SÉRGIO AUGUSTO DE FREITAS JÚNIOR

Uma introdução à homogeneização das propriedades microscópicas de um material para o meio microscópico através do método dos elementos finitos

São Paulo

2019

SÉRGIO AUGUSTO DE FREITAS JÚNIOR

Uma introdução à homogeneização das propriedades microscópicas de um material para o meio microscópico através do método dos elementos finitos

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências

Área de concentração: Engenharia Geotécnica

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Matos Pimenta

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catalogação-na-publicação

Freitas Júnior, Sérgio Augusto de

Uma introdução à homogeneização das propriedades microscópicas de um material para o meio microscópico através do método dos elementos finitos / S. A. de Freitas Junior – Versão corrigida – São Paulo, 2019.

97 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Geotecnia 2.Multi-escala 3.Elementos Finitos 4.Mecânica do contínuo 5.Modelagem Computacional. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. II.t.

Nome: FREITAS JÚNIOR, Sérgio Augusto de

Título: “Uma introdução à homogeneização das propriedades microscópicas de um material para o meio microscópico através do método dos elementos finitos”

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em: _____

Banca Examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

FREITAS JÚNIOR, S. A. São Paulo. Uma introdução à homogeneização das propriedades microscópicas de um material para o meio microscópico através do método dos elementos finitos. 2019. (Mestrado) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Trabalho este dedicado
primeiramente à Deus que tem guiado
meus passos e me dado forças para
seguir os caminhos percorridos até então,
ainda dedico este à minha amada família,
Rosana Fátima de Freitas, Sérgio
Augusto de Freitas, Rafaela Luize de
Freitas e Cynthia Yasmin de Freitas que
representam tudo aquilo que sou.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela bondade infinita em guiar meus passos bem como me proporcionar todas as batalhas que fizessem com que eu percorresse o caminho para chegar até aqui, ainda agradeço a Ele por estar constantemente ao meu lado e ao lado de minha família concedendo proteção, força e coragem.

Agradeço à minha amada família pelo apoio incondicional em todos os momentos da vida. À minha querida mãe Rosana Fátima de Freitas pelo amor incondicional, pelos conselhos de todas as horas e pelas sempre sábias palavras em todos os momentos nos quais eu precisei de sua ajuda naquilo que eu não soube lidar. Ao meu amado pai Sérgio Augusto de Freitas pela sincera amizade, apoio e amor em toda minha vida, bem como pelo seu exemplo de homem no qual eu sempre me espelhei para seguir nos meus caminhos. Às minhas irmãs Rafaela Luize de Freitas e Cynthia Yasmin de Freitas, pelas quais tenho o mais profundo amor nesta vida, pelo companheirismo, pelos aprendizados que me proporcionam a cada dia, pelas confidências e pela certeza de que estaremos sempre unidos nesta vida.

Ao professor Paulo de Matos Pimenta pela confiança em mim depositada para realização deste trabalho, bem como pela sua orientação e ajuda nos momentos de necessidade para o desenvolvimento do trabalho aqui explicitado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (PPGEC) por permitir integrar este grupo e desenvolver o trabalho.

Aos professores do PPGEC pelo conhecimento transmitido.

A todos os amigos que passaram nesta trajetória e contribuíram de alguma forma em vários aspectos em minha vida.

Não sabendo que era impossível, ele foi lá e fez.

Jean Cocteau

RESUMO

Sabe-se que na Engenharia há uma larga utilização de uma gama de materiais (concreto, aço, compósitos, solos etc.), os quais, de forma prática são analisados macroscopicamente naquilo que diz respeito a diversos fatores que influem no seu comportamento, como por exemplo, resistência, módulo de elasticidade, rigidez, dentre outras características. No entanto, estes materiais, em sua maioria heterogêneos, possuem tais comportamentos intrinsicamente relacionados à sua estrutura microscópica, a qual nos mostra que um material é o resultado de uma grande combinação de elementos dentro de sua composição, os quais irão reger tais propriedades. Os materiais podem ser estudados em diversas escalas, a qual dependerá do nível de detalhamento a ser atingido, de tal modo que a mesma pode variar desde o meio particulado até seu meio atômico. Uma das principais vantagens dos modelos multi-escala é a visualização, por parte do analista, das interações entre os constituintes do compósito, o que permite um melhor entendimento do comportamento do material e dos fenômenos de deterioração que ocorrem nas escalas menores e que determinam o comportamento da estrutura na escala maior. O objetivo do presente trabalho é fornecer uma revisão da aplicação de tais modelos, bem como estudar tais elementos diferenciais do material, em sua individualidade (como um meio contínuo), para então, através de um volume representativo, determinar as propriedades do material heterogêneo através de um modelo, representando assim o comportamento do conjunto de tais elementos, de tal modo a se tornar possível a avaliação dos impactos de eventuais mudanças em cada elemento no comportamento do material.

Palavras-chave: Multi-Escala. Mecânica do Contínuo. Modelagem Computacional. Método dos Elementos Finitos. Comportamento Constitutivo.

ABSTRACT

It is known that in Engineering there is a wide use of a range of materials (concrete, steel, composites, soils, etc.), which are practically analyzed macroscopically with respect to several factors that influence their behavior, such as for example, strength, modulus of elasticity, rigidity, among other characteristics. However, these materials, mostly heterogeneous, possess such behaviors intrinsically related to their microscopic structure, which shows us that a material is the result of a great combination of elements within its composition, which will govern such properties. The materials can be studied at various scales, which will depend on the level of detail being reached, such that it can vary from the particulate medium to its atomic medium. One of the main advantages of multi-scale models is the analyst's visualization of the interactions between the constituents of the composite, which allows a better understanding of the behavior of the material and of the deterioration phenomena occurring in the smaller scales that determine the behavior on the larger scale. The objective of the present work is to provide a review of the application of such models, as well as to study such differential elements of the material, in their individuality (as a continuous medium), to then, through a representative volume, determine the properties of the heterogeneous material through of a model, thus representing the behavior of the set of such elements, so as to make possible the evaluation of the impacts of eventual changes in each element in the behavior of the material.

Key-words: Multi-Scale. Mechanical Continuous. Computational modeling. Finite Element Method. Constitutive Behavior.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO, EVR 25
FIGURA 2 – ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (EVR) 26
FIGURA 3 – MICROESTRUTURA DE UM AÇO COM UM POSSÍVEL MODELO PARA O EVR 28
FIGURA 4 – MAPEAMENTO DE ELEMENTOS VETORIAIS LINEARES E VOLUMÉTRICOS INFINITESIMAIS A PARTIR DA REFERÊNCIA À CONFIGURAÇÃO ATUAL NA MACROESCALA. 29
FIGURA 5 – MAPEAMENTO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS INFINITESIMAIS A PARTIR DA COORDENADA ORIGINAL PARA A CONFIGURAÇÃO ATUALIZADA. 31
FIGURA 6 – MODELO DE *REUSS* 41
FIGURA 7 – MODELO DE *VOIGT* 42
FIGURA 8 – ELEMENTO DE PLACA TRIANGULAR CKZ 63
FIGURA 9 – MICROESTRUTURA ARTIFICIAL COM DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS: a) 140 b) 292 c) 558 e D) 970 ELEMENTOS TRIANGULARES COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS ANSATZ 66
FIGURA 10 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES $\sigma 12$ EM $F12 = 0{,}1$ PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES: a) 140 b) 292 c) 558 e D) 970 ELEMENTOS. 67
FIGURA 11 – TENSÃO DE *CAUCHY* VERSUS DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO: a) $\sigma 12$ VERSUS $F12$ PARA AS FASES INDIVIDUAIS E b) $\sigma 12$ VERSUS $F12$ PARA AS QUATRO DENSIDADES DE MALHA 67
FIGURA 12 – ERRO RELATIVO $e\sigma 12$ PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES NA MICROESCALA EM RELAÇÃO AO MELHOR NÍVEL DE DISCRETIZAÇÃO(970 ELEMENTOS) 68
FIGURA 13 – DISTRIBUIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EQUIVALENTES α NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $F12 = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $F12 = -0{,}1$ NO 1° CC c) $F12 = 0{,}1$ NO 2° CC d) $F12 = -0{,}1$ NO 2° CC e) $F12 =$

$0{,}1$ NO 3° CC. A INCLUSÃO DA FASE É APAGADA DEVIDO AO SEU COMPORTAMENTO PURAMENTE ELÁSTICO. f) TENSÃO DE CAUCHY $\sigma 12$ VERSUS $F12$ PARA AS FASES 70
FIGURA 14 – A DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CAUCHY $\sigma 12$ NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA a) $F12 = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $F12 = -0{,}1$ NO 1° CC c) $F12 = 0{,}1$ NO 2° CC d) $F12 = -0{,}1$ NO 2° CC e) $F12 = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO MACROSCÓPICA DE *CAUCHY* $\sigma 12$ VERSUS $F12$ OBTIDO COM TODOS OS NÍVEIS MICROSCÓPICOS DE DISCRETIZAÇÃO 71
FIGURA 15 – DISTRIBUIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EQUIVALENTES α NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $F12 = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $F12 = -0{,}1$ NO 1° CC c) $F12 = 0{,}1$ NO 2° CC d) $F12 = -0{,}1$ NO 2° CC e) $F12 = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO DE CAUCHY $\sigma 12$ VERSUS $F12$ PARA AS FASES INDIVIDUAIS 73
FIGURA 16 – A DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CAUCHY $\sigma 12$ NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $F12 = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $F12 = -0{,}1$ NO 1° CC c) $F12 = 0{,}1$ NO 2° CC d) $F12 = -0{,}1$ NO 2° CC e) $F12 = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO DE CAUCHY $\sigma 12$ VERSUS $F12$ OBTIDO COM TODOS OS NÍVEIS MICROSCÓPICOS DE DISCRETIZAÇÃO 74
FIGURA 17 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS USADAS NA DETERMINAÇÃO DO EVR 75
FIGURA 18 – MÓDULO DE RELAXAÇÃO PARA OS ELEMENTOS DE VOLUME SELECIONADOS 76
FIGURA 19 – FUNÇÃO FLUÊNCIA DO MASTIQUE E A CURVA MESTRA 77
FIGURA 20 – FUNÇÃO FLUÊNCIA DO MASTIQUE E A CURVA MESTRA 78
FIGURA 21 – MÓDULO DE RELAXAÇÃO DA AAUQ 79
FIGURA 22 – PROCESSO DE TRANSIÇÃO ENTRE DANO E FRATURA 80

FIGURA 23– CURVAS TENSÃO X DEFORMAÇÃO NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS 81
FIGURA 24 – CONFIGURAÇÃO DO EVR PARA A TAXA DE $0{,}0005/s$ 82
FIGURA 25 – CONFIGURAÇÃO DO EVR PARA A TAXA DE $0{,}001/s$ 82
FIGURA 26– MALHA USADA NA SIMULAÇÃO DO ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL 83
FIGURA 27– RESPOSTAS NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ 84
FIGURA 28 – RESPOSTAS NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS PARA A TAXA DE $0{,}4\ mm/s$ 84
FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES HORIZONTAIS, σXX, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (a) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (b) 85
FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES HORIZONTAIS, σyy, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (a) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (b) 85
FIGURA 31 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES CISALHANTES, τxy, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (a) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (b) 86
FIGURA 32 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$: (a) HORIZONAIS DE TRAÇÃO; (b) HOTIZONTAIS DE COMPRESSÃO; (c) VERTICAIS E (d) CISALHANTES 87
FIGURA 33 – ELEMENTO ESCOLHIDO EM TRÊS REGIÕES DE SOLICITAÇÕES DISTINTAS 88
FIGURA 34 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO A PARA (a) $t = 7\ s$; (b) $t = 8{,}5\ s$ E (c) $t = 10\ s$ 88
FIGURA 35 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO B PARA (a) $t = 7\ s$; (b) $t = 8{,}5\ s$ E (c) $t = 10\ s$ 89
FIGURA 36 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO C PARA (a) $t = 7\ s$; (b) $t = 8{,}5\ s$ E (c) $t = 10\ s$ 89

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CONDIÇÕES DE CONTORNO E RESTRIÇÃO.....41
TABELA 2 – PARÂMETROS DOS MATERIAIS DA MATRIZ DE FASE.....69
TABELA 3 – PARÂMETROS DOS MATERIAIS DA MATRIZ DE FASE.....72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 18
1.1 OBJETIVOS 19
1.1.1 Objetivo Geral 19
1.1.2 Objetivos Específicos 19
1.2 JUSTIFICATIVA 20
1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO 20
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO 21
2 REVISÃO DA LITERATURA 21
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 23
3.1 MULTIESCALA 24
3.1.1 Definição de um Elemento de Volume Representativo (EVR) 27
3.1.2 Problema de Valor de Contorno da Macroescala 29
3.1.3 Problema de Valor de Contorno da Microescala 31
3.1.4 Macro Variáveis e Contrapartes Microscópicas 33
3.1.5 Condição de Macro Homogeneidade 38
3.1.6 Condição de contorno na microescala 39
3.2 TRATAMENTO ALGORÍTMICO 43
3.2.1 Problemas de Valores de Contorno da Macro e Microescala 43
3.2.2 Determinação do Módulo Algorítmico Consistente Geral 48
3.2.3 Problemas de Estabilidade em Diferentes Escalas 52
3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 57
3.3.1 Elementos Finitos baseado na Teoria de *Kirchhoff* 59
4 APRESENTAÇÃO DE ESTUDOS REALIZADOS 65
4.1 TESTE DE CISALHAMENTO: ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES RVE'S 65
4.2 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MISTURAS ASFÁLTICAS 75
4.2.1 Determinação do EVR 75
4.2.2 Propriedades Viscoelásticas 76
4.2.3 Verificação e Validação do Modelo Multi-Escala 83
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 90
5.1 RESUMO E CONCLUSÕES 90

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....92
REFERÊNCIAS.....93

1 INTRODUÇÃO

Os parâmetros de projeto utilizados em engenharia estão ligados ao conhecimento dos materiais com os quais se está trabalhando, de tal modo que se torna de suma importância a correta determinação dos mesmos para um projeto eficaz, com segurança e economia (algumas das principais premissas da engenharia). Ainda, o conhecimento refinado do comportamento de um material, permite até mesmo a determinação de tipos de solução de engenharia para determinadas problemáticas, vide exemplos em geotecnia como soluções em contenções, fundações, tratamento de solos e dentre outros mais.

Assim, modelos têm sido formulados com base na teoria da elasticidade, na teoria da plasticidade e, mais recentemente, na Mecânica do Dano, cada qual fornecendo respostas coerentes desde que a situação estudada proporcione um comportamento do material adequado com a teoria proposta. As simplificações relativas à natureza da análise e ao comportamento físico dos materiais podem não reproduzir fidedignamente a realidade, uma vez que o comportamento de uma estrutura pode mudar em decorrência dos efeitos dinâmicos e da degradação de suas fases constituintes.

Dentro deste contexto, podem-se apresentar os modelos de homogeneização, os quais fazem parte de um campo relativamente novo na engenharia, estando novamente em pauta de pesquisas na última década.

Os mesmos se propõem a realizar a discretização de materiais (os quais são heterogêneos), estudando-os em suas diferentes fases e de forma separada, tratando-os como meios contínuos e levando em consideração as diferentes propriedades mecânicas de cada fase.

A premissa para o estudo das diferentes fases em separado se baseia na homogeneização do meio contínuo através de equações governantes de fases individuais, levando em conta sua geometria e equações constitutivas. Sob esta premissa, segundo Fish (2014), a homogeneização fornece uma estrutura matemática, através da qual as equações de escala macroscópica podem ser deduzidas a partir das equações numa escala precisa (microscópica) bem definida. Um dos principais benefícios da homogeneização é de que o comportamento de um material heterogéneo pode ser determinado, pelo menos em teoria, sem recorrer a testes potencialmente caros, promovendo economia e

refinados resultados de comportamento, bem como rápidas respostas, o que é premissa básica para as tomadas de decisões na engenharia.

Portanto, através da homogeneização de um meio continuo podemos prever as propriedades multiaxiais completas e respostas de materiais heterogêneos, que são muitas vezes anisotrópicas, sendo que tais propriedades são muitas vezes difíceis de medir experimentalmente. Segundo Babuska (1976), equações de escala macroscópica podem ser aprimoradas a partir de equações numa escala microscópica, então, para a realização da descrição do material, definem-se duas diferentes escalas, a escala macroscópica (escala grosseira) e a escala microscópica (escala refinada), sendo esta última, obtida através da definição de um volume representativo do elemento (EVR) ou um elemento de volume estatisticamente homogéneo, a precursora do estudo do comportamento do material como um todo.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem por objetivo conceituar o modelo multiescala, bem como apresentar exemplos de sua aplicação em diferentes problemas, tomando como base os trabalhos desenvolvidos por Souza (2005) e Schröder (2014).

1.1.2 Objetivos Específicos

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

a) Compreender a discretização do meio contínuo de modo sistemático, considerando os efeitos da degradação do material;
b) Comparar os resultados das simulações com resultados numéricos e experimentais, conforme o trabalho de Souza (2005);
c) Elucidar a teoria de homogeneização do meio contínuo através da multi-escala;

d) Conceitualizar o Método dos Elementos Finitos (MEF) para aplicar na solução do problema.

1.2 JUSTIFICATIVA

Nas últimas décadas os projetos desenvolvidos pela engenharia têm sua complexidade cada vez maior bem como exigem cada vez mais estudos refinados e soluções rápidas e que garantam qualidade em sua concepção, sendo isto possibilitado principalmente devido às técnicas executivas, os materiais aplicados na construção e a evolução das ferramentas computacionais, permitindo que engenheiros disponham de uma gama de alternativas no que concerne às análises de comportamento de materiais, por exemplo.

Tendo em vista a interface entre o grande número de elementos de diferentes características utilizados na engenharia, torna-se de suma importância a avaliação físico mecânica de tais componentes, a fim de determinar o comportamento destes materiais e a sua compatibilidade com a utilização ou solução de engenharia adotada.

Tal panorama, por sua vez, compreende também o estudo dos solos que pode ser abordado com a temática explicitada no presente estudo, sendo este o material mais largamente utilizado e com maior interferência na estabilidade de estruturas concebidas pela engenharia civil, tendo em vista este ser, em geral, a base destas.

Consequentemente, o emprego de modelos mais realistas, que proporcionem uma melhor representação do comportamento mecânico dos materiais, se fazem necessários para analises rápidas, de baixo custo e que proporcionem soluções mais conscientes.

1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

O presente trabalho foi desenvolvido pressupondo algumas simplificações teóricas e limitações como:

a) Utiliza-se apenas elemento finito bidimensional;

b) A microestrutura é caracterizada por parâmetros estáticos próprios e, em seguida, substituída por uma célula unitária;
c) Os elementos multi-escala possuem comportamento constitutivo viscoelástico linear e anisotrópico;
d) Este estudo se trata de uma revisão da fundamentação teórica envolvida nos assuntos abordados.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A dissertação foi estruturada em cinco capítulos, de forma a sintetizar e descrever as atividades desenvolvidas para cumprir com os objetivos propostos. Uma descrição sumária de cada um destes capítulos é realizada a seguir:

No Capítulo 1 é realizada uma introdução geral do trabalho, procurando contextualizar e justificar o assunto abordado, assim como os objetivos gerais e específicos e a organização do trabalho.

No Capítulo 2 apresenta-se a síntese bibliográfica de trabalhos que abordam temas relevantes para a análise em questão e que serviram de base para as considerações adotadas nesta dissertação.

No Capítulo 3 apresentam-se os conceitos básicos de Método dos Elementos Finitos (MEF) e também de homogeneização, bem como algumas abordagens teóricas deste último, embasando o capitulo posterior.

O Capítulo 4 trata de exemplos numéricos do modelo abordado.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas nesta pesquisa, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Mesmo sendo uma abordagem relativamente recente, o embasamento da modelagem multi-escala vem sendo estudado a algumas décadas, de tal modo que a fundamentação se encontra estabelecida na literatura. Um exemplo claro, pode ser visto no trabalho de Molina (2007), uma vez que a homogeneização consiste na transição entre propriedades microscópicas e as suas correspondentes à macroescala. Utilizada para um simples cálculo do

módulo de elasticidade em materiais compósitos, onde se encontra implícita a regra das misturas, como são exemplos os trabalhos de Hill (1963) e Hashin (1983).

Em meados da década de 90, tivemos a introdução dos métodos de multi-escala. Sendo que em Guedes e Kikuchi (1990) é apresentado um método de homogeneização para um material com uma microestrutura periódica, e em Nemat-Nasser (1999) utiliza-se a homogeneização em um elemento de volume representativo (EVR).

Em Hou e Wu (1996), é mostrado um estudo sobre um modelo multi-escala utilizado conjuntamente com Método dos Elementos Finitos (MEF), onde objetiva-se a resolução de problemas de materiais compósitos bem como o escoamento em meios porosos, o que é altamente complexo devido às heterogeneidades dos materiais, que proporciona inúmeros graus de liberdade para resolução. Propondo a construção de uma base de funções com elementos finitos para capturar as informações de microescala de cada elemento, conseguindo desta forma avaliar o efeito para a macroescala.

Mais recentemente, Miehe e Koch (2002) propõem-se algoritmos e representações matriciais para o cálculo das tensões homogeneizadas e do módulo tangente global, em pequenas deformações, e dando continuidade, Miehe (2003) expandiu a análise às grandes deformações. Uma estratégia de segunda ordem é proposta por Kuznetsova *et. al.* (2004). Em Souza Neto e Feijóo (2006), apresentam uma formulação geral de primeira ordem para modelos multi-escala, para pequenas e grandes deformações, e a respectiva formulação para elementos finitos.

Em Pellegrino *et. al.* (1999), utiliza-se uma técnica de homogeneização para compósitos periódicos na obtenção de superfícies de cedência, onde o dano, evolução do volume de vazios frente à uma solicitação, é avaliada através de um EVR. Em Giusti *et al.* (2009) é utilizada a análise multi-escala para obter superfícies de cedência, simulando a presença de dano, que são comparadas com as dadas pelo modelo constitutivo de dano de *Gurson*.

Em Lopes (2013), são feitas análises da representatividade do comportamento real de materiais, na ocorrência de dano, com uma abordagem de multi-escala onde fatores do comportamento microscópico são levados em consideração na resposta global da escala macroscópica. Sabendo-se que há

modelos constitutivos que levam em consideração as variáveis de dano, como é o caso do modelo de Gurson (1977), o trabalho buscou realizar uma abordagem multi-escala a fim de avaliar os defeitos na microestrutura do material e propor melhorias no modelo em questão na resposta macroscópica.

Em Reis e Pires (2013) é feito um estudo de estratégias que permitam aumentar a robustez e eficiência da aplicação do método de *Newton-Raphson* na resolução de problemas multi-escala.

Andrade (2018) avalia o emprego da homogeneização na modelagem de compósitos de matriz metálica (CMM), verificando a potencialidade de utilizar tal metodologia para aprimoramento de compósitos que possam ser utilizados na engenharia, para tanto, é feita a análise da microestrutura destes materiais, onde o processo dissipativo de plastificação da matriz (representado pelo modelo de plasticidade de *Von Misses*) e o deslocamento da interface da matriz e inclusão (representado por modelo constitutivo baseado na Mecânica da Fratura) são modelados através de uma análise do processo de homogeneização na microestrutura. Utilizam-se o conceito de elemento de volume representativo (EVR), para descrever a microestrutura, juntamente com o Método dos Elementos Finitos, são avaliados o comportamento macromecânico do material.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção serão apresentados fundamentos teóricos acerca do Método dos Elementos Finitos (MEF) e multi-escala com a finalidade de elucidar o modelo aqui apresentado. Posteriormente, analisa-se o comportamento mecânico de um material genérico englobando tais assuntos abordados.

3.1 MULTIESCALA

O aprofundamento das linhas de pesquisa científica, bem como o desenvolvimento de novas tecnologias possibilitaram análises de fenômenos anteriormente desconhecidos e necessários ao entendimento da realidade em vários problemas de engenharia.

Evidentemente, a maioria dos problemas reais analisados pela engenharia, física, química, entre outras, faz uso de alguma simplificação, mesmo em análises mais complexas desenvolvidas em pesquisas científicas. Porém, as simplificações feitas devem ser capazes de representar bem as respostas reais dos problemas.

Alguns parâmetros característicos, utilizados nos projetos de engenharia, são intrínsecos aos materiais empregados. No entanto, há uma grande dificuldade em formular uma lei constitutiva que descreva de forma geral o comportamento de um material para qualquer tipo de solicitação. Um material passará por diferentes estados para determinados limites de solicitações, sendo este regido por diferentes teorias para tais limites, como as teorias da elasticidade para certo limite e a teoria da plasticidade, cada uma coerente ao comportamento estudado, porém nunca são suficientemente gerais.

Materiais heterogêneos como, por exemplo, compósitos, concreto, espumas sólidas, solos e poli cristais, compõe-se de distintos constituintes ou fases, que apresentam diferentes características mecânicas e propriedades de transporte. A premissa de homogeneização do contínuo é que as equações governantes das fases individuais, incluindo geometrias e equações constitutivas, são melhor compreendidas em uma escala refinada ou mais adequadas do que em uma fase com escala mais ampla. O benefício da homogeneização tem como consequência o comportamento de materiais heterogêneos definidos, em geral, sem a necessidade de recorrer a ensaios potencialmente caros.

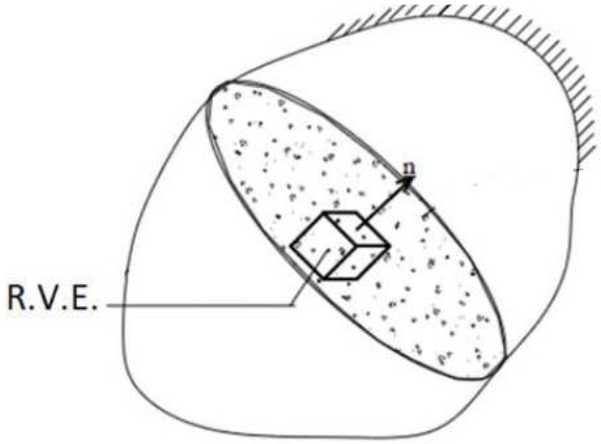
Com a homogeneização do contínuo pode-se prever as propriedades multiaxiais e o comportamento mecânico para materiais heterogêneos, os quais são frequentemente anisotrópicos. Tais propriedades, geralmente, possui um alto grau de complexidade para serem verificadas experimentalmente e até

mesmo modeladas computacionalmente. Deste modo, tal conjectura torna-se notável para a descrição de danos ou falha de materiais.

Ao longo das últimas duas décadas, o comportamento de materiais heterogêneos vem sendo tratado sob diversas concepções numéricas que visam aprimorar a teoria de homogeneização clássica. Tal aperfeiçoamento do modelo pode ser encontrado em (TERADA e KIKUCHI, 1995) e (MATSUI *et. al.*,2004). Estes procedimentos são designados como métodos de *upscaling*.

Considere-se um sólido do qual é retirado um elemento de volume representativo, EVR. Entende-se por “representativo” um elemento com dimensões suficientemente grandes para considerar a distribuição de compósitos e suficientemente pequeno para ser considerado como um ponto material do contínuo. Ou seja, espera-se que o elemento seja estatisticamente representativo do meio. A FIGURA 1 ilustra este cenário.

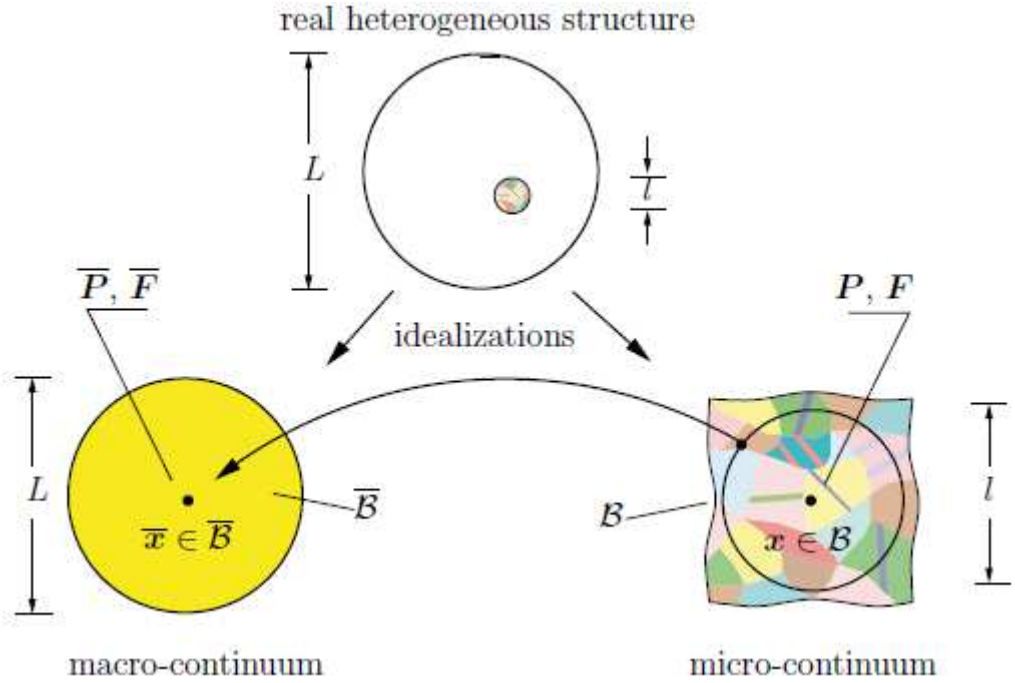
FIGURA 1 – ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO, EVR



FONTE: O autor (2018).

Para a análise microscopia de materiais heterogêneos, a transição entre a macroescala e a microescala é ilustrada conforme a FIGURA 2. A homogeneização da microescala para a macroescala, a partir da discretização por elementos finitos, permite a avaliação dos problemas de valor de contorno macroscópicos admitindo o EVR.

FIGURA 2 – ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (EVR)



FONTE: Schröder (2014).

em que $\bar{P}$ representa o primeiro tensor de macroscópico de *Piola-Kirchhoff*, $\bar{F}$ o gradiente de deformação, enquanto as grandezas microscópicas são P e F, respectivamente (SCHRÖDER *et. al.*, 2010).

A fim de homogeneizar em duas dimensões os problemas mecânicos, têm-se como hipóteses fundamentais:

- Balizamento de um EVR e a determinação das condições de contorno apropriadas. Para o problema de valor do contorno tais condições não são definidas, geralmente. Assim, utiliza-se derivações da condição de *Hill-Mendel*, as quais equiparam o trabalho virtual macroscópico com o trabalho virtual médio realizado dentro do EVR;
- Discretização do problema de valor do contorno microscópico;
- Discretização do problema de valor do contorno macroscópico.

A principal vantagem de um delineamento bidimensional de homogeneização direta é o fato de não haver a necessidade de definir uma lei constitutiva fenomenológica macroscópica, ou seja, é feita a substituição por

médias adequadas sobre o EVR. No entanto, atribui-se modelos constitutivos para as fases individuais na escala refinada. Se as distribuições locais de deformação e tensão no EVR forem computadas, pode-se determinar suas contrapartes macroscópicas por integrais de superfície ou de volume para um EVR. Desta forma, o procedimento numérico descrito baseia-se nas etapas subsequentes:

a) Localização – Problema de valor do contorno na microescala: cálculo da distribuição local da tensão e da deformação no EVR, resolvendo a forma fraca do equilíbrio do momento linear.
b) Homogeneização: cálculo das grandezas macroscópicas. Como a determinação do primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff*, por exemplo.
c) Problema de valor do contorno na macroescala: resolver a forma fraca de equilíbrio do momento linear na escala grosseira.

Estas etapas devem ser repetidas até que a convergência em ambas as escalas seja obtida.

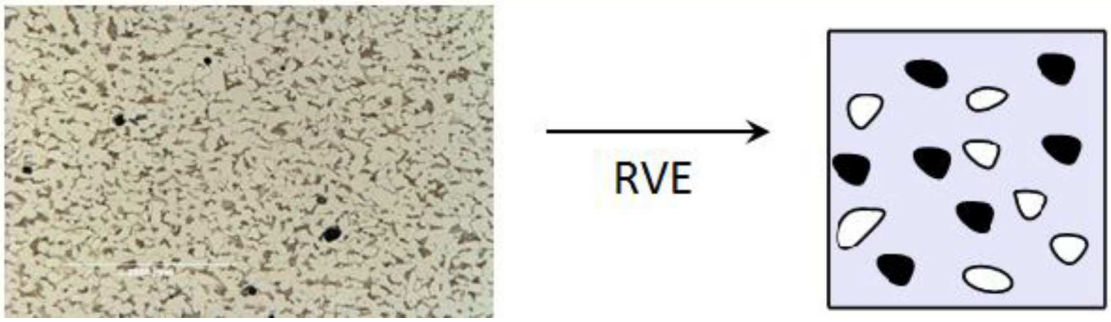
3.1.1 Definição de um Elemento de Volume Representativo (EVR)

Um Elemento de Volume Representativo (EVR) é utilizado para descrever a microestrutura do material, estando associado a um ponto no problema macroscópico, e sendo assim uma forma prática de lidar com as propriedades do material ao nível microscópico, que têm influência no seu comportamento global.

A informação relativa à microestrutura armazenada nos EVR depende da escolha da sua dimensão. Se forem utilizados EVR de dimensão tal que apenas uma parte das heterogeneidades presentes seja captada, a microestrutura não é corretamente caracterizada. Um EVR deve ser estatisticamente representativo, isto é, deve ter uma dimensão que inclua o maior número possível de heterogeneidades que representa em termos médios

a microestrutura do material. Na FIGURA 3 é apresentada a microestrutura de um aço e um possível EVR caracterizando a matriz, a segunda fase e inclusões.

FIGURA 3 – MICROESTRUTURA DE UM AÇO COM UM POSSÍVEL MODELO PARA O EVR



FONTE: Lopes (2013).

Comparativamente com o comprimento característico do domínio do problema global, o tamanho do EVR deve ser muito menor. Assim, pode-se dizer que o tamanho do EVR deve ser muito superior ao comprimento característico das heterogeneidades presentes na microestrutura, mas muito inferior ao comprimento característico do domínio macroscópico:

Este é o princípio de separação de escalas, introduzido em Hashin (1983). Para que se garanta a condição de continuidade, o tamanho do EVR deve também ser muito superior à escala das estruturas atómicas.

Em Zeman (2003), várias propriedades para a definição de um EVR, feita a partir da literatura, encontram-se resumidas:

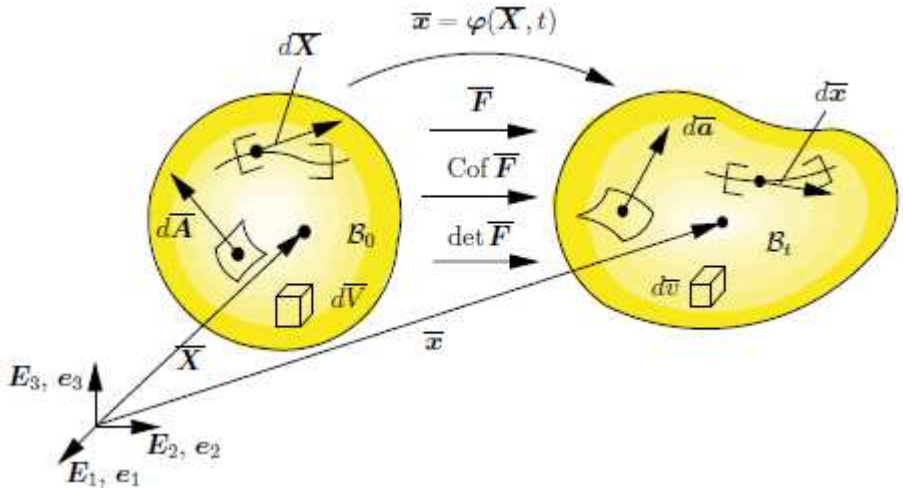
- Hill (1963): “Esta frase (o EVR) será utilizada quando se refere a uma amostra que (a) é estruturalmente inteiramente típico de toda a estrutura em média, e (b) contém o número suficiente de inclusões para os módulos globais aparentes para ser efetivamente independente do valor de tração de superfície e de deslocamento, desde que esses valores sejam ‘Macroscopicamente uniformes’.”.

- Drugan e Willis (1996): “O EVR é o menor volume de material do elemento do compósito para os quais os habituais ‘módulos globais’ espacialmente constantes de representação macroscópica constitutiva sejam um modelo suficientemente preciso para representar a resposta média constitutiva.”.

3.1.2 Problema de Valor de Contorno da Macroescala

Admitindo a configuração de referência para o corpo de interesse na escala macroscópica $\overline{\mathrm{B}}_0 \subset R^3$ parametrizado em $\bar{X}$, a relação da deformação não linear macroscópica é denotada como $\bar{\varphi}_t(\bar{X})$. Desta forma, permite-se mapear partículas com relação à coordenada original $\bar{X}$ para a descrição espacial $\bar{x}$ correntemente ocupada pela partícula material em meio contínuo $\overline{\mathrm{B}}_t$, conforme evidenciado na FIGURA 4.

FIGURA 4 – MAPEAMENTO DE ELEMENTOS VETORIAIS LINEARES E VOLUMÉTRICOS INFINITESIMAIS A PARTIR DA REFERÊNCIA À CONFIGURAÇÃO ATUAL NA MACROESCALA.



FONTE: Schröder (2014).

A grandeza da deformação fundamental é o gradiente de deformação microscópica definido por

$$\bar{F}(\bar{X}) = Grad_{\bar{X}}\bar{\varphi}_t(\bar{X}) \qquad \text{com} \qquad \bar{F}^a_A = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{X}^A} \tag{1}$$

em que mapeia elementos macroscópicos lineares infinitesimais $d\bar{X}$ da descrição material para a descrição espacial, ou seja

$$d\bar{x} = \bar{F}d\bar{X} \tag{2}$$

Sejam $d\bar{A} = \bar{N}d\bar{A}$ e $d\bar{a} = \bar{n}d\bar{a}$ elementos vetoriais de área infinitesimal cuja correspondência à configuração de referência e à atual, respectivamente, a transformação entre as grandezas fica

$$d\bar{a} = [Cof\bar{F}]d\bar{A} \qquad \text{com} \qquad Cof\bar{F} = \bar{J}\bar{F}^{-T} \tag{3}$$

Empregando a fórmula de *Nanson* (SCHRÖDER *et. al.*, 2010) e a abreviatura $\bar{J} = det\bar{F}$ para seus determinantes jacobianos, a associação entre os elementos macroscópicos de volume infinitesimal $d\bar{V}$ e $d\bar{v}$, respectivamente, *Lagrangeano* e *Eulereano*, é dada

$$d\bar{v} = \bar{J}d\bar{V} \tag{4}$$

Para uma dimensão de deformação compatível, introduz-se o tensor de deformação macroscópico direito de *Cauchy-Green*

$$\bar{C} = \bar{F}^T\bar{F} \tag{5}$$

Assimilando o primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff*, consequentemente, as tensões de *Kirchhoff*, *Cauchy* e o segundo tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* podem ser escritos como

$$\tau = \bar{P}\bar{F}^T, \qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{\bar{J}}\bar{P}\bar{F}^T \qquad \text{E} \qquad \bar{S} = \bar{F}^{-1}\bar{P} \tag{6}$$

O equilíbrio de momentum linear na escala macroscópica, negligenciando os termos de aceleração, torna-se

$$Div_{\bar{X}}\bar{P} + \bar{f} = 0 \tag{7}$$

Conjuntamente, admitindo o equilíbrio macroscópico momentum linear, evidenciamos que

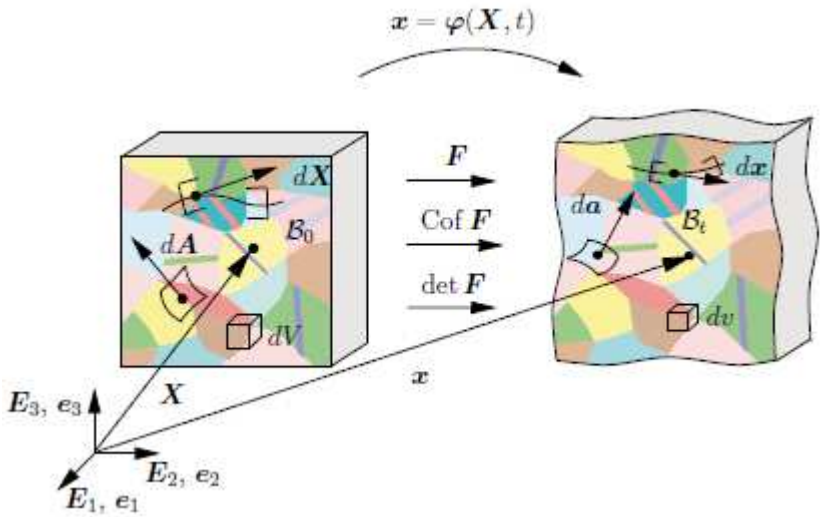
$$\bar{P}\bar{F}^T = \bar{F}\bar{P}^T \tag{8}$$

Assim, presume-se satisfeito a priori os requisitos de simetria, do método macroscópico, do tensor de tensão de *Kirchhoff*.

3.1.3 Problema de Valor de Contorno da Microescala

Analogamente, contrapondo com a elucidação das grandezas mecânicas na macroescala, parametriza-se a posição de referência do RVE na microescala $\overline{\mathrm{B}}_0 \subset R^3$ através de $\boldsymbol{X}$. A deformação não linear na microescala é conformada por $\varphi_t(\boldsymbol{X})$, o qual descreve a localização da partícula, em relação à coordenada original $\boldsymbol{X}$, sobre pontos $\boldsymbol{x}$ da localização atual B_t. A FIGURA 5 ilustra o modelo físico descrito.

FIGURA 5 – MAPEAMENTO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS INFINITESIMAIS A PARTIR DA COORDENADA ORIGINAL PARA A CONFIGURAÇÃO ATUALIZADA.



FONTE: Schröder (2014).

Desta forma, o gradiente de deformação microscópica pode ser escrito como

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = Grad_X \varphi_t(\boldsymbol{X}) \qquad \text{com} \qquad \bar{F}_A^a = \frac{\partial x^a}{\partial X^A} \tag{9}$$

em que mapeia elementos microscópicos lineares infinitesimais $d\boldsymbol{X}$ da descrição material para a descrição espacial, ou seja

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X} \tag{10}$$

A transformação dos elementos vetoriais de área infinitesimal, na configuração de referência, representada por $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}dA$, e para os elementos de área descrito com relação à posição no espaço, $d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}da$, são dados por

$$d\boldsymbol{a} = [Cof\boldsymbol{F}]d\boldsymbol{A} \qquad \text{com} \qquad Cof\boldsymbol{F} = J\boldsymbol{F}^{-T} \tag{11}$$

em que $J = det\boldsymbol{F}$. A associação entre os elementos microscópicos de volume infinitesimal dV e dv, respectivamente, é dado por

$$dv = JdV \tag{12}$$

Com medidas adicionais de deformação, introduz-se o tensor de deformação microscópico direito de *Cauchy-Green* e o tensor microscópico de *Finger*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \tag{13}$$

A partir do primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* $\boldsymbol{P}$, calcula-se as tensões microscópicas de *Kirchhoff*, *Cauchy* e o segundo tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff*

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{14}$$

O equilíbrio de momentum linear na escala macroscópica, negligenciando os termos de aceleração, torna-se

$$Div_X\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \qquad \text{ou} \qquad div_x\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

em que Div_X e div_x são, respectivamente, referentes a descrição *Lagrangeana* e *Eulereana*. A partir das Eqs. (15), definindo $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\sigma} Cof \boldsymbol{F}$ e aplicando a identidade de *Piola*

$$Div_X[Cof\boldsymbol{F}] = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

Conjuntamente, admitindo o equilíbrio momentum linear, evidenciamos que

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T \tag{17}$$

Assim, presume-se satisfeito a priori os requisitos de simetria do tensor de tensão de *Kirchhoff*.

3.1.4 Macro Variáveis e Contrapartes Microscópicas

O determinante $\bar{J}$ do gradiente de deformação macroscópica está relacionado à sua contraparte microscópica através das médias de volume (HILL, 1972)

$$\bar{J} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} J dV = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_t} dV = \frac{v}{V} \tag{18}$$

em que V e v denotam, respectivamente, os volumes de referência e o atualizado para o EVR. Supondo que em EVR, em sua localização de referência, tem-se um furo $\mathcal{L}_0$ com o contorno $\partial\mathcal{L}_0$. Desta forma, o volume médio de deformação do gradiente de deformação pode ser expresso como

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{F} dV = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} x \otimes \boldsymbol{N} dA + \frac{1}{V}\int_{\partial\mathcal{L}_0} x \otimes \boldsymbol{N} dA \tag{19}$$

Além disso, a média do volume para o primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* é representado pelas seguintes integrais de superfície

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{P}dV=\frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0}t_0\otimes\boldsymbol{X}dA+\frac{1}{V}\int_{\partial\mathcal{L}_0}t_0\otimes\boldsymbol{X}dA \tag{20}$$

com $t_0=\boldsymbol{PN}$ e um versor $\boldsymbol{N}$. Para obter-se uma correlação das grandezas macroscópicas, em termos de integrais sobre o EVR com configurações experimentais, estabelece o gradiente de deformação macroscópica e o primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* em integrais de superfície sobre o contorno do EVR.

$$\overline{\boldsymbol{F}}=\tfrac{1}{V}\textstyle\int_{\partial\mathrm{B}_0}x\otimes\boldsymbol{N}dA,\qquad \overline{\boldsymbol{P}}=\frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0}t_0\otimes\boldsymbol{X}dA \tag{21}$$

Analogamente, baseando-se nas correlações supracitadas, obtêm-se

$$\dot{\overline{\boldsymbol{F}}}=\tfrac{1}{V}\textstyle\int_{\partial\mathrm{B}_0}\dot{x}\otimes\boldsymbol{N}dA,\qquad \dot{\boldsymbol{P}}=\frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0}\dot{t}_0\otimes\boldsymbol{X}dA \tag{22}$$

Desta forma, negligenciando os buracos $\mathcal{L}_0$ as integrais de superfície Eq. (21) e Eq. (22) são idênticas às duas médias de volume. Assim sendo, as premissas semelhantes devem ser aplicadas quando são consideradas superfícies singulares (SCHRÖDER, 2000).

Para as manipulações algébricas subsequentes, introduz-se uma decomposição aditiva do gradiente de deformação microscópica com uma parcela constante e outra de flutuação, ou seja,

$$\boldsymbol{F}=\overline{\boldsymbol{F}}+\widetilde{\boldsymbol{F}} \tag{23}$$

Portanto, a integração da Eq. (23) sobre o elemento de volume representativo produz

$$\overline{\boldsymbol{F}}=\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{F}dV=\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\left(\overline{\boldsymbol{F}}+\widetilde{\boldsymbol{F}}\right)dV=\overline{\boldsymbol{F}}+\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}dV \tag{24}$$

A consequência da Eq. (24) dispõe a anulação da parcela flutuante das médias de volume, ou seja,

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}dV = 0 \tag{25}$$

Admitindo que a fração flutuante do gradiente de deformação microscópica pode ser calculada como $\widetilde{\boldsymbol{F}} = Grad_X\widetilde{w}$, onde $\widetilde{w}$ representa a parcela de flutuação do campo de deformação na microescala. Portanto, a seguinte condição é valida

$$\frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0}\widetilde{w}\otimes N dA = 0 \tag{26}$$

Correspondentemente em relação a decomposição do gradiente de deformação microscópico, estabelece-se uma decomposição aditiva do primeiro tensor de tensão microscópica de *Piola-Kirchhoff* com uma parcela constante e outra de flutuação, assim

$$\boldsymbol{P} = \overline{\boldsymbol{P}} + \widetilde{\boldsymbol{P}} \tag{27}$$

Portanto, a integração da Eq. (27) sobre o elemento de volume representativo gera

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{P}dV = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\left(\overline{\boldsymbol{P}} + \widetilde{\boldsymbol{P}}\right)dV = \overline{\boldsymbol{P}} + \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{P}}dV \tag{28}$$

acarretando em

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{P}}dV = 0 \tag{29}$$

Baseando-se na descrição do vetor de tração, $t_0 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N} = (\overline{\boldsymbol{P}} + \widetilde{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{N}$, institui-se como $t_0 = \bar{t}_0 + \tilde{t}_0$. Substituindo essas determinações na Eq. (21), obtêm-se

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} (\bar{t}_0 + \tilde{t}_0) \otimes \boldsymbol{X} dA \tag{30}$$

A partir da Eq. (30), deriva-se uma parcela da integral de superfície da qual a relação

$$\frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} \bar{t}_0 \otimes \boldsymbol{X} dA = \frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} (\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N}) \otimes \boldsymbol{X} dA = \overline{\boldsymbol{P}} \frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{X} dA \tag{31}$$

cuja a identidade $\frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{X} dA = 1$ resulta em

$$\frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} \bar{t}_0 \otimes \boldsymbol{X} dA = \overline{\boldsymbol{P}} \tag{32}$$

Consequentemente, a partir da Eq. (30), conclui-se que para uma condição de equilíbrio

$$\frac{1}{V}\int_{\partial \mathrm{B}_0} \tilde{t}_0 \otimes \boldsymbol{X} dA = 0 \tag{33}$$

se mantém. Na maior parte dos casos, grandezas macroscópicas distintas são definidas de transformações padrão a partir dos tensores de tensão macroscópicas e tensores de deformação.

Desta forma, as tensões macroscópicas de *Kirchhoff* $\bar{\tau}$ são determinados como

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{P}}\overline{\boldsymbol{F}}^T = \left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{P} dV\right)\left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{F} dV\right)^T \tag{34}$$

Analogamente, estabelece-se as tensões macroscópicas de *Cauchy* através da transformação

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J}\overline{\boldsymbol{P}}\overline{\boldsymbol{F}}^T = \frac{1}{J}\overline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{J}\left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{P}dV\right)\left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{F}dV\right)^T \tag{35}$$

Além disso, a definição do tensor macroscópico de *Cauchy-Green* consiste no produto entre o gradiente de deformação macroscópico e o seu transposto. Isto é

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{F}dV\right)^T\left(\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{F}dV\right) \tag{36}$$

Tendo em vista um simples volume médio do tensor de *Cauchy-Green*

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{C}dV = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}dV \tag{37}$$

implica, com a decomposição $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}$, a expressão

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\left(\overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}\right)^T\left(\overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}\right)dV\\ &= \overline{\boldsymbol{F}}^T\overline{\boldsymbol{F}} + \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}^T\widetilde{\boldsymbol{F}}dV + \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^T\overline{\boldsymbol{F}} + \overline{\boldsymbol{F}}^T\widetilde{\boldsymbol{F}}\right)dV\end{aligned} \tag{38}$$

Assim, a integral ao lado direito da Eq. (38) fica

$$\int_{\mathrm{B}_0}\left(\widetilde{\boldsymbol{F}}^T\overline{\boldsymbol{F}} + \overline{\boldsymbol{F}}^T\widetilde{\boldsymbol{F}}\right)dV = \overline{\boldsymbol{F}}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}^T dV + \overline{\boldsymbol{F}}^T\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}dV \tag{39}$$

Desta forma, o restante da Eq. (37) resulta em

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\boldsymbol{C}dV = \overline{\boldsymbol{F}}^T\overline{\boldsymbol{F}} + \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0}\widetilde{\boldsymbol{F}}^T\widetilde{\boldsymbol{F}}dV \tag{40}$$

Correspondendo com as Eqs. (34) e (35), e as médias de volume de τ e σ, em relação ao EVR com coordenadas de referência e atualizada, respectivamente, obtêm-se

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{\tau} dV \qquad , \qquad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_t} \boldsymbol{\sigma} dV \tag{41}$$

em que se mantém apenas para as condições geométricas características quanto às condições de contorno. Se tais condições forem atendidas, obtém-se para as tensões de *Kirchhoff* e, analogamente, para as tensões de *Cauchy* considerando a Eq. (15)

$$\frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{\tau} dV = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} \bar{t}_0 \otimes x dA \qquad , \qquad \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_t} \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_t} t \otimes x da \tag{42}$$

com $t = \sigma n$ e a unidade normal de externa n em $\partial\mathrm{B}_t$.

3.1.5 Condição de Macro Homogeneidade

Uma das relações significantes nos regimes de transição da microescala para a macroescala de macro homogeneidade (HILL, 1965; MANDEL, 1972). Para a configuração de deformação finita, temos

$$\bar{P} : \dot{\bar{\boldsymbol{F}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} t_0 \dot{x} dA \tag{43}$$

o qual dispõe

$$\frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} t_0 \dot{x} dA = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}) \dot{x} dA = \frac{1}{V}\int_{\partial\mathrm{B}_0} \boldsymbol{P} : \dot{x} \otimes \boldsymbol{N} dA \tag{44}$$

Aplicando o teorema quadratura de *Gauss*, obtemos

$$\int_{\partial \mathrm{B}_0} \boldsymbol{P}: \dot{x} \otimes \boldsymbol{N} dA = \int_{\mathrm{B}_0} Div_X[\dot{x}\boldsymbol{P}] dV = \int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{P}: (Grad_X \dot{x} + \dot{x} Div_X \boldsymbol{P}) dA \tag{45}$$

Sabendo a condição de equilíbrio para a média de volume, a partir da Eq. (15), dispomos

$$\bar{P}: \dot{\bar{\boldsymbol{F}}} = \frac{1}{V} \int_{\partial \mathrm{B}_0} \boldsymbol{P}: \dot{\boldsymbol{F}} dA \tag{46}$$

com $\dot{\bar{\boldsymbol{F}}}$=$Grad_X \dot{x}$. Percebe-se que a condição de macro homogeneidade é descrita como o volume médio do produto entre o primeiro tensor de tensão de *Piola-Kirchhoff* e o gradiente de deformação com o EVR parametrizado com coordenadas materiais.

3.1.6 Condição de contorno na microescala

Segundo Hill (1984), dispõe-se a seguinte identidade

$$\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}}\, dV - \bar{\boldsymbol{P}} : \dot{\bar{\boldsymbol{F}}} = \int_{\mathrm{B}_0} \left((\boldsymbol{P} - \bar{\boldsymbol{P}}) : \left(\dot{\boldsymbol{F}} - \dot{\bar{\boldsymbol{F}}} \right) \right) dV \tag{47}$$

Admitindo que o lado direito da Eq. (47) desaparece, o teorema do volume médio do produto, Eq. (46), é satisfeito. Desta forma, duas elucidações são obtidas para os ajustes

$$\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{P}} \quad \forall\, \mathbf{X} \in \beta_0 \qquad \text{ou} \qquad \dot{\boldsymbol{F}} = \dot{\bar{\boldsymbol{F}}}\ \forall\, \mathbf{X} \in \beta_0 \tag{48}$$

em que a primeira suposição das tensões constantes ao longo do EVR está associada com a estimativa de *Reuss*. Enquanto a segunda hipótese, estabelece o gradiente de deformação constante para a avaliação de *Voigh*. Continuamente, retrata-se as implicações em (48) com as condições de contorno restritas.

Pressupondo, para o lado direito da Eq. (47), a definição do gradiente de deformação microscópica, Eq. (9), e a relação $Grad_X X = 1$ faz-se

$$\int_{\mathrm{B}_0} (\boldsymbol{P} - \overline{\boldsymbol{P}}) : \left(Grad_X \dot{x} - \dot{\overline{\boldsymbol{F}}} Grad_X \boldsymbol{X}\right) dV \tag{49}$$

Empregando a condição de equilíbrio, $Div_X(\boldsymbol{P} - \overline{\boldsymbol{P}}) = 0$, e o teorema de *Cauchy*, $t_0 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}$, obtém-se a seguinte expressão equivalente a Eq.(49)

$$\int_{\mathrm{B}_0} (t_0 - \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N})\left(\dot{x} - \dot{\overline{\boldsymbol{F}}}\boldsymbol{X}\right) dA = 0 \tag{50}$$

As correlações descritas acima estão condicionadas para $\dot{\overline{\boldsymbol{F}}}$=$Grad_X \dot{x}$. No entanto podem ser aplicadas, também, para $\delta\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}$. Desta forma, pode-se substituir $\dot{\overline{\boldsymbol{F}}}$ por $\delta\overline{\boldsymbol{F}}$ e $\overline{\boldsymbol{F}}$, respectivamente. As condições de *Dirichlet* são definidas pela configuração do segundo termo da Eq. (48) igual à zero, conforme descrito

$$x = \overline{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{X} \quad \forall\, \boldsymbol{X} \in \partial\mathrm{B}_0 \tag{51}$$

Analogamente, impondo o primeiro termo da igualdade da Eq. (48) igual à zero, acarreta nas condições de contorno de *Neumann*

$$t_0 = \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N} \quad \forall\, \boldsymbol{X} \in \partial\mathrm{B}_0 \tag{52}$$

Para as derivadas das condições de contorno periódicas, decompõem-se o limite da microestrutura $\partial\mathrm{B}_0$ em duas partes associadas

$$\partial\mathrm{B}_0 = \partial\mathrm{B}_0^- \cup \partial\mathrm{B}_0^+ \tag{53}$$

Para cada ponto $X^+ \in \partial\mathrm{B}_0^+$, assume-se que há uma posição associada a $X^- \in \partial\mathrm{B}_0^-$ com unidades normais externas N^+ e N^-, respectivamente. Contanto que $\overline{\boldsymbol{F}}$, bem como X, presume-se serem variáveis conhecidas. Desta forma, definimos o campo de flutuação como

$$\widetilde{\omega} := x - \bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{X} \tag{54}$$

Assim, a condição de macro homogeneidade, descrita na Eq. (48), fica como

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \mathrm{B}_0} (t_0 - \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N})\, \widetilde{\omega} dA \\ &= \int_{\partial \mathrm{B}_0^+} (t_0^+ - \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N}^+)\, \widetilde{\omega}^+ dA + \int_{\partial \mathrm{B}_0^-} (t_0^- - \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N}^-)\, \widetilde{\omega}^- dA \end{aligned} \tag{55}$$

A TABELA 1 apresenta as condições de contorno, bem como as restrições para os modelos constitutivos.

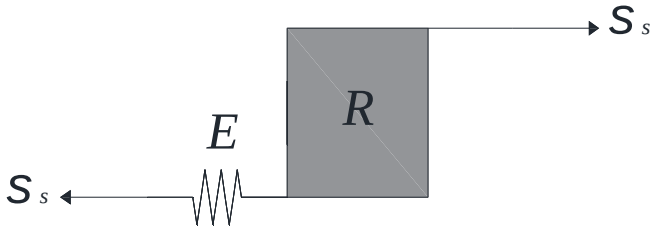
TABELA 1 – CONDIÇÕES DE CONTORNO E RESTRIÇÃO

Modelo Constitutivo	**Contorno**	**Condição**
Reuss	$P = \bar{P}$	$\forall\, X \in \mathcal{B}_0$
Voigt	$F = \bar{F}$	$\forall\, X \in \mathcal{B}_0$
Dirichlet bcs	$x = \bar{F}X$	$\forall\, X \in \partial\mathcal{B}_0$
Neumann	$t_0 = \bar{P}N$	$\forall\, X \in \partial\mathcal{B}_0$
Periodic bcs	$\widetilde{w} = x - \bar{F}X$ $\widetilde{w}^+ = \widetilde{w}^-$ ${t_0}^+ = -{t_0}^-$	$\forall\, X^+ \in \partial{\mathcal{B}_0}^+$ e $X^- \in \partial{\mathcal{B}_0}^-$

FONTE: Schröder (2014).

O modelo de *Reuss* é representado através da associação em série de uma mola e um elemento de inércia. A FIGURA 6 ilustra o modelo descrito.

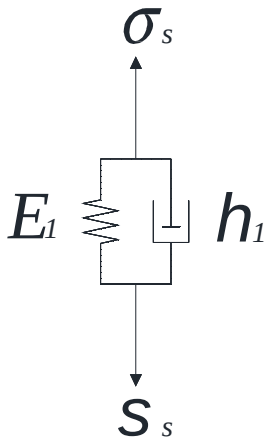
FIGURA 6 – MODELO DE REUSS



FONTE: O autor (2019).

O modelo de *Voigt*, constitui-se da associação em paralelo de uma mola e um amortecedor. A FIGURA 7 representa o modelo em questão.

FIGURA 7 – MODELO DE VOIGT



FONTE: O autor (2019).

Um campo de flutuação periódica é caracterizado por $\widetilde{\omega}^{+} = \widetilde{\omega}^{-}$ com pontos associados e com premissa essencial $\boldsymbol{N}^{+} = \boldsymbol{N}^{-}$, assim temos

$$\int_{\partial \mathrm{B}_0^{+}} \{(t_0^{+} - \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N}^{+})\, \widetilde{\omega}^{+} + (t_0^{-} - \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N}^{+})\, \widetilde{\omega}^{+}\}\, dA = \int_{\partial \mathrm{B}_0^{+}} (t_0^{+} - t_0^{-})\, \widetilde{\omega}^{+}\, dA \qquad (56)$$

em que a expressão será nula se $t_0^{+} = -t_0^{-}$.

Pode-se constatar que se os deslocamentos lineares produzem um limite superior e a uniformização de tensões um limite inferior do sistema homogeneizado, a escolha das condições de contorno influencia na resposta mecânica para muitos casos. Segundo Xia *et. al.* (2003) as condições de contorno homogêneas podem violar as condições de contorno de periodicidade.

Para uma média periódica, um curso natural da ação são condições de contorno periódicas. Eles podem ser realizados num formato forte, isto é, uma parte do limite discretizado do EVR (o limite de imagem, por exemplo, $\partial \mathrm{B}_0^{-}$) deve ser completamente espelhado para os nós da parte associada do limite (a imagem limite $\partial \mathrm{B}_0^{+}$).

3.2 TRATAMENTO ALGORÍTMICO

Nesta seção serão apresentadas o tratamento teórico e numérico com intuito de homogeneizar o domínio bidimensional discretizado, através do MEF ou mediante a caracterização da transição entre a micro e a macroescala. A solução numérica acoplada, para problemas de valor de contorno, tem um alto impacto em ambas as escalas. Especialmente na linearização da resposta macroscópica, o qual constata-se como parte crucial neste esquema numérico. A seguir, as aproximações das grandezas de campo serão indicadas pelo sobrescrito h, enquanto o domínio discretizado por x é indicado por x^h.

3.2.1 Problemas de Valores de Contorno da Macro e Microescala

O equilíbrio do momentum linear na macroescala, Eq. (7), pode ser escrito em sua forma fraca como

$$\bar{G} = -\int_{\bar{\mathrm{B}}_0} \delta\bar{x}\left(Div_{\bar{X}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{f}\right)dV \tag{57}$$

Admitindo $\bar{G} = 0$ no estado de equilíbrio, a aplicação da relação

$$\delta\bar{x}\, Div_{\bar{X}}\bar{P} = Div_{\bar{X}}[\delta\bar{x}\bar{P}] - Grad_{\bar{X}}\delta\bar{x} : \bar{P} \tag{58}$$

e a quadratura *Gaussiana,* tem-se a seguinte expressão modificada

$$\bar{G} = \underbrace{-\int_{\bar{\mathrm{B}}_0} \delta\bar{\boldsymbol{F}} : \bar{\boldsymbol{P}}\, dV}_{=:\,\bar{G}^{int}} - \underbrace{\left\{\int_{\bar{\mathrm{B}}_0} \delta\bar{x}\, \bar{f}\, dV + \int_{\partial\bar{\mathrm{B}}_0} \delta\bar{x}\, \bar{t}_0\, dA\right\}}_{=:\,\bar{G}^{ext}} \tag{59}$$

com $t_0 = \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{N}}$. Para a discretização do problema do valor de contorno macroscópico, aplicam-se as seguintes discretizações para as deformações real, virtual e incremental dentro de um elemento típico finito

$$\bar{x}^h = \bar{\boldsymbol{X}}^h + \mathbb{N}^{\boldsymbol{e}}\bar{d}, \qquad \delta\bar{x}^h = \mathbb{N}^{\boldsymbol{e}}\delta\bar{d} \qquad \text{e} \qquad \Delta\bar{x}^h = \mathbb{N}^{\boldsymbol{e}}\Delta\bar{d} \tag{60}$$

A matriz $\mathbb{N}^{\boldsymbol{e}}$ contém as clássicas funções de *Ansatz* e os vetores $\{\bar{d}, \delta\bar{d}, \Delta\bar{d}\}$, nas quais representam os deslocamentos nodais real, virtual e incremental. Assumindo que para as matrizes $\mathbb{B}^e$ estão incorporadas as derivadas parciais das funções de *Ansatz* com coordenadas materiais, desta forma, definem-se as aproximações dos tensores de deformação real, virtual e incremental, respectivamente

$$\bar{\boldsymbol{F}}^h = 1^h + \mathbb{B}^e\bar{d}, \qquad \delta\bar{F}^h = \mathbb{B}^e\delta\bar{d} \qquad \text{e} \qquad \Delta\bar{F}^h = \mathbb{B}^e\Delta\bar{d} \tag{61}$$

Assim, incorporando as aproximações dos campos virtuais, caracterizadas através das Eqs. (60) e (61), na Eq. (62), obtém-se a aproximação $\bar{G}^h(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h)$, ou seja

$$\bar{G}^h = \sum_e \bar{G}^e\,(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) = \sum_e \bar{G}^{e,int}\,(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) - \sum_e \bar{G}^{e,ext}\,(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) \tag{62}$$

Na condição de a forma fraca, Eq. (59), associada a um elemento finito típico, obtém-se as expressões para o domínio e contorno

$$\bar{G}^{e,int}(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) = \delta\bar{d}^T \underbrace{\int_{\bar{\mathrm{B}}_0^e} \mathbb{B}^{e\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^h\, dV}_{=:\,\bar{r}^{e,int}} \tag{63}$$

e

$$\bar{G}^{e,ext}(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) = \delta\bar{d}^T \underbrace{\int_{\bar{\mathrm{B}}_0^e} \mathbb{N}^{e\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{f}}^h\, dV + \int_{\partial\bar{\mathrm{B}}_0^e} \mathbb{N}^e\bar{\boldsymbol{t}}_0^h\, dV}_{=:\,\bar{r}^{e,ext}} \tag{64}$$

Consequentemente, o vetor residual $\bar{r}^e$ é calculado como $\bar{r}^e = \bar{r}^{e,int} - \bar{r}^{e,ext}$. A fim de apurar a forma fraca não linear $\bar{G}^h(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h)$, aplica-se o método

iterativo de *Newton-Raphson*. Por conseguinte, a linearização de $\bar{G}^h(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h)$ em $\bar{x}^h = \bar{x}^{h^*}$ é calculada como

$$Lin\bar{G}^h\left(\bar{x}^{h^*}, \delta\bar{x}^h, \Delta\bar{x}^h\right) = \bar{G}^h\left(\bar{x}^{h^*}, \delta\bar{x}^h\right) + \Delta\bar{G}^h\left(\bar{x}^{h^*}, \delta\bar{x}^h, \Delta\bar{x}^h\right) \tag{65}$$

O incremento linear é definido como a derivada direcional de $\bar{G}^h$ em $\bar{x}^h$ na direção da deformação incremental $\Delta\bar{x}^h$, isto é

$$\Delta\bar{G}^h\left(\bar{x}^{h^*}, \delta\bar{x}^h, \Delta\bar{x}^h\right) = \frac{d}{d\in}\, \bar{G}^h\left(\bar{x}^{h^*} + \in \Delta\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h\right)\Big|_{\in=0} \tag{66}$$

Para sistemas descarregados a variação linear da configuração discretizada de $\bar{G}$, formal, é dada por

$$\Delta\bar{G}^h = \sum_e \Delta\bar{G}^{e,int} \tag{67}$$

e o incremento linear de um elemento típico é calculado como

$$\Delta\bar{G}^{e,int} = \int_{\bar{\mathrm{B}}_0^e} \delta\bar{\boldsymbol{F}}^{h^{\boldsymbol{T}}} \bar{\mathbb{A}}^h \Delta\bar{\boldsymbol{F}}^h \, dV = \delta\bar{d}^T \underbrace{\int_{\bar{\mathrm{B}}_0^e} \mathbb{B}^{e^{\boldsymbol{T}}} \bar{\mathbb{A}}^h \mathbb{B}^e \, dV \Delta\bar{d}}_{=:\,\bar{k}^e} \tag{68}$$

Com o intuito de determinar a matriz de rigidez $\bar{k}^e$ para um elemento macroscópico, faz-se necessário o módulo algorítmico macroscópico compatível (geral) $\bar{\mathbb{A}}$, o que é formalmente definido pela derivada parcial

$$\bar{\mathbb{A}} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{P}}}{\partial\bar{\boldsymbol{F}}} \qquad \text{com} \qquad \bar{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}_0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})\, dV \tag{69}$$

Este tensor de quarta ordem não pode ser apurado diretamente, pois não há formulação explícita do primeiro tensor de tensões macroscópicas de *Piola-Kirchhoff* $\bar{\boldsymbol{P}}$ em função do gradiente de deformação macroscópica $\bar{\boldsymbol{F}}$. Desta forma, o processo de linearização fornece

$$\sum_{e=1}^{\overline{num}_{ele}} \left\{\delta\bar{d}^T\left(\bar{k}^e\Delta\bar{d} + \bar{r}^e\right)\right\} \tag{70}$$

onde $\overline{num}_{ele}$ indica o número de elementos finitos macroscópicos. A aplicação do processo de concepção fornece o seguinte sistema de equações

$$\bar{K}\Delta\bar{D} = -\bar{R} \qquad \text{com} \qquad \bar{K} = \bigwedge_{e=1}^{\overline{num}_{ele}} \bar{k}^e \qquad \text{e} \qquad \bar{R} = \bigwedge_{e=1}^{\overline{num}_{ele}} \bar{r}^e \tag{71}$$

em que $\wedge$ representa o operador padrão de montagem. A solução do último sistema de equações fornece um incremento da deformação de campo real. Tal procedimento deverá ser repetido até que um estado de equilíbrio do problema do valor de contorno macroscópico seja alcançado, ou seja $\bar{G}^h(\bar{x}^h, \delta\bar{x}^h) \approx 0$.

A forma fraca do equilíbrio do momentum linear na microescala, Eq. (71), é dada por

$$G = -\int_{\mathrm{B}_0} \delta x Div_X \boldsymbol{P} dV \tag{72}$$

com $G = 0$. Neste ponto, omite-se as parcelas de aceleração do volume e da inércia. Considerando a separação adicional da deformação em um mapa linear $\overline{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{X}$ e uma parcela flutuante $\widetilde{w}$, obtém-se a seguinte representação do tensor de deformação microscópica $\boldsymbol{F} = Grad_X x$

$$\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}} \qquad \text{com} \qquad \widetilde{\boldsymbol{F}} = Grad_X \widetilde{w} \tag{73}$$

Assim, tem-se a seguinte expressão modificada

$$G = \int_{\mathrm{B}_0} \delta\widetilde{\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{P} dV \tag{74}$$

Percebe-se que a parte $\bar{\boldsymbol{F}}$ do gradiente de deformação microscópica $\boldsymbol{F}$ é constante e conhecida ao longo do RVE.

A fim de discretizar o problema do valor de contorno microscópico, subdivide-se o contorno de dimensões finitas para a flutuação real, virtual e incremental dentro de um elemento finito

$$\widetilde{w}^h = \mathbb{N}^e \widetilde{\boldsymbol{d}} \qquad \delta\widetilde{w}^h = \mathbb{N}^e \delta\widetilde{\boldsymbol{d}} \qquad \Delta\widetilde{w}^h = \mathbb{N}^e \Delta\widetilde{\boldsymbol{d}} \tag{75}$$

A matriz $\mathbb{N}^{\boldsymbol{e}}$ contém as clássicas funções de *Ansatz* e os vetores $\{\bar{d}, \delta\bar{d}, \Delta\bar{d}\}$, os quais representam os deslocamentos nodais real, virtual e incremental. Assumindo que para as matrizes $\mathbb{B}^e$ estão incorporadas as derivadas parciais das funções de *Ansatz* com coordenadas materiais, desta forma, definem-se as aproximações dos tensores de deformação real, virtual e incremental, respectivamente

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbb{B}^e \tilde{d} \qquad \delta\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbb{B}^e \boldsymbol{\delta}\tilde{d} \qquad \Delta\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbb{B}^e \Delta\tilde{d} \tag{76}$$

Assim, incorporando as aproximações dos campos virtuais, caracterizadas através das Eqs. (75) e (76), na Eq. (74), conduz-se para o homólogo discreto G^h de G

$$\bar{G}^h(x^h, \delta x^h) = \sum_e G^e\,(x^h, \delta x^h) \tag{77}$$

com

$$G^e(x^h, \delta x^h) = \delta d^T \underbrace{\int_{\mathrm{B}_0^e} \mathbb{B}^{e\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P}^h \, dV}_{=:\, r^e} \tag{78}$$

A fim de apurar a forma fraca não linear discretizada $G^h(x^h, \delta x^h)$, aplica-se o método iterativo de *Newton-Raphson* e a linearização análoga ao procedimento na macroescala. Consequentemente, obtém-se o incremento linear para o elemento finito microscópico

$$\Delta G^e = \int_{\mathrm{B}_0^e} \delta\widetilde{\boldsymbol{F}}^{h^{\boldsymbol{T}}} \mathbb{A}^h \Delta\widetilde{\boldsymbol{F}}^h \, dV = \delta\tilde{d}^T \underbrace{\int_{\mathrm{B}_0^e} \mathbb{B}^{e^{\boldsymbol{T}}} \mathbb{A}^h \mathbb{B}^e \, dV \Delta\tilde{d}}_{=:\, k^e} \tag{79}$$

A aplicação do operador de montagem, conforme a Eq. (71), nas matrizes de rigidez microscópicas e nos vetores residuais, resulta no seguinte sistema de equações

$$K\Delta\mathrm{D} + \tilde{R} = 0 \tag{80}$$

Desta forma, obtém-se uma atualização do campo discreto de flutuações e avalia-se a forma fraca discreta, conforme a Eq. (78). Seja a norma euclidiana de R maior do que uma tolerância estipulada, aplica-se mais iterações, no método de *Newton-Raphson*, até atingir a convergência.

3.2.2 Determinação do Módulo Algorítmico Consistente Geral

Na seção anterior, assumiu-se que o módulo geral macroscópico $\overline{\mathbb{A}}$ era conhecido durante o processo de solução na macroescala. Contudo, contrapondo com o tensor de tensões macroscópicas $\overline{\boldsymbol{P}}$, o qual pode ser calculado diretamente como o volume médio dos homólogos microscópicos, o módulo macroscópico não pode ser calculado unicamente, de forma consistente, por média volumétrica. A partir da relação constitutiva incremental na macroescala, têm-se

$$\Delta\overline{\boldsymbol{P}} = \left\{\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})dV\right\} : \Delta\overline{\boldsymbol{F}} =: \overline{\mathbb{A}} : \Delta\overline{\boldsymbol{F}} \tag{81}$$

Deste modo, define-se o módulo nominal global

$$\overline{\mathbb{A}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}} \frac{\partial}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})dV = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}} \frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}} : \frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}} dV \tag{82}$$

Considerando a decomposição adicional do $\boldsymbol{F}$ para uma parcela constante e outra flutuante, $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}$, e substituindo na Eq. (82), têm-se

$$\overline{\mathbb{A}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}} \frac{\partial \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})}{\partial \overline{\boldsymbol{F}}} : \frac{\partial\left(\overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}\right)}{\partial \overline{\boldsymbol{F}}} dV \tag{83}$$

Logo, com a abreviação $\mathbb{A} \coloneqq \partial_F \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})$**,** obtém-se

$$\overline{\mathbb{A}} = \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}} \mathbb{A} dV + \frac{1}{V}\int_{\mathrm{B}} \mathbb{A} : \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{F}}}{\partial \overline{\boldsymbol{F}}} dV \tag{84}$$

Para a equação descrita acima, o cálculo da precisão de $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ em relação à $\overline{\boldsymbol{F}}$ é a parte crítica. Baseando-se na forma fraca do equilíbrio do momentum linear na microescala, Eq. (74), até uma condição de equilíbrio, ou seja, $G = 0$, a linearização resulta em

$$\int_{\mathrm{B}} \delta \widetilde{\boldsymbol{F}} : \mathbb{A} : \Delta \boldsymbol{F} dV = 0 \tag{85}$$

Substituindo a decomposição de aditivos, $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} + \widetilde{\boldsymbol{F}}$ em Eq. (85), tem-se

$$\underbrace{\int_{\mathrm{B}} \delta \widetilde{\boldsymbol{F}} : \mathbb{A} : \Delta \overline{\boldsymbol{F}} dV}_{\int_{\mathrm{B}} \delta \widetilde{\boldsymbol{F}} : \mathbb{A} dV : \Delta \overline{\boldsymbol{F}}} + \int_{\mathrm{B}} \delta \widetilde{\boldsymbol{F}} : \mathbb{A} : \Delta \widetilde{\boldsymbol{F}} dV = 0 \tag{86}$$

A contraparte discretizada, especificada na última equação, é exposta após a inserção das aproximações da parcela flutuante do gradiente de deformação, Eq. (76), como

$$\sum_{e=1}^{num_{ele}} \delta \widetilde{\boldsymbol{d}}^T \left\{ \underbrace{\int_{\mathrm{B}} \mathbb{B}^{e\boldsymbol{T}} \mathbb{A}^h dV \Delta \overline{\boldsymbol{F}}^h}_{\boldsymbol{l}^e} + \underbrace{\int_{\mathrm{B}} \mathbb{B}^{e\boldsymbol{T}} \mathbb{A}^h \mathbb{B}^e dV \Delta \widetilde{\boldsymbol{d}}}_{\boldsymbol{k}^e} \right\} = 0 \tag{87}$$

em que num_{ele} representa o número de elementos finitos microscópicos, k^e a matriz de rigidez elementar e l^e a matriz que considera a sensibilidade do módulo dos elementos finitos individuais.

Desta forma, matricialmente, dispomos

$$\sum_{e=1}^{num_{ele}} \left\{\delta\widetilde{\boldsymbol{d}}^T\left(\boldsymbol{l}^e\Delta\overline{\boldsymbol{F}}^h + \boldsymbol{k}^e\Delta\widetilde{\boldsymbol{d}}\right)\right\} = 0 \tag{88}$$

Assim, aplicando-se o processo padrão de montagem, análogo a Eq. (71), provê

$$\delta\widetilde{\boldsymbol{D}}^T\left(\boldsymbol{K}\Delta\widetilde{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{L}\Delta\overline{\boldsymbol{F}}\right) = 0 \tag{89}$$

A matriz global de rigidez $\boldsymbol{K}$ e o lado generalizado $\boldsymbol{L}$**,** à direita da Eq. (89), são definidos como

$$\boldsymbol{K} = \bigwedge_{e=1}^{num_{ele}} \boldsymbol{k}^e \qquad\qquad \boldsymbol{L} = \bigwedge_{e=1}^{num_{ele}} \boldsymbol{l}^e \tag{90}$$

Diretamente, a solução da Eq. (89) é obtida por

$$\Delta\widetilde{\boldsymbol{D}} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L}\Delta\overline{\boldsymbol{F}}^h \tag{91}$$

cuja a equação descrita, representa o campo de flutuação incremental em consequência do gradiente de deformação macroscópico incremental. Deste modo, inserindo $\Delta\widetilde{\boldsymbol{d}}$ já conhecido, da Eq. (91) em (76) e, em decorrência disto, substituindo na Eq. (84), fica

$$\overline{\mathbb{A}}^h = \underbrace{\frac{1}{V}\sum_{e=1}^{num_{ele}} \int_{\mathrm{B}^e} \mathbb{A}^h dV}_{\mathbb{A}^{Voigt}} + \frac{1}{V}\sum_{e=1}^{num_{ele}} \int_{\mathrm{B}^e} \mathbb{A}^h \frac{\partial\left(\mathbb{B}^e\Delta\widetilde{\boldsymbol{d}}\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}^h} dV \tag{92}$$

Onde $\mathbb{A}^{Voigt}$ caracteriza o limite superior de *Voigt*. O segundo termo da integral na Eq. (92). pode ser reformulado como

$$\frac{1}{V}\sum_{e=1}^{num_{ele}}\int_{\mathrm{B}^e}\mathbb{A}^h\frac{\partial\left(\mathbb{B}^e\Delta\widetilde{\boldsymbol{d}}\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}^h}dV=\frac{1}{V}\sum_{e=1}^{num_{ele}}\underbrace{\int_{\mathrm{B}^e}\mathbb{A}^h\mathbb{B}^e dV}_{\boldsymbol{l}^{e*}}\frac{\partial\Delta\widetilde{\boldsymbol{d}}}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}^h} \tag{93}$$

no qual $\boldsymbol{l}^{e*}=\boldsymbol{l}^{eT}$, sob condição de satisfazer as simetrias principais em $\mathbb{A}$, ou seja, $\mathbb{A}_{ijkl}=\mathbb{A}_{klij}$. Após montar a forma discreta, com a Eq. (91) e o incremento linear, obtém-se

$$\Delta\overline{\boldsymbol{F}}^h=\overline{\boldsymbol{F}}^h-\overline{\boldsymbol{F}}_n^h \tag{94}$$

em que

$$\overline{\boldsymbol{F}}^h=\overline{\boldsymbol{F}}^h(t_n+1) \qquad \text{e} \qquad \overline{\boldsymbol{F}}_n^h=\overline{\boldsymbol{F}}^h(t_n) \tag{95}$$

Assim, a expressão algébrica fica

$$\frac{1}{V}\boldsymbol{L}^T\frac{\partial\Delta\widetilde{\boldsymbol{D}}}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}^h}=-\frac{1}{V}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L}\frac{\partial\Delta\overline{\boldsymbol{F}}}{\partial\overline{\boldsymbol{F}}^h}=-\frac{1}{V}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L} \tag{96}$$

Desta maneira, a solução para o módulo algorítmico consistente geral é (MIEHE *et. al.*, 1999)

$$\overline{\mathbb{A}}=\mathbb{A}^{Voigt}-\frac{1}{V}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L} \qquad \text{com} \qquad \mathbb{A}^{Voigt}=\frac{1}{V}\sum_e\int_{\mathrm{B}^e}\mathbb{A}^h dV \tag{97}$$

Em geral, enormes custos computacionais em métodos diretos típicos de homogeneização não linear são dispendidos usando a iteração de *Newton-Raphson* sobre ambas as escalas em cada ponto de quadratura. Para o cálculo da acurácia no segundo termo da Eq. (97), identifica-se

$$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}^T\mathbb{X} \tag{98}$$

onde $\mathbb{X}$ é a solução do sistema de equações. O lado direito da equação, determinada acima, é organizada na seguinte matriz $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{K}\mathbb{X} = \boldsymbol{L} \tag{99}$$

Para a solução da Eq. (99), bem como para a solução da forma fraca, a estrutura dispersa de todas as matrizes é levado em consideração.

3.2.3 Problemas de Estabilidade em Diferentes Escalas

Um desafio nas técnicas de homogeneização bidimensional é a consideração dos problemas de instabilidade em diferentes escalas (MIEHE *et. al.*,2002). No que se segue, faz-se restrição à materiais hiperelásticos e distingue-se entre instabilidades estruturais e instabilidades materiais. Sendo

$$\overline{\Pi}(\bar{x}) = \overline{\Pi}^{int}(\overline{\boldsymbol{F}}) + \overline{\Pi}^{ext}(\bar{x}) \tag{100}$$

Seja a energia potencial total do corpo de interesse na macroescala, com

$$\overline{\Pi}^{int}(\overline{\boldsymbol{F}}) = \int_{\overline{\mathrm{B}}_0} \psi(\overline{\boldsymbol{F}}) dV \tag{101}$$

e

$$\overline{\Pi}^{ext}(\bar{x}) = -\int_{\overline{\mathrm{B}}_0} \bar{x}\bar{f} dV - \int_{\partial\overline{\mathrm{B}}_{0,t}} \bar{x}\bar{t}_0 dA \tag{102}$$

Um estado de equilíbrio, indicado por $\bar{x}^{eq}$, é caracterizado através da energia potencial total infinitesimal no espaço de funções admissíveis. O estado de deformação é estável se a desigualdade

$$\overline{\Pi}(\bar{x}^{ka}) \geq \overline{\Pi}(\bar{x}^{eq}) \qquad \begin{matrix} \forall \text{ cineticamente} \\ \text{admissível} \end{matrix} \qquad \bar{x}^{ka} \tag{103}$$

A igualdade é válida apenas se $\bar{x}^{ka} \neq \bar{x}^{eq}$, conforme Ogden (1984). No entanto a desigualdade, definida conforme a Eq. (103), é uma condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio de $\bar{x}^{eq}$.

Para um critério mais adequado, especialmente do ponto de vista computacional, restringe-se a análise para funções cinematicamente admissíveis na vizinhança de $\bar{x}^{eq}$. Isto significa que a Eq. (103) se torna um critério de estabilidade infinitesimal, segundo Truesdell e Noll (1965) . O desvio da energia potencial total entre um estado de equilíbrio em $\bar{x}^{eq}$ e $\bar{x}^{ka}$ é

$$\Delta\bar{\Pi} := \bar{\Pi}(\bar{x}^{ka}) - \bar{\Pi}(\bar{x}^{eq}) \tag{104}$$

Para as considerações subsequentes, utilizaremos a derivada direcional de primeira ordem, $\bar{\Pi}$, na direção de $\delta\bar{x}$

$$\frac{d}{d\in}\bar{\Pi}(\bar{x}^{eq}+\in\delta\bar{x})\Big|_{\in=0} =: \bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x}^{eq}) \tag{105}$$

A derivada direcional de segunda ordem de $\bar{\Pi}$, ou equivalentemente a derivada direcional de $\bar{G}$, é denotado como

$$\frac{d}{d\in}\bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x},\in\Delta\bar{x})\Big|_{\in=0} := \Delta\bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x},\Delta\bar{x}) \tag{106}$$

Com relação a $\Delta\bar{\Pi}$, Eq. (104), formula-se em termos de uma série de *Taylor* clássica, assim

$$\Delta\bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x}) = \bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x}) + \frac{1}{2!}\Delta G(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x},\Delta\bar{x}) + \frac{1}{3!}\ldots \tag{107}$$

Para um estado de equilíbrio, $\bar{G}$ é, por definição, igual à zero. Desta forma, o equilíbrio é estável se

$$\Delta\bar{G}(\bar{x}^{eq},\delta\bar{x},\Delta\bar{x}) = \int_{\bar{\mathrm{B}}_0}\delta\bar{\boldsymbol{F}}:\bar{\mathbb{A}}:\Delta\bar{\boldsymbol{F}} > 0 \tag{108}$$

As *Condições Generalizadas de Convexidade* desempenham um papel importante para provar a necessidade de minimizar as deformações, provenientes da energia elástica, em problemas de valor de contorno sob condições específicas deste.

Uma condição suficiente para a existência de minimizadores é a semi-continuidade sequencial fraca inferior (SWLS, sigla em inglês) e a coercitividade do funcional energético. Morrey (1952) introduziu o conceito de semi convexidade, o qual é formulado como uma desigualdade da integral sobre um domínio arbitrário submetido a condições de contorno de *Dirichlet*:

Semi convexidade: Uma energia elástica armazenada é semi convexa sempre que $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3$, todos os gradientes de deformação constantes, $\overline{\boldsymbol{F}} \in \mathbb{R}^{3x3}$, e todos campos de flutuação sobrepostos, $w \in C_0^{\infty}(\mathrm{B})$, isto é, $w = 0$ em $\partial\mathrm{B}$. Assim, temos

$$\int_{\mathrm{B}} W(\overline{\boldsymbol{F}} + Grad\boldsymbol{w})dV \geq \int_{\mathrm{B}} W(\overline{\boldsymbol{F}})dV = W(\overline{\boldsymbol{F}})\, xVol(\mathrm{B}) \tag{109}$$

A condição de semi-continuidade sequencial inferior é assegurada se a energia elástica armazenada é semi convexa, conforme enunciado acima, e uma condição de crescimento adicional ser cumprida.

Outro conceito importante é a poli convexidade, introduzido por Ball (1977):

Poli convexidade: $\boldsymbol{F} \longmapsto W(\boldsymbol{F})$, é poli convexa se, e somente se, existe uma função P: $\mathbb{R}^{3x3}x\mathbb{R}^{3x3}x\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, de tal modo que

$$W(\boldsymbol{F}) = P(\boldsymbol{F}, Cof\boldsymbol{F}, det\boldsymbol{F}) \tag{110}$$

e a função $(\boldsymbol{F}, Cof\boldsymbol{F}, det\boldsymbol{F}) \in \mathbb{R} \longmapsto P(\boldsymbol{F}, Cof\boldsymbol{F}, det\boldsymbol{F}) \in \mathbb{R}$ seja convexa para todos os pontos $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$.

Funções poli convexas são sempre SWLS. Assim, faz-se necessário abordar sobre a primeiro grau de convexidade e elipticidade:

Primeira classificação de convexidade: A energia elástica armazenada possui primeiro grau de convexidade se

$$W(\boldsymbol{F}+\lambda\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)\leq\lambda W(\boldsymbol{F}+\lambda\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)+(1-\lambda)W(\boldsymbol{F}) \tag{111}$$

onde aplica-se para todos $\lambda\in[0,1]$, $\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^3$ e para todos $\boldsymbol{m}\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{N}_0\in\mathbb{R}^3$ com $det(\boldsymbol{F}+\lambda\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)>0$.

Elipticidade: A energia armazenada $W(\boldsymbol{F})=\psi(\boldsymbol{C})$ conduz a um sistema de equilíbrio uniformemente elíptico sempre que condição uniforme *Legendre-Hadamard*

$$\begin{aligned}\exists c^+>0,\forall\,\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{3x3},\forall\,\boldsymbol{m},\boldsymbol{N}_0\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}:(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0):\mathbb{A}:(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)\\ \geq c^+\|\boldsymbol{m}\|^2\|\boldsymbol{N}_0\|^2\end{aligned} \tag{112}$$

Admitindo que W origina-se a um sistema elíptico, desta forma, a condição *Legendre-Hadamard* é válida se

$$\forall\,\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{3x3},\forall\,\boldsymbol{m},\boldsymbol{N}_0\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}:(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0):\mathbb{A}:(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)\geq 0(>0) \tag{113}$$

Constata-se que, para funções de energia armazenadas W, o primeiro grau convexidade implica, somente, a condição de *Legendre-Hadamard.* A interpretação física das condições supracitadas aplica-se no estudo do comportamento da propagação da onda.

Uma energia livre é materialmente estável se for elíptica. Desta forma, a reestruturação da condição *Legendre-Hadamard* fica

$$(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0):\mathbb{A}:(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{N}_0)=\boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{N}_0)\boldsymbol{m}>0 \tag{114}$$

onde o tensor acústico $\overline{\boldsymbol{Q}}$ é denotado indicialmente como

$$\overline{\boldsymbol{Q}}^{ab}=\mathbb{A}^{aBbD}\boldsymbol{N}_{0_B}\boldsymbol{N}_{0_D} \tag{115}$$

Ou seja, o tensor acústico, que leva em consideração o estudo da propagação da onda no material, o qual, obedecendo a condição *Legendre-Hadamard*, é definido como positivo para garantir a estabilidade do material, ou seja, a elipticidade da energia livre.

Uma característica intrínseca à deformação finitesimal da mecânica do contínuo é a não singularidade das respostas. Tais problemas podem ocorrer em ambas as escalas, micro e macroescala.

Assim, concentra-se em instabilidades estruturais microscópicas, ou seja, estados de equilíbrio não estáveis, no âmbito da transição entre a micro e a macroescala. Estes fenômenos estão associados às propriedades de convexidade dos problemas de valor de contorno em ambas escalas e suas interações. Segundo Schroeder e Huck (2014), resume-se que

(i) no caso de funcionais convexos, calcula-se as energias macroscópicas por

$$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{F}}) \coloneqq \inf_{\widetilde{w}} \frac{1}{V_0} \int_{\bar{\mathrm{B}}_0} \psi(\bar{\boldsymbol{F}} + \nabla \widetilde{w}) dV \tag{116}$$

com o campo flutuação $\widetilde{w}$ em uma unidade de célula B_0.

(ii) Problemas de instabilidade estrutural na microescala estão associados à homogeneização de um problema do de contorno não convexo na microescala. No entanto, para funções não convexas deve-se encontrar o tamanho crítico do elemento de volume representativo no caso de funcionais convexos. Calcula-se as energias macroscópicas por ${\mathrm{B}_0}^{crit}$, ou seja

$$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{F}}) \coloneqq \inf_{{\mathrm{B}_0}^{crit}} \left\{ \inf_{\widetilde{w}} \frac{1}{V_0} \int_{\bar{\mathrm{B}}_0} \psi(\bar{\boldsymbol{F}} + \nabla \widetilde{w}) dV \right\} \tag{117}$$

com o campo flutuação $\widetilde{w}$ no elemento de volume representativo ${\mathrm{B}_0}^{crit}$ do tamanho crítico. Deve-se notar que para microestruturas heterogêneas, por exemplo, para materiais de matriz reforçada com fibras, o conceito de semi convexidade pode não se manter.

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta sessão é apresentada a fundamentação teórica do método dos elementos finitos (MEF).

O método dos elementos finitos surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de modelos reticulados, concebida no início da década de 1930 na indústria aeronáutica britânica, com o advento de computadores digitais e devido à necessidade de projetar estruturas de modelos contínuos. Os primeiros elementos foram concebidos por engenheiros aeronáuticos para a análise de distribuição de tensões em chapas de asa de avião. Sua formulação foi tratada pioneiramente por Argyris e Kelsey em 1955, republicada em 1960, e por Turner, Clough, Martin e Topp em 1956 (SORIANO, 2003).

Gallagher e Padlog (1963) foram os primeiros a estabelecer campos de deslocamentos e cargas críticas em vigas e placas, com elementos finitos, admitindo o efeito da não linearidade geométrica. Archer (1963) empregou campos de deslocamentos em elemento finito com o intuito de estabelecer a matriz de massa consistente. Desta forma, em 1963, existiam aplicações de elementos finitos em problemas estáticos, de não linearidade e dinâmicos. Tal formulação do elemento foi desenvolvida através do princípio dos deslocamentos virtuais, porém não havia critérios que certificassem a convergência para a solução exata.

Melosh (1963) expôs uma formulação do método dos elementos finitos fundamentando-se na minimização do funcional de energia potencial total. Veubeke (1965) atestou a definição do método dos elementos finitos a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Entretanto, verificou-se que os fundamentos do método já haviam sido instituídos por Lord Rayleigh em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant (1943). Consequentemente, mostrou-se que o método dos elementos finitos é um caso particular do método de *Rayleigh-Ritz*. Desta forma, estabeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema de meio contínuo regido por funcional. Essa é a denominada formulação variacional (SORIANO, 2003).

A consistência matemática da formulação variacional proporcionou a extensão do método dos elementos finitos à solução de diversos problemas do

meio contínuo, como problemas de meios porosos, transferência de calor e eletrostáticos, retratados primeiramente nos trabalhos de Zienkiewicz e Cheung (1965), Zienkiewicz *et al*. (1966) e Wilson e Nickell (1966).

Além da determinação desses problemas, Cheung e Zienkiewicz (1965) foram os primeiros a empregar o método em interação solo-estrutura. Cheung e Zienkiewicz (1967) publicaram o primeiro livro exclusivamente aplicado ao método dos elementos finitos, e Zienkiewicz *et al*. (1968) utilizaram procedimento iterativo nesse método em análise de fissuras em meios elásticos.

Subsequentemente à concepção da formulação variacional, Szabo e Lee (1966) constataram que o método poderia ser formulado diretamente a partir das equações diferenciais e suas respectivas condições de contorno para problemas em meios contínuos, como método dos resíduos ponderados de *Galerkin*.

Herrmann (1972) corroborou equivalência entre o elemento finito formulado através do funcional de energia potencial total e o método dos mínimos quadrados de resíduos de tensões. Lynn e Arya (1973) formularam o método dos elementos finitos baseado no método dos mínimos quadrados, que também é um caso de método de resíduos ponderados. Assim, a aplicação do método dos elementos finitos englobou problemas não regidos por funcionais.

Semelhante à formulação variacional, na formulação de resíduos do método dos elementos finitos, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais. A partir das equações algébricas (obtidas através das formulações direta, variacional ou de resíduos), que regem o comportamento aproximado de cada um dos subdomínios (denominados elementos finitos), monta-se o sistema de equações da malha de elementos como um todo, denominado sistema global, que, juntamente com as condições de contorno ainda não atendidas ao se arbitrar o(s) campo(s) de variável(eis) nos subdomínios, permite a determinação dos valores nodais de definição desse(s) campo(s). Pode-se, então, retornar à análise de cada elemento isoladamente para determinação de incógnitas em qualquer um de seus pontos (SORIANO, 2003).

Através dessa conceituação do método dos elementos finitos, objetiva-se transmitir ao leitor a concepção do método e sua relevância, bem como o seu desenvolvimento progressivo, proporcionando solução a problemas que, há

algumas décadas, não compreendiam, bem como apresentar a formulação que será de relevância para a realização do presente trabalho.

3.3.1 Elementos Finitos baseado na Teoria de *Kirchhoff*

No Método dos Elementos Finitos, um polinômio aproximador para o deslocamento vertical do plano médio $\left(w(x,y)\right)$ é definido para o estudo do comportamento de modelos bidimensionais (SILABA, 2007). Em função do número de graus de liberdade existentes em cada nó e da quantidade de nós presente no elemento tem-se o número de termos do referido polinômio aproximador.

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \ldots \tag{118}$$

As constantes α_i da Eq. (118) são obtidas a partir de condições impostas aos nós. A montagem da equação de $w(x,y)$ geralmente é realizada a partir da extração de termos do triângulo de *Pascal*, mostrado a seguir

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & x & & y & & & \\
 & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\
x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4
\end{array}$$

Pode-se dizer que a escolha destes termos é um dos maiores problemas na formulação de um elemento finito baseado na teoria de Kirchhoff, uma vez que existe um número de alternativas considerável quando os polinômios não são completos.

O elemento e suas propriedades são definidos a partir desta escolha, demandando um estudo minucioso pois, “(...) existem muitos elementos que simplesmente não funcionam na prática” (OÑATE, 1995, p. 331).

Conhecendo-se os deslocamentos verticais de todos os pontos do plano médio do modelo bidimensional $\left(w(x,y)\right)$, é possível obter as demais grandezas

envolvidas no problema. Logo, escrevendo a Eq. (118) na forma matricial, tem-se

$$w(x,y) = [1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \ldots] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{119}$$

Ou, simbolicamente,

$$w(x,y) = \underline{\varphi}\,\underline{\alpha} \tag{120}$$

onde $\underline{\varphi} = [1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \ldots]$ e $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \;\; \alpha_4 \;\; \alpha_5 \;\; \alpha_6 \cdots]^T$.

Derivando-se a Eq. (120) em relação às variáveis x e y, obtém-se as rotações respectivas a cada eixo

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x} = \underline{\alpha} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y} = \underline{\alpha} \end{aligned} \tag{121}$$

A partir das condições impostas aos graus de liberdade e das coordenadas de cada nó, podem-se escrever a seguinte equação:

$$\underline{G}\,\underline{\alpha} = \underline{d} \tag{122}$$

onde, as linhas de $\underline{G}$ são obtidas pela substituição das coordenadas dos nós nas matrizes $\underline{\varphi}$, $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x}$, $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y}$.

Multiplicando a Eq. (122) por $\underline{G}^{-1}$ obtém-se o valor de $\underline{\alpha}$, que substituído na Eq. (120), fornece

$$w(x,y) = \underline{\varphi}\,\underline{G}^{-1}\underline{d} \tag{123}$$

simplificando um pouco mais, tem-se

$$w(x,y) = \underline{N}\,\underline{d} \tag{124}$$

onde $\underline{N} = \underline{\varphi}\,\underline{G}^{-1}\underline{d}$ é a matriz das funções de forma do elemento e $\underline{d}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

A partir da Eq. (124) podem-se obter os valores aproximados de $w(x,y)$ para qualquer ponto. Porém, para obter os valores das demais grandezas, como deformação, tensão e momentos, é necessário conhecer o vetor das deformações generalizadas de flexão ou simplesmente vetor de curvaturas $\underline{\chi}$. Assim, derivando-se a equação dos deslocamentos verticais Eq. (124) de acordo com o vetor de curvaturas, encontra-se

$$\underline{\chi} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2\,w_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{N}_{xx} \\ \underline{N}_{yy} \\ 2\,\underline{N}_{xy} \end{Bmatrix} \underline{d} \tag{125}$$

ou, simbolicamente

$$\underline{\chi} = \underline{B}\,\underline{d} \tag{126}$$

onde $\underline{B} = \begin{Bmatrix} \underline{N}_{xx} \\ \underline{N}_{yy} \\ 2\,\underline{N}_{xy} \end{Bmatrix}$ é a matriz que contém as derivadas das funções de forma.

Seguindo esta linha de raciocínio, para obter o vetor de curvaturas $\left(\underline{\chi}\right)$ dado pela Eq. (126), torna-se necessário conhecer o vetor de deslocamentos nodais $\underline{d}$. Para isto, pode-se aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), visando obter a equação matricial de equilíbrio.

Considerando-se um elemento finito submetido a um carregamento distribuído $q(x,y)$. e a cargas pontuais P atuando na direção z, tem-se a seguinte expressão para o PTV

$$\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_A \delta w^T q(x,y) dA + \sum_i^{NCC} \delta w_i^T P_i \tag{127}$$

onde NCC é o número total de cargas concentradas.

Substituindo os deslocamentos virtuais (δw), as deformações virtuais $(\delta\underline{\varepsilon})$ e as tensões reais aproximadas $(\underline{\sigma})$, representadas respectivamente por

$$\delta w = \underline{N}\,\delta\underline{d}, \qquad \delta\underline{\varepsilon} = -z\underline{B}\delta\underline{d} \quad \text{e} \quad \underline{\sigma} = -z\,\underline{D}\,\underline{B}\,\underline{d}$$

na Eq. (127), encontra-se

$$\int_V \left(-z\underline{B}^T \delta\underline{d}^T\right)\left(-z\,\underline{D}\,\underline{B}\,\underline{d}\right) dV = \int_A \left(\underline{N}^T\,\delta\underline{d}^T\right) q(x,y) dA + \sum_i^{NCC} \left(\underline{N}^T\,\delta\underline{d}^T\right)_i P_i$$

Considerando que as cargas concentradas atuam somente nos nós do elemento, e que estão armazenadas no vetor $\underline{p}$, obtém-se

$$\begin{gathered}
\int_V \left[\delta\underline{d}\right]^T \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B}\,\underline{d}\, z^2 dV dV = \int_A \left[\delta\underline{d}\right]^T \underline{N}^T\, q(x,y) dA + \left[\delta\underline{d}\right]^T \underline{p} \\
\left[\delta\underline{d}\right]^T \left[\left(\int_A \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz\, dA\right)\underline{d}\right] = \left[\delta\underline{d}\right]^T \left[\int_A \underline{N}^T\, q(x,y) dA + \underline{p}\right] \\
\left(\frac{t^3}{12}\int_A \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B} dA\right)\underline{d} = \int_A \underline{N}^T\, q(x,y) dA + \underline{p}
\end{gathered} \tag{128}$$

Logo, é possível representar a Eq. (128) simbolicamente, na forma

$$\underline{k}\,\underline{d} = \underline{f}_{eq} + \underline{p} \tag{129}$$

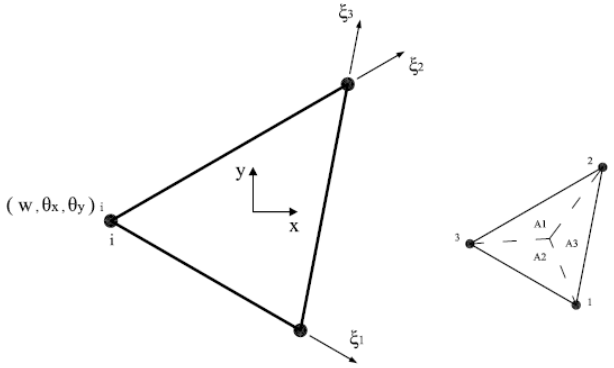
onde $\underline{k} = \frac{t^3}{12}\int_A \underline{B}^T \underline{D}\ \underline{B} dA$ é a matriz de rigidez do elemento; $\underline{f_{eq}} = \int_A \underline{N}^T\ q(x,y)dA$ é o vetor de cargas nodais devido a carga distribuída e $\underline{p}$ é o vetor de cargas nodais aplicadas.

Para finalizar o raciocínio, após encontrar o vetor de deslocamentos nodais $(\underline{d})$, determina-se o vetor de curvaturas $(\underline{\chi})$. Assim, como dito anteriormente, conhecendo o vetor de curvaturas é possível obter todas as demais grandezas envolvidas nos problemas de placas.

3.3.1.1 Elemento Triangular de 3 Nós Não-Conforme (CKZ)

O problema nos elementos triangulares é a obtenção de um polinômio completo que atenda aos critérios de convergência e forneça um elemento conforme.

FIGURA 8 – ELEMENTO DE PLACA TRIANGULAR CKZ



FONTE: Saliba (2007).

O elemento CKZ, representado pela FIGURA 8, assim chamado devido aos seus criadores Cheung *et. al.* (1968), possui três nós e três variáveis de deslocamento por nó. Logo, o polinômio de aproximação do deslocamento vertical do plano m´médio possui nove termos de um polinômio de terceiro grau incompleto em coordenadas de área, como segue

$$w = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\left({\xi_1}^2\xi_2 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right) + \alpha_5\left({\xi_2}^2\xi_1 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right)$$
$$+ \alpha_6\left({\xi_2}^2\xi_3 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right) + \alpha_7\left({\xi_3}^2\xi_2 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right) \tag{130}$$
$$+ \alpha_8\left({\xi_3}^2\xi_1 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right) + \alpha_9\left({\xi_1}^2\xi_3 + \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{2}\right)$$

onde

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}, \xi_2 = \frac{A_2}{A}, \xi_3 = \frac{A_3}{A}, A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{131}$$

Os elementos triangulares podem ser considerados elementos versáteis devido a sua geometria, que permite aplicá-los nas mais variadas formas de placas. Conforme dito em Oñate (1995), apesar de ser um elemento não-conforme, por não garantir a continuidade do giro normal ao longo de seus lados, o elemento CKZ apresenta uma convergência monotônica, e sua simplicidade tem lhe garantido uma boa popularidade.

Neste elemento, por possuir um número de nós inferior aos elementos apresentados nas seções anteriores, é necessário alterar a matriz das funções de forma (N). Logo, têm-se

$$\underline{N} = \left[\underline{N}_1 \;\; \underline{N}_2 \;\; \underline{N}_3\right] \quad e \quad \underline{d} = \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{Bmatrix} \tag{132}$$

sendo que as submatrizes $\underline{N}_i$ e $\underline{d}_i$ são

$$\underline{N}_i = \left[\underline{N}_i \;\; \overline{\underline{N}_i} \;\; \overline{\overline{\underline{N}}}_i\right] \quad e \quad \underline{d}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{133}$$

em que $\underline{N}_i$, $\overline{\underline{N}_i}$ e $\overline{\overline{\underline{N}}}_i$ representam as funções de forma em coordenadas de área.

4 APRESENTAÇÃO DE EXEMPLOS DE ESTUDOS REALIZADOS

Neste capítulo são descritos os resultados das simulações computacionais apresentadas nos trabalhos de Souza (2005) e Schröder (2014).

4.1 TESTE DE CISALHAMENTO: ESTUDO COMPARATIVO DE DIFERENTES RVE'S

Nos exemplos seguintes, conforme descrito em Schröder (2014), considera-se um teste macroscópico (homogêneo) de cisalhamento puro e se analisa a relação tensão-deformação na macroescala para diferentes combinações de equações constitutivas de matriz e fase de inclusão para um EVR artificial. Na macroescala, a situação homogênea de cisalhamento puro é descrita pelo seguinte gradiente de deformação macroscópica

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{F}_{12} & 0 \\ \bar{F}_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; com \;\; \bar{F}_{12} = \bar{F}_{21} \tag{134}$$

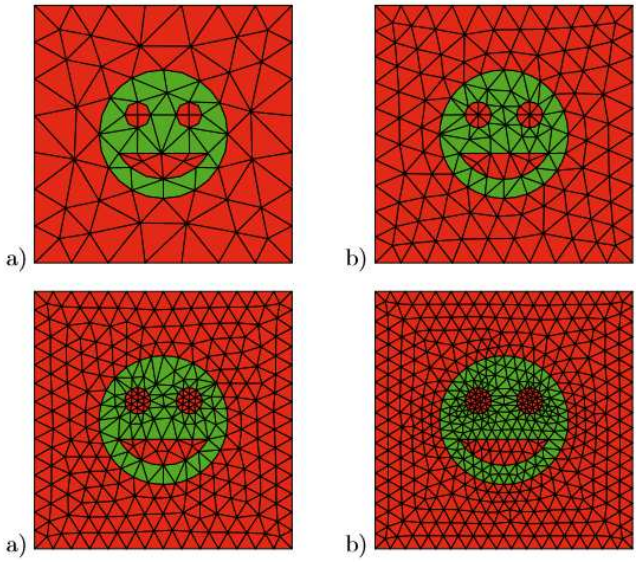
Durante a simulação, o coeficiente $\bar{F}_{12}$ oscila gradualmente entre $-0{,}1$ e $0{,}1$ a fim de simular um processo de carregamento cíclico. Isso começa com $\bar{F}_{12} = 0{,}0$ com um aumento da componente até $0{,}1$, sendo este o primeiro ponto de inflexão. Em seguida a carga é mudada e o coeficiente é gradualmente reduzido para $-0{,}1$.

Então, o segundo ponto de inflexão é atingido. Novamente, $\bar{F}_{12}$ é aumentada para $0{,}1$, o próximo ponto de inflexão é atingido, e o procedimento é repetido. Todo o processo é controlado por uma modificação linear do coeficiente $\bar{F}_{12}$ entre as coordenadas

$$\bar{F}_{12} : 0{,}0 \rightarrow +0{,}1 \rightarrow -0{,}1 \rightarrow +0{,}1 \rightarrow -0{,}1 \rightarrow +0{,}1 \tag{135}$$

Na microescala, uma microestrutura artificial é considerada, onde a geometria da inclusão é um *smiley* incorporado em uma fase de matriz.

FIGURA 9 – MICROESTRUTURA ARTIFICIAL COM DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES DE ELEMENTOS FINITOS: a) 140 b) 292 c) 558 e D) 970 ELEMENTOS TRIANGULARES COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS ANSATZ



FONTE: Schröder (2014).

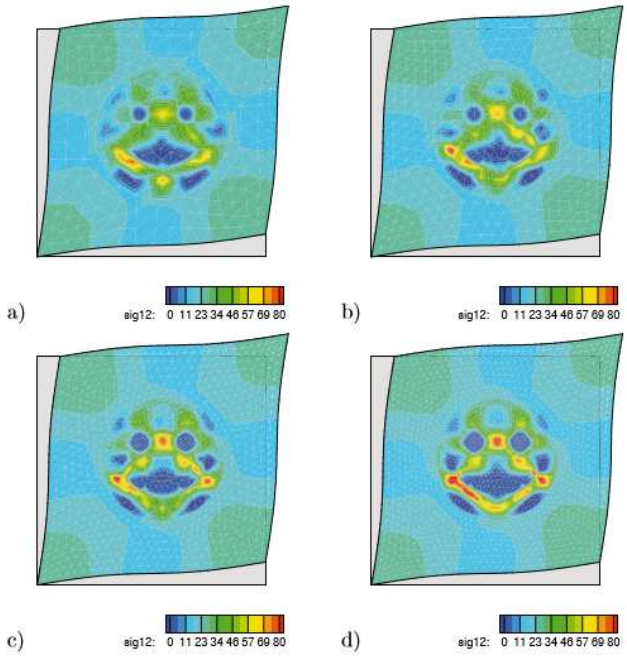
Para estudar a convergência da simulação, no que diz respeito ao tamanho do elemento, quatro diferentes níveis de discretização na microescala são utilizadas: 140, 292, 558 e 970 elementos triangulares com funções *Ansatz* quadráticas, conforme a FIGURA 9.

Matriz Elástica e Inclusão Elástica: Numa primeira configuração, consideram-se ambas as fases, da matriz e da inclusão, a serem descritas por um material de comportamento puramente elástico. Deste modo, o módulo de elasticidade instantânea da inclusão é assumido como sendo 1000 vezes mais elevado do que a do material de matriz; os parâmetros de elasticidade para o material de matriz são definidos como

$$\lambda = 118{,}85\ MPa \quad e \quad \mu = 79{,}230\ MPa \tag{136}$$

A fim de estudar a influência da densidade de malhas de elementos finitos, considera-se os quatro níveis diferentes de discretização na microescala representada na FIGURA 9. Para o estudo da distribuição de tensões microscópicas, baseando-se nos quatro diferentes níveis de discretização, são mostrados na FIGURA 10 os coeficientes das tensões microscópicas de *Cauchy*.

FIGURA 10 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES σ_{12} EM $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES: a) 140 b) 292 c) 558 e D) 970 ELEMENTOS.

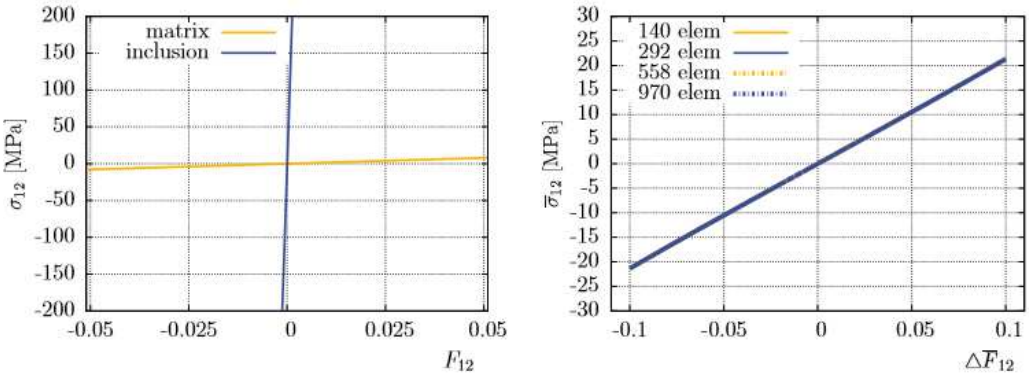


FONTE: Schröder (2014).

Observa-se na região da matriz nenhuma diferença significativa das distribuições de tensão. No entanto, nas regiões próximas à inclusão, assim como no interior da inclusão, a distribuição das tensões difere.

A FIGURA 11a mostra a tensão σ_{12} de *Cauchy* versus a deformação de cisalhamento F_{12} para a matriz e a fase de inclusão.

FIGURA 11 – TENSÃO DE *CAUCHY* VERSUS DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO: a) σ_{12} VERSUS F_{12} PARA AS FASES INDIVIDUAIS E b) $\bar{\sigma}_{12}$ VERSUS $\bar{F}_{12}$ PARA AS QUATRO DENSIDADES DE MALHA



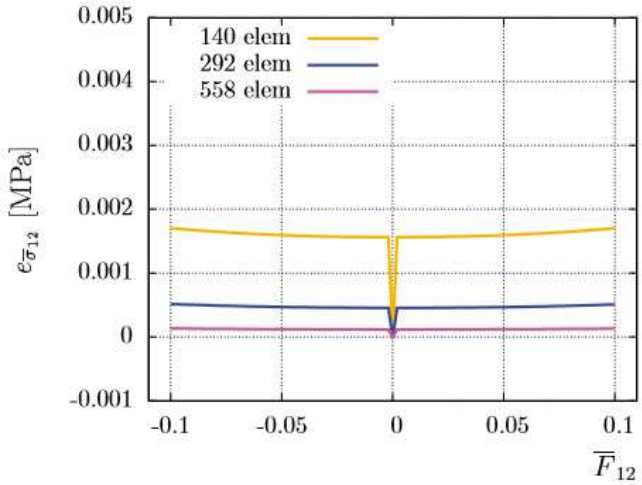
FONTE: Schröder (2014).

As curvas de tensão deformação macroscópicas são praticamente não influenciadas pelas diferentes densidades de malha, conforme a Figura 11b. Embora possam ser observados desvios na microescala entre as simulações deste exemplo.

Assim sendo, nos exemplos seguintes, consideram-se as relações tensão-deformação macroscópicas para todos os quatro níveis de discretização, e a distribuição da tensão local na microescala só é representada para a melhor densidade da malha.

O desvio relativo, definido como $e_{\bar{\sigma}_{12}} = \left(\bar{\sigma}_{12} - \bar{\sigma}_{12}{}^{[970elem]}\right)/\bar{\sigma}_{12}{}^{[970elem]}$, para $\bar{\sigma}_{12}{}^{[970elem]} \neq 0$, as tensões macroscópicas de *Cauchy*, discretizada com 970 elementos são representados na FIGURA 12. Tal como esperado, o desvio das tensões é reduzido ao longo de um aumento do número de elementos finitos; no entanto, o erro relativo é inferior a $0{,}2\%$.

FIGURA 12 – ERRO RELATIVO $e_{\bar{\sigma}_{12}}$ PARA DIFERENTES DISCRETIZAÇÕES NA MICROESCALA EM RELAÇÃO AO MELHOR NÍVEL DE DISCRETIZAÇÃO (970 ELEMENTOS)



FONTE: Schröder (2014).

Matriz Elasto-Plástica e Inclusão Elástica: No seguinte exemplo, considera-se, novamente, um teste de cisalhamento puro na macroescala e um comportamento elástico de inclusão. Em contraste com o exemplo anterior, o comportamento da matriz agora é considerado elasto-plástico. No domínio elástico, o mesmo módulo de elasticidade instantâneo é considerado para ambas as fases e, para o comportamento elasto-plástico da fase da matriz,

define-se o modelo finito J_2-plasticidade. Os parâmetros dos materiais para a matriz de fase são dados na TABELA 2. As relações tensão-deformação para a matriz e o material de inclusão para o ensaio de cisalhamento puro estão representados na FIGURA 12f.

TABELA 2 – PARÂMETROS DOS MATERIAIS DA MATRIZ DE FASE

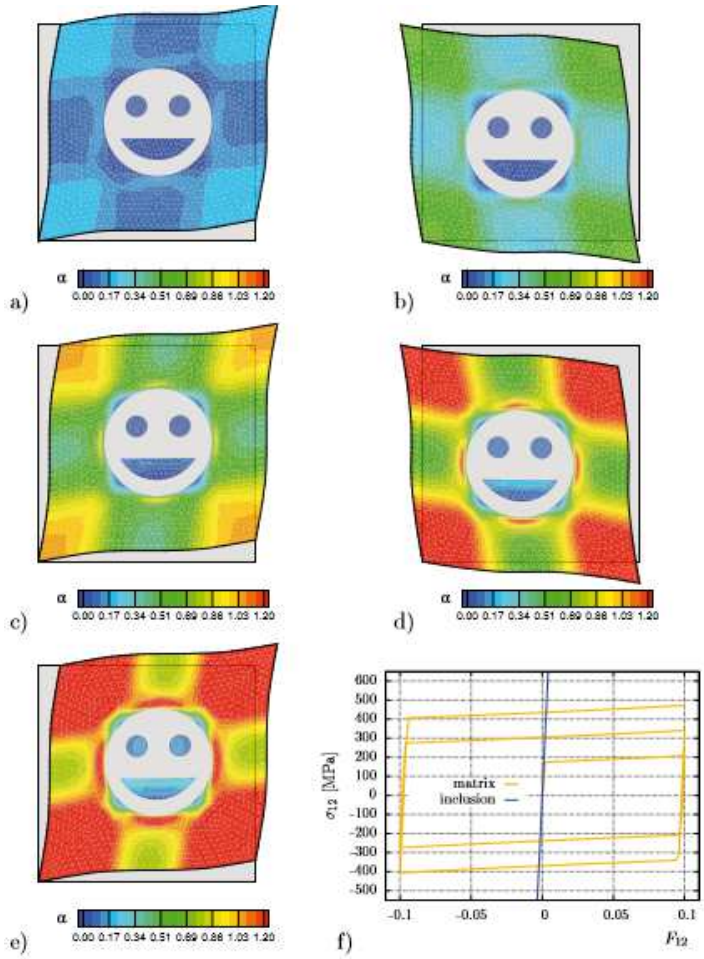
Fase	$\boldsymbol{\lambda}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{\mu}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{y_0}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{y_\infty}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{\eta}\ (-)$	$\boldsymbol{h}\ (-)$
Matriz	118846,2	79230,77	300,0	300,0	0,0	500,0

FONTE: Schröder (2014).

As simulações são realizadas novamente para os quatro níveis de discretização sob a condição de cisalhamento puro descrito pelas Eqs. (134) e (135). Como mencionado no exemplo anterior de fases puras elásticas, representa-se a distribuição dos campos locais só para o melhor discretização do EVR com 970 elementos.

Desde que o comportamento da fase da matriz seja elasto-plástico, estuda-se a evolução das deformações plásticas equivalentes dentro desta fase microscópica. Na Figura 13a-e, estas quantidades são mostradas nos pontos de inflexão do carregamento. As deformações plásticas na fase da matriz aumentam durante todo o processo de carga, e no estado final, praticamente a região completa em torno do *smiley*, exibe deformação plástica. Porém, no interior dos *olhos* e *boca*, as deformações plásticas equivalentes permanecem em um nível comparativamente baixo. Este comportamento se torna óbvio, uma vez que a forma da inclusão permanece praticamente não deformada devido à sua maior rigidez.

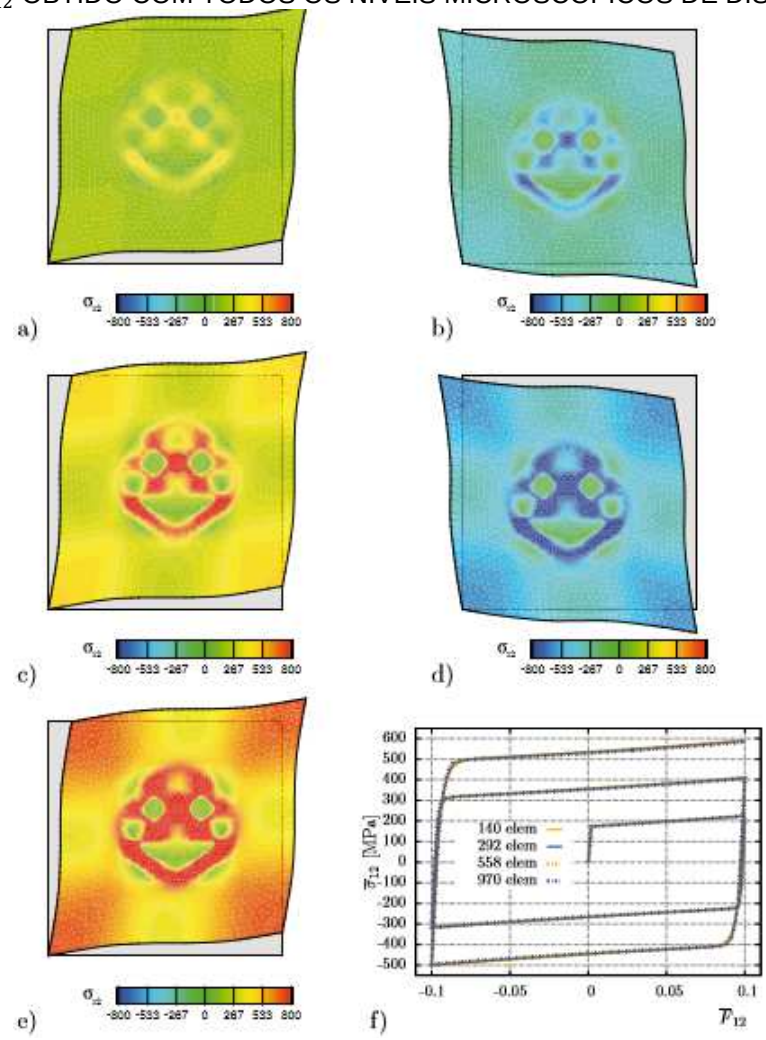
FIGURA 13 – DISTRIBUIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EQUIVALENTES α NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 1° CC c) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 2° CC d) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 2° CC e) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 3° CC. A INCLUSÃO DA FASE É APAGADA DEVIDO AO SEU COMPORTAMENTO PURAMENTE ELÁSTICO. f) TENSÃO DE CAUCHY σ_{12} VERSUS F_{12} PARA AS FASES INDIVIDUAIS



FONTE: Schröder (2014).

Na FIGURA 14a-e, a distribuição do coeficiente de tensão microscópica de *Cauchy* σ_{12} é mostrada para diferentes estados de carga, as quais são obtidas pela condição macroscópica de cisalhamento puro devido ao tensor de deformação macroscópica dado pela Eq. (134). A resposta de tensão macroscópica é quase a mesma para todos os diferentes níveis de discretização microscópica, conforme a FIGURA 14f. Nos pontos de inflexão do carregamento as componentes de tensão microscópicas σ_{12}, dentro a maioria das partes da fase de inclusão, é maior em comparação com a fase de matriz. Apenas a região perto das *bochechas* do *smiley* mostra os níveis mais baixos de tensão.

FIGURA 14 – A DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CAUCHY σ_{12} NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA a) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 1° CC c) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 2° CC d) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 2° CC e) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO MACROSCÓPICA DE *CAUCHY* σ_{12} VERSUS F_{12} OBTIDO COM TODOS OS NÍVEIS MICROSCÓPICOS DE DISCRETIZAÇÃO



FONTE: Schröder (2014).

Matriz Elasto-Plástica e Inclusão Elasto-Plástica: Considerando a mesma situação de cisalhamento puro com um carregamento cíclico, estuda-se agora a resposta mecânica macroscópica e microscópica da microestrutura *smiley* quando ambas as fases, a matriz e a inclusão, tem um comportamento elasto-plástico. Os parâmetros dos materiais são indicados na TABELA 3. A resposta individual do material de fases, na situação de cisalhamento puro, é mostrada na FIGURA 15f. Nota-se que os parâmetros são escolhidos para a fase de inserção de tal modo que quase nenhum endurecimento é obtido durante o processo de carregamento.

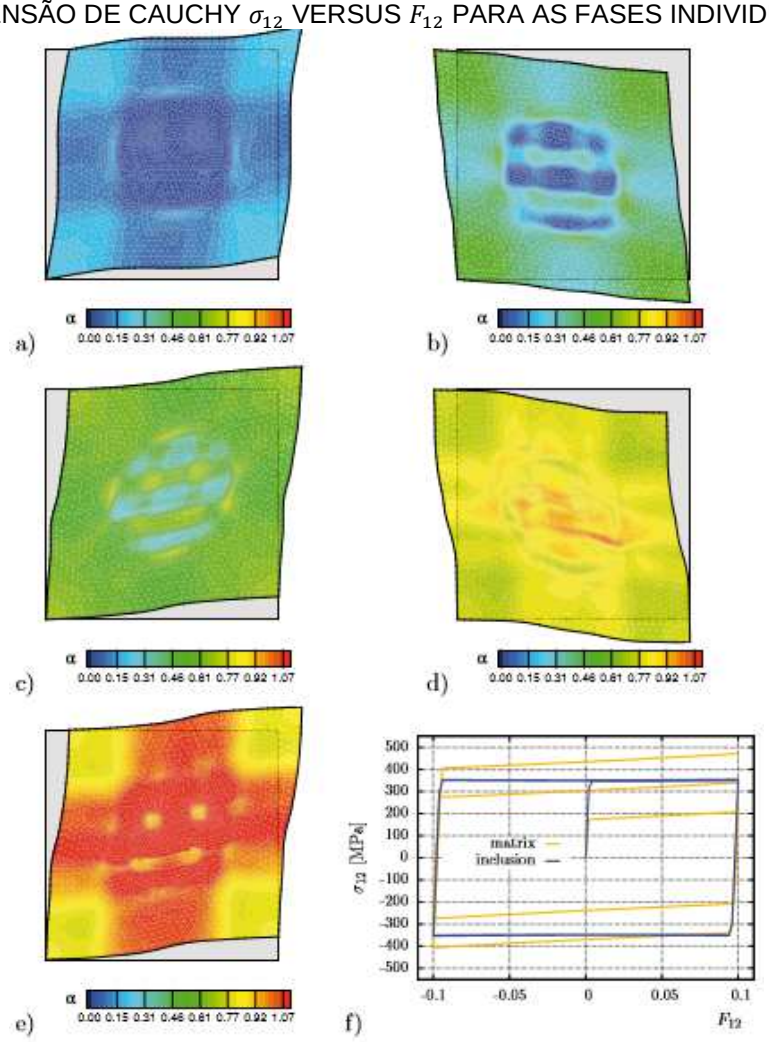
TABELA 3 – PARÂMETROS DOS MATERIAIS DA MATRIZ DE FASE

Fase	$\boldsymbol{\lambda}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{\mu}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{y_0}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{y_\infty}\ (\boldsymbol{MPa})$	$\boldsymbol{\eta}\ (-)$	$\boldsymbol{h}\ (-)$
Matriz	118846,2	79230,77	300,0	300,0	0,0	500,0
Inclusão	118846,2	79230,77	600,0	1000,0	0,0	10,0

FONTE: Schröder (2014).

Utilizando as quatro malhas mostradas na FIGURA 9 para a discretização do *smiley* na microescala, são realizados os quatro processos de carregamento cíclicos. Na FIGURA 15a-e, a evolução das deformações plásticas equivalentes α na microescala é mostrada nos pontos de inflexão e no estado final do processo de carga. No segundo e terceiro pontos de inflexão, as deformações plásticas são mais baixas quase que em toda a fase de inserção em relação a fase de matriz, e no próximo ponto este aspecto é mudado. A razão para esta observação, fica clara ao se realizar um olhar mais atento ao comportamento das fases individuais na FIGURA 15f. Até o terceiro ponto de inflexão, as tensões produzidas no interior da fase de matriz são mais baixas do que as da fase de inclusão, isto deve-se à baixa taxa de endurecimento da fase de inserção. Após este ponto, a relação inverte e as deformações plásticas aumentam na fase de inclusão. Assim, no estado final (média local) as deformações plásticas equivalentes são mais elevadas na fase de inclusão em relação a fase de matriz.

FIGURA 15 – DISTRIBUIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS EQUIVALENTES α NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 1° CC c) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 2° CC d) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 2° CC e) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO DE CAUCHY σ_{12} VERSUS F_{12} PARA AS FASES INDIVIDUAIS

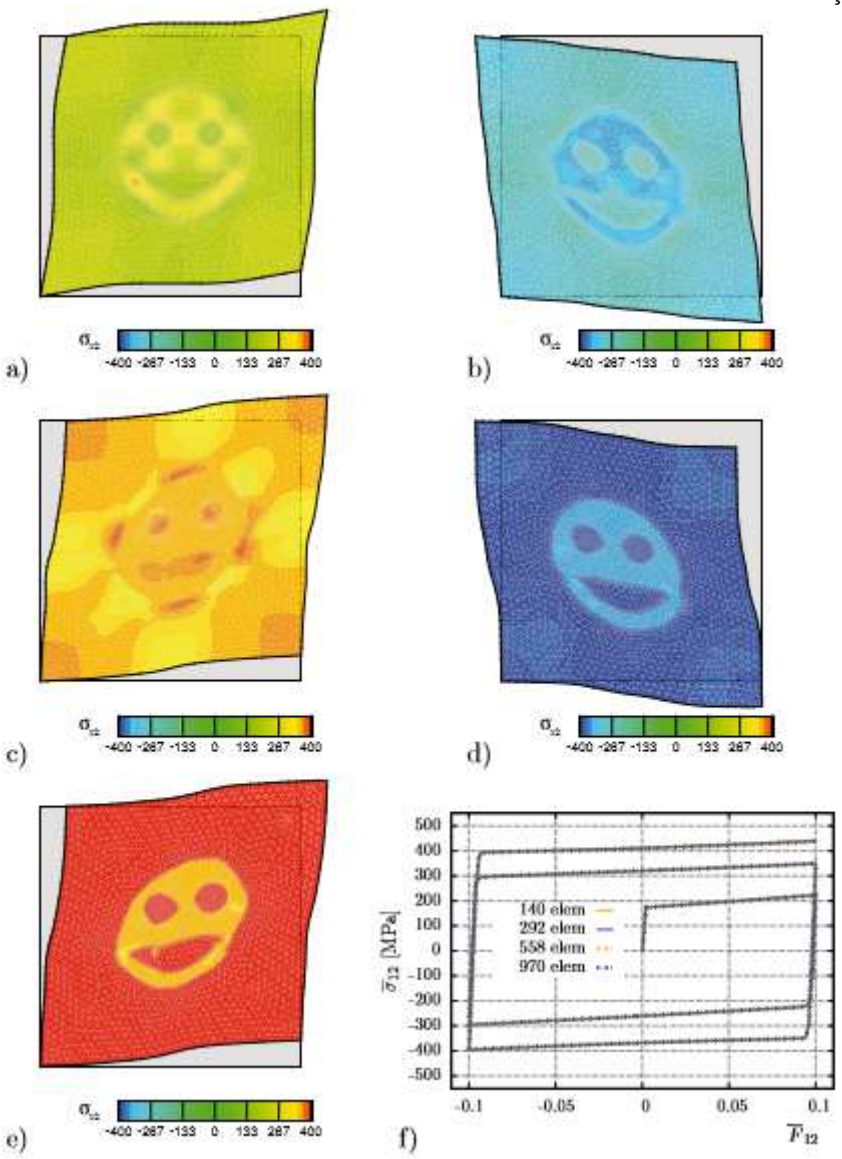


FONTE: Schröder (2014).

A resposta mecânica macroscópica da microestrutura obtida por cálculos utilizando os diferentes níveis de discretização está representada na FIGURA 16f. A distribuição dos componentes da tensão microscópica σ_{12} também é mostrada na FIGURA 16a-e para todos os pontos de inflexão, em que utilizam-se os resultados do nível mais fino de discretização. Mais uma vez, as diferentes densidades de malha resultam em uma resposta macroscópica quase igual. A distribuição de tensões microscópicas correlaciona, inversamente, às deformações plásticas equivalentes na microescala. Até o terceiro ponto de inflexão, o componente de tensão na inclusão é mais elevado em relação a fase de matriz. Porém, em seguida isso inverte, e a distribuição de tensões na matriz

apresenta valores maiores. Este efeito é também causado pelas diferentes propriedades de endurecimento das fases individuais.

FIGURA 16 – A DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CAUCHY σ_{12} NA MICROESCALA (970 ELEMENTOS) COM COEFICIENTE DO GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO MACROSCÓPICA: a) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 1° CICLO DE CARGA (CC) b) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 1° CC c) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 2° CC d) $\bar{F}_{12} = -0{,}1$ NO 2° CC e) $\bar{F}_{12} = 0{,}1$ NO 3° CC f) TENSÃO DE CAUCHY σ_{12} VERSUS F_{12} OBTIDO COM TODOS OS NÍVEIS MICROSCÓPICOS DE DISCRETIZAÇÃO



FONTE: Schröder (2014).

4.2 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MISTURAS ASFÁLTICAS

Nesta sessão, apresentam-se os resultados experimentais e numéricos obtidos no trabalho de Souza (2005).

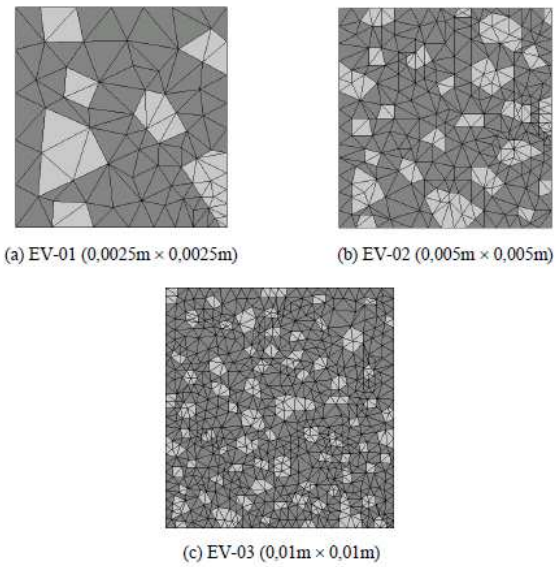
Desenvolve-se um modelo computacional em duas escalas para a previsão do comportamento mecânico de misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ), na qual o comportamento da macroescala homogênea é determinada a partir dos efeitos da microescala heterogênea.

Determinam-se em laboratório as propriedades viscoelásticas do mastique, ligante, correspondente à mistura Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ) estudada.

4.2.1 Determinação do EVR

No presente estudo, o EVR foi fundamentado em dois critérios: o módulo de relaxação dos elementos de volume e o coeficiente de variação do tamanho, pertinente à área geométrica, dos agregados. As malhas de elementos finitos utilizadas são apresentadas na FIGURA 17, as quais possuem 129, 477 e 1313 elementos $T3$, respectivamente.

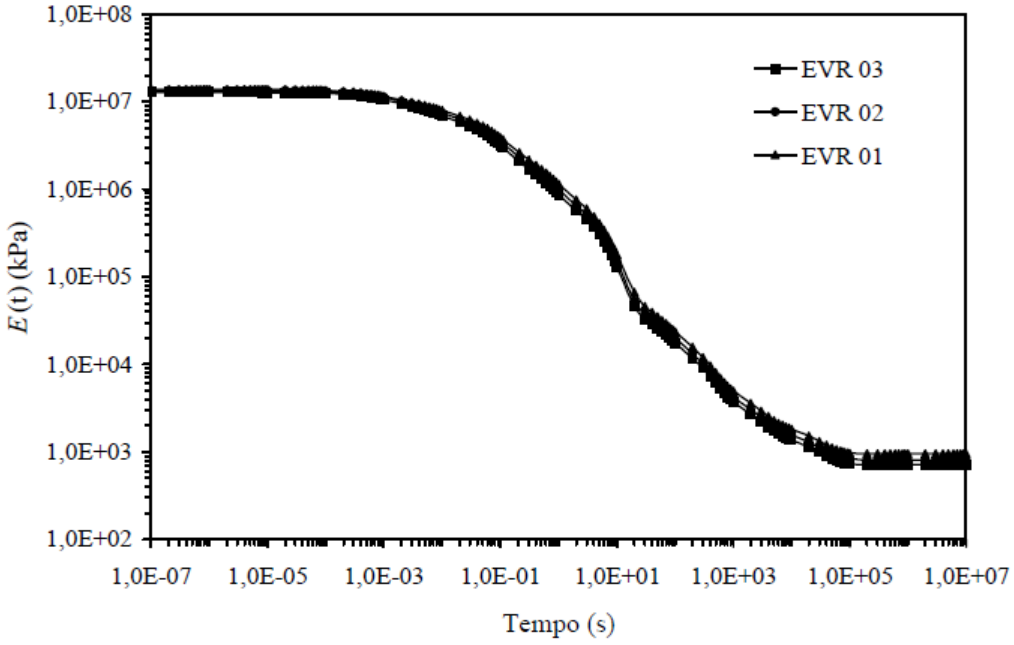
FIGURA 17 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS USADAS NA DETERMINAÇÃO DO EVR



FONTE: Souza (2005).

O módulo de relaxação dos elementos de volume foi definido a partir do trabalho de Allen e Yoon (1998). A FIGURA 18 ilustra a resposta numérica para três elementos de volume.

FIGURA 18 – MÓDULO DE RELAXAÇÃO PARA OS ELEMENTOS DE VOLUME SELECIONADOS



FONTE: Souza (2005).

Os coeficientes de variação do tamanho dos agregados para os três elementos de volume, usado como critério geométrico e determinado pela razão entre o desvio padrão e a média da área geométrica dos agregados, foram de $0{,}59$; $0{,}51$ e $0{,}50$ para os elementos de volume $EV-01$, $EV-02$ e $EV-03$, respectivamente.

4.2.2 Propriedades Viscoelásticas

No intuito de melhor entender o comportamento mecânico da mistura asfáltica, desenvolve-se um estudo das mudanças na forma e no fluxo do material , englobando todas as variantes.

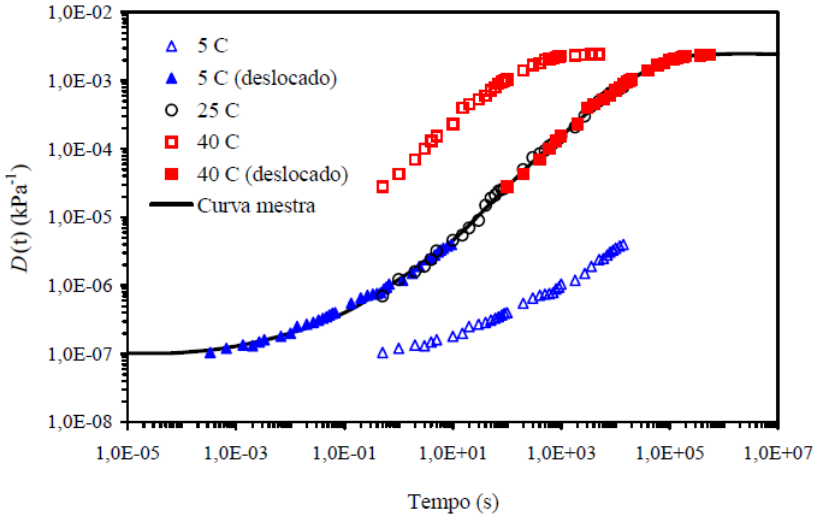
4.2.2.1 Função Fluência do Mastique

A função fluência é definida experimentalmente através do ensaio *creep* e será empregada na determinação do módulo de relaxação do mastique, o qual constitui dado de entrada do problema micromecânico nas simulações numéricas.

Na presente análise a função fluência e o coeficiente de *Poisson* foram obtidos experimentalmente, sendo o módulo de relaxação determinado a partir da representação na forma de série de *Prony* da função fluência (SOUZA, 2005).

O coeficiente de Poisson obtido foi de $0{,}4$ e a FIGURA 19 mostra a função fluência do mastique obtida para as temperaturas de $5^{\circ}C$, $25^{\circ}C$ e $40^{\circ}C$ e a curva mestra para a temperatura de referência, T_R, de $25^{\circ}C$, obtida a partir da translação das curvas a $5^{\circ}C$ e $40^{\circ}C$.

FIGURA 19 – FUNÇÃO FLUÊNCIA DO MASTIQUE E A CURVA MESTRA

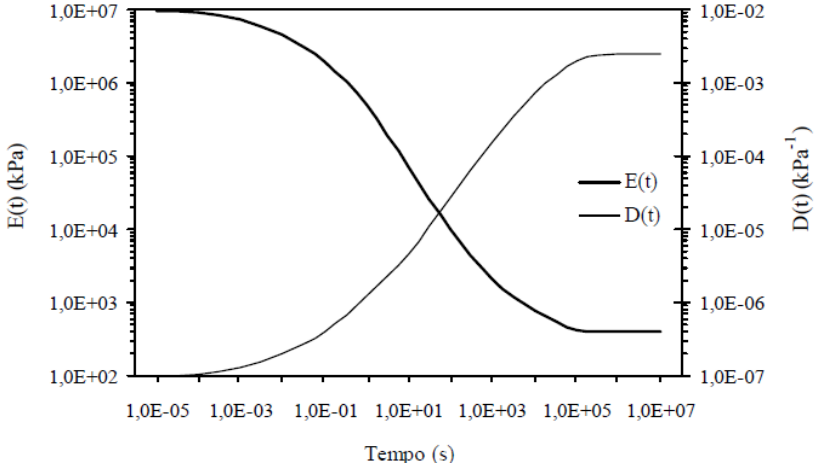


FONTE: Souza (2005).

4.2.2.2 Módulo de Relaxação do Mastique

Seguindo-se o mesmo procedimento o mesmo procedimento usado por Park e Schapery (1999), desenvolve-se formulações matemáticas necessárias para de se determinar o módulo de relaxação, $E(t)$, a partir da função fluência, $D(t)$. A FIGURA 20 mostra o módulo de relaxação do mastique, juntamente com a função fluência a partir da qual o módulo de relaxação foi determinado.

FIGURA 20 – FUNÇÃO FLUÊNCIA DO MASTIQUE E A CURVA MESTRA



FONTE: Souza (2005).

Os resultados obtidos foram verificados e o erro máximo calculado foi de $1{,}0\%$.

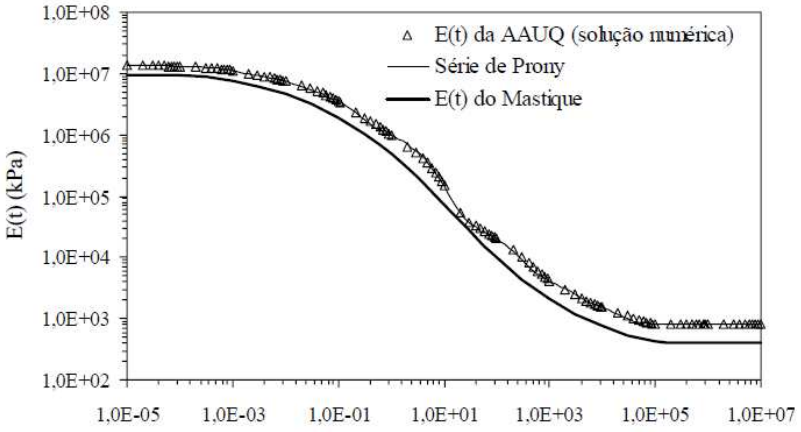
4.2.2.3 Módulo de Relaxação do Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ)

O módulo de relaxação da mistura em AAUQ foi determinado através da homogeneização da solução numérica de um problema micromecânico, onde se considera a heterogeneidade do material e a dissipação de energia devido ao comportamento viscoelástico do mastique. No entanto, não foi considerado a evolução do dano na forma de trincas (SOUZA, 2005).

As propriedades elásticas dos agregados estão fundamentadas no trabalho de Mehta e Monteiro (1993), sendo o módulo de elasticidade igual a $40{,}5\ GPa$ e o coeficiente de *Poisson* igual a $0{,}15$.

Assim sendo, de posse dos resultados numéricos, determinou-se um coeficiente de *Poisson* de $0{,}4$ e o módulo de relaxação mostrado na FIGURA 21.

FIGURA 21 – MÓDULO DE RELAXAÇÃO DA AAUQ



FONTE: Souza (2005).

A FIGURA 21 retrata uma comparação entre os módulos de relaxação da AAUQ e do mastique. Observa-se desta figura que a adição de agregados ao mastique aumenta a rigidez do material de forma não homogênea ao longo da escala de tempo. Isto se deve principalmente às interações entre o mastique e os agregados desenvolvidas durante o processo de relaxação do mastique.

4.2.2.4 Calibração dos Parâmetros de Dano

Dentre muitas vertentes, há três principais campos para tratar os fenômenos físicos em AAUQ: mecânica do contínuo, Mecânica da Fratura e Mecânica do Dano. Embora possua grande complexidade, a Mecânica do Contínuo é válida enquanto o meio for, de fato, contínuo, com propriedades constantes do material. Quando inicia-se um processo de não linearidade geométrica ou física, como o processo de fissuração do pavimento e descontinuidades, a mecânica do contínuo não é mais capaz de tratar destes fenômenos, sendo necessário utilizar-se ou da mecânica da fratura ou da Mecânica do Dano.

O entendimento da diferença entre essas duas ciências é fundamental para o enfoque do fenômeno físico que se deseja analisar. Segundo Lemaitre e Chaboche (1985), enquanto a mecânica da fratura lida com as condições de propagação de uma fissura macroscópica, específica, imersa num meio contínuo íntegro, a Mecânica do Dano se ocupa do efeito, sobre a resposta do material,

de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta.

A teoria permite descrever localmente, observando-se um ‘volume representativo’ do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do elemento de volume (PROENÇA, 2000a).

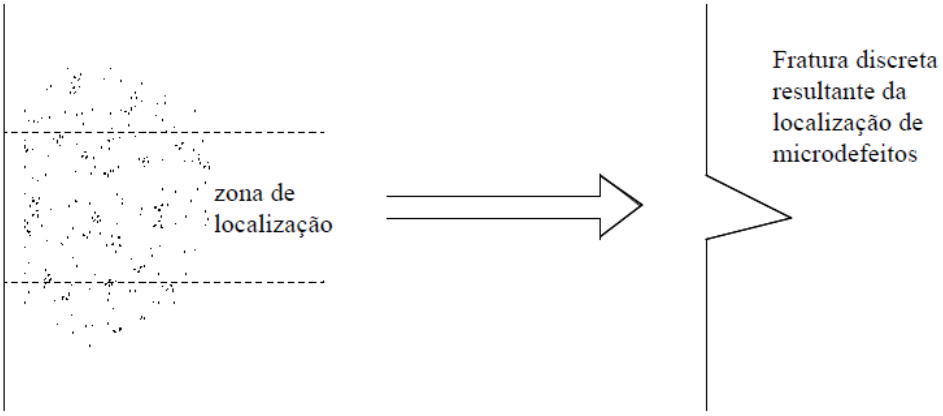
Segundo Janson e Hult (1977), a diferença entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura é, em síntese, que:

• na Mecânica do Dano a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuras ou poros) considerado continuamente distribuído; e

• na Mecânica da Fratura a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto.

A FIGURA 22 apresenta o processo de transição entre o dano e a fratura.

FIGURA 22 – PROCESSO DE TRANSIÇÃO ENTRE DANO E FRATURA



FONTE: Driemeier (1995).

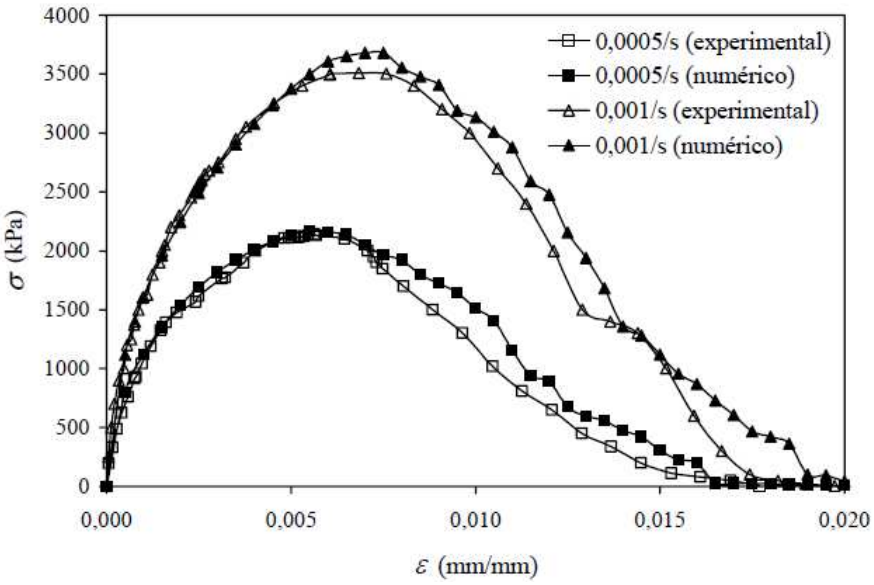
Assim, os parâmetros de dano foram calibrados a partir da simulação numérica do ensaio de tração direta para o EVR e da comparação dos resultados numéricos com os obtidos experimentalmente (SOUZA, 2005).

Devido a correlação da evolução do dano com a taxa de deformação, os parâmetros do modelo constitutivo de dano foram ajustados para índices de

$0{,}0005/s$ e $0{,}001/s$ respectivamente. Desta forma, os valores calibrados podem ser usados para taxas de deformação distintas. Consequentemente, os parâmetros de dano foram considerados adequados uma vez que a curva tensão X deformação, obtida numericamente, mostrou-se adequadamente próxima à curva definida experimentalmente.

Nas simulações numéricas do ensaio de tração direta, utilizou-se um incremento de tempo de $0{,}5\,s$. O parâmetro empírico de comprimento do material, δ^*, foi de $2{,}5\ 10^{-5}$ para ambas as direções normal e tangencial. Admitiu-se nulo o grau de tensão inicial para a evolução do dano na zona coesiva, σ^f, para ambas as direções normal e tangencial. E os valores dos parâmetros de dano, modelo de zona coesiva micromecânico viscoelástico, A e m, que produziram melhores resultados foram de $1{,}0\ 10^6$ e $4{,}0$, respectivamente. O módulo de relaxação linear das zonas coesivas foi assumido igual ao módulo de relaxação do mastique. A FIGURA 23 ilustra as curvas tensão X deformação experimentais, a média de três corpos de prova, para os critérios citados.

FIGURA 23– CURVAS TENSÃO X DEFORMAÇÃO NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS

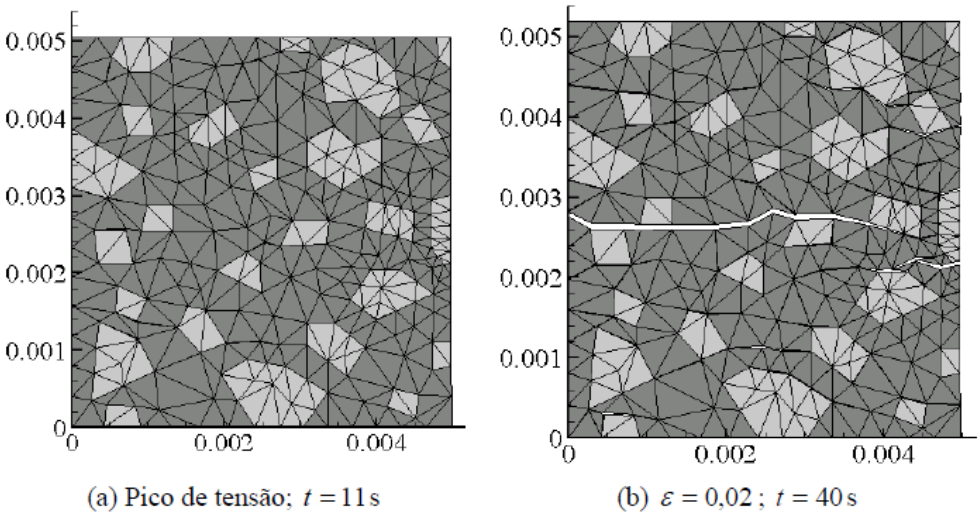


FONTE: Souza (2005).

Observa-se que, a partir das partes iniciais das curvas ilustradas na FIGURA 23, pode-se concluir que as propriedades lineares viscoelásticas do mastique e elásticas dos agregados usadas foram adequadas dada a proximidade entre as curvas numéricas e experimentais.

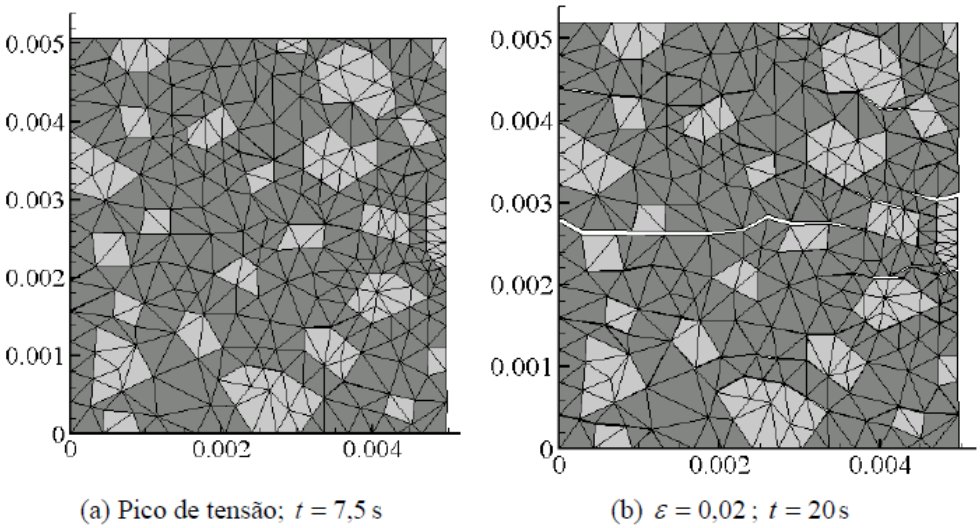
As FIGURAS 24 e 25 representam a configuração do EVR para o pico de tensão e à taxa de deformação de $0{,}02\ mm/mm$ para as taxas de deformação de $0{,}0005/s$ e $0{,}001/s$, respectivamente.

FIGURA 24 – CONFIGURAÇÃO DO EVR PARA A TAXA DE $0{,}0005/s$



FONTE: Souza (2005).

FIGURA 25 – CONFIGURAÇÃO DO EVR PARA A TAXA DE $0{,}001/s$



FONTE: Souza (2005).

Ao analisar as FIGURAS 24 e 25, observa-se que disposição e orientação das macrotrincas bastante semelhantes para ambas as taxas de deformação. Vale ressaltar que, embora não se tenha observado o aparecimento de

macrotrincas para os picos de tensão, pôde-se observar várias microtrincas, embora isto não esteja perceptível nas figuras acima.

É importante salientar que a inclusão de elementos de interface no interior dos agregados pode tornar as análises ainda mais realistas, permitindo, assim, a formação e propagação de trincas no interior dos mesmos.

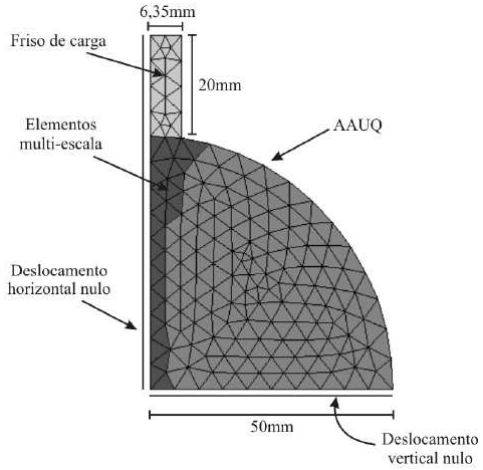
4.2.3 Verificação e Validação do Modelo Multi-Escala

Esta seção apresenta os resultados das simulações numéricas do ensaio de compressão diametral obtidos através do modelo multi-escala e os compara aos resultados obtidos experimentalmente, com o objetivo de verificar e validar o modelo multi-escala aqui desenvolvido para misturas asfálticas.

4.2.3.1 Simulação do Ensaio de Compressão Diametral

A FIGURA 26 mostra o modelo geométrico usado na simulação do ensaio de compressão diametral, destacando os elementos globais multi-escala e as condições de contorno. Portanto, considerou-se apenas um quarto da geometria de modo a reduzir o esforço computacional. Como a espessura dos corpos de prova cilíndricos é pequena, considerou-se o estado plano de tensão nas simulações deste ensaio (SHRP, 1993; ZHANG *et al.*, 1997).

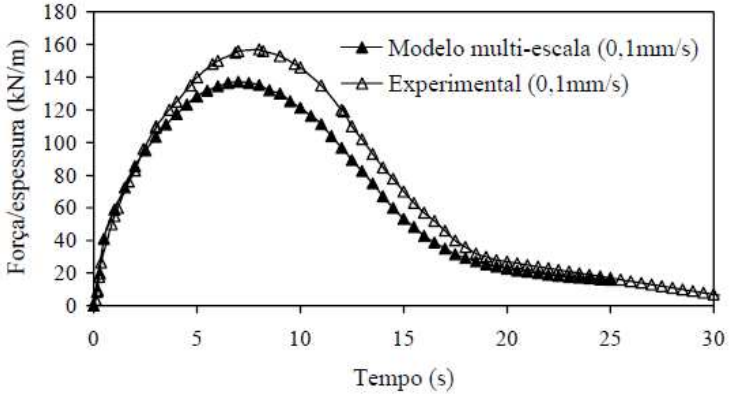
FIGURA 26– MALHA USADA NA SIMULAÇÃO DO ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL



FONTE: Souza (2005).

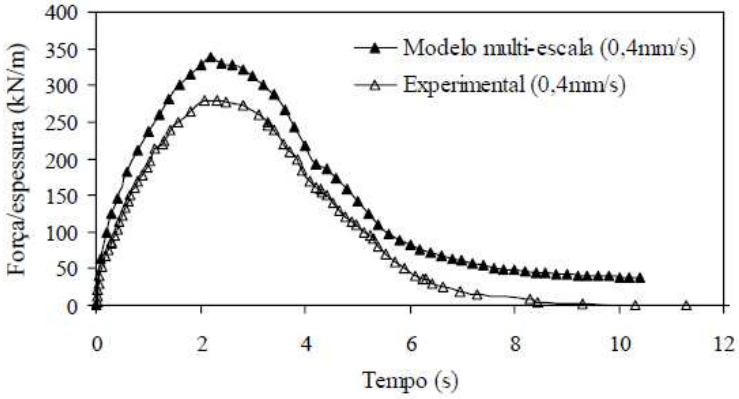
As propriedades constitutivas do mastique, dos agregados e da AAUQ usadas foram dadas anteriormente. Com relação ao friso de carga em aço, usou-se um módulo de elasticidade de $200GPa$ e um coeficiente de *Poisson* de $0{,}3$ (BEER e JOHNSTON, 1995). As taxas de deslocamento diametral usadas foram de $0{,}1mm/s$ e $0{,}4mm/s$. Os incrementos de tempo usados nas simulações numéricas foram de $0{,}5s$ e $0{,}1s$ para as taxas de $0{,}1mm/s$ e $0{,}4mm/s$, respectivamente. De modo a normalizar os resultados experimentais, a força atuante no friso foi dividida pela espessura dos corpos de prova. As FIGURAS 27 e 28 mostram a evolução da força normalizada atuante no friso de carga com o tempo para as taxas de $0{,}1mm/s$ e $0{,}4mm/s$, respectivamente.

FIGURA 27– RESPOSTAS NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$



FONTE: Souza (2005).

FIGURA 28 – RESPOSTAS NUMÉRICAS E EXPERIMENTAIS PARA A TAXA DE $0{,}4\ mm/s$



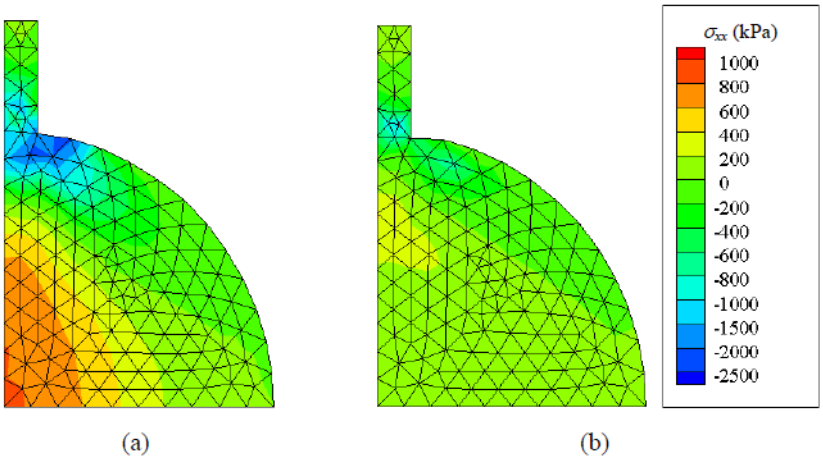
FONTE: Souza (2005).

Observa-se que, nas FIGURAS 27 e 28, os resultados obtidos pelo modelo multi-escala estão coerentes com os resultados experimentais. As

diferenças observadas entre o modelo multi-escala e os resultados experimentais podem ter sido provocadas por diversos fatores, dentre os quais se destacam: o uso de elementos finitos e de interface simples; gradiente de deformações da escala global não é transmitido à escala local e o fato de que os parâmetros modelo constitutivo de dano do foram calibrados e não determinados experimentalmente.

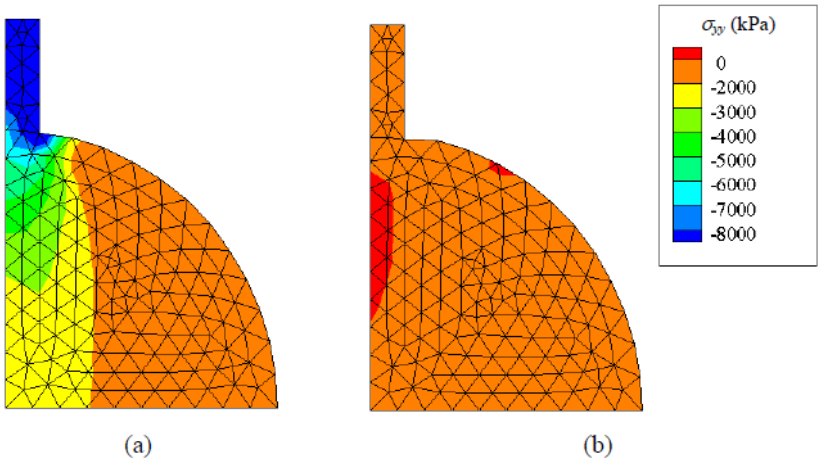
A distribuição das tensões horizontais, verticais e de cisalhamento, no pico da força de reação vertical e ao final da simulação, é mostrada nas FIGURAS 29, 30 e 31, respectivamente, para a taxa de deslocamento de $0{,}1 mm/s$.

FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES HORIZONTAIS, σ_{XX}, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (a) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (b)



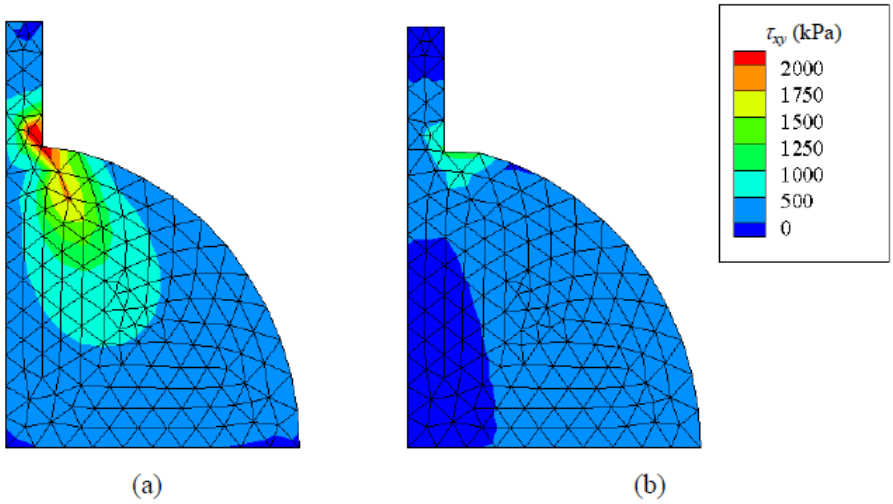
FONTE: Souza (2005).

FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES HORIZONTAIS, σ_{yy}, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (A) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (B)



FONTE: Souza (2005).

FIGURA 31 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES CISALHANTES, τ_{xy}, NO PICO DA FORÇA DE REAÇÃO VERTICAL - (A) E PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$ - (B)

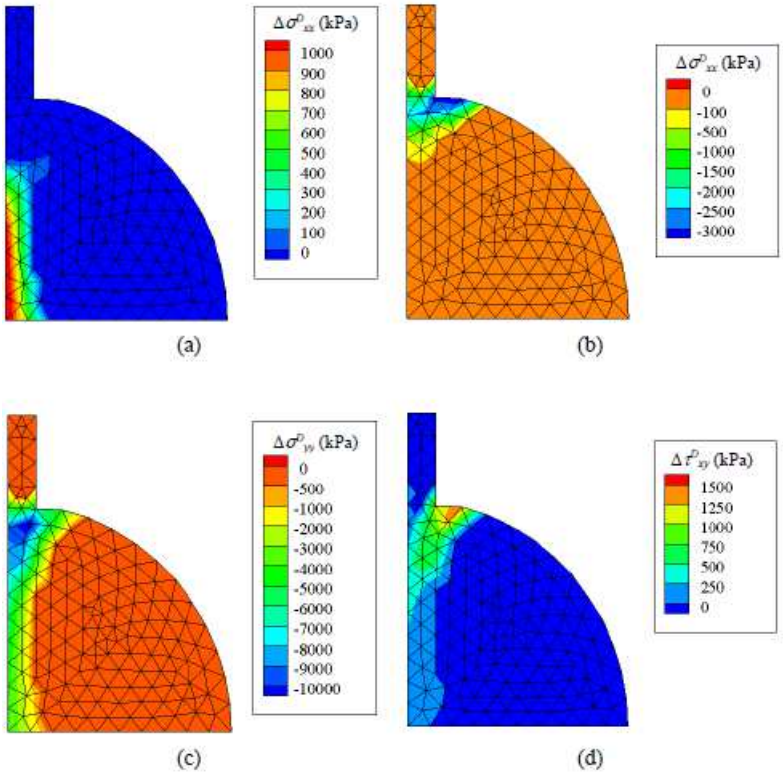


FONTE: Souza (2005).

Souza (2005) observa que, a partir das FIGURAS 29, 30 e 31, a região próxima ao friso de carga é a região mais solicitada em termos de magnitude das tensões. E também, constatou-se que tensões de compressão, verticais e horizontais, e as tensões de cisalhamento máximas são maiores em magnitude do que a tensão horizontal de tração máxima, no centro do corpo de prova.

Com o intuito de definir, qualitativamente, a propagação do dano ocasionado pela dissipação na escala local, simulou-se o ensaio de compressão diametral a uma taxa de $0{,}1mm/s$, considerando-se apenas a escala global. Em seguida, calculou-se a diferença entre as tensões nos elementos, para os casos com e sem elementos de multi-escala, no tempo $t = 25\ s$. A FIGURA 32 representa a distribuição da diferença de tensões, $\Delta\sigma_{ij}^{D}$, no corpo de prova.

FIGURA 32 – DISTRIBUIÇÕES DAS TENSÕES PARA A TAXA DE $0{,}1\ mm/s$: (A) HORIZONAIS DE TRAÇÃO; (B) HOTIZONTAIS DE COMPRESSÃO; (C) VERTICAIS E (D) CISALHANTES



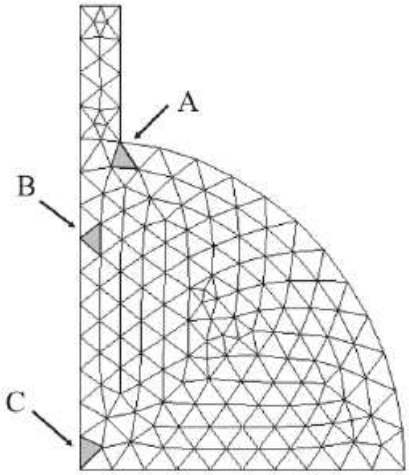
FONTE: Souza (2005).

A FIGURA 32 mostra que as maiores diferenças de tensões, em magnitude, estão localizadas nas proximidades do friso de carga, o que era esperado, visto que tal região é a mais solicitada. Além disso, a redução de tensões compressivas é maior que a redução de tensões de tração.

Desta forma, como o histórico de deformações para o caso não-linear, com dano, difere do histórico de deformações para o caso linear, sem dano, a diferença entre as tensões dos dois casos não corresponde ao valor exato da perda de tensões provocada pela propagação de trincas na escala local. No entanto, esta diferença pode expressar, de forma qualitativa, as regiões mais danificadas (SOUZA, 2005).

Na escala local, escolheu-se três elementos em regiões de solicitações distintas do corpo de prova com o intuito de verificar a evolução do dano, como mostra a FIGURA 33.

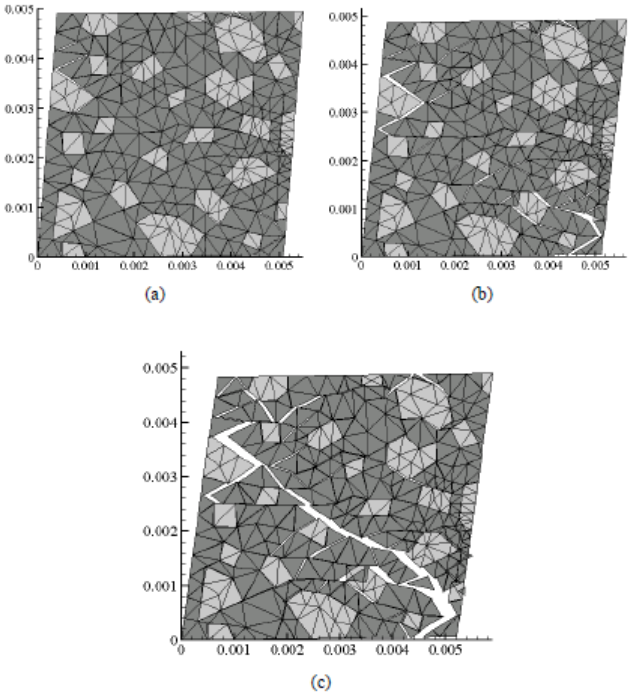
FIGURA 33 – ELEMENTO ESCOLHIDO EM TRÊS REGIÕES DE SOLICITAÇÕES DISTINTAS



FONTE: Souza (2005).

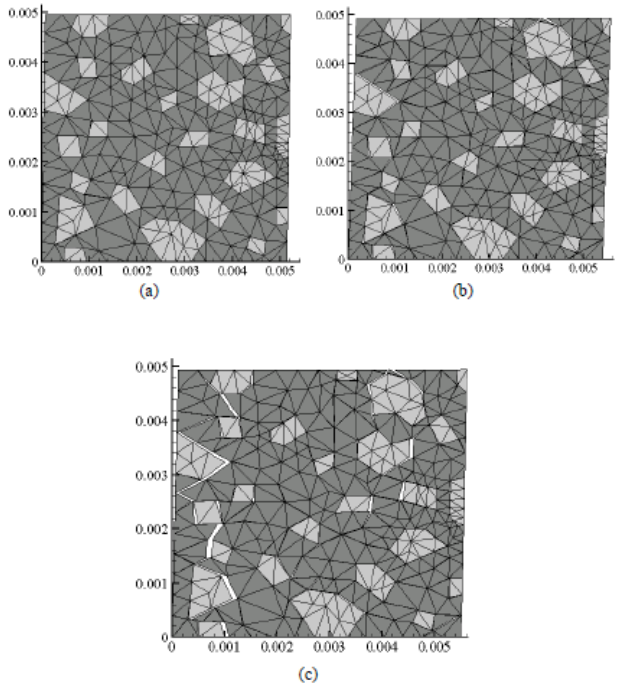
As estruturas locais, para a taxa de $0{,}1mm/s$, nos elementos A, B, e C da FIGURA 33 são aumentadas nas FIGURAS 34, 35 e 36, respectivamente, para determinados tempos.

FIGURA 34 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO A PARA (A) $t = 7\ s$; (B) $t = 8{,}5\ s$ E (C) $t = 10\ s$



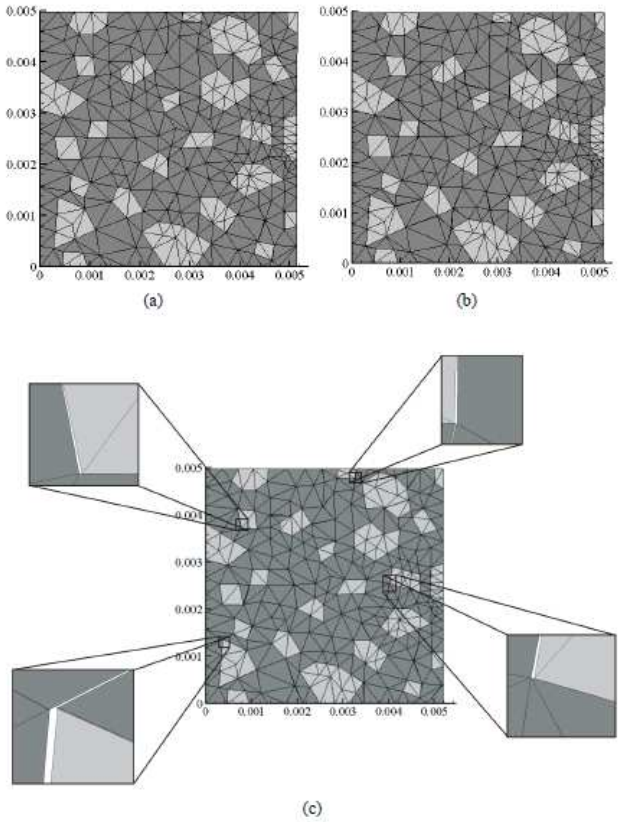
FONTE: Souza (2005).

FIGURA 35 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO B PARA (A) $t = 7\ s$; (B) $t = 8{,}5\ s$ E (C) $t = 10\ s$



FONTE: Souza (2005).

FIGURA 36 – ESTRUTURA LOCAL DO ELEMENTO C PARA (A) $t = 7\ s$; (B) $t = 8{,}5\ s$ E (C) $t = 10\ s$



FONTE: Souza (2005).

Segundo Souza (2005), as FIGURAS 34, 35 e 36 mostram que a região próxima ao friso de carga é a região que primeiro apresentou trincas visíveis na escala local provocadas principalmente pela combinação de tensões compressivas e de cisalhamento. Conforme a simulação, com a redistribuição das tensões ao longo do corpo de prova provocada pela falência estrutural da região próxima ao friso de carga, evidenciada na FIGURA 34, o dano passa a se propagar mais intensamente nas regiões centrais do corpo de prova, onde atuam principalmente tensões verticais de compressão e horizontais de tração, visíveis nas FIGURAS 35 e 36.

Vale ressaltar que os resultados numéricos apresentados por Souza (2005) podem ser ainda melhorados caso todos os elementos globais sejam considerados multi-escala e caso os parâmetros de dano sejam determinados experimentalmente (WILLIAMS, 2001), em vez de calibrados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inúmeras conclusões encontram-se distribuídas ao longo dos capítulos anteriores. Neste capítulo, resumem-se apenas as observações mais importantes e as sugestões relativas ao tema desenvolvido, de modo a permitir a implementação de trabalhos futuros.

5.1 RESUMO E CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou o comportamento de modelos mecânicos, fundamentados nos trabalhos de Souza (2005) e Schröder (2014), através da multi-escala e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Introduziu-se, no capítulo 1, a contextualização do problema, apresentaram-se os objetivos, gerais e específicos, a justificativa, bem como as limitações e a estrutura do trabalho.

No capítulo 2, tratou-se da revisão bibliográfica de trabalhos em métodos de multi-escala e a respectiva formulação para elementos finitos.

Houve preocupação em abordar a fundamentação teórica dos campos envolvidos no problema no capítulo 3. Destacou-se a teoria da multi-escala, com isso, foi possível descrever um elemento de volume representativo, os conceitos

de tensão efetiva, deformação efetiva e princípios gerais de equivalências de respostas constitutivas em termos de energia, deformação e tensão. Apresentaram-se o modelo matemático *Kirchhoff*, que é aplicável às placas finas, e o modelo de elementos finitos utilizados nos estudos de placas com base nas formulações vistas no capítulo anterior.

No capítulo 4, apresentou-se, como exemplo, um teste macroscópico (homogêneo) de cisalhamento puro onde analisa-se a relação tensão-deformação na macroescala para diferentes combinações de equações constitutivas de matriz e fase de inclusão para um EVR artificial. Ainda, foi apresentada a aplicação de um modelo computacional multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos, o qual foi aplicado à modelagem de misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto usinada à Quente (AAUQ).

As modelagens em multi-escala se baseiam no Método dos Elementos Finitos, o que o torna bastante versátil e de fácil aplicação na solução de problemas com diversas geometrias. Basicamente, o programa realiza a análise em duas escalas distintas (global e local). Inicialmente, o procedimento resolve o problema global e determina as deformações de cada elemento global. Em seguida, para cada ponto de integração dos elementos multi-escala, um problema local é resolvido, onde as deformações globais são aplicadas ao Elemento de Volume Representativo. Finalmente, as tensões dos elementos multi-escala são atualizadas com as tensões homogeneizadas no Elemento de Volume Representativo.

Uma das principais vantagens dos modelos multi-escala é a visualização, por parte do analista, das interações entre os constituintes do compósito, o que permite um melhor entendimento do comportamento do material e dos fenômenos de deterioração que ocorrem nas escalas menores e que determinam o comportamento da estrutura na escala maior. A partir deste entendimento mais esclarecido, pode-se, então, projetar materiais mais adequados para cada tipo de aplicação estrutural de modo a possibilitar maior segurança, confiabilidade e economia aos projetos estruturais e permitir um melhor aproveitamento dos materiais.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho abordou apenas alguns aspectos relacionados ao estudo dos modelos de homogeneização do meio contínuo, colaborando com novos dados, esclarecendo alguns aspectos e suscitando novas dúvidas. Há diversas sugestões para trabalhos futuros propostas abaixo.

Implementar os modelos matemáticos propostos por Souza (2005) e Schröder (2014), e consequentemente, elementos finitos e de interface mais robustos.

Estudar a influência das malhas de elementos finitos local e global nos resultados do modelo multi-escala.

Formular e implementar modelos multi-escala com base em outros métodos numéricos, especialmente o Método dos Elementos de Contorno.

Desenvolver e implementar uma metodologia de auxílio ao processo de desenvolvimento de novos materiais compósitos baseada em esquemas multi-escala.

Tendo em conta as conclusões da seção 5.1, é de todo o interesse estudar a resposta de materiais frente à ocorrência de dano em sua estrutura, avaliando o comportamento do material de forma válida para todos os tipos de solicitação, para que seja possível aprofundar a investigação nesta área.

REFERÊNCIAS

ALLEN, D. H. & YOON, C**. Homogenization Techniques for Thermoviscoelastic Solids Containing Cracks**. International Journal of Solids and Structures, 35: 4035-4054, 1998.

ANDRADE, P. V. Q. **Contribuições ao Estudo de Microestruturas Reforçadas**. Revista Eletrônica de Engenharia Civil, 14, 28-45, 2018.

ARCHER, J. S. **Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems.** Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society, 4 (89): 161-178, 1963.

BABUSKA, I. **Upscaling and application - Mathematical and computational problems - In Numerical Solutions of Partial Differential Equations – III**. Academic Press, 1976.

BALL, J. M. **Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity**. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 63:337‑403, 1977.

BEER, F. P. e JOHNSTON, E. R. **Resistência dos Materiais**. 3a ed. Tradução Celso Pinto Morais Pereira. Ed. Makron Books, São Paulo, 1995.

CHEUNG, Y. K. & ZIENKIEWICZ, O. C. **Plates and Tanks on Elastic Foundations – An Application of Finite Element Method**. International Journal of Solids Structures, 4 (1): 451-461, 1965.

CHEUNG, CHEUNG, Y. K., KING, I. P. & ZIENKIEWICZ, O. C. **Slab Bridges with Arbitrary Shape and Support Condition: A General Method of Analysis Based on Finite Elements**. Proc. Inst. Civil Engng., 40: 9–36. 1968.

COURANT, R. **Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations**. Bulletin of American Mathematic Society, 1 (49): 1-23, 1943.

DRIEMEIER, L. **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica**. Dissertação de Mestrado de Dissertação, USP, São Paulo, SP, 1995.

DRUGAN, W. J. & WILLIS J. R. **A Micromechanics-Based Nonlocal Constitutive Equation and Estimates of Representative Volume Element Size for Elastic Composites**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 44:497–524, 1996.

FISH, J. **Practical Multiscaling**. Columbia University: John Willey & Sons, 2014.

GALLAGHER, R. H. & PADLOG, J. **Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis.** AIAA Journal, 6 (1): 1437-1439, 1963.

GIUSTI, S., BLANCO, P., SOUZA NETO, E. A. de & FEIJÓO, R. **An Assessment of the Gurson Yield Criterion by a Computational Multi-Scale Approach**. Engineering Computations, 26, 281-301, 2009.

GUEDES, J. & KIKUCHI, N. **Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 83, 143-198, 1990.

GURSON, A. L. **Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media**. Journal of Engineering Materials and Technology, 99, 2-15, 1977.

HASHIN, Z. **Analysis of Composite Materials - A Survey**. Journal of Applied Mechanics, 50, 481-505, 1983.

HERRMANN, L. R. **Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure.** Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 5 (98): 1333-1336, 1972.

HILL, R. **Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11, 357-372, 1963.

HILL, R. **Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials. Self-Consistent Model.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13:189‑198, 1965.

HILL, R. **On Constitutive Macro-Variables for Heterogeneous Solids at Finite Strain.** Proceedings of the Royal Society London A, 326:131‑147, 1972.

HILL, R. **On Macroscopic Effects of Heterogeneity in Elastoplastic Media at Finite Strain**. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 95:481‑494, 1984.

HOU, T. Y. & WU, X. H. **A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media**. Journal of Computational Physics, 134, 169-189, 1997.

JANSON, J.; HULT, J. **Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach. Journal de Méchanique Appliquée**, v. 1, p. 69—84, 1977.

KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. & BREKELMANS, W. **Multi-Scale Second-Order Computational Homogenization of Multi-Phase Materials: A Nested Finite element solution strategy**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 5525-5550, 2004.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mécanique des matériaux solids**. [S.l.]: Dunod-Bordas, 1985.

LOPES, I. A. R. **Análise do Dano Dúctil Baseada em Modelos Multi-escala**. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2013.

LYN, P. P. & ARYA, S. K. **Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 6 (1): 75-88, 1978.

MANDEL, J. **Plasticit´e Cassique et Viscoplasticit´e**. Number 97 in CISM lecture notes. Springer, 1972.

MATSUI, K., TERADA, K. & YUGE, K. **Two-Scale Finite Element Analysis of Heterogeneous Solids with Periodic Microstructures**. Computers and Structures, 82(7‑8): 593‑606, 2004.

MEHTA, P. K. e P. J. M. MONTEIRO. **Concrete, Structure, Properties and Materials**. Prentice Hall, New Jersey, EUA, 1993.

MELOSH, R. J. **Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method**. AIAA Journal, 7 (1): 19631-1637, 1963.

MIEHE, C. **Computational Micro-to-Macro Transitions for Discretized Micro-Structures of Heterogeneous Materials at Finite Strains Based on the Minimization of Averaged Incremental Energy**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 559-591, 2003.

MIEHE, C. & KOCH, A. **Computational Micro-to-Macro Transitions of Discretized Microstructures Undergoing Small Strains**. Archive of Applied Mechanics, 72, 300-317, 2002.

MIEHE, C., SCHRÖDER, J. & BECHER, M. **Computational Homogenization Analysis in Finite Elasticity: Material and Structural Instabilities on the Micro and Macro-Scales of Periodic Composites and their Interaction**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191:4971‑5005, 2002.

MOLINA, A. J. C. **Computational Homogenization for Multi Scale Finite Element Simulation**. Ph.D. Thesis, University of Wales Swansea, 2007.

MORREY, C. B. **Quasi-Convexity and the Lower Semi-Continuity of Multiple Integrals**. Pacific Journal of Mathematics, 2:25‑53, 1952.

NEMAT-NASSER, S. **Averaging Theorems in Finite Deformation Plasticity**. Mechanics of Materials, 31, 493-523, 1999.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. Dover Publications, 1984.

OÑATE, E. **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Anélisis Estático Lineal.** Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1995.

PELLEGRINO, C., GALVANETTO, U. & SCHREFLER, B. **Numerical Homogenization of Periodic Composite Materials with Non-Linear Material Components**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 1609-1637, 1999.

PROENÇA, P. **Introdução a Mecânica do Dano e Fraturamento: fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos Parte 1**. São Carlos: Notas de aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP), 2000.

REIS, F. J. P. & PIRES, F. M. A. **An Adaptive Sub-Incremental Strategy for the Solution of Homogenization-Based Multi-Scale Problems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 257, 164-182, 2013.

SALIBA, S. S. **Implementação Computacional e Análise Crítica de Elementos Finitos de Placas.** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2007.

SCHRÖDER, J., BALZANI, D., & BRANDS, D. **Approximation of Random Microstructures by Periodic Statistically Similar Representative Volume Elements Based on Lineal-Path Functions**. Archive of Applied Mechanics, 81 (7):975‑997, 2010.

SCHRÖDER, J & HACKL, K. **Plasticity and Beyond Microstructures, Crystal-Plasticity and Phase Transitions**. Springer, Wien Heidelberg, 2014.

SHRP – **Strategic Highway Research Program Resilient Modulus for Asphalt Concrete**. SHRP Test Designation: AC07, Protocol: P07, 1993.

SORIANO, H. L. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: EDUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

SOUZA, F. V. de. **Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Suscetíveis ao Dano**. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, UFC, Fortaleza, Ceará, Brasil, 2005.

SOUZA NETO, E. A. de & FEIJÓO, R. A. **Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation.** LNCC Research and Development Report No. 16/2006. Petrópolis, RJ, Brasil, 2006.

SZABO, B. A. & LEE, G. C. **Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1 (3): 301-310, 1966.

TERADA, K. & KIKUCHI, N. **Nonlinear Upscaling Method for Practical Applications. In Computational Methods in Micromechanics**. ASME, 62: 1-16,1995.

TRUESDELL, C. & NOLL, W. **The Nonlinear Field Theories of Mechanics**. Encyclopedia of Physics, Volume 3. Springer, 1965.

VEUBEKE, B. F. **Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method**. John Wiley e Sons, 1 (9): 145-197, 1965.

WILLIAMS, J. J. **Two Experiments for Measuring Specific Viscoelastic Cohesive Zone Parameters**. Master's Thesis, Texas A&M University, College Station, EUA, 2001.

WILLIS, R. **Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures**. Stationary Office, London, 1849.

WILSON, E. L. & NICKELL, R. E. **Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis**. Nuclear Engineering and Design, 4 (3): 276-286, 1966.

XIA, Z., ZHANG, Y. & ELLYIN, F. **A Unified Periodical Boundary Conditions for Representative Volume Elements of Composites and Applications.** International Journal of Solids and Structures, 40:1907‑1921, 2003.

ZEMAN, J. **Analysis of Composite Materials with Random Microstructure**. PhD thesis, University of Prague, 2003.

ZHANG, W.; A. DRESCHER e D. E. NEWCOMB. **Viscoelastic Analysis of Diametral Compression of Asphalt Concrete**. Journal of Engineering Mechanics, v. 123, n. 6, p. 596-603, 1997

ZIENKIEWICZ, O. C. & CHEUNG, Y. K. **Finite Element in the Solution of Field Problems**. The Engineer, 1 (200): 507-510, 1965.

ZIENKIEWICZ, O. C. & CHEUNG, Y. K. The **Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics**. McGraw-Hill Publishing Company Ltd, 1967.

ZIENKIEWICZ, O. C., MAYER, P. & CHEUNG, Y. K. **Solution of Anisotropic Seepage Problems in Finite Elements**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1 (92): 111-120, 1966.

ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPPAN, S. & KING, I. P. **Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material**. Géotechnique, 1 (18): 56-66, 1968.