-4,2
0,24	58
0,254	66
0,268	66,6
0,282	66,4
0,296	7
0,31	2,3
0,324	-1,3
0,338	0,5
0,353	43,8
0,367	63
0,381	64,8
0,395	64
0,409	53,2
0,423	2,3
0,437	-0,6
0,451	0,7
0,465	54
0,479	58,3
0,494	62
0,508	62,8
0,522	24,4
0,536	8,5
0,55	2,7
0,564	2,7
0,578	34,4
0,592	52,3
0,606	61,7

Continua.

Tabela 2 – Dados experimentais obtidos pelos pesquisadores Bergant e Simpson

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,62	62,4
0,635	56,6
0,649	16,8
0,663	3,2
0,677	3,6
0,691	7,9
0,705	35,1
0,719	56,6
0,733	60
0,747	58,8
0,761	33,3
0,776	7,4
0,79	5,4
0,804	8,3
0,818	35,6
0,832	50,7
0,846	58,1
0,86	55,4
0,874	33,8
0,888	15
0,903	7,2

Fonte: Guidouio e Mansour (2002).

Os dados experimentais, frutos de cada ensaio, foram transportados para o aplicativo Microsoft Excel, plataforma a partir da qual foram gerados gráficos, cuja curva formada serviu como elemento verificador da aproximação do resultado das simulações feitas através da utilização do Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão. Estas simulações foram inseridas no programa True Basic Silver Edition, a partir dos algoritmos desenvolvidos para o método numérico e as suas variações.

9. – ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são mostrados através de tabelas e gráficos todos os resultados obtidos com as simulações feitas com o Esquema de MacCormack com o fator de atrito constante e com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão, para os dados dos dois sistemas previamente ensaiados.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0	52,78921
0,0057	58,81937
0,0114	65,08156
0,0172	71,36724
0,0229	77,44626
0,0286	82,99813
0,0343	87,55692
0,04	90,12881
0,0458	90,12016
0,0515	90,11249
0,0572	90,10646
0,0629	90,10177
0,0686	90,09702
0,0744	90,09058
0,0801	90,08067
0,0858	90,05948
0,0915	89,98954
0,0972	89,7476
0,103	89,03867
0,1087	87,3271
0,1144	83,87358
0,1201	77,949
0,1259	69,19151
0,1316	57,94147
0,1373	45,34018
0,143	33,0771
0,1487	22,86363
0,1545	15,86921
0,1602	12,37521
0,1659	11,78379
0,1716	12,94434
0,1773	14,62646
0,1831	15,93089
0,1888	16,48865
0,1945	16,41459

Continua

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,2002	16,09718
0,2059	15,96636
0,2117	16,36112
0,2174	17,53635
0,2231	19,75552
0,2288	23,36486
0,2345	28,76151
0,2403	36,23788
0,246	45,7651
0,2517	56,82721
0,2574	68,40993
0,2631	79,18712
0,2689	87,86114
0,286	95,73263
0,2918	93,76314
0,2975	91,27254
0,3032	89,227
0,3089	88,11441
0,3146	87,88544
0,3204	88,0833
0,3261	88,07211
0,3318	87,25032
0,3375	85,17063
0,3432	81,5556
0,349	76,25825
0,3547	69,23744
0,3604	60,59163
0,3661	50,64042
0,3718	39,99614
0,3776	29,5541
0,3833	20,36068
0,389	13,37728
0,3947	9,21581
0,4004	7,94813
0,4062	9,07235
0,4119	11,66131
0,4176	14,64671
0,4233	17,13947
0,429	18,67394
0,4348	19,29729
0,4405	19,48996
0,4462	19,96694
0,4519	21,44652
0,4576	24,46834
0,4634	29,30434
0,4691	35,95671
0,4748	44,20227
0,4805	53,63816

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,4862	63,70703
0,492	73,71352
0,4977	82,86592
0,5034	90,3718
0,5091	95,58719
0,5149	98,18038
0,5206	98,24704
0,5263	96,31815
0,532	93,23729
0,5377	89,93385
0,5435	87,16252
0,5492	85,2962
0,5549	84,24118
0,5721	80,02499
0,5778	76,02719
0,5835	70,12465
0,5892	62,44059
0,5949	53,38779
0,6007	43,57818
0,6064	33,72925
0,6121	24,58329
0,6178	16,83493
0,6235	11,05442
0,6293	7,60216
0,635	6,5491
0,6407	7,63408
0,6464	10,29076
0,6521	13,75883
0,6579	17,26365
0,6636	20,21661
0,6693	22,3734
0,675	23,89583
0,6808	25,29442
0,6865	27,26913
0,6922	30,50003
0,6979	35,4527
0,7036	42,25358
0,7094	50,66103
0,7151	60,12507
0,7208	69,9037
0,7265	79,19623
0,7322	87,26276
0,738	93,51563
0,7437	97,58255
0,7494	99,34566
0,7551	98,95632
0,7608	96,81733
0,7666	93,52213

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,7723	89,74692
0,778	86,10852
0,7837	83,01952
0,7894	80,58272
0,7952	78,56213
0,8009	76,44767
0,8066	73,60042
0,8123	69,43888
0,818	63,61195
0,8238	56,10956
0,8295	47,28316
0,8352	37,77735
0,8409	28,39952
0,8581	8,47535
0,8638	6,07358
0,8695	5,88069
0,8753	7,56887
0,881	10,6302
0,8867	14,46408
0,8924	18,4828
0,8981	22,22275
0,9039	25,44063
0,9096	28,16924
0,9153	30,71118
0,921	33,56251
0,9267	37,27858
0,9325	42,31407
0,9382	48,88033
0,9439	56,86042
0,9496	65,80571
0,9553	75,01405
0,9611	83,66612
0,9668	90,98251
0,9725	96,36245
0,9782	99,47549
0,9839	100,2932
0,9897	99,06417
0,9954	96,24591
1,0011	92,41072
1,0068	88,14155
1,0125	83,93141
1,0183	80,09946
1,024	76,73654
1,0297	73,6931
1,0354	70,61753
1,0411	67,04424
1,0469	62,51728
1,0526	56,72306

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,0583	49,59876
1,064	41,38615
1,0698	32,61328
1,0755	24,00636
1,0812	16,35299
1,0869	10,35156
1,0926	6,48349
1,0984	4,93668
1,1041	5,59321
1,1098	8,07722
1,1155	11,84622
1,1212	16,30324
1,127	20,90777
1,1441	32,72825
1,1498	36,10936
1,1556	39,71453
1,1613	43,9613
1,167	49,1956
1,1727	55,58645
1,1784	63,05228
1,1842	71,23958
1,1899	79,56352
1,1956	87,30495
1,2013	93,74286
1,207	98,29095
1,2128	100,6059
1,2185	100,6427
1,2242	98,64579
1,2299	95,0837
1,2356	90,54334
1,2414	85,61069
1,2471	80,76241
1,2528	76,28844
1,2585	72,25719
1,2642	68,52628
1,27	64,79452
1,2757	60,68507
1,2814	55,84514
1,2871	50,04457
1,2929	43,25406
1,2986	35,68564
1,3043	27,78342
1,31	20,16268
1,3157	13,50681
1,3215	8,44332
1,3272	5,42643
1,3329	4,65337
1,3386	6,03377

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,3443	9,21827
1,3501	13,67838
1,3558	18,81816
1,3615	24,0921
1,3672	29,10352
1,3729	33,66452
1,3787	37,80801
1,3844	41,75271
1,3901	45,83097
1,3958	50,39472
1,4015	55,71799
1,4073	61,91424
1,413	68,88446
1,4301	90,36702
1,4359	95,76465
1,4416	99,35208
1,4473	100,8171
1,453	100,107
1,4587	97,43379
1,4645	93,22769
1,4702	88,04732
1,4759	82,4679
1,4816	76,97197
1,4874	71,86631
1,4931	67,24195
1,4988	62,98339
1,5045	58,8225
1,5102	54,42373
1,516	49,48166
1,5217	43,81096
1,5274	37,41095
1,5331	30,49243
1,5388	23,4611
1,5446	16,86012
1,5503	11,28189
1,556	7,26564
1,5617	5,20089
1,5674	5,25647
1,5732	7,35034
1,5789	11,16729
1,5846	16,22139
1,5903	21,95085
1,596	27,8249
1,6018	33,43947
1,6075	38,58117
1,6132	43,24652
1,6189	47,61374
1,6246	51,97481

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,6304	56,64401
1,6361	61,86322
1,6418	67,72408
1,6475	74,12301
1,6532	80,75789
1,659	87,16679
1,6647	92,80117
1,6704	97,11917
1,6761	99,68094
1,6819	100,2275
1,6876	98,72755
1,6933	95,38245
1,699	90,58839
1,7162	72,70538
1,7219	67,06047
1,7276	61,93247
1,7333	57,25007
1,7391	52,79278
1,7448	48,26787
1,7505	43,40238
1,7562	38,02962
1,7619	32,15137
1,7677	25,96258
1,7734	19,83363
1,7791	14,25422
1,7848	9,75054
1,7905	6,79253
1,7963	5,7095
1,802	6,63054
1,8077	9,46108
1,8134	13,89994
1,8191	19,49388
1,8249	25,71928
1,8306	32,07479
1,8363	38,16623
1,842	43,76625
1,8477	48,83644
1,8535	53,50752
1,8592	58,02229
1,8649	62,65418
1,8706	67,61975
1,8764	73,00456
1,8821	78,71886
1,8878	84,49284
1,8992	94,48699
1,905	97,73755
1,9107	99,2825
1,9164	98,9086

Continua.

Tabela 3 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,9221	96,61062
1,9336	87,23523
1,945	74,4647
1,9507	68,00699
1,9564	61,96275
1,9622	56,4724
1,9679	51,50153
1,9736	46,87679
1,9793	42,35192
1,985	37,68914
1,9908	32,73815
1,9965	27,49487

Conclusão.

Figura 7 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados do pesquisador Pezinga.

EXP é a curva dos dados experimentais e MCF é a da simulação pelo Método de MacCormack com fator de atrito (f) constante.

O esquema de McCormack produziu oscilações numéricas próximo às frentes de onda mais íngremes. Estas oscilações cresceram com o decorrer do transiente e poderiam ser atenuadas por meio da introdução de viscosidade artificial ou refinamento da malha $x-t$, através do aumento do número de seções.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0	29,99904
0,0028	42,7924
0,0056	57,50053
0,0085	69,35868
0,0113	70,2465
0,0141	70,23684
0,0169	70,22477
0,0197	70,21062
0,0226	70,19667
0,0254	70,18482
0,0282	70,17578
0,031	70,16872
0,0338	70,16143
0,0367	70,1514
0,0395	70,13533
0,0423	70,09636
0,0451	69,95371
0,0479	69,44351
0,0508	67,94408
0,0536	64,37251
0,0564	57,37844
0,0592	45,97519
0,062	30,4116
0,0649	12,71507
0,0677	-3,67877
0,0705	-15,2736
0,0733	-20,1608
0,0761	-18,947
0,079	-14,3352
0,0818	-9,62123
0,0846	-7,06104
0,0874	-7,07655
0,0903	-8,61325
0,0931	-10,1889
0,0959	-10,8409
0,0987	-10,4297
0,1015	-9,29905
0,1044	-7,68951
0,1072	-5,34308
0,11	-1,50061
0,1128	4,77315
0,1156	14,13253
0,1185	26,54882
0,1213	41,09296
0,1241	55,99243
0,1269	69,00764
0,1297	78,07599
0,1326	82,02593

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,141	71,34348
0,1438	67,12151
0,1467	65,30415
0,1495	65,85084
0,1523	67,68737
0,1551	69,363
0,1579	69,71973
0,1608	68,2312
0,1636	64,90803
0,1664	59,93536
0,1692	53,34063
0,172	44,92588
0,1749	34,50151
0,1777	22,26021
0,1805	9,04527
0,1833	-3,6725
0,1861	-14,1416
0,189	-20,8725
0,1918	-23,156
0,1946	-21,3425
0,1974	-16,7609
0,2002	-11,2917
0,2031	-6,74509
0,2059	-4,27466
0,2087	-4,05172
0,2115	-5,31302
0,2143	-6,73739
0,2172	-6,96831
0,22	-5,05129
0,2228	-0,62141
0,2256	6,18039
0,2284	14,94519
0,2313	25,21116
0,2341	36,52725
0,2369	48,35826
0,2397	59,94039
0,2425	70,23792
0,2454	78,09571
0,2482	82,56384
0,251	83,25982
0,2538	80,59228
0,2566	75,7193
0,2595	70,22704
0,2623	65,63593
0,2651	62,91982
0,2679	62,21901
0,2708	62,84734
0,2736	63,5744

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,282	54,74363
0,2849	46,60534
0,2877	36,44411
0,2905	25,07844
0,2933	13,37403
0,2961	2,15664
0,299	-7,79269
0,3018	-15,7308
0,3046	-21,0068
0,3074	-23,2017
0,3102	-22,3045
0,3131	-18,8294
0,3159	-13,7817
0,3187	-8,43701
0,3215	-3,98674
0,3243	-1,17127
0,3272	-0,04213
0,33	0,05152
0,3328	0,24398
0,3356	1,78288
0,3384	5,64252
0,3413	12,25171
0,3441	21,4117
0,3469	32,40063
0,3497	44,19395
0,3525	55,70337
0,3554	65,95717
0,3582	74,19429
0,361	79,89419
0,3638	82,7874
0,3666	82,88018
0,3695	80,49072
0,3723	76,26003
0,3751	71,08898
0,3779	65,97523
0,3807	61,77276
0,3836	58,94506
0,3864	57,40469
0,3892	56,51221
0,392	55,25269
0,3948	52,54034
0,3977	47,55189
0,4005	39,97836
0,4033	30,11778
0,4061	18,79189
0,4089	7,13271
0,4118	-3,67858
0,4146	-12,6382

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,423	-23,3736
0,4259	-21,6236
0,4287	-17,9459
0,4315	-13,0765
0,4343	-7,82672
0,4371	-2,95352
0,44	0,99599
0,4428	3,82904
0,4456	5,78632
0,4484	7,51025
0,4513	9,88884
0,4541	13,80748
0,4569	19,87954
0,4597	28,24103
0,4625	38,47589
0,4654	49,69458
0,4682	60,73665
0,471	70,42993
0,4738	77,82866
0,4766	82,37068
0,4795	83,92971
0,4823	82,77444
0,4851	79,46815
0,4879	74,74521
0,4907	69,38771
0,4936	64,11084
0,4964	59,45776
0,4992	55,70868
0,502	52,81948
0,5048	50,41432
0,5077	47,85378
0,5105	44,38204
0,5133	39,32848
0,5161	32,31335
0,5189	23,39563
0,5218	13,11299
0,5246	2,39495
0,5274	-7,62926
0,5302	-15,8734
0,533	-21,519
0,5359	-24,1632
0,5387	-23,861
0,5415	-21,0652
0,5443	-16,4953
0,5471	-10,9769
0,55	-5,28726
0,5528	-0,0323
0,5556	4,43703

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,5641	13,97691
0,5669	17,35412
0,5697	21,83427
0,5725	27,87211
0,5753	35,61454
0,5782	44,81149
0,581	54,81699
0,5838	64,69054
0,5866	73,37966
0,5894	79,93778
0,5923	83,71968
0,5951	84,50383
0,5979	82,51337
0,6007	78,33847
0,6035	72,78798
0,6064	66,71175
0,6092	60,83608
0,612	55,64366
0,6148	51,31326
0,6176	47,71994
0,6205	44,48781
0,6233	41,08378
0,6261	36,9392
0,6289	31,5836
0,6318	24,77013
0,6346	16,56786
0,6374	7,39579
0,6402	-2,0182
0,643	-10,7541
0,6459	-17,8716
0,6487	-22,5982
0,6515	-24,487
0,6543	-23,5037
0,6571	-20,0207
0,66	-14,7238
0,6628	-8,45529
0,6656	-2,03449
0,6684	3,901
0,6712	9,00118
0,6741	13,23944
0,6769	16,87952
0,6797	20,3874
0,6825	24,3095
0,6853	29,13985
0,6882	35,19816
0,691	42,53812
0,6938	50,90269
0,6966	59,73797

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,7051	81,01495
0,7079	83,84895
0,7107	83,88891
0,7135	81,27942
0,7164	76,51801
0,7192	70,34718
0,722	63,59663
0,7248	57,01339
0,7276	51,11981
0,7305	46,1301
0,7333	41,94035
0,7361	38,18824
0,7389	34,36473
0,7417	29,95047
0,7446	24,54911
0,7474	17,99243
0,7502	10,39959
0,753	2,18076
0,7558	-6,01625
0,7587	-13,4081
0,7615	-19,2105
0,7643	-22,7797
0,7671	-23,7348
0,7699	-22,0326
0,7728	-17,9777
0,7756	-12,1634
0,7784	-5,35322
0,7812	1,67249
0,784	8,2688
0,7869	14,04374
0,7897	18,91449
0,7925	23,0917
0,7953	26,99858
0,7982	31,1458
0,801	35,99163
0,8038	41,81774
0,8066	48,64544
0,8094	56,20758
0,8123	63,97972
0,8151	71,26341
0,8179	77,30539
0,8207	81,43045
0,8235	83,16351
0,8264	82,31754
0,8292	79,02996
0,832	73,73883
0,8348	67,10143
0,8376	59,86932

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,8461	40,65228
0,8489	35,90275
0,8517	31,71384
0,8546	27,63588
0,8574	23,19149
0,8602	18,00933
0,863	11,93186
0,8658	5,07417
0,8687	-2,17721
0,8715	-9,22366
0,8743	-15,3583
0,8771	-19,8924
0,8799	-22,2806
0,8828	-22,2194
0,8856	-19,7028
0,8884	-15,0241
0,8912	-8,72348
0,894	-1,48937
0,8969	5,96714
0,8997	13,04089
0,9025	19,33702
0,9053	24,72894
0,9081	29,3568
0,911	33,56663
0,9138	37,80375
0,9166	42,4847
0,9194	47,87667
0,9222	54,01178
0,9251	60,65479
0,9279	67,33097
0,9307	73,40666
0,9335	78,20469
0,9363	81,13005
0,9392	81,78028
0,942	80,01971
0,9448	76,00439
0,9476	70,15434
0,9504	63,0781
0,9533	55,46403
0,9561	47,95875
0,9589	41,05676
0,9617	35,02316
0,9645	29,86576
0,9674	25,36271
0,9702	21,14025
0,973	16,7838
0,9758	11,95785
0,9787	6,50781

Continua.

Tabela 4 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,9871	-11,5322
0,9899	-16,4347
0,9928	-19,7625
0,9956	-21,0357
0,9984	-20,0012

Conclusão.

Figura 8 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante para os dados dos pesquisadores Bergand e Simpson.

EXP é a curva dos dados experimentais e MCF é a da simulação pelo Método de MacCormack com fator de atrito (f) constante.

A exemplo do que ocorreu na simulação com os dados do pesquisador Pezinga, o esquema de McCormack produziu oscilações numéricas próximo às frentes de onda mais íngremes. Estas oscilações cresceram com o decorrer do transiente e poderiam ser atenuadas por meio da introdução de viscosidade artificial ou refinamento da malha x - t , através do aumento do número de seções.

Na figura (9) são mostrados dois gráficos oriundos do trabalho de FRANÇA (2006), nos quais é possível observar a atenuação das oscilações numéricas provocadas pelo esquema de MacCormack, comparado ao consolidado Método das Características, quando da realização do refinamento na malha x-t, através do aumento do número de seções de 10 para 50, no gráfico da direita em relação ao da esquerda, sendo MOC a simulação feita pelo Método das Características e MAC a simulação feita através do Esquema Numérico de MacCormack.

Figura 9 – Gráficos da superposição de resultados obtidos através de simulações com o Método das Características e Esquema de MacCormack, antes e depois do refinamento da malha x-t.

Fonte: FRANÇA (2006).

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0	53,36843
0,0057	59,47344
0,0114	65,79448
0,0172	72,12215
0,0229	78,22383
0,0286	83,77934
0,0343	88,32268
0,04	90,8604
0,0458	90,79862
0,0515	90,72201
0,0572	90,63213
0,0629	90,53074
0,0686	90,4188
0,0744	90,29524
0,0801	90,16516
0,0858	90,02174
0,0915	89,83048
0,0972	89,47112
0,103	88,64966
0,1087	86,83708

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,1201	77,29507
0,1259	68,47781
0,1316	57,18663
0,1373	44,56264
0,143	32,29588
0,1487	22,09782
0,1545	15,13829
0,1602	11,69662
0,1659	11,17411
0,1716	12,41848
0,1773	14,19728
0,1831	15,61083
0,1888	16,28375
0,1945	16,32985
0,2002	16,13467
0,2059	16,12517
0,2117	16,63937
0,2174	17,92514
0,2231	20,24534
0,2288	23,94374
0,2345	29,4153
0,2403	36,95147
0,246	46,51988
0,2517	57,60472
0,2574	69,19117
0,2631	79,95298
0,2689	88,59215
0,286	96,25867
0,2918	94,19074
0,2975	91,59283
0,3032	89,43215
0,3089	88,1994
0,3146	87,8482
0,3204	87,92264
0,3261	87,7941
0,3318	86,86175
0,3375	84,681
0,3432	80,97689
0,349	75,60342
0,3547	68,52395
0,3604	59,83692
0,3661	49,86294
0,3718	39,21489
0,3776	28,78862
0,3833	19,62959
0,389	12,69844
0,3947	8,605818
0,4004	7,4219

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,4062	8,644543
0,4119	11,34079
0,4176	14,44132
0,4233	17,05423
0,429	18,71093
0,4348	19,45771
0,4405	19,76774
0,4462	20,35529
0,4519	21,93595
0,4576	25,04688
0,4634	29,95903
0,4691	36,6701
0,4748	44,95692
0,4805	54,41562
0,4862	64,48829
0,492	74,47905
0,4977	83,5971
0,5034	91,05077
0,5091	96,19734
0,5149	98,70521
0,5206	98,67506
0,5263	96,6389
0,532	93,44292
0,5377	90,01935
0,5435	87,12364
0,5492	85,13603
0,5549	83,96364
0,5721	79,44518
0,5778	75,37264
0,5835	69,41137
0,5892	61,68601
0,5949	52,61036
0,6007	42,79701
0,6064	32,96367
0,6121	23,85202
0,6178	16,15584
0,6235	10,44411
0,6293	7,077146
0,635	6,12087
0,6407	7,313102
0,6464	10,08488
0,6521	13,67308
0,6579	17,30228
0,6636	20,37653
0,6693	22,65071
0,675	24,28374
0,6808	25,78513
0,6865	27,84878

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,6922	31,15444
0,6979	36,16588
0,7036	43,00809
0,7094	51,43866
0,7151	60,90625
0,7208	70,66933
0,7265	79,92759
0,7322	87,94198
0,738	94,12475
0,7437	98,10775
0,7494	99,7741
0,7551	99,27753
0,7608	97,02345
0,7666	93,60599
0,7723	89,70855
0,778	85,94885
0,7837	82,74245
0,7894	80,19503
0,7952	78,07162
0,8009	75,86819
0,8066	72,94615
0,8123	68,7258
0,818	62,8575
0,8238	55,33195
0,8295	46,50197
0,8352	37,01167
0,8409	27,66807
0,8581	7,949962
0,8638	5,644927
0,8695	5,559251
0,8753	7,364576
0,881	10,54609
0,8867	14,5022
0,8924	18,64223
0,8981	22,49958
0,9039	25,82997
0,9096	28,65955
0,9153	31,29049
0,921	34,21664
0,9267	37,99155
0,9325	43,06901
0,9382	49,65791
0,9439	57,64163
0,9496	66,57144
0,9553	75,74559
0,9611	84,34452
0,9668	91,59195
0,9725	96,88803

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,9782	99,90435
0,9839	100,6149
0,9897	99,26871
0,9954	96,33028
1,0011	92,37285
1,0068	87,98237
1,0125	83,65481
1,0183	79,71034
1,024	76,24642
1,0297	73,11396
1,0354	69,96353
1,0411	66,33137
1,0469	61,7624
1,0526	55,94551
1,0583	48,81754
1,064	40,62036
1,0698	31,88241
1,0755	23,32783
1,0812	15,74339
1,0869	9,825798
1,0926	6,054414
1,0984	4,616739
1,1041	5,388428
1,1098	7,992604
1,1155	11,88384
1,1212	16,46217
1,127	21,18614
1,1441	33,30722
1,1498	36,76322
1,1556	40,42818
1,1613	44,71611
1,167	49,97312
1,1727	56,36768
1,1784	63,81812
1,1842	71,97054
1,1899	80,24217
1,1956	87,9147
1,2013	94,26881
1,207	98,72024
1,2128	100,9261
1,2185	100,8477
1,2242	98,73066
1,2299	95,04633
1,2356	90,38466
1,2414	85,33256
1,2471	80,37373
1,2528	75,79872
1,2585	71,67839

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,2642	67,87256
1,27	64,08098
1,2757	59,93032
1,2814	55,06764
1,2871	49,26333
1,2929	42,48861
1,2986	34,95459
1,3043	27,10464
1,31	19,55277
1,3157	12,98067
1,3215	8,015618
1,3272	5,106028
1,3329	4,448101
1,3386	5,948651
1,3443	9,255383
1,3501	13,83892
1,3558	19,09606
1,3615	24,48056
1,3672	29,59305
1,3729	34,24315
1,3787	38,46277
1,3844	42,46615
1,3901	46,58565
1,3958	51,17219
1,4015	56,49924
1,4073	62,67974
1,413	69,6156
1,4301	90,89334
1,4359	96,19256
1,4416	99,67271
1,4473	101,0226
1,453	100,1924
1,4587	97,39693
1,4645	93,0674
1,4702	87,76966
1,4759	82,07966
1,4816	76,48264
1,4874	71,28641
1,4931	66,58733
1,4988	62,27005
1,5045	58,06789
1,5102	53,64629
1,516	48,7005
1,5217	43,04541
1,5274	36,67972
1,5331	29,8134
1,5388	22,85087
1,5446	16,3352

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,5503	10,85377
1,556	6,944777
1,5617	4,995133
1,5674	5,170849
1,5732	7,389093
1,5789	11,32734
1,5846	16,49881
1,5903	22,33887
1,596	28,31403
1,6018	34,0192
1,6075	39,23565
1,6132	43,95975
1,6189	48,36829
1,6246	52,75222
1,6304	57,42518
1,6361	62,62883
1,6418	68,4554
1,6475	74,80216
1,6532	81,36828
1,659	87,6919
1,6647	93,22951
1,6704	97,44026
1,6761	99,88694
1,6819	100,3112
1,6876	98,68905
1,6933	95,22265
1,699	90,3112
1,7162	72,12582
1,7219	66,40613
1,7276	61,21934
1,7333	56,49559
1,7391	52,01516
1,7448	47,48668
1,7505	42,63672
1,7562	37,29821
1,7619	31,47209
1,7677	25,35338
1,7734	19,30834
1,7791	13,82567
1,7848	9,429216
1,7905	6,586286
1,7963	5,625512
1,802	6,668789
1,8077	9,62063
1,8134	14,17689
1,8191	19,88146
1,8249	26,20969
1,8306	32,65418

Continua.

Tabela 5 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
1,8363	38,82043
1,842	44,47927
1,8477	49,59085
1,8535	54,28511
1,8592	58,80349
1,8649	63,41989
1,8706	68,35125
1,8764	73,6829
1,8821	79,32822
1,8878	85,01832
1,8992	94,80854
1,905	97,94197
1,9107	99,36674
1,9164	98,8706
1,9221	96,45132
1,9336	86,846
1,945	73,88548
1,9507	67,35292
1,9564	61,24983
1,9622	55,71749
1,9679	50,72396
1,9736	46,09558
1,9793	41,58616
1,985	36,95755

Conclusão.

Os resultado obtido para as simulação feita com os dados do sistema ensaiado pelo pesquisador Pezinga, revelado na figura (10) da próxima página, apresenta as mesmas oscilações numéricas próximas às frentes de onda mais íngremes observadas nas superposições de resultados mostradas na figura (7).

A observação dos dados contidos nas tabelas (3) e (5) revelam a extrema proximidade dos valores obtidos para as análises de transitórios hidráulicos através do esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do sistema ensaiado pelo mesmo pesquisador.

Figura 10 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

EXP é a curva dos dados experimentais e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0	30,01319
0,0028	42,80829
0,0056	57,51775
0,0085	69,37681
0,0113	70,26503
0,0141	70,25529
0,0169	70,24267
0,0197	70,22751
0,0226	70,21205
0,0254	70,19834
0,0282	70,18708
0,031	70,17752
0,0338	70,1675
0,0367	70,15448
0,0395	70,13544
0,0423	70,0935
0,0451	69,94795
0,0479	69,435
0,0508	67,93295
0,0536	64,35915

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,0564	57,36319
0,0592	45,95844
0,062	30,39379
0,0649	12,69664
0,0677	-3,69731
0,0705	-15,2918
0,0733	-20,1781
0,0761	-18,9631
0,079	-14,3495
0,0818	-9,63345
0,0846	-7,07086
0,0874	-7,08372
0,0903	-8,61749
0,0931	-10,1902
0,0959	-10,8392
0,0987	-10,4251
0,1015	-9,2916
0,1044	-7,67935
0,1072	-5,33056
0,11	-1,48606
0,1128	4,789357
0,1156	14,14998
0,1185	26,56707
0,1213	41,11152
0,1241	56,01081
0,1269	69,02537
0,1297	78,09261
0,1326	82,04095
0,141	71,35173
0,1438	67,12699
0,1467	65,30661
0,1495	65,85032
0,1523	67,68389
0,1551	69,35665
0,1579	69,71067
0,1608	68,21958
0,1636	64,89424
0,1664	59,91976
0,1692	53,32362
0,172	44,9079
0,1749	34,48302
0,1777	22,2417
0,1805	9,02723
0,1833	-3,68961
0,1861	-14,1573
0,189	-20,8864
0,1918	-23,1677
0,1946	-21,3518

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,2002	-11,2954
0,2031	-6,74575
0,2059	-4,27234
0,2087	-4,04649
0,2115	-5,305
0,2143	-6,7268
0,2172	-6,95534
0,22	-5,03636
0,2228	-0,60491
0,2256	6,19804
0,2284	14,96353
0,2313	25,22972
0,2341	36,54553
0,2369	48,37579
0,2397	59,95672
0,2425	70,25263
0,2454	78,10834
0,2482	82,57413
0,251	83,2675
0,2538	80,59715
0,2566	75,72124
0,2595	70,2259
0,2623	65,63184
0,2651	62,91288
0,2679	62,20941
0,2708	62,83524
0,2736	63,5602
0,282	54,72551
0,2849	46,5868
0,2877	36,42566
0,2905	25,06056
0,2933	13,35717
0,2961	2,141245
0,299	-7,80615
0,3018	-15,742
0,3046	-21,0155
0,3074	-23,2077
0,3102	-22,3076
0,3131	-18,8294
0,3159	-13,7788
0,3187	-8,43118
0,3215	-3,97816
0,3243	-1,16017
0,3272	-0,02872
0,33	0,066814
0,3328	0,26076
0,3356	1,800713
0,3384	5,660946

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,3413	12,27025
0,3441	21,42986
0,3469	32,41794
0,3497	44,20997
0,3525	55,71769
0,3554	65,96933
0,3582	74,20405
0,361	79,90129
0,3638	82,79167
0,3666	82,8815
0,3695	80,48895
0,3723	76,25533
0,3751	71,08146
0,3779	65,96509
0,3807	61,76027
0,3836	58,93046
0,3864	57,38845
0,3892	56,49474
0,392	55,23444
0,3948	52,52179
0,3977	47,53352
0,4005	39,96066
0,4033	30,1012
0,4061	18,77685
0,4089	7,11961
0,4118	-3,68932
0,4146	-12,6464
0,423	-23,3731
0,4259	-21,62
0,4287	-17,9395
0,4315	-13,0674
0,4343	-7,81512
0,4371	-2,93975
0,44	1,011631
0,4428	3,846079
0,4456	5,804317
0,4484	7,528741
0,4513	9,907339
0,4541	13,8255
0,4569	19,89662
0,4597	28,25673
0,4625	38,4898
0,4654	49,70626
0,4682	60,74587
0,471	70,43645
0,4738	77,83231
0,4766	82,37137
0,4795	83,92732

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,4823	82,76913
0,4851	79,46007
0,4879	74,73456
0,4907	69,37476
0,4936	64,09586
0,4964	59,44122
0,4992	55,69101
0,502	52,80113
0,5048	50,39576
0,5077	47,83551
0,5105	44,36453
0,5133	39,31219
0,5161	32,29869
0,5189	23,38298
0,5218	13,10277
0,5246	2,387339
0,5274	-7,63406
0,5302	-15,8753
0,533	-21,5179
0,5359	-24,159
0,5387	-23,854
0,5415	-21,0555
0,5443	-16,4832
0,5471	-10,9627
0,55	-5,27129
0,5528	-0,01502
0,5556	4,45517
0,5641	13,99477
0,5669	17,37094
0,5697	21,84962
0,5725	27,8856
0,5753	35,62581
0,5782	44,82016
0,581	54,82292
0,5838	64,69358
0,5866	73,37973
0,5894	79,93488
0,5923	83,71378
0,5951	84,49519
0,5979	82,50221
0,6007	78,32508
0,6035	72,7727
0,6064	66,69494
0,6092	60,81823
0,612	55,62522
0,6148	51,29472
0,6176	47,70177
0,6205	44,47052

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,6233	41,0678
0,6261	36,92493
0,6289	31,57142
0,6318	24,76044
0,6346	16,56083
0,6374	7,391596
0,6402	-2,01945
0,643	-10,7524
0,6459	-17,8668
0,6487	-22,5906
0,6515	-24,4768
0,6543	-23,4912
0,6571	-20,0061
0,66	-14,7075
0,6628	-8,43779
0,6656	-2,01623
0,6684	3,919556
0,6712	9,019552
0,6741	13,25712
0,6769	16,89607
0,6797	20,40239
0,6825	24,32255
0,6853	29,15062
0,6882	35,20627
0,691	42,54345
0,6938	50,90511
0,6966	59,73741
0,7051	81,00576
0,7079	83,83729
0,7107	83,87509
0,7135	81,2638
0,7164	76,50094
0,7192	70,32916
0,722	63,57813
0,7248	56,99489
0,7276	51,10178
0,7305	46,11305
0,7333	41,92469
0,7361	38,17438
0,7389	34,35303
0,7417	29,94122
0,7446	24,54266
0,7474	17,98885
0,7502	10,39897
0,753	2,183119
0,7558	-6,01097
0,7587	-13,3999
0,7615	-19,1998

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,7643	-22,7667
0,7671	-23,7198
0,7699	-22,0161
0,7728	-17,96
0,7756	-12,145
0,7784	-5,33466
0,7812	1,690762
0,784	8,286316
0,7869	14,06
0,7897	18,9291
0,7925	23,10429
0,7953	27,00883
0,7982	31,15334
0,801	35,99636
0,8038	41,81954
0,8066	48,64425
0,8094	56,20344
0,8123	63,97264
0,8151	71,25368
0,8179	77,29325
0,8207	81,41622
0,8235	83,14756
0,8264	82,30024
0,8292	79,0118
0,832	73,72029
0,8348	67,08299
0,8376	59,85145
0,8461	40,63885
0,8489	35,89154
0,8517	31,70514
0,8546	27,63002
0,8574	23,18853
0,8602	18,00934
0,863	11,93484
0,8658	5,080043
0,8687	-2,1685
0,8715	-9,21244
0,8743	-15,3449
0,8771	-19,8771
0,8799	-22,2638
0,8828	-22,2015
0,8856	-19,6844
0,8884	-15,0056
0,8912	-8,70533
0,894	-1,47207
0,8969	5,983085
0,8997	13,05511
0,9025	19,34915

Continua.

Tabela 6 – Resultados obtidos através de simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

Tempo (s)	Carga na Válvula (m)
0,9053	24,73866
0,9081	29,36386
0,911	33,57075
0,9138	37,80492
0,9166	42,48289
0,9194	47,87193
0,9222	54,00422
0,9251	60,64453
0,9279	67,31837
0,9307	73,39204
0,9335	78,18843
0,9363	81,11256
0,9392	81,762
0,942	80,00115
0,9448	75,98603
0,9476	70,13665
0,9504	63,06154
0,9533	55,44908
0,9561	47,94576
0,9589	41,04606
0,9617	35,01502
0,9645	29,8604
0,9674	25,36037
0,9702	21,14088
0,973	16,7874
0,9758	11,96431
0,9787	6,517069
0,9871	-11,5165
0,9899	-16,4176
0,9928	-19,7445
0,9956	-21,0172
0,9984	-19,9827

Conclusão.

A observação dos dados contidos nas tabelas (4) e (6) revelam a extrema proximidade dos valores obtidos para as análises de transitórios hidráulicos através do esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do sistema ensaiado pelos mesmos pesquisadores.

Figura 11 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson. EXP é a curva dos dados experimentais e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão

O resultado obtido para a simulação feita com os dados do sistema ensaiado pelos pesquisadores Bergant e Simpson, revelado na figura (11), apresenta as mesmas oscilações numéricas próximas às frentes de onda mais íngremes observadas nas superposições de resultados mostradas na figura (8).

Os próximos dois gráficos, figuras (12) e (13), mostrarão a superposição dos resultados obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos dois sistemas ensaiados pelos pesquisadores Pezinga, Bergant e Simpson.

A observação dos dois próximos gráficos, figuras (12) e (13), dará uma melhor visão daquilo que os dados em forma de tabela e os primeiros gráficos que comparavam cada simulação realizada com o esquema de MacCormack já indicavam: Os resultados obtidos para as duas simulações propostas neste trabalho apresentam valores muito próximos.

Figura 12 – Gráfico da superposição dos resultados obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga.

MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão.

Figura 13 – Gráfico da superposição dos resultados obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão

Nos gráficos das figuras (12) e (13) é possível observar uma superposição quase perfeita das simulações feitas pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dois grupos de dados que foram ensaiados pelos pesquisadores Pezinga, Bergant e Simpson.

Os dados apresentados nas tabelas (3) e (5) que mostram os dados obtidos com as simulações para o mesmo sistema ensaiado através do Esquema de com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão e nas tabelas (4) e (6) que também apresentam as mesmas simulações, porém, para dados de um sistema ensaiado por outro pesquisador, mostram uma diferença extremamente pequena.

Essa diferença encontrada não ultrapassou uma unidade em metros, não sendo significativa do ponto de vista prático, no dia-a-dia dos problemas de engenharia, para os quais a análise de transitórios encontra a sua maior serventia.

Figura 14 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados do pesquisador Pezinga. EXP é a curva dos dados experimentais, MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão.

Figura 15 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

EXP é a curva dos dados experimentais, MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão.

Nos gráficos das figuras (14) e (15), onde são mostradas superposições dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão para os dados dos pesquisadores Pezinga, Bergant e Simpson é possível observar que em ambos, as simulações acompanham bem a curva formada pelos pontos experimentais, exceto pelo aparecimento de oscilações numéricas junto as frentes de onda mais íngremes.

As oscilações numéricas próximo às frentes de onda mais íngremes poderão ser atenuadas pela introdução de viscosidade artificial ou refinamento da malha x - t , através do aumento do número de seções, sendo esta segunda alternativa de atenuação das oscilações mostrada nos gráficos das figuras (16) e (17) da próxima página.

Figura 16 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções para os dados do pesquisador Pezinga.

EXP é a curva dos dados experimentais, MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante usando 50 seções e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções.

Figura 17 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções para os dados dos pesquisadores Bergant e Simpson.

EXP é a curva dos dados experimentais, MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante usando 50 seções e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções.

Nos gráficos das figuras (16) e (17) são mostradas superposições dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão, usando 50 seções, para os dados dos pesquisadores Pezinga, Bergant e Simpson.

O refinamento da malha x - t , com o aumento do número de seções de 10 para 50, atenuou significativamente as oscilações observadas próximas as frentes de onda mais íngremes. Essa atenuação aproximou, ainda mais, os resultados simulados através do Esquema de MacCormack daqueles obtidos experimentalmente, principalmente na parte inicial do gráfico, que é o momento mais crítico do transitório, e manteve a mesma superposição, quase perfeita, das curvas geradas a partir das simulações com o fator de atrito (f) permanente e com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão.

10. – CONCLUSÕES

Após a análise dos dados obtidos com as simulações realizadas tanto com o Esquema Numérico de MacCormack com o fator de atrito constante, quanto com o Esquema de MacCormack com a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado modelada por gradiente harmônico de pressão é possível concluir que este último, oferece bons resultados quando comparado ao já analisado Método de MacCormack em sua versão tradicional e frente aos dados experimentais utilizados nesta pesquisa.

A solução das equações que regem o escoamento unidimensional não permanente em dutos sob pressão por meio do Esquema Numérico de MacCormack com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão mostrou-se viável, além de apresentar um esquema do tipo preditor-corretor de fácil utilização, após o desenvolvimento da fórmula de Moivre e função de Bessel para a modelação matemática da tensão de cisalhamento.

Definitivamente, o Esquema de MacCormack com a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado modelada por gradiente harmônico de pressão apresenta-se como alternativa ao referido método de análise de transitório em sua versão com fator de atrito constante, principalmente em análises de transitórios em equipamentos onde a precisão exigida seja elevada.

Apesar de retratar realisticamente a expressão matemática do evento físico, a diferença (pouco significativa) observada entre os resultados produzidos pelas duas modelações, acima citadas, não indica que deva ser promovida nenhuma mudança no tratamento que vem sendo dado à análise dos transitórios nas últimas décadas, entretanto, na análise de transitórios em sistemas mais sensíveis, a diferença observada torna-se mais significativa.

Admitir o fator de atrito constante ou variável, dependente da vazão do escoamento, continuará trazendo bons resultados e, principalmente, a favor da segurança, na análise dos transitórios hidráulicos em engenharia. Este fato é de fácil comprovação, uma vez que a ocorrência da reversão do gradiente longitudinal de pressão associada a reversão do sentido do perfil de velocidades, instante no qual o fator de atrito é matematicamente nulo, mas a tensão de cisalhamento não é, ocorre em uma fração de tempo, comparada a toda a duração do transatório hidráulico.

Assim como em FRANÇA (2006), quando foi comparado ao consolidado Método das Características, o esquema de MacCormack com a tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão produziu oscilações numéricas próximo às frentes de onda mais íngremes. Estas oscilações cresceram com o decorrer do transiente, porém puderam ser atenuadas por meio do refinamento da malha x-t através do aumento do número de seções, conforme foi observado nos gráficos das figuras (16) e (17).

11. – REFERÊNCIAS

ALLEVI, L. **Theorie General du Moviment Varie de L'eau Dans Less Tuyaux de Conduit.** Reveu de Mecanique. Paris, France. V. 14, 10 – 22 and 230 – 259, 1904.

ALMEIDA, A. B.; KOELLE, E. **Fluid Transients in Pipe Networks.** Southampton, Computational Mechanics Publications, 1992.

BERGERON, L. **Estude des Variations de Regime Dans Conduits d'eau: Solution Graphique General.** Revue General de Hydraulique. V. 1, pp. 12 and 69, 1935.

BERGERON, L. **Estude des Coups de Beler Dans les Conduits, Nouvel Exose de la Methode Graphique.** La Technique Moderne. V. 28, pp. 37 and 75, 1936.

BHALLAMUDI, S. M.; CHAUDHRY, M. H. **Numerical Modeling of Aggradation and Degradation in Alluvial Channels.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 117, n. 9, p. 1145-1164, 1991.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Fenomena.** Jonh Wiley. NY, 780p, 1960.

BRUNONE, B. **Some Considerations on Velocity Profiles in Unsteady Pipe Flows.** Singh and M. Fiorentino, Eds. pp 281 – 487, 1991.

FENNEMA, R. J.; CHAUDHRY, M. H. **Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flow with Shocks.** Water Resources Research. v. 22, n. 13, p. 1923-1930, 1986.

FRANÇA, F. V. **Verificação da Adequação do Esquema Numérico de MacCormack na Solução de Transientes Hidráulicos em Conduitos Forçados.** Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2006.

GARCÍA-NAVARRO, P. et al. **1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD_MacCormack Scheme.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 118, n. 10, p. 1359-1372, 1992.

GARCÍA-NAVARRO, P.; SAVIRÓN, J. M. **MacCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open-channel flow.** Journal of Hydraulic Research. v. 30, n. 1, p. 95-105, 1992.

GHARANGIK, A. M.; CHAUDHRY, M. H. **Numerical Simulation of Hydraulic Jump.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 117, n. 9, p. 1195-1211, 1991.

GUIDAOUI, M. S.; KOLYSHKIN, A. A. **Stability analysis of velocity profiles in waterhammer flows.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 127, n. 6, p. 459-512, 2001.

GUIDAOUI, M. S.; MANSOUR, S. **Efficient treatment of the vary-brown unsteady shear in pipe transients.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 108, n. 11, p. 102-112, 2002.

HUSSAIN, M. Y.; CHAUDHRY, M. H. **Second-order accurate explicit finite-difference schemes for waterhammer analysis.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 107, n. 44, p. 523-529, 1985.

JAMESON, A. et al. **Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping.** American Institute of Aeronautics and Astronautics. n.81, p. 1259, 1981.

LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics.** Pergamo Press. Oxford. 2ª ED. 539p, 1989.

LAZO, M. P. **Transitórios Hidráulicos em Instalações de Recalque.** Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 1991.

LESSA, R. C. **Análise do Funcionamento de Acessórios durante a Ocorrência de Transitórios Hidráulicos.** 1990. 162 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

LIMA, L. F. **Termo de atrito em escoamento transitório para condutos forçados.** Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia. São Paulo, 2006.

MACCORMACK, R. W. **The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering.** American Institute of Aeronautics and Astronautics. p. 69-354, 1969.

MACCORMACK, R. W. **Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer.** Methods in Fluid Dynamics. p. 151-163, 1971.

MACCORMACK, R. W.; PAULLAY, A. J. **Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators.** American Institute of Aeronautics and Astronautics. n. 72-154, 1972.

MACCORMACK, R. W.; BALDWIN, B. S. **A Numerical Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Application to Shock-Boundary Layer Interactions**. American Institute of Aeronautics and Astronautics. n. 75-1, 1975.

MACCORMACK, R. W. **At Efficient Numerical Method for Solving the Time-Dependent Compressible Navier-Stokes Equations at High Reynolds Number**. American Institute of Aeronautics and Astronautics TM X-73,-129, 1976.

MACCORMACK, R. W. **Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations**. American Institute of Aeronautics and Astronautics. n. 85-0032, 1985.

MACCORMACK, R. W. **A Perspective on a Quarter Century of CFD Research**. American Institute of Aeronautics and Astronautics. n. 93-3291-CP, 1993.

MARTIN, C. S. **Aspectos Transientes do Escoamento Bi-fásico**. Intercâmbio Internacional em Transientes Hidráulicos. CTH/EPUSP. São Paulo, 1982.

MORAES, A. G. **Entropia máxima na modelação do fator de atrito (f) de escoamento forçado**. Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia. São Paulo, 2010.

PARMAKIAN, J. **Air-Inlet Valves for Steel Pipe Lines**. ASCE. 2404. pp. 438 – 443. 1950.

PARMAKIAN, J. **Waterhammer Analysis**. Dover Publications. New York. 1963.

PEZZINGA, G. **Quasi-2D Model Unsteady Flow in Pipe Networks**. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. V 125, pp 667 – 685. 1999.

PORTO, R. M. **Hidráulica Básica**. Publicação EESC-USP. Segunda Edição. São Carlos, 2003.

TRIKHA, A. **An Efficient Method for Simulating Frequency-dependent Friction in Transient Liquid Flow**. Journal of Fluids Engineering, ASME, 97. P.97 – 105. 1975.

TULLIS, J. P. **Waterhammer Analysis with Air Release**. Second International Conference on Pressure Surges. BHRA. Londres, 1976.

WYLIE, E. B. ; STREETER, V. L. **Fluid Transients**. New York, McGraw-Hill Book Company, 1978.

WOMERSLEY, J. R. **Method for than Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when Pressure Gradient is Know.** J. Phphysiol. London. N. 127, P.P. 553 – 563, 1955.

ZHAO, M. ; GUIDAOUI, M. S. **Godunov - Type Solutions for Water Hammer Flows.** Journal of Hydraulic Engineering. v. 130, n. 4, p. 341-348, 2004.

ZIDOUH, H. **Velocity profiles and wall shear stress in turbulent transient pipe flow.** International Journal of Dynamics of Fluids. Vol. 5, n. 1, P.61-83. 2009.

ZIELKE, W. **Frequency-dependent friction in transient pipe flow.** Journal of Basic Engineering, ASME, 90. P.109 – 115. 1968.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de junho de 2012.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

França, Francis Valter Pepe

**Transitório hidráulico com tensão de cisalhamento na
parede
do conduto forçado modelada por gradiente harmônico de
pressão / F.V.P. França. -- ed.rev. -- São Paulo, 2012.
116 p.**

**Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental.**

**1. Transientes hidráulicos 2. Cisalhamento 3. Métodos numé-
ricos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departa-
mento de Engenharia Hidráulica e Ambiental II. t.**