Belén Cogliati

MODELOS VISCOSOS EM MECÂNICA DOS SOLOS:

Análise de uma equação visco-hipoplástica

São Paulo

2011

Belén Cogliati

MODELOS VISCOSOS EM MECÂNICA DOS SOLOS:

Análise de uma equação visco-hipoplástica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Engenharia

São Paulo

2011

Belén Cogliati

MODELOS VISCOSOS EM MECÂNICA DOS SOLOS:

Análise de uma equação visco-hipoplástica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia Geotécnica.

Orientação: Prof. Dr. José Jorge Nader

São Paulo

2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 3 de dezembro de 2011.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Cogliati, Belén
Modelos viscosos em mecânica dos solos: análise de uma equação visco-hipoplástica / B. Cogliati. -- ed.rev. -- São Paulo, 2011.
104 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Modelos constitutivos 2. Viscoplasticidade 3. Hipoplasticidade 4. Reologia 5. Mecânica dos solos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

Agradecimentos

Ao meu orientador, o Prof. Dr. José Jorge Nader, pela sua dedicação, incentivo, paciência, amor à pesquisa e ao ensino.

Ao Daniel, pelo seu constante apoio, amizade e amor.

A minha família, pela confiança e incentivo.

A María e Sérgio pelo carinho e apoio ao longo dos anos.

Aos meus amigos, especialmente àqueles que me ajudaram a elaborar as figuras, verificar cálculos e textos e discutiram comigo os resultados obtidos.

Resumo

Cogliati, Belén. (2011). *Modelos viscosos em mecânica dos solos: análise de uma equação visco-hipoplástica*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Esta dissertação estuda o comportamento de um modelo visco-hipoplástico proposto por Niemunis (2002), com as funções constitutivas da equação hipoplástica de Nader (2003).

Para entender o papel da viscosidade no comportamento do solo são discutidos o adensamento secundário, a influência da velocidade de deformação na resistência não-drenada e a variação do coeficiente de empuxo com o tempo.

Como etapa preliminar, são apresentados os modelos reológicos simples em uma dimensão, formados por um só elemento (modelos de Hooke, Newton e Saint-Venant) e modelos compostos pela combinação desses elementos (modelos de Maxwell, Bingham, Kelvin- Voigt, sólido linear padrão e visco-plástico com endurecimento). São deduzidas as equações de fluência e relaxação para todos esses modelos.

Em três dimensões, são apresentadas as formulações do modelo visco-hipoplástico de Niemunis (2002) com as funções constitutivas de Nader (2003).

São deduzidas as expressões simplificadas desse modelo para ensaios triaxiais. Em seguida, as equações são aplicadas à simulação de ensaios de compressão isotrópica e compressão não-drenada, com o objetivo de investigar a relaxação e a fluência bem como para analisar a influência dos parâmetros na resposta do modelo.

Palavras chave: modelos constitutivos, viscoplasticidade, hipoplasticidade, reologia, mecânica dos solos.

Abstract

This thesis studies the behavior of the visco-hypoplastic model proposed by Niemunis, using Nader's hypoplastic constitutive equations. To understand the importance of viscosity in soil behavior the following topics are first examined: secondary consolidation, strain rate effects on undrained strength and the time variation of the coefficient of lateral pressure at rest. As a preliminary step, the present work discusses one-dimensional rheological models formed by a single element (Hooke's, Newton's and Saint-Venant's models) or by the combination of these elements (Maxwell's, Bingham's, Kelvin-Voigt's models; the standard linear solid model and the visco-plastic hardening model). For all the rheological models creep and relaxation are investigated.

Niemunis' visco-hypoplastic model with Nader's constitutive equations is presented next. First, simplified expressions of this model for triaxial test are deduced. Then the equations are applied to the simulation of isotropic compression and undrainded compression tests, with the aim of investigating relaxation and creep as well as of analyzing the influence of each parameter on the model response.

Keywords: constitutive models, visco-plasticity, hypoplasticity, rheology, soil mechanics.

1. INTRODUÇÃO 10
2. EFEITOS VISCOSOS NO COMPORTAMENTO DAS ARGILAS 12
2.1. ADENSAMENTO 12
2.2. INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO NA RESISTÊNCIA NÃO DRENADA 17
2.3. VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE EMPUXO COM O TEMPO (RELAXAÇÃO) 21
3. MODELOS REOLÓGICOS 25
4. ELEMENTOS REOLÓGICOS 27
4.1. MOLA DE HOOKE 27
4.2. PISTÃO DE NEWTON 28
4.3. CORPO DE SAINT-VENANT 29
5. EQUAÇÕES REOLÓGICAS COM DOIS ELEMENTOS 31
5.1. MODELO DE MAXWELL 31
5.1.1. Fluência 33
5.1.2. Relaxação 34
5.2. MODELO DE KELVIN-VOIGT 36
5.2.1. Fluência 36
5.2.2. Relaxação 38
5.3. MODELO DE BINGHAM 38
5.3.1. Fluência 39
5.3.2. Relaxação 40
6. MODELOS REOLÓGICOS COM MAIS DE DOIS ELEMENTOS 41
6.1. MODELO DO SÓLIDO LINEAR PADRÃO 41
6.1.1. Relaxação 42
6.1.2. Fluência 44
6.2. MODELO VISCO-PLÁSTICO COM ENDURECIMENTO 46
6.2.1. Relaxação 47
6.2.2. Fluência 50
7. MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO EM 3D 52
7.1. MODELO HIPOPLÁSTICO E EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DE NADER 52
7.2. MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO DE NIEMUNIS 56
7.3. EXEMPLO DE CÁLCULO 58

7.3.1. DADOS DO PROBLEMA 58
7.3.2. CÁLCULO DAS CONSTANTES $\boldsymbol{C1}$, $\boldsymbol{C2}$, $\boldsymbol{C3}$, $\boldsymbol{C4}$ E $\boldsymbol{C5}$ 59
7.3.3. CÁLCULO DAS FUNÇÕES $\boldsymbol{\varphi 1}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ E $\boldsymbol{\varphi 2}(\mathbf{T})$ NO INSTANTE INICIAL ($\boldsymbol{to}$) 60
7.3.4. CÁLCULO DE $\boldsymbol{T}$ NO INSTANTE INICIAL ($\boldsymbol{to}$) 61
7.3.5. CÁLCULO DE $\boldsymbol{T}$ NOS DEMAIS INSTANTES ($\boldsymbol{t \neq to}$) 63
8. EQUAÇÕES DO MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO PARA ENSAIOS TRIAXIAIS 65
9. RESPOSTA DO MODELO NA COMPRESSÃO ISOTRÓPICA 71
9.1. RELAXAÇÃO 71
9.2. FLUÊNCIA 74
9.3. INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO 77
10. RESPOSTA DO MODELO NA COMPRESSÃO NÃO- DRENADA 80
10.1. RELAXAÇÃO 83
10.2. FLUÊNCIA 86
11. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS PARÂMETROS $\boldsymbol{Dr}$ E $\boldsymbol{Iv}$ 92
11.1. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA CONSTANTE $\boldsymbol{Dr}$ 92
11.2. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA CONSTANTE $\boldsymbol{Iv}$ 94
12. CONCLUSÃO E SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS 98
13. REFERÊNCIAS 101
14. BIBLIOGRAFIA 103

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho pretende estudar o comportamento de um modelo visco-hipoplástico proposto por Niemunis (2002), com as funções constitutivas da equação hipoplástica de Nader (2003).

Para entender o papel da viscosidade no comportamento do solo serão discutidos no capítulo 2 o adensamento secundário, a influência da velocidade de deformação na resistência não-drenada e a variação do coeficiente de empuxo com o tempo. Para ilustrar esses comportamentos serão apresentados resultados de ensaios obtidos da bibliografia clássica.

Embora o objetivo da pesquisa seja investigar o comportamento de uma equação visco-hipoplástica, como etapa preliminar, serão apresentados no capítulo 3 os modelos reológicos simples: uma mola elástica (modelo de Hooke), um pistão com um líquido viscoso dentro dele (modelo de Newton) e duas placas apoiadas uma contra a outra (Saint-Venant). A seguir, no capítulo 6 serão apresentadas combinações desses modelos, descrevendo-se os modelos reológicos de Maxwell, Bingham, Kelvin-Voigt, sólido linear padrão e o modelo visco-plástico com endurecimento, em uma dimensão, e deduzidas as equações de fluência e relaxação.

No capítulo 7 serão apresentadas as formulações em três dimensões, envolvendo tensores de tensão e deformação, do modelo visco-hipoplástico de Niemunis (2002) com as funções constitutivas de Nader (2003).

Serão deduzidas também as expressões simplificadas desse modelo para ensaios triaxiais, no capítulo 8. Com as equações do modelo visco-hipoplástico em estudo serão reproduzidos ensaios de compressão isotrópica e compressão não drenada para mostrar o comportamento das mesmas na relaxação e na fluência e para analisar a influência dos parâmetros do modelo na sua resposta (capítulos 9 e 10).

Por último, no capítulo 12, serão feitas sugestões para estudos futuros.

O modelo estudado nesta dissertação mostrou que representa melhor o comportamento dos solos do que aquele investigado anteriormente por Talarico (2005) e não requer de ajustes manuais nas iterações realizadas em planilhas eletrônicas, como relatado pelo autor.

CAPÍTULO 2 - EFEITOS VISCOSOS NO COMPORTAMENTO DAS ARGILAS

Como já é bem conhecido, num solo argiloso saturado, os grãos estão envoltos por uma camada de água adsorvida (Terzaghi e Peck,1962). Nas vizinhanças da superfície dos grãos a água adsorvida se encontra fortemente aderida. À medida que se afasta da superfície dos grãos a viscosidade da água diminui até que, a partir de certa distância, a água tem as propriedades da água comum e é chamada de água livre. A água livre é aquela que, por estar mais afastada do grão, consegue circular livremente entre as partículas. Quando o solo é carregado, essa água se movimenta mais facilmente. Esta água livre é aquela que é expulsa durante o ensaio de adensamento. A água adsorvida, por outro lado, é a que se encontra mais próxima dos grãos e está aderida aos mesmos quimicamente. Está tão fortemente aderida aos grãos do argilo-mineral que as forças de contato entre as partículas não são suficientes para expulsar essa água, sendo portanto essa água adsorvida a responsável pela transmissão das forças entre as partículas (Pinto, 2002). Devido à presença desta água adsorvida, a viscosidade passa a ser importante no estudo dos solos argilosos.

Nos itens a seguir se apresentam exemplos do papel da viscosidade no comportamento das argilas.

2.1. ADENSAMENTO

O adensamento é a diminuição do volume de uma camada de solo devido a um acréscimo de carga. Essa compressão se dá pela acomodação dos grãos, acompanhada de fluxo de água, com dissipação da pressão neutra.

Nas argilas saturadas a compressão se processa muito lentamente, em parte pela natureza viscosa dos contatos entre partículas e em parte devido à baixa permeabilidade.

Uma analogia mecânica apresentada por Terzaghi e Peck (1962), para demonstrar o efeito retardador da permeabilidade de um solo elástico sob carga constante, é um dispositivo formado por um recipiente cilíndrico contendo uma série de placas perfuradas separadas por molas (figura 2-1). O espaço entre as placas é preenchido com água. A quantidade de furos nas placas representa a permeabilidade do solo. Quanto mais furos, mais permeável o solo. As molas representam o comportamento elástico da parte sólida do solo. Ao aplicar uma tensão constante na placa superior, a altura das molas fica, num primeiro instante, inalterada por não ter havido tempo de a água atravessar os furos. Neste primeiro instante, o que suporta a carga é a água. Após este instante inicial, as molas começam a se deformar, principalmente as molas da primeira camada, onde a água sai com maior facilidade. A água das demais camadas só sairá quando um pouco de água da camada superior já tiver escoado. Desta forma, a compressão representada pela diminuição de altura das molas ocorre de cima para baixo. Neste dispositivo a água só pode sair pela camada superior, pois a base é impermeável. Se a base do dispositivo fosse perfurada, as primeiras molas a se deformar seriam as superiores e as inferiores, a diminuição de altura das molas ocorreria da base e topo do dispositivo em direção ao interior do mesmo.

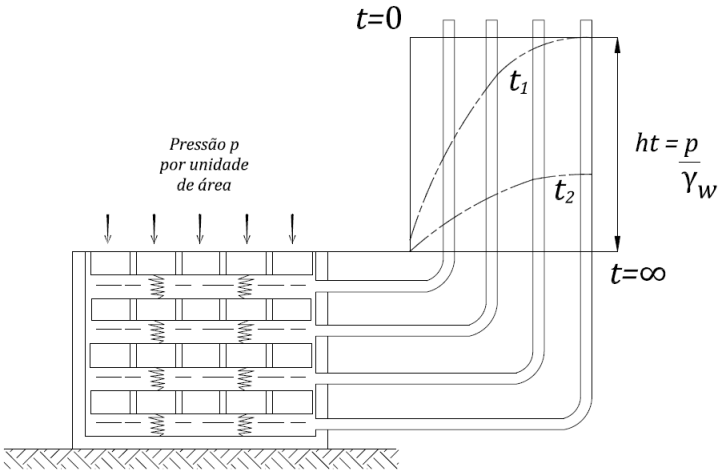


Figura 2-1– Dispositivo para demonstração mecânica do processo do adensamento – Terzaghi & Peck (1962)

O adensamento, obtido em laboratório, através de um ensaio de compressão confinada com uma amostra de argila saturada, é semelhante ao sistema apresentado em até aproximadamente 80% de grau de adensamento (linha contínua na figura 2-2). A partir desse ponto, ao invés da curva tempo-deformação se aproximar de uma assíntota horizontal, como acontece no dispositivo mecânico mola-pistão, a curva da argila saturada continua com uma inclinação suave (linha tracejada na figura 2-2).

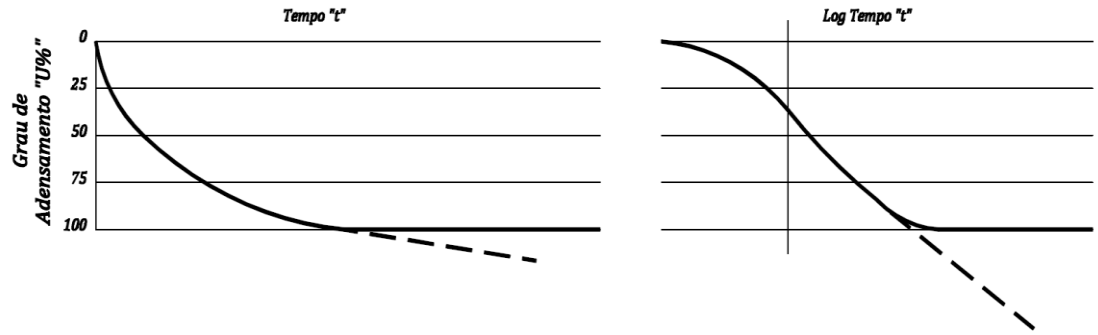


Figura 2-2– Curva tempo – deformação. As linhas cheias representam o comportamento do dispositivo mecânico apresentado na Figura 2-1 – Terzaghi & Peck (1962)

Na prática o adensamento é tratado dividindo-se o problema em duas partes: adensamento primário e adensamento secundário.

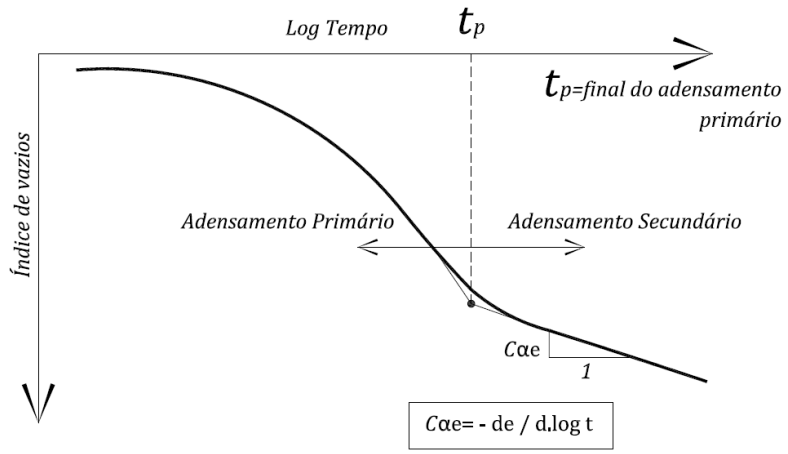


Figura 2-3– Relação idealizada entre o índice de vazios e o logaritmo do tempo mostrando o adensamento primário e o secundário – Mitchell e Soga (2005)

O adensamento primário é explicado pela Teoria do Adensamento Unidimensional de Terzaghi. Esta teoria trata o problema como uma situação simultânea de percolação e deformação com dissipação de pressões neutras, equivalente ao mecanismo apresentado na figura 2-1. E supõe, entre outras hipóteses, variação linear do índice de vazios varia linearmente com o aumento da tensão efetiva, solo completamente saturado e validade da Lei de Darcy.

O adensamento secundário, por sua vez, constitui uma redução volumétrica a tensões efetivas constantes e está associado a deformações viscosas. O adensamento secundário acontece devido ao escorregamento entre partículas, expulsão da água viscosa dos contatos entre grãos de argila e rearranjo das moléculas de água adsorvida e cátions.

A relação entre o índice de vazios, ou deformação, e o logaritmo do tempo é linear na maioria dos solos (Mitchell e Soga, 2005) e por isso o adensamento secundário do solo é expresso pelo coeficiente de adensamento secundário ($C_{\alpha e} = \frac{\Delta e}{\Delta log_{10} t}$; e=índice de vazios e t=tempo, definido também como $C_{\alpha \varepsilon} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta log_{10} t}$; ε=deformação). Segundo Ladd (1973) (apud Vieira, 1988), o coeficiente de adensamento secundário varia com a história de tensões, decrescendo com o sobreadensamento.

Mesmo que o problema seja tratado separadamente, e seja considerado que o adensamento secundário só começa quando o primário houver terminado, existem evidências de que o adensamento secundário se inicia durante o processo de dissipação de pressões neutras (Pinto, 2000).

Sendo assim, o problema poderia ser tratado como um só se, em lugar de tratar o solo como se fosse elástico (mola), fosse utilizado um mecanismo que inclua a viscosidade do solo.

Leroueil et al. (1985) apresentaram um conjunto de ensaios realizados em argilas de Batiscan (Quebec, Canadá) para demonstrar que a relação tensão

efetiva – índice de vazios depende, diferentemente do suposto na Teoria do Adensamento Unidimensional de Terzaghi, do tempo.

Para demonstrar a relação $\sigma'_v - \varepsilon_v - \dot{\varepsilon}_v$ (σ'_v: tensão vertical efetiva, ε_v: deformação e $\dot{\varepsilon}_v$: velocidade de deformação) realizaram dois ensaios de compressão edométrica especiais, onde a velocidade de deformação foi mudada diversas vezes para diferentes valores de deformação. Esta relação é apresentada na figura 2-4.

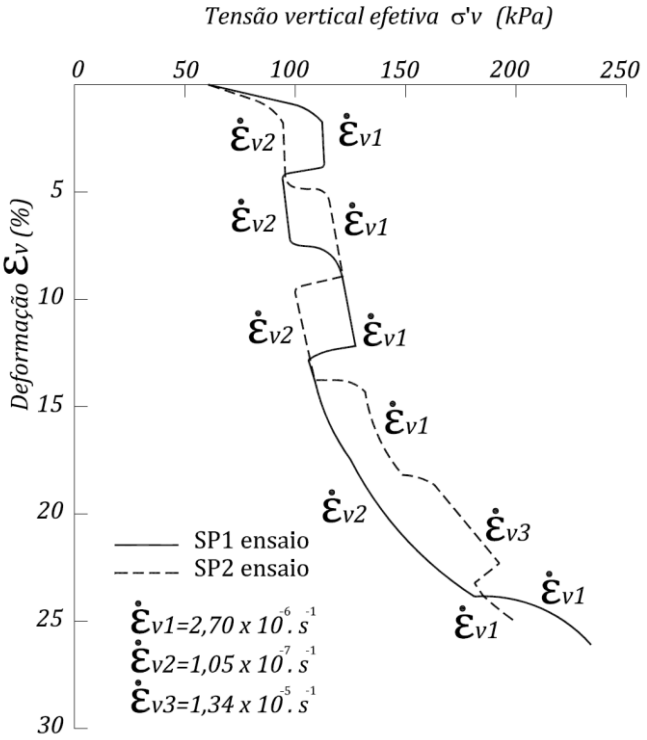


Figura 2-4– Ensaios especiais de compressão edométrica em argila de Batiscan (Quebec, Canadá) - Leroueil et al. (1985)

O ensaio SP1 começou com uma velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}_{v1} = 2{,}7x10^{-6}s^{-1}$ até uma deformação de 3,7%, onde foi mudada para $\dot{\varepsilon}_{v2} = 1{,}05x10^{-7}s^{-1}$ até $\varepsilon_v = 7{,}2\%$ e mudada novamente a $\dot{\varepsilon}_{v1}$. O ensaio na amostra SP2 começou a uma velocidade $\dot{\varepsilon}_{v2}$ até uma deformação de 4,5%, a seguir a velocidade de deformação foi aumentada a $\dot{\varepsilon}_{v1}$ até uma deformação de 8,8% e novamente a $\dot{\varepsilon}_{v2}$. Na amostra SP2 também foi utilizada a velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}_{v3} = 1{,}3x10^{-5}s^{-1}$ entre 17,7% e 21,8% de deformação.

Segundo Leroueil et al. (1985) esta figura demonstra que existe uma relação única entre $\sigma'_v - \varepsilon_v - \dot{\varepsilon}_v$ para esta argila, pelo menos para deformações menores do que 16%. Para deformações maiores do que 23% eles concluíram que a deformação resultou diferente para a mesma velocidade $\dot{\varepsilon}_{v1}$ devido a pequenas diferenças entre as amostras.

Graham, Crooks e Bell (1983) apud Leroueil et al. (1985), também observaram este comportamento em argilas de Belfast.

2.2. INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO NA RESISTÊNCIA NÃO DRENADA

A resistência não-drenada de uma argila pode ser obtida mediante a execução de ensaios de laboratório, de campo ou correlações.

Os ensaios de laboratório em amostras indeformadas que podem ser realizados para determinação da resistência não-drenada das argilas são os ensaios UU (unconsolidated undrained, não-consolidado não-drenado), U (compressão simples) e CU (consolidated undrained, consolidado não-drenado).

No ensaio UU a amostra é submetida à pressão confinante na câmara triaxial e, sem permitir qualquer drenagem, em seguida é submetida à carga axial. Se o corpo de prova estiver saturado, ocorrerá a ruptura sem mudança de volume na amostra. A envoltória de resistência de tensões totais obtida neste ensaio é uma reta horizontal, onde o ponto de interseção com o eixo das ordenadas é a resistência não-drenada. A velocidade na qual é realizado o ensaio possui grande influência no resultado.

No ensaio de compressão simples (U) o corpo de prova é submetido a uma carga axial sem aplicação de confinamento. O ensaio demora de 10 a 15

minutos, não ocorrendo drenagem da amostra. Este ensaio pode ser considerado um caso particular do ensaio UU, com pressão confinante nula.

O ensaio de campo que pode ser realizado para obtenção da resistência não-drenada da argila é o Vane Test ou ensaio da Palheta. Este ensaio, quando corrigido pelo fator de Bjerrum, dá bons resultados (Pinto, 2000).

Outra forma de obter a resistência não-drenada de uma argila são as correlações. A correlação de Mesri (apud Pinto, 2000) pode ser utilizada para obter a resistência não-drenada que deve ser utilizada nos projetos ($S_{u.projeto}$) sendo que a mesma é proporcional à tensão de pré-adensamento (σ'_{vo}), com fator de proporcionalidade igual a 0,22 $\left(\frac{S_{u.projeto}}{\sigma'_{vo}} = 0{,}22\right)$. Esta correlação leva em consideração os fatores de anisotropia e tempo de solicitação.

Existem diversos fatores que afetam a resistência não-drenada obtida a partir de ensaios. Eles são a amostragem, a estocagem, a anisotropia e a velocidade de carregamento ou velocidade de deformação.

A penetração do amostrador no subsolo, a retirada da amostra do amostrador e a moldagem do corpo de prova perturbam a amostra mecanicamente. Além disso, quando a amostra é retirada, o estado de tensões na amostra muda, passando do estado anisotrópico ao estado isotrópico. Estes processos envolvidos na amostragem fazem com que a resistência seja menor do que a de campo.

Durante o procedimento de estocagem ocorre o rearranjo estrutural das partículas e ocorre a perda de pressão neutra negativa, diminuindo a tensão confinante efetiva e consequentemente a resistência.

A seguir se apresenta um esquema de como são transferidas as cargas nas situações indeformada e amolgada (Lambe e Whitman, 1969).

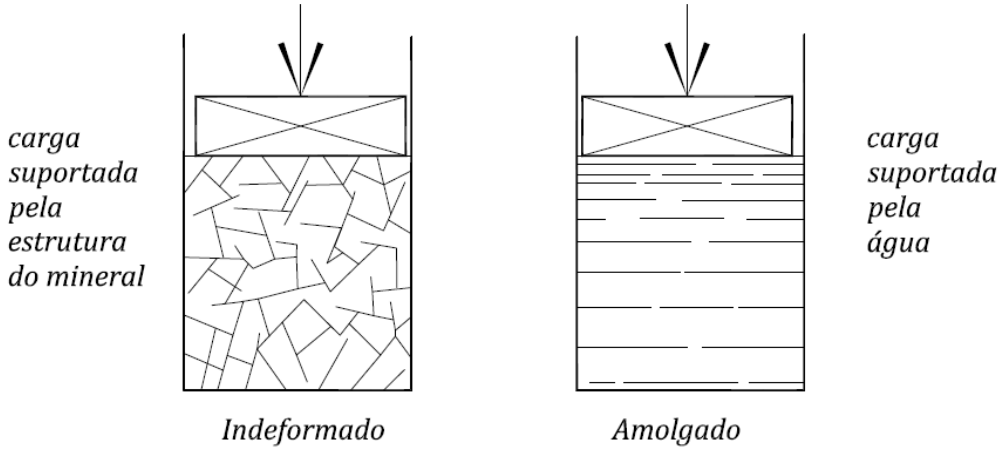


Figura 2-5– Esquema mecânico da transferência de carga durante o amolgamento. Lambe & Whitman (1969)

A resistência de uma camada de solo mole depende também da direção em que é carregada, como mostrado na figura 2-6 a seguir:

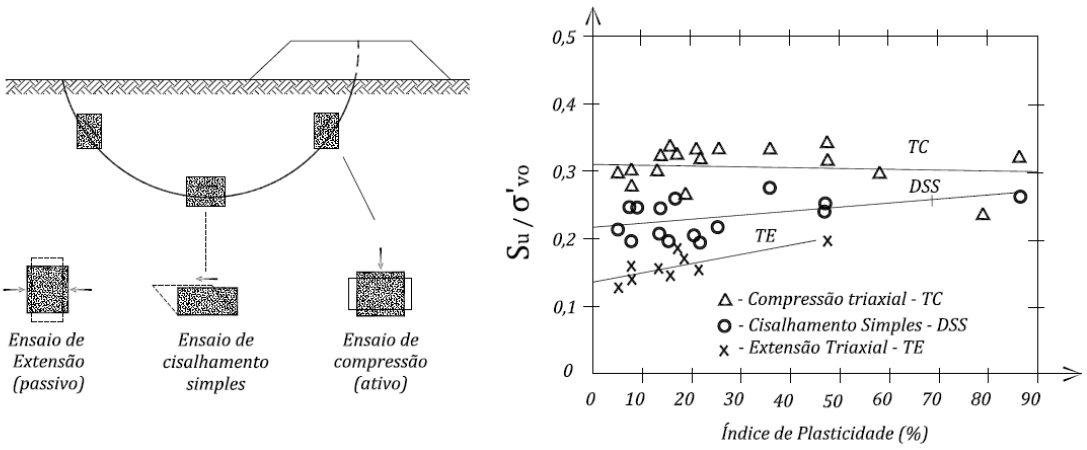


Figura 2-6– Tipos de solicitações no terreno por efeito de carregamento na superfície e resultados típicos de cada solicitação. Pinto (2000). S_u: resistência não drenada e σ'_{vo}: tensão de pré-adensamento.

Por último, e o mais importante no nosso assunto, é a influência da velocidade com que a amostra é carregada, ou o tempo que ela leva para se deformar, no valor da resistência não drenada.

Como se pode observar na figura 2-7 abaixo (Pinto, 2000), a resistência não-drenada de uma argila depende da velocidade de ensaio. Sendo maior a

resistência não-drenada, quanto mais rápido for o carregamento. Esta influência é tanto mais importante quanto mais plástico é o solo em termos de índice de plasticidade, porque quanto maior for o seu índice de plasticidade, maior é o número de contatos entre minerais de argila, ocorrendo escorregamento entre partículas, devido à característica viscosa dos contatos entre grãos.

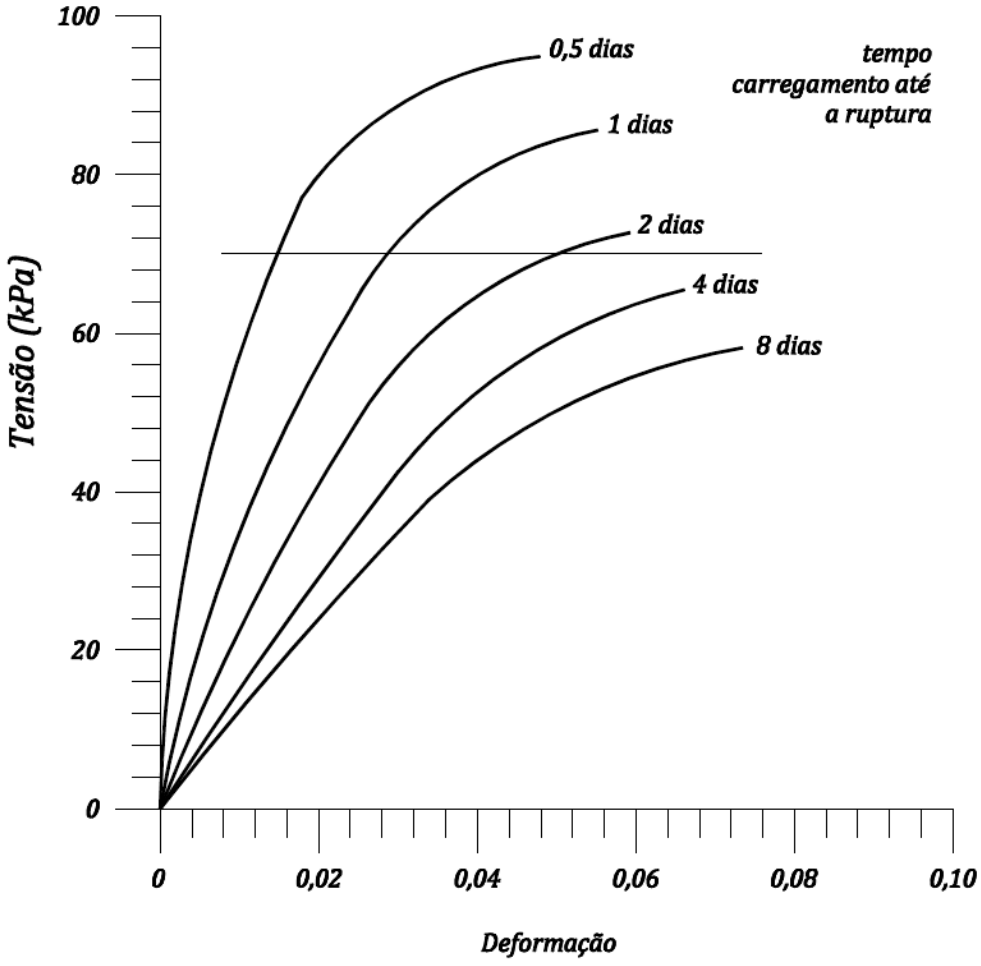


Figura 2-7– Resultados de ensaios de compressão não-drenada com diferentes velocidades de carregamento, expressas pelo tempo decorrido até a ruptura. Pinto, 2000

Pinto (2000) apresentou também a figura 2-8 a seguir, que mostra como muda o coeficiente de segurança de um aterro hipotético. Mantendo-se a condição de não-drenagem, quanto mais rápido for construído um aterro, maior o coeficiente de segurança. Mas isso não significa que, se o aterro não rompeu ao acabar a construção, a ruptura não ocorrerá alguns dias depois. Tudo

dependerá da velocidade em que foi construído e do aumento da resistência devido à diminuição do índice de vazios, que pode compensar a diminuição da resistência devida ao carregamento lento.

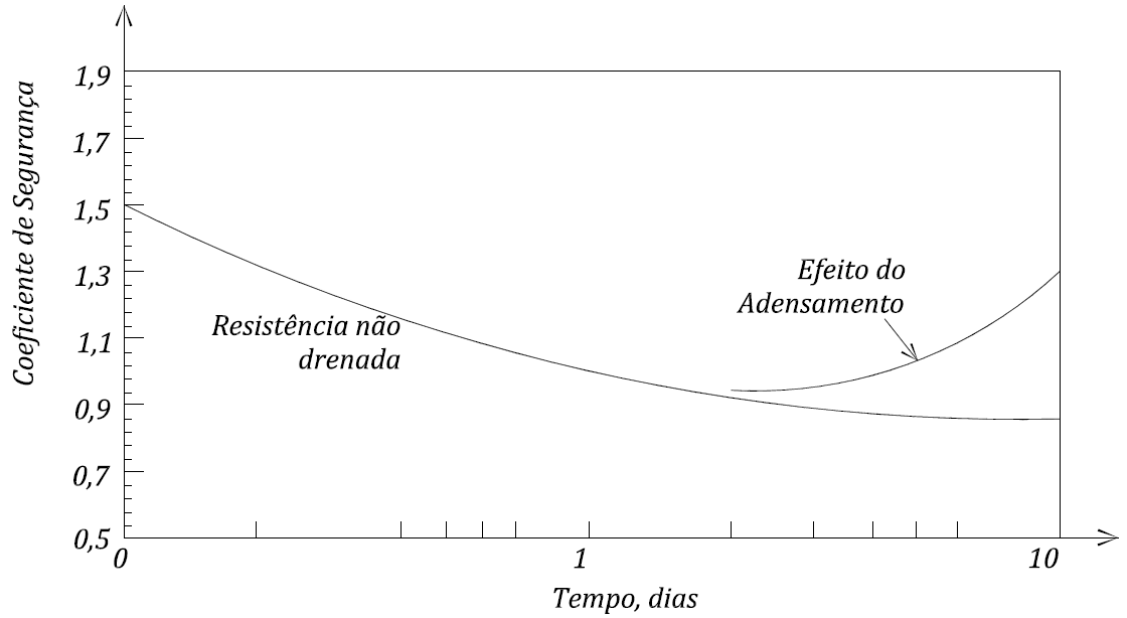


Figura 2-8– Mudança do coeficiente de segurança de um aterro hipotético em função da velocidade de construção do aterro e da diminuição do índice de vazios. Pinto (2000)

De acordo com Taylor (1948) (ver também Martins, 1992), o efeito da velocidade de deformação é provocado pela natureza viscosa do material nas zonas de adsorção nos pontos de contato ou “quase contato” das partículas de argila.

2.3. VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE EMPUXO COM O TEMPO (RELAXAÇÃO)

O coeficiente de empuxo em repouso é definido como a relação entre a tensão horizontal efetiva e a tensão vertical efetiva, quando se trata de um maciço de superfície horizontal, sujeito apenas ao próprio peso.

Para os solos sedimentares existem correlações que podem ser utilizadas para determinar o valor do coeficiente de empuxo em repouso, que são função do ângulo de atrito efetivo e/ou da razão de sobre-adensamento.

Tabela 2-1 – Correlações empíricas para determinação do coeficiente de empuxo em repouso.

Autor	Equação	Observações
Jaky (1944) apud Lambe e Whitman (1969)	$K_o = 1 - sen\varphi'$	φ' ângulo de atrito interno efetivo
Kulhawy e Mayne (1990), apud Mitchell e Soga (2005)	$K_o = (1 - sen\varphi').OCR^{sen\varphi'}$	OCR razão de sobre-adensamento

A determinação do coeficiente de empuxo em repouso também pode ser realizada a partir de ensaios de laboratório, só no caso de argilas normalmente adensadas, e ensaios de campo.

No laboratório, pode ser obtido no ensaio de compressão edométrica para os solos sedimentares normalmente adensados. No campo, pode ser obtido no ensaio pressiométrico.

Segundo Pinto (2000), o valor do coeficiente de empuxo em repouso é menor que a unidade e varia de 0,4 a 0,5 para areias e de 0,5 a 0,7 para argilas normalmente adensadas. No caso de argilas sobre-adensadas com razão de sobre-adensamento superior a 4, o valor do coeficiente de empuxo é superior a 1 (se o ângulo de atrito efetivo do solo for $\varphi' > 30°$)

Como se pode observar, os métodos utilizados para determinação do coeficiente de empuxo em repouso supõem que o mesmo não varia com o tempo.

Porém, existem evidências conclusivas que demonstram que o valor do coeficiente de empuxo em repouso é variável com o tempo. Ensaios de laboratório apresentados por Kavazanjian e Mitchell (1984) demonstram que o coeficiente de empuxo em repouso de argilas normalmente adensadas

aumenta com o tempo. Eles sugerem que, em solos sobre-adensados, com razão de sobre-adensamento maior do que quatro, onde o coeficiente de empuxo em repouso é maior do que a unidade, o mesmo diminua, aproximando-se da unidade.

Ensaios de laboratório realizados por Lacerda em 1976 (apud Kavazanjian e Mitchell, 1984), em argilas normalmente adensadas da baía de São Francisco, mostraram que o valor de K_o aumentou do valor de 0,53, no adensamento primário, a 0,58 após 10.000 minutos do término do adensamento primário (aumentando aproximadamente 9,5%).

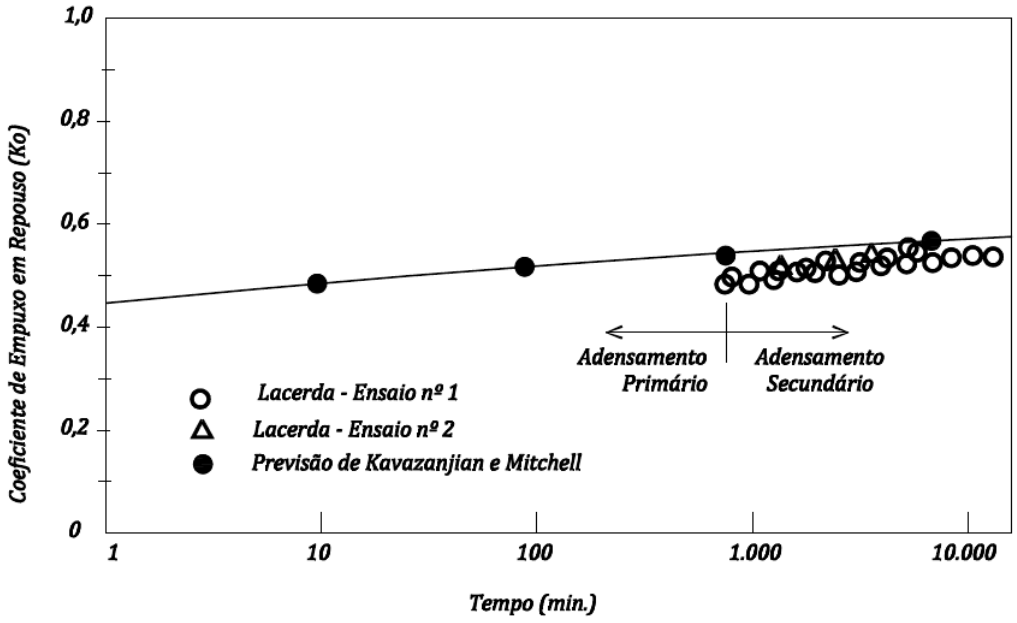


Figura 2-9– Variação de Ko em função do tempo – Argilas normalmente adensadas da baía de São Francisco – Lacerda, 1976 (apud Kavazanjian e Mitchell, 1984)

Segundo Kavazanjian e Mitchell (1984), Tatsuoka também mediu o valor de K_o em ensaios triaxiais realizados em amostras compactadas de caulinita e mostrou que o valor do coeficiente de empuxo em repouso aumentou de 0,54, no final do adensamento primário, a 0,70 após 14.000 minutos de adensamento secundário (aproximadamente 29,6%). Em 1984, quando Kavazanjian e Mitchell publicaram estes resultados, Tatsuoka ainda não tinha publicado os ensaios aos Kavazanjian e Mitchell se referem.

Kavazanjian e Mitchell (1984) concluíram que a variação de K_o é devida às tensões desviadoras não serem nulas quando o coeficiente de empuxo em repouso for diferente da unidade.

Lacerda e Martins, 1985, (apud Vieira, 1988) explicaram de forma simplificada o mecanismo que ocorre, segundo eles, que justificaria que o valor de K_o se aproximasse da unidade no adensamento unidimensional de argilas normalmente adensadas. Como $K_o < 1$, há, em qualquer plano (com exceção dos horizontal e vertical), tensões cisalhantes. Essas tensões cisalhantes atuam no contato entre os grãos. Supõe-se que as ligações entre partículas não suportam as forças de cisalhamento, dissipando-se com o tempo. Isso faz que a tensão horizontal efetiva (σ'_h) aumente e que a tensão desviadora ($\sigma'_v - \sigma'_h$) diminua (fenômeno de relaxação de tensões). Como a tensão desviadora pode diminuir até se anular, o fenômeno acabaria quando $\sigma'_h = \sigma'_v$, o que justificaria o fato de K_o se aproximar da unidade.

Andrade (2009) apresentou um resumo dos estudos realizados para comprovar ou tentar dar uma justificativa ao suposto de que K_o deve-se aproximar da unidade e mostrou que o fim do secundário não ocorre para a condição $K_o = 1$, como sugerido por Kavazanjian e Mitchell (1984) e Lacerda e Martins (apud Vieira, 1988).

CAPÍTULO 3 - MODELOS REOLÓGICOS

A reologia investiga e expressa a relação entre tensão, deformação e velocidade de deformação, entre outras grandezas. As equações reológicas gerais podem envolver o tensor das tensões de Cauchy (T), o tensor de deformações (E), o tensor das velocidades de deformação ($\dot{E}$ ou D) e a derivada no tempo do tensor das tensões ($\dot{T}$). Nos modelos unidimensionais, as equações envolvem a tensão (σ), a deformação (ε), a velocidade de deformação ($\dot{\varepsilon}$) e a variação da tensão no tempo ($\dot{\sigma}$).

Uma abordagem que pode ser dada para prever o comportamento de materiais submetidos a tensão é a da análise dos resultados, sem se importar com a microestrutura do material.

Os modelos reológicos explicam o comportamento de um material representando-o por modelos simples ou combinações de modelos simples, cujo comportamento é de fácil interpretação.

Pode-se imaginar, por exemplo, que a primeira parte (pequenas deformações) da curva tensão-deformação de um solo, obtida de um ensaio de compressão simples, corresponde à deformação que sofre uma mola elástica quando comprimida. Seria uma forma de tratar o solo como uma “caixa preta”, sem nos interessar, em um primeiro momento, com o que acontece com as partículas quando submetidas a uma tensão e sim com o resultado que esse esforço provoca.

Pensando desta forma, podem-se combinar elementos, além de molas, para representar o resultado de ensaios realizados em solos. Cada elemento possui uma constante que o caracteriza, influenciando no resultado da curva tensão-deformação.

Por isso, como etapa preliminar, serão apresentados, primeiramente, os modelos reológicos simples, formados por um só elemento. Estes elementos

são: uma mola elástica (modelo de Hooke), um pistão com um líquido viscoso dentro dele (modelo de Newton) e duas placas apoiadas uma contra a outra (Saint-Venant). A seguir serão apresentadas combinações desses elementos, descrevendo-se os modelos reológicos de Maxwell, Bingham, Kelvin-Voight, sólido linear padrão e o modelo visco-plástico com endurecimento, em uma dimensão. Serão depois deduzidas as equações de fluência e relaxação.

Na seção a seguir são apresentados os elementos reológicos que serão utilizados nesta dissertação.

CAPÍTULO 4 - ELEMENTOS REOLÓGICOS

4.1. MOLA DE HOOKE

O elemento físico que representa o comportamento de um corpo de Hooke é uma mola elástica (figura 4-1).

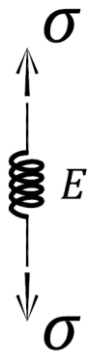


Figura 4-1– Mola elástica de Hooke. A constante E relaciona a tensão aplicada e a deformação da mola

No corpo de Hooke a relação entre a tensão e a deformação é linear, a constante que relaciona as duas grandezas é o módulo de elasticidade (E). A equação reológica é a seguinte:

$$\boldsymbol{\sigma^{e} = E.\varepsilon} \qquad (4.1)$$

Quando é aplicada uma tensão constante imediata numa mola de Hooke (σ_o), ocorre uma deformação instantânea e constante igual a $\frac{\sigma_o}{E}$ (figura 4-2).

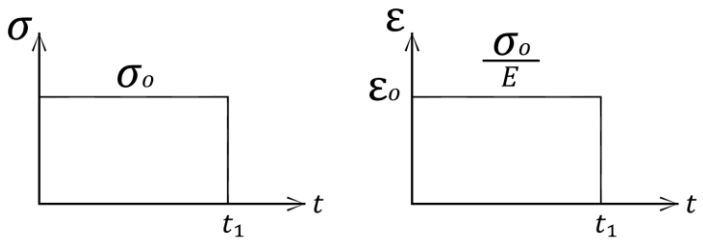


Figura 4-2 – Deformação de uma mola elástica de Hooke quando submetida a uma tensão constante

O comportamento de uma mola elástica linear é elástico, pois quando a mola é descarregada ela volta a sua configuração original, e é linear porque a deformação é proporcional à tensão aplicada.

4.2. PISTÃO DE NEWTON

O modelo mecânico de Newton é um pistão contendo um líquido viscoso (figura 4-3).

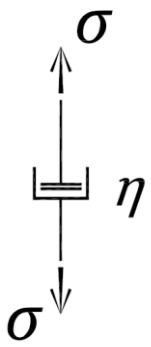


Figura 4-3 – Pistão de Newton.

Os líquidos são substâncias que fluem continuamente sob a ação de tensões de cisalhamento. Um fluido viscoso oferece resistência ao escoamento.

A equação reológica que representa o comportamento de um pistão de Newton é a seguinte:

$$\sigma^{v} = \eta . \dot{\varepsilon} \qquad (4.2)$$

Quando um pistão de Newton é submetido a uma tensão constante, a deformação inicial é nula, aumentando com o tempo de forma linear. Isto se deve à resistência que o fluido oferece ao escoamento. Essa resistência é caracterizada pelo coeficiente de viscosidade η. Quando submetido a tensão constante positiva a deformação cresce linearmente com tempo e quando submetido a tensão constante negativa, decresce (figura 4-4).

$$\varepsilon(t) = \pm\sigma_o.\frac{t}{\eta}$$

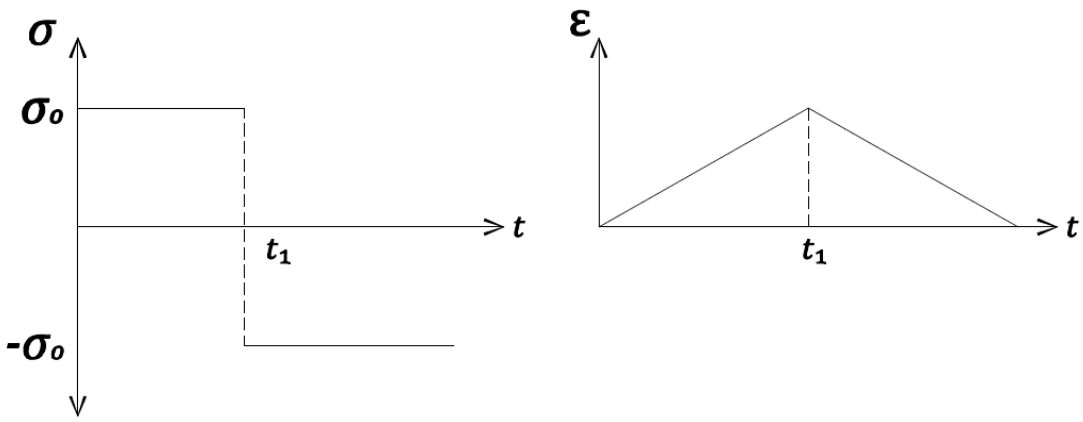


Figura 4-4 – Deformação do pistão de Newton quando submetido a uma tensão constante.

4.3. CORPO DE SAINT-VENANT

O modelo mecânico que representa um corpo de Saint-Venant é a resistência de atrito entre dois corpos rugosos, pressionados um contra o outro, como na figura 4-5 a seguir:

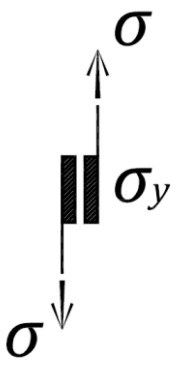


Figura 4-5 – Corpo de Saint Venant.

O movimento acontece somente quando a tensão aplicada iguala certo valor σ_y. A partir desse momento, a velocidade de deformação deixa de ser nula.

Tem-se:

$$\dot{\varepsilon} \neq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y$$

$$\dot{\varepsilon} = 0 \text{ se } \sigma < \sigma_y$$

CAPÍTULO 5 - EQUAÇÕES REOLÓGICAS COM DOIS ELEMENTOS

Os elementos reológicos podem ser combinados em série ou em paralelo, analogamente aos modelos elétricos.

Quando os elementos são combinados em paralelo, a tensão total aplicada é dividida nos elementos e a deformação é a mesma em cada um deles.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma_n$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_n$$

O contrário acontece quando os elementos são combinados em série. As tensões aplicadas são iguais nos elementos da série e a deformação total do sistema é a soma das deformações de cada um deles.

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_n$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n$$

Os modelos reológicos mais importantes formados por dois elementos são os modelos de Maxwell, de Bingham e Kelvin-Voigt. Nos itens a seguir são apresentados estes modelos.

Para cada modelo são apresentados os comportamentos na fluência e relaxação.

5.1. MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell é formado por um pistão de Newton em série com uma mola elástica linear (corpo de Hooke) (figura 5-1).

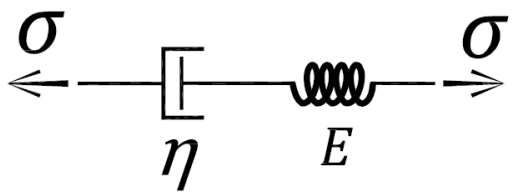


Figura 5-1 – Modelo de Maxwell. Pistão de Newton em série com uma mola elástica de Hooke.

O modelo de Maxwell é formado, portanto, por uma porção elástica e uma porção viscosa.

Como os elementos do modelo são conectados em série, a tensão em ambos os elementos é a mesma, e as deformações e velocidades de deformação são somadas.

Temos então:

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) = \sigma^v(t) \tag{5.1}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon^e}(t) + \dot{\varepsilon}^v(t) \tag{5.2}$$

Onde σ^e é a tensão atuante na mola (componente elástica), σ^v é tensão atuante no pistão (componente viscosa) e $\dot{\varepsilon}^e$ e $\dot{\varepsilon}^v$ são as velocidades de deformação elástica e viscosa, respectivamente.

Substituindo as equações 4.1 e 4.2 na equação 5.1 temos:

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) = E.\varepsilon^e(t) \tag{5.3}$$

$$\sigma(t) = \sigma^v(t) = \eta.\dot{\varepsilon}^v(t) \tag{5.4}$$

Derivando em relação ao tempo a equação 5.3, combinando com a equação 5.4 e substituindo-as na equação 5.2, obtemos a equação reológica do modelo de Maxwell.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (5.5)$$

5.1.1. Fluência

A fluência é o fenômeno caracterizado com uma deformação sob tensão constante. Quando uma mola elástica é submetida a uma tensão constante (σ_o), ocorre uma deformação instantânea de valor $\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{E}$, que no caso de materiais perfeitamente elásticos é mantida constante ao longo do tempo. Nos materiais viscosos a deformação não ocorre de maneira instantânea e sim ao longo do tempo. O crescimento dessa deformação é linear. Portanto, no modelo de Maxwell (visco-elástico) ocorre fluência.

Temos:

$$\sigma(t) = \sigma_o = cte \quad (5.6)$$

Derivando a equação 5.6 em função do tempo temos:

$$\dot{\sigma}(t) = 0 \quad (5.7)$$

Substituindo a equação 5.7 na equação 5.5 e considerando que, em $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, obtemos:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_o}{\eta} \quad (5.8)$$

No instante $t = 0$, a deformação do conjunto é igual à deformação da mola $\varepsilon_o = \varepsilon^e = \frac{\sigma_o}{E}$.

Integrando a equação 5.8 em função do tempo, obtemos a função que descreve a variação da deformação com o tempo.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{\eta} t + \varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{\eta} t + \frac{\sigma_o}{E} \quad (5.9)$$

No instante inicial, ocorre a deformação na mola e, ao longo do tempo, ocorre a deformação do pistão de Newton, que cresce linearmente com tempo. A seguir se apresenta o gráfico que representa a fluência do elemento de Maxwell (figura 5-2).

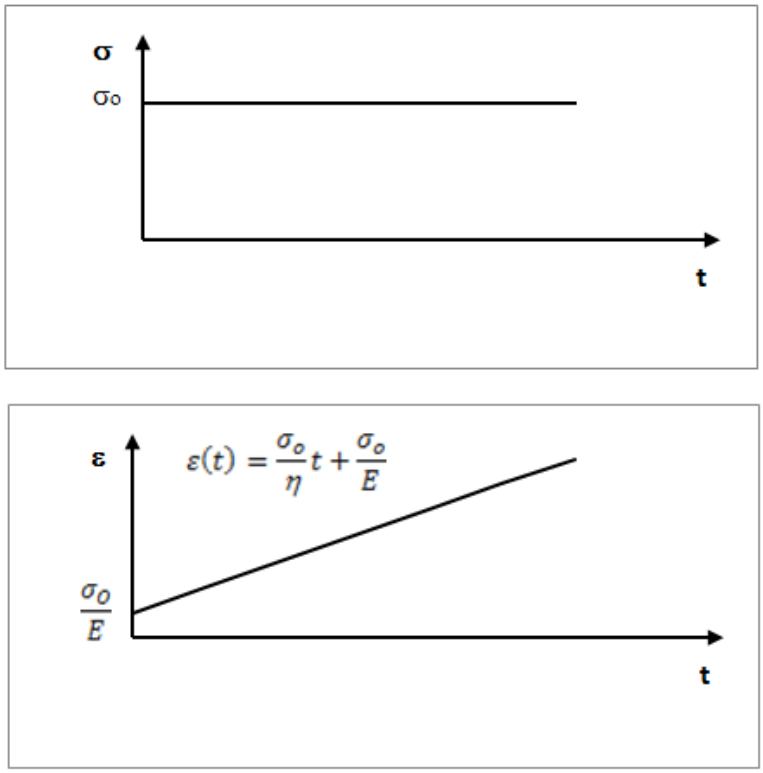


Figura 5-2 – Modelo de Maxwell. Gráfico de fluência.

5.1.2. Relaxação

A relaxação de tensões é caracterizada pela variação das tensões com deformação constante.

Nos materiais elásticos perfeitos não ocorre o fenômeno de relaxação. Quando submetidos a uma tensão, ocorre uma deformação, ao manter-se essa deformação constante, a tensão também se mantém constante.

Nos materiais viscosos ocorre de uma maneira diferente: depois de sofrida uma deformação, se esta for mantida constante, em seguida a tensão diminuirá com

o tempo. Como consequência, um material visco-elástico, representado pelo modelo de Maxwell, sofre relaxação.

Como a deformação é mantida constante no tempo, a velocidade de deformação é nula.

$$\dot{\varepsilon} = 0 \tag{5.10}$$

Substituindo a equação 5.10 na expressão 5.5 obtemos:

$$\dot{\sigma(t)} + \frac{E}{\eta}\sigma(t) = 0 \tag{5.11}$$

Integrando em função do tempo, obtemos a variação da tensão com o tempo, quando a deformação é constante, no modelo de Maxwell (figura 5-3):

$$\sigma(t) = \sigma_o . e^{-\frac{E}{\eta}t} \tag{5.12}$$

Analisando a equação acima, percebe-se que, quanto maior for a relação $\frac{E}{\eta}$, mais rápida é a relaxação ao longo do tempo.

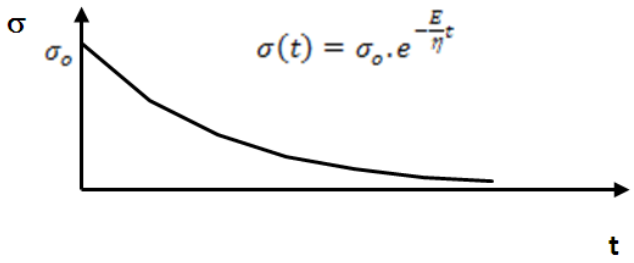


Figura 5-3 – Modelo de Maxwell. Relaxação.

5.2. MODELO DE KELVIN-VOIGT

O modelo de Kelvin-Voigt é formado por um pistão de Newton em paralelo com uma mola de Hooke (figura 5-4).

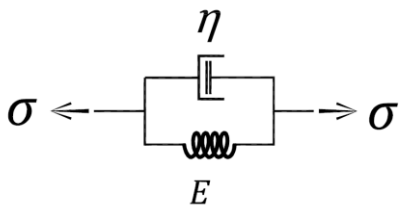


Figura 5-4 – Modelo de Kelvin-Voigt. Pistão de Newton em paralelo com uma mola elástica de Hooke.

Quando dois modelos simples são dispostos em paralelo, a deformação nos dois modelos são iguais e a tensão aplicada ao conjunto se divide entre as partes.

Temos então:

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^v(t) \tag{5.13}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^e(t) = \dot{\varepsilon}^v(t) \tag{5.14}$$

Substituindo as equações 4.1 e 4.2 na equação 5.14, temos a equação reológica do modelo de Kelvin-Voigt:

$$\sigma(t) = E.\varepsilon(t) + \eta.\dot{\varepsilon}(t) \tag{5.15}$$

5.2.1. Fluência

Substituindo $\sigma(t) = \sigma_o$ na equação 5.15, temos:

$$\sigma_o = E.\varepsilon(t) + \eta.\dot{\varepsilon}(t) \tag{5.16}$$

Reescrevendo e integrando a equação acima em função do tempo, obtemos a equação que relaciona a deformação com o tempo no modelo de Kelvin-Voigt (figura 5-5).

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \tag{5.17}$$

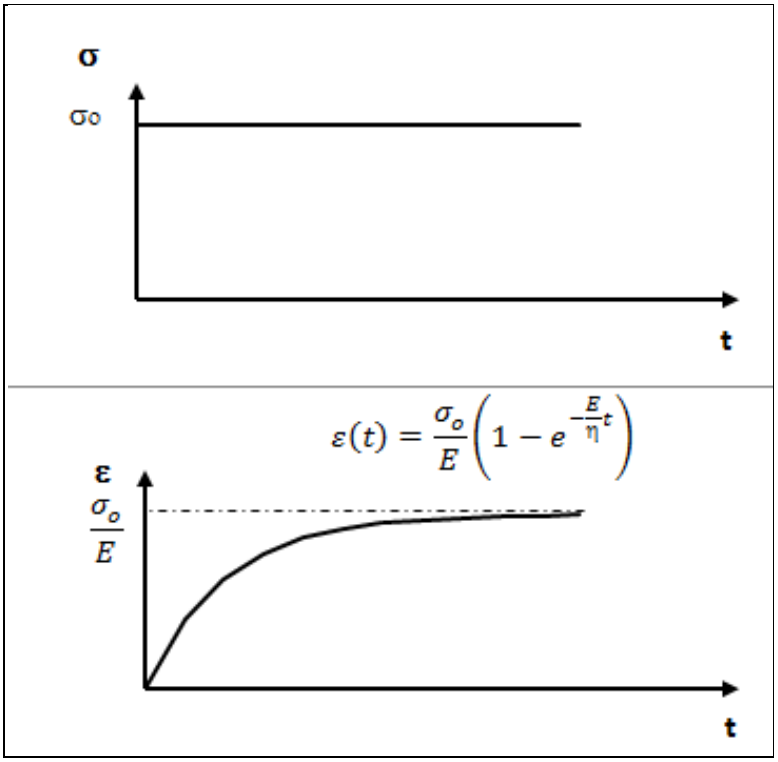


Figura 5-5 – Modelo de Kelvin-Voigt. Fluência.

Nesta configuração o elemento que comanda a velocidade de deformação é o pistão, não ocorrendo deformação instantânea. Como a mola possui um limite de deformação, o conjunto tem deformação limite igual à deformação máxima da mola ($\frac{\sigma_o}{E}$).

5.2.2. Relaxação

Quando a deformação é mantida constante no tempo, a velocidade de deformação é nula.

$$\dot{\varepsilon} = 0 \tag{5.18}$$

Substituindo a equação acima na expressão 5.15 (figura 5-6):

$$\sigma(t) = E.\varepsilon_o \tag{5.19}$$

A tensão cai abruptamente para o valor dado pela equação 5.19, no momento em que a velocidade de deformação se anula, mantendo-se constante com o tempo quando a deformação é mantida constante.

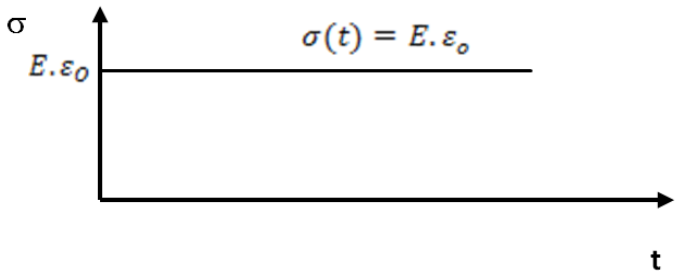


Figura 5-6 – Modelo de Kelvin-Voigt. Não ocorre relaxação.

5.3. MODELO DE BINGHAM

O modelo de Bingham é formado por um corpo de Saint Venant em paralelo com um pistão de Newton (figura 5-7).

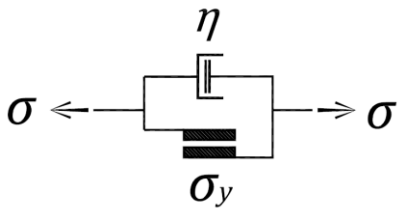


Figura 5-7 – Modelo de Bingham. Pistão de Newton em paralelo com um corpo de Saint Venant.

Quando é aplicada uma tensão ao conjunto, não ocorre nenhuma deformação se a tensão aplicada for menor que um determinado valor (σ_y), que depende do atrito entre as placas do corpo de Saint Venant. Quando a tensão ultrapassa esse valor, ocorre uma deformação no conjunto, cuja velocidade de deformação depende do coeficiente de viscosidade do pistão de Newton (η) e da tensão crítica (σ_y).

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma_y}{\eta} \tag{5.20}$$

5.3.1. Fluência

Quando submetido a uma tensão constante maior que a tensão crítica, a velocidade de deformação é constante. Integrando a velocidade de deformação em função do tempo e considerando que em $t = 0$ a deformação é nula, mostra-se que a deformação varia linearmente em função do tempo.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o - \sigma_y}{\eta} t$$

A seguir se apresenta a mudança da deformação em função do tempo (figura 5-8):

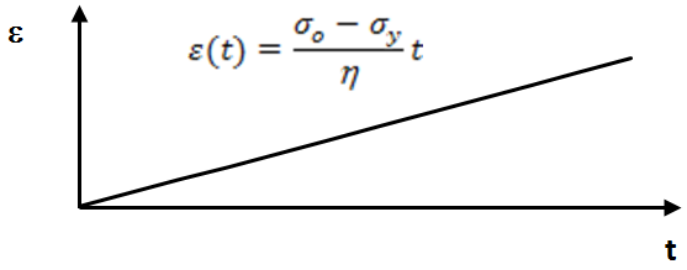


Figura 5-8 – Modelo de Bingham. Fluência.

5.3.2. Relaxação

Quando a deformação é mantida constante no tempo, a velocidade de deformação é nula. O valor da tensão neste caso é igual à tensão crítica, ocorrendo uma queda de tensão (figura 5-8):

$$\sigma(t) = \sigma_y$$

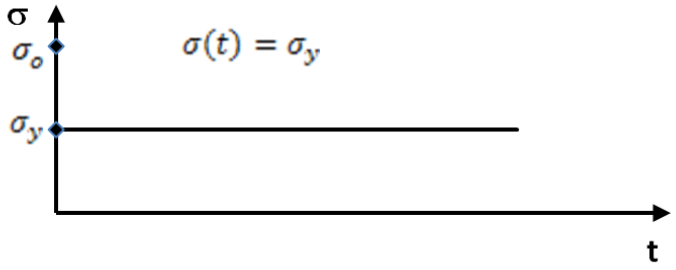


Figura 5-9 – Modelo de Bingham. Não ocorre relaxação.

CAPÍTULO 6 - MODELOS REOLÓGICOS COM MAIS DE DOIS ELEMENTOS

6.1. MODELO DO SÓLIDO LINEAR PADRÃO

O modelo do sólido linear padrão é formado pela associação de dois elementos elásticos e um elemento viscoso. Esta associação pode ser feita com um elemento elástico em paralelo a um elemento de Maxwell (figura 6-1) ou um elemento elástico associado em série a um elemento de Kelvin- Voigt.

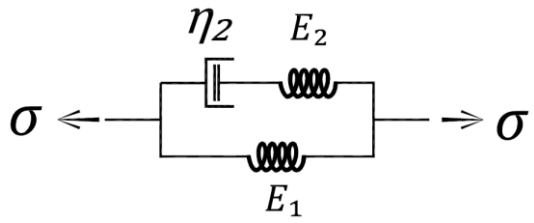


Figura 6-1 – Sólido Linear Padrão – Elemento de Maxwell em paralelo com um elemento elástico linear

Adotando a configuração do sólido linear padrão mostrada na figura acima, onde a mola elástica linear de constante E_1 está em paralelo a um elemento de Maxwell de constantes E_2 e η_2, temos:

$$\sigma(\mathrm{t}) = \sigma_1(\mathrm{t}) + \sigma_2(\mathrm{t}) \tag{6.1}$$

$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \varepsilon_1(\mathrm{t}) = \varepsilon_2(\mathrm{t}) = \varepsilon_2^{\mathrm{e}} + \varepsilon_2^{\mathrm{v}} \tag{6.2}$$

Onde:

$$\sigma_1(\mathrm{t}) = \mathrm{E}_1.\varepsilon(\mathrm{t}) \tag{6.3}$$

$$\sigma_2(\mathrm{t}) = \sigma_2^{\mathrm{e}}(\mathrm{t}) = \sigma_2^{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_2^{\mathrm{e}}(\mathrm{t}) = \frac{\sigma_2^{\mathrm{e}}}{\mathrm{E}_2} \tag{6.5}$$

$$\dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) = \frac{\sigma_2^{\mathrm{v}}}{\eta_2} \tag{6.6}$$

Derivando a equação 6.2 em função do tempo e combinando com as equações 6.5 e 6.6, temos:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_2(t)}{E_2} + \frac{\sigma_2(t)}{\eta_2} \tag{6.7}$$

Substituindo as equações 6.1 e 6.3 na expressão 6.7, obtemos:

$$\sigma_2(t) = \sigma(t) - E_1\varepsilon(t)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t) - E_1\dot{\varepsilon}(t)}{E_2} + \frac{\sigma(t) - E_1\varepsilon(t)}{\eta_2}$$

Reagrupando os termos, temos a equação do sólido linear padrão:

$$\dot{\varepsilon}(t)[E_1 + E_2] = \dot{\sigma}(t) + \frac{E_2}{\eta_2}\sigma(t) - \frac{E_1.E_2}{\eta_2}\varepsilon(t) \tag{6.8}$$

6.1.1. Relaxação

Quando o sólido linear padrão é submetido a uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_o$ no ensaio de relaxação, a velocidade de deformação é zero. Consequentemente, passa a ser representado pela seguinte equação:

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_2} + \frac{\sigma(t)}{\eta_2} = \frac{E_1}{\eta_2}\varepsilon_o \tag{6.9}$$

A solução desta equação diferencial é a soma da solução homogênea (indicada com o índice *H*) e da solução particular (indicada com o índice *P*).

A equação homogênea é:

$$\dot{\sigma}_H(t) + \frac{E_2}{\eta_2}\sigma_H(t) = 0$$

Sua solução geral é

$$\sigma_H(t) = c.e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t}$$

Onde c é uma constante.

Se a solução particular for uma constante k,

$$\sigma_P(t) = k \rightarrow \dot{\sigma}_P(t) = 0$$

Temos,

$$0 + \frac{E_2}{\eta_2}k = \frac{E_1.E_2}{\eta_2}\varepsilon_o \rightarrow k = E_1.\varepsilon_o$$

A solução geral da equação diferencial 6.9 é:

$$\sigma(t) = \sigma_H(t) + \sigma_P(t)$$

$$\sigma(t) = c.e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t} + E_1.\varepsilon_o$$

Em $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$ ➔ $c = \sigma_0 - E_1.\varepsilon_o$

A equação que mostra a variação da tensão em função do tempo num sólido linear padrão é:

$$\sigma(t) = [\sigma_0 - E_1.\varepsilon_o].e^{-\frac{E_2}{\eta_2}t} + E_1.\varepsilon_o \qquad (6.10)$$

A seguir se apresenta a variação da tensão em função do tempo, quando a velocidade de deformação é nula (figura 6-2).

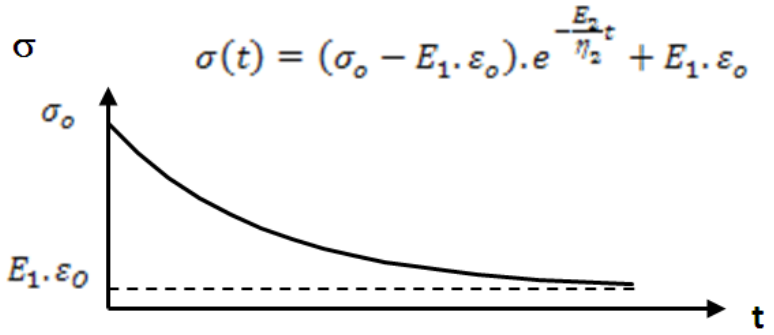


Figura 6-2 – Sólido linear padrão. Relaxação.

6.1.2. Fluência

Quando submetido a uma tensão constante, a derivada da tensão é nula.

$$\sigma(t) = \sigma_o \;\rightarrow\; \dot{\sigma}(t) = 0$$

Da equação 6.8:

$$\dot{\varepsilon}(t).[E_2 + E_1] = \frac{E_2}{\eta}.\sigma_o - \frac{E_1.E_2}{\eta_2}.\varepsilon(t)$$

Reagrupando, obtemos a equação diferencial:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1.E_2}{\eta_2.[E_1 + E_2]}.\varepsilon(t) \;=\; .\frac{E_2}{\eta_2.[E_1 + E_2]}.\sigma_o$$

A solução desta equação diferencial é a soma da solução homogênea e da solução particular. A equação homogênea é:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1 . E_2}{\eta_2 . [E_1 + E_2]} . \varepsilon\,(t) = 0$$

$$\varepsilon(t)_H = c . e^{-\frac{E_1 . E_2}{\eta_2 . [E_1 + E_2]} . t}$$

Se a solução particular for uma constante k,

$$\varepsilon_P(t) = k \rightarrow \dot{\varepsilon}_P(t) = 0$$

$$k = \varepsilon_P(t) = \frac{1}{E_1} . \sigma_o$$

Obtemos a solução geral da equação diferencial:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_P(t)$$

$$\varepsilon(t) = c . e^{-\frac{E_1 . E_2}{\eta_2 . [E_1 + E_2]} . t} + \frac{\sigma_o}{E_1}$$

Em $t = 0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ ➔ $c = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_o}{E_1}$

A equação que mostra a variação da deformação em função do tempo no sólido linear padrão é:

$$\varepsilon(t) = \left[\varepsilon_0 - \frac{\sigma_o}{E_1}\right] . e^{-\frac{E_1 . E_2}{\eta_2 . [E_1 + E_2]} . t} + \frac{\sigma_o}{E_1} \qquad (6.11)$$

A seguir se apresenta o gráfico que mostra esta relação (figura 6-3):

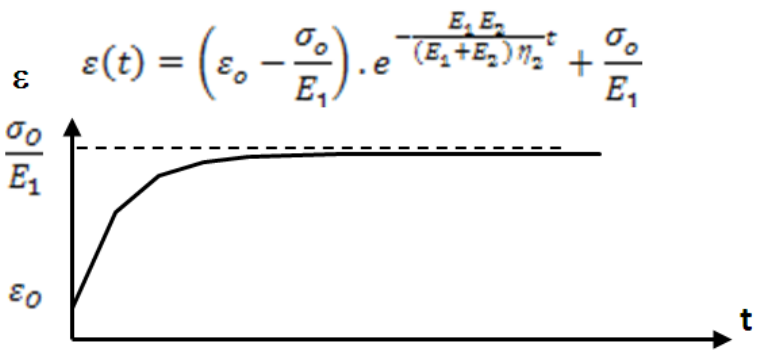


Figura 6-3 – Sólido linear padrão. Fluência.

6.2. MODELO VISCO-ELASTO-PLÁSTICO COM ENDURECIMENTO

O modelo visco-elasto-plástico é formado por um elemento de Bingham em série com uma mola de Hooke (figura 6-4).

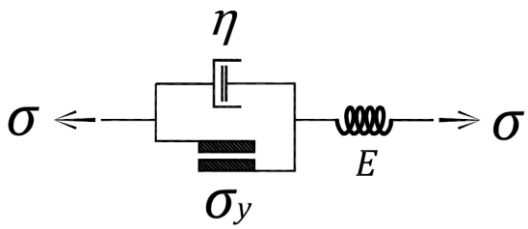


Figura 6-4 – Modelo Visco-elasto-plástico – Elemento de Bingham em série com um elemento elástico linear

Quando o conjunto é submetido a uma tensão menor do que à tensão crítica do corpo de Saint Venant, só a mola se deforma. Quando o conjunto é submetido a uma tensão maior do que a tensão crítica do corpo de Saint Venant, ocorre a deformação da mola e a deformação do elemento de Bingham. Quando a tensão aplicada é maior do que a tensão crítica, a velocidade de deformação do modelo visco-elasto-plástico é a soma entre a velocidade de deformação da mola e à diferença entre a tensão aplicada e a tensão crítica do corpo de Saint Venant dividida pela viscosidade (η). A derivada da tensão crítica, por sua vez, é proporcional à diferença entre a tensão aplicada e a tensão crítica. Temos:

$$\sigma(t) < \sigma_y(t): \varepsilon(t) = \varepsilon(t)^e = \frac{\sigma(t)}{E}$$

$$\sigma(t) \geq \sigma_y(t): \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)-\sigma_y(t)}{\eta} \qquad (6.12)$$

$$\dot{\sigma}_y(t) = k.\left[\sigma(t) - \sigma_y(t)\right] \tag{6.13}$$

É de interesse o caso onde a tensão crítica é menor do que a tensão aplicada. Portanto, substituindo a equação 6.13 na equação 6.12 obtemos:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma(t)}}{E} + \frac{\dot{\sigma}_y(t)}{\eta k} \tag{6.14}$$

Integrando esta equação em função do tempo:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0) = \frac{\sigma(t)-\sigma(0)}{E} - \frac{\sigma_y(t)-\sigma(0)}{\eta.k} \tag{6.15}$$

6.2.1. Relaxação

Quando submetido a uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_o$ no ensaio de relaxação, a velocidade de deformação é zero. Consequentemente, a equação 6.14 passa a ser:

$$0 = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\dot{\sigma}_y(t)}{\eta.k}$$

$$\dot{\sigma}_y(t) = -\frac{\eta.k}{E}\dot{\sigma}(t) \tag{6.16}$$

$$\sigma_y(t) - \sigma_y(0) = -\frac{\eta.k}{E}[\sigma(t) - \sigma(0)]$$

$$\sigma_y(t) = \sigma_y(0) + \frac{\eta.k}{E}\sigma(0) - \frac{\eta.k}{E}\sigma(t) \tag{6.17}$$

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{E}{\eta.k}\dot{\sigma}_y(t)$$

$$\dot{\sigma}_y(t) = k\left[\sigma(t) - \sigma_y(t)\right] \tag{6.18}$$

Substituindo a equação 6.18 na equação 6.16, temos:

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{E}{\eta}\left[\sigma(t) - \sigma_y(t)\right]$$

Substituindo o valor de $\sigma_y(t)$ da equação 6.17, temos:

$$\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)\left(\frac{E}{\eta} + k\right) = \frac{E}{\eta}\sigma_y(0) + k\sigma(0) \qquad (6.19)$$

A solução da equação diferencial pode ser obtida a partir da soma das soluções homogênea e particular.

A equação homogênea é:

$$\dot{\sigma}_H(t) + \sigma_H(t)\left(\frac{E}{\eta} + k\right) = 0$$

Portanto,

$$\sigma_H(t) = -c.\, e^{-\left(\frac{E}{\eta}+k\right)t}$$

Se a solução particular for uma constante A:

$$\sigma_P(t) = A$$

Substituindo na equação 6.19, temos:

$$A.\left(\frac{E}{\eta} + k\right) = \frac{E}{\eta}\sigma_y(0) + k\sigma(0)$$

$$\sigma_P(t) = A = \left(\frac{E}{\eta}\sigma_y(0) + k\sigma(0)\right)\left(\frac{E}{\eta} + k\right)^{-1}$$

A solução geral da equação diferencial apresentada acima é portanto:

$$\sigma(t) = -c.\,e^{-\left(\frac{E}{\eta}+k\right)t} + A$$

Em $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$ ➔ $c = A - \sigma_0$

Temos a seguinte equação de relaxação do modelo visco-elasto-plástico com endurecimento:

$$\sigma(t) = -(A - \sigma(0)).\,e^{-\left(\frac{E}{\eta}+k\right)t} + A$$

Onde

$$A = \left(\frac{E}{\eta}\sigma_y(0) + k\sigma(0)\right)\left(\frac{E}{\eta} + k\right)^{-1}$$

O gráfico que mostra o comportamento da tensão em função do tempo é o seguinte (figura 6-5):

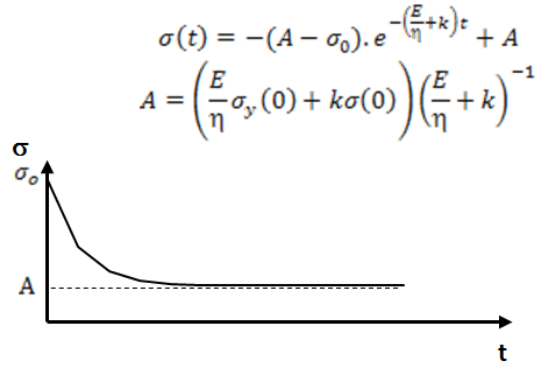


Figura 6-5 – Modelo Visco-elasto-plástico com endurecimento – Relaxação

6.2.2. Fluência

Quando submetido a uma tensão constante, a derivada da tensão é nula. Assim, a equação que descreve a variação de σ_y com o tempo é:

$$\sigma(t) = \sigma(0) = \sigma_o > \ \sigma_y(0) = \sigma_{yo}$$

$$\dot{\sigma}_y(t) = k(\sigma_o - \ \sigma_y(t))$$

$$\dot{\sigma}_y(t) + k.\sigma_y(t) = k.\sigma_o \qquad (6.20)$$

A solução homogênea desta equação é:

$$\dot{\sigma}_{yH}(t) + k.\sigma_{yH}(t) = 0$$

Logo,

$$\sigma_{yH}(t) = c.e^{-k.t}$$

Se a solução particular da equação 6.20 for uma constante A temos:

$$\sigma_{yP} = A$$

$$k.A = k.\sigma_o$$

$$\sigma_{yP} = \sigma_o$$

Logo, a solução geral da equação é:

$$\sigma_y(t) = c.e^{-k.t} + \sigma_o$$

Onde a constante c é determinada a seguir:

Em $t = 0$, $\sigma_y(0) = \sigma_{yo}$ e $\sigma(0) = \sigma_o$, logo:

$$c = \sigma_{yo} - \sigma_o$$

Assim, obtém-se a variação de σ_y com o tempo:

$$\sigma_y(t) = (\sigma_{yo} - \sigma_o).\, e^{-k.t} + \sigma_o \qquad (6.21)$$

Considerando que em $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_o$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_o$ e $\sigma_y(0) = \sigma_{yo}$ e substituindo em 6.15, obtemos:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_o = \frac{\sigma(t) - \sigma_0}{E} + \frac{\left[(\sigma_{yo} - \sigma_o).\, e^{-k.t} + (\sigma_o - \sigma_{yo})\right]}{\eta.\, k}$$

Na Fluência $\sigma(t) = \sigma_o$, logo:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_o = \frac{1}{\eta.\, k}.\left[(\sigma_{yo} - \sigma_o).\, e^{-k.t} + (\sigma_o - \sigma_{yo})\right]$$

O gráfico que mostra a variação da deformação em função do tempo, sob tensão constante, no modelo visco-elasto-plástico com endurecimento, é o seguinte (figura 6-6):

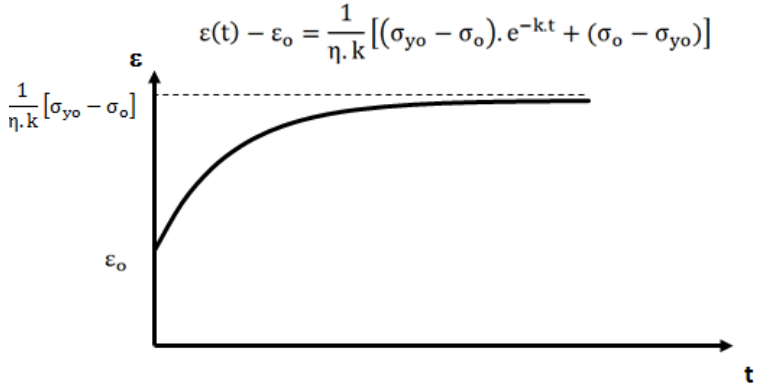


Figura 6-6 – Modelo Visco-elasto-plástico com endurecimento – Fluência

CAPÍTULO 7 - MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO EM 3D

Neste capítulo será apresentado o modelo visco-hipoplástico de Niemunis (2002), introduzindo-se nele as funções constitutivas da equação hipoplástica de Nader (2003).

7.1. MODELO HIPOPLÁSTICO E EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DE NADER

Embora o objetivo desta tese não seja apresentar o modelo hipoplástico, nesta seção será realizada uma breve introdução a ele para, na próxima, passar mais facilmente à visco-hipoplasticidade

Na hipoplasticidade a equação constitutiva tem a seguinte forma:

$$\overset{o}{T} = h(T, D)$$

Onde $\overset{o}{T}$ é a derivada corrotacional do tensor das tensões de Cauchy (T) e D é o tensor velocidade de deformação. A função h não é linear em D, para representar deformabilidades diferentes no carregamento e no descarregamento.

Segundo Nader (2009), a maioria das equações constitutivas possui a seguinte forma :

$$\overset{o}{T} = L(T)[D] + \|D\| N(T) \tag{7.1}$$

Onde L e N são duas funções dependentes do estado de tensões (L(T) é um tensor de quarta ordem e N(T), um tensor de segunda ordem). $\|D\|$ é a norma do tensor velocidade de deformação, que é calculada da seguinte forma $\|D\| = \sqrt{tr(D.D^T)}$.

Nader (2003) apresentou as seguintes expressões para $L(T)[D]$ e $N(T)$:

$$L(T)[D] = \varphi_1(T, D)I + \varphi_2(T)D_d$$

$$N(T) = \frac{C_3}{3}tr(T)I + C_5 T_d$$

Onde φ_1 e φ_2 são funções escalares que dependem do tensor das tensões e do tensor das velocidades de deformação (mais precisamente, a segunda delas depende apenas de T). O índice d representa a parte desviadora do tensor e é calculada da seguinte forma: $X_d = X - \frac{1}{3}tr(X)I$; e tr representa o traço da matriz, que é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

As expressões das funções φ_1 e φ_2 são as seguintes:

$$\varphi_1(T, D) = \frac{C_1}{3}tr(D)tr(T) + \frac{C_2}{3}tr(T_d D)$$

$$\varphi_2(T) = C_4 tr(T) + 3\sqrt{\frac{3}{2}tr\left({T_d}^2\right)}$$

Onde

$$C_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa}\right)$$

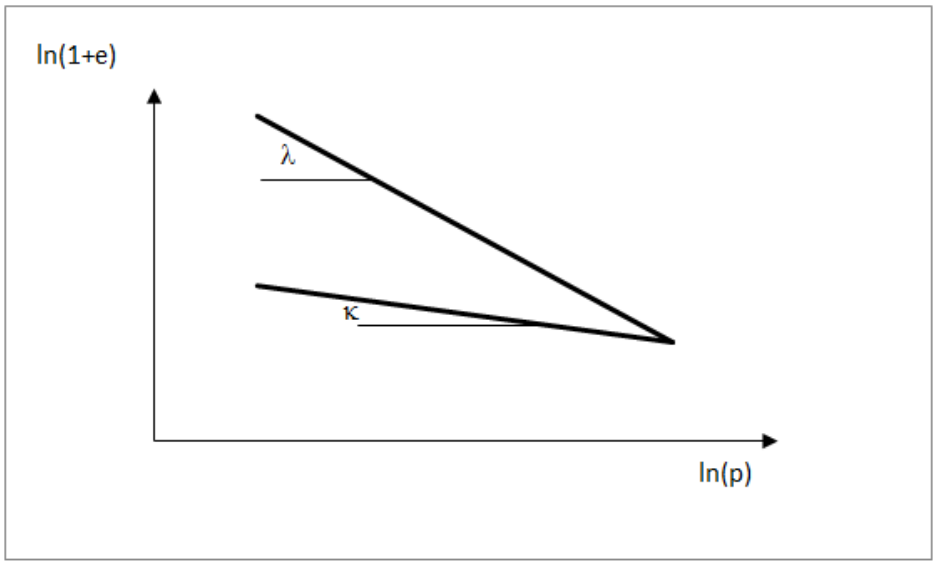
$$C_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}\frac{C_3}{M}$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}\right)$$

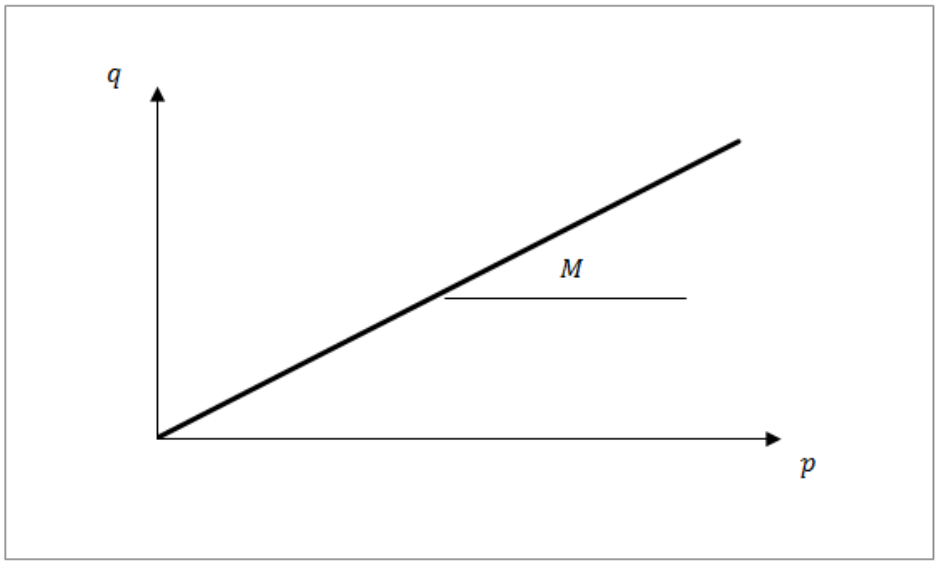
$$C_4 = -\frac{\tilde{G}}{3}$$

$$C_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\tilde{G} + 3M}{M}$$

Os parâmetros $\tilde{G}$, M, λ e κ são característicos de cada material e os seus valores podem ser calibrados a partir de ensaios de laboratório. $\tilde{G}$ é o coeficiente angular da reta tangente, na origem, à curva q/σ_r vs. γ de um ensaio triaxial do tipo CD, onde $q = \sigma_a - \sigma_r$ e $\gamma = \varepsilon_a - \varepsilon_r$, sendo o índice a =axial e r =radial. M é a inclinação da reta no gráfico q vs. p no estado crítico, sendo $p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3}$. λ e κ são as inclinações das retas no gráfico $ln(1 + e)$vs. $ln(p)$ obtido na compressão isotrópica, no carregamento e no descarregamento respectivamente (ver figura 7-1). O significado de λ será explicado com detalhe no item 11.1. Para uma interpretação física detalhada dos demais parâmetros veja Nader (2009).



(a)



(b)

Figura 7-1 – Obtenção dos parâmetros M, λ e κ. (a) Ensaio de compressão isotrópica. (b) Estado crítico.

Cabe salientar, neste momento, que estas equações foram deduzidas utilizando a convenção de sinais da Mecânica do Contínuo, quer dizer, tensões e deformações de compressão são negativas.

7.2. MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO DE NIEMUNIS

Niemunis (2002) propôs uma equação constitutiva para a visco-hipoplasticidade, obtida como generalização da equação unidimensional da viscoplasticidade (equação 6.12, capítulo 6.2). A equação 6.12 reescrita em função de $\dot{\sigma}(t)$ é a seguinte:

$$\dot{\sigma}(t) = E\left[\dot{\varepsilon}(t) - \frac{\sigma(t)-\sigma_y(t)}{\eta}\right] \tag{7.2}$$

Niemunis sugeriu a seguinte expressão:

$$\overset{o}{T} = L(T)[D - D_v] \tag{7.3}$$

Observe que a expressão 7.2 constitui uma simplificação da equação 7.3, onde $\dot{\varepsilon}(t)$, que é a velocidade de deformação num ponto, passa a ser D, que é a matriz cujas componentes são as velocidades de deformação num ponto. As parcelas $\frac{\sigma(t)-\sigma_y(t)}{\eta}$ e D_v representam a viscosidade do solo e $L(T)$ é equivalente a E.

Na expressão 7.3, $D_v = -D_r R^{-\frac{1}{I_v}} B(T)$, onde D_r e I_v foram chamados por Niemunis de razão de relaxação e de índice de viscosidade, respectivamente e $B(T) = L(T)^{-1}N(T)$. Os significados físicos destas constantes serão explicados mais adiante. Niemunis chamou R de razão de sobreadensamento e a definiu da seguinte forma:

$$R = \frac{p_e}{p_e^+}$$

Onde:

$$p_e = p_{eo}.e^{\varepsilon_v/\lambda}$$

p_{eo} é o valor de p_e no instante inicial, ε_v é a deformação volumétrica (positiva na compressão) e λ é o mesmo parâmetro da seção anterior. O valor de p_{eo} é um dado de entrada do modelo, que pode ser:

$$p_{eo} = p_o$$
$$p_{eo} > p_o$$
$$p_{eo} < p_o$$

Onde p_o é o valor de p no instante inicial, sendo p a média das tensões da diagonal principal do tensor das tensões (com o sinal trocado):

$$p = -\frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

p_e^+ é obtido da seguinte equação:

$$p_e^+ = p\left[1 + \left(\frac{q}{Mp}\right)^2\right]$$

Onde M é o mesmo parâmetro que o definido no item 7.1 e q é:

$$q = \sqrt{\frac{(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2}{2}}$$

A equação de Niemunis pode ser reescrita na forma que será utilizada nos cálculos daqui em diante, como segue:

$$\dot{T} = L(T)[D] + D_r R^{-1/I_v} N(T)$$

Como o tensor velocidade de rotação é nulo em todos os casos investigados neste trabalho, a derivada corrotacional de T torna-se igual à derivada ordinária

de T em relação ao tempo. Por isso, na expressão acima, $\overset{o}{T}$ foi substituído por $\dot{T}$.

As expressões de L e N utilizadas neste estudo são as de Nader (2003), apresentadas na seção anterior.

Para familiarizar o leitor com a utilização destas equações, no item a seguir se apresenta um exemplo de cálculo.

7.3. EXEMPLO DE CÁLCULO

Para ilustrar como devem ser realizados os cálculos com estas equações para obter as tensões em diferentes instantes, serão explicados os cálculos de todas as variáveis envolvidas na equação no instante inicial (t_o) e nos demais instantes ($t \neq t_o$).

7.3.1. DADOS DO PROBLEMA

Para começar os cálculos devem ser definidos os dados de entrada do modelo. Esses dados têm a ver com as características do material em estudo e com as condições do ensaio, tais como o estado de tensões inicial da amostra e a velocidade de deformação.

Os parâmetros do material que devem ser conhecidos são os seguintes: $\tilde{G}$, M, λ, κ, D_r e I_v. Neste estudo foram adotados, para os primeiros quatro, os valores determinados por Nader (2009) para a argila Weald, com base em ensaios realizados por Henkel (1956 e 1959): $\tilde{G} = 26$, $M = 0{,}87$, $\lambda = 0{,}056$, $\kappa = 0{,}024$. Niemunis (2002) afirma que $D_r \cong 1\%/hora$ e que $15 \leq 1/I_v \leq 30$ Para este exemplo serão utilizados os seguintes valores: $D_r = 1\%/hora$ e I_v =1/15.

Foi escolhido o caso do ensaio de compressão não-drenada (CU) como exemplo. Neste ensaio o corpo de prova é submetido a uma tensão confinante

inicial, deixando-se adensar e, a seguir, é comprimido axialmente, a volume constante.

Sendo assim, os tensores de tensão e velocidade de deformação podem ser, por exemplo, os seguintes:

$$T_o = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{kPa}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix} 1/\text{h} = cte$$

$$E_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imaginando que $p_{eo} = p_o$, temos $p_{eo} = 100\text{kPa}$.

7.3.2. CÁLCULO DAS CONSTANTES C_1, C_2, C_3, C_4 E C_5

A seguir são calculadas as constantes C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 definidas no item 7.1, que dependem dos parâmetros $\tilde{G} = 26$, $M = 0{,}87$, $\lambda = 0{,}056$ e $\kappa = 0{,}024$.

$$C_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa}\right) = -29{,}76$$

$$C_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}\frac{C_3}{M} = -87{,}08$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}\right) = -20{,}62$$

$$C_4 = -\frac{\tilde{G}}{3} = -8{,}68$$

$$C_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\tilde{G} + 3M}{M} = -40{,}28$$

7.3.3. CÁLCULO DAS FUNÇÕES $\boldsymbol{\varphi_1(\mathrm{T}, \mathrm{D})}$ E $\boldsymbol{\varphi_2(\mathrm{T})}$ NO INSTANTE INICIAL $(\boldsymbol{t_o})$

$$\varphi_{1,\mathrm{t}_0}(T_o, D) = \frac{C_1}{3} tr(D) tr(T_o) + \frac{C_2}{3} tr(T_{do} D)$$

$$\varphi_{2,\mathrm{t}_0}(T_o) = C_4 tr(T_o) + 3\sqrt{\frac{3}{2} tr\left({T_{do}}^2\right)}$$

Onde

$$T_{do} = T_o - \frac{1}{3} tr(T_o) I$$

$$T_{do} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(-300)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{do} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(T_{do} D) = 0$$

$$tr\left({T_{do}}^2\right) = 0$$

$$trT_o = T_{1_0} + T_{2_0} + T_{3_0} = -300\mathrm{kPa}$$

$$trD = D_1 + D_2 + D_3 = 0$$

Portanto

$$\varphi_{1,t_0}(T_o, D) = \frac{C_1}{3} tr(D) tr(T_o) + \frac{C_2}{3} tr(T_{do} D) = 0$$

$$\varphi_{2,t_0}(T_o) = C_4 tr(T_o) + 3\sqrt{\frac{3}{2} tr\left({T_{do}}^2\right)} = -8{,}68.(-300) = 2600\text{kPa}$$

7.3.4. CÁLCULO DE $\dot{T}$ NO INSTANTE INICIAL (t_o)

$$\dot{T}_o = L(T_o)[D] + D_r R^{-1/I_v} N(T_o)$$

Utilizando as expressões propostas por Nader (2003), apresentadas no item 7.1, temos:

$$L(T_o)[D] = \varphi_{1,t_0}(T_o, D) I + \varphi_{2,t_0}(T_o) D_d$$

$$N(T_o) = \frac{C_3}{3} tr(T_o) I + C_5 T_{do}$$

Sendo:

$$D_d = D - \frac{1}{3} tr(D) I$$

$$D_d = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} D_{1d} & D_{12d} & D_{13d} \\ D_{21d} & D_{2d} & D_{23d} \\ D_{31d} & D_{32d} & D_{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$L(T_o)[D] = \varphi_{1,\mathrm{t}_0}(T_o, D)I + \varphi_{2,\mathrm{t}_0}(T_o)D_d =$$

$$= 2600\begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -520 & 0 & 0 \\ 0 & 260 & 0 \\ 0 & 0 & 260 \end{bmatrix} kPa$$

$$N(T_o) = \frac{C_3}{3} tr(T_o)I + C_5 T_{do} = \begin{bmatrix} 2062 & 0 & 0 \\ 0 & 2062 & 0 \\ 0 & 0 & 2062 \end{bmatrix} kPa$$

Para o cálculo do R será utilizada a definição de Niemunis (2002):

$$R = \frac{p_e}{p_e^+}$$

Onde:

$$p_e = p_{eo}.e^{\varepsilon_v/\lambda}$$

sendo e o número de Euler.

A deformação volumétrica ε_v no ensaio de compressão não-drenada é nula, portanto $p_e = p_{eo}$ em todo instante do ensaio.

$$p_{e0}^+ = p_0\left[1 + \left(\frac{q_0}{Mp_0}\right)^2\right]$$

$$p_0 = -\frac{T_{1_0} + T_{2_0} + T_{3_0}}{3} = 100kPa$$

$$q = \sqrt{\frac{\left(T_{1_0} - T_{2_0}\right)^2 + \left(T_{2_0} - T_{3_0}\right)^2 + \left(T_{3_0} - T_{1_0}\right)^2}{2}} = 0$$

Portanto

$$p_{e0}^{+} = p_0$$

$$R_o = \frac{p_{e0}}{p_{e0}^{+}} = 1$$

Temos então:

$$\dot{T}_o = L(T_o)[D] + D_r R^{-1/I_v} N(T_o) =$$

$$= \begin{bmatrix} -520 & 0 & 0 \\ 0 & 260 & 0 \\ 0 & 0 & 260 \end{bmatrix} \text{kPa} + 0{,}01 \begin{bmatrix} 2062 & 0 & 0 \\ 0 & 2062 & 0 \\ 0 & 0 & 2062 \end{bmatrix} kPa =$$

$$\dot{T}_o = \begin{bmatrix} -499{,}38 & 0 & 0 \\ 0 & 280{,}62 & 0 \\ 0 & 0 & 280{,}62 \end{bmatrix} \text{kPa}$$

7.3.5. CÁLCULO DE $\dot{T}$ NOS DEMAIS INSTANTES ($t \neq t_o$)

Para calcular $\dot{T}$ nos demais instantes, os cálculos são realizados da mesma forma que nos itens anteriores, considerando que os estados de tensão e deformação do corpo de prova mudam com o tempo seguindo o método de integração numérica de Euler-Cauchy:

$$E_{t+1} = E_t + D.\Delta t$$

$$T_{t+1} = T_t + \dot{T}_t.\Delta t$$

Para observar o comportamento do modelo e ver se ele representa o esperado, em alguns ensaios é necessário realizar gráficos do tipo *índice de vazios vs. tensão*. Quando isso se fizer necessário, o índice de vazios deve ser calculado a partir da relação entre velocidade de deformação volumétrica ($\dot{\varepsilon}_v$) e variação do índice de vazios ($\dot{e}$):

$$\dot{\varepsilon}_v = -\frac{\dot{e}}{1+e}$$

Integrando a equação acima temos:

$$\varepsilon_v = ln\frac{1+e_0}{1+e}$$

Como o leitor deve ter percebido, mesmo que as equações do modelo pareçam complexas, o cálculo não o é, sendo necessário somente conhecer operações simples, tais como soma de matrizes.

Nas seções seguintes serão deduzidas as expressões em função de p e q e serão analisadas as respostas dos modelos na compressão não-drenada e na compressão isotrópica.

CAPÍTULO 8 - EQUAÇÕES DO MODELO VISCO-HIPOPLÁSTICO PARA ENSAIOS TRIAXIAIS

Nos ensaios triaxiais as tensões conhecidas são a tensão axial (σ_a) e as tensões radiais (σ_r), o sinal positivo destas tensões é no sentido indicado na figura 8-1 a seguir.

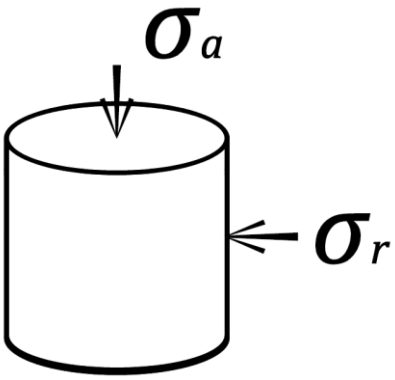


Figura 8-1 – Tensões axial e radial dos ensaios traixiais.

Tradicionalmente, no âmbito dos modelos constitutivos, os ensaios são representados em função de $p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3}$ e $q = \sigma_a - \sigma_r$. Por esse motivo, nesta tese serão apresentadas as expressões da visco-hipoplasticidade em função de $\dot{p}$ e $\dot{q}$.

Faz-se necessário obter as expressões de $\dot{\sigma}_a$ e $\dot{\sigma}_r$ para assim calcular $\dot{p} = \frac{\dot{\sigma}_a + 2\dot{\sigma}_r}{3}$ e $\dot{q} = \dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r$. Isso será obtido de:

$$\dot{T} = L(T)[D] + D_r R^{-1/I_v} N(T)$$

Como foi mencionado no capítulo 7, a convenção de sinais utilizada é a da Mecânica do Contínuo, quer dizer, tensões e deformações de compressão são negativas. Desta forma, para utilizar este modelo com os valores de tensão obtidos nos ensaios triaxiais, é necessário mudar o sinal das tensões no modelo. Portanto, os tensores de tensão e de velocidade de deformação são os seguintes:

$$T = \begin{bmatrix} -\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix}$$

Os traços dos tensores são:

$$trT = -\sigma_a - 2\sigma_r = -3p$$

$$trD = -\dot{\varepsilon}_a - 2\dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_v$$

As partes desviadoras dos tensores de tensão e de velocidade de deformação são os seguintes:

$$T_d = T - \frac{1}{3} tr(T) I$$

$$T_d = \begin{bmatrix} -\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sigma_a + 2\sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a + 2\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a + 2\sigma_r \end{bmatrix}$$

$$T_d = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_r - 2\sigma_a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_a - \sigma_r}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_a - \sigma_r}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}q \end{bmatrix}$$

$$D_d = D - \frac{1}{3} tr(D) I$$

$$D_d = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(-\dot{\varepsilon}_v) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_a + 2\dot{\varepsilon}_r & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_a + 2\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_a + 2\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_a) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r) \end{bmatrix}$$

Definindo $\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r = \dot{\gamma}$, temos:

$$D_d = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

A seguir se apresenta o cálculo de $L(T)[D]$

$$L(T)[D] = \varphi_1(T, D)I + \varphi_2(T)D_d$$

Onde:

$$\varphi_1(T, D) = \frac{C_1}{3}tr(D)tr(T) + \frac{C_2}{3}tr(T_d D)$$

e

$$\varphi_2(T) = C_4 tr(T) + 3\sqrt{\frac{3}{2}tr\left({T_d}^2\right)}$$

Sendo:

$$T_d D = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}q\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}q\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}q\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix}$$

com traço $trT_d D = \frac{2}{3}q(\dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r) = \frac{2}{3}q\dot{\gamma}$ e ${T_d}^2$:

$${T_d}^2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}q^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9}q^2 \end{bmatrix}$$

com traço $tr{T_d}^2 = \frac{6}{9}q^2 = \frac{2}{3}q^2$, temos:

$$\varphi_1(T, D) = C_1\dot{\varepsilon}_v p + \frac{2}{9}C_2 q\dot{\gamma}$$

e

$$\varphi_2(T) = -3C_4 p + 3q$$

Portanto $L(T)[D]$ é:

$$L(T)[D] = \varphi_1(T, D)I + \varphi_2(T)D_d$$

$$L(T)[D] = \left(C_1\dot{\varepsilon}_v p + \frac{2}{9}C_2 q\dot{\gamma}\right)I + (-3C_4 p + 3q)D_d$$

A seguir se apresenta o cálculo de $N(T)$:

$$N(T) = \frac{C_3}{3} tr(T) I + C_5 T_d$$

Portanto:

$$N(T) = -C_3 \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + C_5 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}q \end{bmatrix}$$

$$N(T) = \begin{bmatrix} -C_3 p - \frac{2}{3}C_5 q & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 p + \frac{1}{3}C_5 q & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 p + \frac{1}{3}C_5 q \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de $L(T)[D]$ e $N(T)$ na fórmula da visco-hipoplasticidade, temos:

$$\dot{T} = L(T)[D] + D_r R^{-1/I_v} N(T)$$

$$\dot{T} = \left(C_1 \dot{\varepsilon}_v p + \frac{2}{9} C_2 q \dot{\gamma}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-3C_4 p + 3q) \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\dot{\gamma} \end{bmatrix} +$$

$$+ D_r R^{-1/I_v} \begin{bmatrix} -C_3 p - \frac{2}{3}C_5 q & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 p + \frac{1}{3}C_5 q & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 p + \frac{1}{3}C_5 q \end{bmatrix}$$

Como $\dot{T} = \begin{bmatrix} -\dot{\sigma}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\sigma}_r \end{bmatrix}$ temos:

$$-\dot{\sigma}_a = C_1\dot{\varepsilon}_v p + \frac{2}{9}C_2\dot{\gamma}q + 2C_4\dot{\gamma}p - 2\dot{\gamma}q - D_r R^{-1/I_v} C_3 p - \frac{2}{3} D_r R^{-1/I_v} C_5 q$$

e

$$-\dot{\sigma}_r = C_1\dot{\varepsilon}_v p + \frac{2}{9}C_2 q\dot{\gamma} - C_4\dot{\gamma}p + \dot{\gamma}q - D_r R^{-1/I_v} C_3 p + \frac{1}{3} D_r R^{-1/I_v} C_5 q$$

Obtemos assim $\dot{q}$ e $\dot{p}$:

$$\dot{q} = \dot{\sigma}_a - \dot{\sigma}_r$$

$$\dot{q} = -3C_4 p\dot{\gamma} + 3q\dot{\gamma} + D_r R^{-1/I_v} C_5 q \qquad (8.1)$$

$$\dot{p} = \frac{\dot{\sigma}_a + 2\dot{\sigma}_r}{3}$$

$$\dot{p} = \frac{1}{3}\left[-3C_1\dot{\varepsilon}_v p - \frac{2}{3}C_2 q\dot{\gamma} + 3C_3 D_r R^{-1/I_v} p\right]$$

$$\dot{p} = -C_1\dot{\varepsilon}_v p - \tfrac{2}{9}C_2 q\dot{\gamma} + C_3 D_r R^{-1/I_v} p \qquad (8.2)$$

Utilizando estas equações serão analisados, nas próximas seções, os ensaios de compressão isotrópica e compressão não-drenada.

CAPÍTULO 9 - RESPOSTA DO MODELO NA COMPRESSÃO ISOTRÓPICA

No ensaio de compressão isotrópica, o estado de tensões aplicado corresponde à condição $\sigma_a = \sigma_r$, sendo iguais as deformações nos eixos axial e radial. Tem-se portanto:

$$\sigma_a = \sigma_r = p$$

$$q = 0$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r$$

$$\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\varepsilon}_v}{3}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r = 0$$

Substituindo as condições do ensaio nas equações 8.1 e 8.2 temos:

$$\dot{q} = 0 \tag{9.1}$$

$$\dot{p} = -C_1 \dot{\varepsilon}_v p + C_3 D_r R^{-1/I_v} p \tag{9.2}$$

9.1. RELAXAÇÃO

Quando submetido à deformação constante ($\varepsilon_a = \varepsilon_r = \mathrm{cte}$) no ensaio de relaxação, a velocidade de deformação é nula $\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_r = 0$. Consequentemente, a equação 9.2 passa a ser:

$$\dot{p} = C_3 D_r R^{-1/I_v} p$$

Substituindo R pela sua expressão em função de p e isolando p temos:

$$\frac{\dot{p}}{p^{1+1/I_v}} = C_3 D_r (p_e)^{-1/I_v} \tag{9.3}$$

Para obter a expressão de $p(t)$, para observar o comportamento na relaxação, pode-se integrar a equação 9.3 no tempo, com $p(0) = p_0$:

$$p(t) = \left(\frac{-I_v}{C_3 D_r p_e^{-1/I_v} t - I_v p_o^{-1/I_v}}\right)^{I_v} \tag{9.4}$$

Observe-se na equação acima que, para $t \to \infty, p \to 0$ e que, para $t = 0, p = p_o$. A seguir (figura 9-1) se apresenta a representação gráfica da função 9.4 (p vs. t):

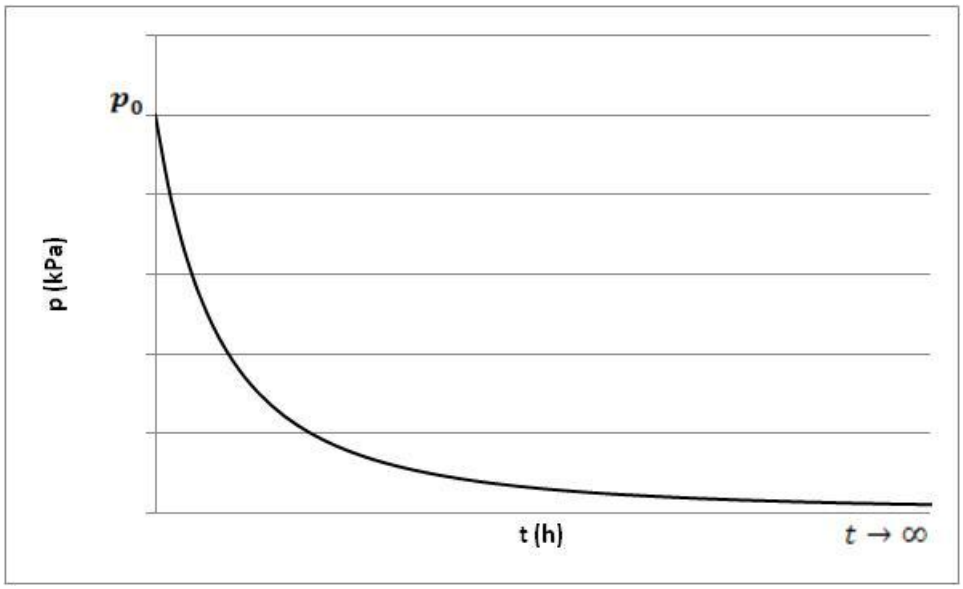


Figura 9-1 — Relaxação na compressão isotrópica

A seguir se mostra a influência que tem $R = \frac{p_e}{p}$, I_v e D_r na velocidade com que ocorre a relaxação. Os parâmetros do solo utilizados foram os apresentados no item 7.3.1.

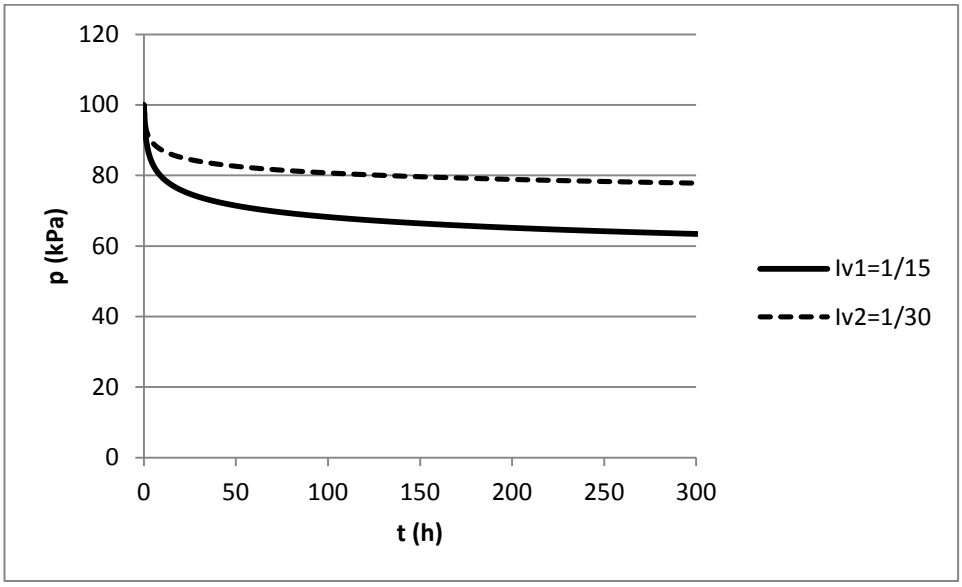


Figura 9-2 – Relaxação na compressão isotrópica para distintos valores de I_v, $R = 1$ e $D_r = 1\%$

Como se pode observar (figura 9-2), no modelo visco-hipoplástico em estudo, a relaxação ocorre mais rápido com valores de I_v maiores.

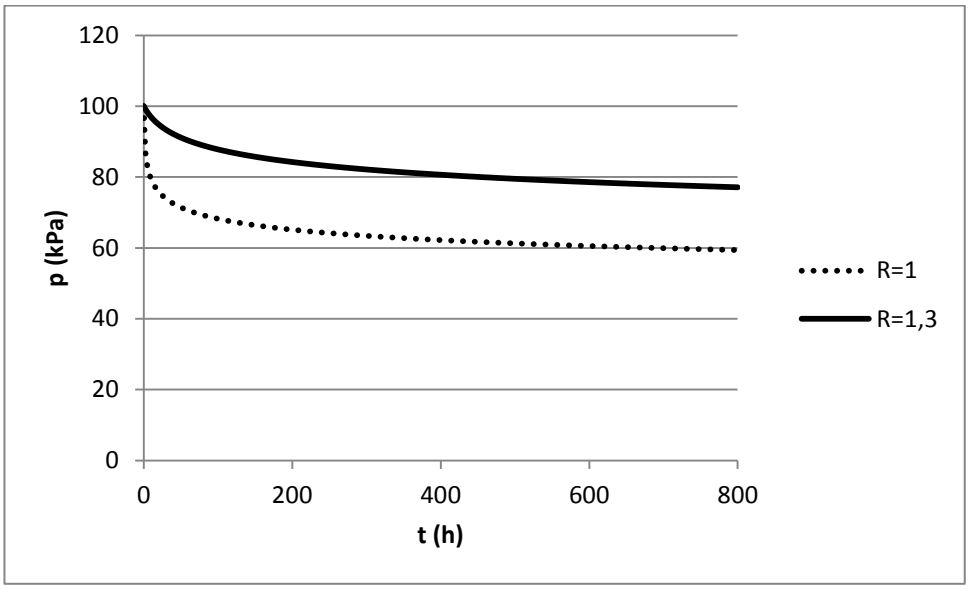


Figura 9-3 - Relaxação na compressão isotrópica para distintos valores de R, $I_v = 1/15$ e $D_r = 1\%$

A figura acima (figura 9-3) mostra que a relaxação ocorre mais rápido com valores de R menores.

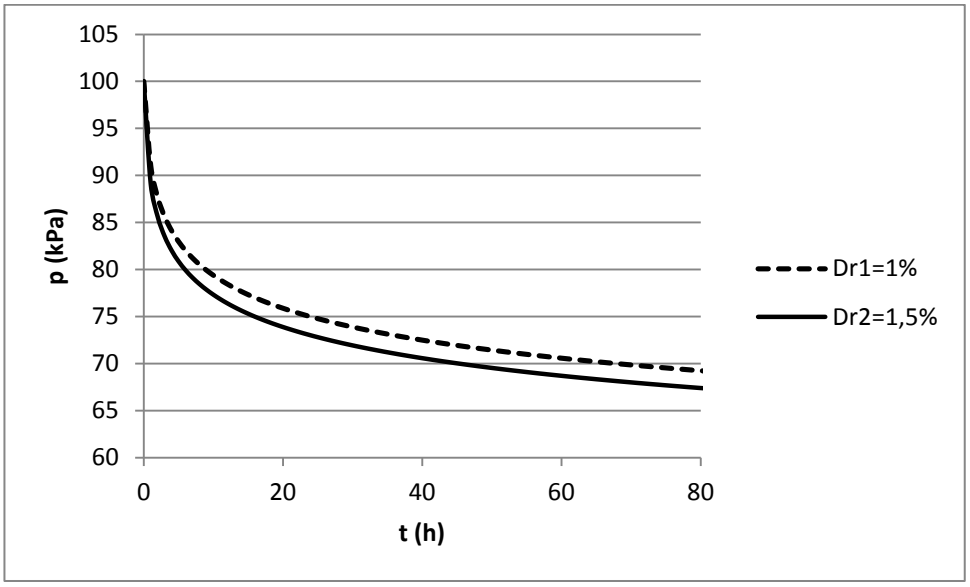


Figura 9-4 – Relaxação na compressão isotrópica para distintos valores de D_r, $I_v = 1/15$ e $R = 1$

Como se pode observar (figura 9-4), no modelo visco-hipoplástico em estudo, a relaxação ocorre mais rápido com valores de D_r maiores.

9.2. FLUÊNCIA

Quando um corpo de prova é submetido a tensão constante na compressão isotrópica ($\sigma_a = \sigma_r = p = p_0 = \text{cte}$) temos $\dot{p} = 0$. Consequentemente, a equação 9.2 passa a ser:

$$0 = -C_1 \dot{\varepsilon}_v p_0 + C_3 D_r R^{-1/I_v} p_0$$

Onde $R = \frac{p_e}{p_0} = \frac{p_{e0} e^{\varepsilon_v/\lambda}}{p_0}$. Portanto:

$$C_1 \dot{\varepsilon}_v = C_3 D_r \left(\frac{p_{e0} e^{\varepsilon_v/\lambda}}{p_0} \right)^{-1/I_v}$$

Integrando esta equação para $\varepsilon_v(0) = 0$ tem-se:

$$\varepsilon_v = \lambda I_v ln\left(\frac{\frac{C_3}{C_1} D_r \left(\frac{p_{eo}}{p_o}\right)^{-\frac{1}{I_v}} t}{\lambda I_v} + 1\right)$$

Como se pode observar na equação acima, a variação da deformação volumétrica em função do logaritmo do tempo não é linear.

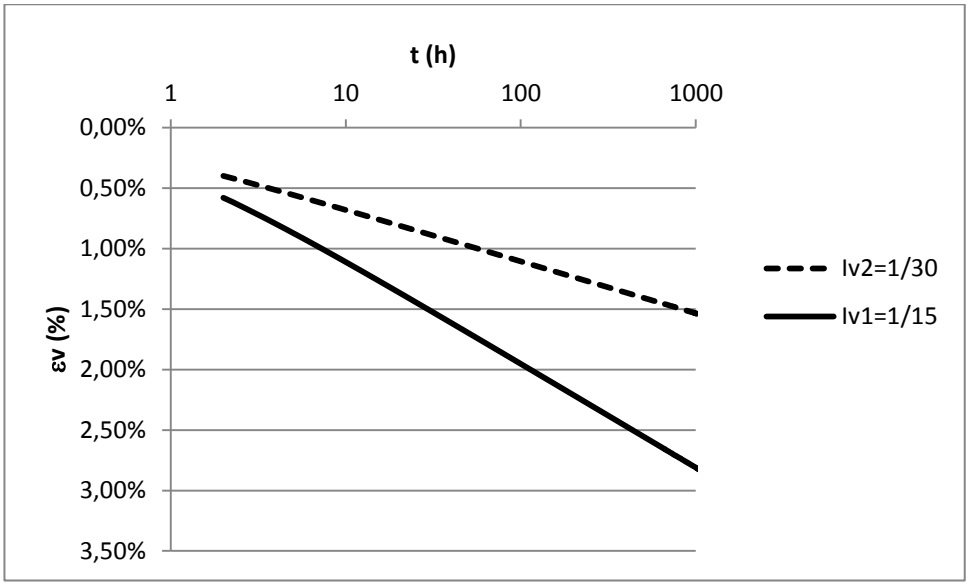


Figura 9-5 – Fluência na compressão isotrópica para distintos valores de I_v, $D_r = 1\%$ e $R = 1$

Pode-se observar na figura 9-5 que, para maiores valores de I_v, a velocidade de deformação volumétrica é maior.

A seguir se apresentam os gráficos ε_v vs. t para diferentes valores de D_r e R, mantendo-se $I_v = 1/15$.

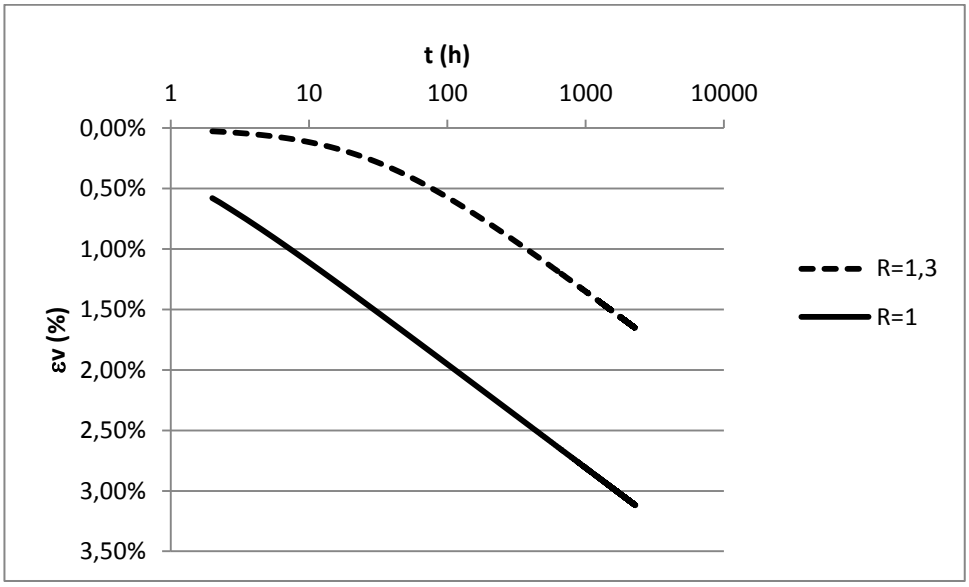


Figura 9-6 – Fluência na compressão isotrópica para distintos valores de R, $D_r = 1\%$ e $I_v = 1/15$

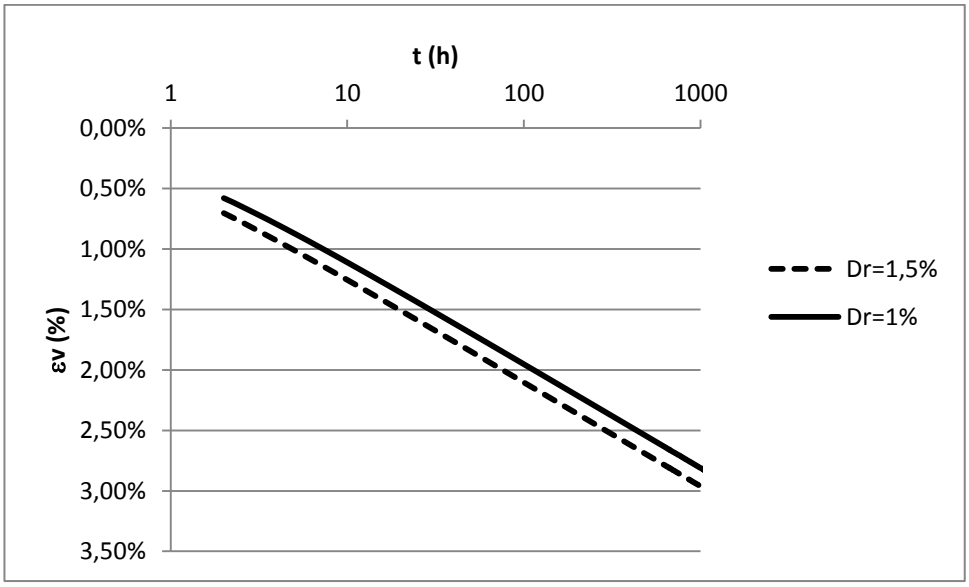


Figura 9-7 – Fluência na compressão isotrópica para distintos valores de D_r, $R = 1$ e $I_v = 1/15$

Como se pode observar na figura 9-6, a velocidade de deformação é menor quando maior é o valor de R. Na figura 9-7 pode-se observar que distintos valores de D_r não influenciam na inclinação das retas e portanto também não influenciam na velocidade de deformação volumétrica.

9.3. INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO

No item 2.1 foram apresentados os resultados de ensaios realizados por Leroueil et al. (1985), para demonstrar que a relação tensão efetiva – índice de vazios depende do tempo. Como essa dependência é devida ao comportamento viscoso do solo, a teoria em estudo deve prever essa relação, diferentemente de outras teorias que não consideram a viscosidade, tal como a hipoplasticidade. Para testar o modelo, foram simulados ensaios numa argila de Weald, partindo-se do mesmo estado de tensões e aplicando-se diferentes velocidades de deformação. Os resultados obtidos utilizando a teoria da visco-hipoplasticidade e da hipoplasticidade foram os seguintes:

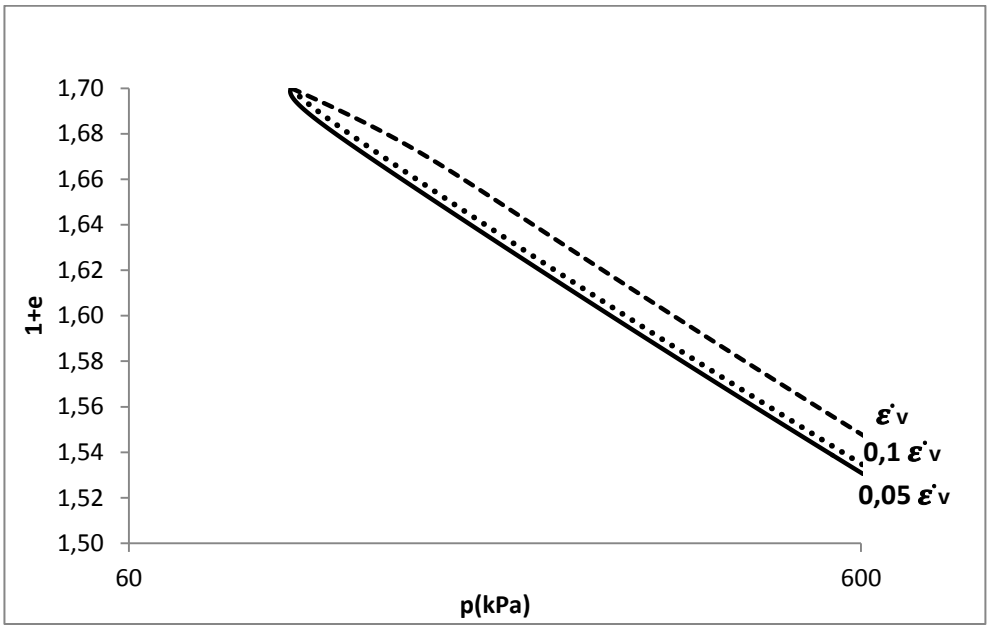


Figura 9-8 – Visco-hipoplasticidade - Influência da velocidade de deformação na relação entre o índice de vazios e a tensão aplicada ($\sigma_a = \sigma_r = p$, na compressão isotrópica)

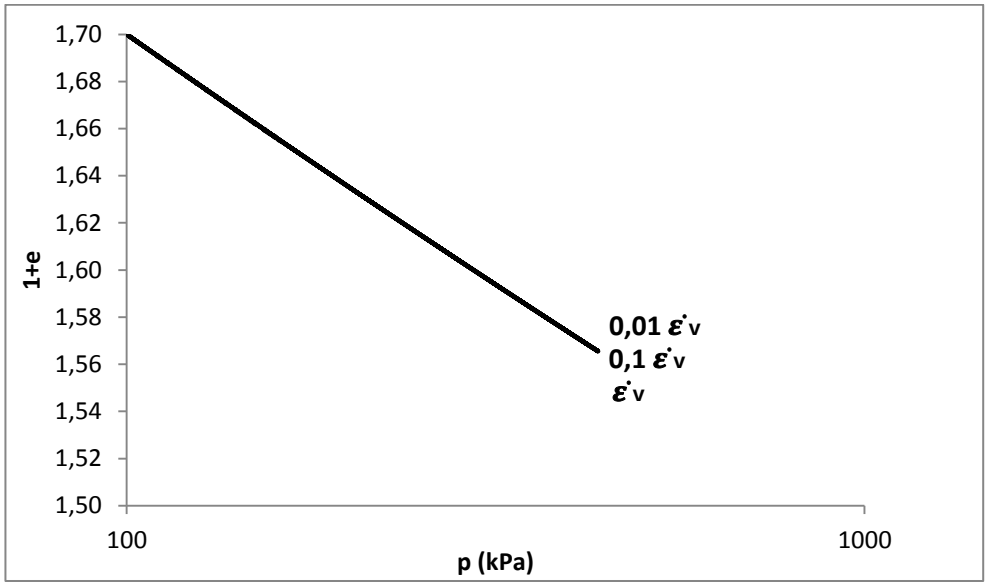


Figura 9-9 – Hipoplasticidade - Influência da velocidade de deformação na relação entre o índice de vazios e a tensão aplicada ($\sigma_a = \sigma_r = p$, na compressão isotrópica)

O resultado do modelo visco-hipoplástico foi o esperado, como mostra a figura 9-8, onde é evidente que existe influência da velocidade de deformação na relação tensão vs. índice de vazios.

Já, como mostra a figura 9-9, a hipoplasticidade não representa essa influência da velocidade de deformação, por se tratar de um fenômeno viscoso.

No item 2.1 foi apresentado o resultado de um conjunto de ensaios com velocidades de deformação distintas (figura 2-4). A teoria da visco-hipoplasticidade deve prever este tipo de comportamento. Para verificar se isso acontece, foi reproduzido o ensaio de Leroueil para uma argila de Weald (figura 9-10).

A simulação foi realizada utilizando-se os parâmetros apresentados no item 7.3.1 para uma argila de Weald, com $I_v = 1/15$, $D_r = 1\%/h$ e tensão inicial de $100kPa$. O *Ensaio 1* foi começado com uma velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}_v = 3x10^{-3}s^{-1}$, que foi mantida constante até atingir uma deformação volumétrica de $\varepsilon_v = 3{,}5\%$, onde foi mudada para $\dot{\varepsilon}_{v2} = 3x10^{-4}s^{-1} = 0{,}1\dot{\varepsilon}_v$, até $7{,}5\%$ de deformação volumétrica, quando a velocidade foi aumentada para

$\dot{\varepsilon}_v = 3x10^{-3}s^{-1}$ e novamente diminuída para $\dot{\varepsilon}_{v2}$, a partir de $10{,}5\%$ de deformação. O *Ensaio 2* procedeu completamente ao inverso. A velocidade de deformação até $3{,}5\%$ de deformação volumétrica foi $\dot{\varepsilon}_{v2} = 3x10^{-4}s^{-1}$, entre $3{,}5\%$ e $7{,}5\%$ de deformação foi $\dot{\varepsilon}_v = 3x10^{-3}s^{-1}$, entre $7{,}5\%$ e $10{,}5\%$ foi $\dot{\varepsilon}_{v2}$ e, após essa deformação, voltou a aumentar para $\dot{\varepsilon}_v$. Na figura a seguir se apresenta o resultado obtido da simulação. Como se pode observar, foi possível, com a utilização da teoria em estudo, simular o ensaio de Leroureil et al. (1985), realizado por ele para demonstrar a relação entre $p - \varepsilon_v - \dot{\varepsilon}_v$.

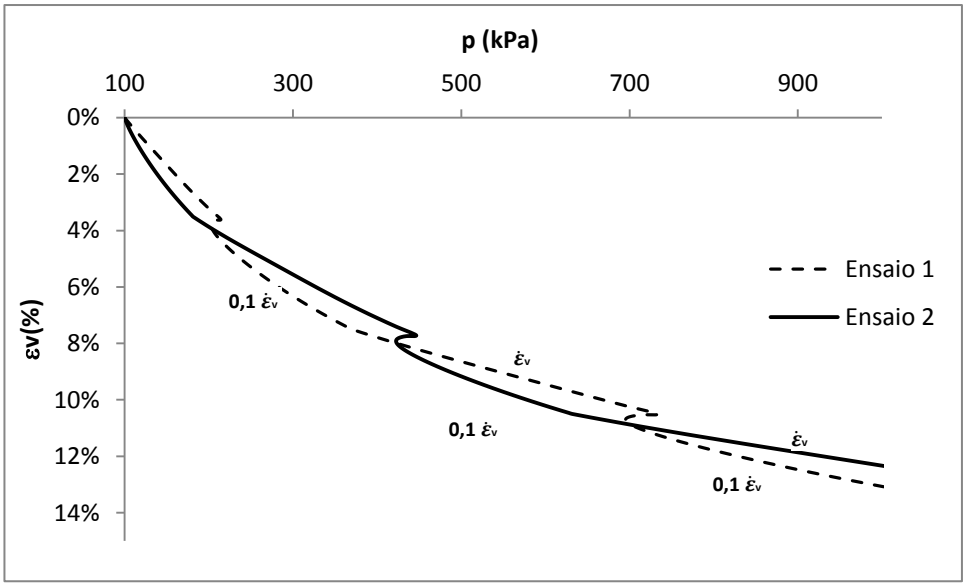


Figura 9-10 – Simulação do ensaio de Leroueil et al. (1985) para uma argila de Weald

CAPÍTULO 10 - RESPOSTA DO MODELO NA COMPRESSÃO NÃO- DRENADA

O ensaio triaxial não-drenado convencional é realizado a volume constante. Em termos de tensões totais, a tensão radial é mantida constante durante todo o ensaio, variando-se apenas a tensão axial, havendo portanto um aumento gradativo da tensão desviadora, devido ao acréscimo de carga axial. Como consequência deste carregamento, o caminho de tensões totais no plano p vs. q é uma reta com inclinação 1H:3V. A trajetória de tensões efetivas tipicamente tem a forma indicada na figura a seguir: (figura 10-1)

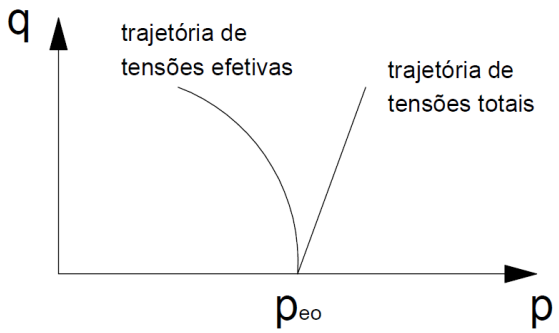


Figura 10-1 – Caminhos de tensões totais e efetivas no ensaio não-drenado convencional em amostra normalmente adensada.

Como foi dito, no ensaio de compressão não-drenada (tipo CU), a deformação volumétrica da amostra é nula ($\varepsilon_v = 0$). Tem-se portanto:

$$\dot{\varepsilon}_v = 0$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_a}{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_r = -\frac{\dot{\varepsilon}_a}{2}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r = \frac{3\dot{\varepsilon}_a}{2}$$

Substituindo as condições do ensaio nas equações 8.1 e 8.2, temos:

$$\dot{q} = -3C_4 p\dot{\gamma} + 3q\dot{\gamma} + D_r R^{-1/I_v} C_5 q \tag{10.1}$$

$$\dot{p} = -\frac{2}{9} C_2 q\dot{\gamma} + C_3 D_r R^{-1/I_v} p \tag{10.2}$$

Com o intuito de verificar se o modelo dá como resposta o esperado, foram plotadas as respostas típicas do ensaio CU. No item 2.2 foi explicado que a velocidade de deformação influencia na resistência não-drenada, sendo esse comportamento devido a fenômenos viscosos. Sendo assim, o modelo visco-hipoplástico em estudo deve prever esse comportamento, diferentemente de um modelo que não inclua a viscosidade na sua formulação (tal como o modelo hipoplástico). Com o intuito de fazer essa verificação, foi calculado o valor de q no ensaio CU em função de ε_a para diferentes valores de velocidade de distorção $\dot{\gamma}$, utilizando-se as formulações dos modelos visco-hipoplástico e hipoplástico apresentados nesta dissertação.

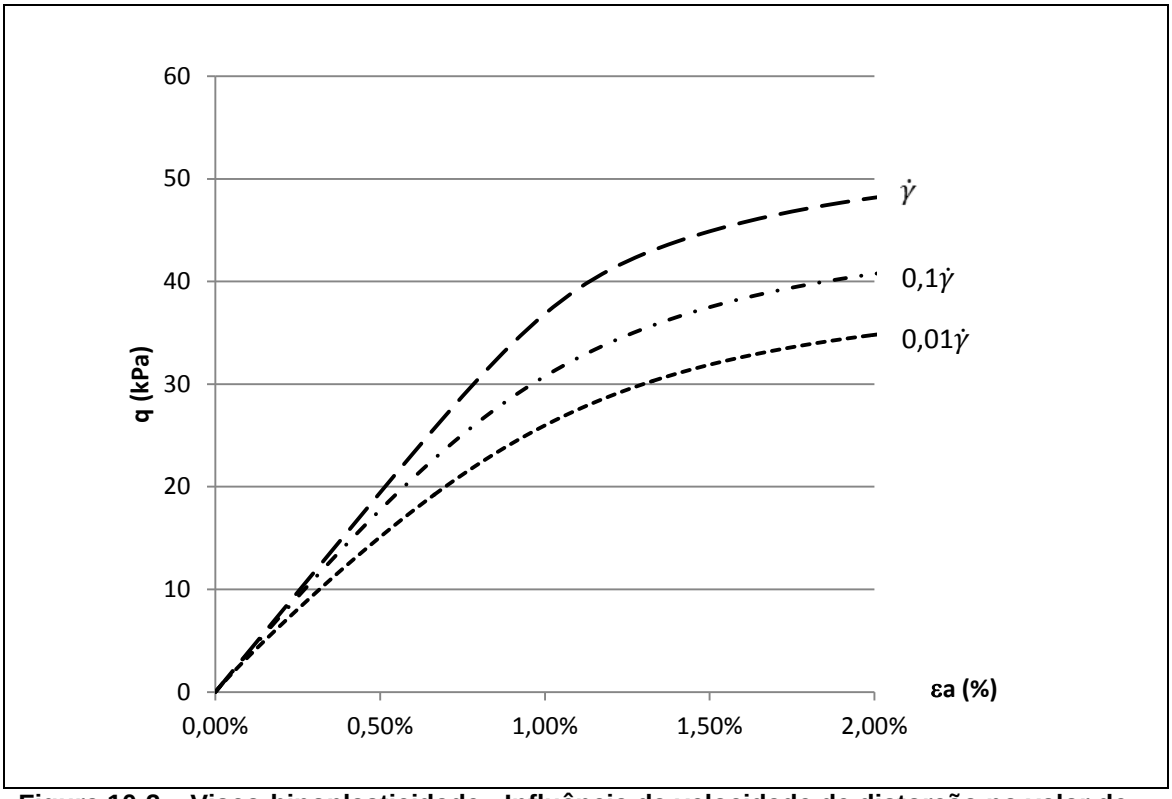


Figura 10-2 – Visco-hipoplasticidade - Influência da velocidade de distorção no valor de q no ensaio CU.

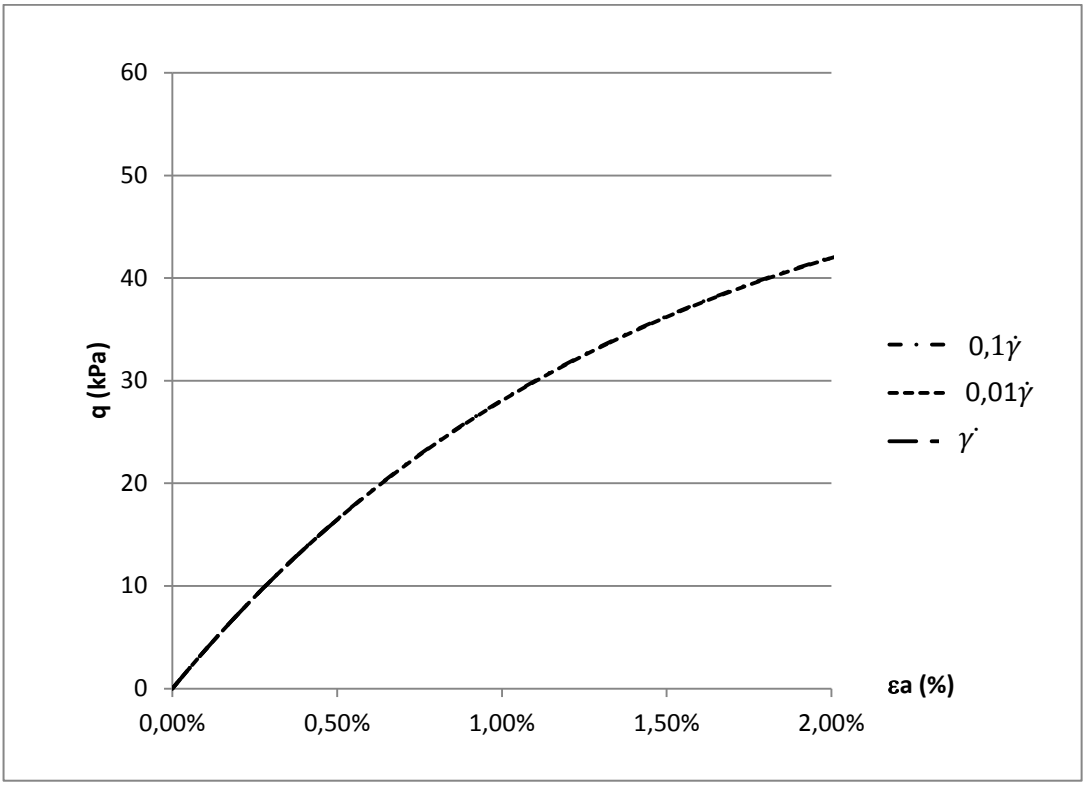


Figura 10-3 – Hipoplasticidade - Influência da velocidade de distorção no valor de q no ensaio CU.

O resultado do modelo visco-hipoplástico foi o esperado, como mostra a figura 10-2, onde é evidente que existe influência da velocidade de distorção no valor de q do ensaio CU. Esta figura é equivalente à figura 2-7.

Já, como mostra a figura10-3, a hipoplasticidade não representa essa relação, por se tratar de um fenômeno viscoso. Como esperado, as curvas são coincidentes.

A seguir (figura 10-4) se apresenta um gráfico com as trajetórias de tensão obtidas utilizando-se o modelo visco-hipoplástico em estudo:

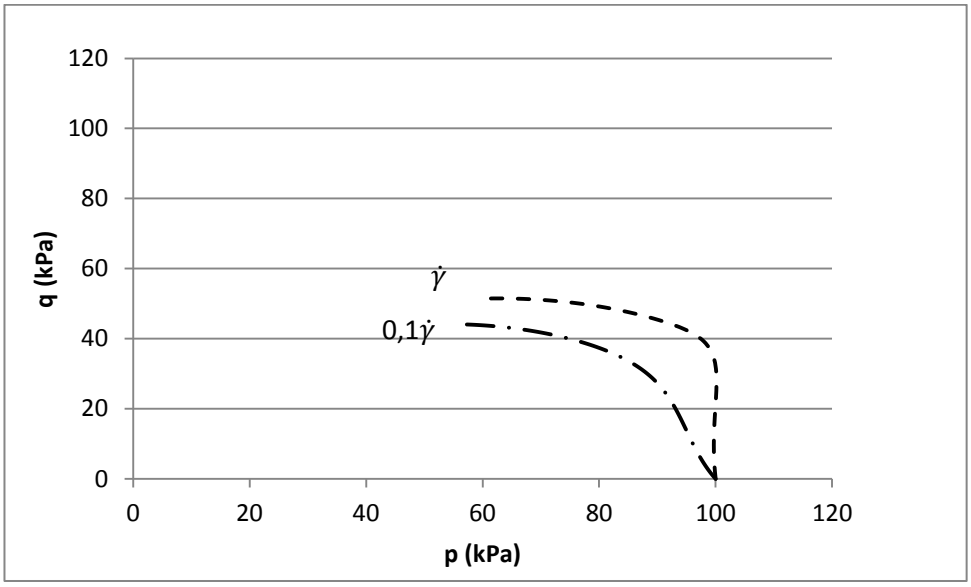


Figura 10-4 – Trajetória de tensões do ensaio CU obtida com o modelo visco-hipoplástico em estudo.

A figura 10-4 mostra que o modelo prevê maior desenvolvimento das pressões neutras para carregamentos mais lentos.

10.1. RELAXAÇÃO

Um ensaio de relaxação de tensões não-drenado pode ser realizado da mesma forma que é realizado o ensaio convencional. Após o adensamento inicial do corpo de prova devido à pressão confinante, é aumentada a tensão axial com uma velocidade de deformação constante. A partir de certo ponto é desligada a prensa, mantendo-se a deformação constante, sendo medidas a pressão neutra e a tensão desviadora (q) ao longo do tempo. O nome relaxação de tensões tem a ver com que q diminui com o tempo.

Quando submetido a deformação constante ($\varepsilon_a = \varepsilon_r = \text{cte}$) no ensaio de relaxação, a velocidade de deformação é nula: $\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_r = 0$ e $\dot{\gamma} = 0$. Consequentemente, as equações 10.1 e 10.2 passam a ser:

$$\dot{q} = C_5 D_r R^{-1/I_v} q \tag{10.3}$$

$$\dot{p} = C_3 D_r R^{-1/I_v} p \tag{10.4}$$

A seguir se mostra a influência que tem I_v e D_r na velocidade com que ocorre a relaxação (figuras 10-5 e 10-6). Os parâmetros do solo utilizados foram os apresentados no item 7.3.1.

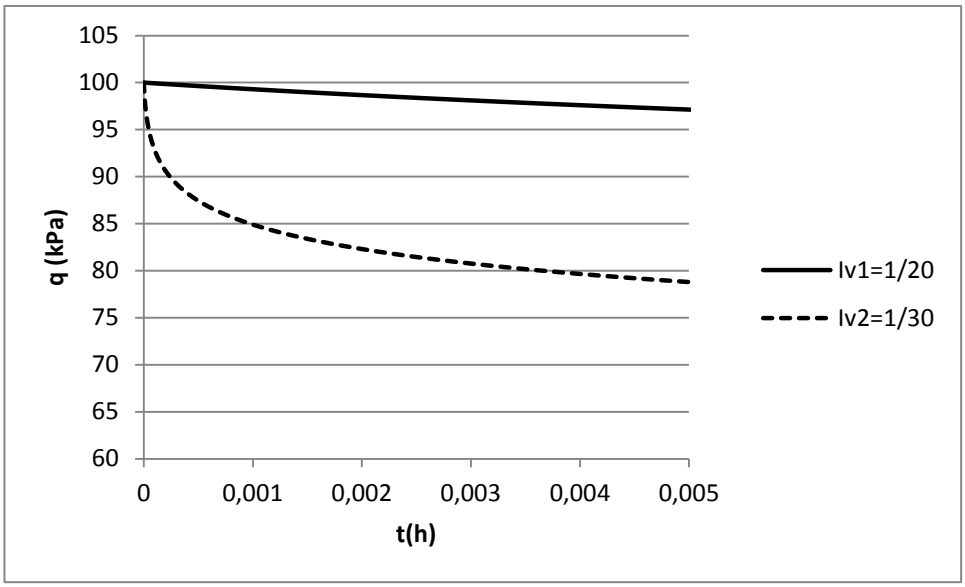


Figura 10-5 – Relaxação na compressão não- drenada para distintos valores de I_v e $D_r = 1\%/h$

Diferentemente do que ocorre no ensaio de compressão isotrópica, a relaxação ocorre mais rápido com valores de I_v menores.

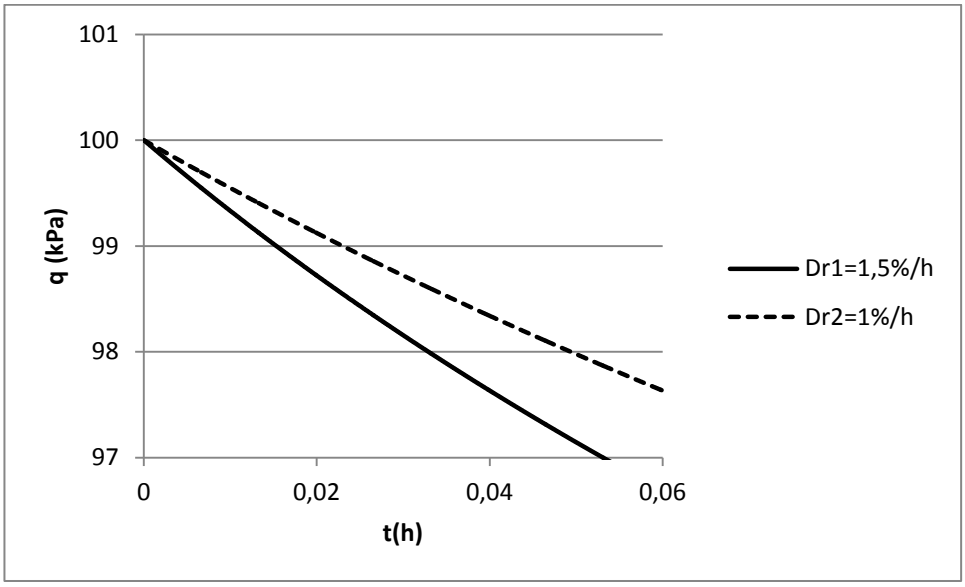


Figura 10-6 – Relaxação na compressão não drenada para distintos valores de D_r e $I_v = 1/15$

Como se pode observar, no modelo visco-hipoplástico em estudo, a relaxação ocorre mais rápido com valores de D_r maiores.

Para ver o que o modelo prevê em relação à variação do coeficiente do empuxo com o tempo, foram calculados os valores das tensões verticais e horizontais a partir dos valores de p e q obtidos das equações 10.3 e 10.4 para diferentes valores de I_v.

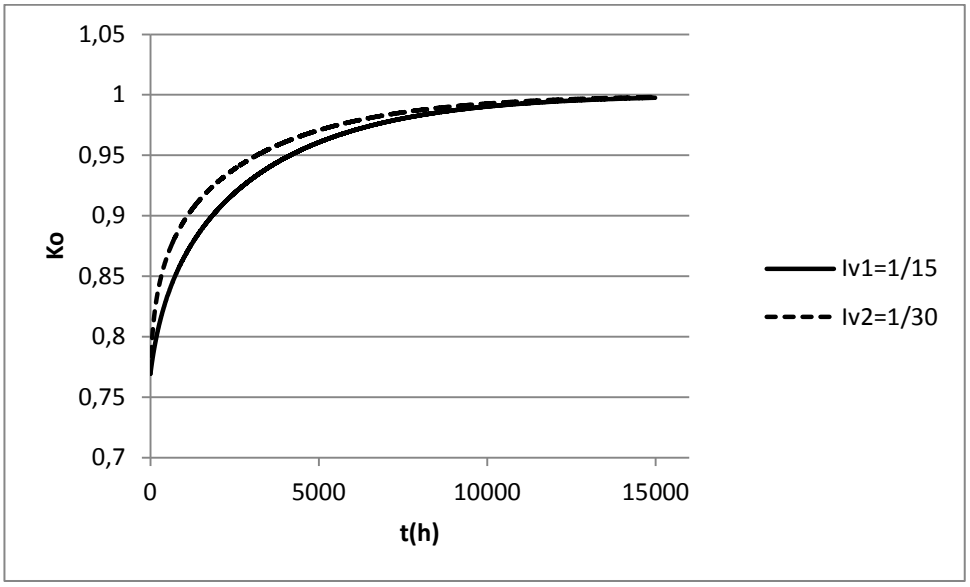


Figura 10-7 – Variação do coeficiente de empuxo no tempo, para distintos valores de I_v e $D_r = 2,5\%$

Observa-se que o modelo prevê uma tendência do valor do empuxo em repouso se aproximar da unidade quando simulado o ensaio de relaxação na compressão não drenada, como previsto por Kavazanjian e Mitchell (1984).

10.2. FLUÊNCIA

Quando submetido um corpo de prova a q constante no ensaio CU ($\varepsilon_v = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_v = 0$) as equações 8-1 e 8-2 passam a ser:

$$\dot{q} = -3C_4 p\dot{\gamma} + 3q\dot{\gamma} + D_r R^{-1/I_v} C_5 q = 0 \qquad (10.5)$$

$$\dot{p} = -\frac{2}{9} C_2 q\dot{\gamma} + C_3 D_r R^{-1/I_v} p \qquad (10.6)$$

Isolando $\dot{\gamma}$ na equação 10.5, temos:

$$\dot{\gamma} = \frac{C_5 D_r R^{-1/I_v}\, q}{3C_4 p - 3q} \qquad (10.7)$$

Como $\dot{\varepsilon}_v = 0$, $\dot{\varepsilon}_a = -2\dot{\varepsilon}_r$ e como $\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a - \dot{\varepsilon}_r$ temos $\dot{\varepsilon}_r = -\dot{\gamma}/3$.

Para simular o ensaio de fluência, foi reproduzida a seguinte situação de ensaio. Imagine-se que se dispõe de 3 amostras iguais e que as 3 são adensadas sob o mesmo estado isotrópico de tensões. Em seguida, são carregadas axialmente, sem drenagem, até diferentes valores de q e p. A partir deste ponto passa a ser restringida a deformação volumétrica ($\dot{\varepsilon}_v = 0$) e se observa o que acontece com o valor de p e com a deformação e a velocidade de deformação axiais, com $\dot{\gamma}$ calculado com a equação 10.7.

Segundo ensaios realizados por Vaid e Campanella em 1977, na argila Haney (apud Alexandre, 2006), o comportamento dessas argilas na fluência é o seguinte (figuras 10-8 e 10-9):

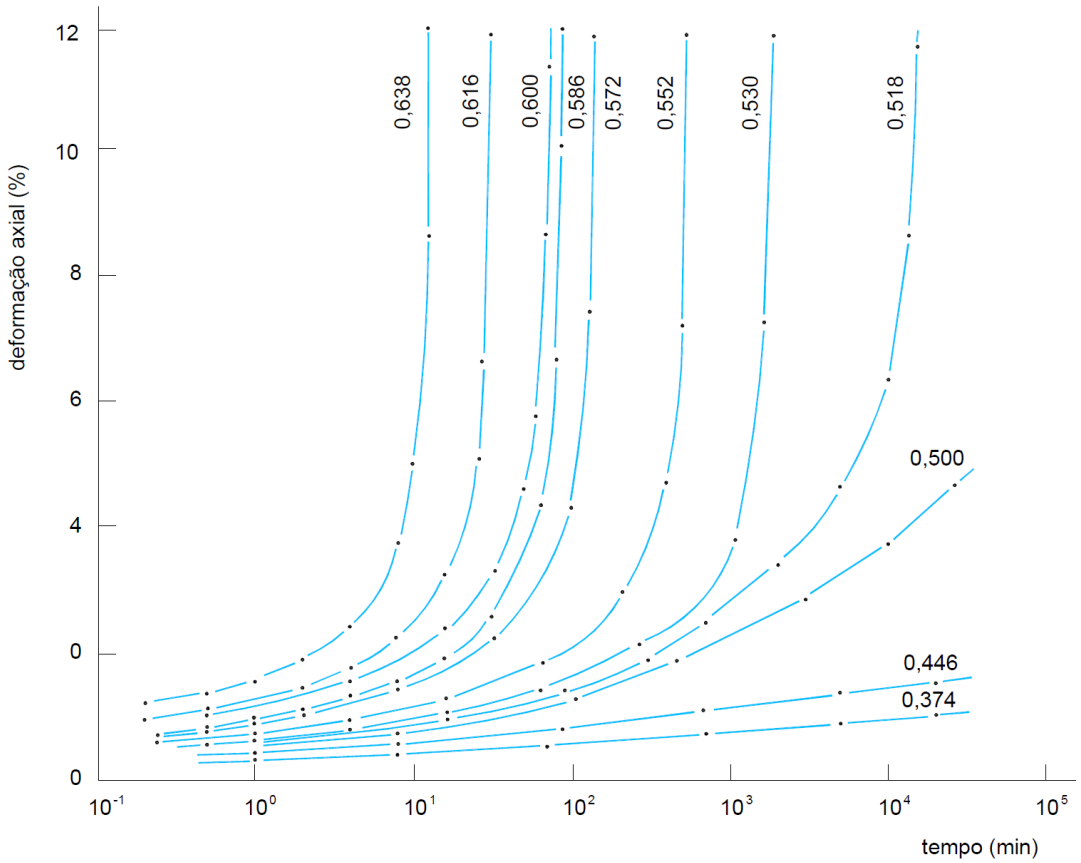


Figura 10-8 – Ensaios de fluência, Vaid e Campanella 1977 (apud Alexandre, 2006). Variação da deformação axial no tempo, para diferentes valores de $\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{\sigma_3}$.

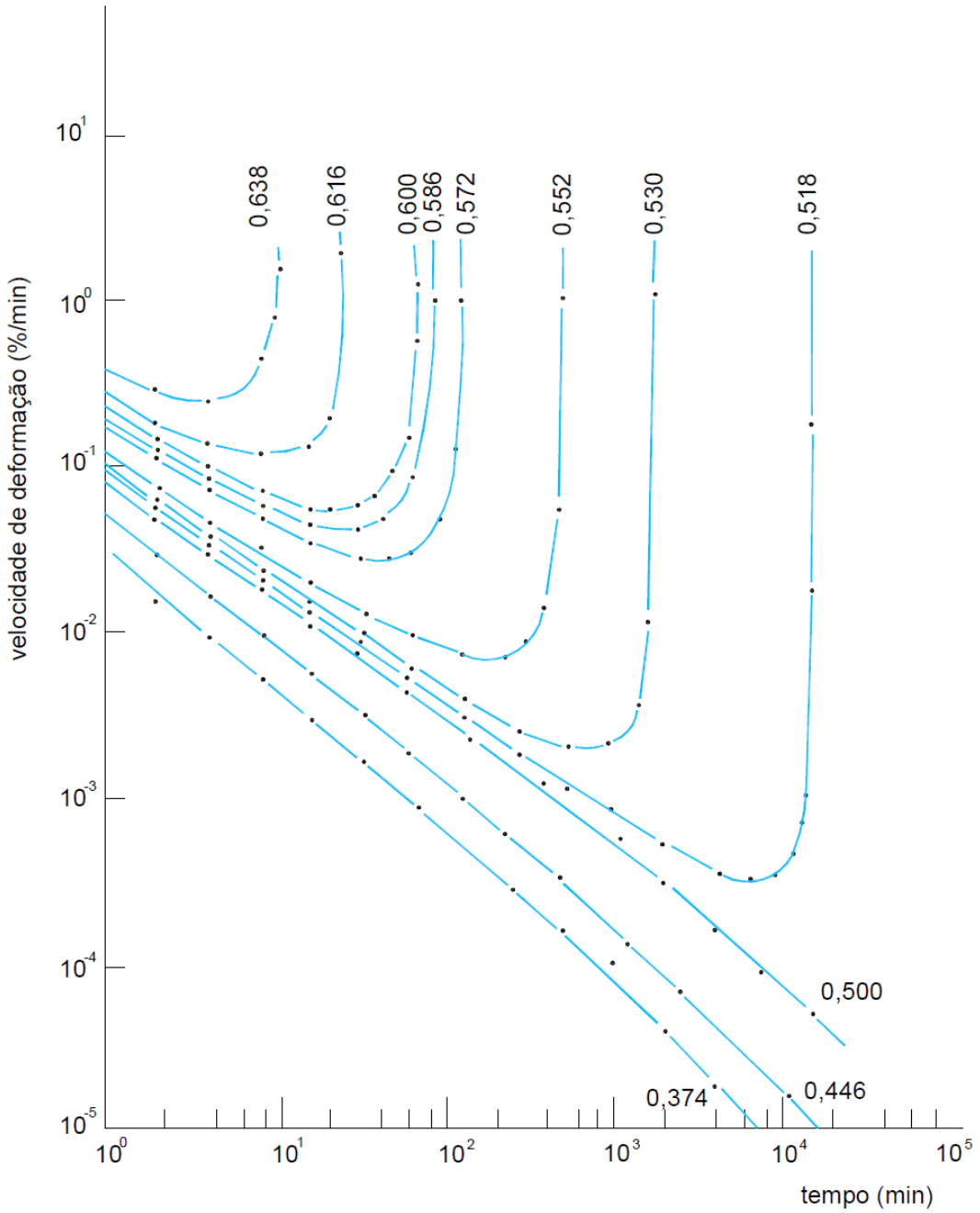


Figura 10-9 – Ensaios de fluência, Vaid e Campanella 1977 (apud Alexandre, 2006). Variação da velocidade de deformação axial no tempo, para diferentes valores de $\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{\sigma_3}$.

Procedendo da forma descrita acima, foi simulado o ensaio de fluência em três amostras com igual p_{eo}, adensadas isotropicamente a 100 kPa, e depois comprimidas axialmente, sem drenagem, até distintos valores de p e q, Foram obtidos os seguintes resultados.

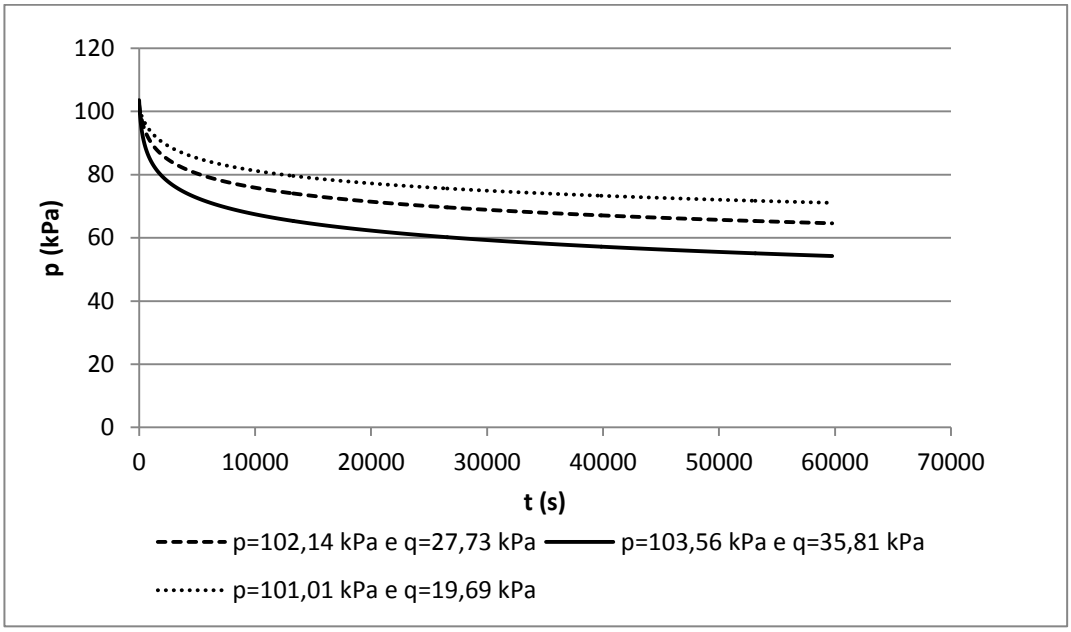


Figura 10-10 – Resposta do modelo em estudo na compressão não-drenada. Ensaio de fluência. Variação de *p* com o tempo.

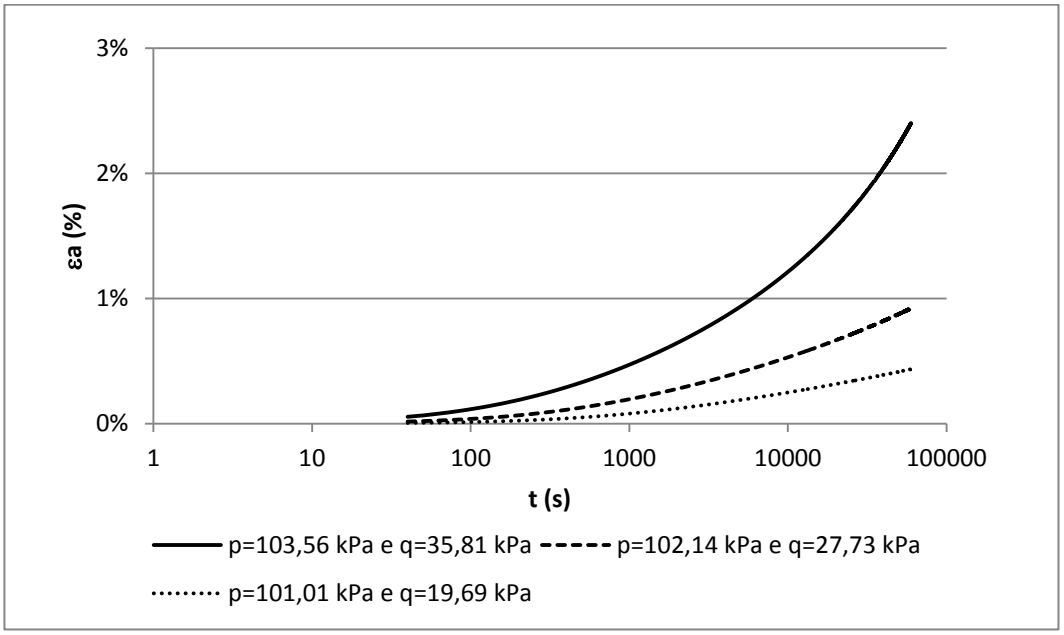


Figura 10-11 – Resposta do modelo em estudo na compressão não-drenada. Ensaio de fluência. Variação da deformação axial no tempo.

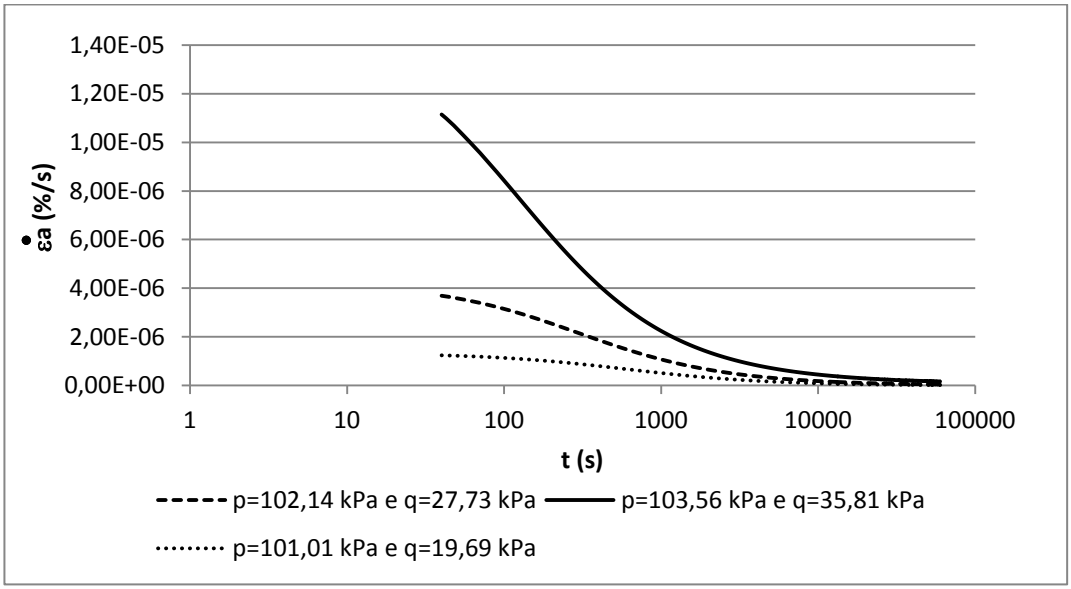


Figura 10-12 – Resposta do modelo em estudo na compressão não-drenada. Ensaio de fluência. Variação da velocidade de deformação axial no tempo.

Como se pode observar na figura 10-10 ocorre diminuição de p com o tempo (acompanhada do aumento das pressões neutras).

As figuras 10-11 e 10-12 mostram de forma qualitativa, ao menos em parte, os mesmos resultados obtidos por Vaid e Campanella (apud Alexandre, 2006) apresentados nas figuras 10-8 e 10-9, respectivamente.

CAPÍTULO 11 - INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS PARÂMETROS D_r E I_v

11.1. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA CONSTANTE D_r

A fim de interpretar o significado da razão de relaxação D_r, vamos definir uma nova constante $E_r = \sqrt{3}D_r$ e fazer um breve resumo de alguns aspectos da hipoplasticidade.

Na hipoplasticidade, as equações em $\dot{q}$ e $\dot{p}$ podem ser deduzidas da mesma forma que na visco-hipoplasticidade (explicado no item 8), a partir da expressão 7.1. Temos portanto:

$$\dot{q} = -3C_4 p\dot{\gamma} + 3q\dot{\gamma} + \frac{\sqrt{3}}{3}C_5 q\sqrt{\dot{\varepsilon_v}^2 + 2\dot{\gamma}^2}$$

$$\dot{p} = -C_1\dot{\varepsilon}_v p - \frac{2}{9}C_2 q\dot{\gamma} + \frac{\sqrt{3}}{3}C_3 p\sqrt{\dot{\varepsilon_v}^2 + 2\dot{\gamma}^2}$$

No caso da compressão isotrópica, as equações se simplificam, resultando em:

$$\dot{q} = -3C_4 p\dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = -C_1\dot{\varepsilon}_v p + \frac{\sqrt{3}}{3}C_3 p\dot{\varepsilon}_v$$

Substituindo os valores de C_1 e C_3 na expressão de $\dot{p}$, temos:

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\kappa}\right)\dot{\varepsilon}_v p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\kappa}\right)p\dot{\varepsilon}_v$$

Resultando:

$$\dot{p} = \frac{1}{\lambda}\dot{\varepsilon}_v p \qquad (11.1)$$

Substituindo a velocidade de deformação volumétrica pela sua expressão: $\dot{\varepsilon}_v = -\frac{\dot{e}}{1+e}$ e integrando com $p(0) = p_o$ e $e(0) = e_o$ temos:

$$ln\frac{1+e}{1+e_o} = -\lambda ln\frac{p}{p_o} \tag{11.2}$$

Na equação 11.2, λ é a inclinação do gráfico $ln(1+e)$vs. $ln(p)$, sendo, portanto, a inclinação da reta virgem representada nesses eixos.

A fim de encontrar uma interpretação física do parâmetro D_r, imaginemos agora um ensaio de compressão isotrópica com $R = 1$ constante, para que o valor de I_v não influencie no resultado. A equação 9.2 se simplifica e resulta em:

$$\dot{p} = -C_1\dot{\varepsilon}_v p + C_3 D_r p$$

Substituindo os valores de C_1, C_3 e $D_r = E_r/\sqrt{3}$ temos:

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\kappa}\right)\dot{\varepsilon}_v p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\kappa}\right)E_r p \tag{11.3}$$

Seguindo a mesma linha de pensamento dos parágrafos anteriores, para que R seja constante, a equação 11.3 deve pertencer à reta virgem nos eixos $ln(1+e)$vs. $ln(p)$. Portanto, deve ser válida a expressão 11.1 ($\dot{p} = \frac{1}{\lambda}\dot{\varepsilon}_v p$). Para que essa expressão seja válida $E_r = \dot{\varepsilon}_v$. Quer dizer, E_r é a velocidade de deformação volumétrica num ensaio de compressão isotrópica em que o ponto p no gráfico $ln(1+e)$ vs. $ln(p)$ segue a reta virgem quando $R = 1$. D_r é portanto, um múltiplo dessa velocidade de deformação ($D_r = \frac{\sqrt{3}}{3}\dot{\varepsilon}_v$).

11.2. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA CONSTANTE I_v

I_v foi definido por Niemunis (2002) como índice de viscosidade. Nos itens anteriores foram realizados ensaios variando os valores de R, D_r e I_v de cada vez, com o intuito de vislumbrar a influência desses parâmetros no resultado do modelo. Fazendo isso, no item 9.2 foi mostrado que, quanto maior for o valor de I_v no ensaio de fluência na compressão isotrópica, maior é a inclinação no gráfico ε_v vs. $\ln(t)$. A inclinação no gráfico ε_v vs. $\ln(t)$ no ensaio de compressão edométrica é o coeficiente de adensamento $C_{\alpha\varepsilon}$ (como foi mostrado na figura 2-3). Isto levou à suspeita de que pode existir uma relação entre $C_{\alpha\varepsilon}$ e I_v. Para verificar essa dependência, se é que ela existe, foi estudado o caso de compressão confinada (também chamado de compressão edométrica).

No ensaio de fluência na compressão confinada, o corpo de prova é submetido a uma tensão axial efetiva constante, com deformação radial nula e com drenagem permitida. Como o carregamento axial é constante temos $\dot{\sigma}_a = 0$ e $\dot{q} = -\dot{\sigma}_r$, e, como a deformação radial é impedida, temos $\dot{\varepsilon}_r = 0$ e, portanto, $\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_a$ e $\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_a$.

Substituindo estes valores nas equações 8.1 e 8.2 temos:

$$-\dot{\sigma}_r = -3C_4 p\dot{\varepsilon}_a + 3q\dot{\varepsilon}_a + D_r R^{-1/I_v} C_5 q \tag{11.4}$$

$$\frac{2}{3}\dot{\sigma}_r = -C_1\dot{\varepsilon}_a p - \frac{2}{9}C_2 q\dot{\varepsilon}_a + C_3 D_r R^{-1/I_v} p \tag{11.5}$$

Multiplicando a equação 11.4 por $\frac{2}{3}$, somando com a equação 11.5 e isolando $\dot{\varepsilon}_a$ temos:

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{-D_r R^{-1/I_v}\left(\frac{2}{3}C_5 q + C_3 p\right)}{-(2C_4 + C_1)p + \left(2 - \frac{2}{9}C_2\right)q}$$

A seguir se apresenta a variação da deformação axial com o logaritmo do tempo para diferentes valores de I_v (figura 11-1):

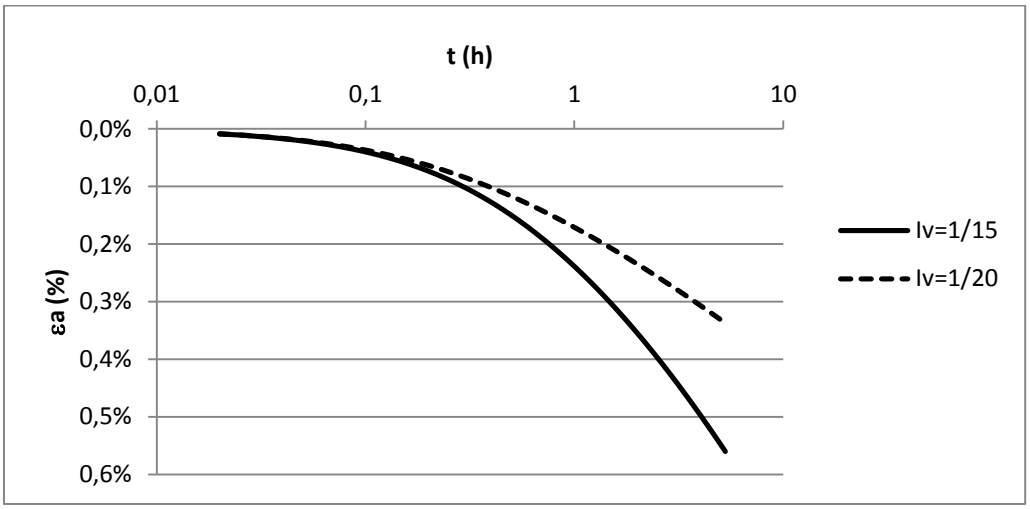


Figura 11-1 – Resposta do modelo em estudo na fluência na compressão confinada. Variação da deformação axial no tempo para diferentes valores de I_v com $R = 1$ e $D_r = 1\%/h$.

Observe-se que, para maiores valores de I_v, a inclinação da curva é maior. Portanto, quanto maior I_v, maior $C_{\alpha\varepsilon}$.

Para ver se D_r influência no resultado, foi simulado o ensaio para $R = 1$, $I_v = 1/15$, com diferentes valores de D_r (figura 11-2).

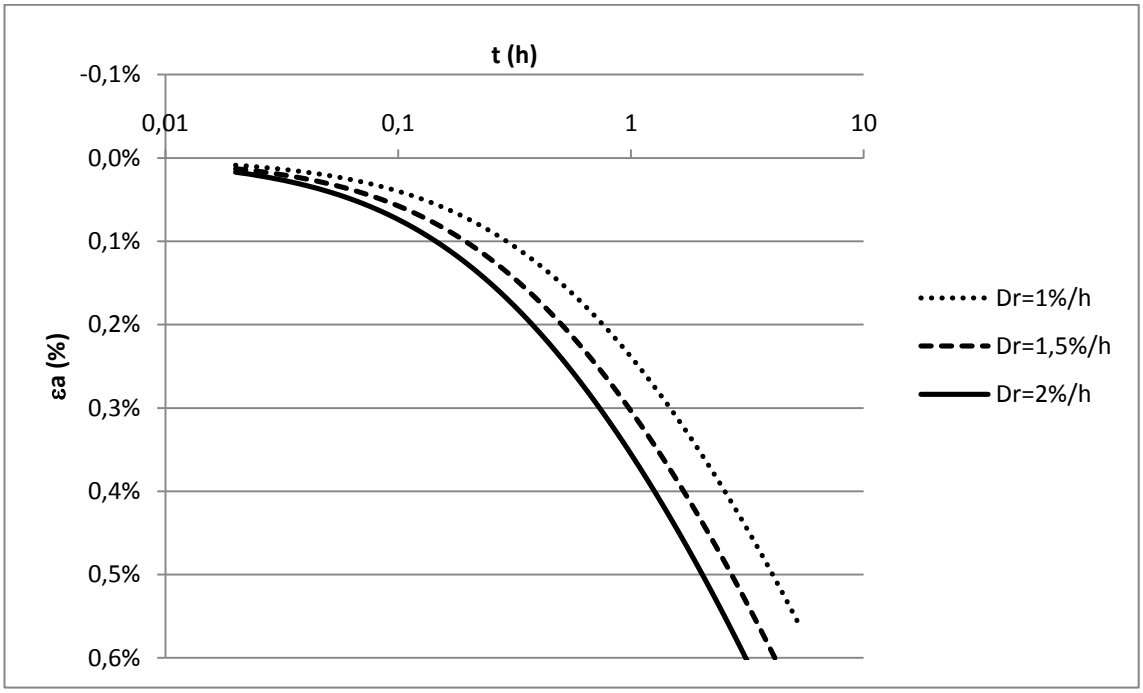


Figura 11-2 – Resposta do modelo em estudo na fluência na compressão confinada. Variação da deformação axial no tempo para diferentes valores de D_r com $I_v = 1/15$ e $R = 1$.

Observe-se que, a partir de um tempo de ensaio de aproximadamente meia hora, as curvas ficam paralelas, não influenciando no valor de $C_{\alpha\varepsilon}$.

Se os valores de I_v e $C_{\alpha\varepsilon}$ estiverem diretamente relacionados e o modelo em estudo representar bem o comportamento do solo, ele deve mostrar um aumento no valor de $C_{\alpha\varepsilon}$ para menores valores de razão de sobreadensamento. Niemunis (2002) chama a razão de sobreadensamento de R, definida como foi definida no item 7.2. Portanto, para valores de R menores, o coeficiente de adensamento $C_{\alpha\varepsilon}$ deve ser menor. A seguir se apresenta o resultado do modelo para diferentes valores de R iniciais ($R = 1$, $R = 1{,}2$ e $R = 1{,}3$) mantendo-se os valores de I_v e D_r constantes (figura 11-3).

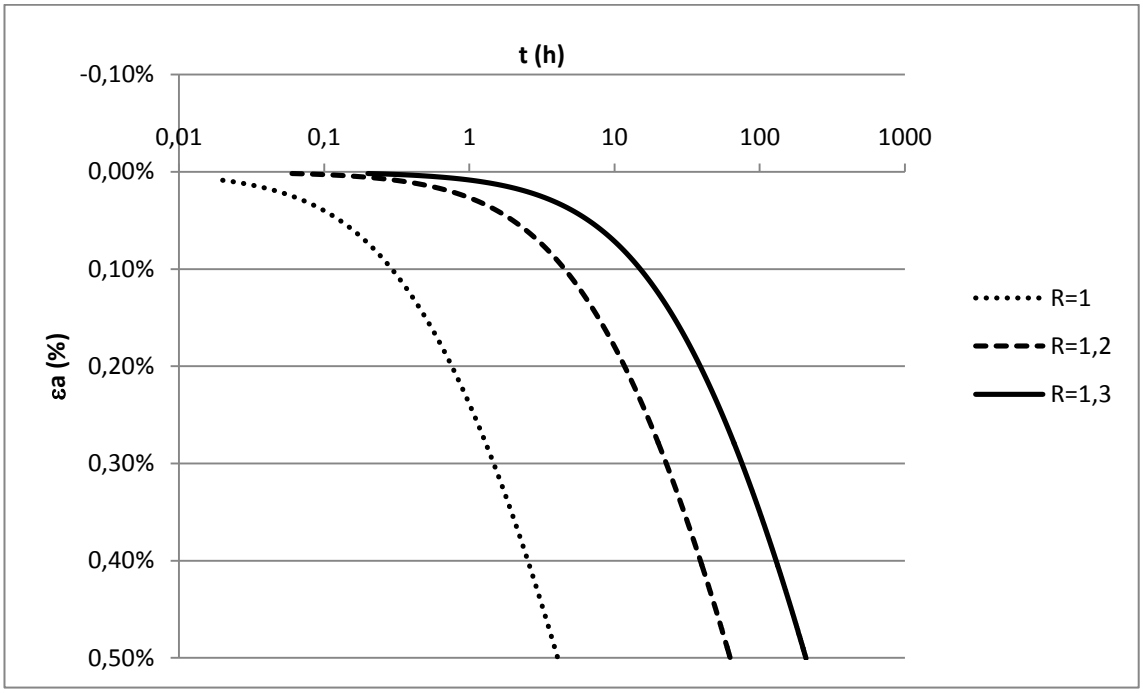


Figura 11-3 – Resposta do modelo em estudo na fluência na compressão confinada. Variação da deformação axial no tempo para diferentes valores de R iniciais com $I_v = 1/15$ e $D_r = 1\%/h$.

Observe-se que a inclinação da curva é maior para menores valores de R só no começo do ensaio; com o passar do tempo as curvas ficam paralelas. Portanto o valor de R não influencia no valor do $C_{\alpha\varepsilon}$, como era esperado.

A partir desta resposta do modelo se conclui que I_v não está diretamente relacionado com $C_{\alpha\varepsilon}$. Precisam ser realizados mais estudos para interpretar o significado físico desta constante.

CAPÍTULO 12 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS

Para entender o papel da viscosidade no comportamento do solo foram discutidos o adensamento secundário, a influência da velocidade de deformação na resistência não-drenada e a variação do coeficiente de empuxo com o tempo.

Embora o objetivo da pesquisa fosse investigar o comportamento de uma equação visco-hipoplástica, como etapa preliminar, foram apresentados os modelos reológicos simples e combinações desses elementos e deduzidas as equações de fluência e relaxação.

O modelo em estudo foi o modelo visco-hipoplástico de Niemunis (2002) com as funções constitutivas de Nader (2003). Foram apresentadas as formulações desse modelo em termos de tensores de tensão e deformação e tensores de mudança de tensão e deformação no tempo. Foram deduzidas também as expressões simplificadas desse modelo para ensaios triaxiais. Com as equações do modelo visco-hipoplástico em estudo foram reproduzidos ensaios de compressão isotrópica e compressão não-drenada para mostrar o comportamento das mesmas na relaxação e na fluência e para analisar a influência dos parâmetros do modelo na sua resposta.

Quando simulado o ensaio de compressão isotrópica com o modelo em estudo, foi mostrado que a relaxação ocorre mais rápido com valores de I_v e D_r maiores e com valores de R menores. Foi mostrado também, que no ensaio de fluência na compressão isotrópica, a velocidade de deformação volumétrica não é constante no logaritmo do tempo e que a mesma é maior para maiores valores de I_v e para menores valores de R e que o valor de D_r não influencia no seu valor.

Foi possível mostrar que o modelo em estudo consegue representar a influência da velocidade de deformação na relação entre o índice de vazios e a tensão aplicada na compressão isotrópica. Assim como foi possível simular o ensaio de Leroueil et al (1985) que mostra a relação entre $p - \varepsilon_v - \dot{\varepsilon}_v$.

Quando simulado o ensaio de compressão não-drenada, foi mostrado que o modelo representa a influência da velocidade de deformação e obtêm a trajetória de tensões esperada para este ensaio. Na simulação do ensaio de relaxação de tensões, a relaxação ocorreu com maior rapidez para maiores valores de D_r e menores valores de I_v e prevê que o empuxo em repouso se aproxima da unidade com o tempo (assunto este sobre o qual não existe um consenso entre pesquisadores).

Foi mostrado que o modelo representa qualitativamente, pelo menos em parte, os resultados dos ensaios de fluência realizados por Vaid e Campanella em 1977.

No item 11 foi mostrado que o parâmetro D_r. é múltiplo da velocidade de deformação volumétrica num ensaio de compressão isotrópica em que o ponto p_e no gráfico $\ln(1+e)$ vs. $\ln p$ segue a reta virgem quando $R = 1$.

Com o intuito de interpretar o significado físico do parâmetro I_v foi simulado o ensaio de compressão confinada. Tinha-se a suspeita de que este parâmetro fosse diretamente relacionado com o coeficiente de adensamento ($C_{\alpha\varepsilon}$), o que foi comprovado que não ocorre.

Para dar continuidade a este estudo, seria importante investigar se o modelo consegue representar o comportamento de um solo em particular, submetido aos diferentes tipos de ensaios mencionados acima. Além disso, seria interessante verificar se o modelo é capaz de prever a variação do coeficiente de empuxo com o tempo.

Podem ser feitos estudos também para verificar se os valores de D_r e I_v propostos por Niemunis (2002) são representativos das argilas presentes no Brasil, obtendo os parâmetros a partir de ensaios de laboratório para ajustar o modelo.

Outros estudos que podem ser realizados para dar continuidade a este trabalho são a modelagem de mais ensaios para interpretar fisicamente o significado da constante I_v e a relação entre $C_{\alpha\varepsilon}$ e I_v.

CAPÍTULO 13 - REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, G. F. (2006) **Contribuição ao entendimento da fluência não drenada.** Tese – Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPPE..

GUDEHUS, G. (2004). **A visco-hypoplastic constitutive relation for soft soils**. Soils and Foundations, 44, 11-25.

HENKEL, D.J. (1956). **The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear**. Géotechnique, 6: 139-150.

HENKEL, D.J. (1959). **The relationships between the strength, pore-water pressure, and volume-change characteristics of saturated clays**. Géotechnique, 9: 119-135.

KAVAZANJIAN, E, MITCHELL, J. K. (1984) **Time Dependence of lateral Earth Pressure.** Journal of Geotechnical Engineering, Vol.110, N°4.

LACERDA, W. A. (1976). **Stress-relaxation and creep effects on soil deformation.** Thesis presented to the University of California, at Berkeley, in 1976, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosofy.

LACERDA, W. A and MARTINS, I. S. M. (1985) **Discussion of time dependence of lateral earth pressure.** October, pp. 1242-1244.

LEROUEIL, S. KABAJ, M., TAVENAS, F & BOUCHARD, R. (1985) **Stress-Strain-rate relation for the compressibility of sensitive natural clays.** Geotechnique 35, No 2, 159-180.

MARTINS, I. S. M. (1992). **Fundamentos de um modelo de comportamento de solos argilosos saturados.** Tese – Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPPE.

MITCHELL, J. K. e SOGA, K. (2005) **Fundamentals of Soil Behaviour**. John Wiley & Sons, Inc.

NADER, J.J. (2003). **Analysis of a new hypoplastic equation**. International Journal of Plasticity, 19, 1445-1480.

NADER, J.J. (2009). **Curso de Hipoplasticidade Teórica**. São Paulo. Edição do Autor.

NIEMUNIS, A. (2002). **Extended hypoplastic models for soils**. Dissertation submitted for habilitation. Bochum.

PINTO, C. de Souza (2000). **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. São Paulo. Oficina de Textos.

TALARICO, M. A. (2005). **Análise de um Modelo Visco-hipoplástico para solos.** Dissertação (Mestrado em Engenharia). Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo, São Paulo.

TAYLOR, D. W. (1948). **Fundamentals of soil mechanics**. John Wiley & Sons., New York, 700 p., p. 208-405.

TERZAGHI, K e PECK, R. (1962) **Mecânica dos Solos na Prática da Engenharia**. Rio de Janeiro. Ao Livro Técnico S.A.

VAID, Y. P, e CAMPANELLA, R. G. (1977). **Time-dependent behavior of undistributed clay. Journal of Geotechnical Engineering Division, GT7, pp. 693-709.**

VIEIRA, L. O. M. (1988). **Contribuição ao Estudo do Adensamento Secundário**. Tese – Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPEE.

CAPÍTULO 14 - BIBLIOGRAFIA

GRAHAM, J., CROOKS, J. H. A., and BELL, A. L. (1983). **Time effects on the stress-strain behaviour of natural soft clays.** Géotechnique, Vol. 33, No. 3, pp. 327-340.

GONÇALVES, H. H. S. (1992)**. Análise crítica, através de modelos visco-elásticos, dos resultados de ensaios de laboratório, para previsão de recalques dos solos da baixada santista**. Dissertação (Doutorado em Engenharia). Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo.

KEEDWELL, M. J. (1984). **Rheology and Soil Mechanics**. Great Britain, Butter and Tanner.

LADD, C.C. (1973). **Settlement analysis for cohesive soils.** Research report R71-2, Soils Publication 271. Soil Mechanics Division, Department of Civil Engineering, MIT. Cambridge, Mass., p.1-76.

LAMBE, T. W, WHITMAN, R.V. (1969). **Soil Mechanics**. New York. John Wiley & Sons, Inc.

MALVERN, L. E. (1969). **Introduction to the Mechanics of a Continuous** Medium. Englewood Cliff, New Jersey. Prentice-Hall, Inc.

RUSSO, W C. (2006). **Desenvolvimento de um modelo Hipo-Plástico que represente efeitos do sobreadensamento**. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo.

SANTOS, J. P. L. (2008). **Análise de Modelos Reológicos Viscoelásticos através de Formulações Mistas em Elementos Finitos.** Dissertação

(Mestrado em Ciências de Engenharia). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

ŠUKLJE, L. (1969). Rheological Aspects of Soil Mechanics. Great Britain. John Wiley & Sons, Inc.