Marco André Talarico

ANÁLISE DE UM MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO PARA SOLOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo, 2005

Marco André Talarico

ANÁLISE DE UM MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO PARA SOLOS

Orientador:
Prof. Dr. José Jorge Nader
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo, 2005

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de janeiro de 2006.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Talarico, Marco André
Análise de um modelo visco-hipoplástico para solos / M.A. Talarico. -- ed.rev. -- São Paulo, 2006.
p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Mecânica dos solos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. t.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Mario e Martha, e ao meu filho Marco.

O desenvolvimento deste trabalho somente foi possível pela dedicação de uma pessoa, de excelente caráter, humilde e possuidora de extrema competência. Esta pessoa dedica-se ao seu ofício com amor, o que torna os frutos de seu trabalho verdadeiras obras de arte: ao meu orientador, o Prof. Dr. José Jorge Nader, devo minha enorme gratidão pelos esforços despendidos para que esta pesquisa fosse concluída.

Agradeço, em tempo, aos Professores Doutores Maria Eugênia Boscov, pelo apoio e incentivo que prestou nos momentos difíceis, e Nelson Achcar pelas orientações que remontam à época do Curso de Graduação na Escola Politécnica da USP.

Há outras pessoas merecedoras de minha profunda gratidão, pois durante o caminho que percorri para concluir esta pesquisa apoiaram-me de diversas maneiras: agradeço a Daniel, amigo desde que éramos calouros nesta egrégia instituição de ensino superior, pelos auxílios na parte computacional, dentre tantas outras coisas; a Marcelo Ventura pelo apoio durante o período em que estudávamos no Curso de Formação de Oficiais da Marinha do Brasil; a Mario e Martha Talarico pelo incentivo e carinho através dos quais conduziram-me até este ponto da minha vida.

RESUMO

No âmbito da moderna Mecânica do Contínuo, este texto apresenta um modelo cuja equação objetiva simular fenômenos nos quais a variação da tensão depende da velocidade de deformação. Esta nova equação é fruto de uma modificação introduzida na equação hipoplástica apresentada por Nader, em 1999.

Inicialmente é apresentado um apanhado histórico geral, de modo a situar este trabalho no contexto mundial da Ciência Geotécnica. Ao longo do texto, os termos e definições elementares são explicados detalhadamente, de modo que o leitor possa ser bem conduzido para etapas posteriores, que envolvem formulações matemáticas e conceitos mais complexos.

A Equação Visco-Hipoplástica é apresentada e seus componentes e comportamentos são analisados. São mostrados resultados de comportamento desta nova equação, não somente para ensaios que envolvem fenômenos viscosos, mas também outros tipos de ensaios, denotando a versatilidade do modelo.

Na etapa final, são comparados os resultados de simulação de ensaios de relaxação com os resultados experimentais, obtidos em trabalhos publicados na literatura geotécnica.

ABSTRACT

In the realm of the modern Continuous Mechanics, this text presents a model whose equation aims at simulating phenomena in which the stress variation depends on the deformity speed. This new equation results from a modification applied to the hypoplastic equation presented by Nader, in 1999.

Firstly, the study presents a general historic summary so that this work is situated in the worldly context of Geotechnical Science. Throughout the text, the expressions and elementary definitions are explained in detail so that the reader can clearly understand the following stages, which involve mathematic formulations and more complex concepts.

The visco-hypoplastic equation is then presented and its components and behavior are analyzed. Results from the behavior of this new equation are then shown, not only applied to experiments that involve viscous phenomena, but also other kinds of experiments, demonstrating, therefore, the versatility of the model.

Finally, the results from the simulation of experiments with relaxation are compared to experimental results, obtained from published studies in the geotechnical literature.

LISTA DE SÍMBOLOS

$C_{\alpha e}$	Coeficiente de adensamento secundário
D	Tensor estirante – a parte simétrica de L
D_a	Parte anti-esférica de D
F	Gradiente da deformação
L	Gradiente espacial da velocidade
$p = \left(\sigma_a + 2 \cdot \sigma_r\right) / 3$	Tensão octaédrica
$q = \sigma_a - \sigma_r$	Tensão desviadora
R	Tensor de rotação
$s = \left(\sigma_a + \sigma_r\right) / 2$	Média das tensões axial e radial
$t = \left(\sigma_a - \sigma_r\right) / 2$	Semidiferença das tensões axial e radial
T	Tensão de Cauchy
$\dot{T}$	Taxa da tensão de Cauchy
$\overset{\circ}{T}$	Taxa corrotacional (de Jaumann) da tensão
T_a	Parte anti-esférica de T
U	Tensor estiramento direito
V	Tensor estiramento esquerdo
W	Tensor girante – a parte anti-simétrica de L
1	Tensor identidade
∇f	Gradiente de f

ε_a	Deformação logarítmica axial
ε_r	Deformação logarítmica radial
$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2 \cdot \varepsilon_r$	Deformação logarítmica volumétrica
$\gamma = \varepsilon_a - \varepsilon_r$	Distorção logarítmica
σ_a	Tensão axial
σ_r	Tensão radial
$\eta = q/p$	Razão entre as tensões desviadora e octaédrica

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 4

1.1. OBJETIVOS DESTE TRABALHO 4

1.2. BREVES ESCLARECIMENTOS 4

1.3. A IMPORTÂNCIA DO TEMA 6

2. ABORDAGEM HISTÓRICA 8

3. AS OBRAS CLÁSSICAS E A VISÃO DO FENÔMENO VISCOSO 10

3.1. SOBRE O ADENSAMENTO SECUNDÁRIO 11

3.2. INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA CAMADA DE ARGILA DURANTE O ADENSAMENTO 13

3.3. CONCLUSÃO DESTA ABORDAGEM 13

4. NOÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS CONSTITUTIVOS SIMPLES PARA FENÔMENOS VISCOSOS 15

5. ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADOS AO ESTUDO EM QUESTÃO 19

6. ASPECTOS GERAIS DA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA APRESENTADA POR NADER 24

6.1. PROPRIEDADES BÁSICAS DA HIPOPLASTICIDADE 24

6.2. A EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA PROPOSTA POR NADER 28

7. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 33

7.1. FORMULAÇÃO GERAL 33

7.2. DESCRIÇÃO E ESTUDO DAS FUNÇÕES α E β E SUA INFLUÊNCIA NA FÓRMULA DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 34

7.2.1. EXPRESSÕES DE α E β 34

7.2.2. DEPENDÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO DOS ENSAIOS 35
7.2.3. EXISTÊNCIA DE COMPORTAMENTO NORMALIZADO 36
7.2.4. RELAÇÃO ENTRE HOMOGENEIDADE EM D, E OS FENÔMENOS VISCOSOS 37
7.4. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 39
8. ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 41
8.1. FORMA MATRICIAL DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 42
8.1.1. CASO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA 47
8.1.2. CASO DE COMPRESSÃO EDOMÉTRICA 48
8.1.3. CASO DE COMPRESSÃO NÃO-DRENADA (ISOCÓRICA OU ISOVOLUMÉTRICA) 48
8.2. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA SIMULANDO FLUÊNCIA 49
8.2.1. CONDIÇÃO ISOTRÓPICA 50
8.2.2. CONDIÇÃO EDOMÉTRICA 51
8.2.3. CONDIÇÃO NÃO-DRENADA 52
8.3. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA EQUAÇÃO NA RELAXAÇÃO 52
8.3.1. CONDIÇÃO ISOTRÓPICA 53
8.3.2. CONDIÇÃO EDOMÉTRICA 53
8.3.3. CONDIÇÃO NÃO-DRENADA 54
8.3.4. INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES 54
8.4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA FLUÊNCIA PARA O ESTADO ISOTRÓPICO DE TENSÕES 56
8.5. INFLUÊNCIA DAS CONSTANTES NA RESPOSTA DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA 61

9. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA COM A EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA NO ENSAIO NÃO DRENADO. 63

10. PREVISÃO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA PARA ENSAIOS EDOMÉTRICOS E NÃO DRENADOS COM DIFERENTES VELOCIDADES DE DEFORMAÇÃO 70

11. ESTUDO DA RELAÇÃO ENTRE A TENSÃO AXIAL E A TENSÃO RADIAL 80

12. CONFRONTO DA PREVISÃO DO MODELO COM DADOS EXPERIMENTAIS PARA DEFORMAÇÕES DE LONGA DURAÇÃO 89

12.1. FLUÊNCIA 89

12.2. RELAXAÇÃO 95

13. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS 97

14. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA 99

1. INTRODUÇÃO

1.1. OBJETIVOS DESTE TRABALHO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma nova equação constitutiva visco-hipoplástica que surgiu da modificação da equação hipoplástica apresentada por Nader (1999, 2003), de tal sorte que essa nova equação represente os fenômenos viscosos dos solos, tais como fluência e relaxação.

É apresentado, a seguir, um apanhado histórico geral a respeito do contexto no qual este trabalho está inserido.

Posteriormente, são apresentadas informações coletadas na literatura da Mecânica dos Solos, como base para este trabalho, que dizem respeito à maneira como o assunto relativo aos fenômenos de fluência e relaxação é abordado.

A nova equação não deve ter somente a capacidade de representar ensaios cuja finalidade seja estudar os fenômenos de natureza viscosa, mas também, de representar outros tipos de ensaios, como será mostrada a comparação entre as respostas desta equação visco-hipoplástica com as da equação hipoplástica, de Nader (1999), no ensaio não-drenado.

É realizada, por fim, a comparação com dados experimentais encontrados na literatura, a fim de verificar se a equação visco-hipoplástica possui boa capacidade de representação dos fenômenos de ordem viscosa.

1.2. BREVES ESCLARECIMENTOS

Este trabalho segue a linha da Mecânica dos Solos que se baseia na moderna Mecânica do Contínuo. O rigor matemático das formulações e a nitidez com que

se separam as hipóteses (explícitas) e a teoria em si são características marcantes neste tipo de abordagem, diferentemente da forma convencional.

A linguagem aqui utilizada, bem como as notações são derivadas dos trabalhos publicados no contexto da moderna Mecânica do Contínuo (por exemplo: Gurtin [1981]), Porém, quando apresentadas algumas definições escritas nos termos da linguagem utilizada em textos baseados na mecânica dos solos tradicional (baseada no ramo da Mecânica Aplicada), será mostrada a relação entre essas definições ou termos.

Os detalhes da inserção da linha da moderna mecânica do contínuo no contexto histórico serão exibidos no **capítulo 2. ABORDAGEM HISTÓRICA.**

O adensamento secundário e sua conexão com a fluência serão apresentados no **capítulo 3. AS OBRAS CLÁSSICAS E A VISÃO DO FENÔMENO VISCOSO.** Como se poderá notar, é necessário prestar maiores esclarecimentos a respeito de algumas definições antes de prosseguir a leitura rumo ao capítulo supracitado:

Fenômenos viscosos são aqueles cuja variação do estado de tensão de cada ponto pertencente ao corpo não depende somente do deslocamento de alguns pontos do mesmo, mas da velocidade com que ocorrem esses deslocamentos. São exemplos de fenômenos viscosos: a fluência, a relaxação e o chamado adensamento secundário.

Denomina-se fluência o fenômeno no qual ocorre deformação do corpo, sem que o estado de tensões (ou apenas uma das componentes do tensor das tensões) dos pontos do mesmo seja alterado.

Relaxação é o fenômeno no qual ocorre alívio do estado de tensões dos pontos ao longo da extensão do corpo, sem que ocorra deformação.

O adensamento secundário é definido, pela deformação de volume do solo sem que haja alteração das tensões efetivas do mesmo (Lancellotta [1995]). Trata-se de um fenômeno que ainda requer maiores estudos por parte dos cientistas da

área, pois seu mecanismo não é perfeitamente conhecido. Envolve o conceito de fluência, pois as tensões efetivas do solo não são alteradas, e mesmo assim, deformações ocorrem em sua extensão.

As definições matemáticas e suas aplicações a fim de atingir os objetivos deste trabalho serão prestadas mais adiante, após o leitor posicionar-se no contexto histórico e compreender a abordagem dada ao tema dos fenômenos viscosos, mostrados nos próximos dois capítulos.

1.3. A IMPORTÂNCIA DO TEMA

O conhecimento a respeito de deformações lentas é fundamental para se obter sucesso em diversas obras executadas por engenheiros geotécnicos. Por exemplo, recalques que ocorrem de forma lenta em camadas de argila mole, como os edifícios que sofreram recalques diferenciais em Santos, litoral de São Paulo. A seguir é transcrito um trecho de Carlos Pimentel Mendes, jornalista e editor do jornal eletrônico Novo Milênio, em Outubro/2003:

"(...) salvo pequenas variações, há uma camada de areia entre 6 e 10 m, compacta, boa, mas abaixo dela há uma camada de argila marinha do 10 ao 30 m de profundidade, um solo muito mole, então um prédio com carga maior atritando (sic) sobre a areia comprime essa argila, gerando recalques diferenciais (os prédios inclinam mais para um lado do que para o outro) (...)"
Segundo a reportagem de Carlos, o Bloco A do Edifício Núncio Malzoni foi corrigido ao custo de R$ 1,5 milhão, cerca de R$ 90 mil para cada apartamento.

O link para acessar a reportagem é http://www.novomilenio.inf.br/real/ed125z.htm.

Uma falha na previsão dos recalques, por aproximação grosseira ou ignorância a respeito do fenômeno, pode levar a gastos de grande monta na recuperação da obra (nos casos em que seja viável), como o caso do Bloco A, do Edifício Nuncio Malzoni.

No caso supracitado, os recalques decorrentes da compressão da camada de argila mole envolveram fenômenos de adensamento secundário.

A maioria dos modelos constitutivos existentes pertence ao grupo de modelos elastoplásticos, em que o histórico de tensões (ou deformações) a que o solo foi submetido é levado em consideração, entretanto o comportamento viscoso não o é. Ou seja, os modelos elastoplásticos não levam em consideração o tempo a que o solo foi submetido a uma dada tensão (ou deformação), então há a necessidade de estudar modelos que representem comportamentos viscosos.

Sabe-se que existe essa relação entre tensão e velocidade de deformação, o que pode ser verificado tanto em ensaios de laboratório quanto em ensaios “in situ”, como o Vane Test (teste de palheta). As palhetas giram rapidamente para obter-se um valor de resistência, que deve ser multiplicada por um coeficiente para se obter o valor da resistência de projeto.

No presente trabalho, a relação entre tensão e velocidade de deformação é dada por uma equação constitutiva que, segundo Kolymbas (2000), é uma relação matemática entre tensão e deformação para um dado material, cuja relação é complementada pelas constantes do material (que diferenciam aço, borracha, solo etc.).

A equação constitutiva é a alma do modelo constitutivo, ela possibilita prever a estabilidade de um talude, o carregamento das seções de um túnel, as deformações ao redor de escavações (recalques) e auxilia a compreensão do comportamento do material.

Os problemas geotécnicos são solucionados mediante adoção de várias hipóteses e simplificações. Conclui-se que o investimento no estudo para se refinar um modelo garante uma boa melhoria no resultado das previsões. E de nada adianta ensaios sofisticados sem um bom modelo para interpretá-lo.

2. ABORDAGEM HISTÓRICA

Conforme expôs em seu trabalho, Truesdell (apud Nader [1999]) apresentou a Mecânica dividida em: Mecânica Aplicada e Mecânica Racional. A Mecânica dos Solos recebeu maior influência da linha da Mecânica Aplicada.

No ramo da Mecânica Aplicada, além da Viscoelasticidade, tem-se a Elasticidade Linear e a Plasticidade Perfeita que, na primeira metade do Séc. XX, serviram de base para a Teoria do Adensamento e a Teoria de Capacidade de Carga.

Na linha da Mecânica Racional, no início da década de 1950 iniciou-se uma reorganização da Mecânica do Contínuo e criou-se uma teoria geral do comportamento dos materiais.

Como disse Nader (1999), a linha da Mecânica Racional trata com generalidade a deformação dos materiais, além de clareza e rigor matemático.

No ramo da Mecânica dos Solos, Terzaghi (1943) aborda problemas de deformação com Elasticidade Linear e os casos de ruptura com Plasticidade Perfeita. Posteriormente surge o Cam-Clay, abrindo caminho para outros modelos, baseados na linha tradicional, desconsiderando a revolução da Mecânica do Contínuo.

Ainda, no ramo da Mecânica dos Solos, surge uma linha de modelos constitutivos, com base na linha da Mecânica Racional: a Hipoplasticidade. Esta teoria surgiu com uma proposição de generalização da Hipoelasticidade por Kolymbas, em 1978. Esta generalização consiste em abandonar a linearidade da função constitutiva em D. Com esta modificação, uma só equação é capaz de representar irreversibilidade, ou seja, o comportamento de carregamento e descarregamento.

No que diz respeito aos fenômenos viscosos, modelos viscoplásticos já foram propostos, como por exemplo: T. Adashi e F. Oka, no artigo *Constitutive*

equations for normally consolidated clays and assigned works for clay, publicado em *Constitutive Relations for Soils*, por Gudehus, Darve e Vardoulakis (1984). O modelo deste artigo baseou-se numa derivação do Cam-Clay e da Teoria de Perzyna da Elasto-Viscoplasticidade. A lei de fluxo associada foi assumida como válida, possibilitando representar fluência, relaxação e adensamento secundário.

O surgimento da equação Visco-Hipoplástica se dá com a publicação do artigo *Visco-Hypoplastic Models for Cohesive Soils*, de Wu, Bauer, Niemunis e Herle, editado por Kolymbas em *Modern Approaches to Plasticity* (1993), que traz uma modificação na forma da equação Hipoplástica, fazendo com que a resposta em termos de tensão (taxa corrotacional da tensão de Cauchy) dependa da taxa de deformação (tensor estirante D), de forma não homogênea.

Esta modificação permitiu que se representassem comportamentos dependentes do tempo, tais como fluência e relaxação.

Outro trabalho em visco-hipoplasticidade é o de Gudehus, que publicou em 2004 o artigo *A Visco-Hypoplastic Constitutive Relation for Soft Soils*, em *Soils and Foundations*. Neste artigo, a representação da viscosidade é introduzida na Hipoplasticidade pelo uso da função de dureza do sólido (solid hardness) h_s, dependente da taxa de deformação e do fator de viscosidade, que depende da razão de sobreadensamento.

O modelo Visco-Hipoplástico apresentado neste trabalho insere-se no ramo da Mecânica dos Solos, que segue a linha da Mecânica do Contínuo Moderna, derivado do modelo proposto por Nader (1999) e acrescido de duas funções escalares propostas inicialmente para uma outra equação, apresentada em 1993, por Wu, Bauer, Niemunis e Herle.

3. AS OBRAS CLÁSSICAS E A VISÃO DO FENÔMENO VISCOSO

Neste capítulo é mostrado o fenômeno viscoso do solo tal como é apresentado por autores das obras clássicas do ramo da mecânica dos solos. Discute-se, ainda, a diferença entre os tipos de abordagens entre as obras clássicas e o presente texto.

Segundo Mitchell (1992), as respostas dependentes do tempo para os solos não apresentam um mesmo padrão de comportamento por causa dos seguintes fatores:

- complexa interação solo-estrutura;
- histórico de tensões a que o solo foi submetido;
- condições de drenagem;
- mudanças na temperatura e pressão;
- alterações no meio bioquímico do solo com o passar do tempo.

Há ainda outros fatores que serão comentados ao tratar-se de adensamento secundário.

Assim como Mitchell (1992), Lambe e Whitman (10) concluem que a deformação volumétrica apresenta duas fases:

- adensamento primário, que é o fenômeno na qual o ocorre diminuição de volume de um solo saturado às custas da fuga da água de sua estrutura. O controle da velocidade com a qual o adensamento primário ocorre depende da velocidade com a qual a água consegue escapar da estrutura do solo.
- adensamento secundário[1], controlada pela resistência viscosa da estrutura do solo.

[1] Cabe aqui uma observação no que tange à nomenclatura - certos autores mencionam o termo “compressão secundária” com o significado de “adensamento secundário” utilizado neste texto.

Segundo Lancellotta (1995), é muito bem aceita na literatura geotécnica que o adensamento primário é definido como a alteração de volume associada a uma mudança das tensões efetivas que atuam no solo, enquanto que o adensamento secundário é a alteração no volume mantidas as tensões efetivas constantes, conforme dito acima.

Porém, esta separação em fases deixa implícita a idéia do efeito da fluência atuar somente após o término da primeira fase, onde a pressão neutra praticamente já se dissipou. Esta idéia é difícil ser aceita, principalmente no campo, tratando-se de depósitos argilosos relativamente espessos.

3.1. SOBRE O ADENSAMENTO SECUNDÁRIO

O mecanismo da compressão secundária ainda não é conhecido com detalhes, porém, sabe-se que envolve escorregamento entre partículas, expulsão de água dos elementos da microfábrica, rearranjo das moléculas de água adsorvida e cátions em diferentes posições.

A relação entre o índice de vazios e o logaritmo do tempo, durante o adensamento secundário é linear, em geral, para a maioria dos solos além do período do término do adensamento primário (suposição suficientemente boa, segundo Mitchell (1992) para a maioria dos casos práticos). Deste modo, chama-se coeficiente de adensamento secundário:

$$C_{\alpha e} = \frac{de}{d \log t}$$

Mitchell ainda relacionou o coeficiente de adensamento secundário e o índice de compressão, apresentando a razão entre eles para vários tipos de solos.

Como foi dito acima, o autor considera o adensamento secundário como um caso especial de deformação volumétrica que se segue após o adensamento primário.

Uma característica que se nota da ação da deformação lenta em solos, é que sob tensão constante ordinariamente produz-se um ganho de resistência, sob ação do subseqüente aumento de tensão (figura 3.1.1).

Isto é análogo ao efeito de pré-adensamento devido ao adensamento secundário, contudo este efeito pode se desenvolver em condições drenadas ou não drenadas.

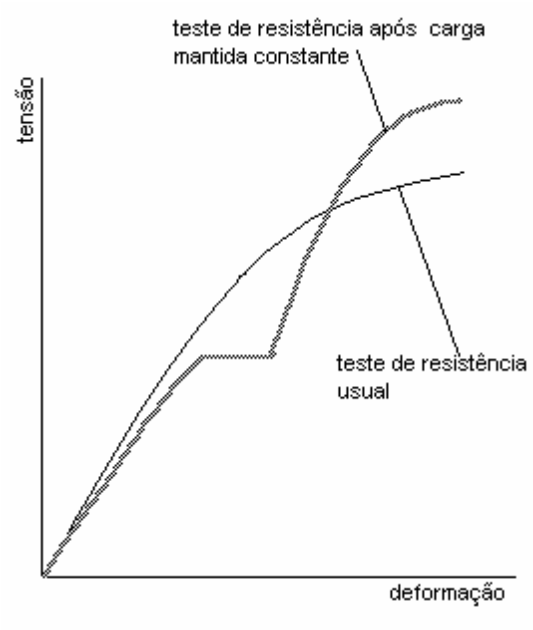


Figura 3.1.1-Ganho de resistência

Com relação ao efeito da pressão neutra esta pode aumentar, diminuir ou permanecer constante, durante a fluência em condições não drenadas.

Devido à natureza viscosa da estrutura do solo, o desenvolvimento da tensão efetiva completa e o correspondente equilíbrio de índice de vazios somente são alcançados após um longo período.

3.2. INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA CAMADA DE ARGILA DURANTE O ADENSAMENTO

De acordo com Lambe e Whitman (1979), a magnitude da altura do corpo-de-prova influencia a duração das duas fases anteriormente descritas. Nos corpos-de-prova de menor altura, o tempo que a pressão neutra leva para se dissipar é menor.

A relativa importância entre compressão primária e secundária reside no tempo que a pressão neutra demora a se dissipar, logo, depende da espessura da camada de solo, do tipo de solo e da taxa de incremento de tensão em relação ao nível de tensão inicial.

3.3. CONCLUSÃO DESTA ABORDAGEM

Sabe-se que o solo apresenta fenômeno viscoso por se tratar de um material granular, cujas partículas podem ser muito pequenas e numerosas, como é o caso das argilas, cuja parte das forças é transmitida entre os contatos da camada de água adsorvida nos minerais constituintes.

A acomodação, e natural procura de um equilíbrio numa situação de menor energia, faz com que as pequenas partículas se movimentem, causando deformação que ocorre durante um longo período.

Lancellotta, na sua obra, faz uma crítica oportuna quanto ao modo de visualização do fenômeno do adensamento. A separação em duas fases distintas, em que o adensamento secundário ocorre somente após o término do adensamento primário, pode mascarar o que realmente deve ocorrer. Porém, em certos casos, como depósitos argilosos espessos, nota-se que a fluência ocorre concomitantemente com o adensamento primário.

Em geral, o que se nota é que durante a fase chamada de adensamento primário, o fenômeno de alteração volumétrica da estrutura do solo devido à expulsão da água é muito mais visível do que a alteração volumétrica devido aos mecanismos citados anteriormente, inerentes ao esqueleto de cada tipo de solo.

Este capítulo serve para o leitor compreender o ponto de vista das obras clássicas da mecânica dos solos acerca dos fenômenos viscosos, porém este trabalho não se apóia nas teorias que procuram descrever a microestrutura do solo, e sim na teoria do contínuo, na qual procura-se representar o comportamento do solo a partir dos resultados observados na prática, sem entrar no âmbito do complexo esqueleto interno de cada tipo de solo.

4. NOÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS CONSTITUTIVOS SIMPLES PARA FENÔMENOS VISCOSOS

Nos capítulos anteriores foi mostrado ao leitor o contexto histórico no qual este trabalho se situa, e os aspectos encontrados na literatura sobre fenômenos de adensamento secundário, fluência e relaxação. Neste capítulo, o leitor terá contato com noções sobre modelos constitutivos simples, de forma a prepará-lo para compreender as etapas posteriores.

Um modelo constitutivo é um mecanismo abstrato que descreve um determinado comportamento por meio de uma equação matemática (denominada *equação constitutiva*), e é utilizado para representar o comportamento do material que esteja em estudo.

A aplicação de um modelo constitutivo deriva de observações experimentais com o material em estudo; procura-se um modelo que descreva bem o comportamento do material em sua totalidade ou em parte dela, dependendo do enfoque de sua pesquisa. A seguir apresenta-se um exemplo simples de uma equação constitutiva: a própria Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Onde σ representa a tensão, e ε representa a deformação. A relação entre tensão e deformação é linear, e E é o coeficiente angular, no gráfico $\sigma \times \varepsilon$, da figura 4.1.

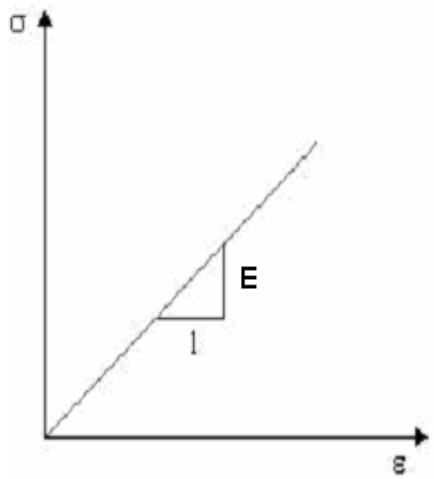


Figura 4.1-Lei de Hooke

Outros dois exemplos de modelos constitutivos são os corpos de Maxwell e de Kelvin. O corpo de Maxwell é constituído por uma mola em série com um pistão; o corpo de Kelvin é constituído pela mola e o pistão em paralelo, conforme se vê na figura 4.2, a seguir.

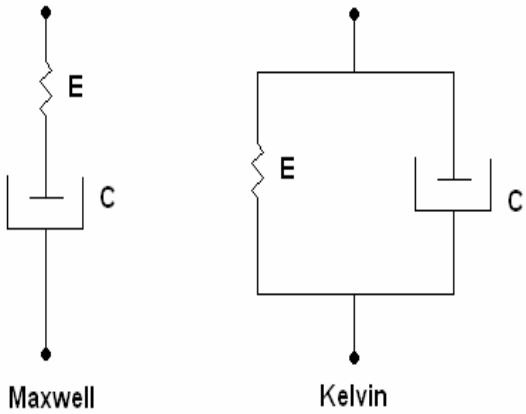


Figura 4.2 – Modelos de Maxwell e Kelvin

A relação entre tensão e deformação na mola é dada pela Lei de Hooke, como já foi visto; a relação constitutiva para o pistão é a seguinte:

$$\sigma = C \cdot \dot{\varepsilon}$$

Ou seja, a tensão no pistão depende da velocidade com a qual o êmbolo se movimenta.

De posse destes conhecimentos, apresentam-se a seguir as composições entre essas duas relações constitutivas para formar os corpos de Maxwell e Kelvin.

No corpo de Maxwell, tem-se que a tensão é a mesma na mola e no pistão, já que a massa destes elementos e da barra que os liga é desprezível. Então, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = E \cdot \varepsilon_m \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon}_m \\ \sigma = C \cdot \dot{\varepsilon}_p \\ \varepsilon_p + \varepsilon_m = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_m = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\sigma}{C} + \frac{\dot{\sigma}}{E} = \dot{\varepsilon} \qquad (4.1)$$

No corpo de Kelvin, a deformação para a mola e o pistão são iguais, então:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_m = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon} \\ \sigma_p = C \cdot \dot{\varepsilon} \\ \sigma_p + \sigma_m = \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow C \cdot \dot{\varepsilon} + E \cdot \varepsilon = \sigma \qquad (4.2)$$

O presente trabalho traz ao conhecimento do leitor um modelo constitutivo mais complexo do que esses dois exemplos unidimensionais. Trata-se de um modelo constitutivo visco-hipoplástico tridimensional, em que as grandezas envolvidas não são escalares, mas sim, tensoriais, baseado na equação proposta por Nader (1999), cujo modelo pertence ao campo da Hipoplasticidade.

O modelo hipoplástico supramencionado será descrito mais adiante, no **Capítulo 7. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA**, mas o que é interessante dizer neste momento, é que a equação hipoplástica proposta por Nader não leva em consideração a velocidade de deformação na qual os ensaios são realizados. Em compensação, a equação é analiticamente fácil de ser estudada; ao contrário

da equação visco-hipoplástica deste trabalho, que leva em consideração a velocidade na qual são simulados os ensaios.

A nova equação, porém, mostrou-se matematicamente bastante complexa para ser manipulada algebricamente, tornando a análise de seu comportamento dependente de numerosas simulações numéricas, e limitando a manipulação algébrica.

5. ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADOS AO ESTUDO EM QUESTÃO

A seguir serão apresentados alguns tópicos básicos da Mecânica do Contínuo, para que o leitor se familiarize com os termos e grandezas utilizados. Para aqueles que desejarem aprofundar o estudo, conhecer as demonstrações e outros teoremas, recomenda-se o livro "An introduction to Continuum Mechanics", San Diego, California, Academic Press, de Gurtin, M. E. (1981).

Para iniciar esta apresentação, considere-se dois conjuntos de entes matemáticos: V, que representa o conjunto dos vetores livres associados ao conjunto dos pontos do espaço da Geometria Euclidiana, representado por E.

Considere-se, agora, um corpo cuja configuração no instante t_0 denomina-se C_0. Com o passar do tempo, considera-se que este corpo sofreu deformação e deslocamento conforme ilustra a figura 5.1, atingindo a posição C_t num instante t maior do que t_0.

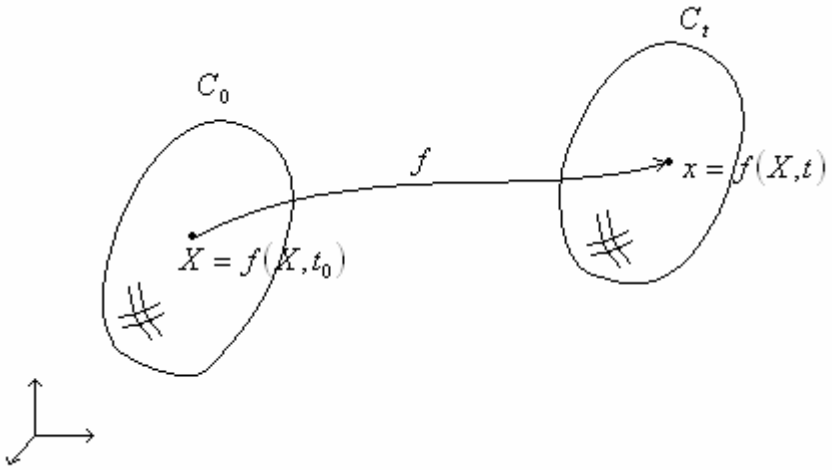


Fig 5.1-Ilustração do movimento

Diz-se que o vetor X indica a posição dos pontos do corpo na chamada *configuração de referência* C_0 (ou seja, no instante t_0), e o vetor x indica a posição na *configuração deformada* num instante t qualquer.
Pode-se exprimir matematicamente as grandezas envolvidas (como, por exemplo, velocidade) no movimento do corpo, através da função f, de duas maneiras: utilizando-se a *descrição material* (ou lagrangiana) ou a *descrição espacial* (ou euleriana).

Na descrição material, a grandeza G possui como parâmetros X e t, logo, durante a descrição cinemática do movimento dos pontos do corpo, sempre serão indicados os pontos referentes à configuração inicial C_0. É uma forma de acompanhar cada partícula da configuração inicial durante todo o movimento.

Na descrição espacial, a grandeza G possui x e t como parâmetros, então, na descrição cinemática do movimento do corpo, faz-se referência à configuração deformada do corpo.

Um bom exemplo para entender a diferença entre as descrições material e espacial é olhar para um rio em movimento, com muitas partículas fluindo e passando pelos diversos pontos das seções do rio.

Imagine que se possa "congelar" o movimento do rio, e tomar este estado como sendo a configuração de referência do rio (será o instante t_0). Numa dada seção, imagine que se possa colorir as partículas indicadas por X, que se queira conhecer o movimento.

Ao "descongelar" o movimento do rio, ver-se-ão as partículas coloridas passando por vários pontos do rio ao longo do tempo, porém, a posição X é a mesma durante todo o movimento, pois ela faz referência à configuração no instante inicial. A isto se chama descrição material.

Observando o rio em movimento, como se fosse um corpo sofrendo movimentos e deformações, tomaremos um ponto numa dada seção. Este ponto refere-se à configuração deformada e é dado por x.

Durante todo o movimento do rio, ver-se-á inúmeras partículas passando pela posição x. Se o escoamento do rio for permanente, diz-se que a velocidade das partículas naquela posição não se altera. A isto se chama descrição espacial do movimento.

Estando esses conceitos bem compreendidos, passa-se para a descrição matemática da velocidade na descrição material:

$$V(X,t) = \frac{\partial}{\partial t} f(X,t) \tag{5.1}$$

E da velocidade na descrição espacial:

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f\left(f^{-1}(x,t),t\right) \tag{5.2}$$

Sendo que $X = f^{-1}(x,t)$ é a função inversa de $x = f(X,t)$

Em se tratando de solos, em que não há uma configuração de referência privilegiada, como uma barra de aço, de dimensões e propriedades iniciais bem conhecidas, é bem-vinda a utilização da descrição espacial do movimento.

A velocidade com a qual se processa a deformação, na vizinhança do ponto analisado, é dada pelo chamado tensor *gradiente espacial da velocidade*:

$$L(x,t) = gradv(x,t) \tag{5.3}$$

A grandeza que será diretamente utilizada na expressão da equação constitutiva deste texto é dada pelo *tensor estirante* (“stretching”), que é a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade:

$$D = \frac{1}{2}\left(L + L^T\right) \tag{5.4}$$

A parte anti-simétrica do gradiente espacial da velocidade é dada pelo *tensor girante* (“spin”), e é dada por:

$$W = \frac{1}{2}\left(L - L^T\right) \tag{5.5}$$

Apresenta-se a seguir a definição de vetor *gradiente de deformação* no ponto X, pelo qual se analisa a posição relativa entre os pontos do corpo a partir da configuração de referência.

$$F(X,t) = \nabla f(X,t) \tag{5.6}$$

O tensor *gradiente de deformação* no ponto X é dado por $F(X,t): V \to V$, conforme as definições de V, e E, mostradas no início deste capítulo.

Pelo *teorema da decomposição polar* resulta que o gradiente de deformação pode ser decomposto num produto de dois tensores, de dois modos:

$$F = RU = VR \tag{5.7}$$

Onde R é o *tensor de rotação*, U é o *tensor estiramento direito* e V é o *tensor estiramento esquerdo*.

A relação entre o *gradiente de deformação* e o *gradiente espacial da velocidade*, na sua descrição material é:

$$L = \dot{F}F^{-1} \tag{5.8}$$

Até agora se foram expostas algumas definições sobre cinemática do Contínuo. E, com relação à tensão, utiliza-se a *tensão de Cauchy* (T), que será equivalente à Tensão Efetiva da Mecânica dos Solos (assim denominada por Terzaghi).

Como a taxa de tensão ($\dot{T}$) não é objetiva, utilizar-se-á a taxa corrotacional de tensão ($\overset{\circ}{T}$). A relação entre as taxas é dada por:

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - WT + TW \tag{5.9}$$

6. ASPECTOS GERAIS DA EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA APRESENTADA POR NADER

Neste capítulo, serão apresentadas propriedades básicas da Hipoplasticidade, para que, em seguida, seja apresentada a equação hipoplástica construída por Nader (1999), propriamente dita.

6.1. PROPRIEDADES BÁSICAS DA HIPOPLASTICIDADE

Para os materiais hipoplásticos, a relação que produz um valor de T para uma dada deformação imposta é:

$$\overset{\circ}{T} = H(T, D) \tag{6.1.1}$$

Segundo Nader (1999), estes materiais são caracterizados pela função H, que possui restrições essenciais (obedecidas não somente pelos materiais hipoplásticos, como também pelos hipoelásticos e elastoplásticos) e restrições determinantes de algumas propriedades (particulares de alguns tipos de materiais).

Com relação à imposição das restrições essenciais, temos:

Princípio da Objetividade Material

Este princípio impõe que o comportamento dos materiais deve ser independente do observador adotado.

Para iniciar esta apresentação, considere-se um tensor ortogonal Q para relacionar os movimentos relativos a dois referenciais quaisquer; e três tensores $T^*, D^*, \overset{\circ}{T}{}^*$, que são, respectivamente, a tensão de Cauchy, o tensor estirante e a

taxa corrotacional de tensão, que satisfaçam a equação 6.1.1 e sejam relacionados com $T, D, \overset{\circ}{T}$ por uma mudança de observador qualquer, da seguinte forma:

$$T^* = QTQ^T \tag{6.1.2}$$

$$D^* = QDQ^T \tag{6.1.3}$$

$$\overset{\circ}{T}{}^* = Q\overset{\circ}{T}Q^T \tag{6.1.4}$$

Como $T^*, D^*, \overset{\circ}{T}{}^*$ satisfazem a equação 6.1.1:

$$\overset{\circ}{T}{}^* = H\left(T^*, D^*\right)$$

E, tendo em vista as relações 6.3 a 6.5, tem-se:

$$Q\overset{\circ}{T}Q^T = H\left(QTQ^T, QDQ^T\right)$$

Para todo tensor ortogonal Q e todo $t \geq 0$.

Ou seja, como vale a relação 6.1.1, vale também:

$$QH(T, D)Q^T = H\left(QTQ^T, QDQ^T\right)$$

Concluindo que a função H deve ser isotrópica nos dois argumentos.

Os princípios apresentados a seguir deixam de valer para o modelo visco-hipoplástico, porém, deve-se compreender a equação hipoplástica apresentada por Nader, antes de estudar o modelo apresentado no presente trabalho.

Princípio da Independência da Velocidade de Deformação

A equação (6.1.1) é estritamente positiva e homogênea de grau 1 em D, ou seja:

$$H(T, \lambda D) = \lambda H(T, D)$$

Para todo $D \neq 0$ e todo T, se e somente se $\lambda > 0$.

Como $H(T, \lambda D) = \lambda H(T, D)$ para $D \neq 0$, para todo T, e $\lambda > 0$, a nova equação obedece à seguinte restrição essencial: *independência da velocidade de deformação,* própria das propriedades básicas comuns entre elastoplasticidade, hipoelasticidade e hipoplasticidade.

Com relação às restrições que determinam algumas propriedades:

Existência da Superfície de Estado Crítico

Como apresentou Nader (1999), quando os solos são submetidos a deformação com distorção crescente, tendem a um estado dito estado crítico. Neste estado, a variação de volume e a variação de tensão tendem a zero.

Matematicamente, devem existir T, D, com $trD = 0$, tal que $\overset{\circ}{T} = H(T, D) = 0$.

Existência de Comportamento Normalizado

Considere-se que a relação entre as componentes do tensor das tensões num ensaio "A" (cuja tensão inicial é λT_0) e num ensaio "B" (cuja tensão inicial é T_0) seja igual a λ, para todo $t \in$ ao intervalo de tempo I, tal que $\lambda > 0$, e o gradiente de deformação $F = F(t)$ para os dois ensaios seja o mesmo.

Matematicamente, tem-se um ensaio "B", cujo gradiente de deformação seja $F = F(t)$, e tensão inicial $T(0) = T_0$, que satisfaz a equação 6.1.1, e sua resposta é $T(t)$.

Um ensaio "A", com mesmo gradiente do ensaio "B" é submetido a uma tensão inicial $T^*(0) = \lambda T_0$. Diz-se, então, que a equação apresenta comportamento normalizado se a solução for $T^* = T^*(t) = \lambda T(t)$.

Como T^*, D e W, por hipótese, satisfazem a equação 6.1.1:

$$\overset{\circ}{T^*} = \dot{T}^* - WT^* + T^*W = H(T^*, D)$$

Substituindo a relação entre T^* e T:

$$\lambda \overset{\circ}{T} = \lambda \dot{T} - W\lambda T + \lambda TW = H(\lambda T, D)$$

E:

$$\lambda \overset{\circ}{T} = \lambda H(T, D)$$

$$H(\lambda T, D) = \lambda H(T, D)$$

Como as grandezas envolvidas são arbitrárias, a função H deve ser estritamente positiva homogênea de grau 1 em T.

Apresentaram-se os quatro princípios que um modelo hipoplástico deve seguir: Princípio da Objetividade Material, Princípio da Independência da Velocidade de Deformação (que não vale para um modelo visco-hipoplástico), Existência da Superfície de Estado Crítico (que não vale para um modelo visco-hipoplástico) e Existência de Comportamento Normalizado.

6.2. A EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA PROPOSTA POR NADER

A seguir, serão abordados aspectos particulares da equação hipoplástica apresentada por Nader, em 1999.

A equação hipoplástica adequada para descrever comportamento de materiais granulares, como é o caso dos solos, possui o seguinte formato (Kolymbas e Wu, 1993 apud Wu, Bauer, Niemunis e Herle, 1993):

$$\overset{\circ}{T} = H(T, D) = L(T, D) + N(T) \cdot \|D\| \qquad (6.2.1)$$

Na qual notam-se duas partes: a primeira, constituída por uma função linear em D, dada por $L(T, D)$, e a segunda, uma função não-linear em D, dada por $N(T) \cdot \|D\|$.

Estas funções são obtidas com a ajuda do Teorema da Representação para Funções Tensoriais Isotrópicas. (Wang, 1969 apud Nader, 1999).

Observação: o símbolo $\| \ \|$ denota a norma euclidiana e a convenção de sinais utilizada no desenvolvimento das equações é aquela da Mecânica do Contínuo: quando há tração, o sinal é positivo para tensão e deformação.

Recordando o que foi citado na seção anterior, a equação (6.1.1) é positiva e homogênea de grau 1 em D , ou seja:

$$H(T,\lambda D) = \lambda H(T,D)$$

Para todo $D \neq 0$ e todo T, todo $\lambda > 0$ e todo $t \geq 0$.

Como $H(T,\lambda D) = \lambda H(T,D)$ para $D \neq 0$, para todo T, e $\lambda > 0$, a equação obedece à seguinte restrição essencial: *independência da velocidade de deformação,* própria das propriedades básicas comuns entre elastoplasticidade, hipoelasticidade e hipoplasticidade.

Conclui-se, portanto, que a equação (6.1.1) não representa fenômenos dependentes da velocidade de deformação. A forma da equação apresentada por Nader (1999) é:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{3}\left[C_1 trD trT + C_2 trT_a D\right]1 + (C_4 - \eta)(trT)D_a + \left[\frac{1}{3}C_3(trT)1 + C_5 T_a\right]\sqrt{trD^2} \qquad (6.2.2)$$

Onde:

$$\eta = -3\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{trT_0^2}}{trT} = q/p$$

$$trT = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$T_a = T - \frac{trT}{3}\cdot 1$$

$$D_a = D - \frac{trD}{3}\cdot 1$$

A equação acima foi testada para um silte residual de migmatito, encontrado no Campus da USP, cujas propriedades básicas são mostradas na Tabela 6.2.1 a seguir.

Fração Argila	10%
Fração Silte	63%
Fração Areia	27%
Limite de Liquidez	47%
Índice de Plasticidade	18%
Densidade dos Grãos	2,65 g/cm³

Tabela 6.2.1 – Características do solo para teste da Equação de Nader

Neste trabalho, apresenta-se a modificação desta equação por meio de funções matemáticas para que a nova equação possa representar fenômenos viscosos, como relaxação e fluência. O comportamento da nova equação é comparado com vários tipos de solos, cujos resultados foram coletados da literatura.

A seguir, descrevem-se sucintamente as cinco constantes envolvidas na formulação da equação (6.2.2) e seus aspectos gerais:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa}\right)$$

$$C_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}\frac{C_3}{M}$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}\right)$$

$$C_4 = -\frac{\tilde{G}}{3}$$

$$C_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\tilde{G} + 3M}{M}$$

onde λ, κ, M e $\tilde{G}$ são constantes características do material, que são bem conhecidas da Mecânica dos Solos (vide página seguinte).

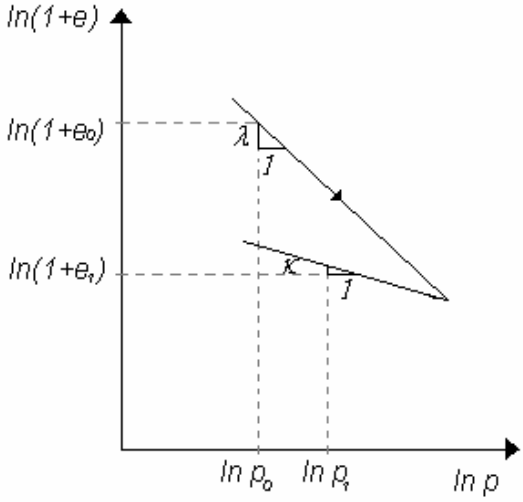
Cabe aqui uma observação: baseado naquilo que Nader escreveu em sua tese, cita-se o fato de que a criação de uma equação constitutiva se faz por tentativas e erros, sendo que o conhecimento do comportamento dos solos e suas características, e a experiência de trabalhar com equações é muito importante para o sucesso na obtenção de uma equação que produz bons resultados.

Sobre as constantes características (λ, κ, M e $\tilde{G}$) suas relações com parâmetros da Mecânica dos solos é descrita a seguir:

Sabendo-se que p é a *tensão octaédrica*, e e é o *índice de vazios*, nos ensaios de compressão e expansão isotrópicas, $\ln(1+e)$ varia linearmente com $\ln p$, sendo que $-\lambda$ e $-\kappa$ são os respectivos coeficientes angulares das retas, como mostrado abaixo:

$$\ln \frac{1+e_O}{1+e} = \lambda \ln \frac{p}{p_O}$$

$$\ln \frac{1+e_1}{1+e} = \kappa \ln \frac{p}{p_1}$$



Sendo q a *tensão desviadora*, e γ a *distorção logarítmica*, $\tilde{G}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $\left(q/\sigma\right) x \gamma$ na origem:

$$\tilde{G} = \frac{\dot{q}}{\dot{\gamma}\sigma}$$

e σ é a pressão confinante, após um adensamento isotrópico, de um ensaio triaxial. Este parâmetro independe do tipo de trajetória.

E por fim, M é o coeficiente angular das linhas do estado crítico no gráfico (p,q), dadas pelas semi-retas:

$$q = Mp \text{ e } q = -Mp \text{, para } p \geq 0$$

Neste capítulo apresentou-se a equação hipoplástica proposta por Nader, em sua Tese de Doutoramento (1999), cuja estrutura será modificada de modo a representar fenômenos viscosos. Realizou-se uma breve explanação sobre suas constantes e a relação com grandezas conhecidas da Mecânica dos Solos.

7. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

Neste capítulo será apresentada a estrutura geral de uma equação visco-hipoplástica; suas propriedades em relação à equação hipoplástica serão comentadas; e por fim, será apresentada a equação visco-hipoplástica derivada da equação (6.1.1).

A equação proposta por Nader foi utilizada para representar o comportamento de um solo siltoso, foi aproveitada a mesma estrutura matemática, incorporando-se algumas funções (apresentadas no trabalho de WU, W.; BAUER, E.; NIEMUNIS, A.; HERLE, I. [1993]), de forma a originar uma equação visco-hipoplástica. Isto prova a versatilidade de uma equação hipoplástica, como será visto no **Capítulo 12. CONFRONTO DA PREVISÃO DO MODELO COM DADOS EXPERIMENTAIS PARA DEFORMAÇÕES DE LONGA DURAÇÃO**.

7.1. FORMULAÇÃO GERAL

Nesta seção será apresentada a formulação geral da equação que descreve fenômenos viscosos.

A forma geral da equação visco-hipoplástica é

$$\overset{\circ}{T} = H(T,D) = L(T,D) + N(T)\cdot\left[\alpha\|D\| + \beta\right] \tag{7.1.1}$$

onde α e β são funções escalares de D.

A escolha destas funções será abordada mais adiante.

7.2. DESCRIÇÃO E ESTUDO DAS FUNÇÕES α E β E SUA INFLUÊNCIA NA FÓRMULA DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

Nesta seção, serão apresentadas as fórmulas das funções escalares que compõem a equação visco-hipoplástica.

7.2.1. EXPRESSÕES DE α E β

As expressões de α e β foram extraídas do artigo de WU, W.; BAUER, E.; NIEMUNIS, A.; HERLE, I. (1993), e são apresentadas a seguir.

Para a função escalar α:

$$\alpha = \left[\log\left(10 + a_1 \cdot \|D\|^{a_2}\right)\right]^{-1} \qquad (7.2.1.1)$$

Com a_1 e a_2 números positivos e constantes . A constante a_2 é um adimensional, enquanto que a dimensão de a_1 é $\left[(tempo)^{a_2}\right]$

E para a função escalar β:

$$\beta = a_3 \cdot EXP\left(-a_4 \cdot l\right) \qquad (7.2.1.2)$$

Onde a_3 e a_4 são, também, números positivos e constantes. A constante a_4 é um adimensional, e a_3 possui a seguinte dimensão: $\left[(tempo)^{-1}\right]$

A deformação, l, é calculada segundo a expressão:

$$l = \int_0^t \|D(\tau)\| d\tau \qquad (7.2.1.3)$$

Far-se-á, abaixo, uma breve análise dos limites da função 7.2.1.1:

$$\lim_{\|D\|\to 0}\left(\alpha\|D\|\right)=1$$

e

$$\lim_{\|D\|\to \infty}\left(\alpha\|D\|\right)=0$$

Para a função 7.2.1.2, tem-se:

$$\lim_{\|D\|\to 0}\left(\beta\|D\|\right)=a_3$$

7.2.2. DEPENDÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO DOS ENSAIOS

Considerando as propriedades matemáticas da equação visco-hipoplástica (7.1.1), observa-se que ela deixa de ser positivamente homogênea de grau 1 em D, ou seja, a expressão:

$$H(T,\lambda D)=\lambda H(T,D)$$

Para todo $D\neq 0$ e todo T, se e somente se $\lambda>0$, deixa de ser válida. pois $H(T,\lambda D)$ é igual a:

$$L(T,\lambda D)+N(T)\cdot\left[\alpha\|\lambda D\|+\beta\right] \qquad (7.2.2.1)$$

Nota-se que devido ao aparecimento das funções escalares α e β , a igualdade abaixo deixa de ser satisfeita:

$$\lambda H(T,D) = \lambda L(T,D) + N(T)\cdot\left[\alpha\|\lambda D\| + \beta\right]$$

Então, $H(T,\lambda D) \neq \lambda H(T,D)$, concluindo que a nova equação passa a representar fenômenos dependentes da velocidade de deformação, e a equação

$$\overset{\circ}{T} = H(T,D)$$

deixa de possuir a seguinte propriedade: *independência da velocidade de deformação*.

7.2.3. EXISTÊNCIA DE COMPORTAMENTO NORMALIZADO

Será demonstrado que se existe o Comportamento Normalizado, então a equação é homogênea em T. Este comportamento, grosseiramente falando, quer dizer o seguinte: ao dobrar a tensão inicial (em t = 0) do ensaio, realizado com a equação, as respostas em termos de tensão durante todo o resto do ensaio também dobram de valor.

Fazendo-se as mesmas considerações aplicadas no caso do modelo hipoplástico Nader (1999), supõe-se que a relação entre as componentes do tensor das tensões num ensaio "A" (cuja tensão inicial é λT_0) e num ensaio "B" (cuja tensão inicial é T_0) seja igual a um valor λ real, estritamente positivo, qualquer, para todo $t \in$ ao intervalo de tempo I , e o gradiente de deformação $F = F(t)$ para os dois ensaios seja o mesmo.

Matematicamente, tem-se um ensaio "B", cujo gradiente de deformação seja $F = F(t)$, e tensão inicial $T(0) = T_0$, que satisfaz a equação $\overset{\circ}{T} = H(T,D)$, e sua resposta é $T(t)$.

Um ensaio “A”, com mesmo gradiente do ensaio “B” é submetido a uma tensão inicial $T^*(0) = \lambda T_0$. Diz-se, então, que a equação apresenta comportamento normalizado se a solução for $T^* = T^*(t) = \lambda T(t)$.

Como T^*, D e W, por hipótese, satisfazem a equação $\overset{\circ}{T} = H(T, D)$:

$$\overset{\circ}{T}{}^* = \dot{T}^* - WT^* + T^*W = H(T^*, D) = L(T^*, D) + N(T^*) \cdot [\alpha \|D\| + \beta]$$

Substituindo a relação entre T^* e T:

$$\lambda \overset{\circ}{T} = \lambda \dot{T} - W\lambda T + \lambda TW = H(\lambda T, D) = L(\lambda T, D) + N(\lambda T) \cdot [\alpha \|D\| + \beta]$$

E:

$$\lambda \overset{\circ}{T} = \lambda H(T, D)$$

$$H(\lambda T, D) = \lambda H(T, D)$$

A função H é positivamente homogênea de grau 1 em T.

7.2.4. RELAÇÃO ENTRE HOMOGENEIDADE EM D, E OS FENÔMENOS VISCOSOS

Segundo Nader (1999), a equação $\overset{\circ}{T} = H(T, D)$ deve ser positivamente homogênea de grau 1 em D para que sua resposta seja independente da velocidade com que a deformação ocorre.

A demonstração abaixo mostrará ao leitor que a equação visco-hipoplástica, não sendo positivamente homogênea de grau 1 em D, produz respostas dependentes da velocidade com a qual os ensaios são realizados.

Seguem as seguintes considerações:

- Seja $F(t)$ um gradiente de deformação definido em $[0,\infty[$, e $T(t)$ a solução de $\overset{\circ}{T} = H(T,D)$, com $T(0) = T_o$;
- $a(t)$ definida em $[0,\infty[$, com $a(0) = 0$, chamada de função de mudança de escala de tempo;
- e $\tilde{F}(t)$ um novo gradiente de deformação, tal que $\tilde{F}(t) = F(\alpha(t))$

Uma seqüência de gradientes de deformação, representados por $F(t)$, que ocorre com velocidade $a(t)$ é idêntica a uma seqüência $\tilde{F}(t)$ que ocorre com velocidade t.

Observando as condições iniciais de *t*, $a(t)$, e de $\tilde{F}(t) = F(\alpha(t))$ tem-se que $\tilde{F}(0) = F(0)$, e:

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \dot{a}(t)F'(a(t))$$

$$\tilde{D}(t) = \dot{a}(t)D(a(t))$$

$$\tilde{W}(t) = \dot{a}(t)W(a(t))$$

Impõe-se que $\tilde{T}(t) = T(a(t))$ seja solução de $\overset{\circ}{T} = H(T,D)$, para que se obtenha a mesma tensão para um mesmo valor de gradiente de deformação.

Com $\dot{\tilde{T}}(t) = \dot{a}(t)T'(a(t))$, $\tilde{D}(t) = \dot{a}(t)D(a(t))$ e $\tilde{W}(t) = \dot{a}(t)W(a(t))$, tem-se:

$$\overset{\circ}{\tilde{T}}(t) = \dot{a}(t)\overset{\circ}{T}(a(t))$$

$$\dot{a}(t)\overset{\circ}{T}(a(t)) = H(\tilde{T}(t), \tilde{D}(t))$$

$$\dot{a}(t)\overset{\circ}{T}(a(t)) = H(T(a(t)), \dot{a}(t)D(a(t)))$$

Por hipótese, $\overset{\circ}{T}(a(t)) = H(T(a(t)), D(a(t)))$

Substituindo a expressão da hipótese na expressão calculada, obtém-se:

$$\dot{a}(t)\{H(T(a(t)), D(a(t)))\} = H(T(a(t)), \dot{a}(t)D(a(t)))$$

a expressão acima indica que a equação $\overset{\circ}{T} = H(T, D)$ deve ser positivamente homogênea de grau 1 em D. Como a equação visco-hipoplástica não possui esta característica, conclui-se que as respostas sejam dependentes da velocidade de deformação.

7.4. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

Primeiramente foi apresentada a forma geral da equação visco-hipoplástica; em seguida, a estrutura das funções escalares em questão foi apresentada. O leitor, já de posse desse conhecimento, pôde verificar as propriedades da nova equação, devido à introdução destas funções escalares α e β na estrutura da equação hipoplástica.

Agora, apresenta-se a equação visco-hipoplástica, modificada conforme exposto anteriormente, para poder representar fenômenos viscosos:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{3}[C_1 trDtrT + C_2 trT_a D]1 + (C_4 - \eta)(trT)D_a + \left[\frac{1}{3}C_3(trT)1 + C_5 T_a\right]\left(\alpha\sqrt{trD^2} + \beta\right) \quad (7.4.1)$$

onde α e β são funções de $\|D\|$ tais como mostradas na seção anterior. Suas constantes assumem valores numéricos convenientes a fim de que haja a melhor representação do comportamento do material.

Para o caso de relaxação ($D = 0$), a equação 7.1.1 assume a forma:

$$\overset{\circ}{T} = \beta \cdot N(T)$$

onde a função β depende somente da constante a_3, que aparece isolada neste caso.

As outras constantes nunca aparecem isoladas, o que dificulta o estudo da influência de cada uma no comportamento geral da equação.

O assunto da correlação entre estes valores numéricos e os dados experimentais será tratado mais adiante.

8. ESTUDO ANALÍTICO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

A matriz de D possui a seguinte forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo, a matriz do tensor das tensões de Cauchy é apresentada a seguir:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Sendo que ambas as matrizes são simétricas.

Considerando os casos particulares dos ensaios a serem discutidos (triaxial, edométrico), as matrizes de T e D tornam-se diagonais, pois as faces do cilindro (laterais e superior/inferior) são as superfícies onde atuam a maior e a menor tensões principais, como mostrado na figura 8.1 abaixo, e admite-se que não ocorra distorção:

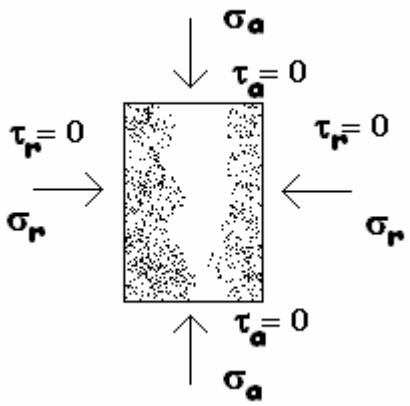


Figura 8.1 – Tensões no corpo de prova

A matriz do tensor da taxa corrotacional de T, por sua vez é diagonal.

8.1. FORMA MATRICIAL DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

O objetivo desta seção é levar ao leitor as formas que a equação visco-hipoplástica pode assumir, para cada caso particular, nos quais surgem restrições com relação às componentes do *tensor estirante*.

Os casos de compressão isotrópica, edométrica e não-drenada (ou isocórica) são analisados a seguir, admitindo as matrizes como sendo diagonais, conforme a conclusão da seção anterior.

Neste trabalho utiliza-se a deformação logarítmica, e para compreendê-la é mostra-se um exemplo bem simples: considere uma barra em duas situações (vide figura 8.1.1) – antes (com comprimento Lo) e após a deformação (com comprimento L=L(t)):

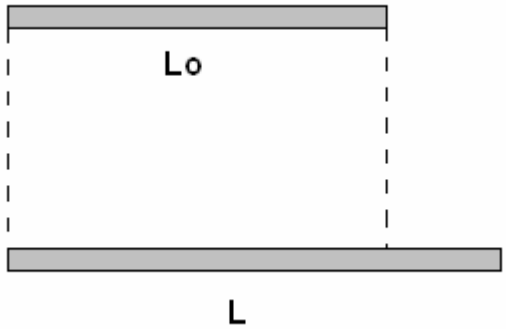


Figura 8.1.1- Deformação de uma barra

Tem-se que a deformação usual é definida por:

$$\varepsilon = \frac{L(t) - Lo}{Lo} \tag{8.1.1}$$

E a velocidade de deformação é definida por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{L}(t)}{Lo} \tag{8.1.2}$$

Considerando a deformação logarítmica como sendo:

$$\varepsilon_{\ln} = \ln\left(\frac{L(t)}{Lo}\right) \tag{8.1.3}$$

Nota-se que a velocidade de deformação logarítmica não é função da configuração de referência da barra:

$$\dot{\varepsilon}_{\ln} = \frac{d\left(\ln\frac{L(t)}{L_0}\right)}{dt} \cdot \frac{d\left(\frac{L(t)}{L_0}\right)}{dt} = \frac{Lo}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{Lo} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

E a relação entre os dois tipos de deformação é:

$$\varepsilon_{\ln} = \ln(\varepsilon + 1) \tag{8.1.4}$$

Neste trabalho, a deformação axial logarítmica é definida por:

$$\varepsilon_a = \ln\left(\frac{H(t)}{Ho}\right) \tag{8.1.5}$$

A deformação radial logarítmica é definida por:

$$\varepsilon_r = \ln\left(\frac{R(t)}{Ro}\right) \tag{8.1.6}$$

A deformação volumétrica logarítmica é definida por:

$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{V(t)}{Vo}\right) \tag{8.1.7}$$

A relação entre as três deformações é:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2 \cdot \varepsilon_r \tag{8.1.8}$$

Por oportuno, apresenta-se a distorção logarítmica:

$$\gamma = \varepsilon_a - \varepsilon_r \tag{8.1.9}$$

Apresenta-se, a seguir, as matrizes do tensor D, para três casos de compressão. Mostra-se, também, a notação utilizada neste trabalho para as matrizes de ordem três usadas durante o processo de cálculo.

compressão isotrópica:

$$[D] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

compressão edométrica:

$$[D] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

compressão não-drenada (isocórica):

$$[D] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}/2 \end{bmatrix}$$

A seguir será apresentado o desenvolvimento das equações matriciais particulares para cada um dos casos supramencionados, após um breve esclarecimento sobre a notação usada e de uma breve recordação de alguns termos usados no desenvolvimento.

Uma notação simplificada seguirá o padrão do exemplo a seguir, já que as componentes a_{22} e a_{33} da diagonal principal são iguais, e as matrizes são diagonais.

Exemplo:
Para esta matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizar-se-á a seguinte notação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Lembrando-se que a tensão octaédrica é dada por:

$$p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} \qquad (8.1.10)$$

A tensão desviadora é:

$$q = \sigma_a - \sigma_r \tag{8.1.11}$$

A taxa de distorção logarítmica é:

$$\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r \tag{8.1.12}$$

E a taxa corrotacional de T é dada por:

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W \tag{8.1.13}$$

onde W é a taxa de rotação, e $\dot{T}$ é a taxa de tensão. Porém, para $W = 0$, temos:

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T}$$

Apresenta-se, agora, o desenvolvimento da equação visco-hipoplástica para os três tipos de ensaios.

A equação visco-hipoplástica 7.4.1 (mostrada abaixo):

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{3}\left[C_1 trDtrT + C_2 trT_a D\right]1 + (C_4 - \eta)(trT)D_a + \left[\frac{1}{3}C_3(trT)1 + C_5 T_a\right]\left(\alpha\sqrt{trD^2} + \beta\right)$$

Escrita na forma matricial apresenta-se assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_a \\ \dot{\sigma}_r \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left\{C_1\dot{\varepsilon}_v(\sigma_a + 2\sigma_r) + \frac{2}{3}C_2(\sigma_a - \sigma_r)\dot{\gamma}\right\}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}(C_4 - \eta)(\sigma_a + 2\sigma_r)\dot{\gamma}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\{\frac{1}{3}C_3(\sigma_a + 2\sigma)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}C_5(\sigma_a - \sigma_r)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha\sqrt{\dot{\varepsilon}_v^2 + 2\dot{\gamma}^2} + \beta\right) \tag{8.1.14}$$

Esta é a formula geral para a equação visco-hipoplástica escrita sob formato matricial. A seguir, esta equação será particularizada para cada caso de compressão (isotrópica, edométrica e isovolumétrica).

8.1.1. CASO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA

Simplificação das grandezas envolvidas na formulação:

$$\begin{aligned}
&\sigma_a = \sigma_r = \sigma \\
&\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon} \\
&p = \sigma \\
&q = 0 \\
&\dot{\varepsilon}_v = 3\dot{\varepsilon} \\
&\dot{\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Com esta simplificação, a equação assume a forma:

$$\dot{\sigma} = C_1 \dot{\varepsilon}_V \sigma + C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + \beta \right) \sigma \qquad (8.1.1.1)$$

E em termos de p e q:

$$\dot{p} = C_1 \dot{\varepsilon}_V \cdot p + C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + \beta \right) \cdot p \qquad (8.1.1.2)$$

$$\dot{q} = 0 \qquad (8.1.1.3)$$

8.1.2. CASO DE COMPRESSÃO EDOMÉTRICA

Simplificações para este caso:

$$\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}$$
$$\dot{\varepsilon}_r = 0$$
$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}$$

As considerações acima fazem surgir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_a \\ \dot{\sigma}_r \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{3} C_1 (\sigma_a + 2\sigma_r) + \frac{2}{9} C_2 (\sigma_a - \sigma_r) \right\} \dot{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} (C_4 - \eta)(\sigma_a + 2\sigma_r) \dot{\varepsilon} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} +$$
$$+ \left\{ \frac{1}{3} C_3 (\sigma_a + 2\sigma) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} C_5 (\sigma_a - \sigma_r) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} (\alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta) \qquad (8.1.2.1)$$

E em termos de p e q:

$$\dot{p} = C_1 \dot{\varepsilon} \cdot p + \frac{2}{9} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 (\alpha |\dot{\varepsilon}| + \beta) \cdot p \qquad (8.1.2.2)$$

$$\dot{q} = 3(C_4 - \eta) \dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 (\alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta) \cdot q \qquad (8.1.2.3)$$

8.1.3. CASO DE COMPRESSÃO NÃO-DRENADA (ISOCÓRICA OU ISOVOLUMÉTRICA)

Outras simplificações:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_a &= \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_r &= -\dot{\varepsilon}/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_v = 0$$
$$\dot{\gamma} = \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}$$

Resultam em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_a \\ \dot{\sigma}_r \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{3} C_2 (\sigma_a - \sigma_r) \right\} \dot{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (C_4 - \eta)(\sigma_a + 2\sigma_r) \dot{\varepsilon} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3} C_3 (\sigma_a + 2\sigma) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} C_5 (\sigma_a - \sigma_r) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \qquad (8.1.3.1)$$

E em termos de p e q:

$$\dot{p} = \frac{1}{3} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot p \qquad (8.1.3.2)$$

$$\dot{q} = \frac{9}{2} (C_4 - \eta) \dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot q \qquad (8.1.3.3)$$

8.2. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA SIMULANDO FLUÊNCIA

Para os três tipos de condição (isotrópica, edométrica e isocórica) mostram-se as equações decorrentes da simulação do fenômeno de fluência, no qual $\overset{\circ}{T} = 0$.

Há o caso, também, da fluência ocorrer apenas com a componente axial da tensão permanecendo constante, que é a situação dos ensaios edométricos feitos em laboratório (a simulação da fluência, neste trabalho, na condição edométrica é feita desta forma).

8.2.1. CONDIÇÃO ISOTRÓPICA

Considere-se a equação 8.1.1.2, mostrada abaixo:

$$\dot{p} = C_1 \dot{\varepsilon}_V \cdot p + C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + \beta \right) \cdot p$$

Na fluência, tem-se:

$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon}_V + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \cdot \alpha \cdot p_o \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + C_3 \cdot p_o \cdot \beta$, onde p_o é o valor constante de p.

Sabe-se que as expressões de α (7.2.1) e β (7.2.2) possuem a forma abaixo:

$$\alpha = \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left\| \vec{D} \right\|^{a_2} \right)}$$

$$\beta = a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot l}$$

onde a expressão de l é dada por 7.2.1.3.

Realizando a substituição das expressões 7.2.1.1, 7.2.1.2 e 7.2.1.3 em 8.1.1.2, vem:

$$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon}_V + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \cdot \left\{ \frac{1}{\log(10 + a_1 \left| \dot{\varepsilon}_v \right|^{a_2})} \right\} \cdot p_o \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + C_3 \cdot p_o \cdot \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot \int_0^t \left| \dot{\varepsilon}_v \right| d\tau} \right\} \quad (8.2.1.1)$$

8.2.2. CONDIÇÃO EDOMÉTRICA

Considerem-se as equações 8.1.2.2 e 8.1.2.3, mostradas abaixo:

$$\dot{p} = C_1 p\dot{\varepsilon} + \frac{2}{9} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 \left(\alpha \left|\dot{\varepsilon}\right| + \beta\right) \cdot p$$

E:

$$\dot{q} = 3\left(C_4 - \eta\right)\dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 \left(\alpha \cdot \left|\dot{\varepsilon}\right| + \beta\right) \cdot q$$

A simulação da fluência leva as equações a assumirem as seguintes formas:

$$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{2}{9} C_2 q_o \cdot \dot{\varepsilon} + C_3 \left(\alpha \left|\dot{\varepsilon}\right| + \beta\right) \cdot p_o$$

$$0 = 3\left(C_4 - \eta\right) p_o \cdot \dot{\varepsilon} + C_5 \left(\alpha \cdot \left|\dot{\varepsilon}\right| + \beta\right) \cdot q_o$$

Ou fazendo-se $\dot{\sigma}_a = 0$ no membro esquerdo da equação da seção 8.1.2, para o caso de fluência apenas com a componente axial constante.

Realizando a substituição das expressões 7.2.1.1, 7.2.1.2 e 7.2.1.3 em 8.1.2.2 e em 8.1.2.3, vem:

$$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{2}{9} C_2 q_o \cdot \dot{\varepsilon} + C_3 \cdot p_o \left(\left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left(\sqrt{3}\left|\dot{\varepsilon}\right|\right)^{a_2}\right)} \right\} \left|\dot{\varepsilon}\right| + \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot \sqrt{3} \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}_v\right| d\tau} \right\} \right) \quad (8.2.2.1)$$

$$0 = 3\left(C_4 - \eta\right) p_o \cdot \dot{\varepsilon} + C_5 \cdot q_o \left(\left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left(\sqrt{3}\left|\dot{\varepsilon}\right|\right)^{a_2}\right)} \right\} \cdot \left|\dot{\varepsilon}\right| + \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot \sqrt{3} \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}_v\right| d\tau} \right\} \right) \quad (8.2.2.2)$$

8.2.3. CONDIÇÃO NÃO-DRENADA

Considerem-se as equações 8.1.3.2 e 8.1.3.3, ilustradas abaixo:

$$\dot{p} = \frac{1}{3} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot p$$

E:

$$\dot{q} = \frac{9}{2} (C_4 - \eta) \dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot q$$

Com a condição de não haver variação de tensão, e substituindo as expressões 7.2.1.1, 7.2.1.2 e 7.2.1.3 em 8.1.3.2 e 8.1.3.3, vem:

$$0 = \frac{1}{3} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q_o + C_3 \cdot p_o \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} |\dot{\varepsilon}| \right)^{a_2} \right)} \right\} \cdot |\dot{\varepsilon}| + \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^t |\dot{\varepsilon}_v| d\tau} \right\} \right) \qquad (8.2.3.1)$$

$$0 = \frac{9}{2} (C_4 - \eta) \dot{\varepsilon} \cdot p_o + C_5 \cdot p_o \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} |\dot{\varepsilon}| \right)^{a_2} \right)} \right\} \cdot |\dot{\varepsilon}| + \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_0^t |\dot{\varepsilon}_v| d\tau} \right\} \right) \qquad (8.2.3.2)$$

8.3. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA EQUAÇÃO NA RELAXAÇÃO

No fenômeno de relaxação, as deformações são nulas, ou seja, $D = 0$. Os três tipos de equações estão explicitados abaixo, no entanto, nota-se que para os três

casos, as equações são as mesmas, como era de se esperar, exceto para a condição isotrópica, que simplesmente possui uma só equação.

8.3.1. CONDIÇÃO ISOTRÓPICA

A equação abaixo:

$$\dot{p} = C_1 \dot{\varepsilon}_V \cdot p + C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \alpha \cdot \left| \dot{\varepsilon}_V \right| + \beta \right) \cdot p$$

Na relaxação, assume a forma:

$$\dot{p} = C_3 \cdot \beta \cdot p$$

Como:

$$\left. \begin{array}{c} \beta = \left\{ a_3 \cdot e^{-a_4 l} \right\} \\ l = \int_0^t \left\| \vec{D}(\tau) \right\| d\tau = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = a_3$$

Conclui-se que:

$$\dot{p} = C_3 \cdot a_3 \cdot p \qquad (8.3.1.1)$$

8.3.2. CONDIÇÃO EDOMÉTRICA

As equações:

$$\dot{p} = C_1 p \dot{\varepsilon} + \frac{2}{9} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 \left(\alpha \left| \dot{\varepsilon} \right| + \beta \right) \cdot p$$

$$\dot{q} = 3 \left(C_4 - \eta \right) \dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 \left(\alpha \cdot \left| \dot{\varepsilon} \right| + \beta \right) \cdot q$$

Assumem a forma:

$$\dot{p} = C_3 \cdot \beta \cdot p \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = C_3 \cdot a_3 \cdot p \tag{8.3.2.1}$$

$$\dot{q} = C_5 \cdot \beta \cdot q \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = C_5 \cdot a_3 \cdot q \tag{8.3.2.2}$$

8.3.3. CONDIÇÃO NÃO-DRENADA

As equações:

$$\dot{p} = \frac{1}{3} C_2 \dot{\varepsilon} \cdot q + C_3 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot p$$

$$\dot{q} = \frac{9}{2} (C_4 - \eta) \dot{\varepsilon} \cdot p + C_5 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot |\dot{\varepsilon}| + \beta \right) \cdot q$$

Assumem o mesmo formato das equações do ensaio edométrico:

$$\dot{p} = C_3 \cdot \beta \cdot p \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = C_3 \cdot a_3 \cdot p \tag{8.3.3.1}$$

$$\dot{q} = C_5 \cdot \beta \cdot q \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = C_5 \cdot a_3 \cdot q \tag{8.3.3.2}$$

8.3.4. INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Da integração das equações acima tem-se:

$$\ln\left(\frac{p}{p_o} \right) = C_3 \cdot a_3 \cdot t$$

$$p = p_o e^{C_3 \cdot a_3 \cdot t} \tag{8.3.4.1}$$

Analogamente,

$$q = q_o e^{C_5 \cdot a_3 \cdot t} \tag{8.3.4.2}$$

O gráfico $p \times t$, para valor inicial da tensão octaédrica igual a 200kPa, com C_3 igual a -35,74 e a_3 igual a 0.00005, é mostrado na figura 8.3.4.1:

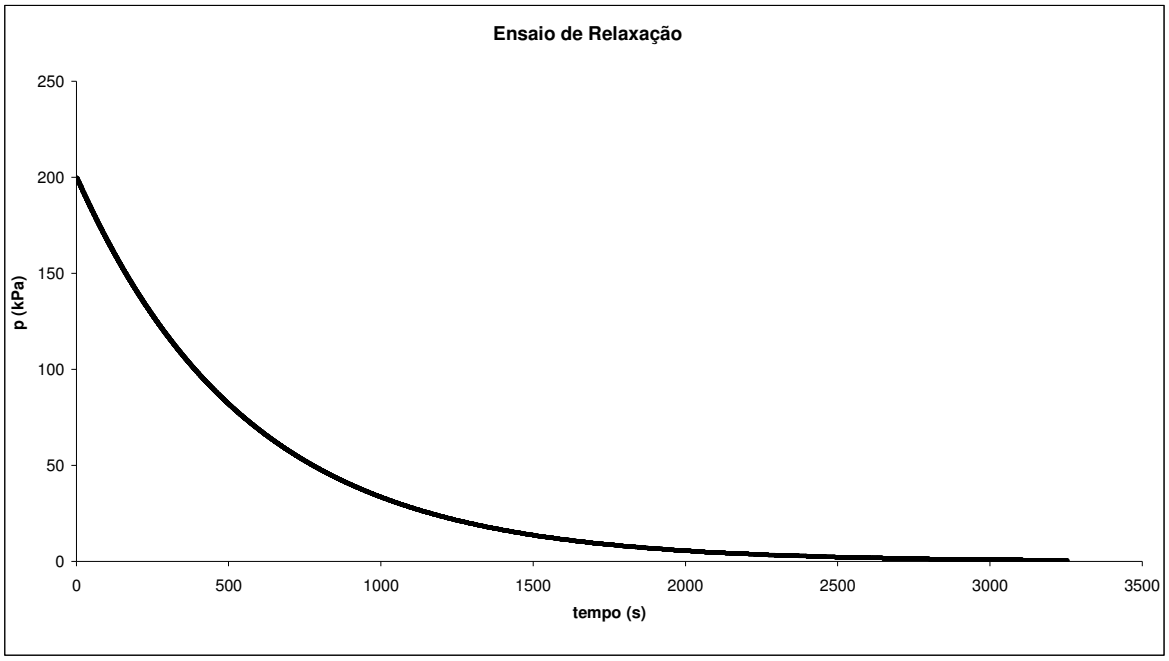


Figura 8.3.4.1-Gráfico $p \times t$

A resposta da equação é coerente com o esperado. Os resultados mostram que o corpo tende a um valor de tensão octaédrica nulo, após um longo período.

Para a equação em *q*, o resultado é semelhante, a menos da constante que passa a ser C_5 ao invés de C_3.

8.4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA FLUÊNCIA PARA O ESTADO ISOTRÓPICO DE TENSÕES

Nesta seção serão apresentadas duas outras equações visco-hipoplásticas distintas da equação 7.4.1 somente com relação à função β. Em cada uma das novas equações, a função β foi substituída por outra função escolhida ao acaso.

As respostas das duas novas equações são comparadas com a resposta da equação 7.4.1 com relação ao aspecto deformação ao longo do tempo.

Foi escolhida a simulação de fluência para o estudo desta seção, pois as duas constantes (a_3 e a_4) que compõe a função β influenciam o resultado. O ensaio de relaxação é abordado na seção seguinte, e neste tipo de ensaio somente a constante a_3 influencia a resposta da função β.

Nos ensaios de fluência desta seção, o estado isotrópico de tensões foi escolhido por se tratar do caso particular mais simples da equação 7.4.1, recaindo na expressão 8.2.1.1.

Antes de apresentar o resultado da equação visco-hipoplástica com a função β, serão mostradas as duas equações novas: na primeira, a função β é substituída por uma função chamada ψ, e na segunda, a função β é substituída por uma função chamada χ.

Equação A:

Assumindo a hipótese de haver, na expressão 8.2.1.1, uma função ψ no lugar da função β, tal que ψ seja constante para todo instante $t \geq 0$ e todo D, tem-se:

$$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon}_V + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \cdot \left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left|\dot{\varepsilon}_v\right|^{a_2}\right)} \right\} \cdot p_o \cdot \left|\dot{\varepsilon}_V\right| + C_3 \cdot p_o \cdot \psi \qquad (8.4.1)$$

O resultado da simulação para p_o igual a 200 kPa, com os parâmetros mostrados na tabela abaixo está representado no gráfico 8.4.1.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
50	0,9	0,26	0,026
a_1	a_2	ψ	
1	0,1	0,00005	

Tabela 8.4.1 – Parâmetros de simulação para ψ .

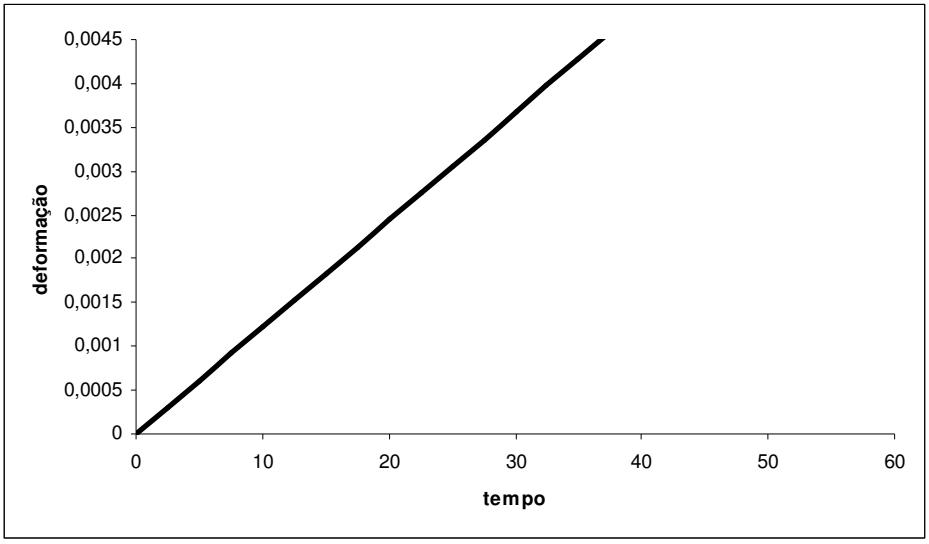


Figura 8.4.1 – Gráfico deformação x tempo com a função ψ .

Trata-se do caso mais simples para a expressão 8.2.1.1, no entanto, o gráfico da deformação pelo tempo é uma reta, concluindo que a utilização de ψ no lugar de β produz resultados muito distantes da realidade.

Equação B:

Escolhendo outra função para ocupar o lugar da função β, dada por χ, tal que esta função seja decrescente linearmente com o tempo:

$$\chi = 0.00005 - 0.0000001 \cdot t \qquad (8.4.2)$$

para todo instante $t \geq 0$ e todo D, tem-se:

$$0 = C_1 p_o \cdot \dot{\varepsilon}_V + \frac{\sqrt{3}}{3} C_3 \cdot \left\{ \frac{1}{\log\left(10 + a_1 \left|\dot{\varepsilon}_v\right|^{a_2}\right)} \right\} \cdot p_o \cdot \left|\dot{\varepsilon}_V\right| + C_3 \cdot p_o \cdot \chi \qquad (8.4.3)$$

O resultado da simulação para p_o igual a 200 kPa, com os parâmetros mostrados na tabela abaixo está representado no gráfico 8.4.2.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
50	0,9	0,26	0,026
a_1	a_2	χ	
1	0,1	$\chi = 0.00005 - 0.0000001 \cdot t$	

Tabela 8.4.2 – Parâmetros de simulação para χ.

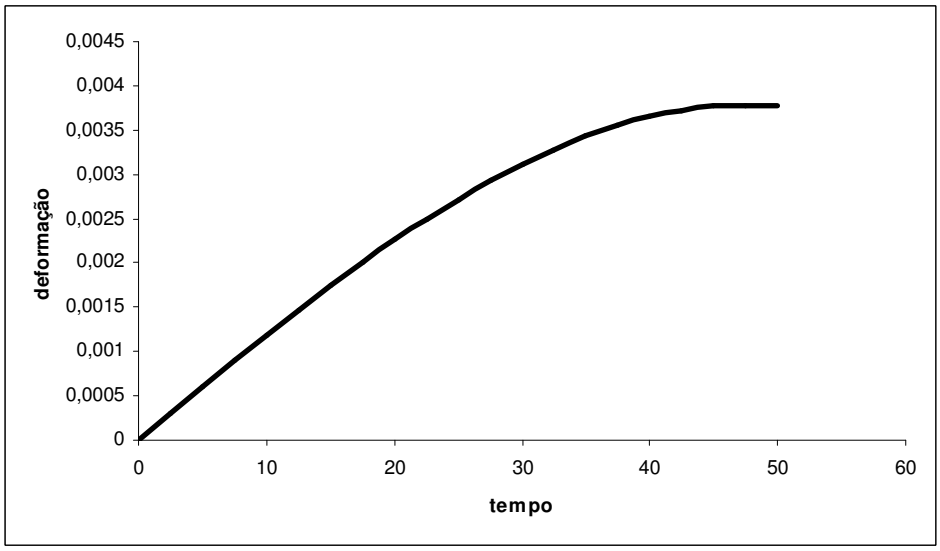


Figura 8.4.2-Gráfico da Deformação x tempo com a função χ.

Nota-se que a substituição de β pela função χ produziu um resultado melhor do que o resultado dado pela substituição pela função ψ.

Equação apresentada neste trabalho:

Utilizando-se a própria função β, dada por 7.2.1.2, com o p_o = 200 kPa, e parâmetros dados na tabela 8.4.3, obtém-se o gráfico da figura 8.4.3.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
50	0,9	0,26	0,026
a_1	a_2	a_3	a_4
1	0,1	0,00005	250

Tabela 8.4.3 – Parâmetros de simulação para β.

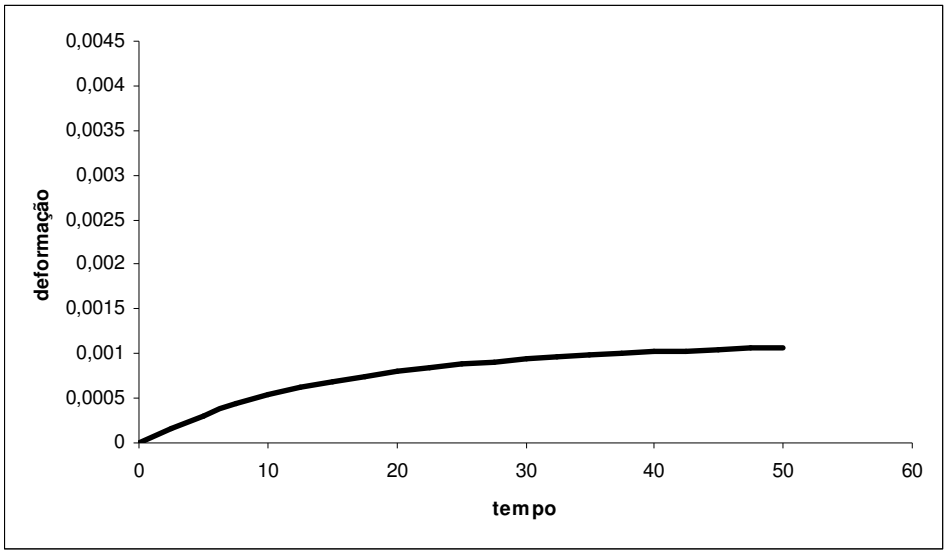


Figura 8.4.2-Gráfico da Deformação x tempo com a função β.

A função β, adotada para a equação visco-hipoplástica desta pesquisa, produz uma curva de forma semelhante a curva produzida com a função χ.

Uma observação importante: os resultados de deformação pelo tempo fornecidos pelas três equações mostram que a resposta depende sensivelmente da escolha da função β.

Este tipo de estudo é feito quando se compõe uma nova equação visco-hipoplástica. Como já foi dito no capítulo **7. A EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA**, a equação 7.4.1 foi criada introduzindo duas funções

apresentadas no artigo de WU, W.; BAUER, E.; NIEMUNIS, A.; HERLE, I. (1993) na equação hipoplástica proposta por Nader (1999).

8.5. INFLUÊNCIA DAS CONSTANTES NA RESPOSTA DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA

Nesta seção serão apresentados resultados da variação da constante a_3 , que faz parte da função β , na resposta da equação 7.4.1; pois somente esta constante aparece sozinha em um dos tipos de ensaios – o de relaxação. Todas as outras constantes possuem influência simultânea na resposta da equação, para qualquer ensaio realizado, o que impossibilita a análise isolada de cada uma.

Durante todo o ensaio de relaxação a velocidade de deformação é nula, e a expressão 7.2.1.2 se reduz a $\beta = a_3$.

Na figura 8.5.1 observam-se dois gráficos de ensaios de relaxação, A e B, Ambos possuem duas representações em dois eixos de ordenadas, um em escala normal e outro em escala logarítmica. Como já foi dito, β permanece como função, apenas, de a_3. A simulação foi realizada a partir de um estado isotrópico de compressão a 10 kPa.

Conclui-se que o valor de a_3 está ligado ao coeficiente angular da reta do gráfico do logaritmo da tensão axial em relação ao tempo. Conforme a reta se torna mais íngreme, o valor de a_3 também aumenta, como se nota ao observar o gráfico. O valor de a_3 aumentou em 10 vezes (A: 0,00005 e B: 0,0005), e a inclinação da reta também aumentou em 10 vezes (A: 0,0047 kPa/s e B: 0,0470 kPa/s).

Com relação à calibração das demais constantes a_1 , a_2 e a_4 , inclusive da própria a_3, caso não se tenha um ensaio de relaxação, estima-se seus valores através da análise do comportamento global, almejando o melhor resultado para representar um determinado ensaio.

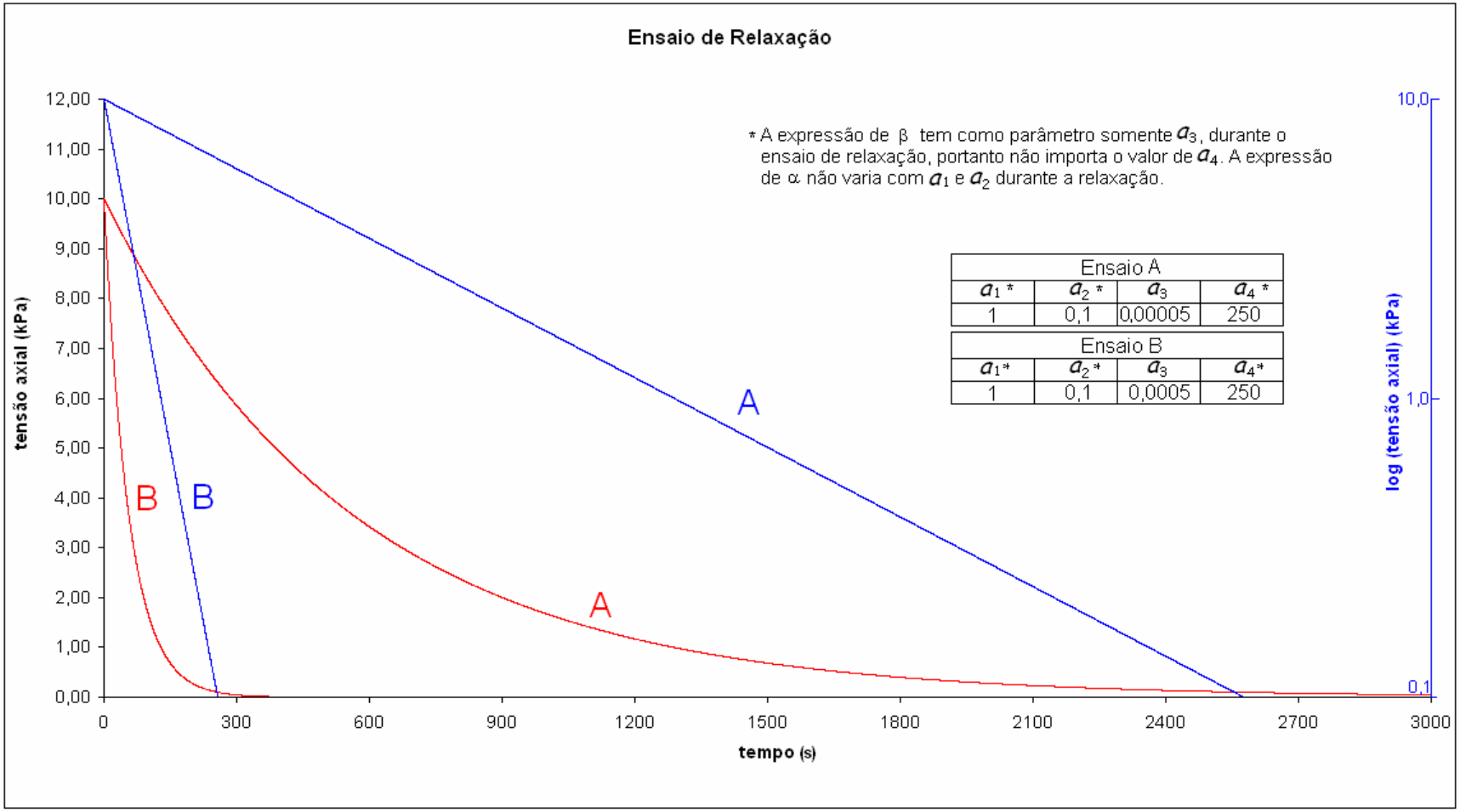


Figura 8.5.1-Comparação entre resultados para dois valores de a_3

9. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA COM A EQUAÇÃO HIPOPLÁSTICA NO ENSAIO NÃO DRENADO.

Neste capítulo serão mostradas comparações entre os resultados da equação visco-hipoplástica apresentada neste trabalho (7.4.1), com os resultados da equação hipoplástica que serviu de base para este trabalho (6.2.2).

A seguir será apresentada uma série de três gráficos comparando-se a resposta da equação hipoplástica proposta por Nader com a resposta da equação visco-hipoplástica apresentada neste texto.

É de se esperar que a equação 7.4.1 também seja capaz de descrever ensaios além daqueles destinados à investigação de fenômenos viscosos, especificamente, pois esta equação, com sua complexa estrutura, não foi concebida somente para representar fenômenos de origem viscosa.

Os ensaios foram realizados com estado inicial de compressão isotrópica de 200 kPa, e os valores das constantes indicadas na Tabela 9.1 foram utilizados em ambas as equações, enquanto que as constantes indicadas na Tabela 9.2 fazem parte apenas da equação visco-hipoplástica, obviamente.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
54	1,46	0,07	0,018

Tabela 9.1 – Parâmetros dos ensaios para ambas as equações

a_1	a_2	a_3	a_4
1	0,1	0,00005	250

Tabela 9.2 – Parâmetros dos ensaios para a equação visco-hipoplástica

Observando-se os gráficos das figuras a seguir, notam-se as seguintes discrepâncias entre a curva da equação 7.4.1 e da equação 6.2.2:

- Na figura 9.1, a tensão desviadora continua crescendo para a curva da equação visco-hipoplástica, sem apresentar estabilidade, como ocorre com a equação hipoplástica;

- Na figura 9.2, a maior discrepância observa-se ao final do ensaio, no gráfico de q x p, em que a curva da nova equação, ao invés de estacionar num certo par (p_i,q_i) como a equação hipoplástica, e após sofrer um destacamento em relação a esta última, faz uma guinada, na qual o valor de p toma um rumo oposto, e q mantém seu curso original; e

- Na figura 9.3, a equação visco-hipoplástica apresenta um desenvolvimento de pressões neutras levemente menor.

Era de se esperar que as curvas de ambas as equações apresentassem alguma divergência, e foi verificado que a nova equação produz resultados coerentes com aqueles da equação hipoplástica, do ponto de vista qualitativo.

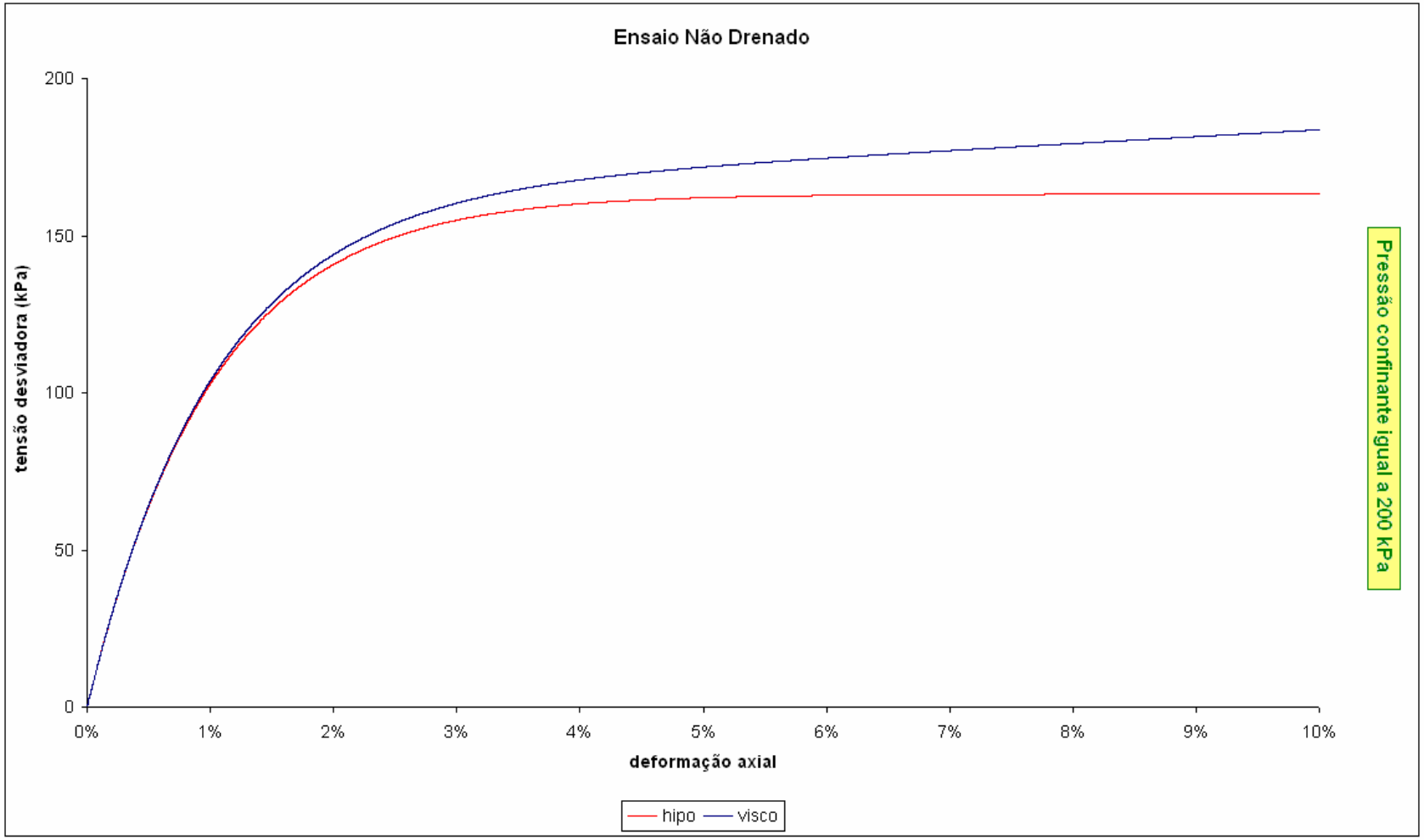


Figura 9.1-Comparação entre os resultados das equações constitutivas - I

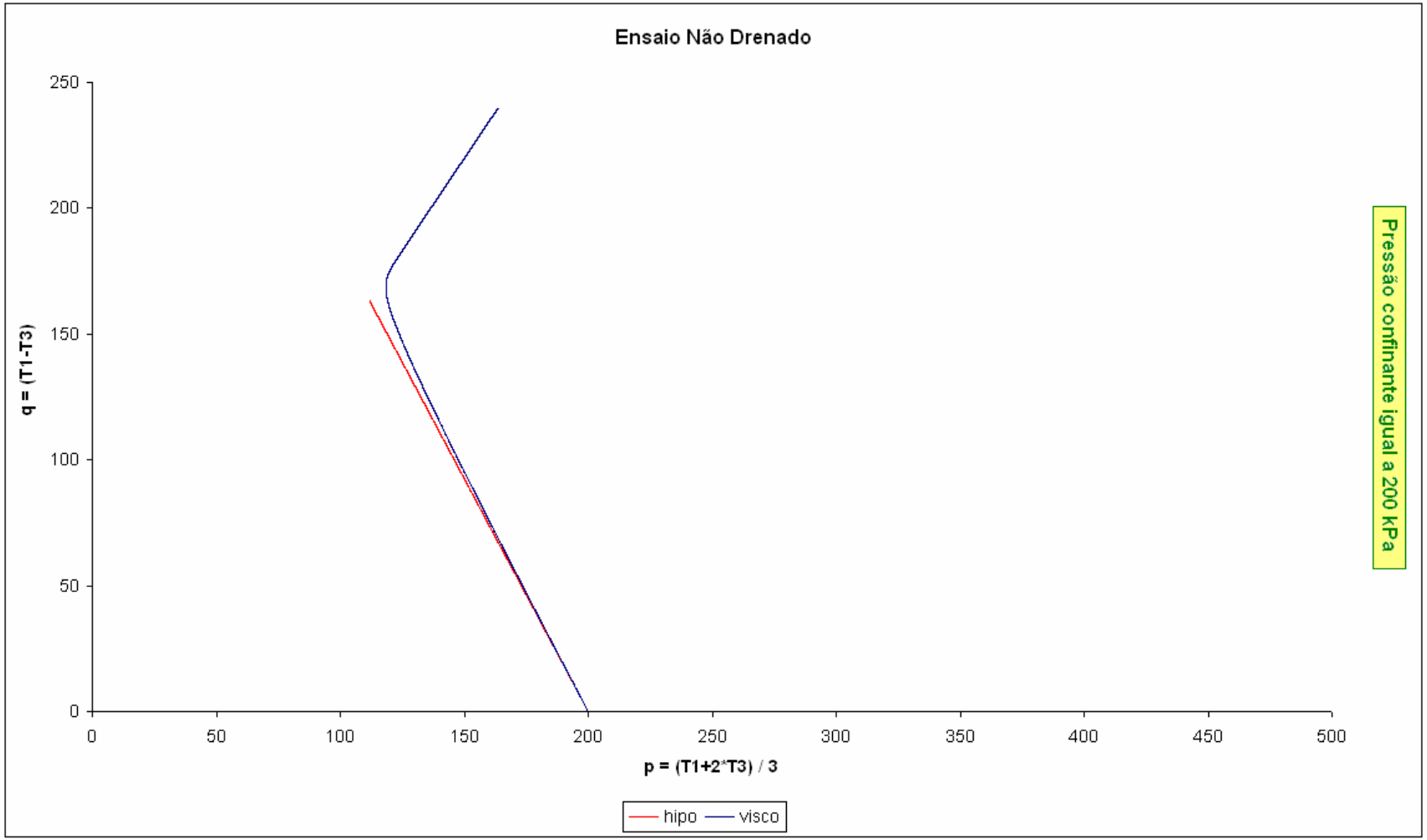


Figura 9.2-Comparação entre os resultados das equações constitutivas - II

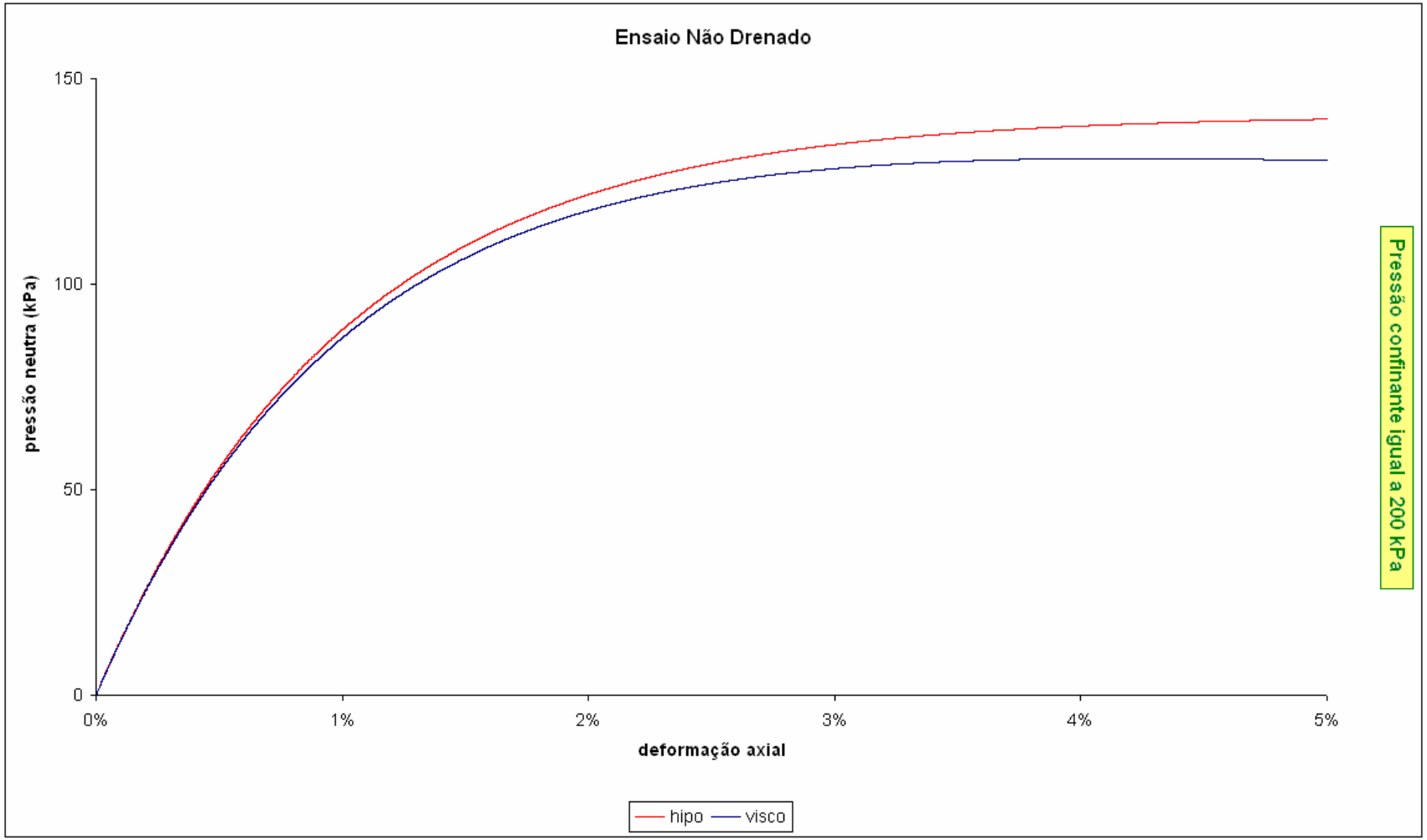


Figura 9.3-Comparação entre os resultados das equações constitutivas - III

Na figura 9.4, apresenta-se outro gráfico de tensão desviadora pela deformação, porém, com curvas de vários ensaios realizados com diferentes velocidades de deformação.

Os ensaios foram realizados com pressão confinante de 100 k Pa, e os valores adotados para as constantes das equações são aqueles expressos na Tabela 9.1 e na Tabela 9.2.

A curva da equação hipoplástica não se altera conforme a velocidade do ensaio varia, e a seguir faz-se algumas considerações quanto aos resultados obtidos pela equação visco-hipoplástica:

- Para os parâmetros indicados acima, nota-se que as curvas da equação visco-hipoplástica simuladas com velocidade abaixo de 0.001 s^{-1} interceptam a curva da equação hipoplástica;

- As curvas correspondentes às velocidades extremamente baixas apresentam uma tendência de interceptar a curva da equação hipoplástica para um valor de deformação extremamente elevado; e

- No início do ensaio (até 0,2% de deformação) as formas das curvas se aproximam de uma reta que passa pela origem do gráfico; e quanto maior a velocidade do ensaio, mais a curva produzida pela equação visco-hipoplástica se aproxima desta reta (vide curva correspondente à velocidade de 10000 s^{-1}).

Lambe e Withman (1979) citam que a resistência não drenada aumenta, conforme a velocidade com a qual é feito o ensaio aumenta. Observando as curvas apresentadas na figura 9.4, nota-se que a resistência não drenada aumenta conforme se aumenta a velocidade de deformação, ou seja, a equação visco-hipoplástica corrobora a afirmação de Lambe e Withman.

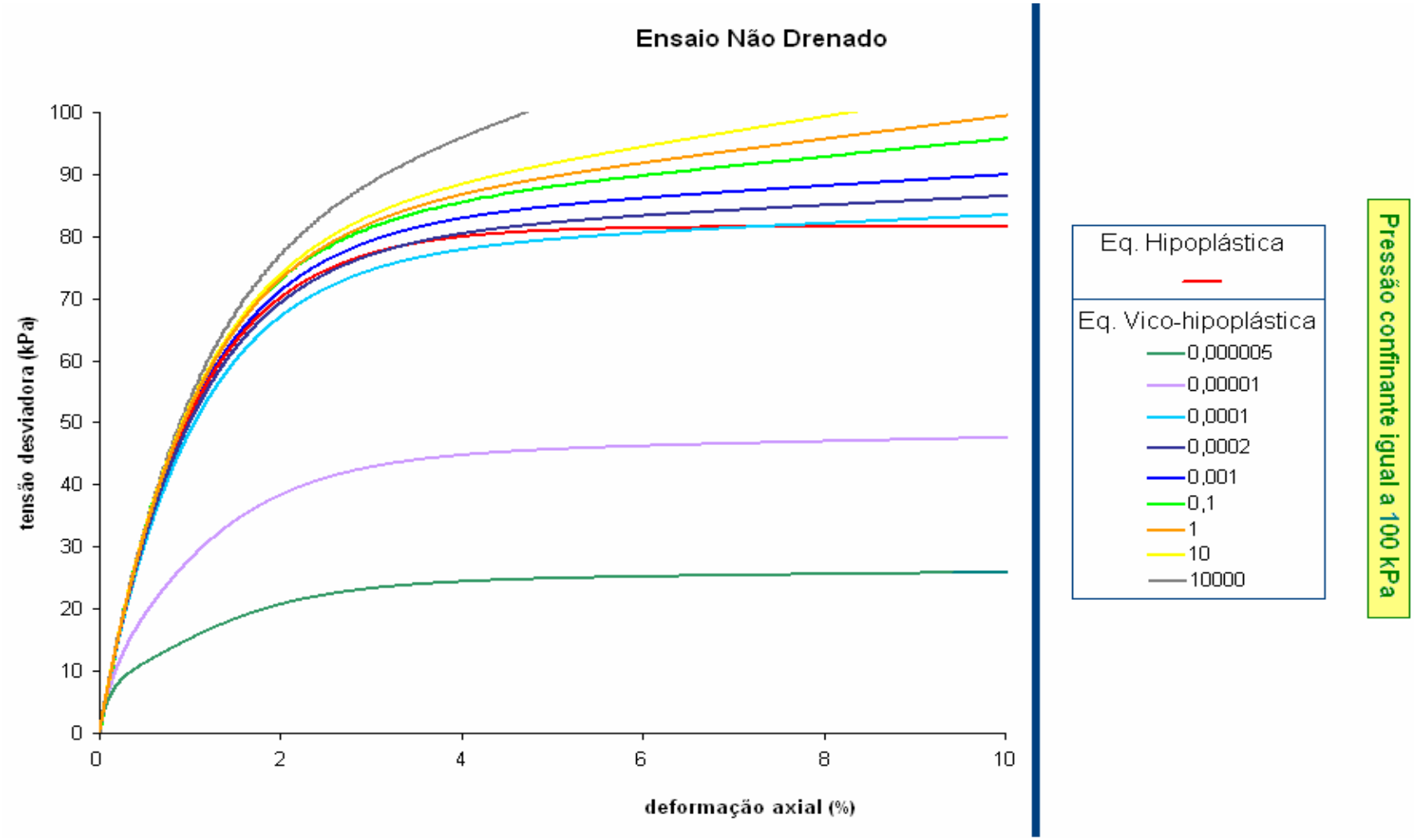


Figura 9.4-Comparação entre resultados de resistência para a equação visco-hipoplástica

10. PREVISÃO DA EQUAÇÃO VISCO-HIPOPLÁSTICA PARA ENSAIOS EDOMÉTRICOS E NÃO DRENADOS COM DIFERENTES VELOCIDADES DE DEFORMAÇÃO

Neste capítulo comparam-se os resultados fornecidos pela equação visco-hipoplástica (7.4.1) com os resultados da equação visco-hipoplástica proposta no artigo de Wu, W.; Bauer, E.; Niemunis, A.; Herle, I. (1993), do qual foram extraídas as funções escalares α e β.

As figuras 10.1 e 10.2, extraídas do artigo supracitado, apresentam resultados de ensaios triaxiais não drenados e edométricos, respectivamente, das simulações numéricas com a equação visco-hipoplástica proposta pelos autores.

As figuras 10.3 a 10.5 apresentam gráficos com resultados de ensaios triaxiais não drenados e as figuras 10.6 a 10.8 apresentam gráficos com resultados de ensaios edométricos. Os dois ensaios foram realizados para diferentes velocidades de deformação, com o objetivo de comparar as respostas da equação 7.4.1 com as respostas da equação visco-hipoplástica de onde foram extraídas as funções α e β.

Com relação aos ensaios não drenados, estes foram iniciados com os corpos-de-prova adensados isotropicamente a 200 kPa, enquanto que as simulações dos ensaios edométricos foram iniciadas com estado isotrópico de tensões a 10 kPa.

Os valores adotados para as constantes da equação 7.4.1 estão expressos nas Tabelas 10.1 e 10.2 abaixo.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
54	1,46	0,07	0,018

Tabela 10.1- valores das constantes-I

a_1	a_2	a_3	a_4
1	0,1	0,00005	250

Tabela 10.2- valores das constantes-II

Na figura 10.3, nota-se que a relação T_1/T_3 praticamente não se altera conforme se muda a velocidade de deformação.

No gráfico t x s, da figura 10.4, nota-se que conforme a velocidade aumenta a curva obtida desloca-se para a direita, portanto, um ensaio realizado com velocidade de deformação maior alcança a ruptura posteriormente àquele cuja velocidade foi pequena.

Os gráficos de pressões neutras mostrados na figura 10.5 indicam que ensaios com velocidade menor produzem maior pressão neutra (corroborando o resultado obtido no gráfico t x s).

Nas figuras 10.6 e 10.7 observa-se que os ensaios realizados com velocidades maiores produzem maior nível de tensão axial, para uma mesma deformação (ou índice de vazios), como era esperado.

Na figura 10.8, nota-se que a relação entre as tensões axial e radial não se altera, praticamente, conforme se muda a velocidade do ensaio.

Comparando-se as repostas da equação 7.4.1 nos ensaios apresentados, conclui-se que as respostas são semelhantes àquelas da equação visco-hipoplástica proposta no artigo de Wu, W.; Bauer, E.; Niemunis, A.; Herle, I. (1993).

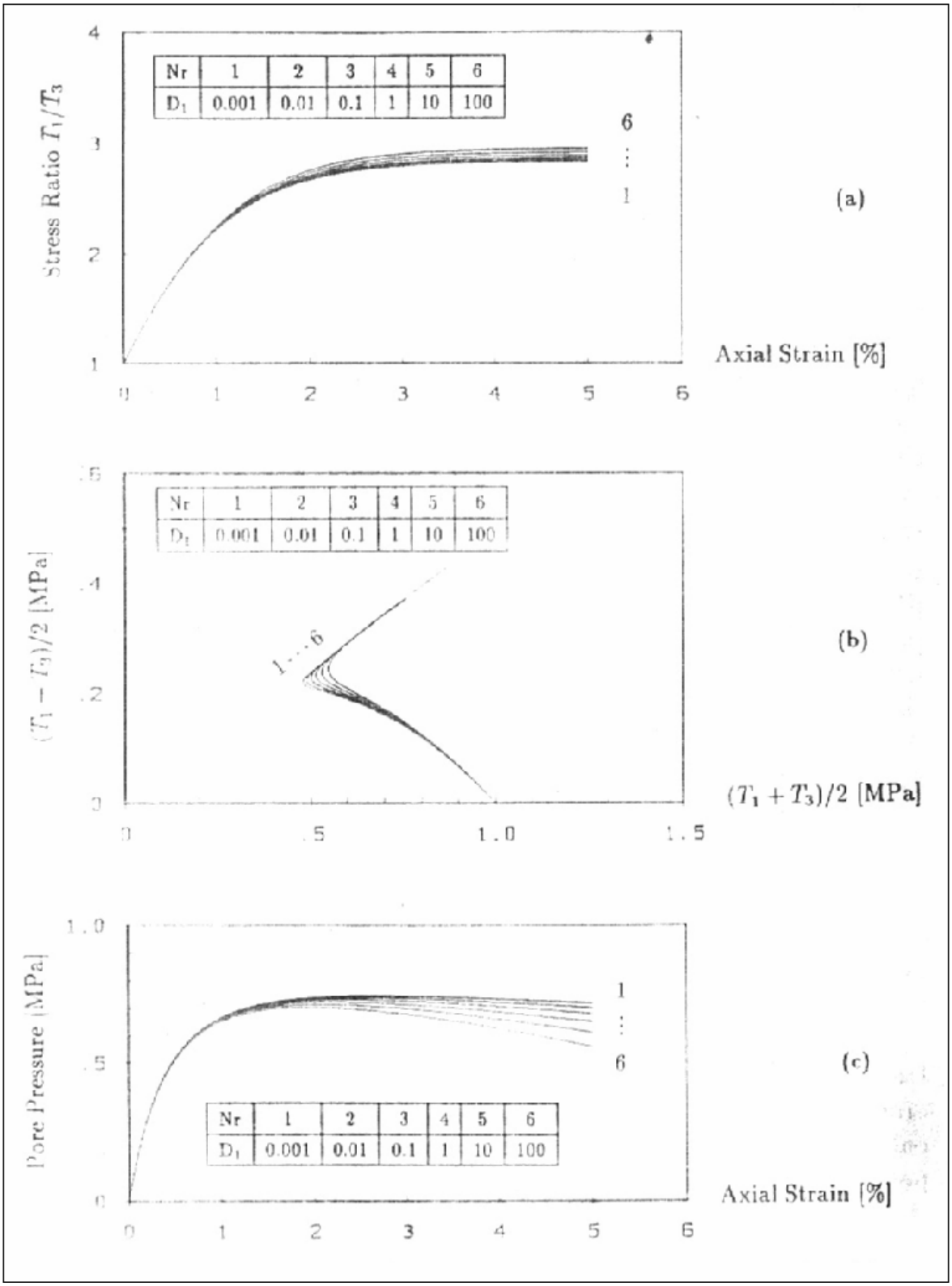


Figura 10.1 – Simulação numérica de ensaios triaxiais de compressão não drenada. Relação entre as tensões efetivas principais (T_1/T_3) x deformação axial (a), t x s (b) e pressão neutra x deformação axial. Fonte: Wu, W.; Bauer, E.; Niemunis, A.; Herle, I. (1993).

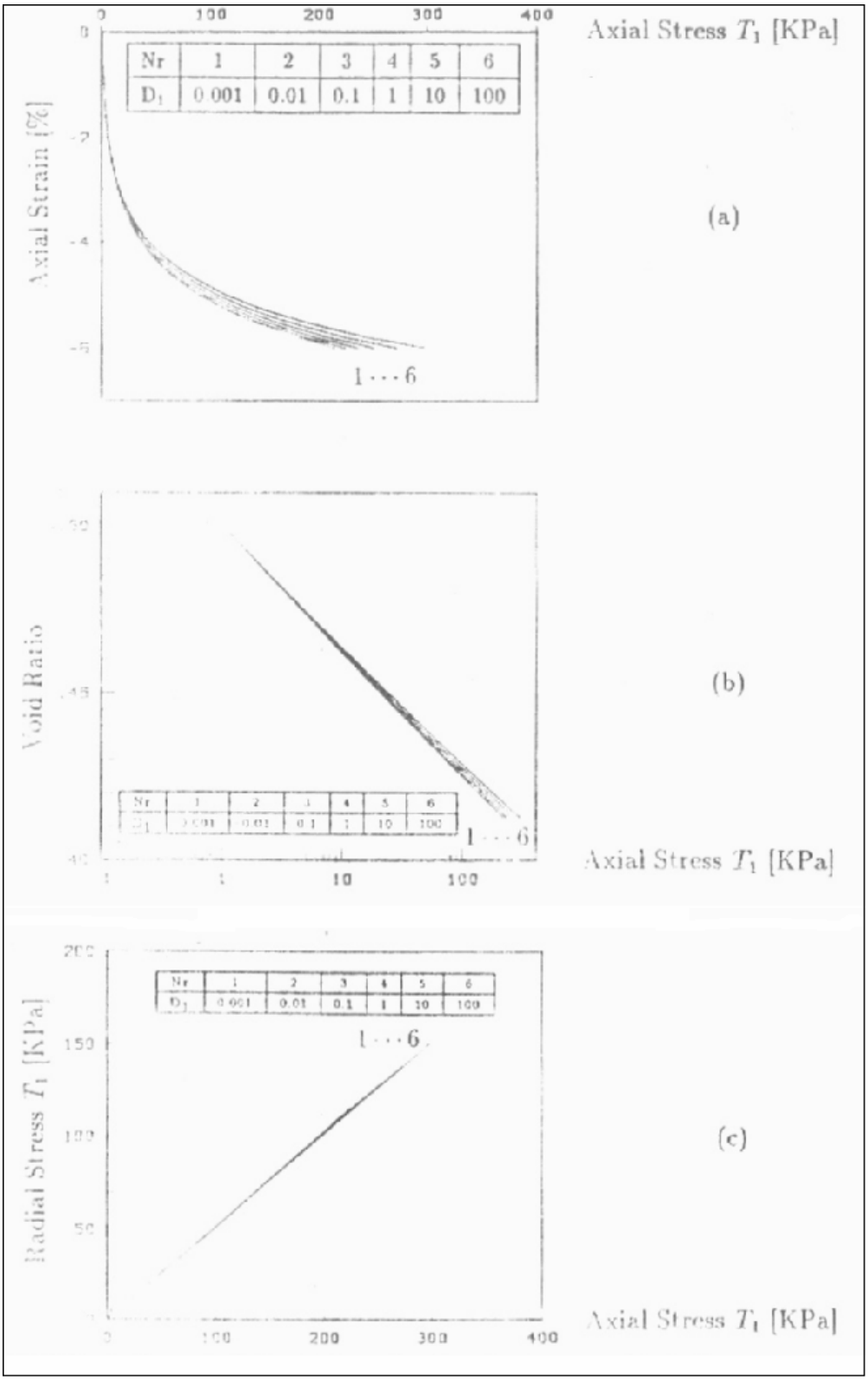


Figura 10.2 – Simulação numérica de ensaios edométricos: deformação axial x tensão efetiva axial (a), índice de vazios x tensão efetiva axial (b) e tensão efetiva radial x tensão efetiva axial. Fonte: Wu, W.; Bauer, E.; Niemunis, A.; Herle, I. (1993).

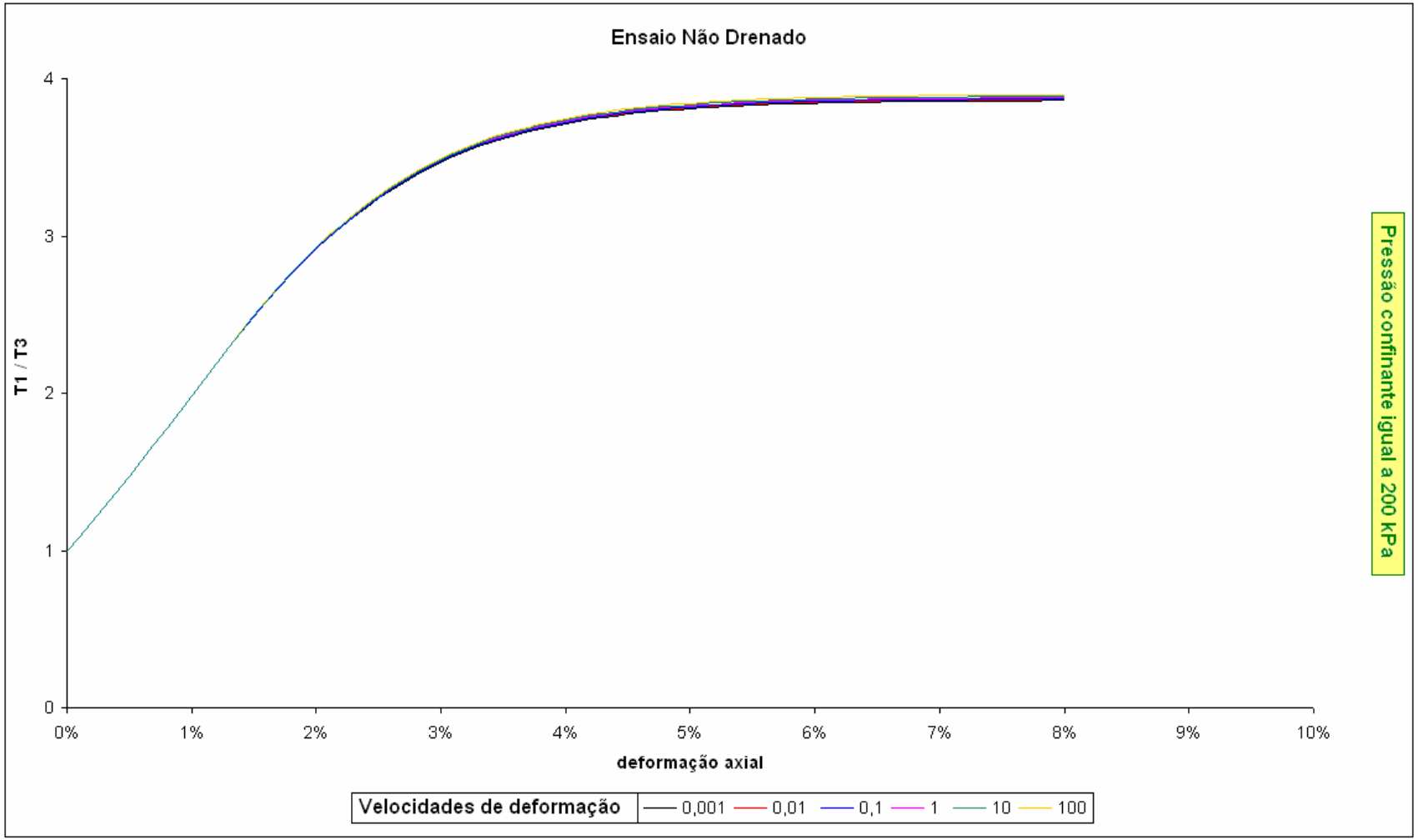


Figura 10.3-Resultados para diferentes velocidades de deformação - I

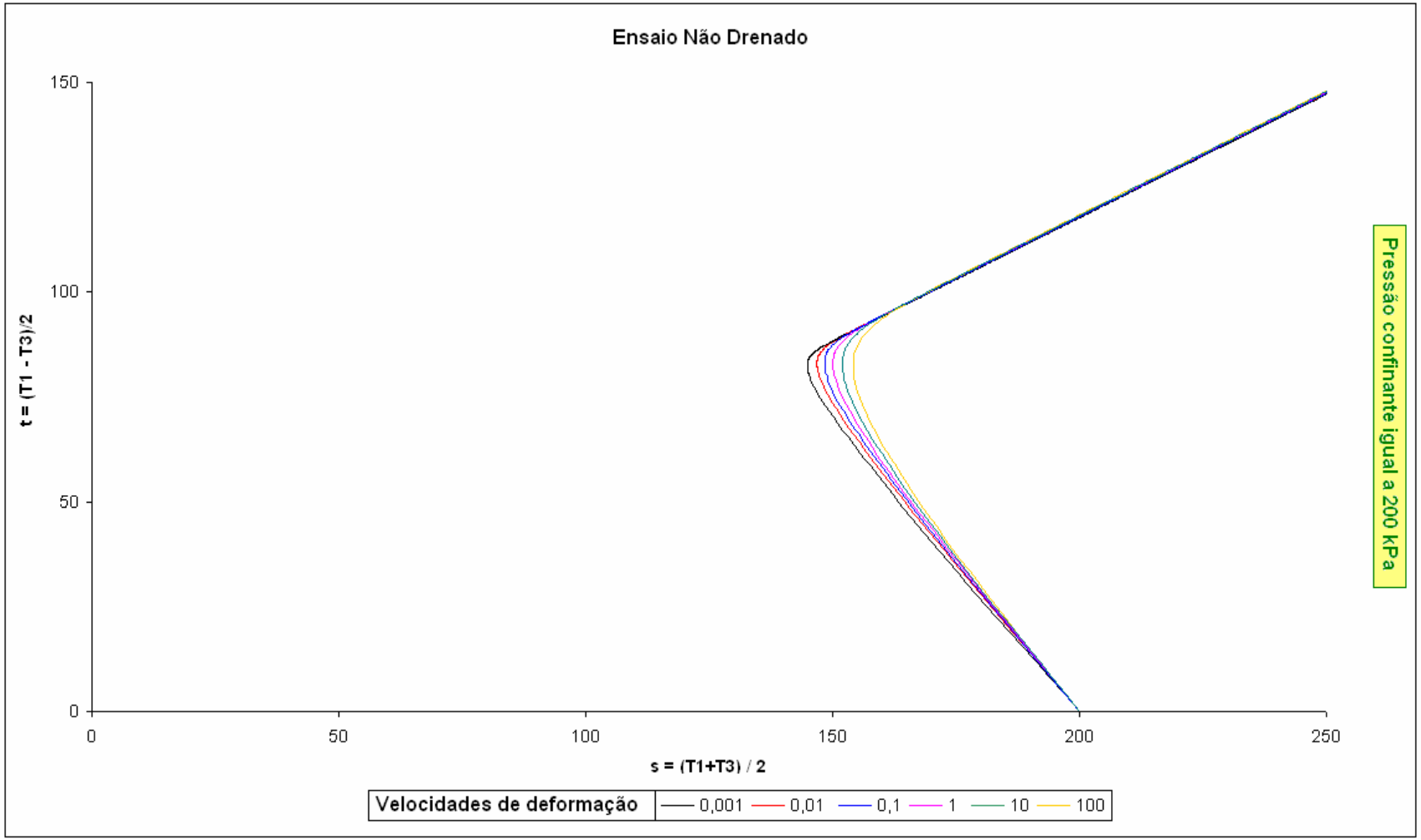


Figura 10.4 Resultados para diferentes velocidades de deformação - II

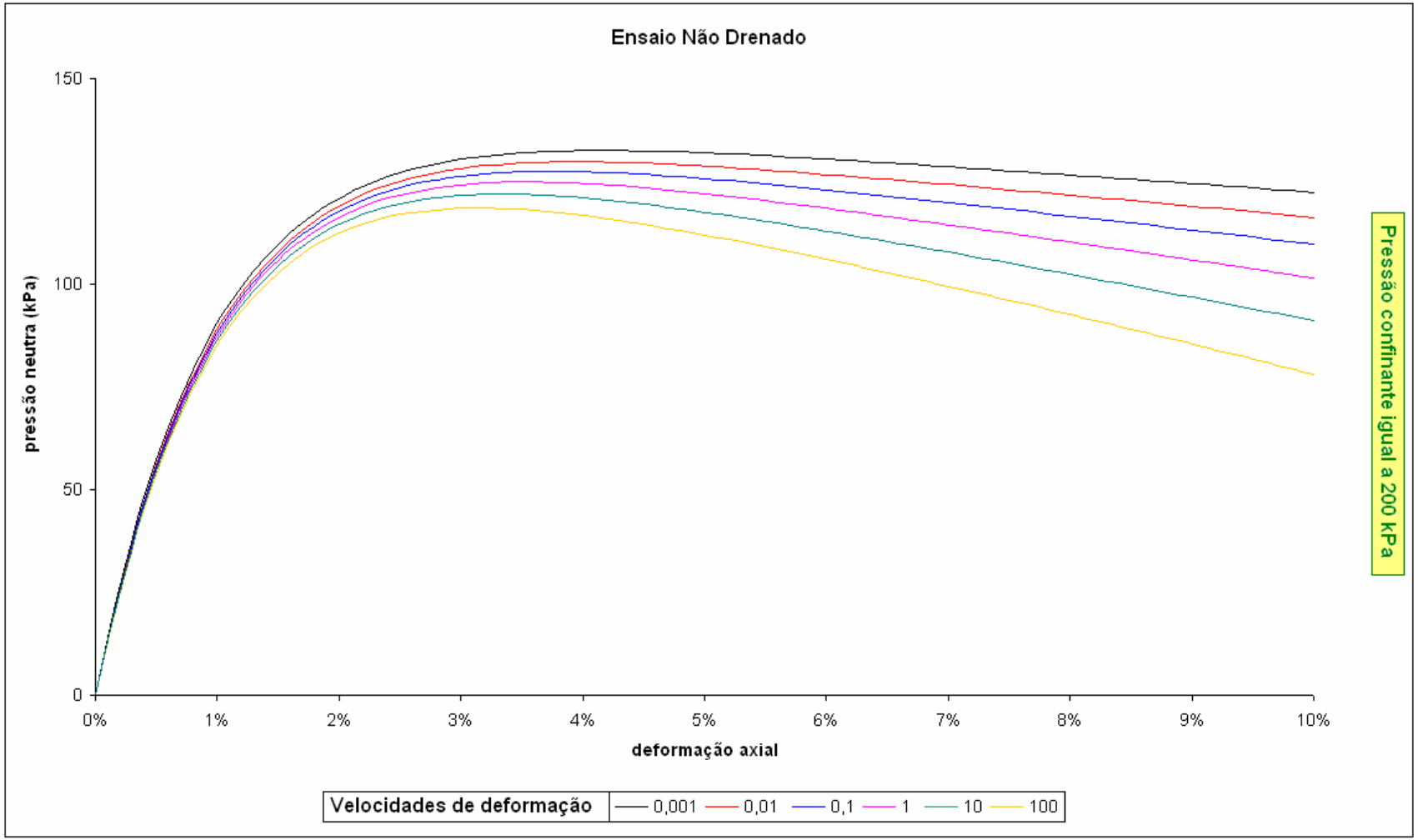


Figura 10.5 Resultados para diferentes velocidades de deformação - III

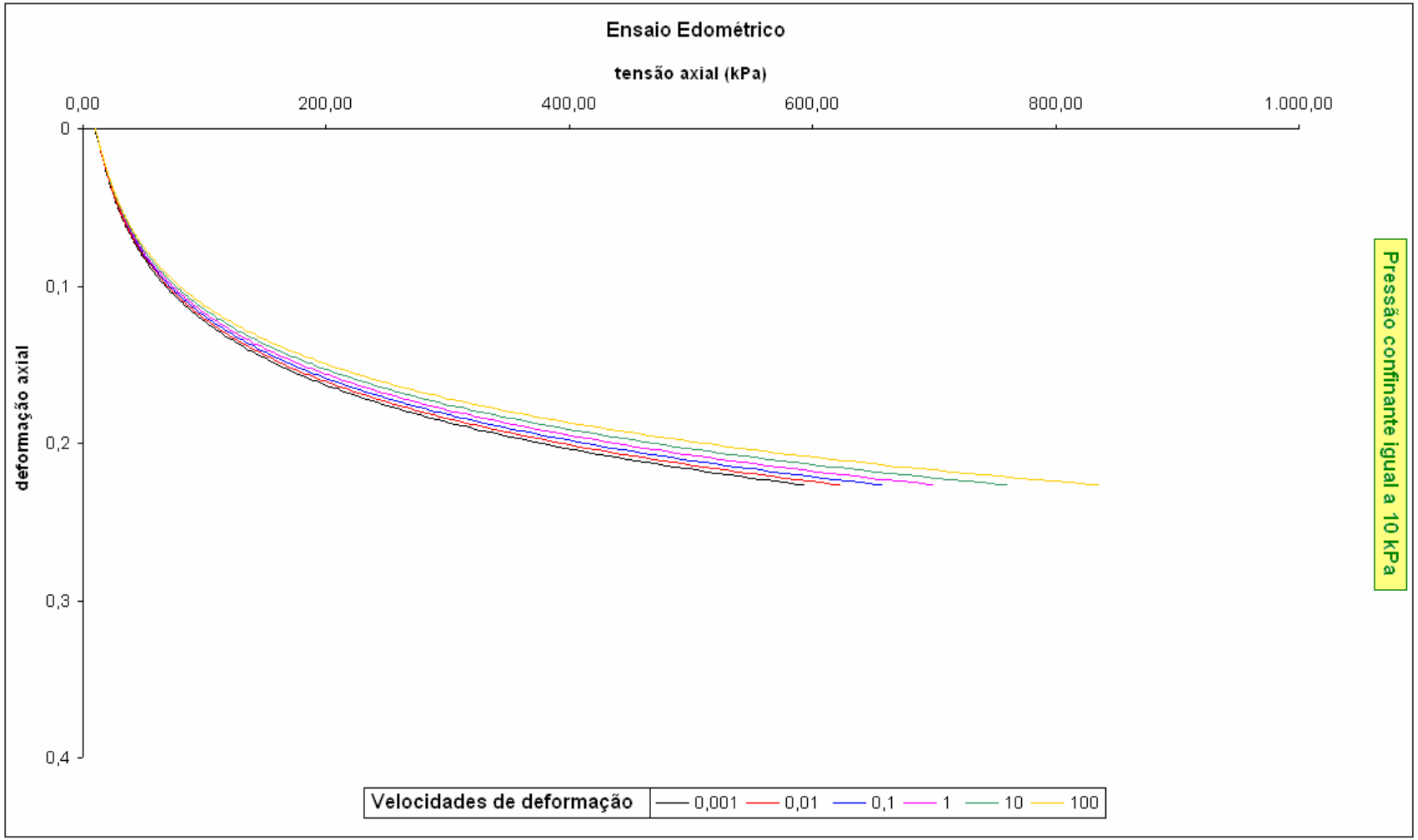


Figura 10.6 Resultados para diferentes velocidades de deformação - IV

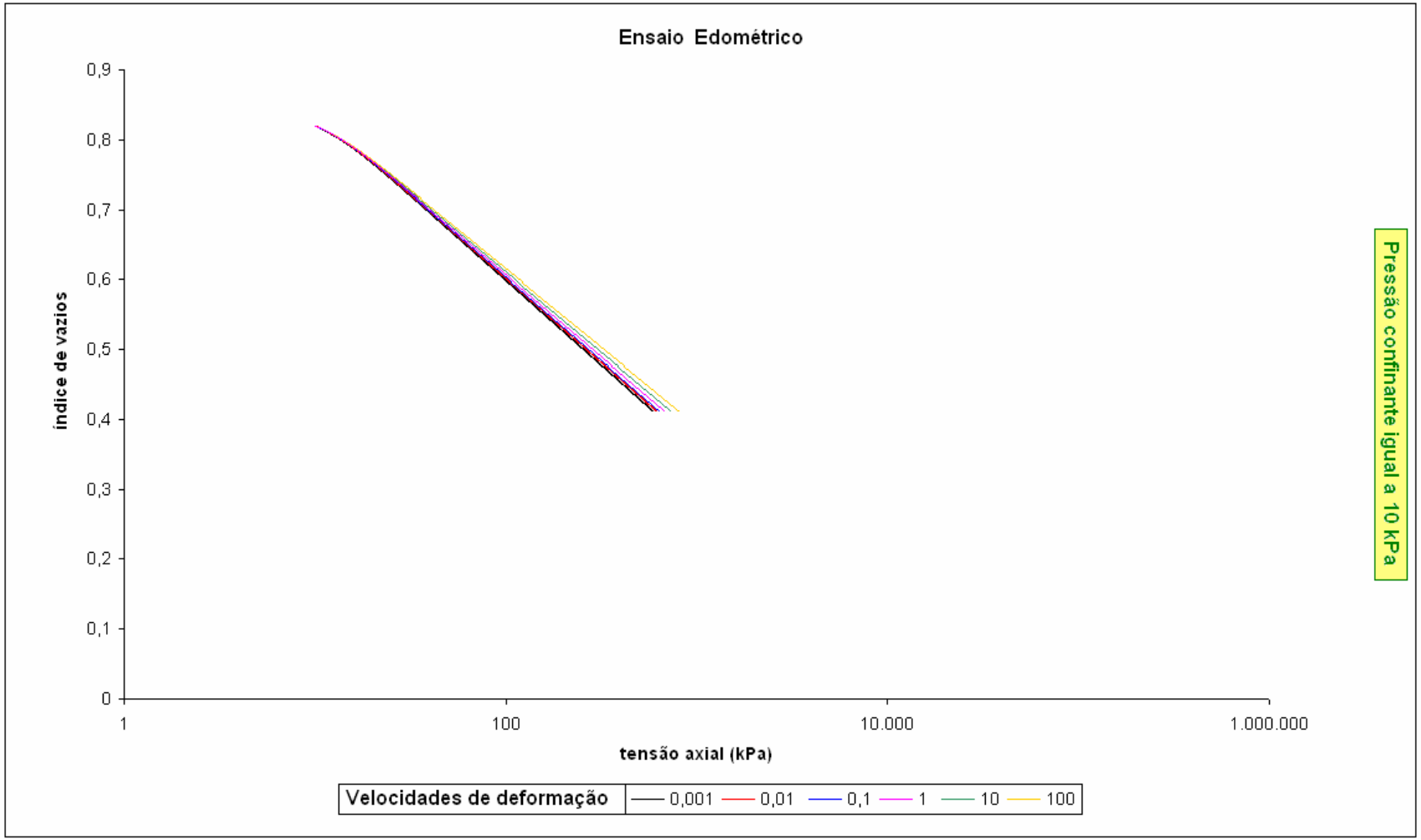


Figura 10.7 Resultados para diferentes velocidades de deformação - V

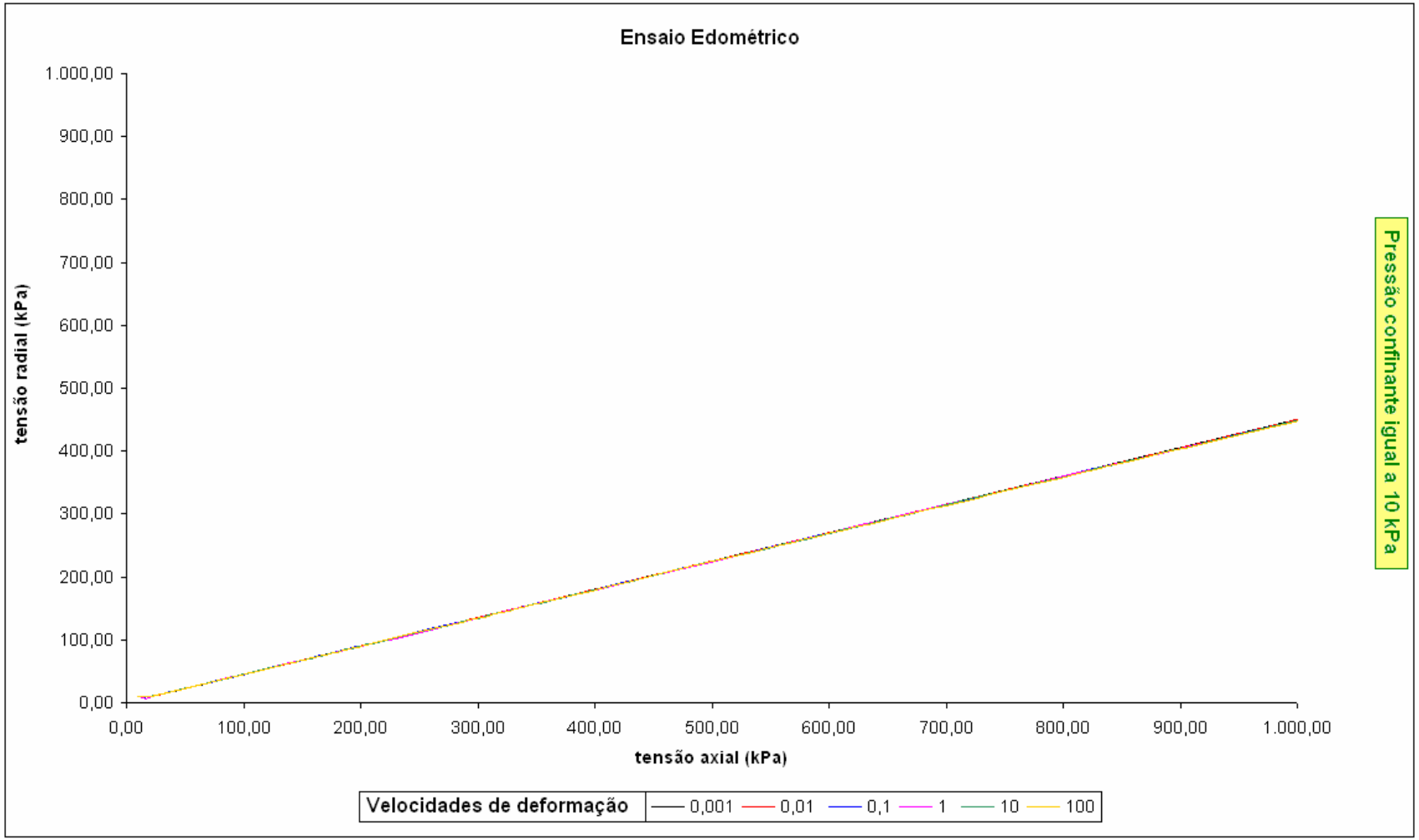


Figura 10.8 Resultados para diferentes velocidades de deformação - VI

11. ESTUDO DA RELAÇÃO ENTRE A TENSÃO AXIAL E A TENSÃO RADIAL

Neste capítulo serão feitas considerações sobre o modo como a equação visco-hipoplástica relaciona as tensões axial e radial, com as quais se calcula o coeficiente de empuxo em repouso (Ko), no ensaio edométrico.

Sobre os dados numéricos utilizados nas simulações, os valores das constantes da equação 7.4.1 para a simulação dos ensaios apresentados nesta seção estão mostrados nas tabelas 11.1 e 11.2.

$\tilde{G}$	M	λ	κ
54	1,46	0,07	0,018

Tabela 11.1- valores das constantes-I

a_1	a_2	a_3	a_4
1	0,1	0,00005	250

Tabela 11.2- valores das constantes-II

Faz-se uma observação com relação à nomenclatura dos ensaios simulados: o termo *isotrópico* refere-se a uma condição na qual as velocidades de deformação nas direções axial e radial são iguais; o termo *edométrico* refere-se a um ensaio cuja velocidade de deformação na direção radial é nula; e o ensaio *não drenado* é simulado de modo que a velocidade de deformação radial é igual ao oposto da metade do valor da velocidade de deformação axial.

A equação visco-hipoplástica mostrou que, em termos da relação entre tensões radial e axial, os resultados dependem somente do tipo de ensaio que se está realizando, independentemente do nível de tensão inicial, e da condição de

adensamento do corpo-de-prova (adensado isotropicamente ou anisotropicamente), para um dado conjunto de parâmetros.

Sobre os resultados das simulações realizadas para ensaios isotrópicos, a relação entre a tensões radial e axial tendeu a 1,00; para ensaios não drenados o valor de tendeu a 0,26; e por fim, para ensaios edométricos o valor dessa relação (que representa Ko) tendeu a 0,45.

Faz-se aqui uma observação: foram realizadas diversas simulações numéricas de ensaios isotrópicos, e constatou-se, tanto para diversas condições de adensamento como para uma gama de valores adotados para as constantes, que o valor da relação entre as tensões radial e axial tende sempre à unidade.

Na figura 11.1 mostram-se os resultados de dois ensaios isotrópicos. A curva “A” mostra o resultado no qual o corpo-de-prova foi adensado, inicialmente, com tensão axial igual a 200 kPa e tensão radial igual a 100 kPa; a curva “B” mostra o resultado de um corpo-de-prova adensado, inicialmente, com tensão axial igual a 200 kPa e tensão radial igual a 50 kPa. Ambas as curvas tendem ao valor 1,00, conforme o ensaio se procede.

A figura 11.2 mostra resultados de ensaios edométricos, sendo que a curva denominada “A” relaciona-se a um corpo-de-prova adensado isotropicamente sob tensão de 200 kPa, a curva “B” relaciona-se a um corpo-de-prova adensado anisotropicamente, com tensão axial de 200 kPa e tensão radial de 50 kPa. As curvas tendem ao valor 0,45 (K_o), conforme ocorre deformação do corpo-de-prova.

Foram realizados ensaios não drenados, cujos resultados estão ilustrados na figura 11.3. A curva “A” está relacionada a um corpo-de-prova adensado isotropicamente a 200 kPa, enquanto que a curva “B” está relacionada com um corpo-de-prova adensado sob as tensões axial de 200 kPa e radial de 50 kPa. As curvas tendem ao valor 0,26 com o decorrer do ensaio.

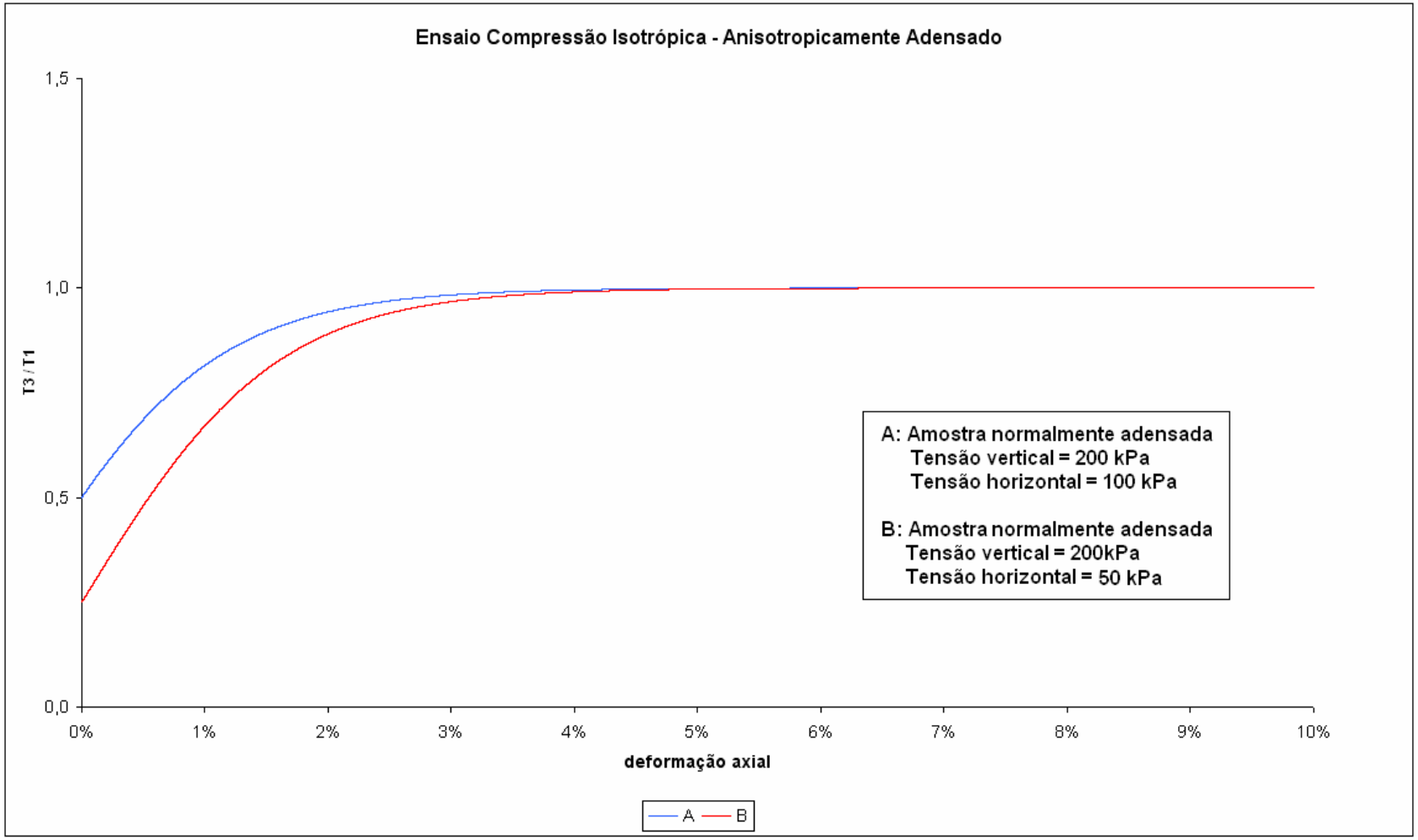


Figura 11.1-Evolução de K_o durante um ensaio de compressão isotrópica

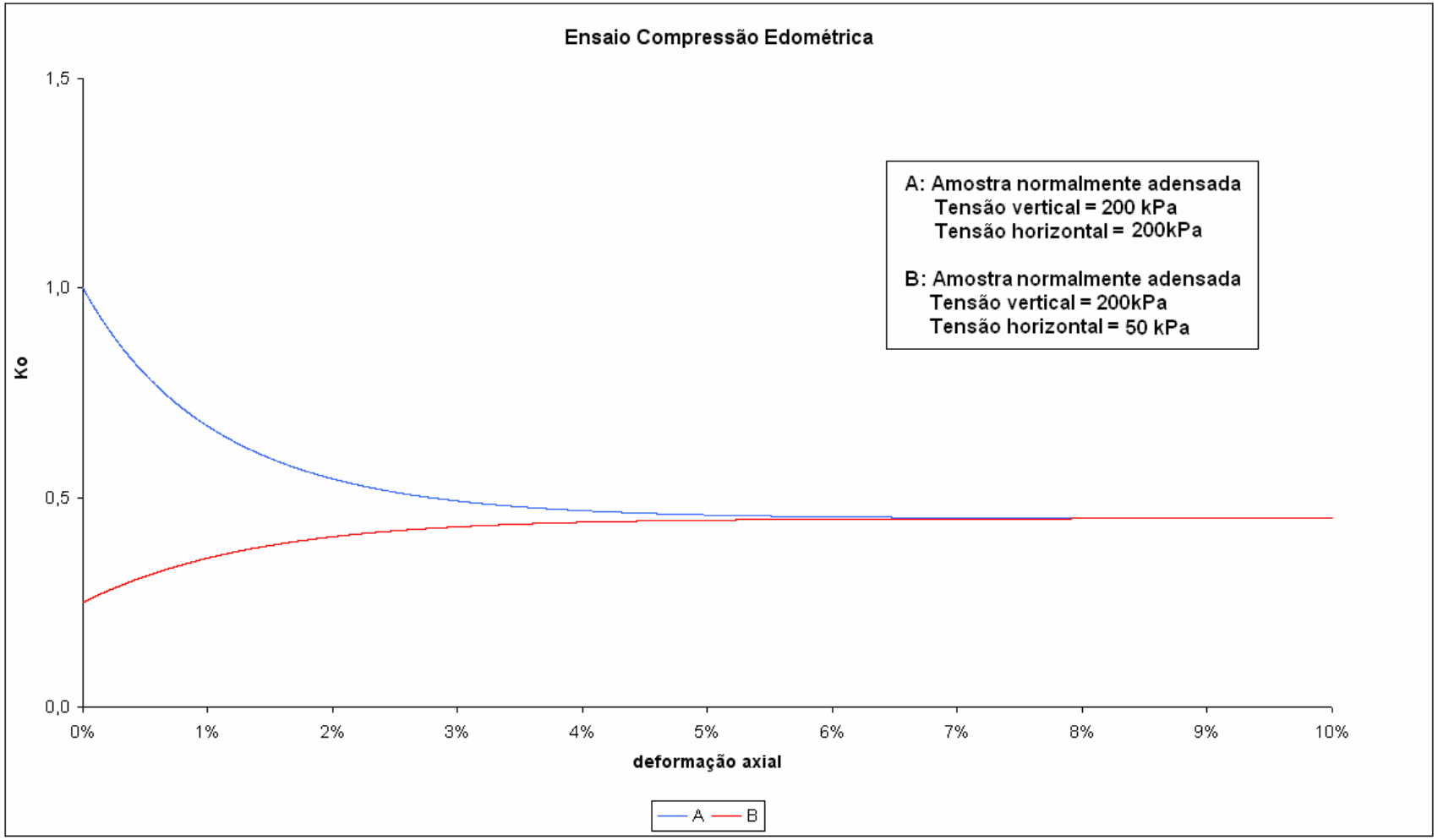


Figura 11.2-Evolução de K_o durante um ensaio de compressão edométrica

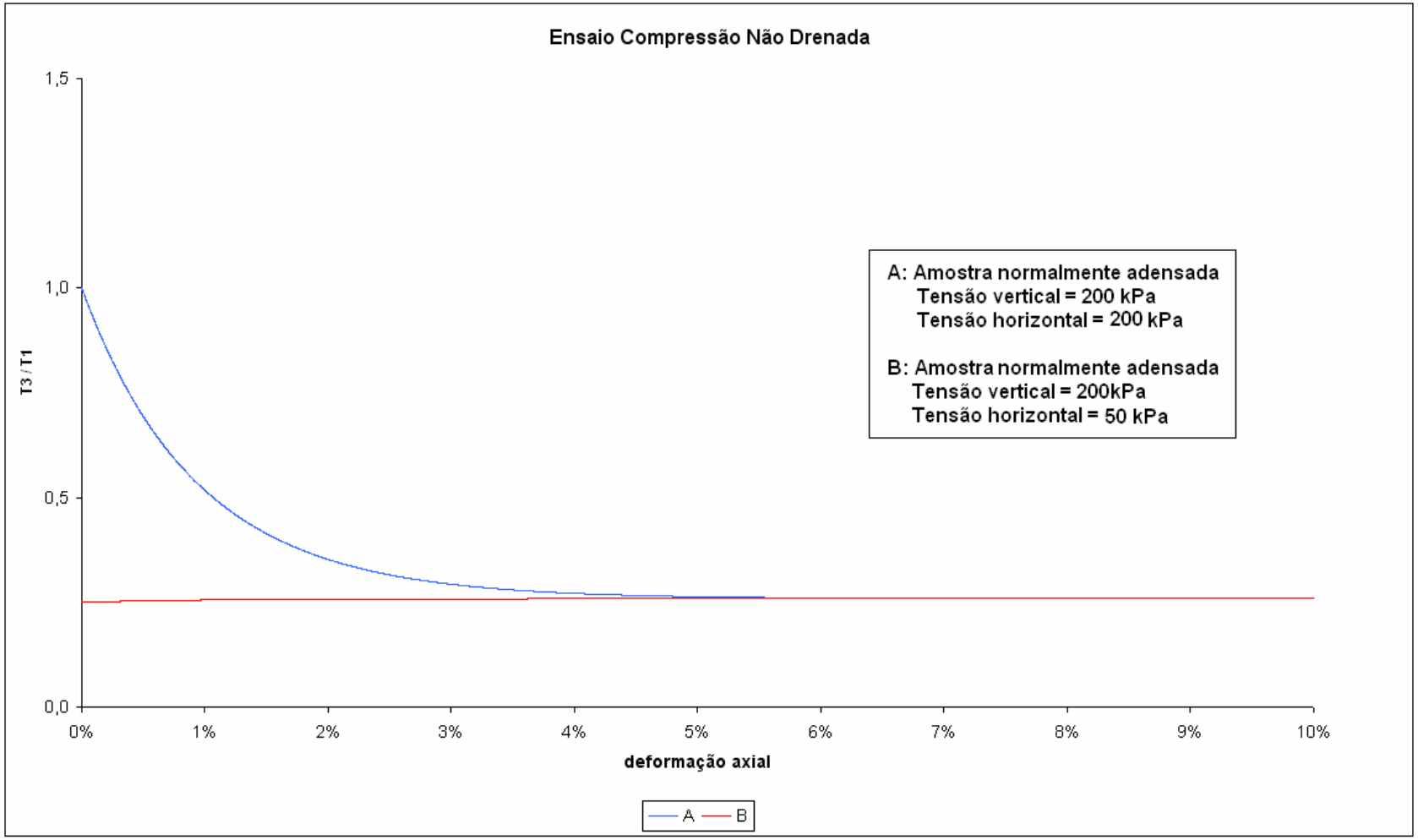


Figura 11.3-Evolução de K_o durante um ensaio de compressão não drenada

O coeficiente de empuxo em repouso é definido como a relação entre a tensão horizontal efetiva e a tensão vertical efetiva que atuam num ponto do maciço do solo. Jaki propôs uma correlação empírica que produz uma boa estimativa para muitos tipos de solos:

$$K_o = 1 - \text{sen}\ \Phi'$$

Sendo que Φ' é o ângulo de atrito efetivo do solo.

Mitchell (1992) afirma que após longos períodos de tempo o coeficiente de empuxo em repouso (K_o), tanto para argilas normalmente adensadas, como para argilas sobreadensadas, tende ao valor 1,0.

Sobre a afirmação acima, simularam-se dois ensaios de relaxação, de forma a representar uma situação na qual um elemento do solo teria sido submetido, inicialmente, a deformações vertical e horizontal que o haviam levado a uma certa condição de adensamento; e posteriormente ter passado por um longo período sem que houvesse atuação de qualquer deformação.

Na figura 11.4 estão mostradas duas curvas de relaxação sendo que o valor da relação entre a tensão radial e axial para ambos os ensaios tende à unidade. Os valores das constantes estão expressos nas tabelas 11.1 e 11.2. A curva “A” representa uma condição de tensão vertical igual a 200 kPa e tensão horizontal igual a 100 kpa, ambas de compressão; e a curva “B” representa uma condição na qual a tensão vertical é igual a 200 kPa e tensão horizontal é igual a 400 kpa.

Em ambos os casos o valor da relação entre as tensões axial e radial convergiu para a unidade.

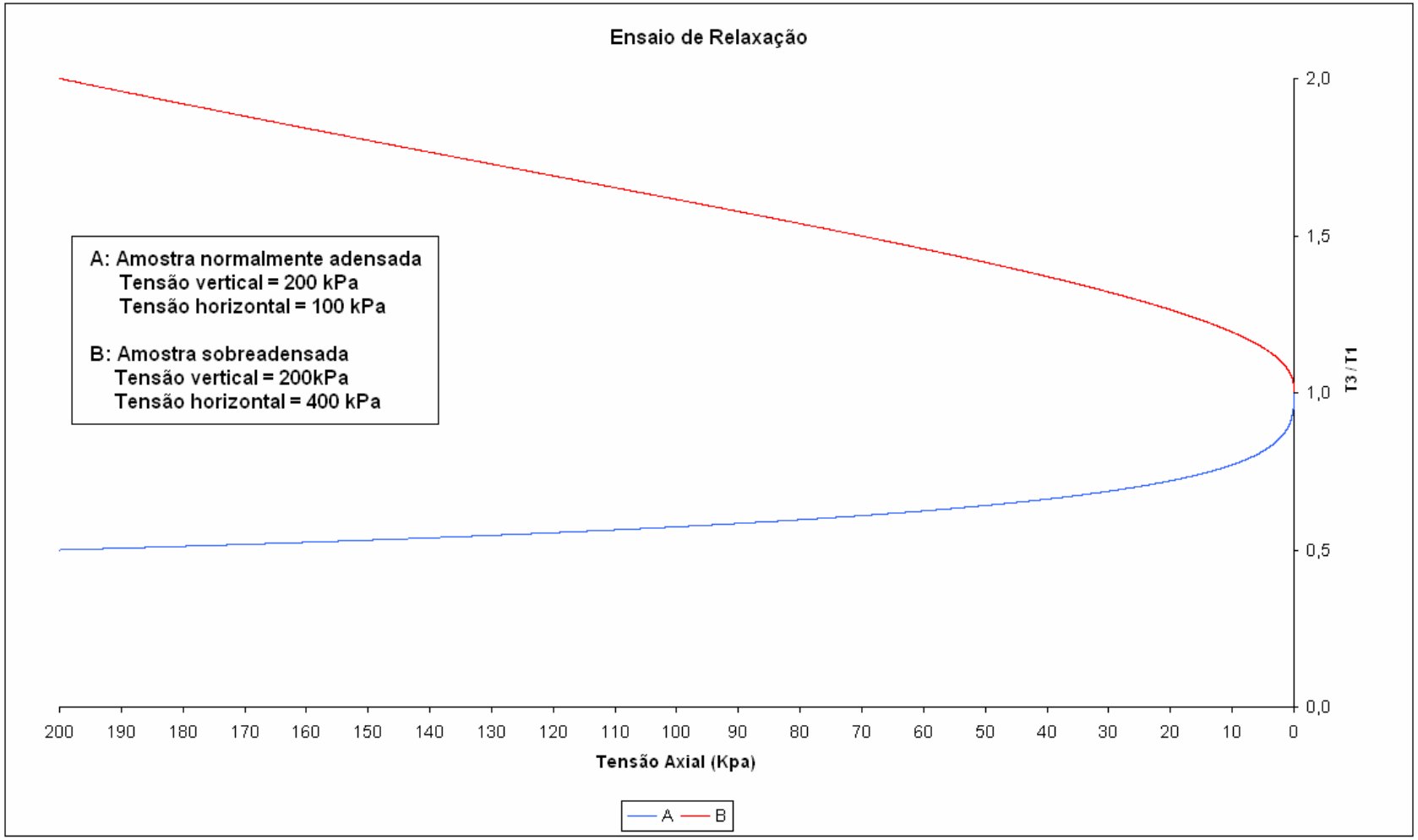


Figura 11.4-Evolução de K_o durante um ensaio de relaxação

Quando a tensão vertical num solo normalmente adensado é reduzida, a tensão horizontal não decresce na mesma proporção. Deste modo, o valor de K_o para um solo sobreadensado é maior do que o valor de K_o para um solo normalmente adensado Mitchell (1992).

Denominando-se $(K_o)_{oc}$ para solos sobreadensados, este valor varia conforme a razão de sobreadensamento do solo (*OCR*) segundo a expressão empírica:

$$K_o = (1 - \text{sen}\ \Phi')\ (OCR)^{\text{sen}\ \Phi'}$$

A figura 11.5, abaixo, ilustra a variação da tensão horizontal, conforme se varia a tensão vertical:

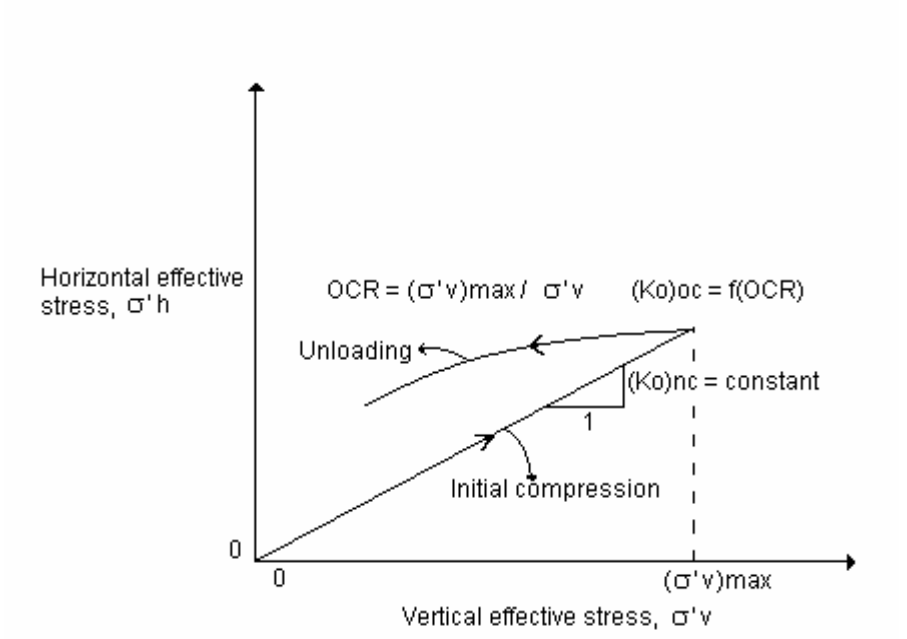


Figura 11.5-Variação de K_o para diferentes condições de adensamento

Como se nota na figura 11.6, a seguir, a equação visco-hipoplástica reproduz bem este comportamento, exceto pela parte inicial do ensaio (carregamento), o resultado corrobora a conclusão da literatura.

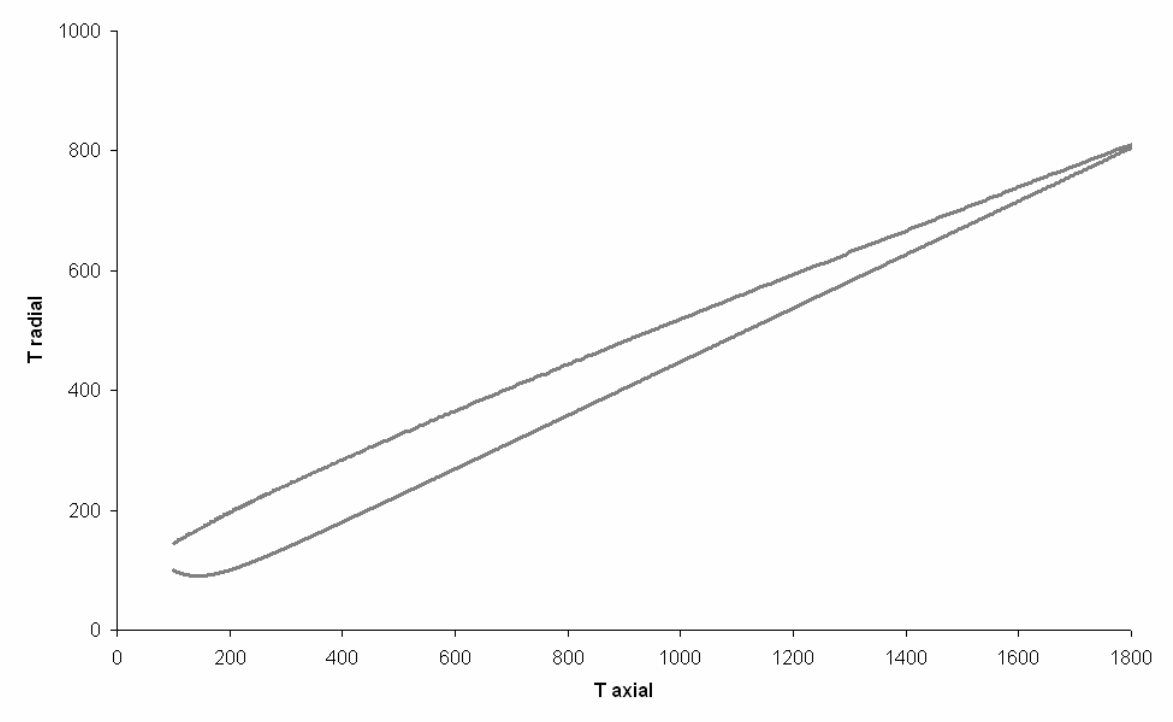


Figura 11.6 -Variação de K_o para obtida pela equação visco-hipoplástica

A ilustração refere-se a um ensaio edométrico, adensado isotropicamente com 100 kPa de pressão, e valores absolutos de velocidades de carregamento e descarregamento iguais. Os valores das constantes para este ensaio encontram-se explícitos nas tabelas 11.1 e 11.2.

12. CONFRONTO DA PREVISÃO DO MODELO COM DADOS EXPERIMENTAIS PARA DEFORMAÇÕES DE LONGA DURAÇÃO

No presente capítulo, mostra-se a previsão da equação visco-hipoplástica

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{3}\left[C_1 trDtrT + C_2 trT_a D\right]1 + \left(C_4 - \eta\right)\left(trT\right)D_a + \left[\frac{1}{3}C_3\left(trT\right)1 + C_5 T_a\right]\left(\alpha\sqrt{trD^2} + \beta\right)$$

com resultados experimentais colhidos da literatura.

A resposta desta equação visco-hipoplástica foi comparada com resultados de ensaios de fluência, retirados de artigos da literatura, para dois tipos de solos, enquanto que para ensaios de relaxação, foram comparados resultados de um tipo de solo, somente.

12.1. FLUÊNCIA

Do artigo de Bishop e Lovenbury (1969) foram extraídos dados sobre a argila marinha, normalmente adensada, proveniente de um estrato da fundação da Torre de Pisa (argila Pancone).

Para esta argila serão mostrados dois tipos de ensaios: um triaxial drenado, no qual a amostra foi levada à ruptura, e dois ensaios edométricos de longa duração (quase dois anos). As amostras utilizadas nos ensaios eram indeformadas e saturadas.

No ensaio triaxial drenado todas as constantes influenciam simultaneamente o resultado, e a calibração das constantes é feita objetivando um melhor resultado global. O gráfico com a previsão da equação visco-hipoplástica, sobreposta aos dados experimentais da argila da Torre de Pisa é mostrado na Figura 12.1.1 (esta

figura foi editada eletronicamente, e informações que não interessavam foram suprimidas).

Neste ensaio, a tensão desviadora de ruptura foi igual a 1,97 kgf/cm², aos oito dias (com a amostra adensada sob 1,55 kgf/cm² de tensão confinante). Durante o ensaio, a tensão confinante manteve-se constante, enquanto que a tensão vertical aumentava. A deformação no final deste ensaio é igual a 21,3%.

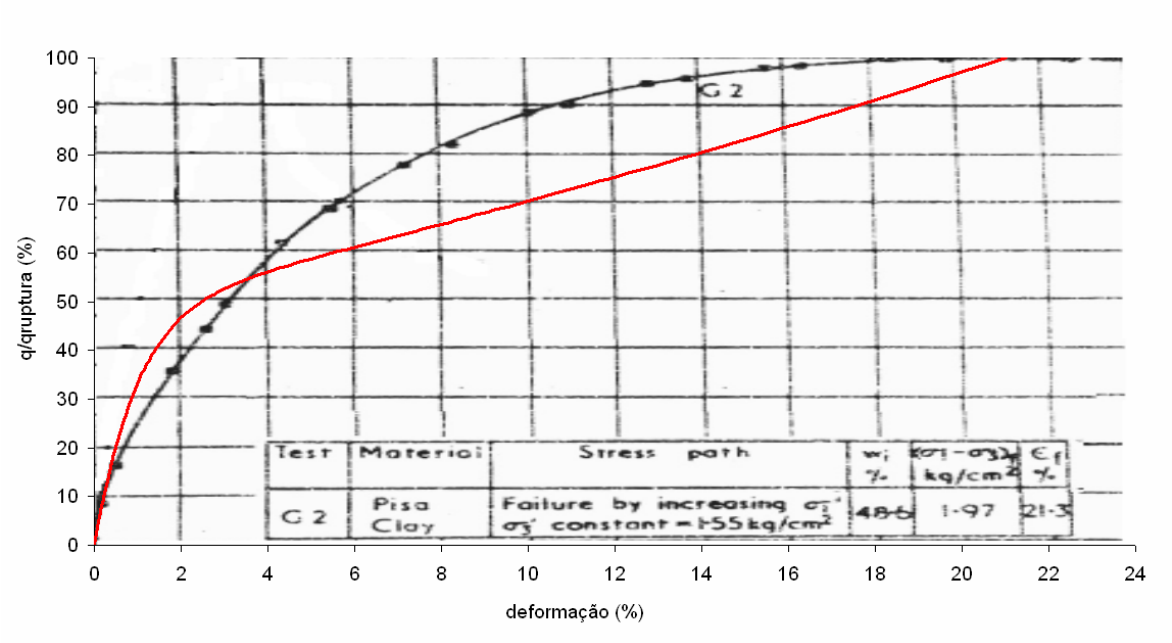


Figura 12.1.1 – Gráfico com a previsão do modelo visco-hipoplástico.

A calibração das constantes resultou nos valores mostrados nas Tabelas 12.1.1.

O valor de M foi calculado com base em estimativa para o valor do ângulo de atrito do solo (aproximadamente 23º):

$$SEN(23^{o}) = {3 \cdot M}/{(6+M)} \Rightarrow M = 0{,}9$$

O valor de λ foi calculado com base no índice de compressão do solo, obtido através da correlação:

$$c_c = (LL - 10) \cdot 0.009 = (76 - 10) \cdot 0.009 = 0.594$$

Então: $\lambda = {c_c}/{\ln 10} = 0{,}26$

O valor de κ foi estimado em 10% do valor de λ.

As demais constantes foram ajustadas de modo a se obter o melhor resultado global.

A previsão do modelo foi considerada razoável em relação aos resultados experimentais, conforme se observa na figura anterior.

$\tilde{G}$	M	λ	κ	a_1	a_2	a_3	a_4
30	0,9	0,26	0,03	0,7	0,4	0,00004	250

Tabela 12.1.1-Valores das constantes para a argila Pancone.

De posse das constantes calibradas, mostra-se a previsão da equação visco-hipoplástica para o ensaio de fluência simulada no caso de deformação unidimensional, onde não há deformação lateral.

Os ensaios experimentais tiveram duração de quase dois anos, como foi dito acima; a tensão vertical aplicada na amostra J1 foi de 3,06 kgf/cm², e na amostra J2 foi de 3,28 kgf/cm².

A Figura 12.1.2 mostra a previsão da equação visco-hipoplástica sobreposta aos resultados experimentais dos ensaios edométricos de longa duração para a argila da Torre de Pisa

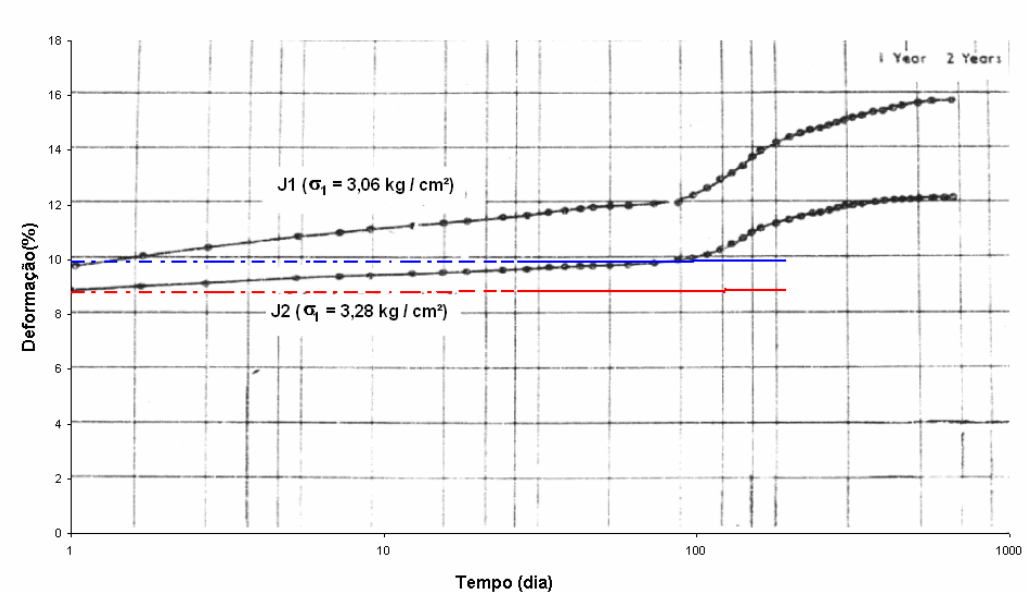


Figura 12.1.2 – Comparação entre a previsão da equação e dados experimentais.

Os resultados numéricos apresentaram alta distorção em relação aos dados experimentais para a fluência, do meio para o final do ensaio, e não foram considerados nestas duas simulações.

A variação de tensão radial com o passar do tempo, para este ensaio encontra-se na figura 12.1.3, a seguir. Nota-se pouca variação de tensão radial ao longo da simulação; e K_o, iniciado com valor unitário (adensamento isotrópico), terminou o ensaio com valor de 0,85.

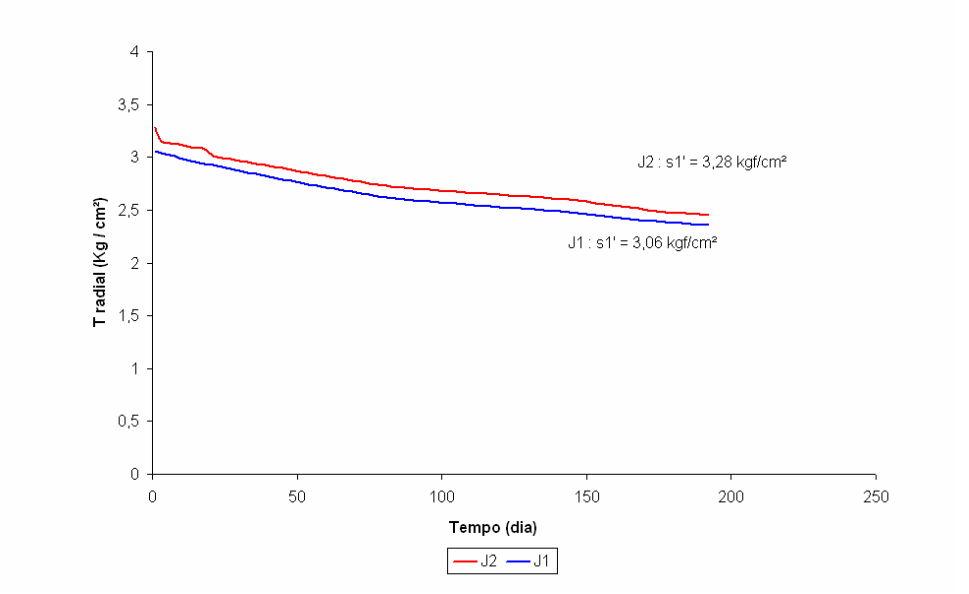


Figura 12.1.3. - Variação da tensão radial durante o ensaio de fluência.

Como se pode notar, a equação visco-hipoplástica apresentou resultados que divergiram das curvas experimentais, para este tipo de solo.

Cabe uma observação: o cálculo numérico para este tipo de ensaio não é direto, tem-se que estimar valores para a componente D_{11} do *tensor estirante* para que a não haja variação da tensão vertical, bem como de suas componentes. Isto foi feito utilizando a ferramenta SOLVER, da planilha eletrônica EXCEL, da Microsoft. Devido às limitações do programa de cálculo, o passo utilizado na integração da equação foi demasiadamente elevado, prejudicando um pouco a precisão dos resultados.

Para a simulação de fluência, a equação visco-hipoplástica produz velocidades de deformação pequenas, de modo que o gráfico se afasta dos pontos experimentais do meio para o final do ensaio.

Outro tipo de solo utilizado para se verificar a previsão da equação visco-hipoplástica trata-se de uma argila orgânica, extremamente porosa e altamente compressível, do artigo de Matsuo (1995).

As amostras são de Momiziyama, subúrbio de Sapporo, e foram consideradas saturadas. A tensão de adensamento de campo é igual a 49,0 kN/m², e o índice de vazios natural está entre 10,5 e 12,3.

Os ensaios de laboratório são do tipo unidimensionais, e o ensaio mostrado a seguir, na Figura 12.1.4, foi realizado com a amostra tendo sido adensada sob carga de 78,5 kN/m², e permanecido sob esta carga por 445 dias.

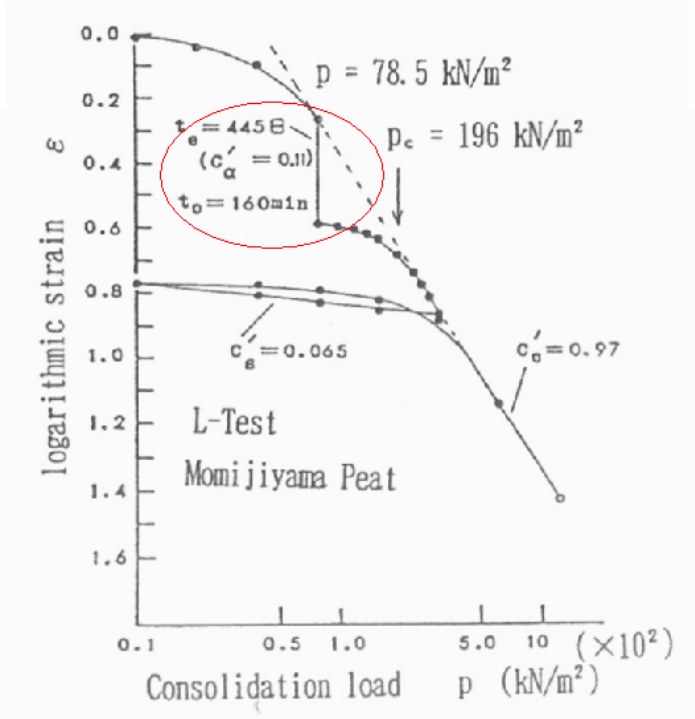


Figura 12.1.4 – Ensaio extraído do artigo de Kei Matsuo

A figura 12.1.5 mostra os gráficos da deformação logarítmica pelo logaritmo do tempo. A parte do ensaio na qual a amostra permanece por 445 dias sob tensão de 78,5 kN/m² num anel edométrico está indicada por um círculo vermelho.

Os dados da equação visco-hipoplástica para esta simulação são exibidos na tabela 12.1.2.

$\tilde{G}$	M	λ	κ	a_1	a_2	a_3	a_4
20	1	0,42	0,03	0,7	0,4	0,004	4

Tabela 12.1.2-Valores das constantes para a argila de Momiziyama.

As constantes λ e κ foram calculadas através dos coeficientes de compressão e recompressão, respectivamente. As demais constantes foram estimadas de modo a atingir o melhor resultado global.

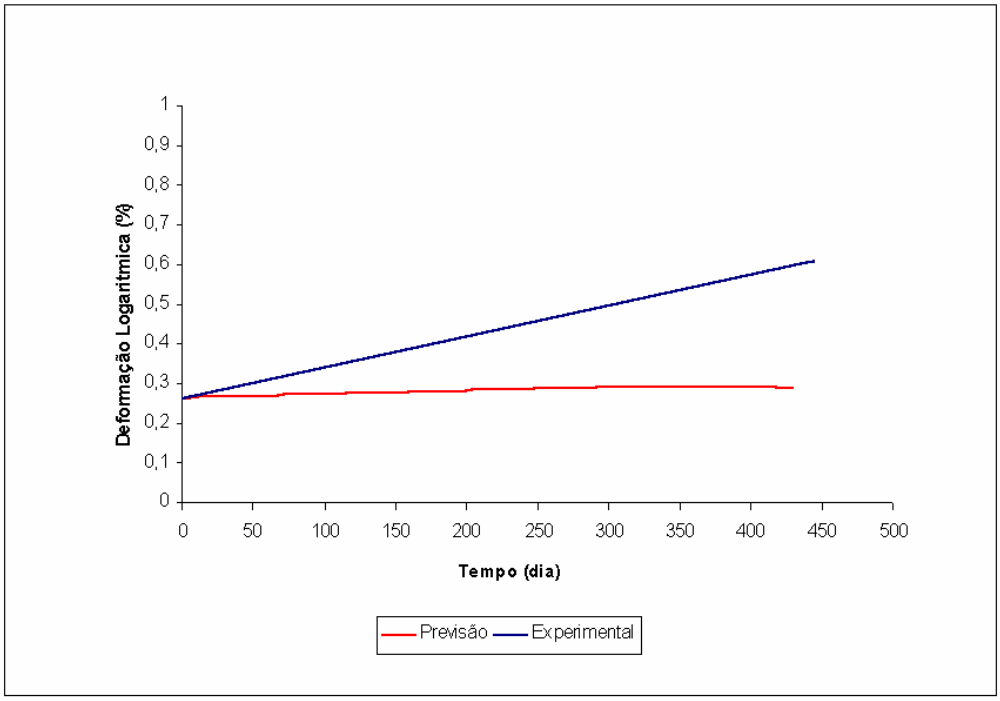


Figura 12.1.5 – Comparação com o ensaio para argila orgânica.

Com relação aos resultados obtidos para este ensaio, fazem-se os mesmos comentários do ensaio edométrico anterior.

12.2. RELAXAÇÃO

Os dados experimentais de relaxação foram extraídos do livro de Šukje (1965), página 267, onde o autor mostra uma figura (de acordo com Murayama e Shibata [1961]) com os resultados da variação de tensão axial no decorrer do tempo, para três deformações mantidas constantes durante todo o ensaio.

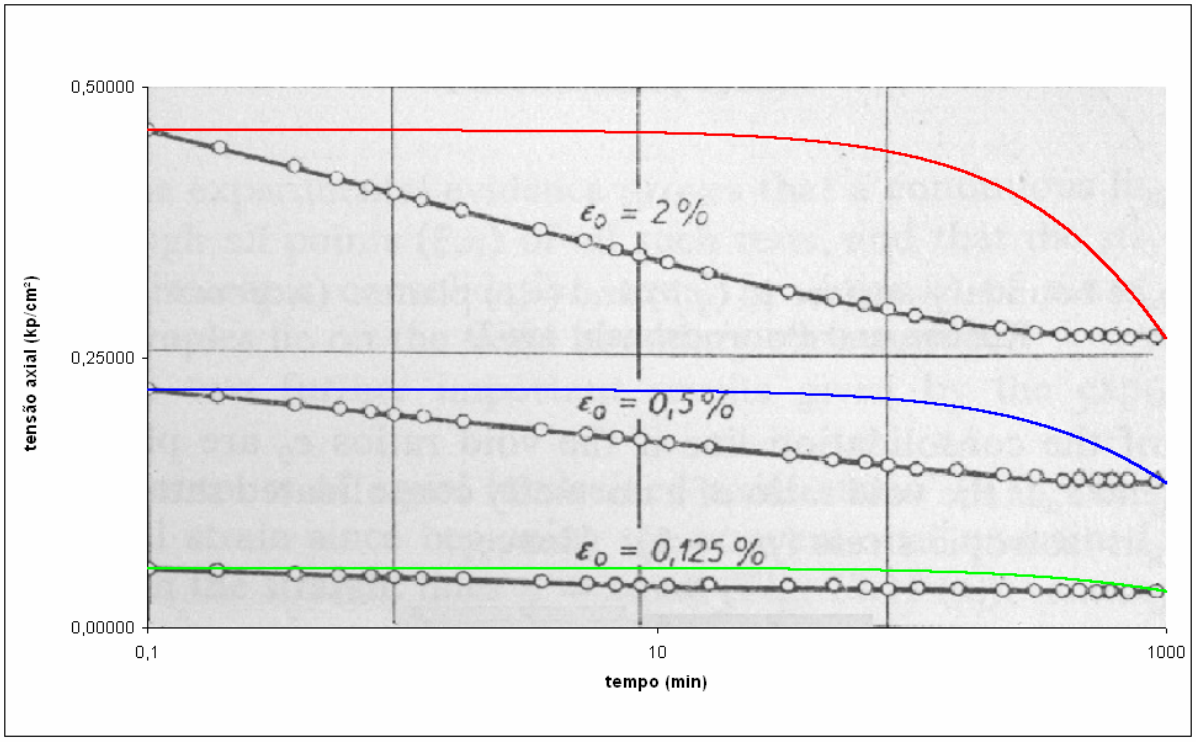
A simulação da equação visco-hipoplástica é bem mais simples do que na fluência, pois os cálculos são diretos; basta manter as componentes do tensor estirante nulas durante todo o ensaio, pois na relaxação a deformação é nula enquanto o nível de tensão cai.

Os valores das constantes estão explícitos na Tabela 12.2.1. Estes valores foram ajustados de modo a se obter o melhor resultado global para o ensaio de relaxação.

$\tilde{G}$	M	λ	κ	a_1	a_2	a_3	a_4
54	1,46	1,58	0,022	1	0,1	0,000014	250

Tabela 12.2.1 - Valores das constantes para Murayama e Shibata.

A Figura 12.2.1 mostra o gráfico extraído do livro de Šukje, com as previsões da equação visco-hipoplástica sobrepostas. Nota-se que a representação é mais fiel ao ensaio, quanto menores forem os níveis de tensão e deformação axiais.



Valores obtidos das constantes da equação visco-hipoplástica

$\tilde{G}$	M	λ	κ	a_1	a_2	a_3	a_4
54	1,46	1,58	0,022	1	0,1	0,000014	250

Figura 12.2.1. – Comparação entre resultados na relaxação.

13. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma equação visco-hipoplástica proveniente da equação proposta por Nader (1999) foi apresentada neste trabalho. Os aspectos teóricos sobre sua estrutura foram examinados, e devido à sua alta complexidade, esta equação requer métodos numéricos para analisar seu comportamento.

Na análise numérica, conta-se com os avançados programas computacionais que existem hoje, porém, foi indispensável o ajuste manual de algumas linhas das iterações, na simulação de fluência.

Na simulação de ensaios de fluência, a equação produz respostas com velocidades de deformação muito lentas, o que torna o gráfico de deformação pelo tempo praticamente horizontal.

Dependendo do valor das constantes, não é possível encontrar uma solução para o problema da simulação de fluência; este foi outro ponto delicado durante a comparação com os dados experimentais.

Na comparação com resultados experimentais na relaxação, a equação mostrou resultados bons na previsão para níveis de tensão e deformação pequenos, conforme mostrou-se anteriormente,

A simulação da relaxação é realizada com cálculo direto, porém, exige um extenso conjunto de iterações na planilha eletrônica.

Visto que os problemas que exigem solução computacional apresentam suas limitações, principalmente no caso do estudo da fluência, como foi dito, além da simulação de relaxação, com grande exigência de memória do computador, conclui-se que a equação apresenta um comportamento satisfatório. Posterior desenvolvimento de programas para resolver este tipo de problema (para esta equação), podem auxiliar a encontrar uma solução melhor, sem as distorções apresentadas.

A equação proposta reproduz bem os ensaios que não são destinados a investigar especificamente os fenômenos viscosos, como ensaios triaxiais, e edométricos, como foi visto. Em relação à equação hipoplástica que a originou, os resultados de ensaios edométricos e não-drenados, para uma gama de diferentes velocidades, mostraram-se coerentes.

Em suma, apesar de possuir uma estrutura complexa, o que complica enormemente o estudo analítico, a equação visco-hipoplástica apresentada neste trabalho pode representar situações nas quais pode haver deformação sob carga constante ou relaxação das tensões quando o corpo encontra-se sob deformação constante.

14. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Adashi, T.; OKA, F. (1984). Constitutive equations for normally consolidated clays and assigned works for clay. In: Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soils. Grenoble, p.123-157.

Bishop, A.W.; Lovenbury, H. T. (1969). Creep characteristics of two undisturbed clays. Proceedings of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Mexico City. Vol 1

Gudehus, G. A Visco-Hypoplastic Constitutive Relation for Soft Soils. In: SOILS AND FOUNDATIONS, Japanese Geotechnical Society, Agosto/2004, Vol. 44, Nº 4, p. 11-25.

Gurtin, M. E. (1981). *An introduction to Continuum Mechanics*. San Diego, California, Academic Press.

Kolymbas, D. (2000).*Introduction to Hypoplasticity, Advances in Geotechnical Engineering and Tunnelling*. Balkema.

Lambe, T. W.; Whitman, R. V. (1979). *Soil Mechanics*. John Wiley.

Lancellotta, R. (1995). *Geotechnical Engineering.*

Matsuo, K. (1995). Secondary consolidation behavior of peat. In: Compression and Consolidation of Clayey Soils, Yoshikuni e Kusakabe (eds), Balkema, Roterdam, p.129-134.

Mitchell, J. K. (1992). *Fundamentals of Soil Behavior*. University of California, Berkeley. John Wiley.

Murayaman, S., Shibata, T. (1961). “Rheological properties of clays.” Proceedings of 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, v 1, p.269-274.

Nader, J.J. (1993). *Modelos Elasto-Plásticos para solos*. *O Cam-Clay e sua aplicação a diferentes trajetórias de tensão*. São Paulo, Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica da USP.

Nader, J.J. (1999). *Hipoplasticidade e Elastoplasticidade para Solos*. São Paulo, Tese (doutorado) – Escola Politécnica da USP.

Nader, J.J. (2003). Analysis of a new hypoplastic equation. *International Journal of Plasticity*, v.19, 9, p.1445-1480.

Niemunis, A. (1993). Hypoplasticity vs. Elastoplasticity, selected topic. In: MODERN APPROACHES TO PLASTICITY. International Workshop, D. Kolymbas (org.), Horton, Grécia, Elsevier, p.278-307.

Šukje, L. (1965). *Rheological Aspects of Soil Mechanics*. John Wiley.

Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. Nova York, John wiley.

Wu, W.; Bauer, E.; Niemunis, A.; Herle, I. (1993). Visco-Hypoplastic Models for Cohesive Soils. In: MODERN APPROACHES TO PLASTICITY. International Workshop, D. Kolymbas (org.), Horton, Grécia, Elsevier, p.365-383.